第2章　　电阻电路等效变换

等效变换的概念 Concept of Equivalence

串联与并联 Series and Parallel Connections

对称电路 **Symmetric Circuits**

电桥 Bridge Circuits

星－三角互换 Wye-Delta Transformation

电源变换 Source transformation

第2章　电阻电路等效变换

目标：1.熟练应用支路电流分析法分析简单电路。

2.综合应用各种等效化简方法获得等效电路。

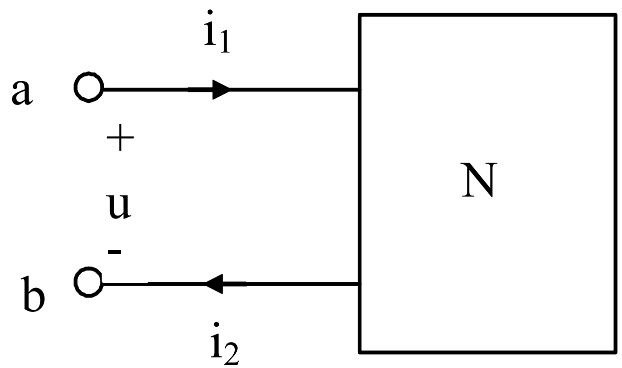
难点：1.含受控源电路的等效化简。

2.综合应用多种等效变换方法化简复杂电路。

讲授学时：4　　讨论学时：1

2.1　概述

一、二端电路及端口的概念



- N只有两个端子（a、b）与外部电路相连；进出两个端子的电流相同，即$i_1=i_2=i$；
- N可由任意的元件组合而成；
- 两个端钮上的电压、电流分别称为端口电压和端口电流，它们之间的关系式$u=f(i)$、$i=f(u)$称为端口伏安关系。

三、等效变换的说明

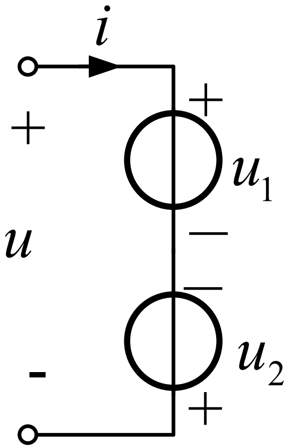
- 一个电路被它的等效电路替代后，未被等效的电路中的所有电压、电流不变。

- 两个内部结构不同的电路“等效” 等效的核心在于：两个电路对“任意”外电路的效果一致，而不是对某一特定的外电路等。

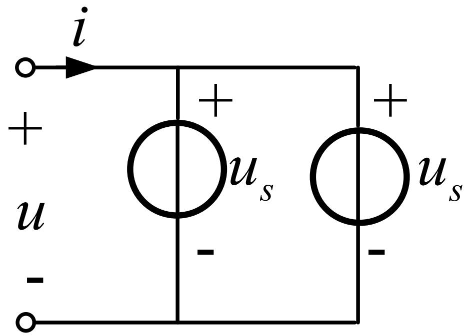
- 等效具有传递性。

2. 2 串联与并联

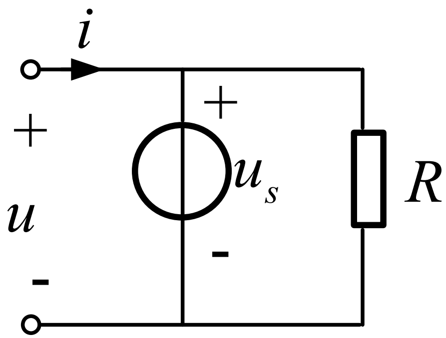
2. 2.1 独立电压源串联与并联

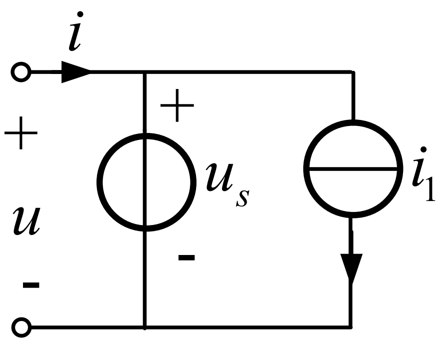


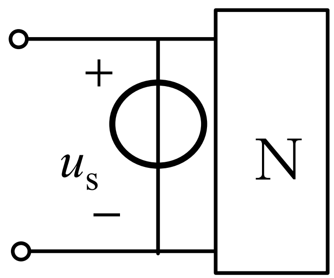
$$\boxed{u = u_1 - u_2 = u_s}$$



↓

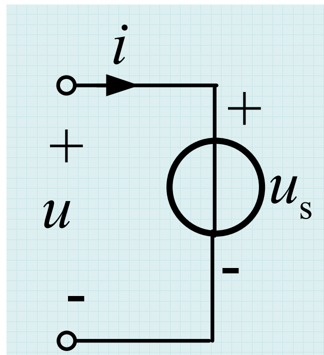






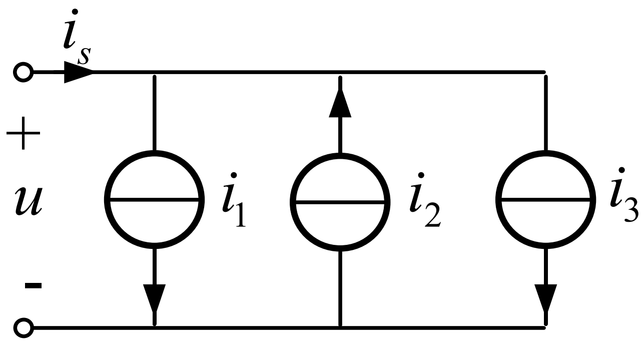
$$\boxed{u = u_s}$$

→

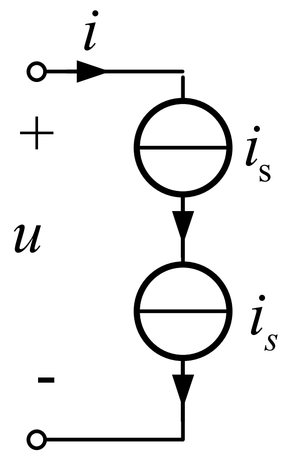


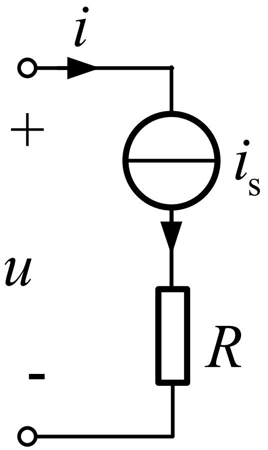
2. 2 独立串联与并联

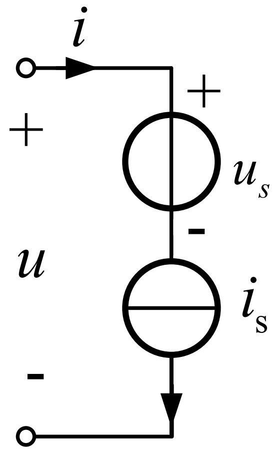
2. 2.2 独立电流源串联与并联

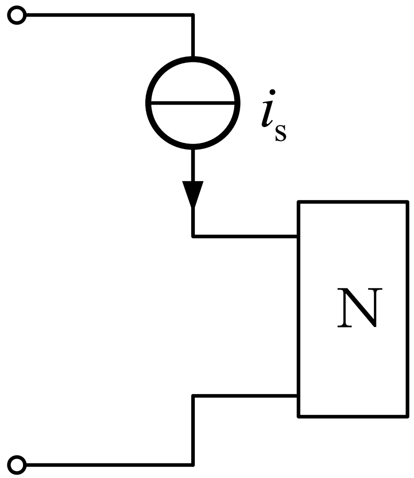


$$\boxed{i_s = i_1 - i_2 + i_3}$$

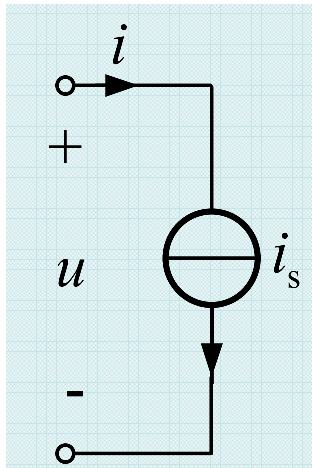








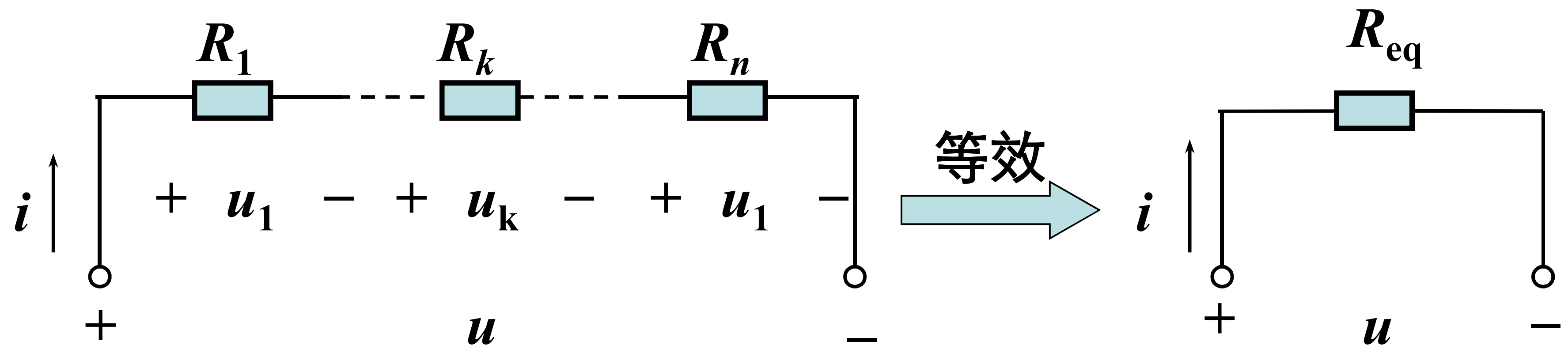
$$\boxed{i = i_s}$$



2.2.2 线性电阻元件的串联和并联

一 电阻元件的串联 (Series Connection of Resistors)

