第8章　一阶电路稳态分析

8.1概述

8.2零输入响应

8.3直流激励下的响应

　　8.3.1　直流电源激励的RC电路

　　8.3.2　直流电源激励的RL电路

*（自学）8.3.3RC电路的方波响应

*（自学）8.4正弦激励下的RC电路

8.5含运算放大器的一阶电路

8.6线性非时变特性

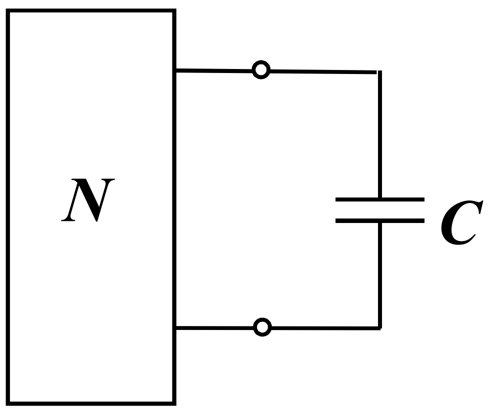
*（自学）　8.6.4　任意电源激励下的零状态响应

*　（自学）　8.7冲击响应计算

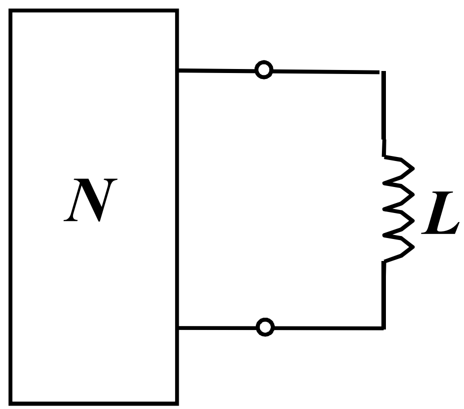
8.1 暂态分析的概述

典型的一阶电路

一阶电路：只含有一个独立储能元件的电路，用一阶微分方程描述。



RC电路

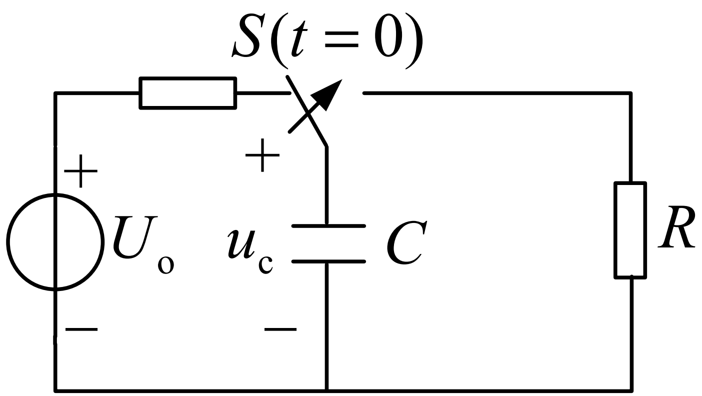


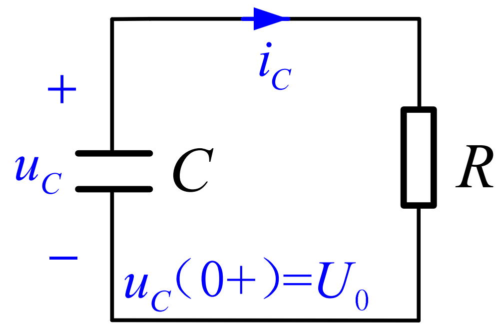
RL电路

8.2 零输入响应（Zero-input response)

零输入响应：换路后没有独立电源，仅由储能元件初始储能作用于电路产生的暂态过程，又称为自然响应。

8.2.1 RC电路的零输入响应

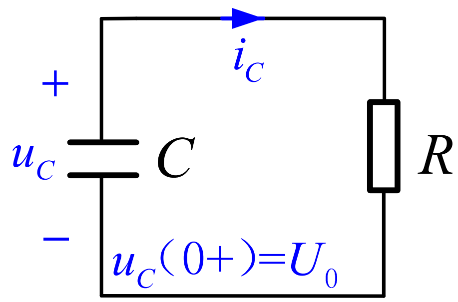




t=0$_-$： $u_C(0_-)=U_0$；

t=0：开关S换路。

1 微分方程及零输入响应分析:



由KVL得: $Ri_C - u_C = 0 \qquad (t>0)$

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0 \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0 \end{cases}$$

特征方程为: $RCs + 1 = 0 \qquad \Rightarrow s = -\dfrac{1}{RC}$

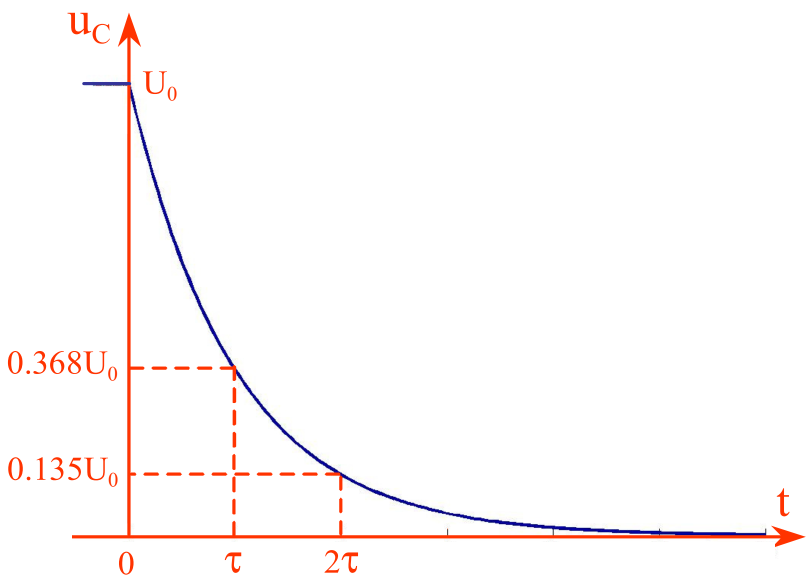
$$\therefore u_C(t) = Ke^{st} = Ke^{-\frac{1}{RC}t} \qquad (t \geq 0)$$

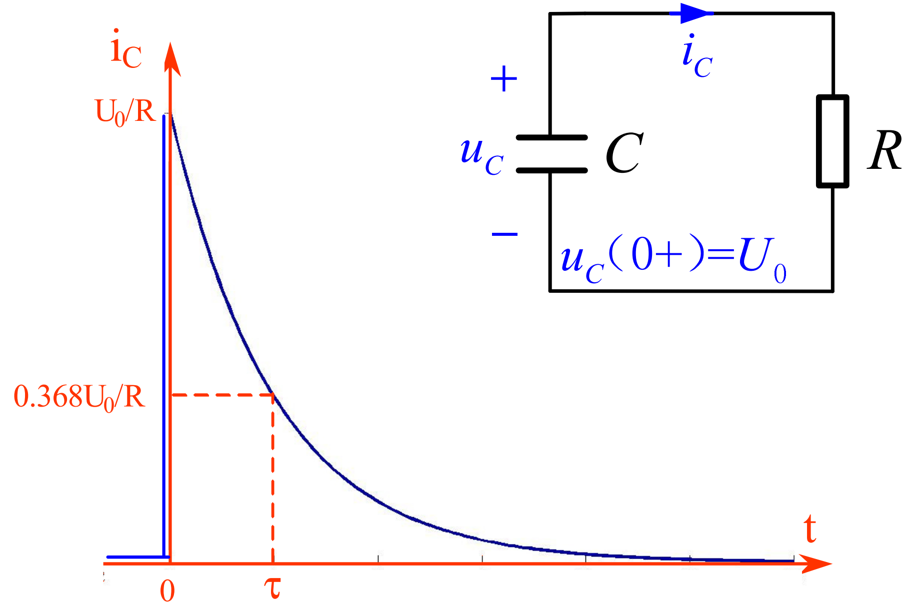
$$\because u_C(0_+) = U_0 \qquad \therefore u_C(0_+) = Ke^0 = U_0$$

$$\boxed{u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}\ \mathrm{V} \qquad (t \geq 0)}$$

$$\boxed{i_C = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}\ \mathrm{A} \qquad (t>0)}$$

2 波形：



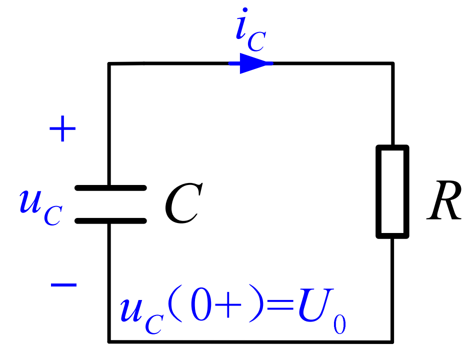


$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{1}{RC}t}\ \mathrm{V} \qquad (t \geq 0)$$

$$i_C = \frac{u_C}{R} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}\ \mathrm{A} \qquad (t > 0)$$

- 电压、电流均从$t=0_+$开始以同一指数规律衰减到零;
- 电容电压在t=0连续，随时间增长下降趋于0；
- 电容电流在t=0时发生了跳变。（电容电压在换路后突然加到电阻上的结果）。随电容电压的下降衰减直至消失。

3 能量转换：



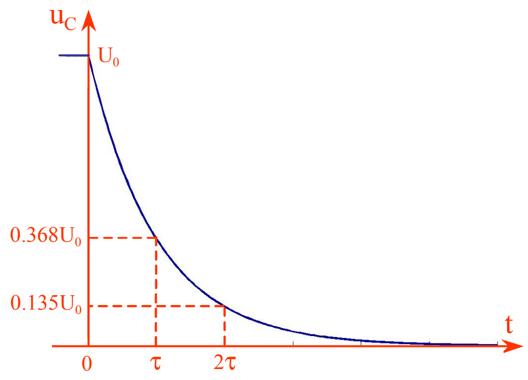
t=0时刻电容的初始储能为： $w_C(0_+)=\frac{1}{2}CU_0^2$

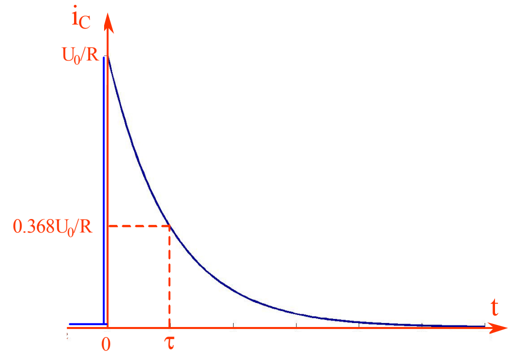
在整个过渡过程中，电阻吸收的总能量为：

$$w_R(0,\infty)=\int_0^\infty Ri^2dt=\int_0^\infty R(\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}})^2dt=\frac{1}{2}CU_0^2$$

电阻消耗的能量等于电容元件所存储的初始能量。

4 时间常数τ ：





- 在给定电压初值的情况下，C越大，电容中储存的电荷越多，放电时间越长；
- R越大，放电电流越小，放电时间越长；
- 衰减快慢取决于RC乘积

$$\tau \overset{\Delta}{=} RC \qquad [\tau]=[RC]=[\text{欧}][\text{法}]=[\text{欧}]\left[\frac{\text{库}}{\text{伏}}\right]=[\text{欧}]\left[\frac{\text{安秒}}{\text{伏}}\right]=[\text{秒}]$$

$$s=-\frac{1}{\tau}$$

4 时间常数τ ：

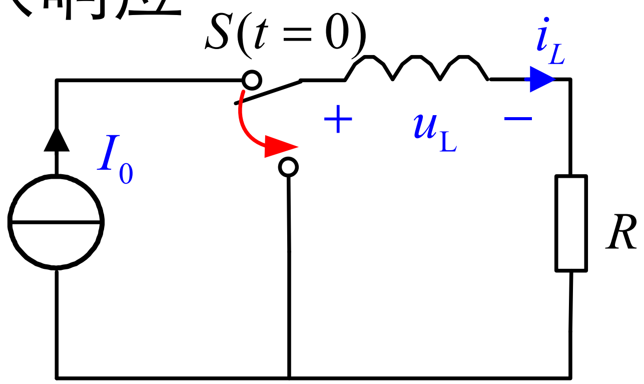
t	0	τ	2τ	3τ	5τ
$u_c = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$	U_0	$U_0 e^{-1}$	$U_0 e^{-2}$	$U_0 e^{-3}$	$U_0 e^{-5}$
	U_0	$0.368\ U_0$	$0.135\ U_0$	$0.05\ U_0$	$0.007\ U_0$

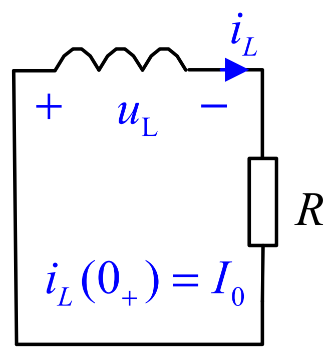
- τ: 电容电压衰减到原来电压36.8%所需的时间；
- 经过3τ~5τ，电容电压衰减至初值的0.7%，可以认为放电已经结束；
- s（τ）与电路的输入无关，仅取决于电路的结构和参数，称为固有频率。

8.2.2 RL电路的零输入响应

t=0时， 开关S换路

t=0$_-$：$i_L(0_-)=I_0$





$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt}+Ri_L=0 \quad t>0 \\ i_L(0_+)=i_L(0_-)=I_0 \end{cases}$$

此微分方程的特征方程为： $Ls+R=0 \quad \Rightarrow s=-\dfrac{R}{L}$

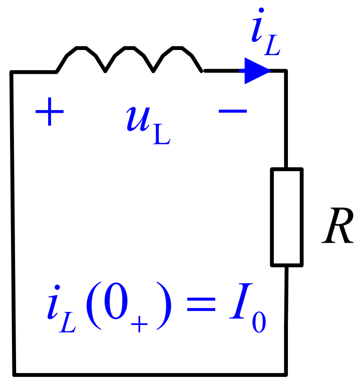
$$i_L=Ke^{st}=Ke^{-\frac{t}{\tau}}=Ke^{-\frac{R}{L}t}\text{A} \quad (t\geq 0) \qquad \tau=-\frac{1}{s}=\frac{L}{R}$$

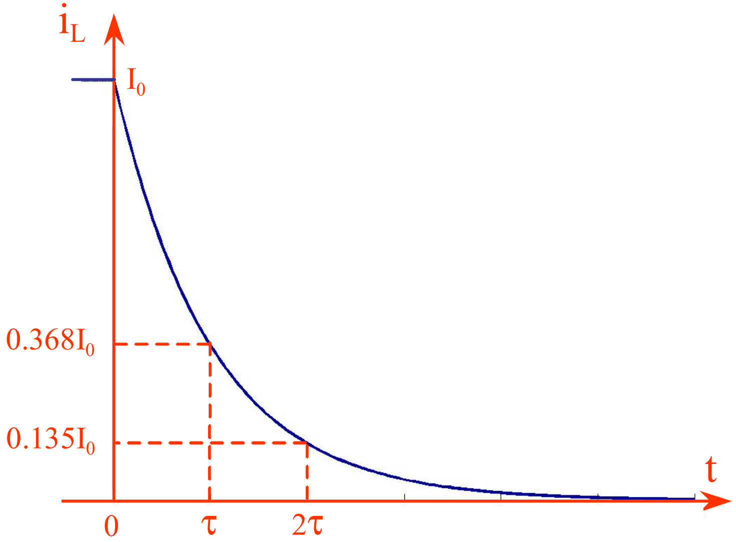
$$=i_L(0+)e^{-\frac{R}{L}t}$$

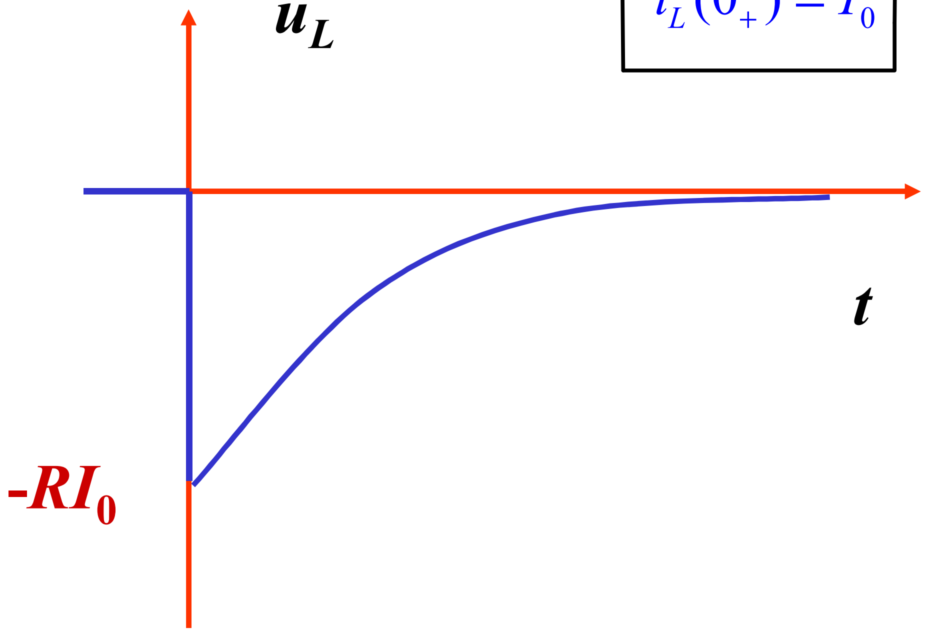
$$\boxed{i_L=I_0e^{-\frac{R}{L}t}\text{A} \quad (t\geq 0)} \qquad \boxed{u_L=-Ri_L=-RI_0e^{-\frac{R}{L}t}\text{V} \quad (t>0)}$$

