Notes de cours de M305-Algèbre 2

16 janvier 2015

Table des matières

1 rappels de théorie des groupes

À compléter

2 Groupes abéliens de type fini

Le but de cette section est de donner une classification des groupes abéliens. On va s'intéresser pour cela à une sous-catégorie de groupes abéliens : les groupes abliens de type fini. Dans toutes cette section la loi des groupes considérés sera $+$ sauf mention contraire explicite.

Remarque 1. Tout groupe abélien $(G, +, e_G)$ peut s'identifier à un $\mathbb{Z}$-module en posant :

$$\cdot : \begin{cases} \mathbb{Z} \times G & \longrightarrow & G \\ (n, g) & \longmapsto & \begin{cases} e_G & si\, n = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} g & si\, n > 0 \\ \sum_{i=1}^{-n} (-g) & si\, n < 0 \end{cases} \end{cases}$$

. On vérifie aisément que $\cdot$ vérifie :

$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall (h, g) \in G \times G,\, n \cdot (h + G) = n \cdot g + n \cdot h.$

Définition-proposition 1. Soient G un groupe abélien et S une partie de G. Alors il existe un unique sous-groupe H de G qui contient S minimal (pour l'inclusion). H est appelé le *sous-groupe de G engendré par la partie S*, et noté $< S >$.

Démonstration. On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des sous-groupes de G contenant S. $\mathcal{E}$ est non vide (car $G \in \mathcal{E}$). Alors $\displaystyle\bigcap_{H \in \mathcal{E}} H$ est un sous-groupe de G contenant S qui contenu dans tout autre élément de $\mathcal{E}$. □

Remarque 2. Soit G un groupe abélien, soit S une partie de G. Alors $< S >$ contient l'élément neutre, et stable par additivité et passage à l'inverse. Comme G est abélien, $< S >$ contient donc toutes les combinaisons linéaires d'éléments de S : $< S >= \left\{ \sum n_i s_i \mid (s_i)_{1 \leqslant i \leqslant r} \in S^r, (n_i)_{1 \leqslant i \leqslant r} \in \mathbb{Z}^r, r \in \mathbb{N} \right\}$ (un tel ensemble est bien un sous-groupe de G d'où l'égalité par unicité).

Définition 1. Soit G un groupe abélien, soit S une partie de G.

- On dit que S est u*ne partie génératrice* de G, ou encore que S engendre G, si $G =< S >$.
- On dit que le *groupe abélien* G est de *type fini* s'il admet une *partie génératrice finie.*

Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$., on note $e = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant r} \in (\mathbb{Z}^r)^r$ la base canonique de $\mathbb{Z}^r$ (chaque vecteur a pour ième coordonnée 1 et 0 ailleurs).

✎ **Exemple :** Un groupe G abélien fini est de type fini (engendré par la partie G finie). Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathbb{Z}^r$ est un groupe abélien de type fini (engendré par la partie $\{e_1, \ldots, e_r\}$ finie).

Lemme 1. Soit G un groupe abélien, soit $r \in \mathbb{N}^*$, soit $(x_1, \ldots, x_r) \in G^r$. Alors il *existe un unique morphisme* de groupes f du groupe $\mathbb{Z}^r$ dans le groupe G qui, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, *envoie* e_i *sur* x_i $(\star)$, donné par $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^r & \longrightarrow & G \\ (a_i)_{1\leqslant i\leqslant r} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{r} a_i x_i \end{array} \right.$.
De plus, $\operatorname{Im} f =< \{x_1, \ldots, x_r\} >$.

Démonstration. Un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}^r$ dans G vérifiant $(\star)$ est uniquement déterminé par l'image de la base canonique e par décomposition d'un vecteur de $\mathbb{Z}^r$ dans cette base et linéarité du morphisme. □

Corollaire 1. Un groupe abélien est de type fini si et seulement si il existe un morphisme de groupes *surjectif* du groupe $\mathbb{Z}^r$ dans le groupe G (où $r \in \mathbb{N}$).

