

Algèbre 2

a. Groupes abéliens de type fini

Définition-proposition. Soient G un groupe abélien et S une partie de G . Alors il existe un unique sous-groupe H de G qui contient S minimal (pour l'inclusion). H est appelé le *sous-groupe de G engendré par la partie S* , et noté $\langle S \rangle$.


Démonstration. On note \mathcal{E} l'ensemble des sous-groupes de G contenant S . \mathcal{E} est non vide (car $G \in \mathcal{E}$). Alors $\bigcap_{H \in \mathcal{E}} H$ est un sous-groupe de G contenant S qui contenu dans tout autre élément de \mathcal{E} . \square

Remarque. Soit G un groupe abélien, soit S une partie de G . Alors $\langle S \rangle$ contient l'élément neutre, et stable par additivité et passage à l'inverse. Comme G est abélien, $\langle S \rangle$ contient donc toutes les combinaisons linéaires d'éléments de S : $\langle S \rangle = \left\{ \sum n_i s_i \mid (s_i)_{1 \leq i \leq r} \in S^r, (n_i)_{1 \leq i \leq r} \in \mathbb{Z}^r, r \in \mathbb{N} \right\}$ (un tel ensemble est bien un sous-groupe de G d'où l'égalité par unicité).

Définition. Soit G un groupe abélien, soit S une partie de G .

- On dit que S est une *partie génératrice* de G , ou encore que S engendre G , si $G = \langle S \rangle$.
- On dit que le groupe abélien G est de *type fini* s'il admet une *partie génératrice finie*.

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on note $e = (e_i)_{1 \leq i \leq r} \in (\mathbb{Z}^r)^r$ la base canonique de \mathbb{Z}^r (chaque vecteur a pour i ème coordonnée 1 et 0 ailleurs).

 **Exemple :** Un groupe G abélien fini est de type fini (engendré par la partie G finie). Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Alors \mathbb{Z}^r est un groupe abélien de type fini (engendré par la partie $\{e_1, \dots, e_r\}$ finie).

Lemme. Soit G un groupe abélien, soit $r \in \mathbb{N}^*$, soit $(x_1, \dots, x_r) \in G^r$. Alors il existe un unique morphisme de groupes f du groupe \mathbb{Z}^r dans le groupe G qui, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, envoie e_i sur x_i (\star), donné par f :

$$(a_i)_{1 \leq i \leq r} \longmapsto \sum_{i=1}^r a_i x_i$$

De plus, $\text{Im } f = \langle x_1, \dots, x_r \rangle$.

Démonstration. Un morphisme de groupes de \mathbb{Z}^r dans G vérifiant (\star) est uniquement déterminé par l'image de la base canonique e par décomposition d'un vecteur de \mathbb{Z}^r dans cette base et linéarité du morphisme. \square

Corollaire. Un groupe abélien est de type fini si et seulement si il existe un morphisme de groupes *surjectif* du groupe \mathbb{Z}^r dans le groupe G (où $r \in \mathbb{N}$).

Démonstration. On conserve les notations de la proposition précédente.

Soit G un groupe abélien de type fini. Alors G possède une partie génératrice finie $S = \{x_1, \dots, x_r\}$ (où $r \in \mathbb{N}$), d'où $\text{Im } f = \langle S \rangle = G$, ie le morphisme de groupes f de \mathbb{Z}^r dans G est surjectif.

Réciproquement, soit g un morphisme de groupes surjectif de \mathbb{Z}^r (où $r \in \mathbb{N}$) dans G , alors $S = \{f(e_1), \dots, f(e_r)\}$ est une partie génératrice de G (car tout élément de G possède un antécédent dans \mathbb{Z}^r qui se décompose dans la base canonique e , donc son image, ie g , s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de S). \square

Proposition. Soient G et H deux groupes abéliens. Soit f un morphisme de groupes de G dans H . On suppose que le groupe abélien G est de type fini. Alors le groupe abélien $\text{Im } f$ est de type fini.