波形：

$i_L = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}\ \mathrm{A} \quad (t \ge 0)$ $\qquad u_L = -RI_0 e^{-\frac{R}{L}t}\ \mathrm{V} \quad (t > 0)$

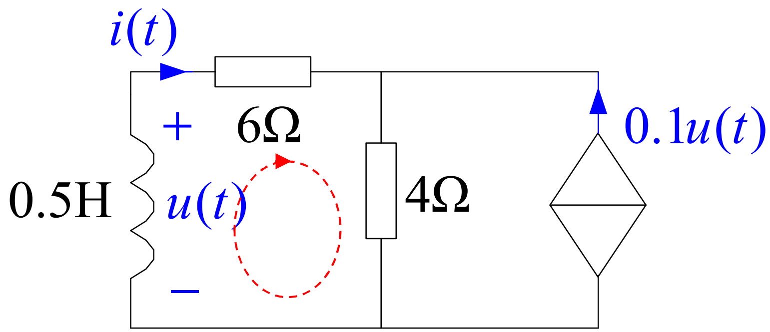






- 电压、电流以同一指数规律衰减。
- 电感电流在t=0连续，随时间增长下降趋于0；
- 电感电压在t=0时发生了负跳变。随电感电流的下降衰减直至消失。
- 计算RL 电路的零输入响应关键是：初始值； 时间常数 τ。

【例1】. $i(0_+)=150\text{mA}$。求t>0时$u(t)$。



方法1：列微分方程

由KVL得：$6i(t)+4\left[i(t)+0.1u(t)\right]-u(t)=0$

$$u(t)=-L\frac{di}{dt}$$

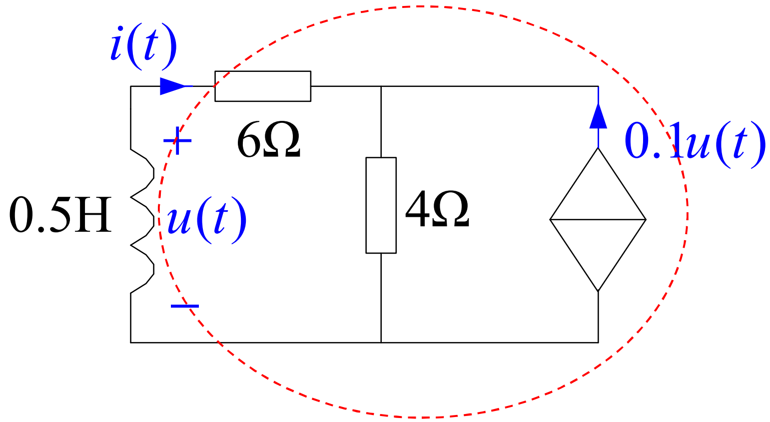
化简得：$10i(t)-0.6u(t)=0$ → $10i(t)+0.6\times L\dfrac{di(t)}{dt}=0$

$$\begin{cases}0.3\dfrac{di(t)}{dt}+10i(t)=0\\ i(0+)=150mA\end{cases}$$

解微分方程得：$i(t)=150e^{-\frac{100}{3}t}\text{mA}(t\geq 0)$

$$\rightarrow u(t)=-L\frac{di}{dt}=2.5e^{-\frac{100}{3}t}\text{V}(t>0)$$

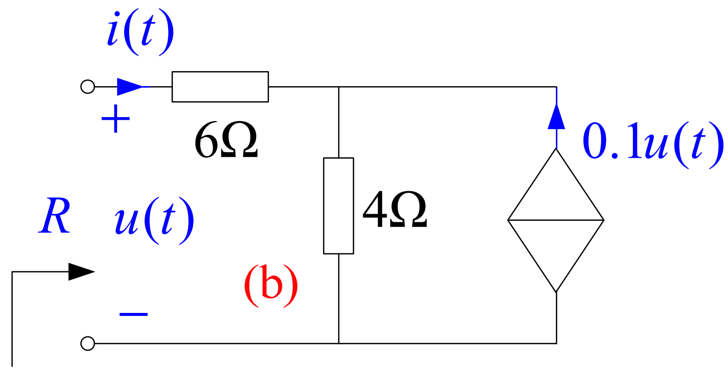
【例1】. i (0+)=150mA。求t>0时u (t) 。



方法2：求初值和时间常数

1 计算时间常数

图中端口等效电阻R为：

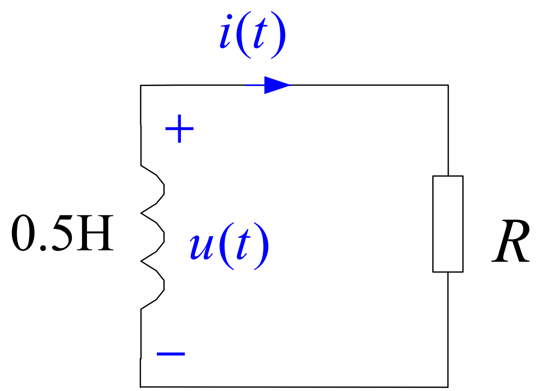


$$u(t)=6i(t)+4\times[i(t)+0.1u(t)]$$

$$\Rightarrow R=\frac{u(t)}{i(t)}=\frac{50}{3}\Omega$$

$$\tau=\frac{L}{R}=\frac{3}{100}s$$

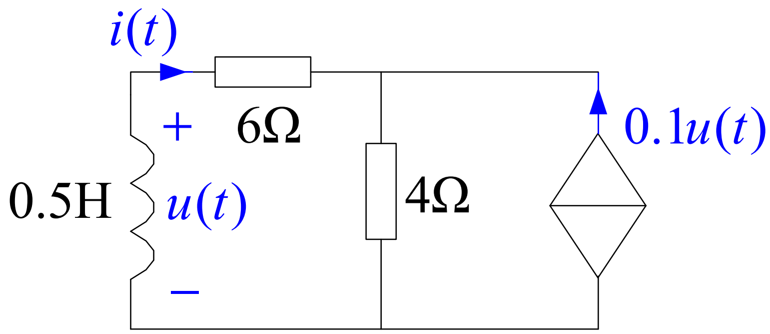
2 初值 $i(0_+)$=150mA ：



$$\mathrm{i}(t)=\mathrm{i}(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}=150e^{-\frac{100}{3}t}\ \mathrm{mA}\quad(t\geq 0)$$

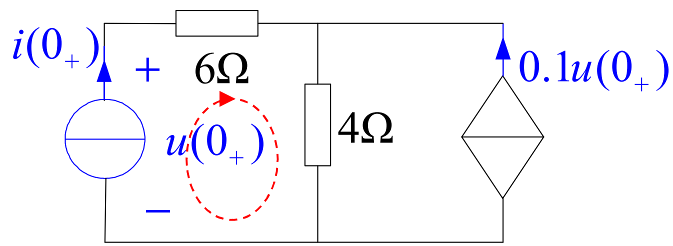
$$\therefore u(t)=\frac{50}{3}\times i(t)=\frac{50}{3}\times 0.15e^{-\frac{100}{3}t}=2.5e^{-\frac{100}{3}t}\ \mathrm{V}\quad(t>0)$$

【例1】. i (0+)=150mA。求t>0时u (t) 。



方法3: 计算u初值和时间常数:

t=0+时刻等效电路如图所示:



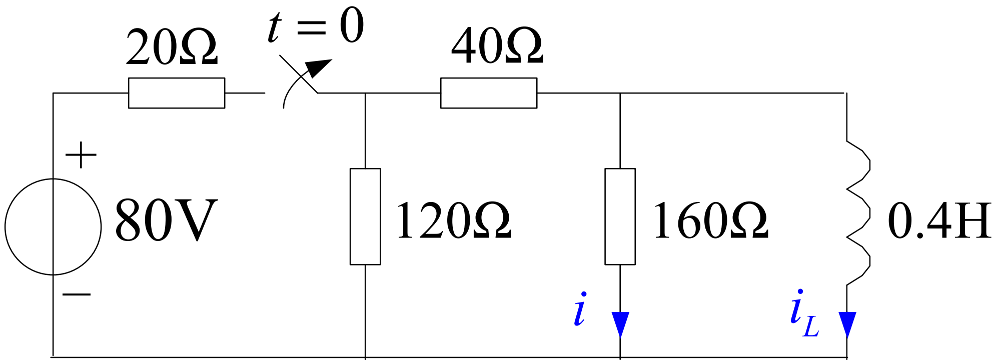
由KVL得:

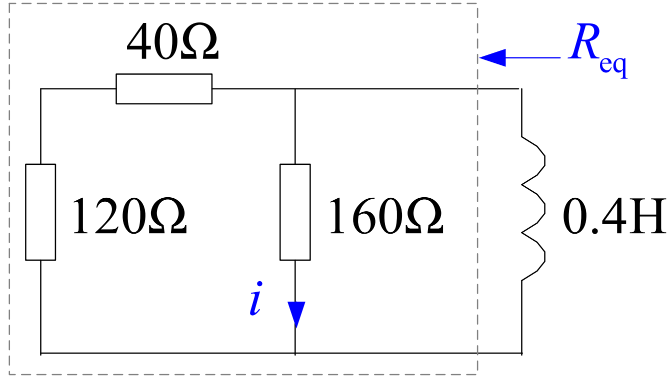
$$u(0_+) = 0.15\times 6 + [0.15 + 0.1u(0_+)]\times 4$$

$$u(0_+) = 1.5/0.6 = 2.5\,\mathrm{V}$$

$$\therefore u(t) = u(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 2.5e^{-\frac{100}{3}t}\ \mathrm{V} \qquad (t>0)$$

【练习】例8-2-3，求*i*.





1 求时间常数

$$R_{eq} = 80\Omega$$

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{0.4}{80} = 5\times10^{-3}\mathrm{s}$$

2 求初值

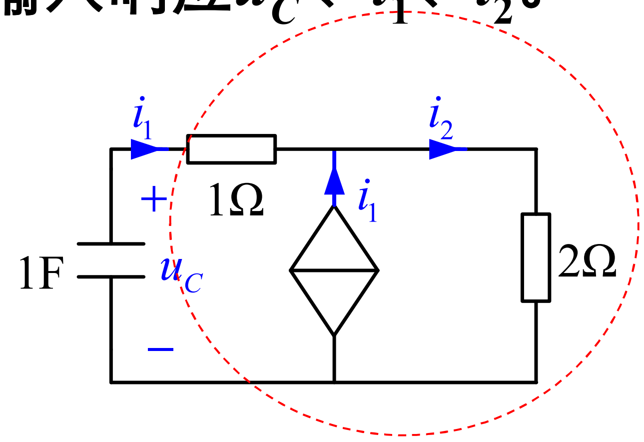
$$i_L(0_-) = 1.2\mathrm{A}$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 1.2\mathrm{A}$$

$$i(0_+) = -\frac{(120+40)}{(120+40)+160}\times i_L(0_+) = -0.6\mathrm{A}$$

$$i = i(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = -0.6e^{-200t}\ \mathrm{A}\quad(t>0)$$

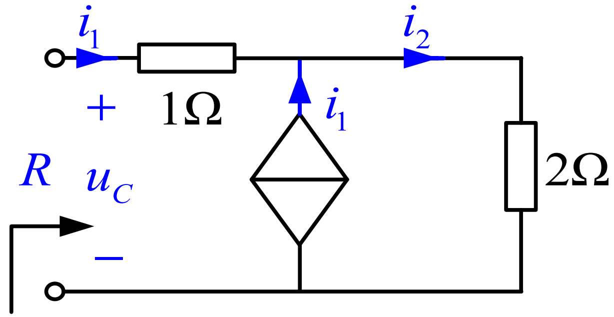
【例2】. 换路后电路：$u_C(0_+)$=1V。求零输入响应u_C、i_1、i_2。



解：计算端口等效电阻为：

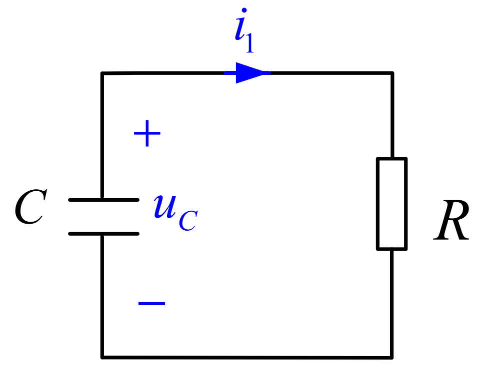
$$u_C = i_1 + 2\times[i_1 + i_1]$$

$$\Rightarrow R = \frac{u_C}{i_1} = 5\Omega$$



$$\tau = RC = 5s$$

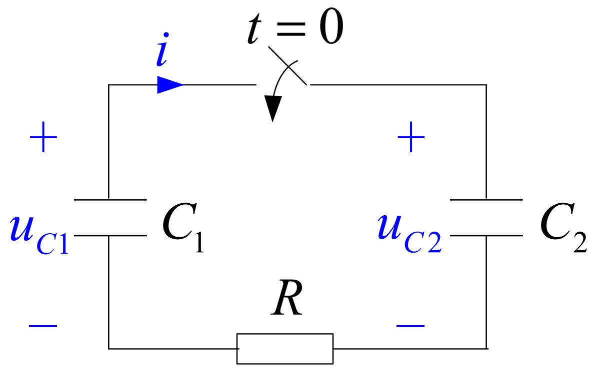
$$\therefore u_c = u_c(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = e^{-\frac{t}{5}}\text{V} \quad (t\geq 0)$$

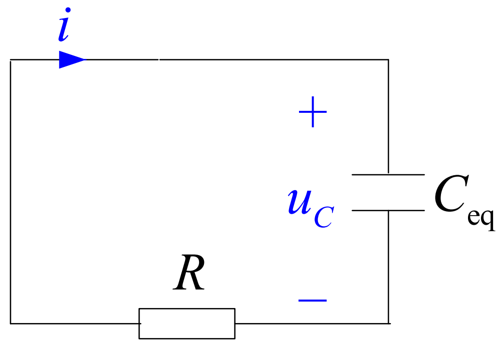


$$i_1 = \frac{u_c}{R} = \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}\text{A} \quad (t>0)$$

$$i_2 = 2i_1 = \frac{2}{5}e^{-\frac{t}{5}}\text{A} \quad (t>0)$$

【例8-2-5】已知：$u_{C1}(0_-)=U_o$，$u_{C2}(0_-)=0$，$C_1=C_2=C$，求i。





1求初值 $u_{C1}(0_+)=u_{C1}(0_-)=U_0$ $u_{C2}(0_+)=u_{C2}(0_-)=0$

$$u_C(0_+)=u_{C2}(0_+)-u_{C1}(0_+)=-U_0$$

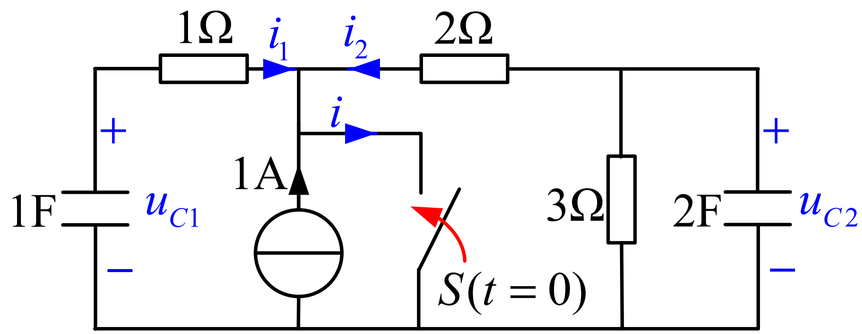
2 求时间常数 $C_{\mathrm{eq}}=\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}=0.5C$ $\tau=RC_{\mathrm{eq}}=0.5RC$

$$u_C=u_C(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}=-U_0e^{-\frac{t}{0.5RC}} \qquad (t\geq 0)$$

$$i=i(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{U_0}{R}e^{-\frac{t}{0.5RC}} \qquad (t>0)$$

