

## LQR и фильтр Калмана

### 1 вариант

#### Задание 1.

Рассмотрим систему, в которой перевернутый маятник, состоящий из однородного стержня массы  $M$  длины  $L$ , прикреплен к тележке массы  $m$ . К тележке приложена внешняя управляемая сила  $u$ . Движение маятника происходит в вертикальной плоскости, движение тележки — вдоль горизонтальной прямой. Динамика системы описывается уравнениями:

$$(m + M)\ddot{x} + \frac{1}{2}ML\ddot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{2}ML\dot{\theta}^2 \sin \theta = u$$

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ML\ddot{x} \cos \theta = \frac{1}{2}MgL \sin \theta$$

1. Запишите линеаризованные уравнения движения в окрестности верхнего положения равновесия

$$x = 0, \quad \theta = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{\theta} = 0$$

2. Систему первого порядка в переменных состояния  $(x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$  запишите в матричном виде.
3. Проверьте систему на управляемость.
4. Постройте LQR для линеаризованной системы в окрестности неподвижной точки.
5. Постройте оптимальную траекторию  $\left(x(t), \theta(t), \dot{x}(t), \dot{\theta}(t)\right)$ , если

$$M = 4, \quad m = 1, \quad L = 1, \quad g = 9.8.$$

Начальные условия необходимо выбрать в достаточно малой окрестности положения равновесия.

#### Задание 2.

В механической системе из задания 1 измеряются положение тележки  $x$  и угол отклонения стержня от вертикали  $\theta$ .

1. Проверьте систему на наблюдаемость.
2. Постройте стабилизацию с помощью линейно-квадратичной оценки состояния. Матрицы  $Q = Q'$  и  $R = R'$  взять единичными.
3. Постройте на одном графике все компоненты оценки переменных состояния.

**Задание 3.**

1. Постройте фильтр Калмана: матрицы ковариации возмущения  $V_d$  и шума  $V_n$  возьмите диагональными со значениями на диагонали порядка 10% от начальных условий.
2. Постройте на одном графике все компоненты оценки переменных состояния, полученной с помощью фильтра Калмана.

## 2 вариант

### Задание 1.

Рассмотрим плоский двузвенный манипулятор, где два однородных стержня масс  $m_1$  и  $m_2$  длины  $l_1$  и  $l_2$  соединены шарниром. К точке подвеса приложен управляющий момент. Трение в соединениях отсутствует. Динамика системы описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{6}m_1l_1^2\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 - \frac{1}{4}m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{4}m_2l_1l_2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ = -\frac{1}{2}m_1gl_1 \sin \theta_1 + \frac{1}{2}m_2gl_2 \sin \theta_2, \\ \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ = (m_1 + m_2)gl_1 \sin \theta_1 - u \end{aligned}$$

1. Запишите линеаризованные уравнения движения в окрестности верхнего положения равновесия  $\theta_i = 0$ ,  $\dot{\theta}_i = 0$ ,  $i = 1, 2$ .
2. Систему первого порядка относительно переменных состояния запишите в матричном виде.
3. Проверьте систему на управляемость.
4. Постройте LQR для линеаризованной системы в окрестности неподвижной точки.
5. Постройте оптимальную траекторию  $y(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{\theta}_2(t))$ , если

$$m_1 = 2m_2 = 1, \quad 2l_1 = l_2 = 1, \quad g = 9.8$$

Начальные условия необходимо выбрать в достаточно малой окрестности положения равновесия.

### Задание 2.

В механической системе из задания 1 измеряется угол и скорость угла отклонения первого стержня  $\theta_1$  и  $\dot{\theta}_1$ .

1. Проверьте систему на наблюдаемость.
2. Постройте стабилизацию с помощью линейно-квадратичной оценки состояния. Матрицы  $Q = Q'$  и  $R = R'$  взять единичными.
3. Постройте на одном графике все компоненты оценки переменных состояния.

### Задание 3.

1. Проверить систему на наблюдаемость.

2. постройте фильтр Калмана: матрицы ковариации возмущения  $V_d$  и шума  $V_n$  возьмите диагональными со значениями на диагонали порядка 10% от начальных условий;
3. На одном графике построить истинное и оцененное фильтром Калмана решение системы.

### 3 вариант

#### Задание 1.

Рассмотрим систему шар и балка, состоящую из шара массы  $m$  и радиуса  $R$ , который может катиться вдоль балки без проскальзывания. Балка приводится во вращение в вертикальной плоскости за счет приложенного крутящего момента  $u$  в точке вращения;  $I$  и  $I_b$  — моменты инерции балки и шара соответственно. Обозначаем через  $\theta$  угол отклонения балки от положения равновесия и через  $r$  — расстояние от точки контакта шара с балкой до неподвижной оси вращения балки.

