



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра оптимального управления

**Программа для решения краевых задач методом
продолжения по параметру**

Студентка 313 группы

Асанова Илона Николаевна

Преподаватели

Киселёв Юрий Николаевич

Аввакумов Сергей Николаевич

Дряженков Андрей Александрович

Москва, 2023

Содержание

1 Метод продолжения по параметру	2
2 Постановка задачи	4
3 Реализация программы	4
3.1 Пользовательский интерфейс	4
3.1.1 Окна программы	4
3.1.2 Вывод результатов	5
4 Примеры	6
4.1 Краевая задача двух тел	6
4.2 Предельные циклы в системе Эквейлера	7
4.3 Функционал типа "энергия" для трёхкратного интегратора	8

1 Метод продолжения по параметру

Рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} = f(t, x), \quad R(x(a), x(b)) = 0, \quad t \in [a, b], \quad x \in E^n. \quad (1)$$

Здесь $f(t, x) : E^1 \times E^n \mapsto E^n$, $R(x, y) : E^n \times E^n \mapsto E^n$ являются гладкими векторными функциями. Предполагая существование решения краевой задачи (1), обсудим алгоритмические вопросы поиска её решения. Решение краевой задачи можно свести к некоторому нелинейному векторному уравнению в E^n . Выберем некоторую точку $t_* \in [a, b]$ и рассмотрим задачу Коши

$$x = f(t, x), \quad x|_{t=t_*} = p \in E^n. \quad (2)$$

Свобода выбора точки t_* может быть полезна для вычислительной практики. Пусть

$$x(t, p), \quad a \leq t \leq b. \quad (3)$$

— решение задачи Коши (2). Предполагается продолжимость решения (3) на весь отрезок $[a, b]$ для любого p . Начальное значение параметра $p \in E^n$ ищется из условий выполнения векторного граничного условия в задаче (1), т.е. искомое p является решением уравнения

$$\Phi(p) \equiv R(x(a, p), x(b, p)) = 0. \quad (4)$$

Итак, краевая задача (1) сведена к конечному векторному уравнению (4).

Далее к уравнению (4) применяется метод продолжения. Матрица $\Phi'(p)$ определяется равенством

$$\Phi'(p) = R'_x \frac{\partial x(a, p)}{\partial p} + R'_y \frac{\partial x(b, p)}{\partial p}$$

Здесь $(n \times n)$ — матрицы $R'_x(x, y)$, $R'_y(x, y)$ вычисляются вдоль решения (3),

т.е. при $x = x(a, p)$, $y = x(b, p)$. Введём обозначение

$$X(t, p) \equiv \frac{\partial x(t, p)}{\partial p}$$

для $(n \times n)$ — матрицы производных решения (3) по начальному условию. Матрица $X(t, p)$ определяется дифференциальным уравнением в вариациях

$$\dot{X} = AX, \quad X|_{t=t_*} = I, \quad a \leq t \leq b,$$

где $A = A(t, p) \equiv f'_x(t, x)|_{x=x(t,p)}$ есть $(n \times n)$ —матрица, I —единичная матрица. Основная задача Коши схемы продолжения по параметру имеет вид

$$\text{IVP: } \frac{dp}{d\mu} = -[\Phi'(p)]^{-1}\Phi(p_0), \quad p(0) = p_0, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(p) &= R(x(a, p), x(b, p)), \\ \Phi'(p) &= R'_x(x(a, p), x(b, p))X(a, p) + R'_y(x(a, p), x(b, p))X(b, p). \end{aligned}$$

Для одновременного вычисления векторной функции $x(t, p)$ и матричной функции $X(t, p)$ может быть записана следующая векторно-матричная задача Коши

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x), & x|_{t=t_*} = p, \\ \dot{X} = f'_x(t, x)X, & X|_{t=t_*} = I, \quad a \leq t \leq b. \end{cases} \quad (6)$$

Задачу Коши (5) будем называть внешней задачей, задачу Коши (6) — внутренней задачей. Таким образом, предлагается итерационный процесс для решения рассматриваемой краевой задачи (1) на основе внешней задачи (5) и внутренней задачи (6). На одном шаге итерационного процесса выполняется решение внешней задачи (5), в ходе решения которой происходит многократное обращение к решению внутренней задачи Коши (6) при различных значениях параметра p .

2 Постановка задачи

В рамках курса «Практикум на ЭВМ» была поставлена задача изучить метод продолжения по параметру для решения краевых задач и написать программу на языке *Python*, реализующую данный метод. Программа была реализована в среде *Pycharm Community*. Для решения внутренней и внешней задачи используется явный метод Рунге-Кутта 3 порядка аппроксимации.