【课下练习】. 电路处于稳态，t=0时S闭合，求零输入响应。

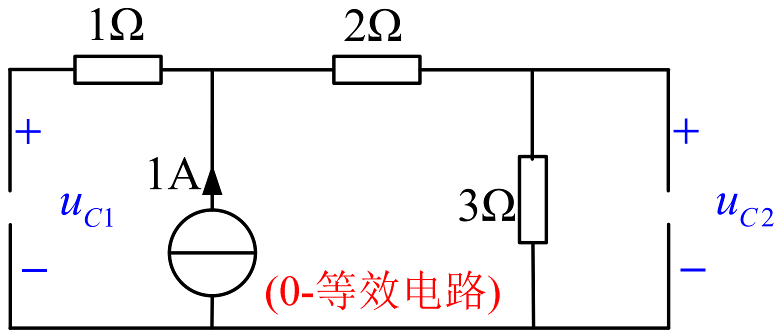
$$u_{C1}、u_{C2}、i_1、i_2、i$$



解: 求初值，由0-时刻等效电路得出

$$u_{C1}(0_+) = u_{C1}(0_-) = 1\times(2+5) = 5\text{V}$$

$$u_{C2}(0_+) = u_{C2}(0_-) = 1\times 3 = 3\text{V}$$



求时间常数:

$$\tau_1 = 1\times 1 = 1s \qquad \tau_2 = 2\times(2//3) = 2.4s$$

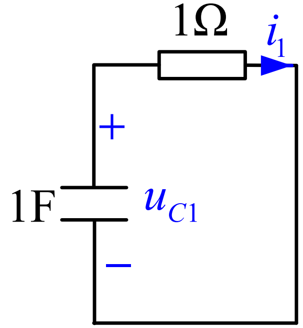
$$\therefore u_{c1} = u_{c1}(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 5e^{-t}\ \text{V}(t\geq 0)$$

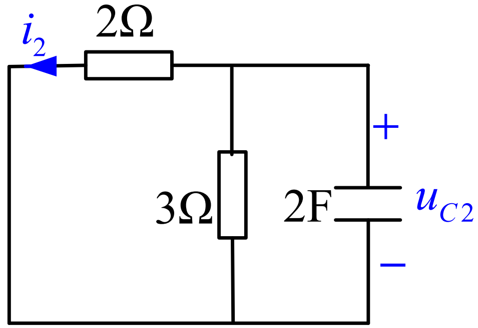
$$u_{c2} = u_{c2}(0_+)e^{-\frac{t}{\tau}} = 3e^{-\frac{t}{2.4}}\ \text{V}(t\geq 0)$$

$$i_1 = \frac{u_{c1}}{1} = 5e^{-t}\ \text{A}(t>0)$$

$$i_2 = \frac{u_{c2}}{2} = 1.5e^{-\frac{t}{2.4}}\ \text{A}(t>0)$$

$$i = 1 + i_2 + i_2 = 1 + 5e^{-t} + 1.5e^{-\frac{t}{2.4}}\ \text{A}(t>0)$$





8.3 直流电源激励下的响应

- 零状态响应：换路前电路储能为零，换路后存在独立电源，仅由独立电源形成的暂态过程。

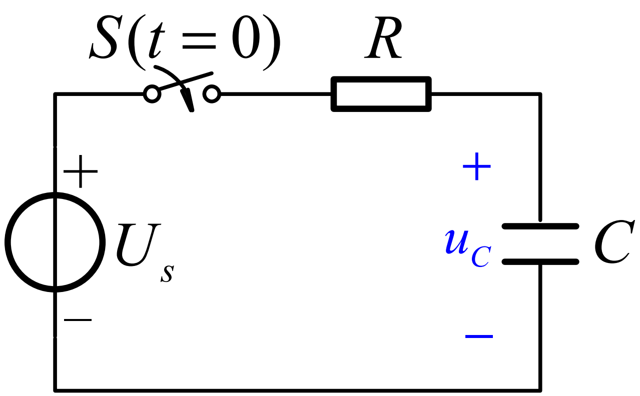
- 全响应：换路前电路已有储能，换路后存在独立电源，储能和独立电源共同作用形成的暂态过程。

- 独立电源有直流电源、阶跃函数、正弦函数及它们的组合，不同类型的独立电源产生的零状态响应及全响应是不同的。本节讨论一阶电路在直流电源激励下暂态过程的变化规律，以及提出三要素法。

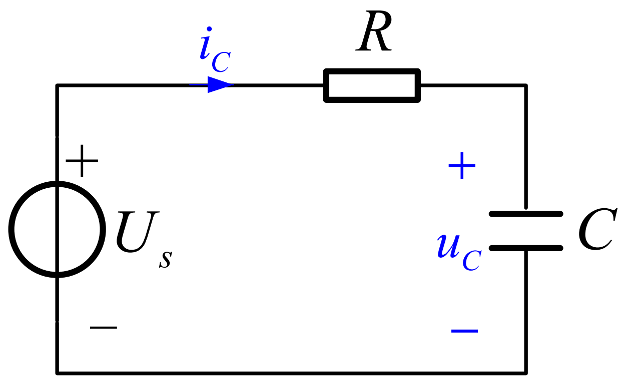
8. 3 直流电源激励下的响应

8.3.1 直流电源激励的RC电路

1 零状态响应



t=0$_-$：$u_C(0_-)$=0



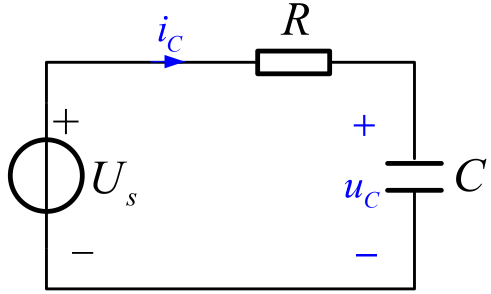
由KVL得：

$$Ri_C + u_C = U_S \quad t > 0$$

$$\begin{cases} RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C = U_S & t > 0 \\ u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0 \end{cases}$$

求解微分方程:

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=U_S \\ u_C(0_+)=u_C(0_-)=0 \end{cases}$$



解答形式为:

$$u_c=u_{cp}+u_{ch}$$

齐次方程的通解

非齐次方程的特解

$$u_c=u_{cp}+u_{ch}=U_s+ke^{-\frac{t}{RC}}$$

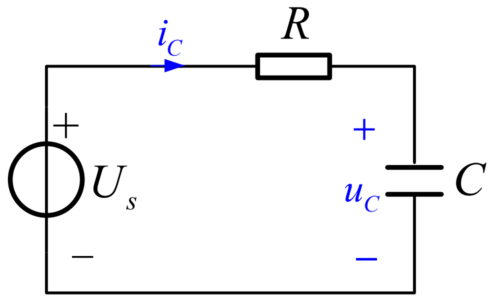
$u_C(0_+)=0$，可解得：$k=u_C(0_+)-U_S=-U_S$

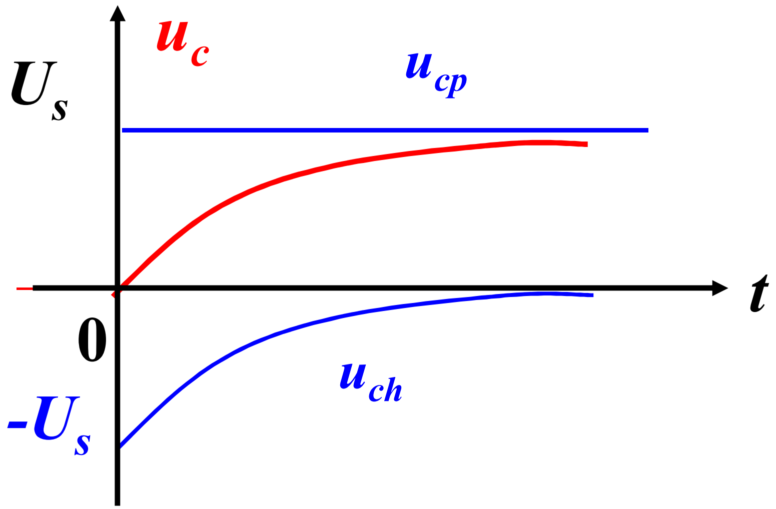
$$\boxed{u_c=U_s-U_se^{-\frac{t}{RC}}\quad(t\geq 0)}$$

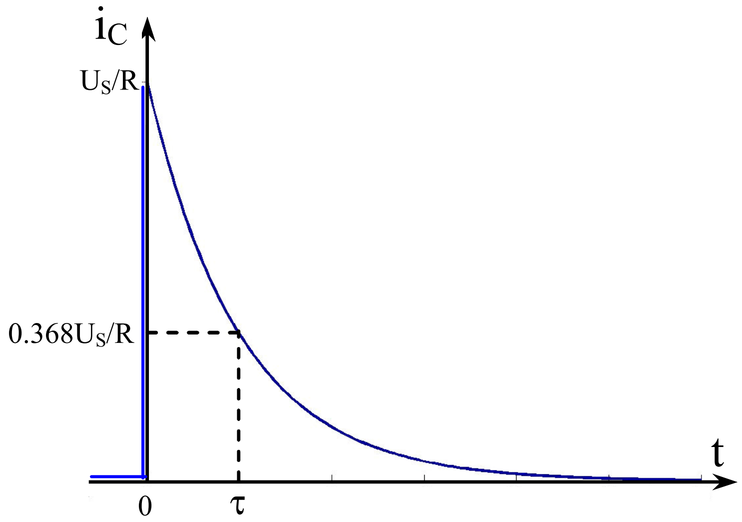
$$\boxed{i_c=\frac{U_s}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\ \mathrm{A}\qquad(t>0)}$$

问：如果初始值不为0，则电容电压为?

波形：







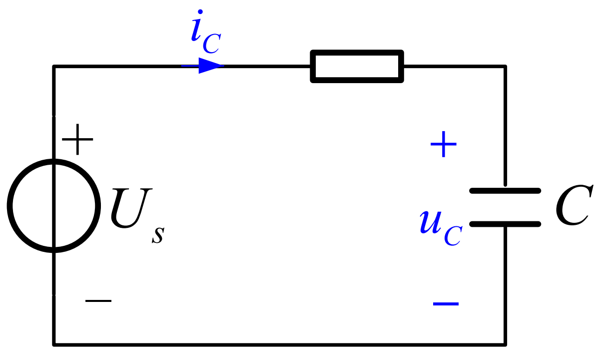
$$u_c = U_s - U_s e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0)$$

$$i_c = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ A} \qquad (t > 0)$$

能量流动：

$$u_c = U_s(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\,\mathrm{V}\,(t \geq 0)$$

$$i_c = \frac{U_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\,\mathrm{A}\,(t > 0)$$



在整个过渡过程中，电源提供的总能量为：

$$w_{Us} = \int_0^{\infty} U_S i_C dt = \int_0^{\infty} U_S \times \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}} dt = CU_S^2$$

电阻吸收的总能量为：

$$w_R = \int_0^{\infty} R i_C^2 dt = \int_0^{\infty} R\left(\frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2 dt = \frac{1}{2} CU_S^2$$

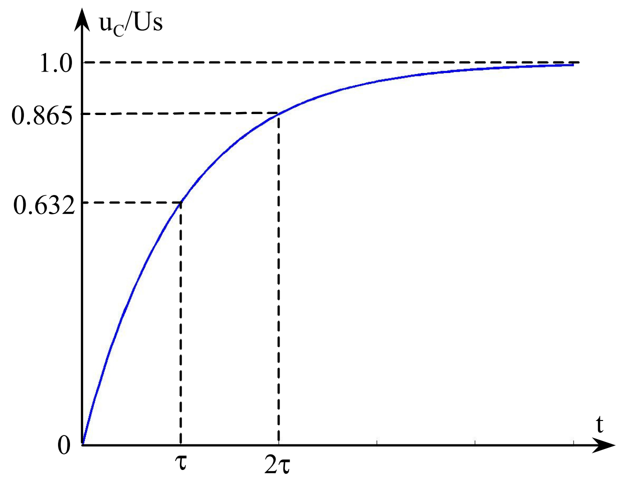
电容吸收的总能量为：

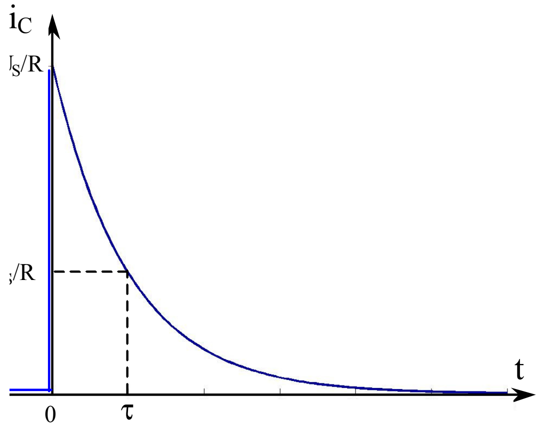
$$w_C = \frac{1}{2} CU_C^2(\infty) = \frac{1}{2} CU_S^2$$

在整个暂态过程中，电源提供的能量有一半被电容吸收，一般被电阻消耗。

时间常数τ（RC）：

$$u_c = U_s(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\text{V}(t \ge 0)$$





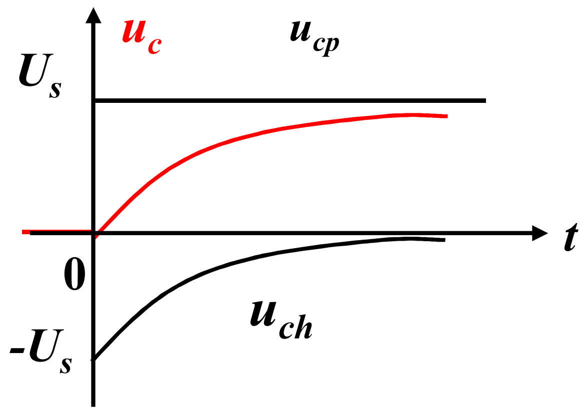
t	0^+	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	…	∞
u_C/U_S	0	0.632	0.865	0.95	0.982	0.993	…	1

- 响应不同，时间常数的意义不同。对于响应u_C，即τ等于电容电压上升到稳态值63.2%所需的时间。
- 时间常数与激励无关，仅取决于电路的结构和参数，决定了过渡过程的进程。
- 经过3τ~ 5τ，电容电压至稳态值的99.3%，可以认为已经达到稳态。

暂态分量与稳态分量:

$$u_c = u_{ch} + u_{cp} = -U_s e^{-\frac{t}{RC}} + U_s \quad (t \geq 0)$$

暂态分量(自由)　　　　稳态分量(强制)

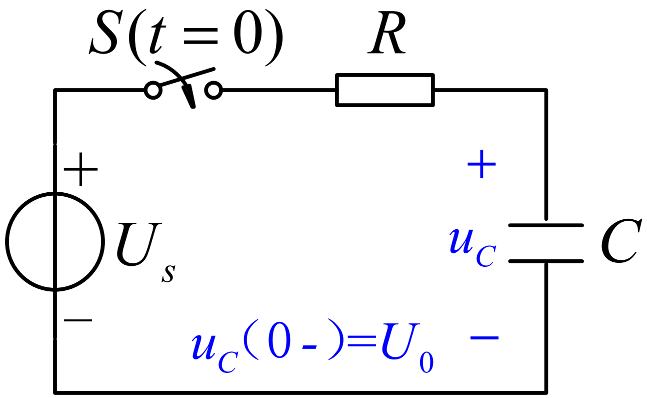


- 暂态响应 (transient response)：齐次方程的通解不受输入的制约，称为自由分量（固有响应）(natural response)。该响应随时间的增长而衰减到零，又称为暂态分量。
- 稳态响应 (forced response)：特解受电路输入的制约，而与电路的初始状态无关，称为强制分量；电路达到稳态后，电容元件的稳态电压等于u_{cp}，所以u_{cp}又称为强制分量。
- 随时间的增长(t=5τ后)，零状态响应趋近于稳态响应 。此时，通过电容的电流为零，电容如同开路一样。

