

1. 十进制数可表示为 5410，而二进制数可表示为 102。其中右下标的 '10'，'2' 称为基数。通常，给定一个基数  $b$  和  $n$  个数字  $d_n d_{n-1} \dots d_1$  组成的字符串，该数字字符串的值可用公式计算： $\sum_{i=1}^n b^{i-1} d_i$ 。如：  
 $5410 = 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0 = 54$ ,  $102 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 2$ 。

同时，任意一个数可以表示成  $b$  以内数字的 `int list` 形式。如  $11002 = [0, 0, 1, 1]$ ,  $5410 = [4, 5]$ 。

(1) 编写高阶函数: `toInt: int -> int list -> int`。

对所有  $b > 1$  和所有  $L: \text{int list}$ , 如果  $L$  是一个  $b$  进制数的 `int list` 表示, 函数 `toInt b L` 为其相应的整数值, `toInt b` 的结果类型为: `int list -> int`。

如: `val base2ToInt = toInt 2;`  
`val 2 = base2ToInt [0,1];`

```
fun toInt b L =  
  let  
    fun helper [] _ = 0  
      | helper (d::ds) power = d * power + helper ds (power * b)  
    in  
      helper L 1  
    end;
```

高阶函数 `toInt` 的类型标注为 `int -> int list -> int`, 表示它接受两个参数: 一个 `int` (基数  $b$ ) 和一个 `int list` (数字列表  $L$ ), 并返回一个 `int` (对应的整数)。利用题目给出的公式计算, 提取列表中各个元素并与当前权重 (`power`) 相乘, 对于下一位, 权重需要乘  $b$ 。

(2) 利用数学操作 `mod` 和 `div` 可以将任意十进制整数  $n$  表示成基于基数  $b$  的  $b$  进制数形式, 如  $4210 = 1325$ 。

编写高阶函数 `toBase: int -> int -> int list` 实现该转换: `toBase b n` 将十进制数  $n$  转换为  $b$  进制数的 `int list` 表述形式 ( $b > 1, n \geq 0$ )。

```
fun toBase b n =  
  if n = 0 then [0]  
  else  
    let  
      fun helper 0 = []  
        | helper m = (m mod b) :: helper (m div b)  
    in  
      helper n  
    end;
```

```
        helper n
    end;
```

将十进制整数转换为  $b$  进制数，使用取余数法， $n$  不断对基数  $b$  取余数，余数组成一个新列表

(3)编写高阶函数  $\text{convert: int} * \text{int} \rightarrow \text{int list} \rightarrow \text{int list}$

对任意  $b_1, b_2 > 1$  和所有  $L: \text{int list}$  ( $L$  为一个  $b_1$  进制数的  $\text{int list}$  表述形式)，函数  $\text{convert}(b_1, b_2) L$  将  $b_1$  进制数的  $\text{int list}$  表述  $L$  转换成  $b_2$  进制数的  $\text{int list}$  表述，即满足  $\text{toInt } b_2 (\text{convert}(b_1, b_2) L) = \text{toInt } b_1 L$ 。

```
fun convert (b1, b2) L = toBase b2 (toInt b1 L);
```

利用前两问已经实现的函数， $\text{toInt } b_1 L$  将  $b_1$  进制数的  $L$  转化为十进制整数，再利用  $\text{toBase } b_2 n$  将得到的十进制整数转化为  $b$  进制数的  $\text{int list}$  表述形式