3 Реализация программы

3.1 Пользовательский интерфейс

3.1.1 Окна программы

При запуске программы открывается окно "Help":

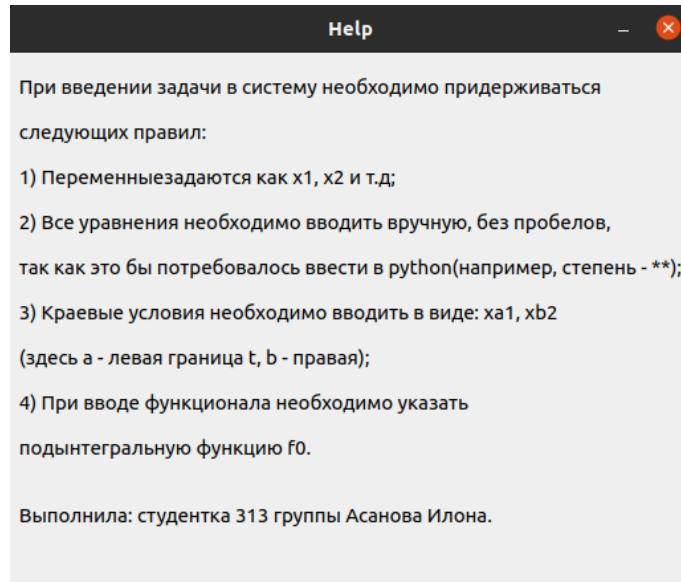


Рис. 1: Окно "Help"

Данное окно поясняет некоторые особенности работы с вводом данных.

После закрытия окна "Help" пользователь видит основное окно программы, состоящее из четырех блоков.

Рис. 2: Основное окно программы

В данном окне пользователь вводит систему дифференциальных уравнений с краевыми условиями, концы отрезка решения задачи t_0 и t_1 , точку t^* , начальный вектор p_0 .

Кнопка "Вычислить" запускает решение задачи. Все вычисления выполняются согласно алгоритму, описанному выше. Пользователь может отслеживать время выполнения программы с помощью "Прогресс бара".

Дополнительно можно посчитать функционал $J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x) dt$, где f^0 задает пользователь. Значение определенного интеграла находится методом правых прямоугольников.

Ниже представляется возможность выбрать оси координат, на которых будет изображен график решения задачи.

3.1.2 Вывод результатов

Результаты работы программы представлены в виде графиков, а такие данные, как вектор начальных условий в момент времени t^* и значение искомого функционала, выводятся в консоль пользователя.

4 Примеры

4.1 Краевая задача двух тел

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, & x_1(0) = a_1, \quad x_1(T) = b_1, \\ \dot{x}_2 = x_4, & x_2(0) = a_2, \quad x_2(T) = b_2, \\ \dot{x}_3 = -x_1(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}, \\ \dot{x}_4 = -x_2(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}. \end{cases}$$

Для данных

$$T = 7, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 0, \quad b_1 = 1.0738644361, \quad b_2 = -1.0995343576,$$

при выборе параметра $t_* = 0$, для начальных приближений

$$p_01 = [2, 0, 0.5, -0.5] \quad \text{и} \quad p_02 = [2, 0, -0.5, 0.5],$$

были получены два разных решения со следующими векторами начальных условий в момент времени t_0 :

$$ans1 = [2, 0, -0.221952928, 0.514140482],$$

$$ans2 = [2, 0, 0.45147894, -0.29567914].$$

Графики построены при $p_0 = [2, 0, 0.5, -0.5]$.