2 全响应 (complete response)

$$\boxed{\text{零状态响应：}\ u_c = U_s - U_s e^{-\frac{t}{RC}}}$$

电路的初始状态为$u_C(0\text{-})=U_0$，开关在t=0时闭合，求u_c。



由KVL得:

$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_S \\ u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0 \end{cases} \qquad (t\geq 0)$$

$$u_c = u_{cp} + u_{ch} = U_s + ke^{-\frac{t}{RC}}$$

$u_C(0_+)=U_0$，可解得 $k = u_C(0_+) - U_s$

$$\boxed{u_c = U_s + [U_0 - U_s]e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t \geq 0)}$$

2　全响应（complete response）

$$\boxed{u_c = U_s + [U_0 - U_s]e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (t \geq 0)}$$

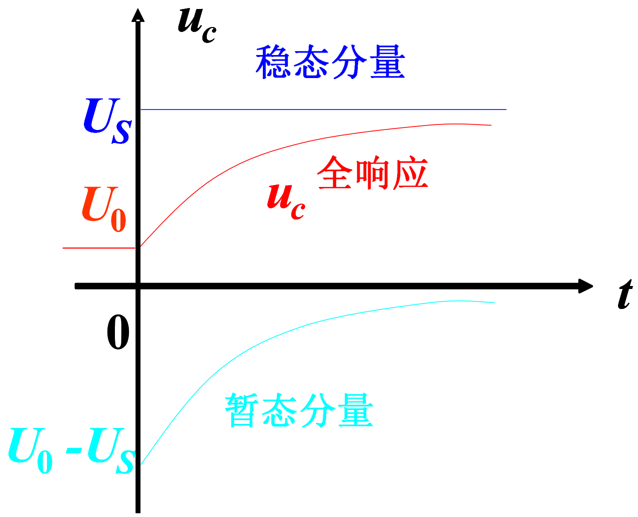
全响应的分解

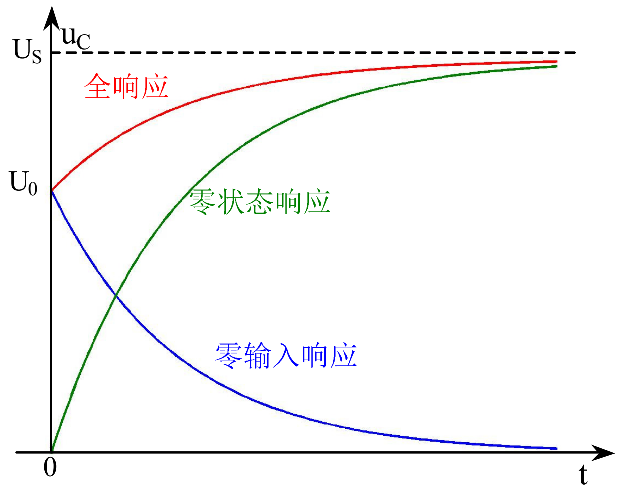
$$u_C(t) = [u_C(0_+) - u_C(\infty)]e^{-\frac{1}{\tau}t} + u_C(\infty)$$

全响应 = 暂态分量　＋　稳态分量

$$u_C(t) = u_C(0_+)e^{-\frac{1}{\tau}t} + \quad [u_C(\infty) - u_C(0_+)e^{-\frac{1}{\tau}t}]$$

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应





8.3 直流电源激励下的响应

3 三要素法

First-order circuits : $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y(\mathrm{t})}{\mathrm{d}t}+\dfrac{1}{\tau}y(\mathrm{t})=f(t) & t>0 \\ y(0_+) \end{cases}$

$$y(t)=k\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}+y_p(t)$$

$$y(t)=[y(0_+)-y_p(0_+)]\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}+y_p(t)$$

直流输入

$$y_p(t)=\text{constant}=y_p(0_+)=y(\infty)$$

$$y(t)=[y(0_+)-y(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{1}{\tau}t}+y(\infty)$$

三要素: $\boxed{y(0_+)}$ $\boxed{y(\infty)}$ $\boxed{\tau}$ 仅在直流输入一阶电路成立

8.3 直流电源激励下的响应

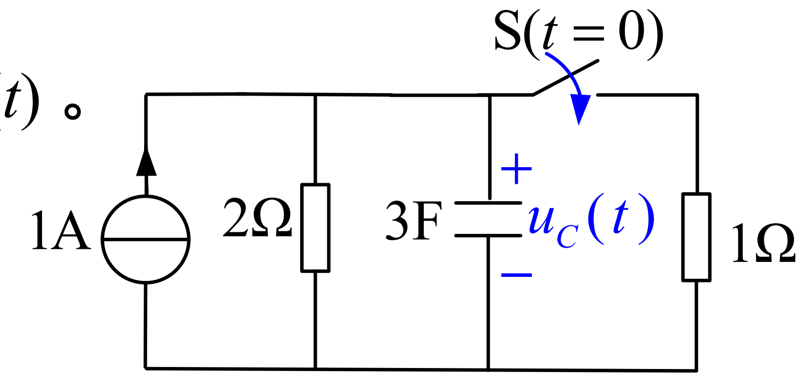
3 三要素法

三要素： $\boxed{y(0_+)}$ $\boxed{y(\infty)}$ $\boxed{\tau}$ 仅在直流输入一阶电路成立

三要素的确定

- 初始值y（0_+）：用电压为u_C（0_+）的直流电压源代替电容、用电流为i_L（0_+）的直流电流源代替电感，画出$t=0_+$时刻的等效电路计算y（0_+）
- 稳态值y（∞）：用开路代替电容、短路代替电感画出$t=\infty$时刻的等效电路，计算y（∞）
- 时间常数τ: $\tau=RC$ 或 $\tau=L/R$

【例1】t=0时开关闭合，求换路后的$u_C(t)$。



解：

1）求初始值： $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 2\text{V}$

2）求稳态值： $u_C(\infty) = \dfrac{2}{2+1} \times 1 = 0.667\,\text{V}$

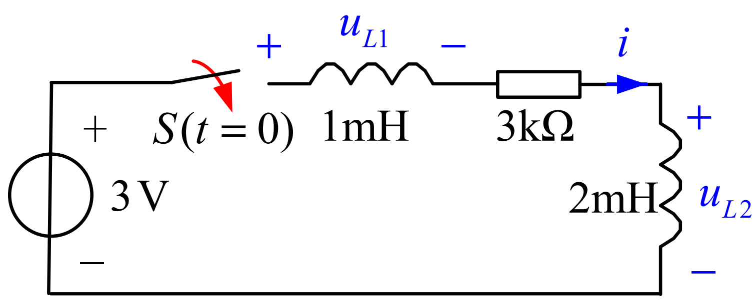
3）求时间常数： $\tau = RC = \dfrac{2}{3} \times 3 = 2\,\text{s}$

$$u_c(t) = u_c(\infty) + [u_c(0^+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 0.667 + (2 - 0.667)e^{-0.5t}$$

$$= 0.667 + 1.33e^{-0.5t}\,\text{V} \qquad t \geq 0$$

【例2】：t=0时S闭合，求零状态响应u_{L1}与u_{L2}。



解：求时间常数

$$\tau=\frac{L_1+L_2}{R}=1\times10^{-6}s$$

求稳态值

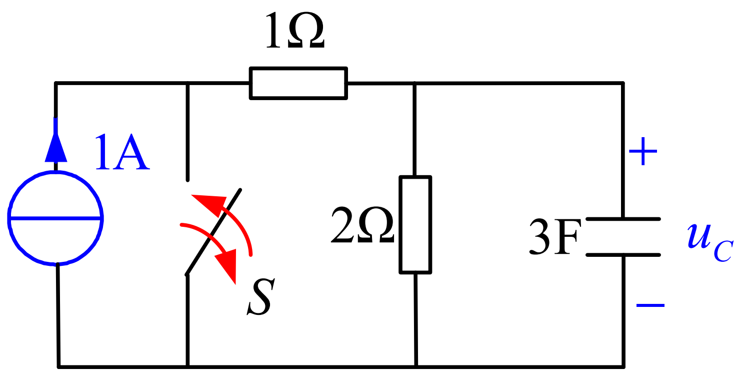
$$i_L(\infty)=\frac{U_S}{R}=1m\,\mathrm{A}$$

$$i=i_L(\infty)+[i_L(0_+)-i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}=1-e^{-10^6t}m\,\mathrm{A}\quad(t\geq0)$$

$$\Rightarrow u_{L1}=L_1\frac{di}{dt}=e^{-10^6t}\,\mathrm{V}\quad(t>0)$$

$$u_{L2}=L_2\frac{di}{dt}=2e^{-10^6t}\,\mathrm{V}\quad(t>0)$$

【例3】：S打开前电路为零状态。t=0时S打开，经过6秒后，S又闭合，求$t>0$时的u_C。



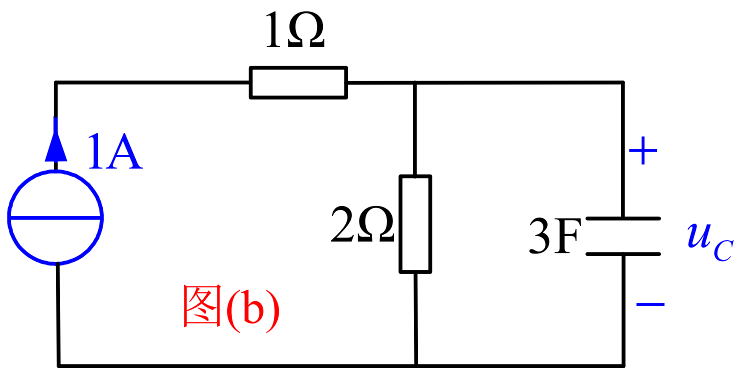
解：0<*t*<6s 时等效电路如图（b）：

1求稳态值：　$u_c(\infty)=1\times2=2\text{V}$

2求时间常数：$\tau=2\times C=6s$

$$u_C=u_c(\infty)(1-e^{-\frac{t}{RC}})\text{V}$$

$$=2(1-e^{-\frac{t}{6}})\quad \text{V}\quad (0\le t\le 6)$$



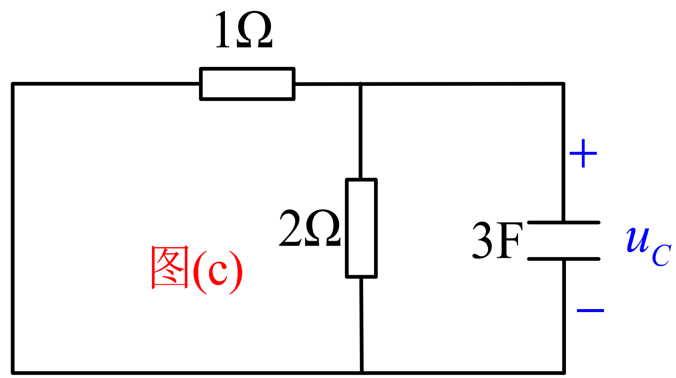
***t*>6s 时等效电路如图（c）：**

$$u_C(6_+)=u_C(6_-)$$

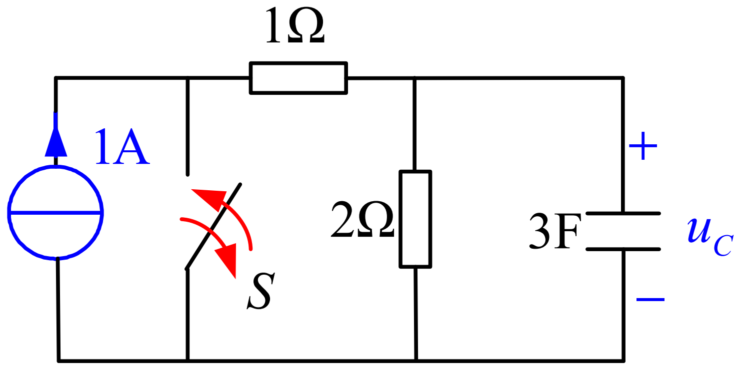
$$=2(1-e^{-\frac{t}{6}})\Big|_{t=6_-}=2(1-e^{-1})=1.26\text{ V}$$

$$\tau_2=RC=(1//2)\times C=\frac{2}{3}\times3=2s$$

$$u_C=u_C(6^+)e^{-\frac{t-6}{\tau_2}}=1.26e^{-\frac{t-6}{2}}\text{ V}\quad (t\ge 6)$$



【例 3】：S打开前电路为零状态。t=0时S打开，经过6秒后，S又闭合，求$t>0$时的u_C。



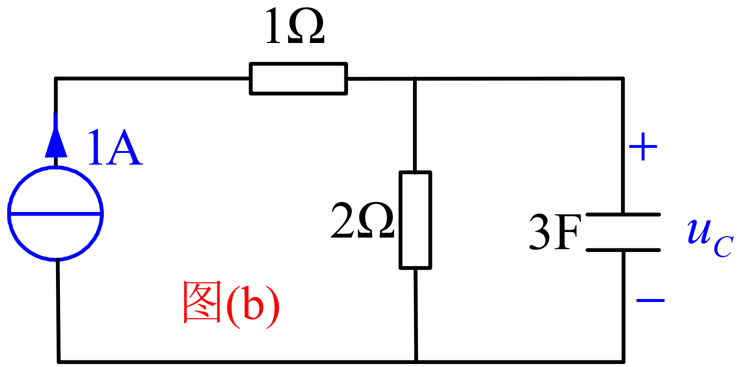
解：0<t<6s 时等效电路如图（b）：

1求稳态值：$u_c(\infty)=1\times2=2\,\mathrm{V}$

2求时间常数：$\tau=2\times C=6s$

$$u_C=u_c(\infty)(1-e^{-\frac{t}{RC}})\,\mathrm{V}$$

$$=2(1-e^{-\frac{t}{6}})\quad \mathrm{V}\quad (0\le t\le 6)$$



图(b)

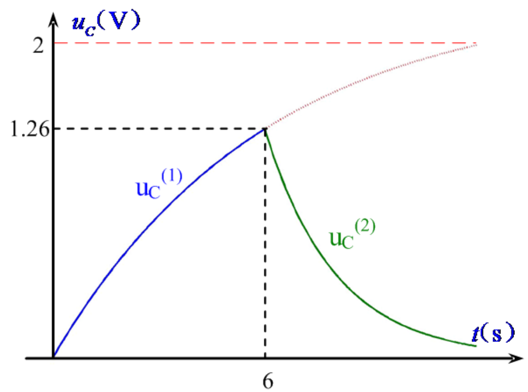
t >6s 时等效电路如图（c）：

$$u_C(6_+)=u_C(6_-)$$

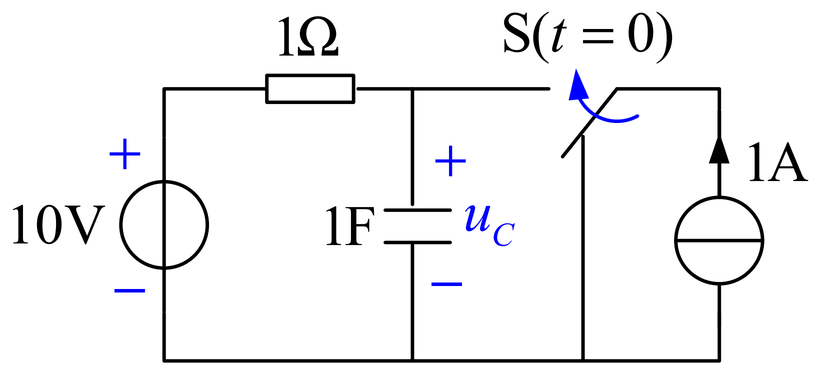
$$=2(1-e^{-\frac{t}{6}})\Big|_{t=6_-}=2(1-e^{-1})=1.26\ \mathrm{V}$$

$$\tau_2=RC=(1//2)\times C=\frac{2}{3}\times3=2s$$

$$u_C=u_C(6^+)e^{-\frac{t-6}{\tau_2}}=1.26e^{-\frac{t-6}{2}}\ \mathrm{V}\quad (t\ge 6)$$