1. 等效电阻R_{eq}



KVL $\quad u= u_1+ u_2 +\ldots+u_k+\ldots+u_n$

$$=(R_1+ R_2 +\ldots+R_k+\ldots+ R_n)\, i = R_{eq} i$$

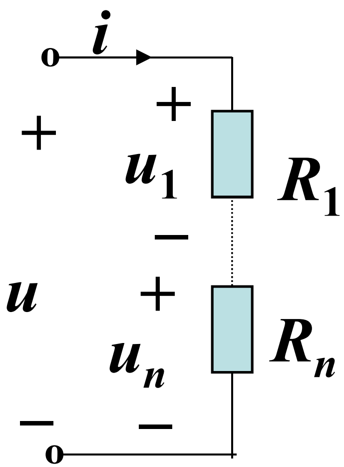
$$R_{eq}=(R_1+ R_2 +\ldots+R_n) =\sum R_k$$

结论： 串联电路的总电阻等于各分电阻之和。

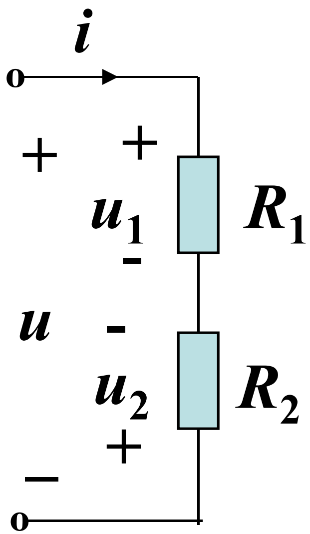
串联电阻上电压的分配

由 $$\frac{u_k}{u} = \frac{R_k i}{R_{eq} i} = \frac{R_k}{R_{eq}} = \frac{R_k}{\sum R_k}$$

即 电压与电阻成正比



例：两个电阻分压，如下图

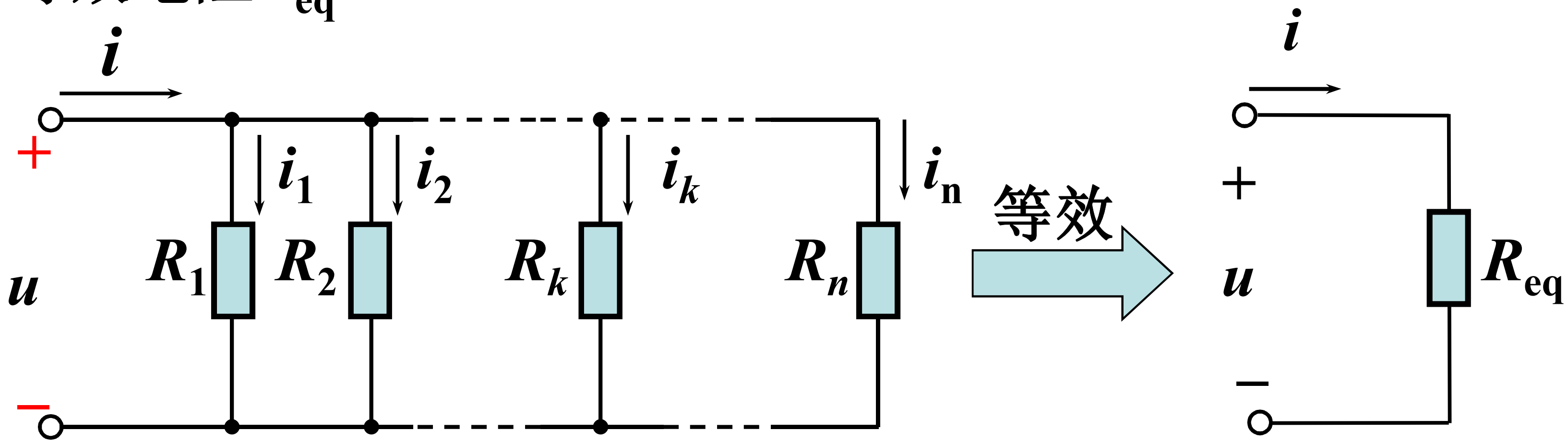


$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u$$

$$u_2 = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} u$$

二　电阻元件的并联 (Parallel Connection)

1. 等效电阻R_{eq}



由KCL:　$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_k + i_n$

$$= u/R_1 + u/R_2 + \ldots + u/R_n$$

$$= u(1/R_1 + 1/R_2 + \ldots + 1/R_n) = u/R_{eq}$$

即　$1/R_{eq} = 1/R_1 + 1/R_2 + \ldots + 1/R_n$

电导表示：$G_{eq} = G_1 + G_2 + \ldots + G_k + \ldots + G_n = \sum G_k = \sum 1/R_k$

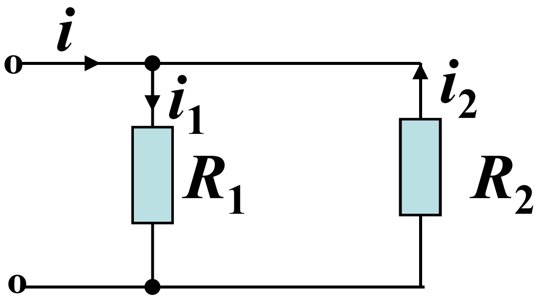
2. 并联电阻的电流分配

由 $$\frac{i_k}{i}=\frac{u/R_k}{u/R_{eq}}=\frac{G_k}{G_{eq}}$$

$$\Rightarrow i_k=\frac{G_k}{\sum G_k}i$$

即 电流分配与电导成正比

对于两电阻并联， 有



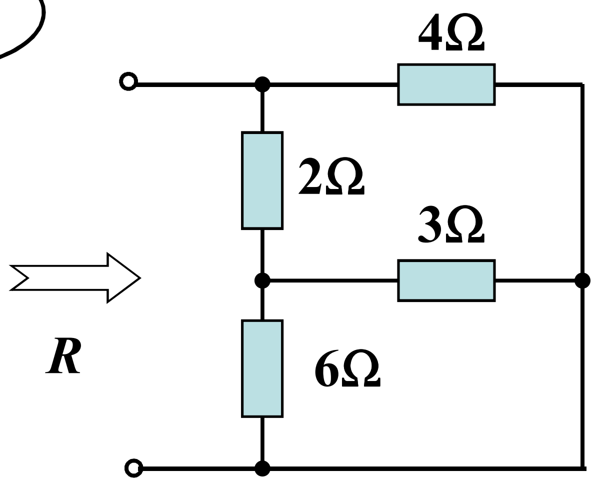
$$i_1=\frac{1/R_1}{1/R_1+1/R_2}i=\frac{R_2}{R_1+R_2}i$$

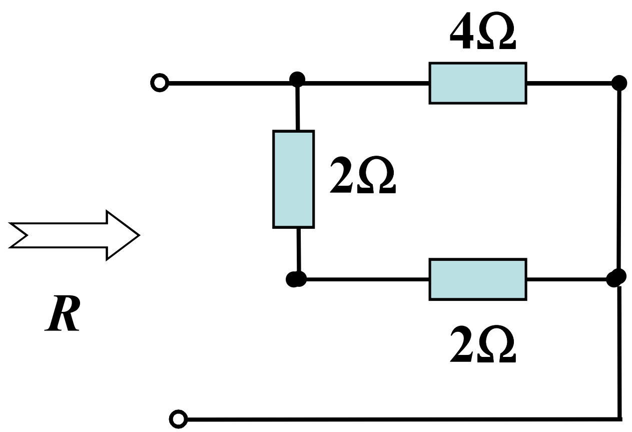
$$i_2=-\frac{1/R_2}{1/R_1+1/R_2}i=-\frac{R_1}{R_1+R_2}i$$

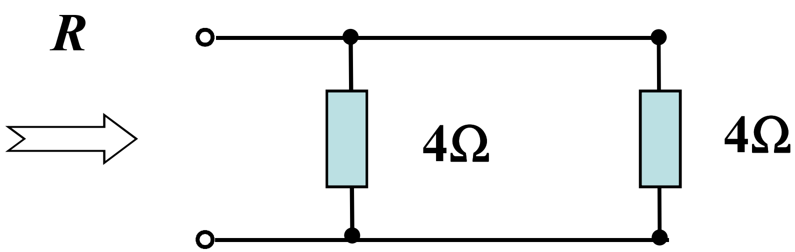
线性电阻元件的混联

要求：弄清楚串、并联的概念。交替运用串并联等效电阻计算指定端口的等效电阻。

例1.