Démonstration. On conserve les notations de la proposition précédente.
Soit G un groupe abélien de type fini. Alors G possède une partie génératrice finie $S = \{x_1, \ldots, x_r\}$ (où $r \in \mathbb{N}$), d'où $\operatorname{Im} f =< S >= G$, ie le morphisme de groupes f de $\mathbb{Z}^r$ dans G est surjectif.
Réciproquement, soit g un morphisme de groupes surjectif de $\mathbb{Z}^r$ (où $r \in \mathbb{N}$) dans G , alors $S = \{f(e_1), \ldots, f(e_r)\}$ est une partie génératrice de G (car tout élément de G possède un antécédent dans $\mathbb{Z}^r$ qui se décompose dans la base canonique e, donc son image, ie g, s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de S). □

Proposition 1. Soient G et H deux groupes abéliens. Soit f un morphisme de groupes de G dans H. On suppose que le groupe abélien G est de type fini. Alors le groupe abélien $\operatorname{Im} f$ est de type fini.

Démonstration. Soit S une partie génératrice de G. Alors $f(S)$ est une partie génératrice de $\operatorname{Im} f$. □

Corollaire 2.

Proposition 2. Soient G et H deux groupes abéliens. Soit f un morphisme de groupes de G dans H. On suppose que les groupes abéliens $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont de *type fini.* Alors G est un groupe abélien de type fini.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $(x_1, \ldots, x_r) \in G^r$ tel que la partie finie $\{f(x_1), \ldots, f(x_r)\}$ engendre $\operatorname{Im} f$ et il existe $(y_1, \ldots, y_r) \in (\operatorname{Ker} f)^s$ tel que la partie finie $\{y_1, \ldots, y_s\}$ engendre $\operatorname{Ker} f$. Soit $g \in G$. Alors il existe $(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}^r$ tel que $f(g) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i f(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^{r} n_i x_i\right)$.
On conclut en décomposant l'élément $g - \displaystyle\sum_{i=1}^{r} n_i x_i \in \operatorname{Ker} f$ selon la famille $\{y_1, \ldots, y_s\}$. □

Proposition 3. Soit G un groupe abélien de type fini. Soit H un sous-groupe de G. Alors le groupe abélien H est de type fini.

Démonstration.

— On suppose le groupe G monogène. Si G est cyclique, on sait alors que H est cyclique. Sinon, on se donne un générateur g de G (qui sont tous d'ordre infinis). On sait que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G \\ n & \longmapsto & ng \end{array} \right.$ est un isomorphisme de groupes. H est isomorphe au sous-groupe $\varphi^{-1}(H)$ de $\mathbb{Z}$ qui s'écrit $\varphi^{-1}(H) = m\mathbb{Z}$ (où $m \in \mathbb{N}$), ie $H = \varphi(m\mathbb{Z}) = \{ng \mid n \in m\mathbb{Z}\} =< mg >$ est monogène.

— Dans le cas contraire, on considère un morphisme de groupes f surjectif de $\mathbb{Z}^r$ dans G, où $r \in \mathbb{N}^*$ désigne le cardinal de la partie génératrice de G (cf preuve du corollaire précédent).
Montrons par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$ que H est de type fini.
Le cas $r = 1$, d'après la remarque précédente, a été traité dans le premier tiret.
On suppose le résultat vrai pour $r - 1$ ($r \in \mathbb{N}^*$). On considère groupe $\mathbb{Z}^{r-1}$ comme sous-groupe de $\mathbb{Z}^r$ (via l'injection de $\mathbb{Z}^{r-1} \times \{0\}$ dans $\mathbb{Z}^r$). Par hypothèse de récurrence, tout sous-groupe de $K = f(\mathbb{Z}^{r-1})$ est de type fini. Montrons que G/K est monogène : considérons le morphisme de groupes $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & G/K \\ a & \longmapsto & \overline{f(0,\ldots,0,a)} \end{array} \right.$. Soit $\overline{g} \in G/K$. Par surjectivité de f, il existe $(a_1,\ldots,a_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $g = f(a_1,\ldots,a_r)$. Donc $g = \underbrace{f(a_1,\ldots,a_{r-1},0)}_{\in K} + f(0,\ldots,0,a_r)$, ie $\overline{g} = \overline{f(0,\ldots,0,a_r)} = \psi(a_r)$. Ainsi, ψ est surjectif.
On considère π_H le morphisme de groupes canonique (surjectif) de projection de H dans G/K. $\operatorname{Im} \pi_H$ est un sous-groupe de G/K monogène donc $\operatorname{Im} \pi_H$ est monogène.
$\operatorname{Ker} \pi_H = \mathbb{K} \cap H \subset K$ est de type fini par hypothèse de récurrence. D'où, d'après la proposition précédente, H est de type fini.

□