【练习】：计算 u_c （$t>0$）。



三要素法

求初始值： $u_C(0_+) = 10\text{V}$

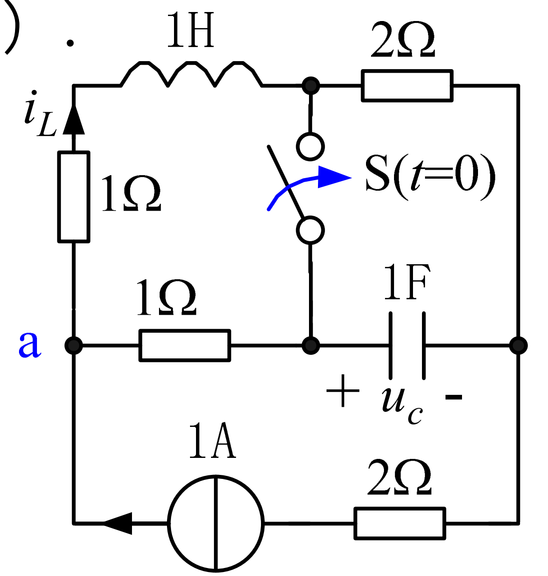
求稳态值： $u_C(\infty) = 11\text{V}$

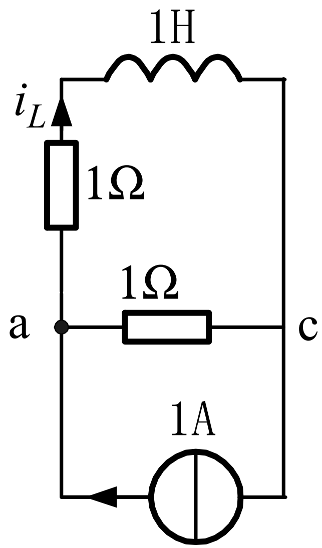
求时间常数： $\tau = 1\times 1 = 1\text{s}$

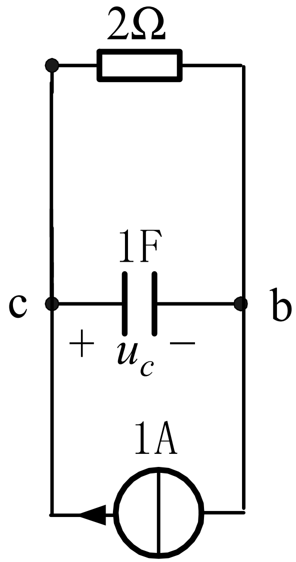
$$u_c(t) = [u_c(0_+) - u_c(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t} + u_c(\infty)$$

$$u_C(t) = (10-11)e^{-t} + 11\text{V} \qquad (t \geq 0)$$

【例 4】：计算 u_{ab} （t>0）.





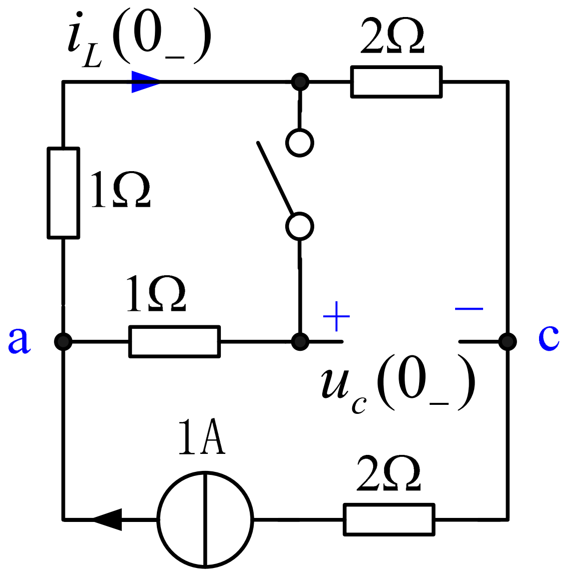


$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 1\text{A}$$

$$i_L(\infty) = 0.5\text{A}$$

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{1}{2} = 0.5\text{s}$$

$$i_L(t) = [0.5 + (1-0.5)e^{-2t}]\text{A} \quad (\text{t} \ge 0)$$



$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 3\text{V}$$

$$u_C(\infty) = 2\text{V}$$

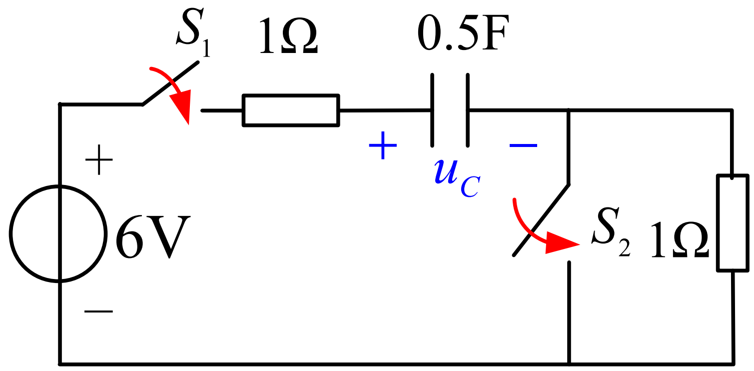
$$\tau_C = RC = 2\text{s}$$

$$u_C(t) = [2 + (3-2)e^{-0.5t}]\text{V} \quad (\text{t} \ge 0)$$

0-时刻等效电路

$$u_{ab}(t) = 1 \times (1 - i_L) + u_C = (2.5 - 0.5e^{-2t} + e^{-0.5t})\text{V} \quad (\text{t}>0)$$

【例 5】： 电容C上无电荷；t=0时S_1闭合，求$u_C(t)$，又当t=2s时，S_2又闭合，求$u_C(t)$。



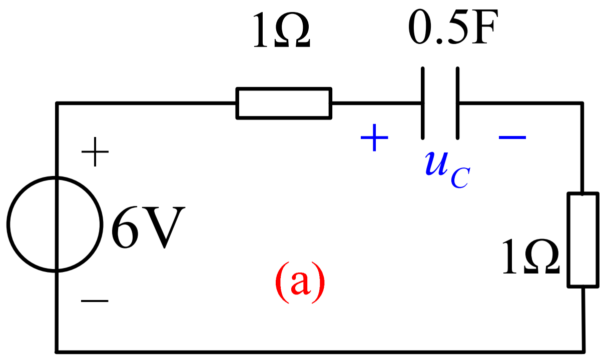
解： 0<t<2 等效电路如图(a)所示

$$u_C(0_+)=u_C(0_-)=0\,\text{V}$$

$$u_C(\infty)=6\,\text{V}$$

$$\tau_C=0.5\times 2=1\,\text{s}$$

$$u_C(t)=6-6e^{-t}\ \text{V}\qquad (0\le t\le 2)$$



t >2等效电路如图(b)所示：

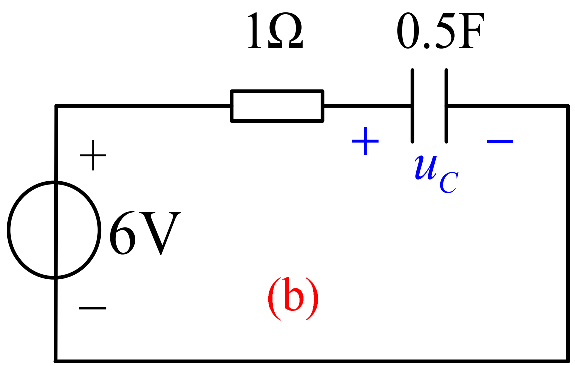
$$u_C(2_+)=u_C(2_-)=6-6e^{-2}=5.19\,\text{V}$$

$$u_C(\infty)=6\,\text{V}$$

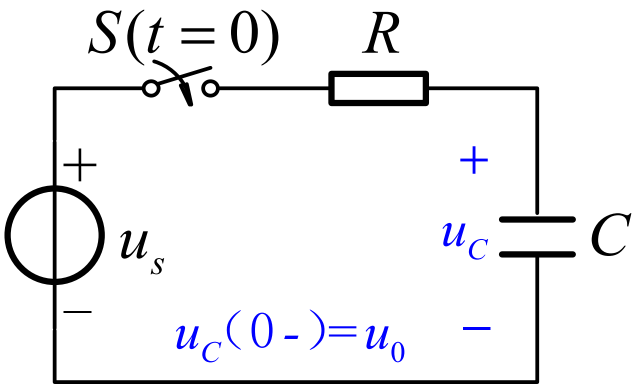
$$\tau_C=0.5\times 1=0.5\,\text{s}$$

$$u_c=u_c(\infty)+[u_c(2_+)-u_c(\infty)]e^{-\frac{t-2}{\tau}}$$

$$=6+(5.19-6)e^{-2(t-2)}\qquad (t\ge 2)$$



*（了解） 8.4 正弦电源激励下的RC电路



$$\begin{cases} RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+u_C=u_\mathrm{s} & t>0 \\ u_C(0_+)=u_C(0_-)=U_0 \end{cases}$$

$$\boxed{u_C=k\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}+A_\mathrm{m}\cos(\omega t+\theta)}$$

$$u_\mathrm{s}(t)=U_\mathrm{m}\cos(\omega t+\phi)$$

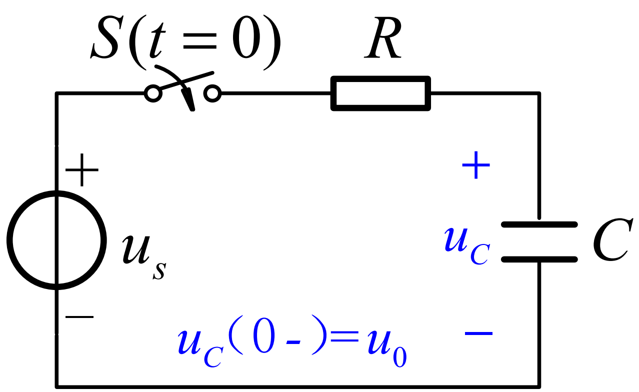
$$u_{CP}=A_\mathrm{m}\cos(\omega t+\theta) \qquad \begin{cases} A_\mathrm{m}=\dfrac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \\ \theta=\phi-\arctan\omega RC \end{cases}$$

$$\boxed{u_C=(U_0-A_\mathrm{m}\cos\theta)\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}+A_\mathrm{m}\cos(\omega t+\theta)}$$

- 暂态分量， 5 τ之后衰减到 0；
- 稳态解是与电源同频率，幅值和初相恒定的正弦函数。

2. 零状态响应分析:

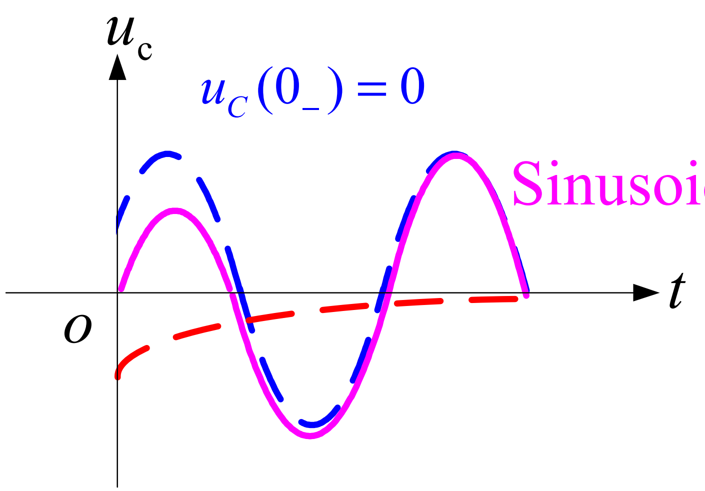
$$u_C = (U_0 - A_m \cos\theta)e^{-\frac{1}{RC}t} + A_m \cos(\omega t + \theta)$$



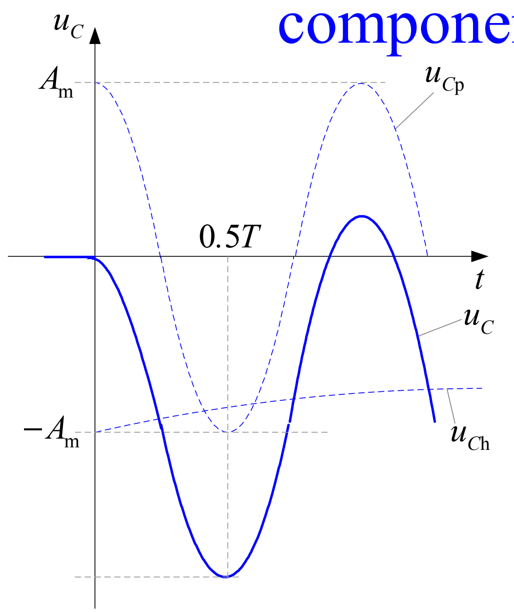
$$\boxed{u_C = (-A_m \cos\theta)e^{-\frac{1}{RC}t} + A_m \cos(\omega t + \theta)}$$

Transient component

Steady-state component



Sinusoidal steady-state



- 设$0<\theta<90°$，且5τ与T接近，**则电路经过一个周期达到稳定；**
- 设$\theta=0°$，且5 τ》T，则电路经过多个周期达到稳定；在0.5T附近，电容电压最大，**暂态最高电压接近2A_m**。称为**暂态过电压**现象。

*（了解） 8.5含运算放大器电路的一阶电路

例： 求$t>0$的响应u_o

解：

1）、求初始值：$u_C(0^+)=u_C(0^-)=0\,\text{V}$

2）、求稳态值：

$$u_C(\infty)=-\frac{500}{100}\times 0.2=1\,\text{V}$$

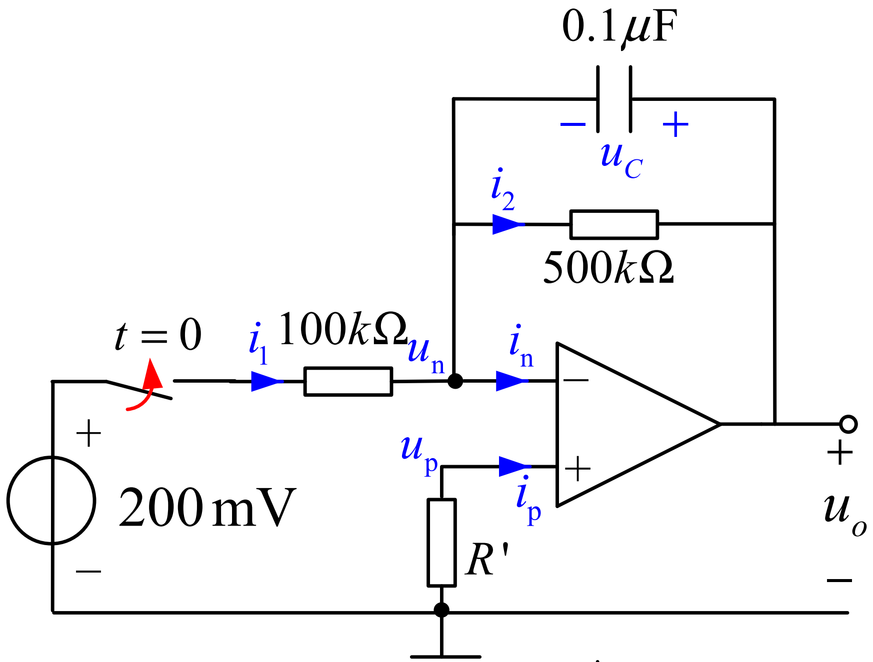
3）、求时间常数：

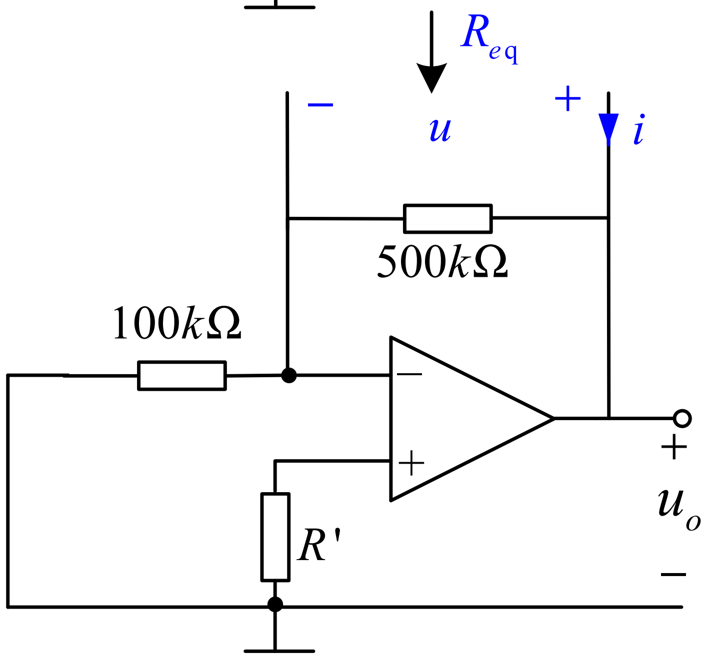
$$R_{eq}=\frac{u}{i}=500k\Omega$$

$$\tau=R_{eq}C=500\times10^3\times0.1\times10^6=0.05\,\text{s}$$

$$u_c(t)=u_c(\infty)+[u_c(0_+)-u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

