Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по заданию №6

«Сборка многомодульных программ. Вычисление корней уравнений и определенных интегралов.»

Вариант 9 / 4 / 1

Выполнил:
студент 119 группы
Асанова И. Н.

Преподаватель:
Иванишин В. А.

Москва
2020

Содержание

Постановка задачи

Требуется реализовать численный метод, позволяющий вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $f_1(x) = \frac{3}{(x-1)^2+1}$, $f_2(x) = \sqrt{x+0.5}$ и $f_3(x) = e^{-x}$.

Для нахождения приближенных значений вершин фигуры использовался комбинированный метод. Отрезки, содержащие точки пересечения находились аналитически.

Для решения основной задачи использовалась квадратурная формула прямоугольников, которая выглядит следующим образом:
n – чётное
$\int\limits_a^b f(x)dx \cong I_n = (f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_{n-1})$, где $h = \frac{b-a}{n}$, $f_i = f(a + (i + 0.5)h)$

Математическое обоснование

Общее расположение кривых приведено на рис. 1.

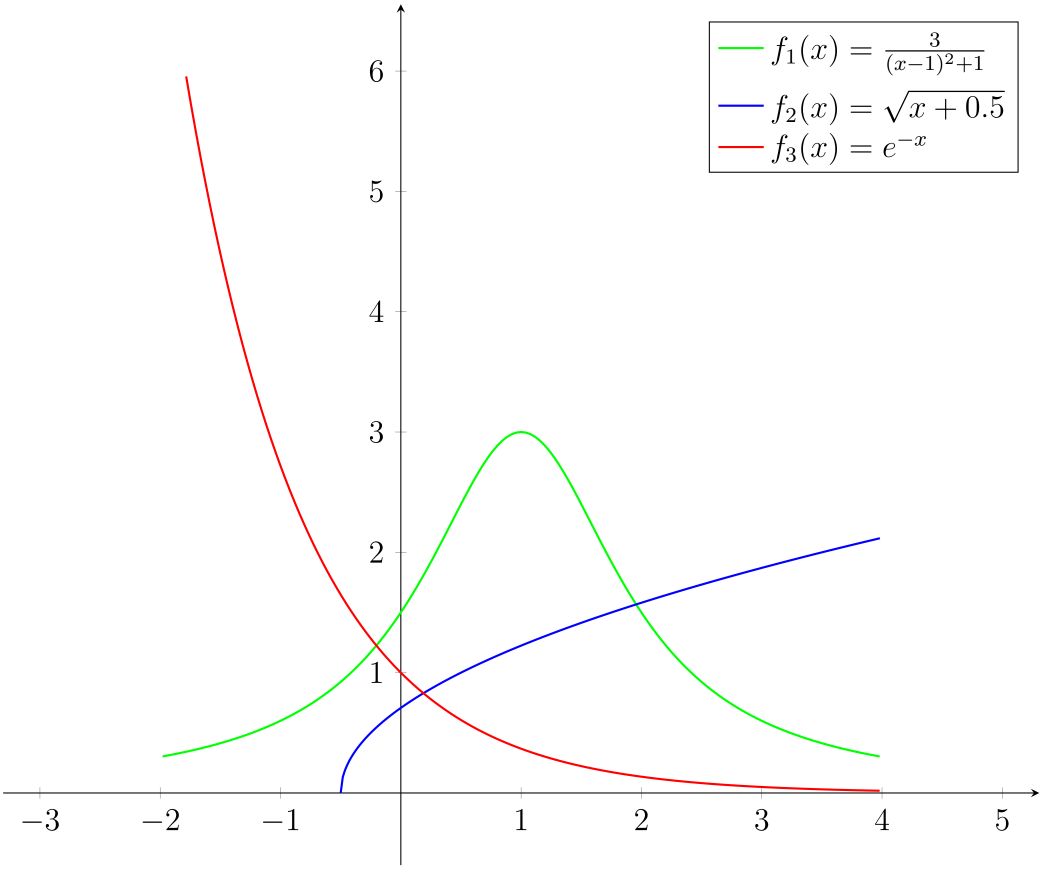