Уравнения движения системы:

$$\begin{aligned} \left( \frac{I_b}{R} + mR \right) \ddot{r} - (I_b + mR^2) \ddot{\theta} - mR\dot{\theta}^2 r + mgR \sin \theta &= 0, \\ (I + mr^2) \ddot{\theta} + 2m\dot{\theta}\dot{r}r - mR\dot{\theta}^2 r + mgr \cos \theta &= u. \end{aligned}$$

В качестве значений параметров взять следующие:

$$m = 0.064 \text{ кг}, \quad M = 0.586 \text{ кг}, \quad R = 0.0127 \text{ м}, \quad L = 0.4255 \text{ м},$$

где  $M$  и  $L$  — масса и длина балки. Моменты инерции шара  $I_b$  и балки  $I$  вычисляются по формулам из справочника:

$$I_b = \frac{2}{5}mR^2, \quad I = \frac{1}{12}ML^2.$$

1. Запишите линеаризованные уравнения движения в окрестности положения равновесия.
2. Систему первого порядка в переменных состояния  $(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$  запишите в матричном виде.
3. Проверьте систему на управляемость .
4. Постройте LQR для линеаризованной системы в окрестности неподвижной точки.
5. Постройте оптимальную траекторию  $(r(t), \theta(t), \dot{r}(t), \dot{\theta}(t))$ . Начальные условия необходимо выбрать в достаточно малой окрестности положения равновесия.

#### Задание 2.

В механической системе из задания 1 измеряется положение шара  $r$  и угол отклонения балки  $\theta$ .

1. Проверьте систему на наблюдаемость.
2. Постройте стабилизацию с помощью линейно-квадратичной оценки состояния. Матрицы  $Q = Q'$  и  $R = R'$  взять единичными.
3. Постройте на одном графике все компоненты оценки переменных состояния.

**Задание 3.**

1. Проверить систему на наблюдаемость.
2. Построить фильтр Калмана для системы, положив ковариацию возмущения  $V_d$  и ковариацию шума  $V_n$  равными единичной матрице.
3. На одном графике построить истинное и оцененное фильтром Калмана решение системы.

## 4 вариант

### Задание 1.

Рассмотрим систему, состоящую из однородного стержня массы  $M$  длины  $L$ , прикрепленного к тележке массы  $m$ . Тележка закреплена на пружине жесткости  $k$ . К тележке приложена внешняя сила  $u$  — управление. Движение маятника происходит в вертикальной плоскости, движение тележки — вдоль горизонтальной прямой. Обозначаем смещение тележки через  $x$ , а угол отклонения маятника от верхнего положения равновесия через  $\theta$ . Тогда динамика системы описывается уравнениями

$$(m + M)\ddot{x} + \frac{1}{2}ML\ddot{\theta} \cos \theta - \frac{1}{2}ML\dot{\theta}^2 \sin \theta = -kx + u,$$

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} + \frac{1}{2}ML\ddot{x} \cos \theta = \frac{1}{2}MgL \sin \theta.$$

В качестве значений параметров предлагается использовать следующие значения:

$$M = 2 \text{ кг}, \quad m = 1 \text{ кг}, \quad L = 1 \text{ м}, \quad k = 2 \text{ Н/м}.$$

Запишите линеаризованные уравнения движения в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка в матричной форме. Для линеаризованной системы

1. исследуйте устойчивость верхнего положения равновесия и управляемость системы;
2. стабилизируйте систему в верхнем положении равновесия с помощью LQR;
3. постройте график оптимальной траектории, полученной с помощью LQR,

$$s(t) = \left( x(t), \theta(t), \dot{x}(t), \dot{\theta}(t) \right);$$

4. проверьте наблюдаемость системы, полагая, что наблюдается угол отклонения маятника и скорость тележки:  $y = (\theta, \dot{x})$ ;
5. Постройте стабилизацию с помощью линейно-квадратичной оценки состояния. Матрицы  $Q = Q'$  и  $R = R'$  взять единичными.
6. постройте фильтр Калмана: матрицы ковариации возмущения  $V_d$  и шума  $V_n$  возьмите диагональными со значениями на диагонали порядка 10% от начальных условий;
7. постройте на одном графике все компоненты оценки решения  $\hat{s}(t)$ , полученной с помощью фильтра Калмана.