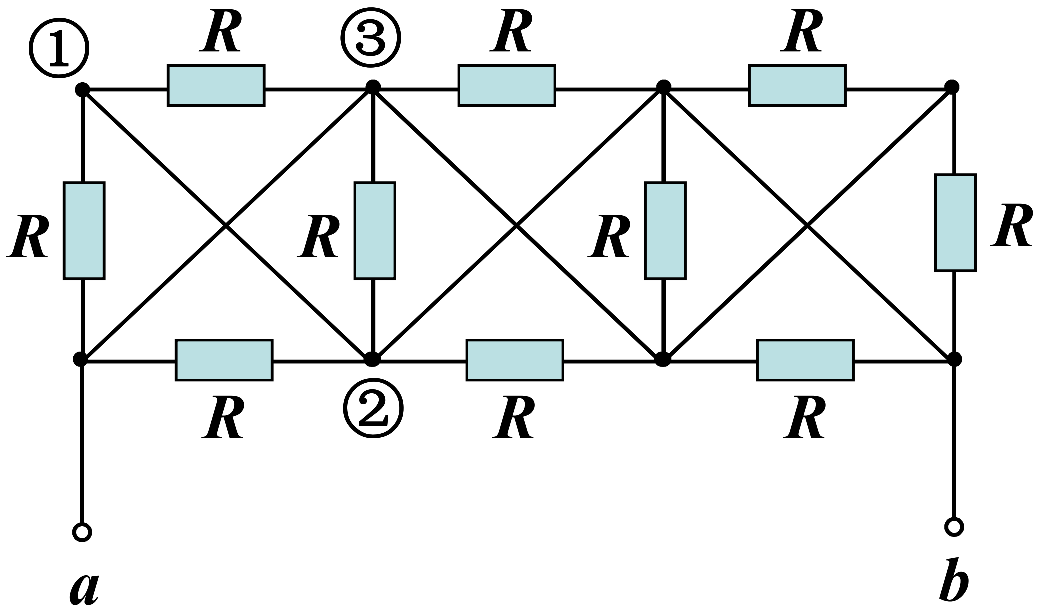






$R = 2\ \Omega$

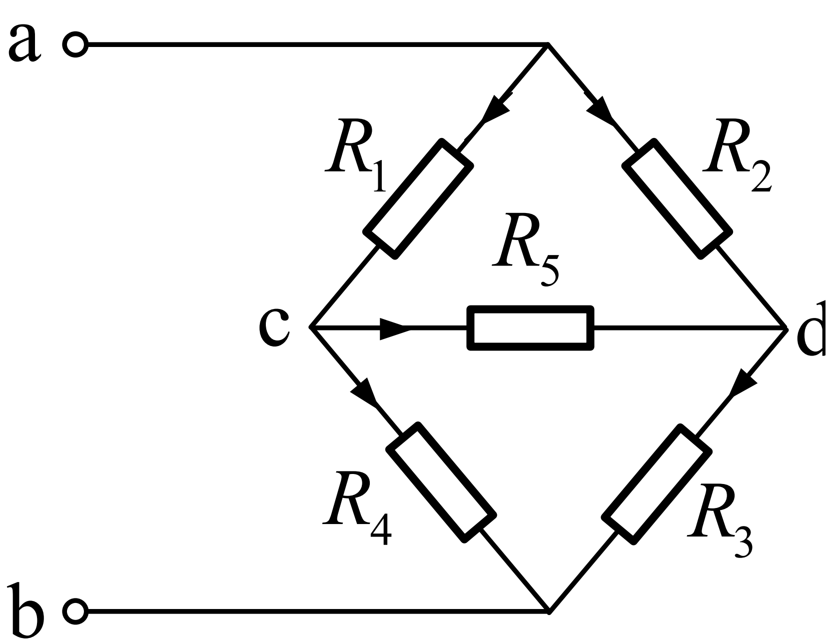
例2.



$R_{ab}=0.1R$

2.3 星形与三角形电路等效变换

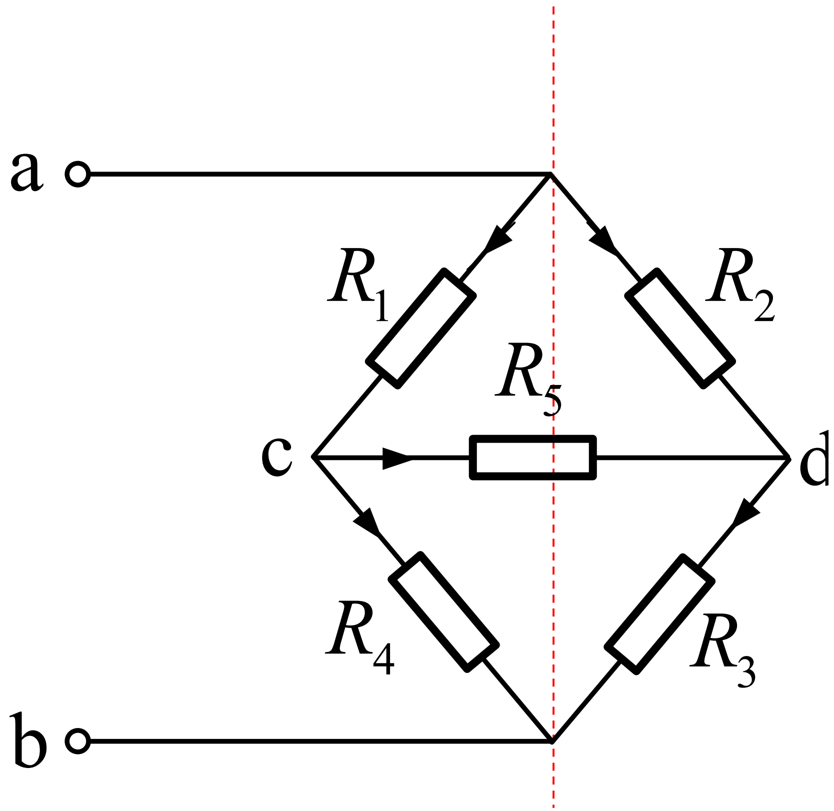
电桥电路



上图为电桥电路，电阻R_1、R_2、R_3、R_4称为电桥的“桥臂”，R_5支路称为“桥”。

2.3.1 电路对称

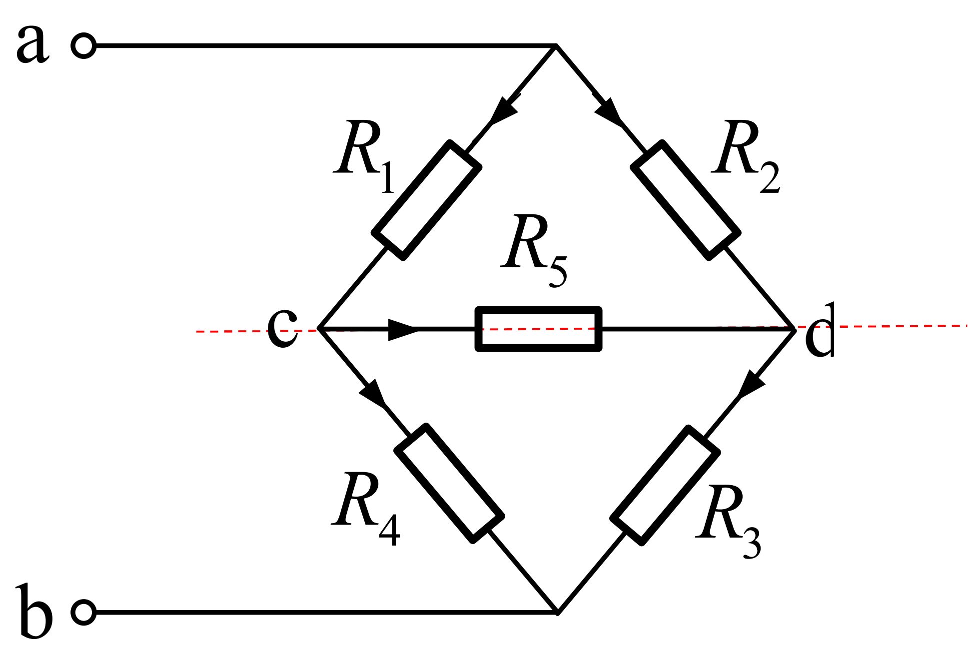
1、对称面通过端口： 电阻$R_1=R_2$、$R_3=R_4$，则电路存在对称面，即左右对称。