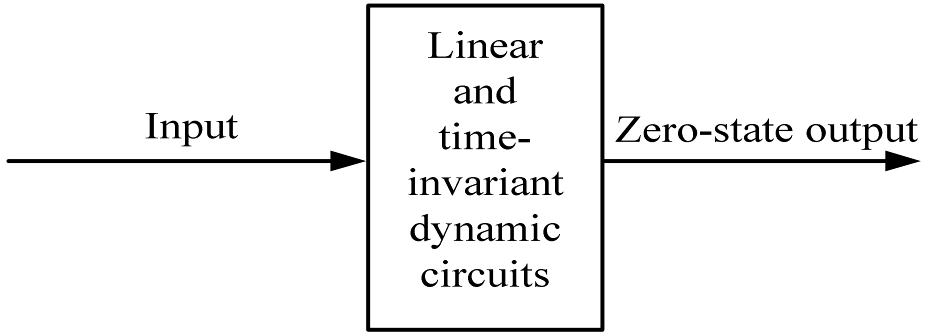
$$=-1+e^{-20t}\qquad（t\geq0）$$





8. 6线性非时变特性

零状态响应与激励间的关系



$$x_1(t) \longrightarrow y_1(t)$$

$$x_2(t) \longrightarrow y_2(t)$$

8.6.1线性特性 $k_1x_1(t)+k_2x_2(t) \longrightarrow k_1y_1(t)+k_2y_2(t)$

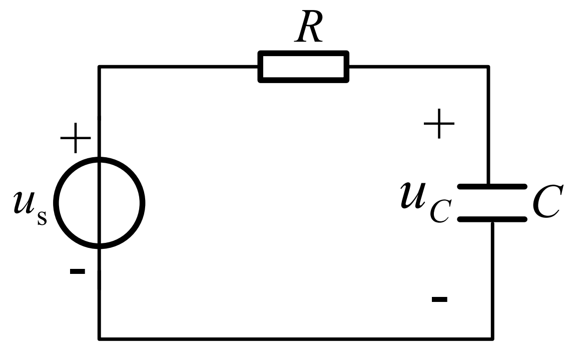
8.6.2非时变特性 $x_1(t-t_0) \longrightarrow y_1(t-t_0)$

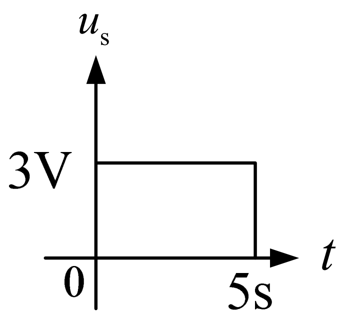
$$\frac{\mathrm{d}\ x_1(t)}{\mathrm{d}\ t} \longrightarrow \frac{\mathrm{d}\ y_1(t)}{\mathrm{d}\ t}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x_1(t)\mathrm{d}\ t \longrightarrow \int_{-\infty}^{t} y_1(t)\mathrm{d}\ t$$

8.6线性非时变特性

【例1】：Find the zero-state response u_c.





设$u_s=\varepsilon(t)$V时，$u_C=s(t)$

$$u_C(0_-)=0,\quad u_C(\infty)=\varepsilon(t),\quad \tau=RC$$

$$s(t)=[(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)]\mathrm{V}$$

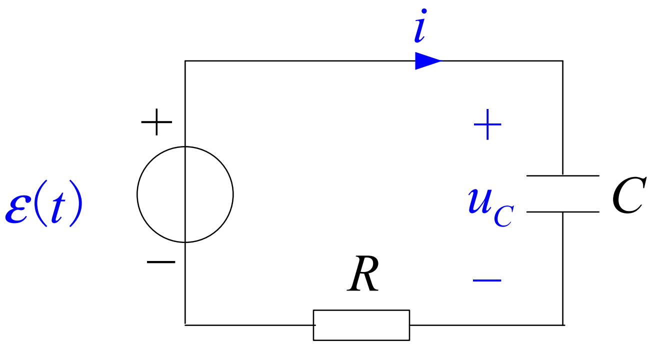
由非时变特性

$$u_s=[3\varepsilon(t)-3\varepsilon(t-5)]\mathrm{V} \qquad u_C=3s(t)-3s(t-5)$$

$$u_C=[3(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)-3(1-\mathrm{e}^{-\frac{t-5}{RC}})\varepsilon(t-5)]\mathrm{V}$$

8. 6线性非时变特性

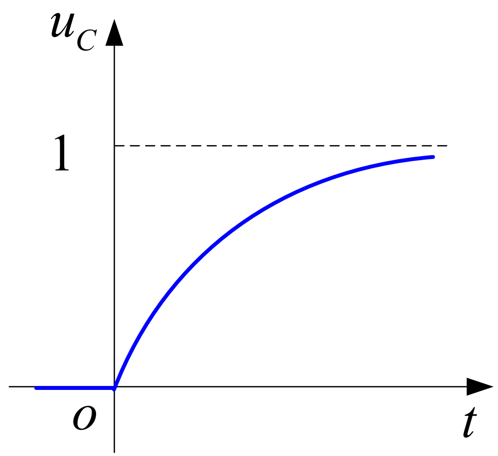
8.6.3单位阶跃响应与单位冲激响应



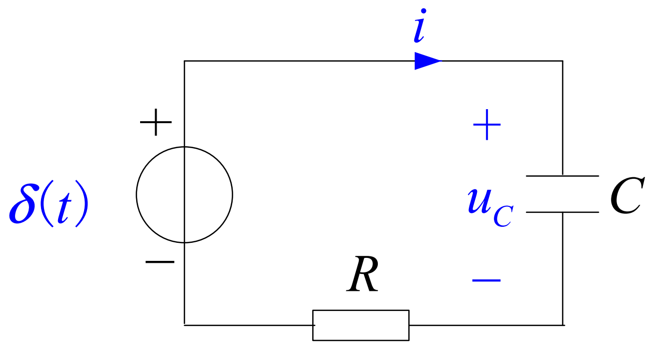
s(t) :

$$u_C = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$



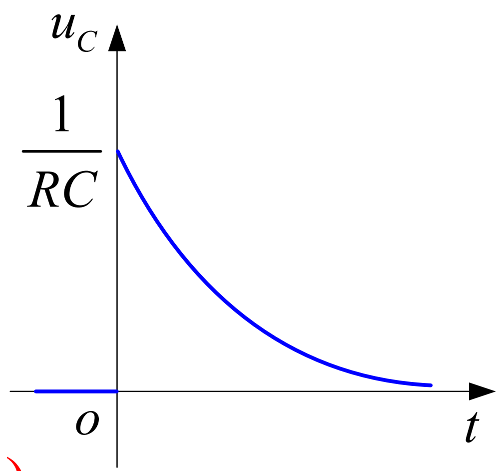
$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$



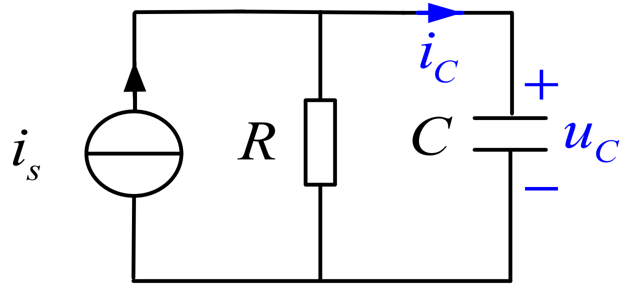
h(t) :

$$u_C(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)$$

$$i(t) = -\frac{1}{R^2 C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t) + \frac{1}{R}\delta(t)$$



【例1】已知$u_c(0-)=0$，求：$i_s(t)$为单位冲激激励时电路响应$u_C(t)$和$i_C(t)$。



解求单位阶跃响应　令　$i_s(t)=\varepsilon(t)$

$$u_C(t)=R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \qquad i_c=e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

再求单位冲激响应　令　$i_s(t)=\delta(t)$

$$u_C=\frac{d}{dt}R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t)=\underbrace{R(1-e^{-\frac{t}{RC}})\delta(t)}_{0}+\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$=\frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

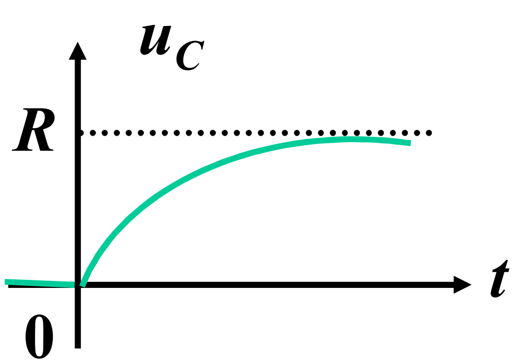
$f(t)\delta(t)$
$=f(0)\delta(t)$

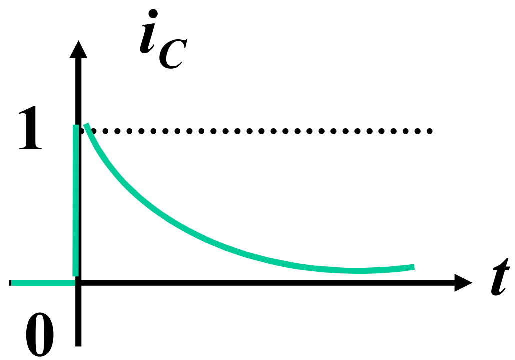
$$i_c=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)]=e^{-\frac{t}{RC}}\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$=\delta(t)-\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

$$u_C(t) = R(1 - e^{-\frac{t}{RC}})\varepsilon(t) \qquad i_c = e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

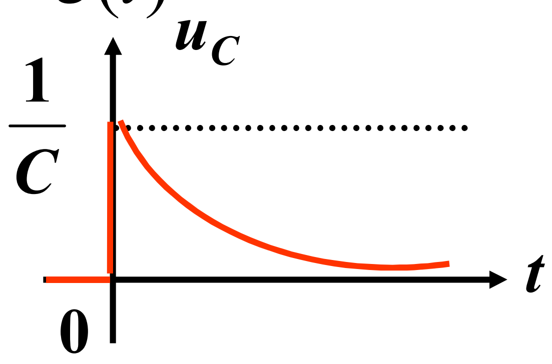
阶跃响应

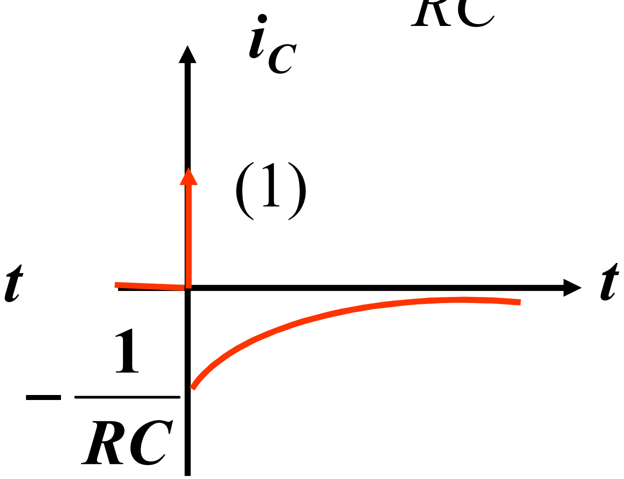




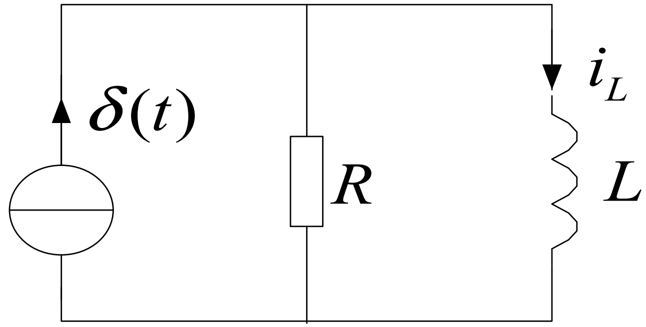
$$u_C = \frac{1}{C}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t) \qquad i_C = \delta(t) - \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$$

冲激响应





【练习】: Find the impulse response i_L.



由阶跃响应获得冲激响应 设$i_s = \varepsilon(t)\text{A}$

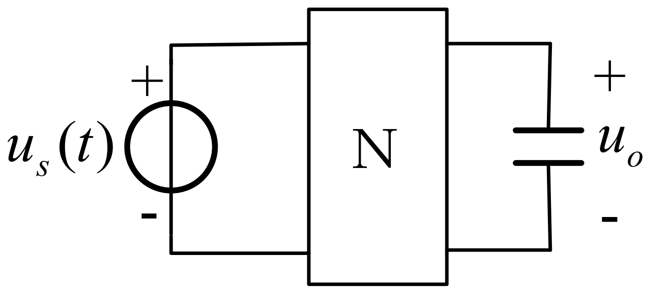
$$i_L(0_+) = 0, \quad i_L(\infty) = \varepsilon(t), \quad \tau = \frac{L}{R}$$

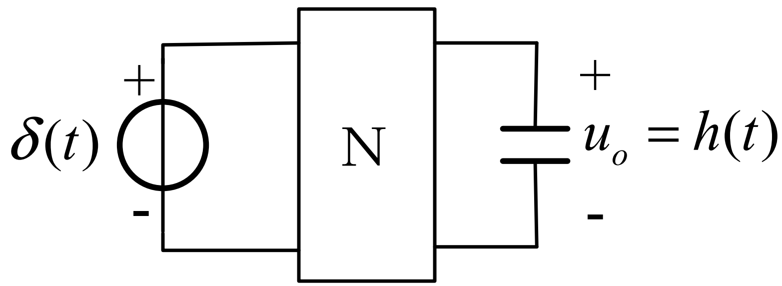
$$\boxed{\begin{aligned} s(t) &= i_L(t) = i_L(\infty) - i_L(\infty)e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\varepsilon(t) \end{aligned}}$$

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})\delta(t) + \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

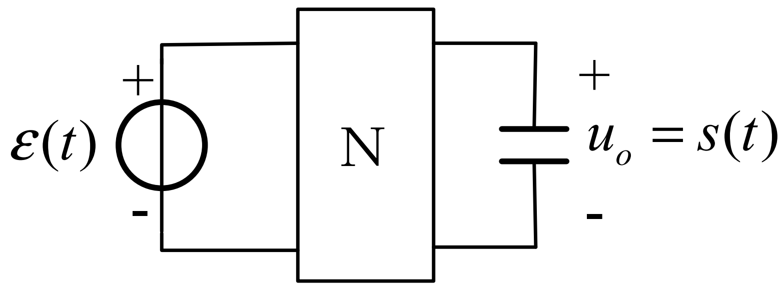
$$= \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)$$