Рис. 1: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Приближеное нахождение корня с помощью метода комбинированного метода (то есть методов касательных и деления отрезка пополам) доказывается по ссылке [1]. Найдём производные функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$. Пользуясь формулами дифференцирования функций одной переменной, получаем: $\frac{df_1}{dx} = \frac{6-6x}{((x-1)^2+1)^2}$, $\frac{df_2}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+0.5}}$ и $\frac{df_3}{dx} = -e^{-x}$. Далее для данного варианта требуется определить такой сегмент, на котором существует корень и первая и вторая производные имеют разные знаки. Для нахождения таких сегментов были использованы графики, приведеннные ниже. Предварительно введём обозначения: $F_1(x) = f_1(x) - f_2(x) = \frac{3}{(x-1)^2+1} - \sqrt{x+0.5}$, $F_2(x) = f_1(x) - f_3(x) = \frac{3}{(x-1)^2+1} - e^{-x}$, $F_3(x) = f_2(x) - f_3(x) = \sqrt{x+0.5} - e^{-x}$.

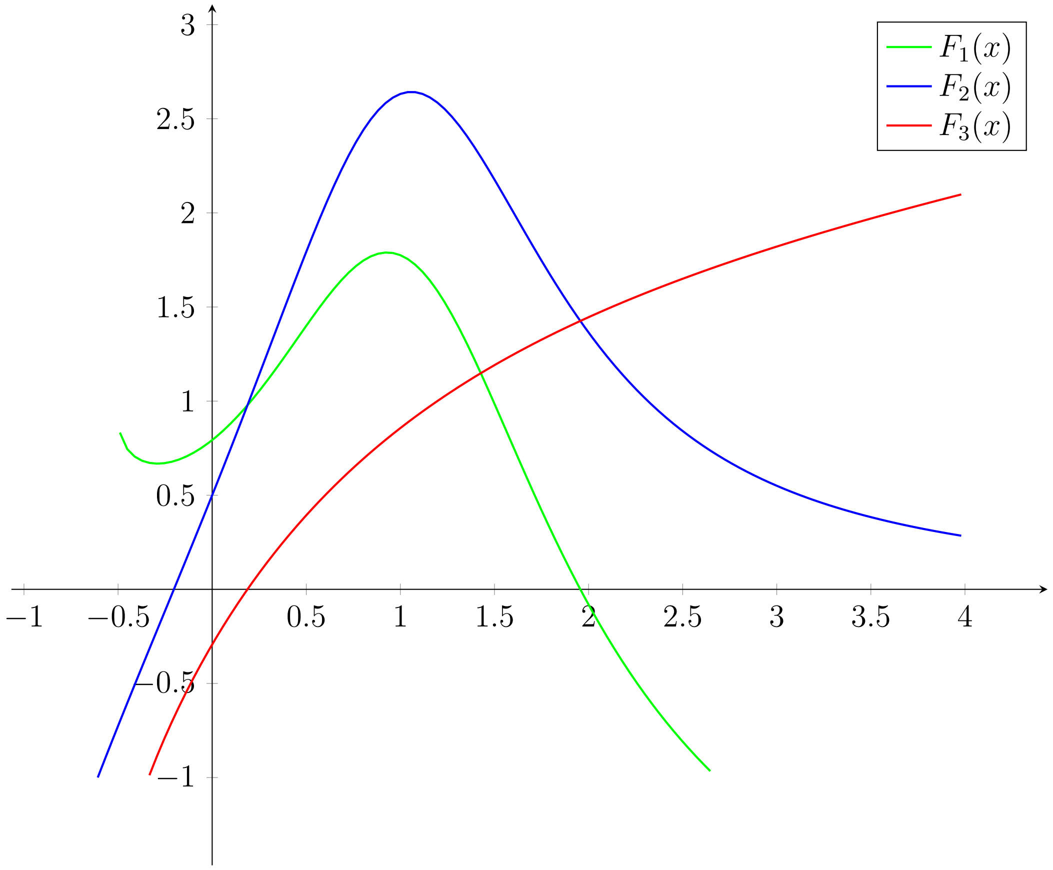

Рис. 2: графики функций $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$

Пользуясь графиком (рис. 2), делаем выводы, что для поиска корня $F_1(x) = 0$ подойдет сегмент $[1.5; 2.0]$, для $F_2(x) = 0$ – $[-0.6; 0]$ и для $F_3(x) = 0$ – $[0; 0.5]$.