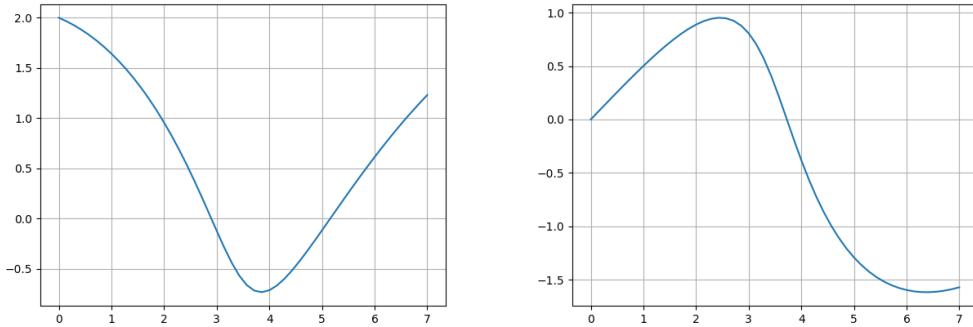


Рис. 3: Графики $x_1(t), x_2(t)$

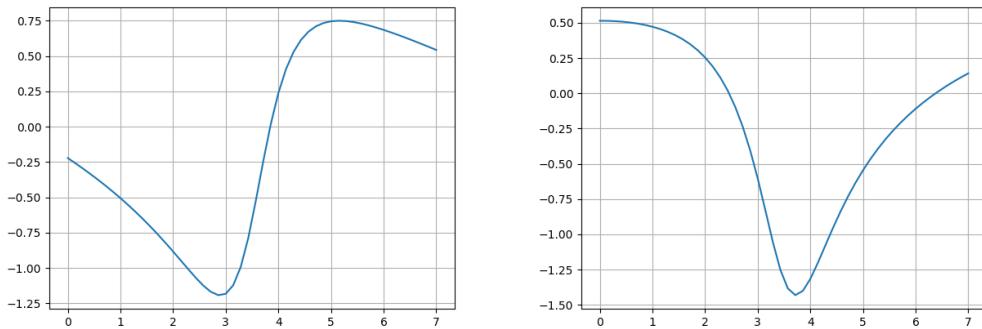


Рис. 4: Графики $x_3(t), x_4(t)$

4.2 Предельные циклы в системе Эквейлера

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 x_2, & x_1(0) = x_4(0), x_1(1) = x_4(1), \\ \dot{x}_2 = x_3(-x_1 + \sin(x_2)), & x_2(0) = 0, x_2(1) = 0, \\ \dot{x}_3 = 0, \\ \dot{x}_4 = 0. \end{cases}$$

При выборе параметра $t_* = 0$, для начального приближения

$$p_0 = [2, 0, 2\pi, 2]$$

было получено решения с вектором начальных условий в момент времени $t0$:

$$ans = [3.99494432, 0, 6.44403432, 3.99494432].$$

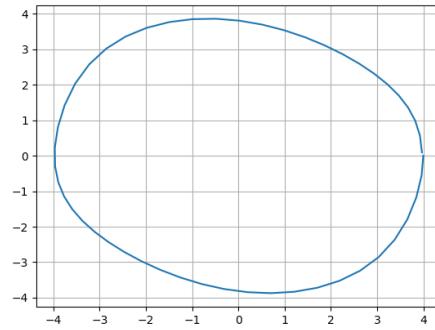


Рис. 5: График $x_2(x_1)$

4.3 Функционал типа "энергия" для трёхкратного интегратора

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{\nu + (x_6 + 1)^2} - \sqrt{\nu + (x_6 - 1)^2}), \\ \dot{x}_4 = 0, \\ \dot{x}_5 = -x_4, \\ \dot{x}_6 = -x_5. \end{cases} \quad x(0) = (1, 0, 0), \quad x(T) = (0, 0, 0), \quad T = 3.275,$$

При выборе параметров $t_* = 3.275$, $\nu = 10^{-10}$, для начального приближения

$$p_0 = [0, 0, 0, -2.9, 4.9, -2.9]$$

было получено решения с вектором начальных условий в момент времени t_0 :

$$ans = [0, 0, 0, -2.98504366, 4.88800903, -2.90838756].$$

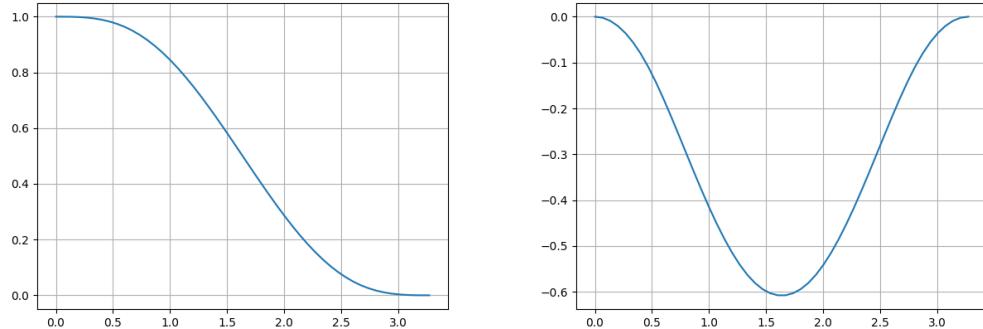


Рис. 6: Графики $x_1(t), x_2(t)$

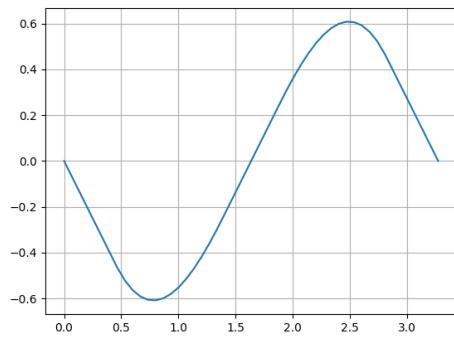


Рис. 7: График $x_3(t)$

Список литературы

- [1] Ю.Н. Киселёв, С.Н. Аввакумов, М.В. Орлов *Оптимальное управление. Линейная теория и приложения* // 2007, Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, 270.
- [2] Н.А. Прохоренок, В.А. Дронов *Python 3 и PyQt 5. Разработка приложений. 2-е издание* // BHV, 2019.
- [3] С. М. Львовский *Набор и вёрстка в системе L^AT_EX* // Издательство Макс Пресс, 2003.