【例2】：不含独立电源的线性时不变网络N的零输入响应为 $e^{-t}\mathrm{V}$ ；原始储能不变，电压源 $u_s(t)=\delta(t)\mathrm{V}$ 激励下的全响应为 $3\,e^{-t}\mathrm{V}$ 。试确定 $u_s(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)\mathrm{V}$ 下的零状态响应。





$$h(t)=(3e^{-t}-e^{-t})\varepsilon(t)=2e^{-t}\varepsilon(t)$$

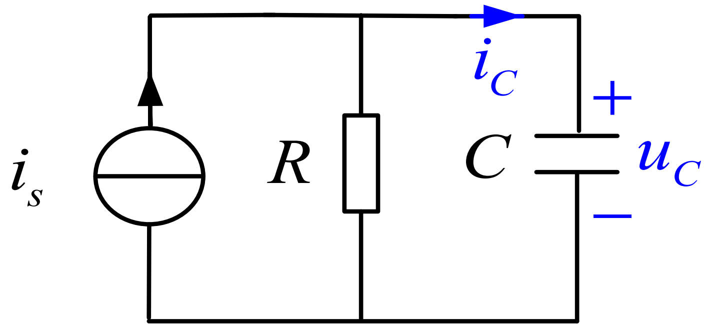


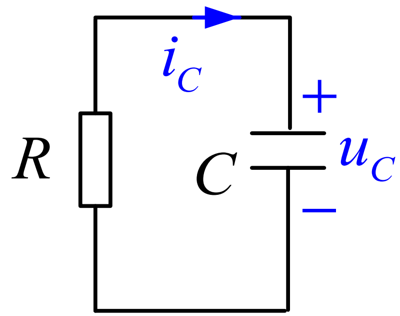
$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{t}2e^{-t}\varepsilon(t)\mathrm{d}t=(\int_{0}^{t}2e^{-t}\mathrm{d}t)\varepsilon(t)=(2-2e^{-t})\varepsilon(t)$$

$$u_o(t)=(2-2e^{-t})\varepsilon(t)-[2-2e^{-(t-1)}]\varepsilon(t-1)$$

*（自学） 8.7 冲击响应计算

分二个时间段来考虑冲激响应





$$u_C(0_+) = \frac{1}{C}$$

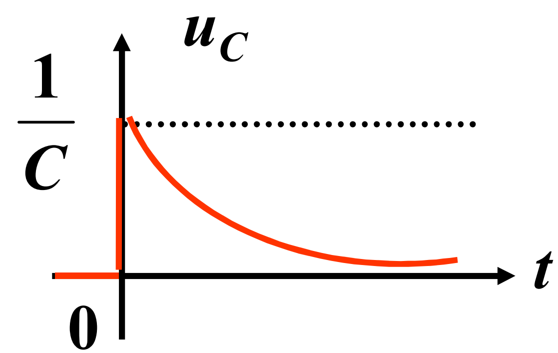
(1). t 在 $0_- \sim 0_+$间 $\quad i_C = \delta(t)$

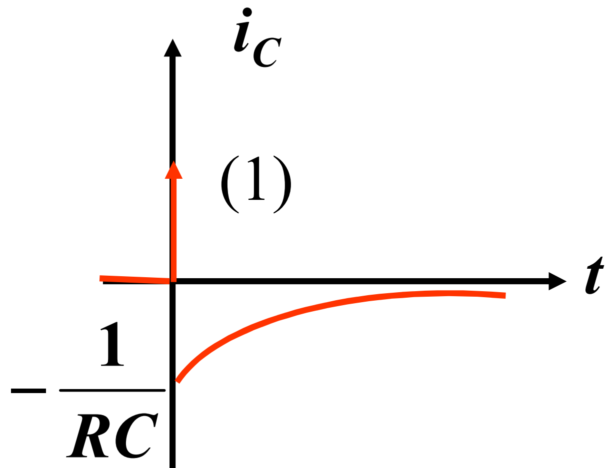
$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C}\int_{0_-}^{0_+} i_C dt = \frac{1}{C}$$

(2). $t > 0^+$ 零输入响应 （RC放电）

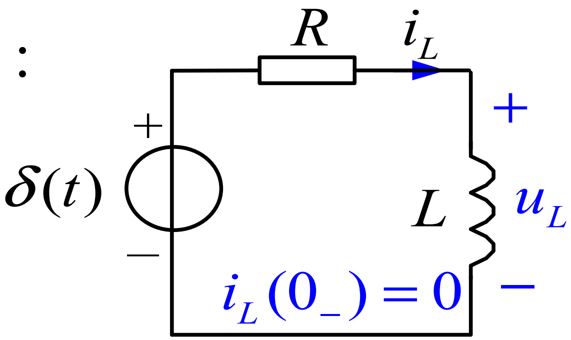
$$u_c = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \ge 0^+ \qquad i_c = -\frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \ge 0^+$$

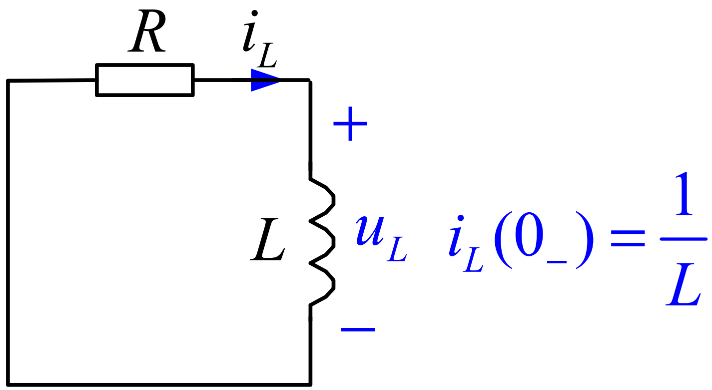
$$\boxed{u_c = \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t), \; i_c = \delta(t) - \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} \varepsilon(t)}$$





【例2】：





(1). t 在 $0_- \sim 0_+$间 $u_L=\delta(t)$

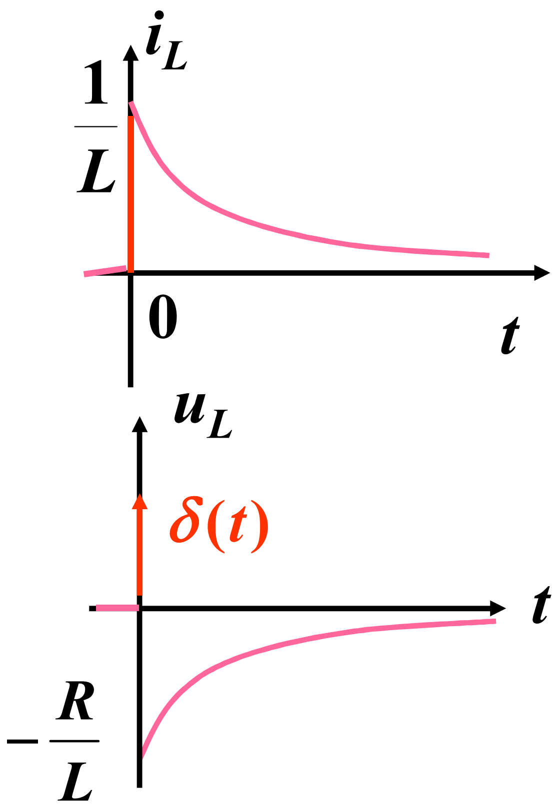
$$i_L(0_+)=i_L(0_-)+\frac{1}{L}\int_{0_-}^{0_+}u_L dt=\frac{1}{L}$$

(2). $t>0_+$ 零输入响应 $\tau=\frac{L}{R}$

$$i_L=\frac{1}{L}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t\geq 0^+$$

$$u_L=-i_L R=-\frac{R}{L}e^{-\frac{t}{\tau}} \quad t\geq 0^+$$

$$\boxed{i_L=\frac{1}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)} \qquad \boxed{u_L=\delta(t)-\frac{R}{L}e^{-\frac{t}{\tau}}\varepsilon(t)}$$



计划学时：5学时；课后学习15学时

作业：

8-2、8-4/ 零输入响应

8-13/ 零状态响应

8-18 /阶跃响应

8-31 /三要素法

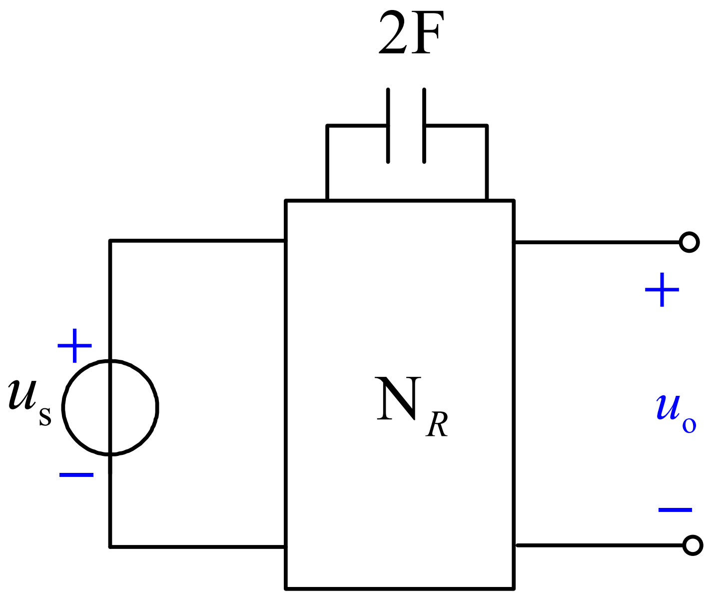
8-41 /线性时不变

8-48/冲激响应

【8-31】：N_R为线性无源电阻网络，电容的原始储能为0，

当 $u_s=\varepsilon(t)\mathrm{V}$ 时，$u_o=(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}e^{-\frac{1}{4}t})\varepsilon(t)\mathrm{V}$。电压源不变，电容换成

2H 的电感。求零状态响应u_o



解：求时间常数

$$RC=4s\quad R=2\Omega\qquad \tau=\frac{L}{R}=1s$$

原电路 $u_o(\infty)=\frac{1}{2}\mathrm{V}\qquad u_o(0_+)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}=\frac{5}{8}\mathrm{V}$

电容换为电感后

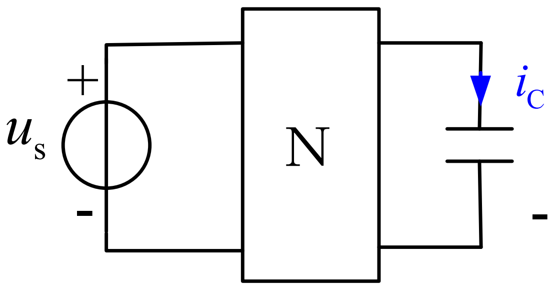
电感电路初态，等效为电容电路的稳态

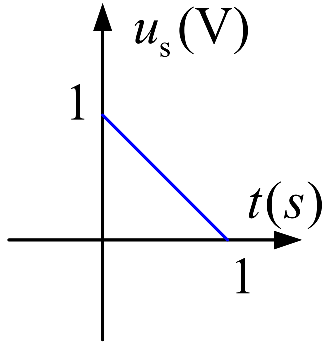
电感电路稳态，等效为电容电路的初态

$$u_o(0+)=\frac{1}{2}\mathrm{V}\qquad u_o(\infty)=\frac{5}{8}\mathrm{V}$$

换为电感后零状态响应u_o $\quad u_o=[\frac{5}{8}+(\frac{1}{2}-\frac{5}{8})\ e^{-t}]\varepsilon(t)\mathrm{V}$

【8-41】：不含独立电源的线性时不变网络N的单位阶跃响应为 $i_C=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\mathrm{A}$ ，求u_s为图示波形时零状态响应。





$$u_s=-(t-1)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]\mathrm{V}$$

$$=\varepsilon(t)-t\varepsilon(t)+(t-1)\varepsilon(t-1)$$

当 $u_s'=\varepsilon(t)$ $\boxed{i_C'=s(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\mathrm{A}}$

当 $u_s''=-t\varepsilon(t)$ 求导得 $\dfrac{du_s''}{dt}=-\varepsilon(t)$

$$i_C''=\int_{0-}^{t}[-s(t)]\mathrm{d}t=\int_{0-}^{t}[-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)]\mathrm{d}t=\int_{0-}^{t}[(-\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t\varepsilon(t)\boxed{=(\mathrm{e}^{-t}-1)\varepsilon(t)}$$

当 $u_s'''=(t-1)\varepsilon(t-1)$ 求导得 $\dfrac{du_s'''}{dt}=(t-1)\delta(t-1)+\varepsilon(t-1)=\varepsilon(t-1)$

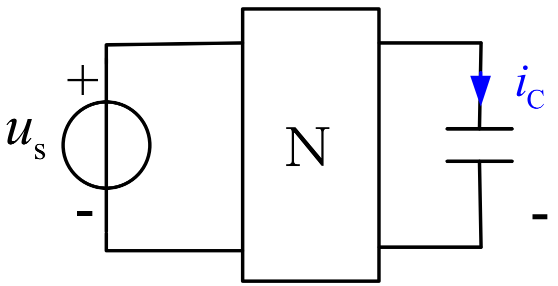
$$i_C'''=\int_{0-}^{t}[s(t-1)]\mathrm{d}t=\int_{0-}^{t}[\mathrm{e}^{-(t-1)}\varepsilon(t-1)]\mathrm{d}t=\int_{1}^{t}[\mathrm{e}^{-(t-1)}\mathrm{d}t\varepsilon(t-1)$$

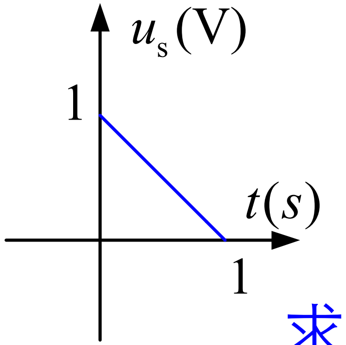
$$\boxed{=(1-\mathrm{e}^{-(t-1)})\varepsilon(t-1)}$$

由线性性得

$$i_C=i_C'+i_C''+i_C'''\boxed{=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+(\mathrm{e}^{-t}-1)\varepsilon(t)+(1-\mathrm{e}^{-(t-1)})\varepsilon(t-1)}$$

【8-41】：不含独立电源的线性时不变网络N的单位阶跃响应为 $i_{\mathrm{C}}=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\mathrm{A}$，求$u_{\mathrm{s}}$为图示波形时零状态响应。





$$u_s=-(t-1)[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]\mathrm{V}$$

$$=\varepsilon(t)-t\varepsilon(t)+(t-1)\varepsilon(t-1)$$

求导得 $$\frac{du_s}{dt}=\delta(t)-\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)$$

方法2

当 $u_s=\varepsilon(t)$ $\boxed{i_{\mathrm{C}}=s(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)\mathrm{A}}$

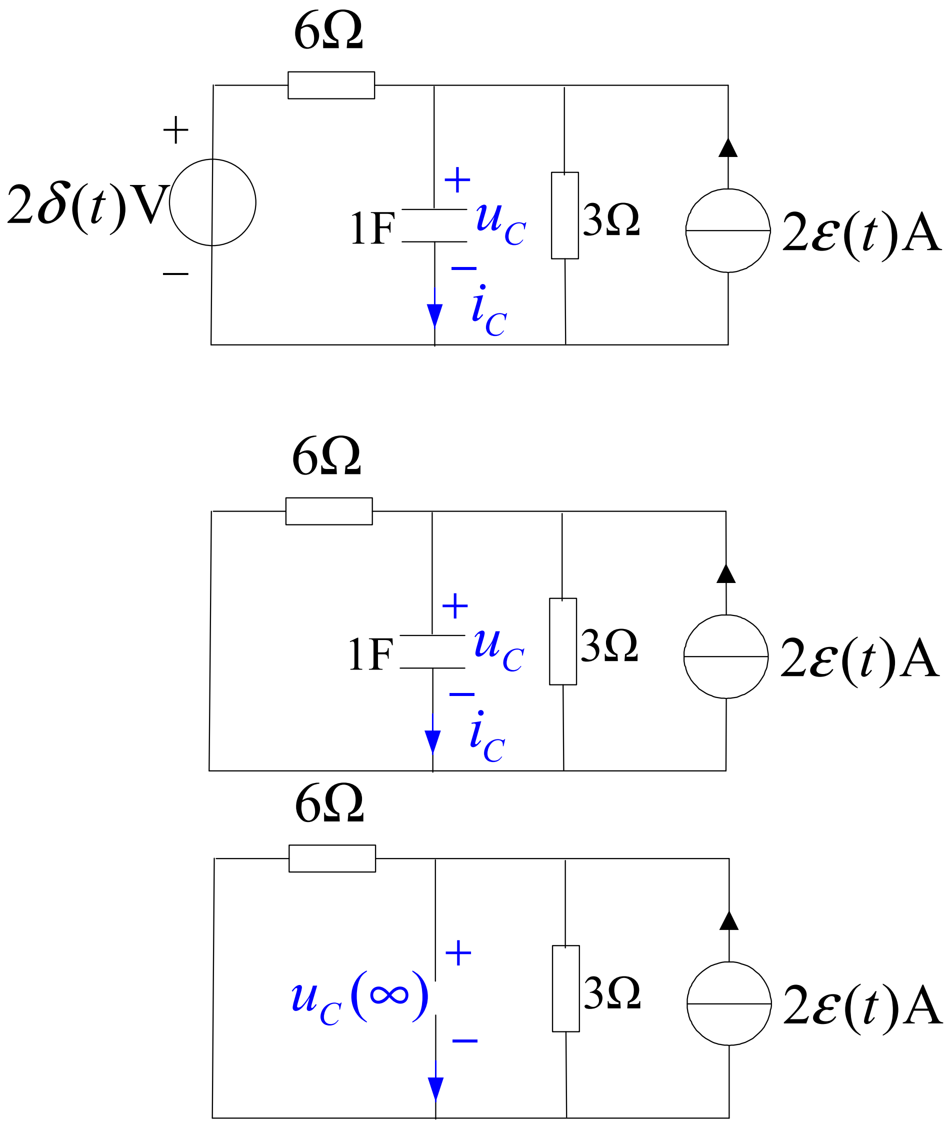
当 $u_s=\delta(t)$ $i_{\mathrm{C}}=h(t)=\mathrm{e}^{-t}\delta(t)-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$ $\boxed{=\delta(t)-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)}$

$$i_C=\int_{0-}^{t}[\delta(t)-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)-\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+\mathrm{e}^{-(t-1)}\varepsilon(t-1)]\mathrm{d}t$$

$$=\varepsilon(t)\ +2(\mathrm{e}^{-t}-1)\varepsilon(t)\ +(1-\mathrm{e}^{-(t-1)})\varepsilon(t-1)$$

$$=2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)-\varepsilon(t)+(1-\mathrm{e}^{-(t-1)})\varepsilon(t-1)\mathrm{A}$$