Démonstration. Soit S une partie génératrice de G . Alors $f(S)$ est une partie génératrice de $\text{Im } f$. \square

Corollaire.

Proposition. Soient G et H deux groupes abéliens. Soit f un morphisme de groupes de G dans H . On suppose que les groupes abéliens $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont de *type fini*. Alors G est un groupe abélien de type fini.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $(x_1, \dots, x_r) \in G^r$ tel que la partie finie $\{f(x_1), \dots, f(x_r)\}$ engendre $\text{Im } f$ et il existe $(y_1, \dots, y_s) \in (\text{Ker } f)^s$ tel que la partie finie $\{y_1, \dots, y_s\}$ engendre $\text{Ker } f$. Soit $g \in G$. Alors il existe $(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}^r$ tel que $f(g) = \sum_{i=1}^r n_i f(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^r n_i x_i\right)$. On conclut en décomposant l'élément

$$g - \sum_{i=1}^r n_i x_i \in \text{Ker } f \text{ selon la famille } \{y_1, \dots, y_s\}. \quad \square$$

Proposition. Soit G un groupe abélien de type fini. Soit H un sous-groupe de G . Alors le groupe abélien H est de type fini.

Démonstration.

- On suppose le groupe G monogène. Si G est cyclique, on sait alors que H est cyclique. Sinon, on se donne un générateur g de G (qui sont tous d'ordre infinis). On sait que l'application $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow G$ est
- $$n \mapsto ng$$
- un isomorphisme de groupes. H est isomorphe au sous-groupe $\varphi^{-1}(H)$ de \mathbb{Z} qui s'écrit $\varphi^{-1}(H) = m\mathbb{Z}$ (où $m \in \mathbb{N}$), ie $H = \varphi(m\mathbb{Z}) = \{ng \mid n \in m\mathbb{Z}\} = \langle mg \rangle$ est monogène.
- Dans le cas contraire, on considère un morphisme de groupes f surjectif de \mathbb{Z}^r dans G , où $r \in \mathbb{N}^*$ désigne le cardinal de la partie génératrice de G (cf preuve du corollaire précédent). Montrons par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$ que H est de type fini.

Le cas $r = 1$, d'après la remarque précédente, a été traité dans le premier tiret.

On suppose le résultat vrai pour $r - 1$ ($r \in \mathbb{N}^*$). On considère groupe \mathbb{Z}^{r-1} comme sous-groupe de \mathbb{Z}^r (via l'injection de $\mathbb{Z}^{r-1} \times \{0\}$ dans \mathbb{Z}^r). Par hypothèse de récurrence, tout sous-groupe de $K = f(\mathbb{Z}^{r-1})$ est de type fini. Montrons que G/K est monogène : considérons le morphisme de groupes

$$\psi: \mathbb{Z} \rightarrow \frac{G/K}{f(0, \dots, 0, a)} \quad . \text{ Soit } \bar{g} \in G/K. \text{ Par surjectivité de } f, \text{ il existe } (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{K}^r \text{ tel que}$$

$$a \mapsto \overline{f(0, \dots, 0, a)}$$

$$g = f(a_1, \dots, a_r). \text{ Donc } g = \underbrace{f(a_1, \dots, a_{r-1}, 0)}_{\in K} + f(0, \dots, 0, a_r), \text{ ie } \bar{g} = \overline{f(0, \dots, 0, a_r)} = \psi(a_r). \text{ Ainsi, } \psi$$

est surjectif.

On considère π_H le morphisme de groupes canonique (surjectif) de projection de H dans G/K . $\text{Im } \pi_H$ est un sous-groupe de G/K monogène donc $\text{Im } \pi_H$ est monogène.

$\text{Ker } \pi_H = \mathbb{K} \cap H \subset K$ est de type fini par hypothèse de récurrence. D'où, d'après la proposition précédente, H est de type fini.

□