此时：对称面两侧有相同电流分布，**则垂直通过对称面的支路电流为0，可以断开该支路。** R_5电流$i_5=0$，可以断开该支路。

2.3.1 电路对称

2、对称面垂直于端口： 电阻$R_1=R_4$、$R_2=R_3$，则电路存在对称面，即上下对称。

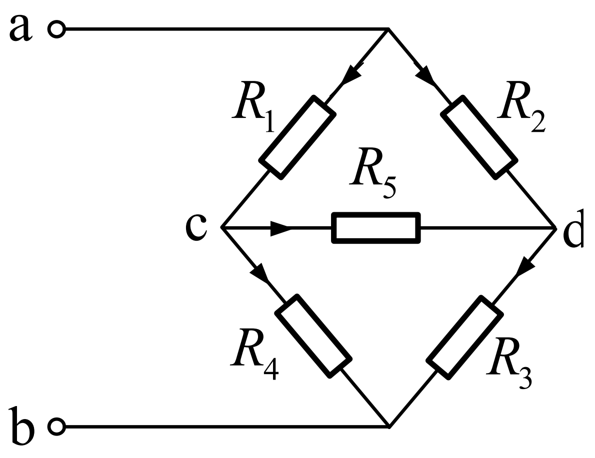


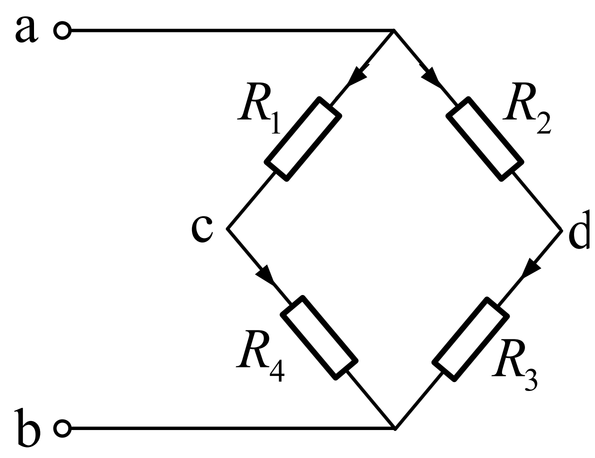
此时：位于对称面上结点ab电位相等，即$u_{cd}=0$

可以短接结点或断开支路R_5。

2.3.2　电桥平衡电路

电桥平衡条件：当电路中的c、d两点为自然等电位点时，此电桥电路称为“平衡电桥电路”。





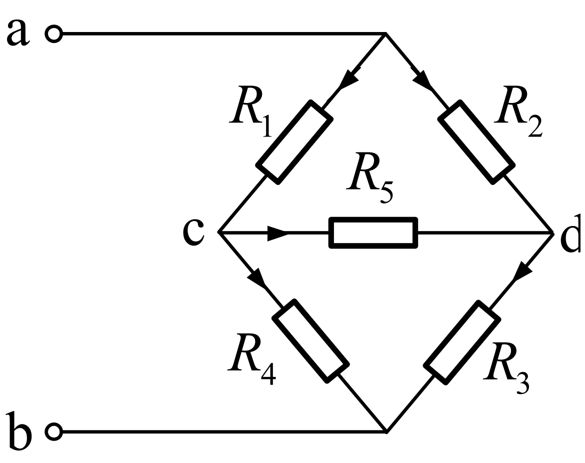
即 $u_{cd}=0$　　　则 $i_5=u_{cd}/R_5=0$

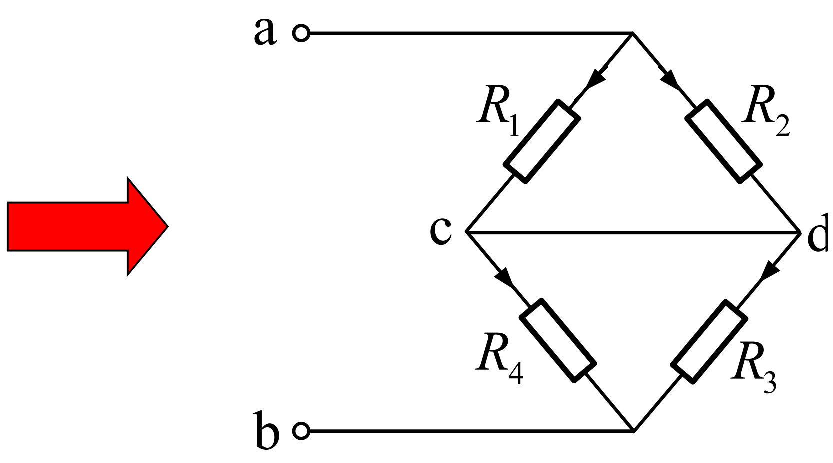
电路中桥支路可以用开路代替，如右图所示：

电桥平衡时，应满足的条件为：

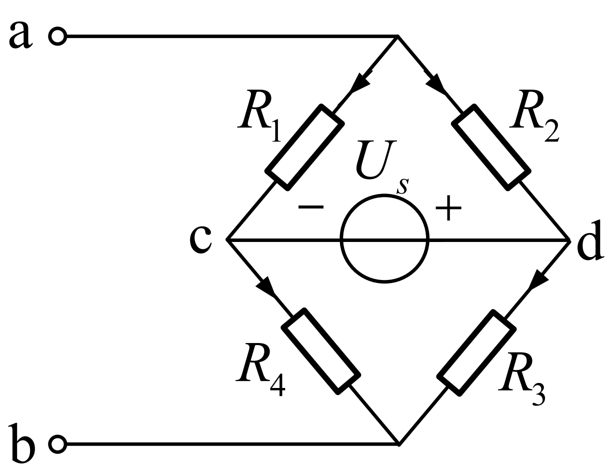
$$u_{cd}=\frac{R_4}{R_1+R_4}U_{ab}-\frac{R_3}{R_2+R_3}U_{ab}=0 \quad \Rightarrow R_1R_3=R_2R_4$$