Математическое обоснование квадратурной формулы прямоугольников так же находится по ссылке [1]. Поэтому перейдем к обоснованию выбора ε_1 и ε_2.

Оценим погрешность одного интеграла $I = \int\limits_a^b f(x)dx$. Точки a и b вычислены с точностью ε_1, значит, возникает некоторая погрешность в вычислении определённого интеграла I, которую можно оценить следующим образом:

$max\left\{\int\limits_{a-\varepsilon_1}^{a} f(x)dx, \int\limits_{a}^{a+\varepsilon_1} f(x)dx\right\} + max\left\{\int\limits_{b-\varepsilon_1}^{b} f(x)dx, \int\limits_{b}^{b+\varepsilon_1} f(x)dx\right\} < 2C\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, где ε_2 точность вычисления I, $C = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) + 0.5$.

Итоговая погрешность по условию должна быть меньше $\varepsilon = 0.001$, тогда, так как в ходе программы вычисляем три интеграла, получим:

$\varepsilon > 3\Delta = 3(2C\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ или $2C\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \frac{\varepsilon}{3}$

Опираясь на график (рис. 1), получаем, что $C = 3.5$. Пусть $\varepsilon_1 = 0.00001$, тогда, решая неравенство $3.5 \cdot 0.00001 + \varepsilon_2 < \frac{0.001}{3}$, приходим к тому, что $\varepsilon_2 = 0.00025$.

Результаты экспериментов

Результаты вычислений с точностью $\varepsilon_1 = 0.00001$ (таблица 1).

Кривые	x	y
$f_1(x)$ и $f_2(x)$	1.956153	1.567212
$f_2(x)$ и $f_3(x)$	0.187406	0.829100
$f_1(x)$ и $f_3(x)$	-0.203335	1.225483

Таблица 1: Координаты точек пересечения

Графическая иллюстрация результатов (рис. 3):