【8-48】：求零状态响应u_C、i_C。



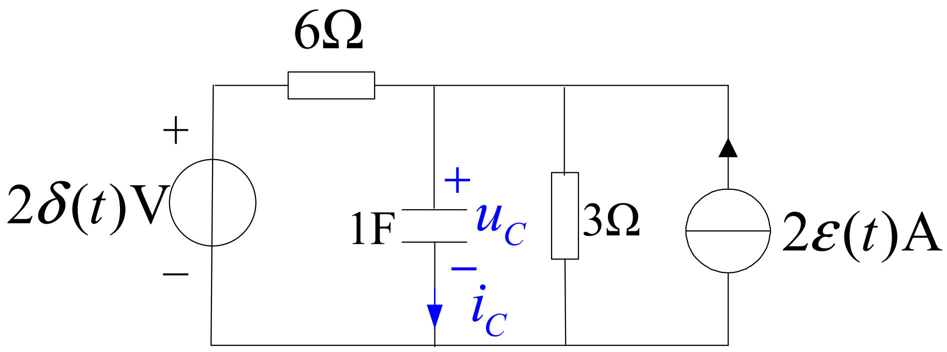
叠加定理，i_s=2ε(t)A单独作用时：

$$u_C(\infty)=4\text{V} \quad \tau=1\times 2=2\text{s}$$

$$\boxed{u_c{}'(t)=4(1-e^{-0.5t})\ \varepsilon(\text{t})\ \text{V}}$$

$$\boxed{i_c{}'(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=2e^{-0.5t}\varepsilon(\text{t})}$$

【8-48】：求零状态响应u_C、 i_C。



叠加定理，i_s=2ε(t)A单独作用时：

$$u_C(\infty)=4\text{V} \quad \tau=1\times 2=2\text{s}$$

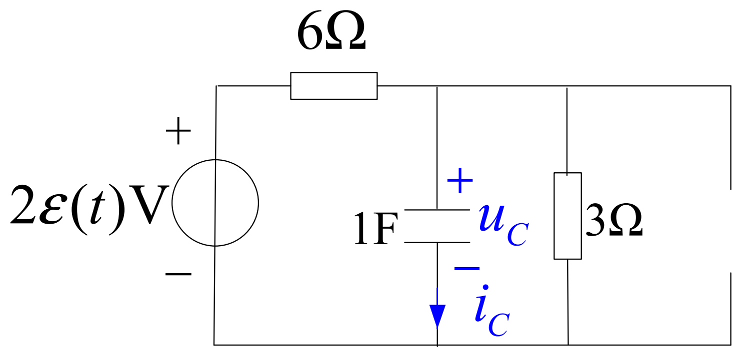
$$\boxed{u_c'(t)=4(1-e^{-0.5t})\ \varepsilon(\text{t})\ \text{V}}$$

$$\boxed{i_c'(t)=C\frac{\text{d}u_C}{\text{d}t}=2e^{-0.5t}\varepsilon(\text{t})}$$

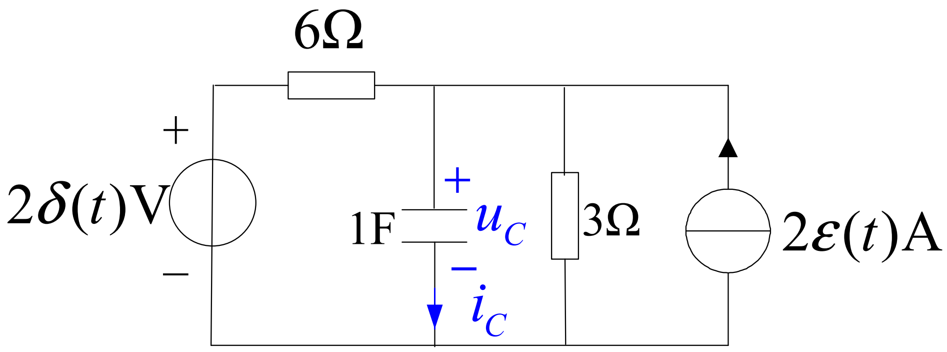
电压源2δ(t) 单独作用，先计算u_s=2ε(t)的阶跃响应：

$$u_C(\infty)=\frac{2}{3}\text{V} \quad \tau=1\times 2=2\text{s} \quad u_c(t)=\frac{2}{3}(1-e^{-0.5t})\ \varepsilon(\text{t})\ \text{V}$$

$$i_c(t)=C\frac{\text{d}u_C}{\text{d}t}=\frac{1}{3}e^{-0.5t}\varepsilon(\text{t})$$



【8-48】：求零状态响应u_C、i_C。



叠加定理，i_s=2ε(t)A单独作用时：

$$u_C(\infty)=4\text{V}\quad \tau=1\times2=2\text{s}$$

$$\boxed{u_c'(t)=4(1-e^{-0.5t})\ \varepsilon(\text{t})\ \text{V}}$$

$$\boxed{i_c'(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=2e^{-0.5t}\varepsilon(\text{t})}$$

电压源2δ(t) 单独作用，先计算u_s=2ε(t)的阶跃响应：

$$u_C(\infty)=\frac{2}{3}\text{V}\quad \tau=1\times2=2\text{s}\quad u_c(t)=\frac{2}{3}(1-e^{-0.5t})\ \varepsilon(\text{t})\ \text{V}$$

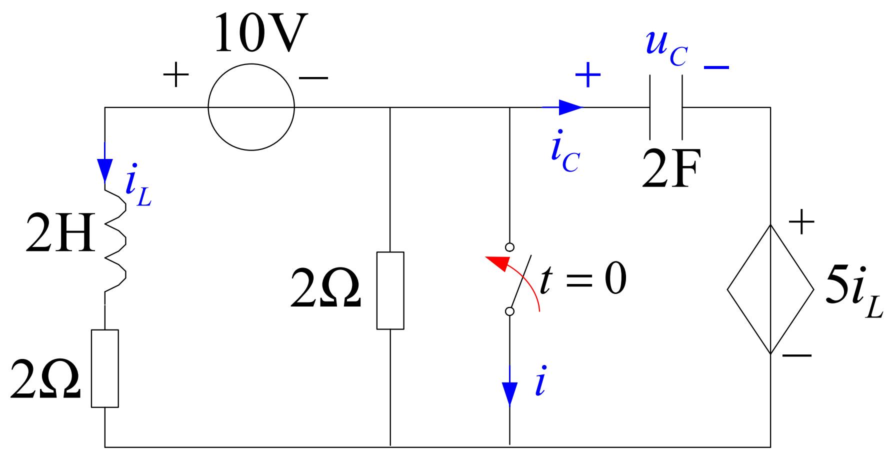
$$i_c(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{3}e^{-0.5t}\varepsilon(\text{t})$$

$$\boxed{i_c''(t)=\frac{1}{3}\delta(t)-\frac{1}{6}e^{-0.5t}\varepsilon(\text{t})}$$

求导得 $$u_c''(t)=\frac{\mathrm{d}[\frac{2}{3}(1-e^{-0.5t})\ \varepsilon(\text{t})]}{\mathrm{d}t}\boxed{=\frac{1}{3}e^{-0.5t}\varepsilon(\text{t})}$$

$$u_c=u_c'+u_c''=(4-\frac{11}{3}e^{-0.5t})\ \varepsilon(\text{t})\ \text{V}\quad i_c=i_c'+i_c''=\frac{1}{3}\delta(t)+\frac{11}{6}e^{-0.5t}\varepsilon(\text{t})$$

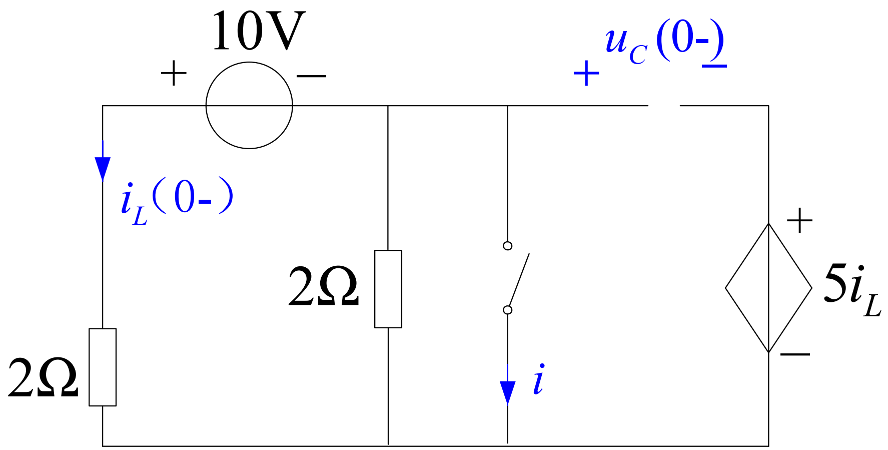
【8-60】(1)求t>0时的响应 i_L (2)求t>0时的响应 i (3)求t=0时的响应 i 。



(1)求t>0时的响应 i_L

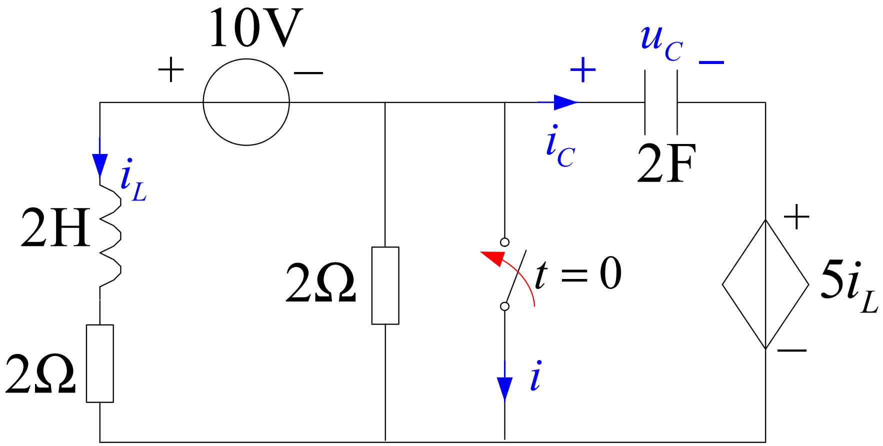
求初始值: $i_L(0+)=i_L(0-)=2.5\text{A}$

$$u_C(0-)=-2\times2.5-5\times2.5=-17.5\text{V}$$



0_-等效电路

【8-60】(1)求t>0时的响应 i_L (2)求t>0时的响应 i (3)求t=0时的响应 i 。



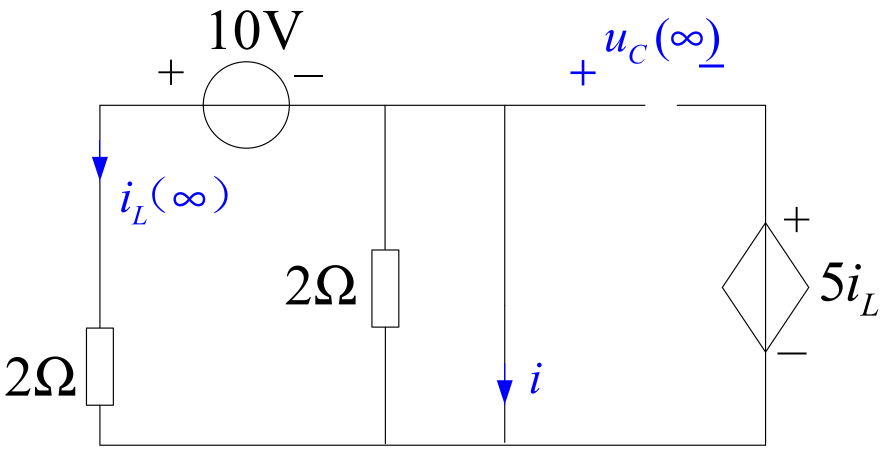
(1)求t>0时的响应 i_L

求初始值: $i_L(0+)=i_L(0-)=2.5\text{A}$

$u_C(0-)=-2\times2.5-5\times2.5=-17.5\text{V}$

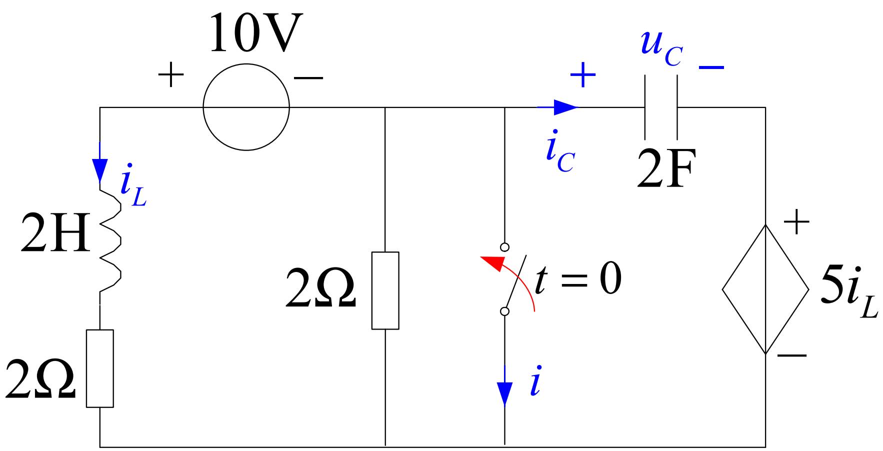
求稳态值:

$i_L(\infty)=5\text{A}\quad u_C(\infty)=-5\times5=-25\text{V}$



稳态等效电路

【8-60】(1)求t>0时的响应 i_L (2)求t>0时的响应 i (3)求t=0时的响应 i 。



(1)求t>0时的响应 i_L

求初始值: $i_L(0+)=i_L(0-)=2.5\text{A}$

$$u_C(0-)=-2\times2.5-5\times2.5=-17.5\text{V}$$

求稳态值:

$$i_L(\infty)=5\text{A} \quad u_C(\infty)=-5\times5=-25\text{V}$$

求时间常数: $\tau=\dfrac{L}{R}=1s$

$$\boxed{i_L(t)=(5-2.5e^{-t})\text{A} \quad (\text{t>0})}$$

$$u_C(t)=-5i_L=-25+12.5e^{-t}\text{A} \quad (\text{t>0})$$

$$\boxed{i_C=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}=-25e^{-t}\text{A} \quad (\text{t>0})}$$

(2)求t>0时的响应 i

$$\boxed{i=-i_C-i_L=27.5e^{-t}-5\text{A} \quad (\text{t>0})}$$

(3)求t=0时的响应 i $\quad u_C(0+)=-5\times i_L(0+)=-12.5\text{V}$

$$u_C(0+)=u_C(0-)+\frac{1}{C}\int_{0-}^{0} i_C\mathrm{d}t \quad i_C=10\delta(t)$$

$$\boxed{i(0)=-10\delta(t) \quad (t=0)}$$