电路中桥臂可以用短路代替：

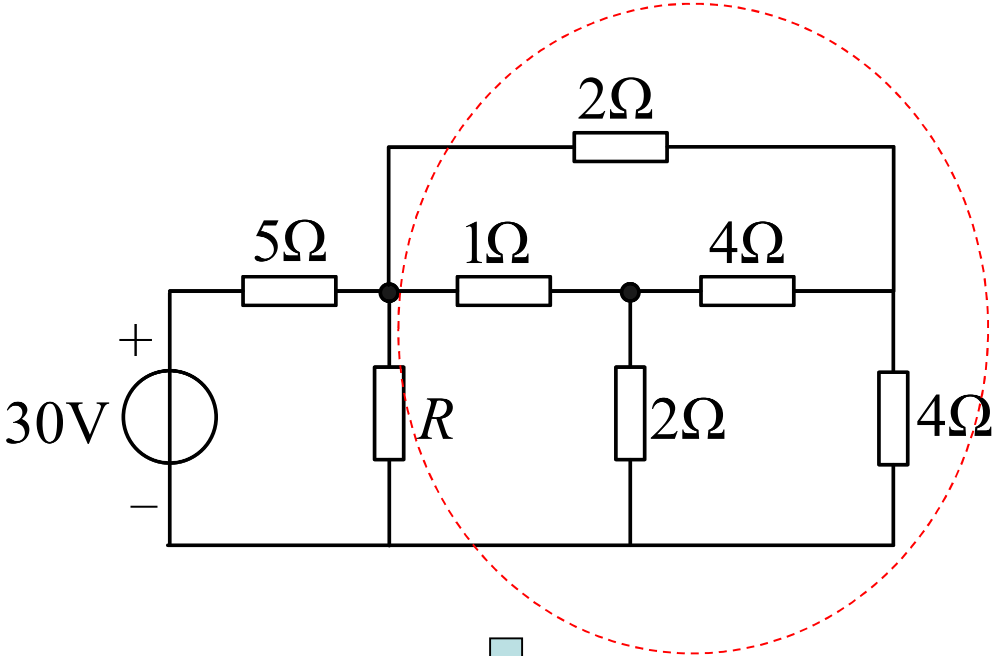


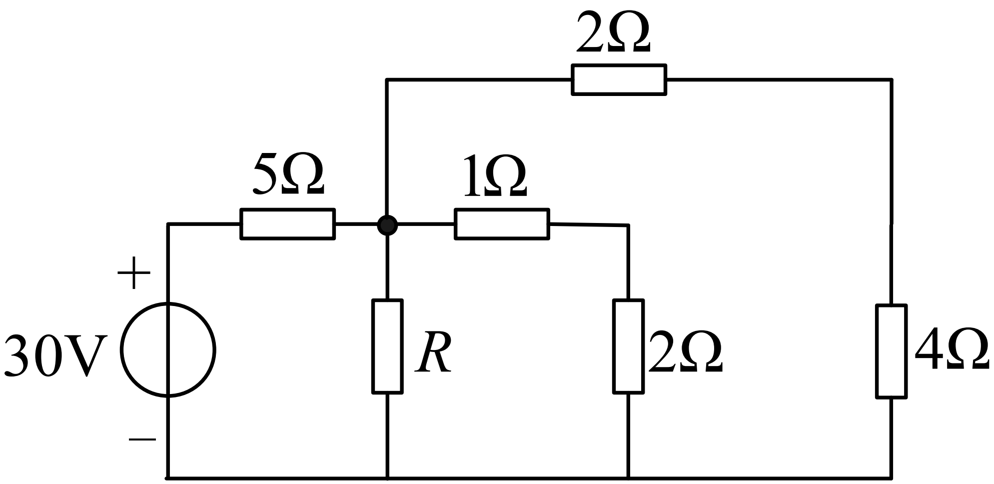


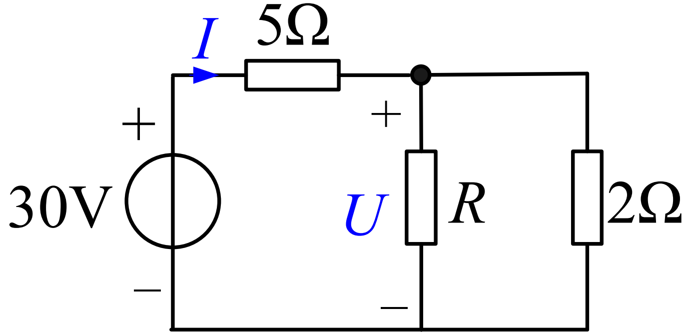
如果桥臂为“有源支路”，即使满足电桥平衡条件，c、d两点也不是等电位点。



例3：电路消耗的总功率为150W，求R的阻值。



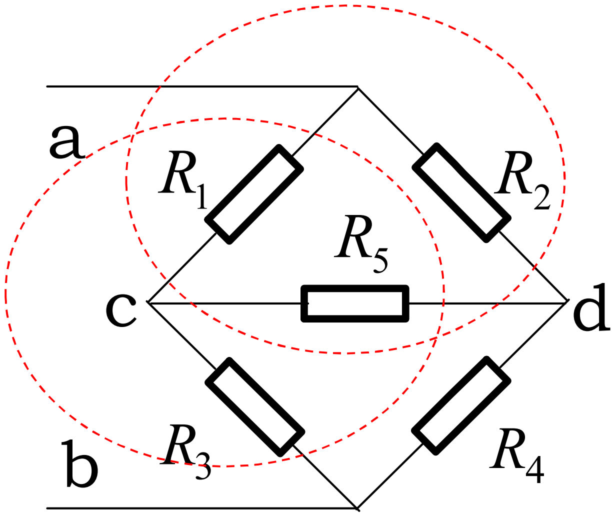


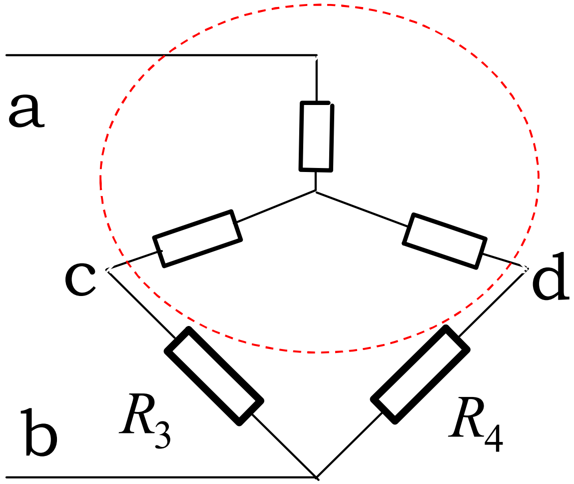


$I = 5\text{A}$

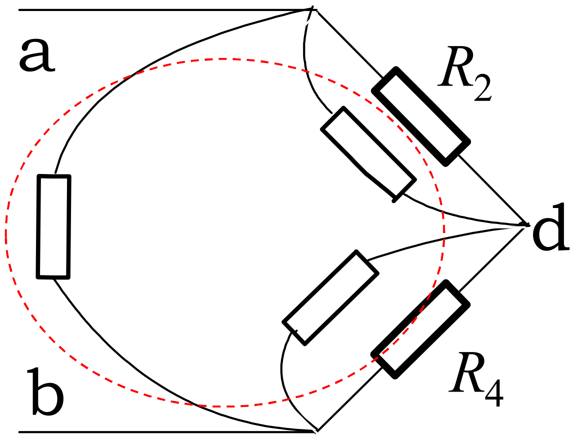
$R = 2\Omega$

2.3.3 电阻电路的Δ—Y等效变换





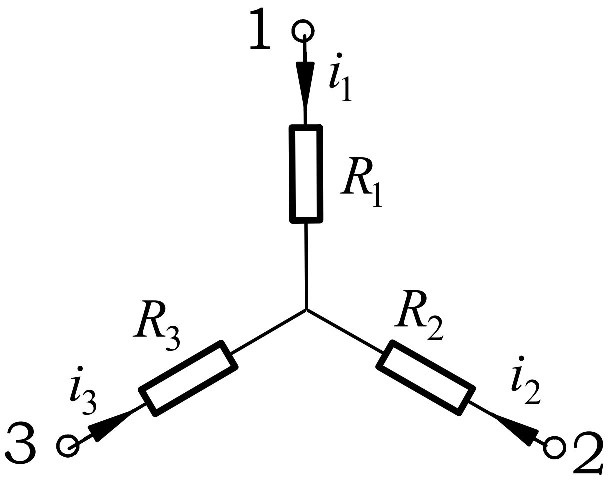
三角形→星形



星形→三角形

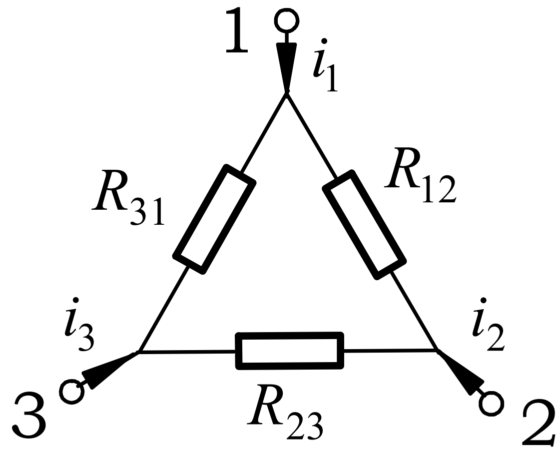
2.3.3 电阻电路的Δ—Y等效变换

Y、Δ电路： 均有三条支路，且有三个端钮与外部电路相连。



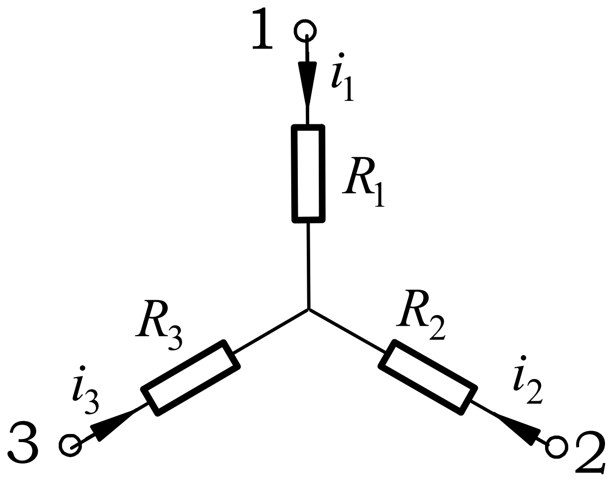
$$u_{ij} = f_k(i_1, i_2, i_3)$$

***u-i* 关系相同**

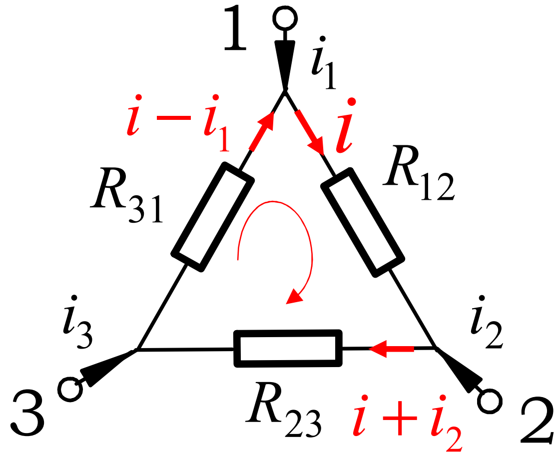


- 三个电阻的一端接在一个结点上，而它们的另一端分别接在三个不同的端钮上，这样的连接方式称为Y形（星形）电阻网络 。
- 三个电阻的两端分别接在每两个端钮之间， 使三个电阻本身构成回路这样的连接方式称为Δ形（三角形）电阻网络。

2.3.3 电阻电路的Δ—Y等效变换



$$u_{12} = R_1 i_1 - R_2 i_2$$



$$u_{12} = R_{12} i = \frac{R_{12}R_{31}i_1 - R_{12}R_{23}i_2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

由KVL确定i:

$$R_{12}i + R_{23}(i + i_2) + R_{31}(i - i_1) = 0$$

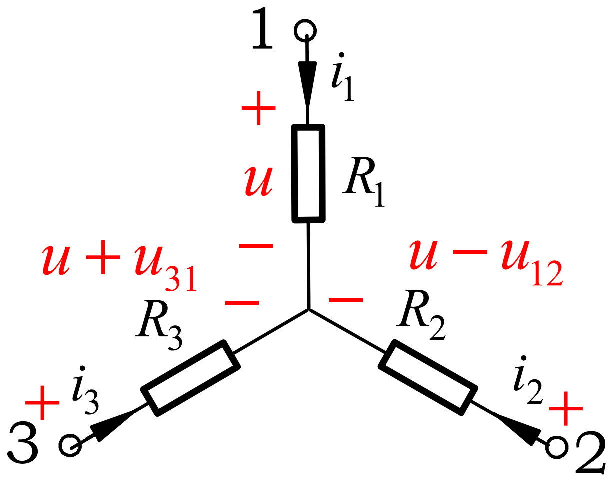
$$i = \frac{R_{31}i_1 - R_{23}i_2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$\Delta \to \mathrm{Y}$

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \qquad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

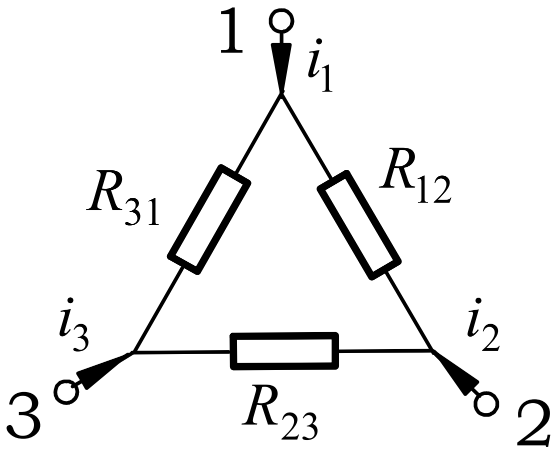
2.3.3 电阻电路的Δ—Y等效变换



KCL确定u：

$$G_1 u + G_2(u - u_{12}) + G_3(u + u_{31}) = 0$$

$$u = \frac{G_2 u_{12} - G_3 u_{31}}{G_1 + G_2 + G_3}$$



$$i_1 = G_1 u = \frac{G_1 G_2 u_{12} - G_1 G_3 u_{31}}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$i_1 = G_{12} u_{12} - G_{31} u_{31}$$

$$\boxed{Y \to \Delta} \quad \boxed{G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}} \quad \boxed{G_{31} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}}$$

$$\boxed{G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}}$$

2.3.3 电阻电路的Δ—Y等效变换

$\Delta \rightarrow Y$

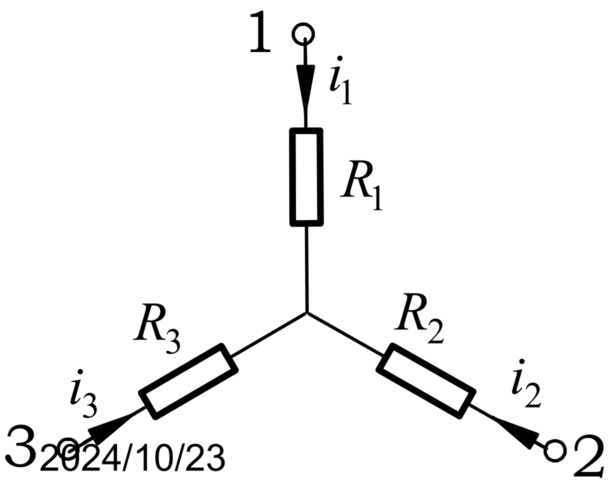
$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12}+R_{23}+R_{31}}$$