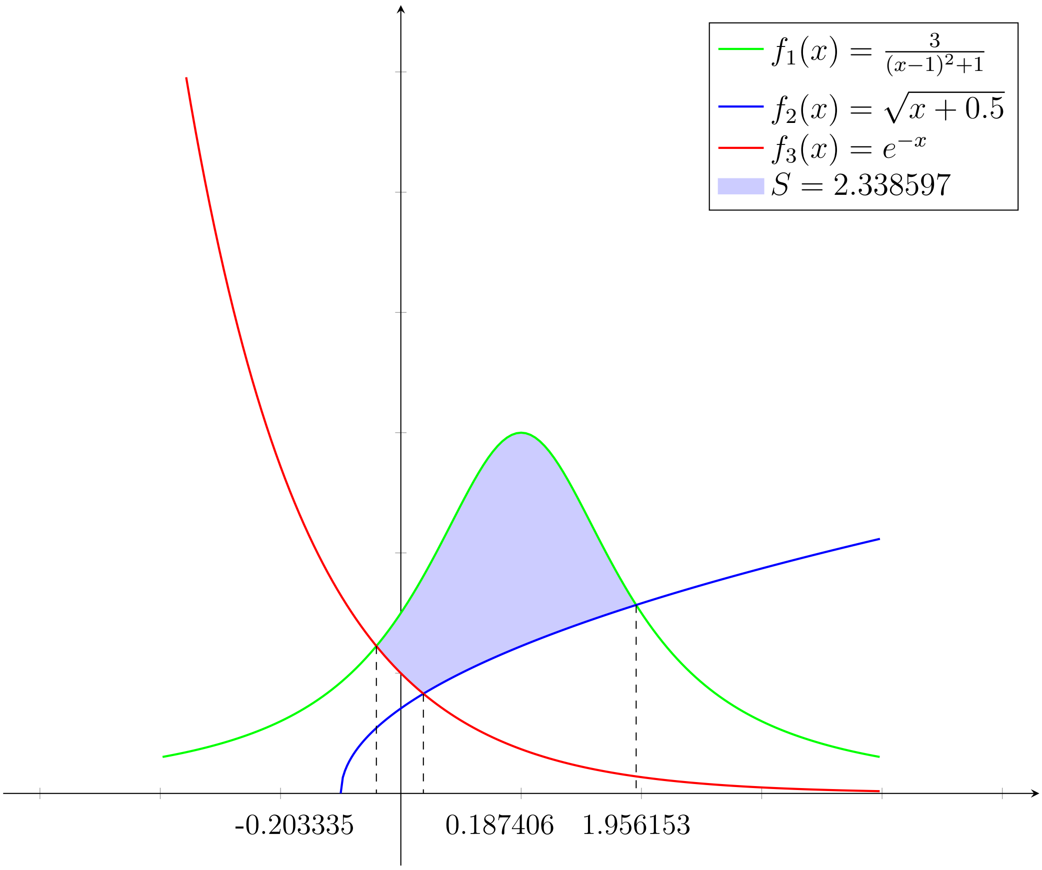

Рис. 3: Плоская фигура, ограниченная графиками заданных уравнений

Опираясь на график (рис. 3), делаем вывод, что результирующее выражение для подсчета площади имеет вид:
$S = \int\limits_{r_1}^{r_3} \frac{3}{(x-1)^2+1} dx - \int\limits_{r_1}^{r_2} e^{-x} dx - \int\limits_{r_2}^{r_3} \sqrt{x + 0.5} dx$, где r_1 – корень уравнения $f_1(x) = f_3(x)$, r_2 – корень уравнения $f_2(x) = f_3(x)$, r_3 – корень уравнения $f_1(x) = f_2(x)$

Как указано выше на рис. 3, в ходе выполнения программы был получен результат $S = 2.338597$, вычисленный с точностью $\varepsilon_2 = 0.00025$.

Структура программы и спецификация функций

Программа собирается из трёх файлов `main.c`, `externs.c` и `asmfunc.asm`.

main.c

Основной Си файл. Содержит функции:

1.
```
double root(double (*f)(double), double(*g)(double),
            double (*h1)(double), double(*h2)(double),
            double a, double b, double eps1)
```

   Данная функция принимает на вход параметры: указатели на две функции и их производные и три числа типа double a, b, eps1. Возвращает решение уравнения $f(x) = g(x)$ на сегменте $[a; b]$ с точностью $\varepsilon = eps1$, используя комбинированный метод.

2.
```
double integral(double (*f)(double), double a, double b,
                double eps2)
```

   Данная функция принимает на вход параметры: указатель на функцию, площадь под графиком которой нужно найти, и три числа типа double a, b, eps2. Возвращает определённый интеграл от $f(x)$ на сегменте $[a; b]$ с заданной точностью $\varepsilon = eps2$, используя формулу прямоугольников.

3.
```
void test(void)
```

   Данная функция отвечает за тестирование функций, которые указаны выше. Подробное описание её работы находится в главе "Отладка программы, тестирование функций".

И вспомогательные функции, которые на вход принимает число типа double и вычисляют значение кривых, которые описаны ниже, в этой точке.

$r_1 = \sqrt{x+3}$, $r_2 = 0.5x^3 - 3.25x^2$, $r_3 = -4x + 1.25$, их производные ($\frac{dr_i}{dx} = rh_i$) $rh_1 = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$, $rh_2 = 1.5x^2 - 6.5x$, $rh_3 = -4$. Вычисление значений данных функций в некоторой точке требуется для тестирования функции `root`.

$i_1 = x^2$, $i_2 = 3e^x$, $i_3 = 10x^3 - 6x^2 + 5x + 10$. Вычисление значений данных функций в некоторой точке требуется для тестирования функции `integral`.

Так же данный файл поддерживает ключи для командной строки.

1. Ключ `-help` печатает на стандартный поток вывода остальные ключи, поддерживаемые программой, с описанием к ним
2. Ключ `-test` запускает функцию `test` и позволяет отдельно протестировать функции `root` и `integral`
3. Ключ `-root` печатает на стандартный поток вывода абсциссы точек пересечения кривых
4. Ключ `-iter` печатает на стандартный поток вывода количество итераций, потребовавшихся для вычисления каждой точки пересечения кривых

externs.c

Си файл, подключаемый к `main.c`, содержит включение функций ассемблера, предназначенных для вычисления значений функций, заданных вариантом.

asmfunc.asm

Ассемблерный файл, содержит вычисление значений функций, заданных вариантом в точке x, а так же вычисление значений их производных в точке x.