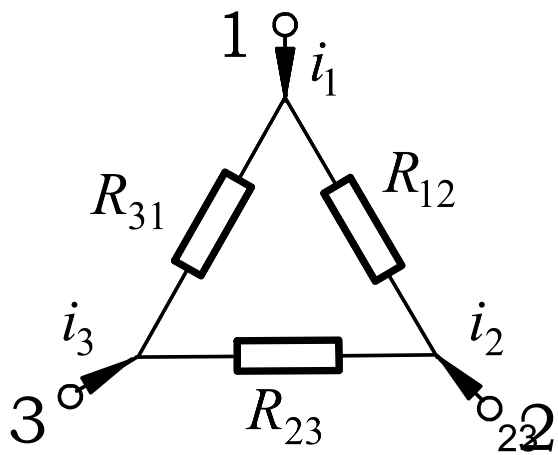
$Y \rightarrow \Delta$

$$G_{12} = \frac{G_1G_2}{G_1+G_2+G_3} \qquad R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}$$

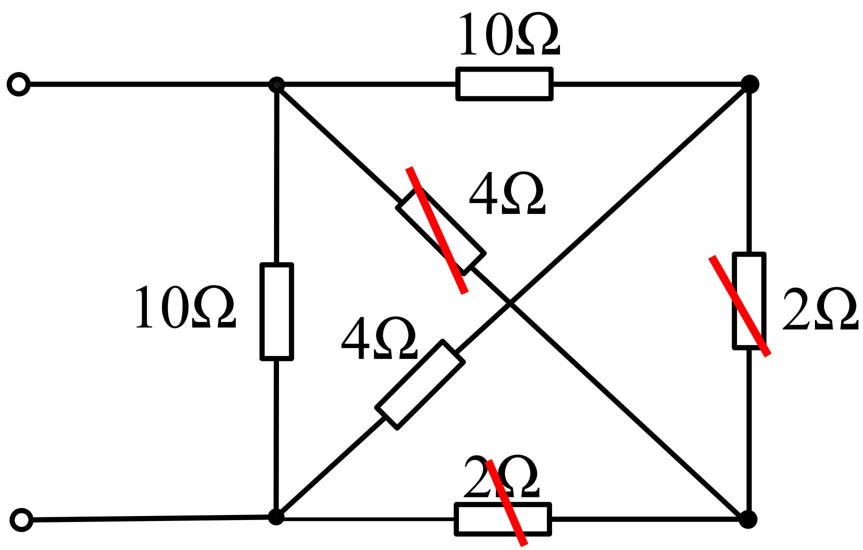
规律：

$$\text{Y的电阻} = \frac{\Delta\text{相邻电阻之积}}{\Delta\text{电阻之和}} \qquad \Delta\text{的电导} = \frac{\text{Y相邻电导之积}}{\text{Y电导之和}}$$

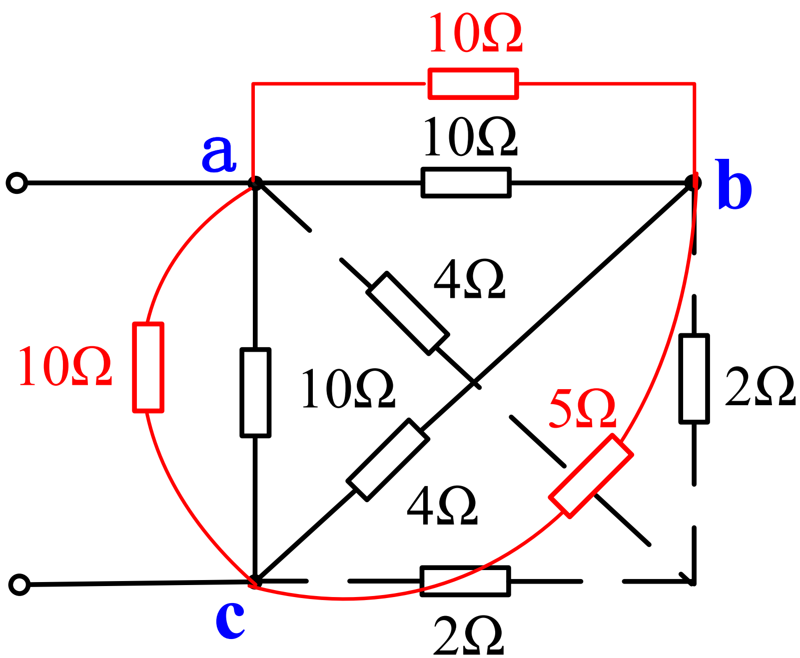




例4：求输入端等效电阻。



- $\triangle \longrightarrow Y: 4$
- $Y \longrightarrow \triangle: 2$



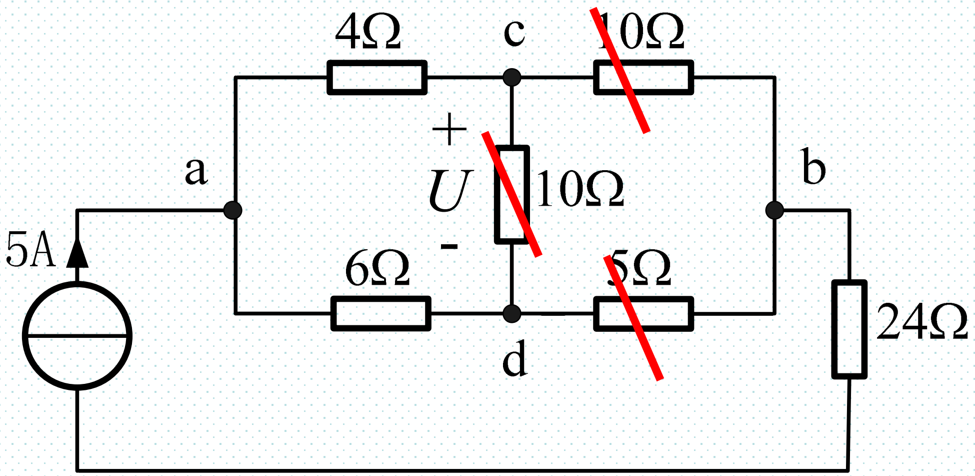
$$R_{ab} = 4+2+\frac{4\times 2}{2} = 10\Omega$$

$$R_{ac} = 4+2+\frac{4\times 2}{2} = 10\Omega$$

$$R_{bc} = 2+2+\frac{2\times 2}{4} = 5\Omega$$

$$R_{eq} = 10//10//[10//10+4//5]$$

例5. 求 *U*.

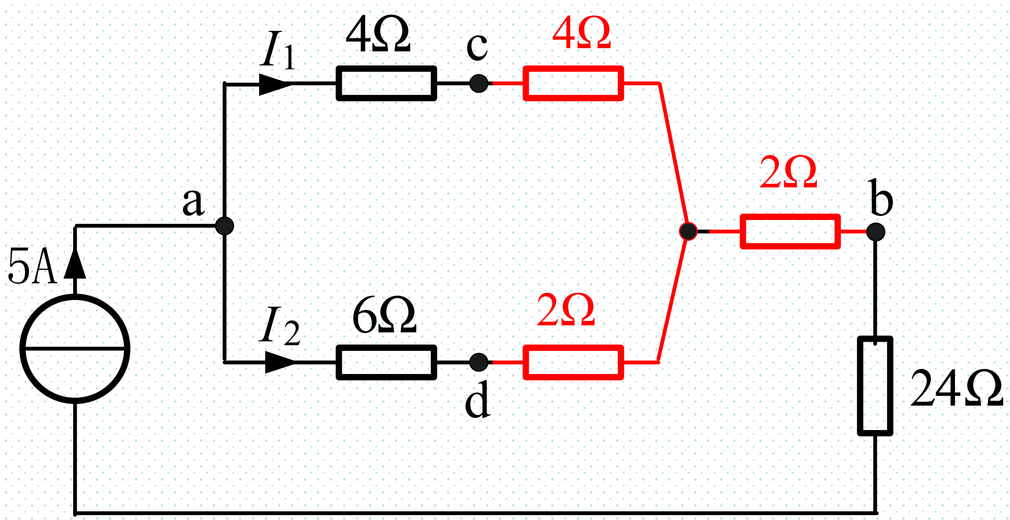


$$I_1 = I_2 = \frac{5}{2}\text{A}$$

(Current division)

$$U = 4I_1 - 2I_2 = 5\text{V}$$

（KVL）



$$R_c = \frac{10\times10}{10+10+5} = 4\Omega$$

$$R_d = \frac{10\times5}{10+10+5} = 2\Omega$$

$$R_b = \frac{10\times5}{10+10+5} = 2\Omega$$

课下练习1：求入端等效电阻Rab

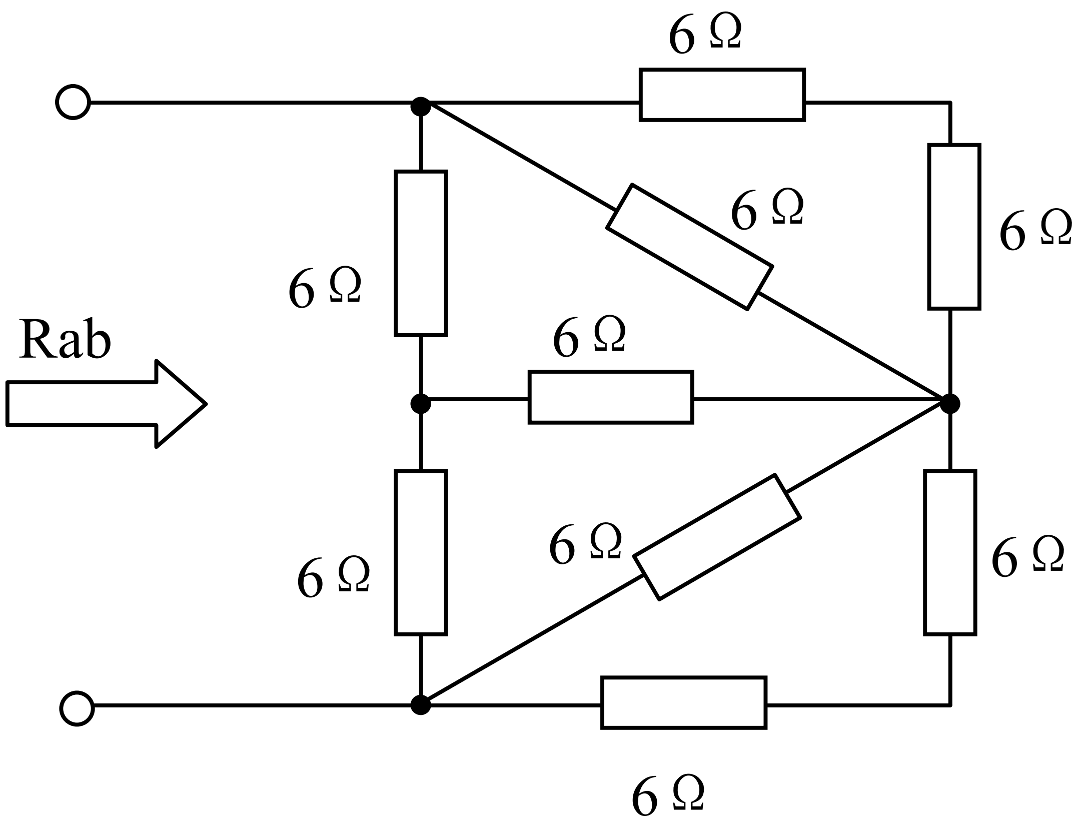
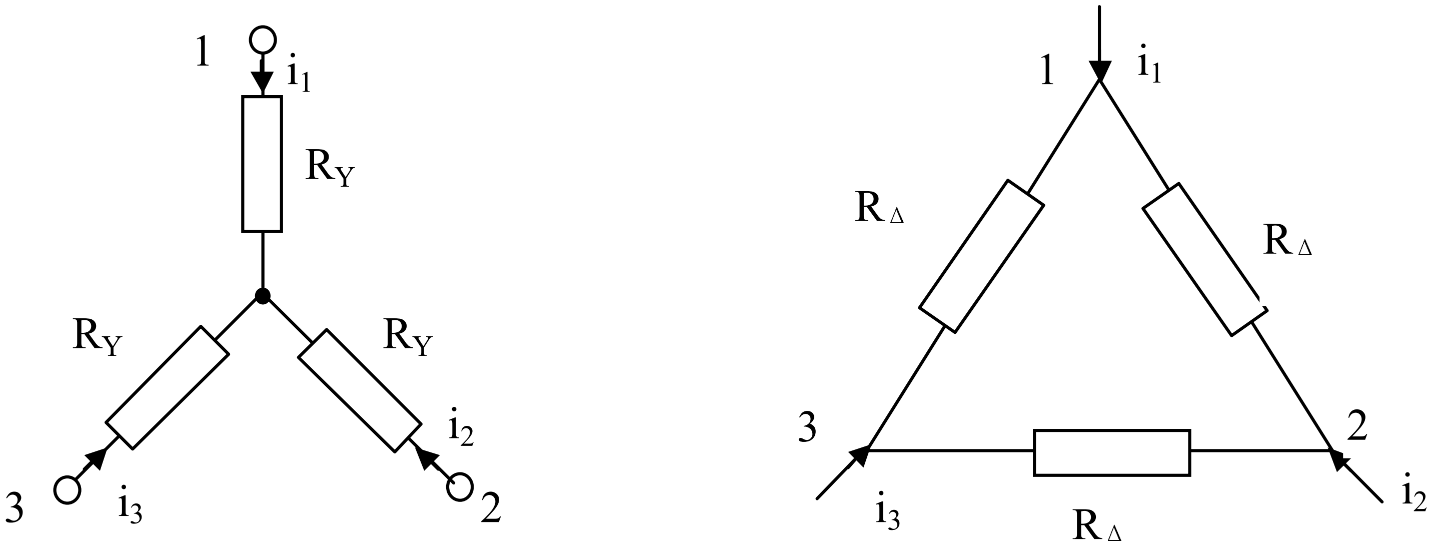


图 1

R=4.8Ω

对称Δ—Y联接电路的等效变换公式：



(a) (b)

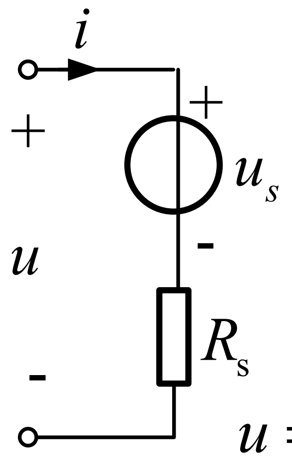
$$R_\Delta = R_Y + R_Y + R_Y R_Y / R_Y = 3R_Y$$

或

$$R_Y = R_\Delta / 3$$

2.4 电源变换Source transformation

2.4.1 独立电源变换

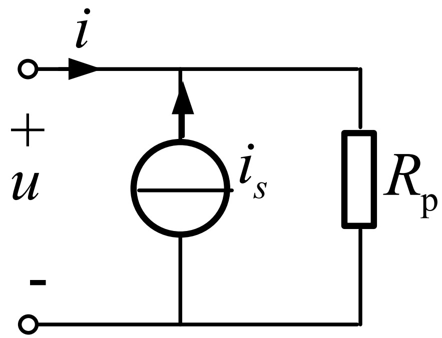


$$u = u_s + R_s i$$

$$R_s = R_p = R$$

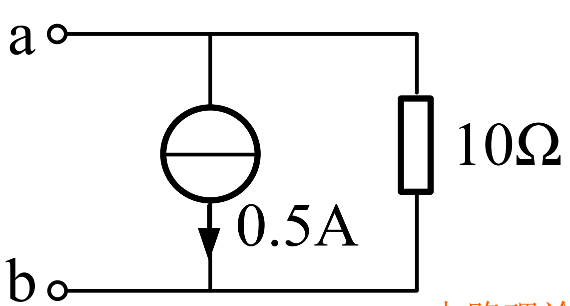
$$u_s = R i_s$$

等效

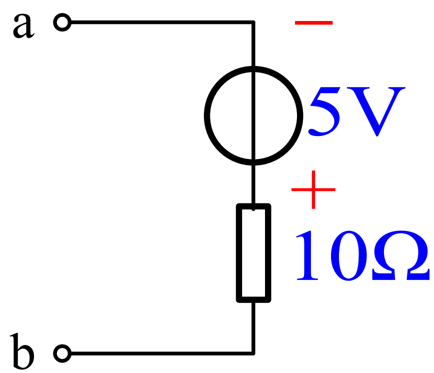


$$u = R_p i_s + R_p i$$

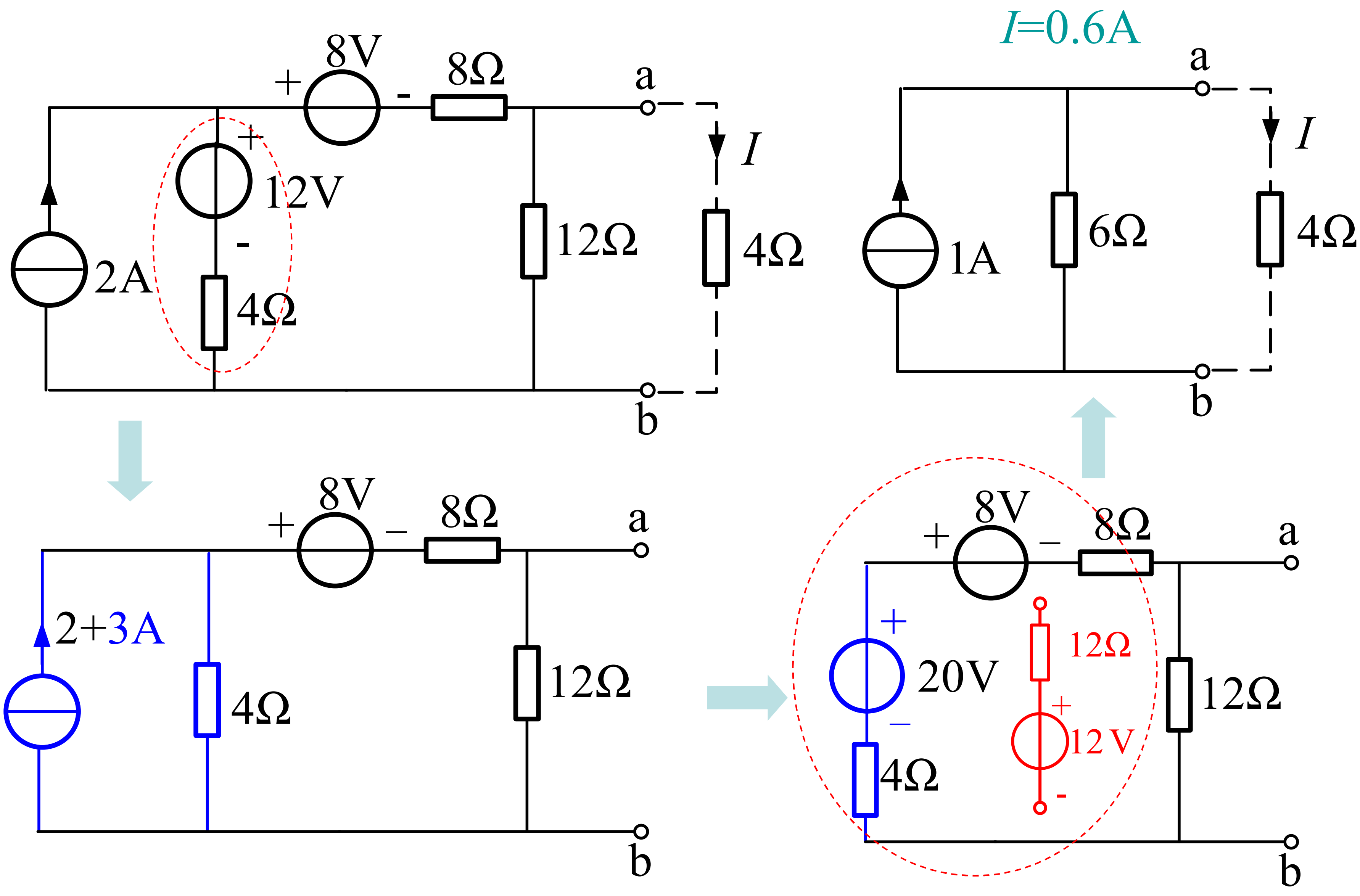
戴维南模型　　Two models of real DC source　　诺顿模型