Все функции обладают одинаковой сигнатурой вида double Fi(double x) или double Hi(double x), $i = 1, 2, 3$, то есть F1 находит значение в точке x для функции $f_1(x) = \frac{3}{(x-1)^2+1}$, F2 – для $f_2(x) = \sqrt{x + 0.5}$, F3 – для $f_3(x) = e^{-x}$, H1 – для $\frac{df_1}{dx} = \frac{6-6x}{((x-1)^2+1)^2}$, H2 – для $\frac{df_2}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x+0.5}}$ и H3 – для $\frac{df_3}{dx} = -e^{-x}$. Возвращаемое значение каждой функции по стандарту CDECL лежит на стеке x87.

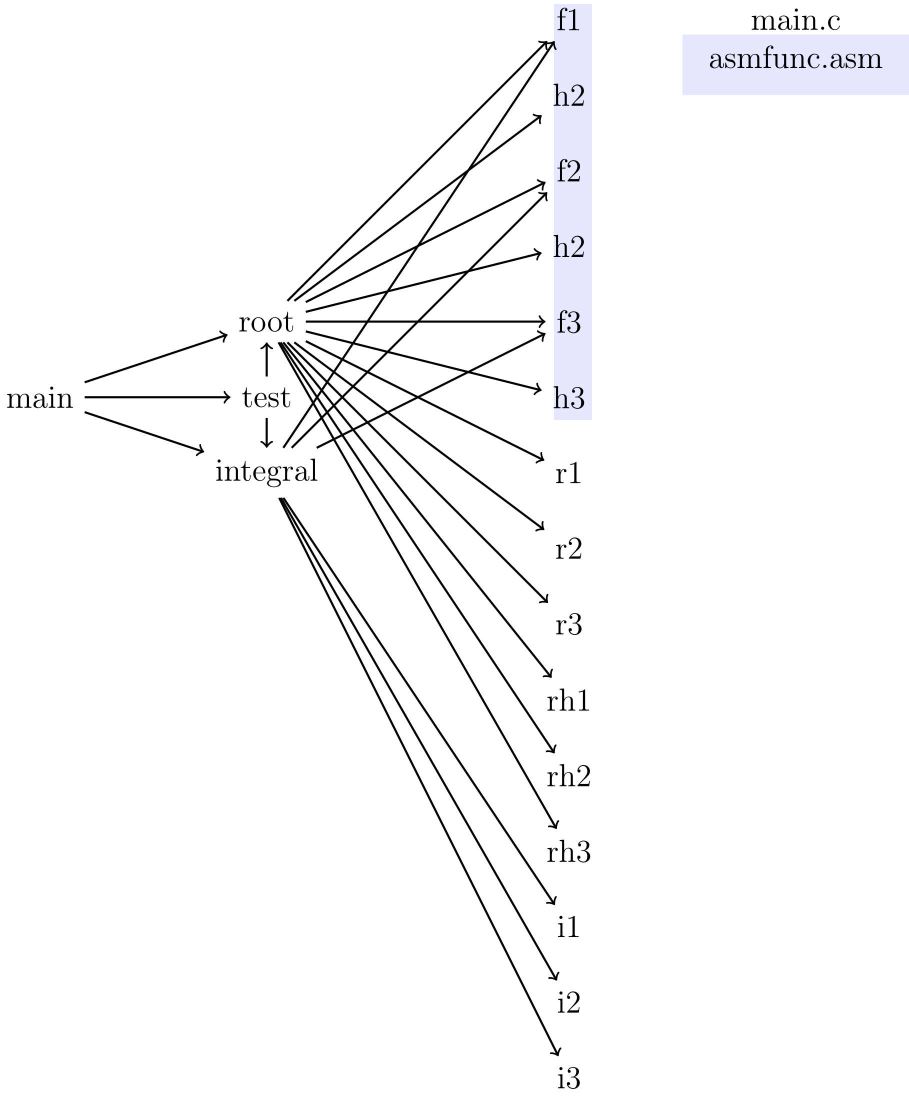

Рис. 4: Граф зависимостей модулей и функций

Зависимости между функциями и модулями изобразим графически (рис. 4).

Сборка программы (Make-файл)

Приведём граф зависимостей между модулями (рис. 5).

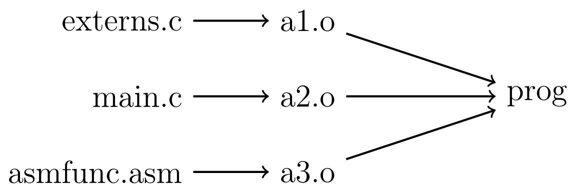

Рис. 5: Граф зависимостей между модулями при сборке

Текст Makefile:

```
all: prog

a1.o: externs.c
    gcc externs.c -o a1.o -c -m32 -lm

a2.o: main.c
    gcc main.c -o a2.o -c -m32 -lm

a3.o: asmfunc.asm
    nasm -f elf32 asmfunc.asm -o a3.o

prog: a2.o a1.o a3.o
    gcc a1.o a2.o a3.o -m32 -lm

clean: FORCE
    rm -f 1 *.o
    rm -f 1 *.out

FORCE:
```

Отладка программы, тестирование функций

За тестирование функций `root` и `integral` отвечает функция `test`, которая вызывается ключом командной строки `-test`. После набора данной команды пользователь должен осуществить выбор функции, которую хочет протестировать, или завершить тестирование. Выше описанное имеет вид:

```
To exit the test, enter the command: 0
A single test can't be completed ahead of schedule

Select the function you want to test
1       root
2       integral
0       finish
```

Тестирование `root`

Правильность функции `root` проверяется на кривых, отличных от тех, что заданы вариантом, а именно $r_1(x) = \sqrt{x+3}, r_2(x) = 0.5x^3 - 3.25x^2, r_3(x) = -4x + 1.25$. Отметим, что уравнение вида $r_2(x) = r_3(x)$ легко решить вручную, используя метод подбора, и сравнить полученные результаты, для остальных уравнений придётся воспользоваться посторонними сервисами.

После перехода к тестированию функции `root` пользователю предоставляется выбор двух функци $r_i(x)$ и $r_j(x)$, $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; i \neq j$, отрезка $[a; b]$, на котором нужно найти корень и погрешности ε. Описанное выше имеет вид (текст после символа "#"означает комментарий):

```
Enter two function numbers for which you want to solve equation Fi(x)=Fj(x)
1       sqrt(x+3)
2       0.5x^3-3.25x^2
3       -4x+1.25
#user's choice, for example: 1 2
Enter the segment at which the root is interested
I remind you that the segment must be correct
#users' choice, for example: 6.5 6.8
Enter epsilon
#user's choice, for example: 0.00001
Root in [#your segment#] is #root
#for my examples:
#Root in [6.500000, 6.800000] is 6.640813
```

В предупреждении перед вводом границ сегмента под корректными границами подразумеваются такие, что между ними функция $g(x) = Fi(x) - Fj(x)$ имеет разные знаки первой и второй производных.

В случае ввода промежутка, на котором корня не существует, пользователь получит сообщени вида:

```
On [#your segment#] this equation has no root
```

Тестирование `integral`

Правильность функции `integral` так же проверяется на кривых, отличных от тех, что заданы вариантом, а именно $i_1(x) = x^2, i_2(x) = 3e^x, i_3(x) = 10x^3 - 6x^2 + 5x + 10$. Проверка результатов программы может быть произведена вручную.

После перехода к тестированию функции `integral` пользователю предоставляется выбор одной из трёх функций $i_j(x)$, где $j = 1, 2, 3$, сегмент $[a; b]$, на котором будем искать площадь под фигурой, и точность вычислений ε. Выше описанное имеет вид (текст после символа "#"означает комментарий):

```
Enter the function under the graph of which you want to calculate area
1       x^2
2       3e^x
3       10x^3-6x^2+5x+10
#user's choice, for example: 2
Enter the integration segment
#user's choice, for example: 0 3
Enter epsilon
#user's choice, for example: 0.000001
Square under graph in [#your segment#] is #square
#for my examples:
#Square under graph in [0.000000, 3.000000] is 57.256612
```

Программа на Си и на Ассемблере

Исходные тексты программы имеются в zip–архиве, который приложен к этому отчету.

Список литературы

[1] Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Бл. Х. Математический анализ. Т. 1 — Москва: Наука, 1985.