→

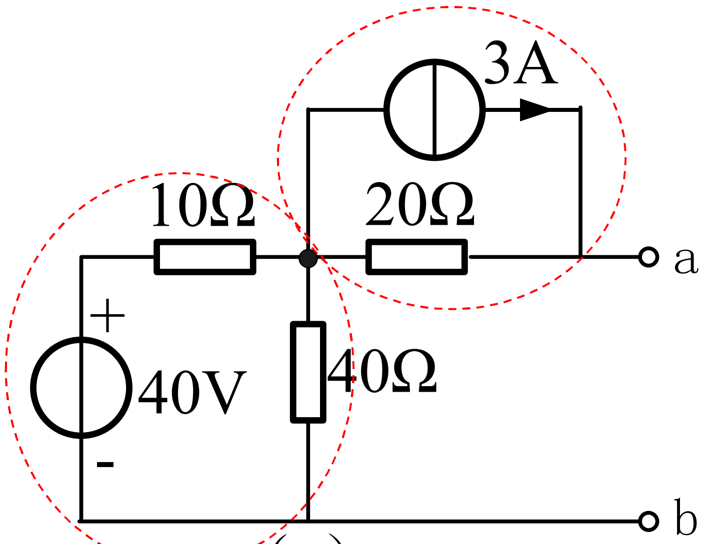


例6.计算电流 *I*.

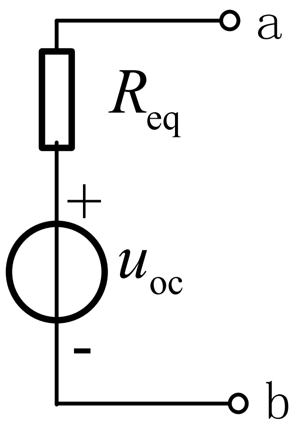


I=0.6A
8V
8Ω
12V
2A
4Ω
12Ω
4Ω
I
a
b
1A
6Ω
4Ω
I
a
b
2+3A
4Ω
8V
8Ω
12Ω
a
b
20V
4Ω
8V
8Ω
12Ω
12 V
12Ω
a
b

练习：求图（a）等效电路图（b）的参数



（a）

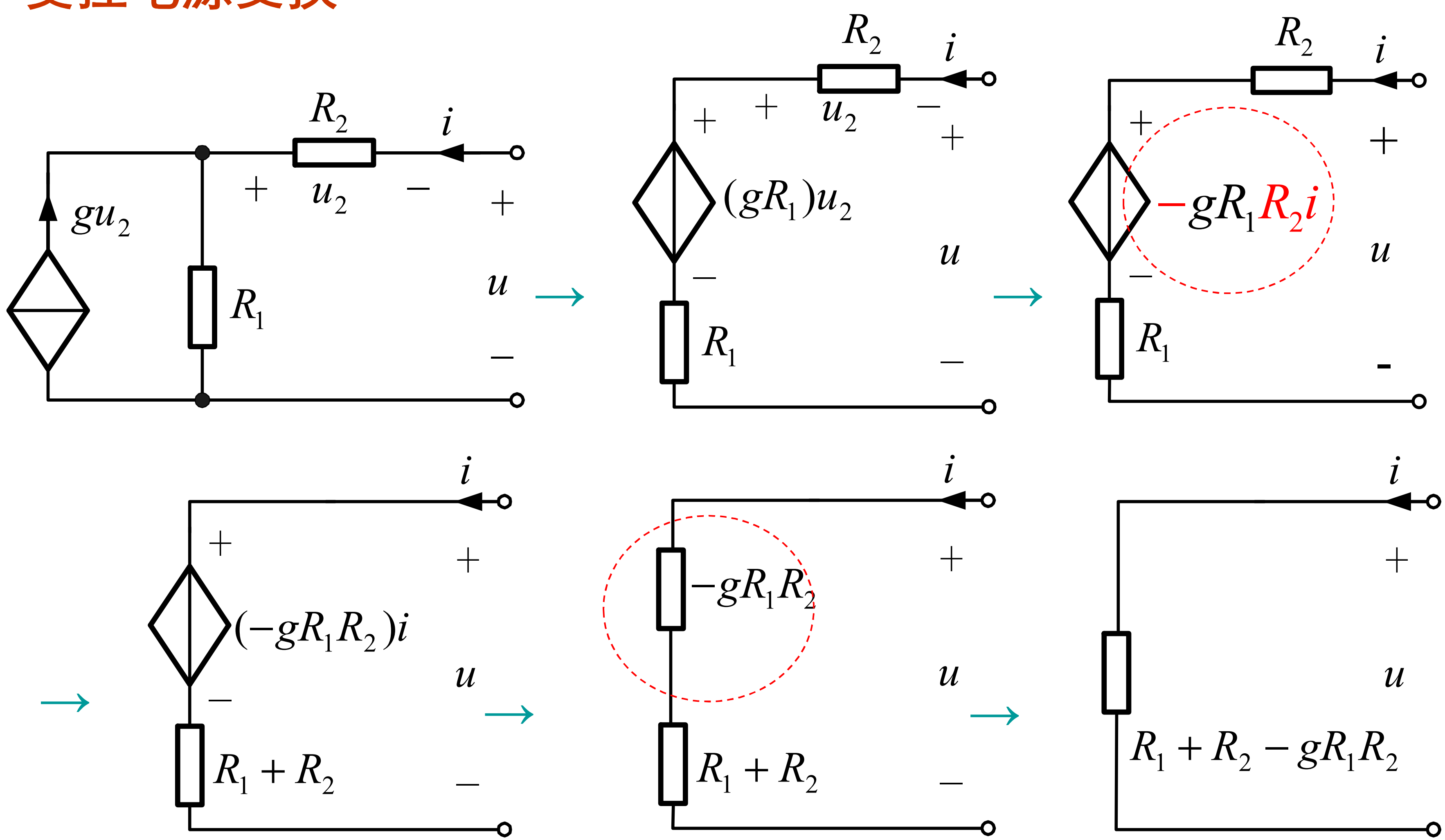


（b）

答案：28Ω，92V

2.4 电源变换Source transformation

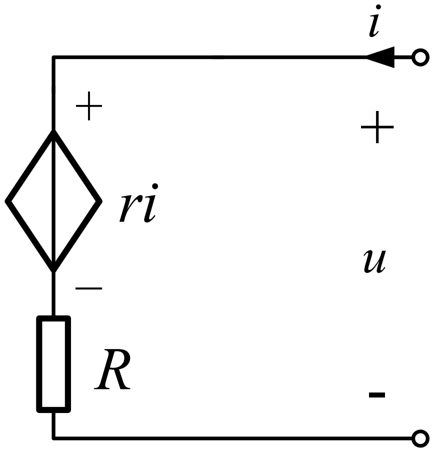
受控电源变换



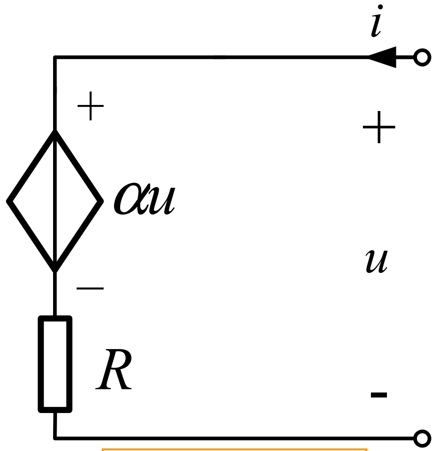
方法2:(1)图中 $u-i$ 关系：$u=R_2i+R_1(gu_2+i)=(R_1+R_2-gR_1R_2)i$

2.4 电源变换Source transformation

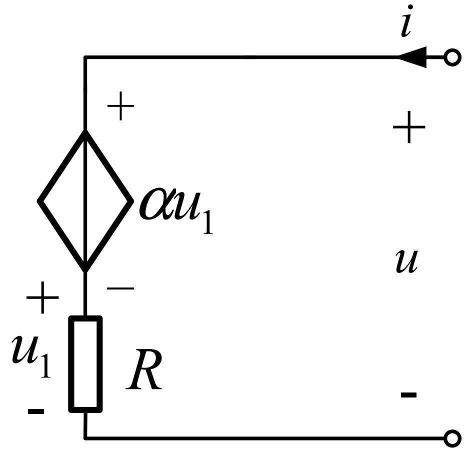
例7 计算等效电阻。



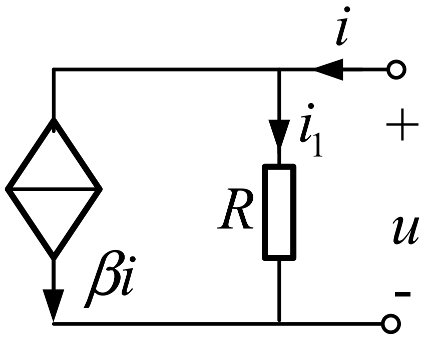
$$R_{\rm eq}=R+r$$



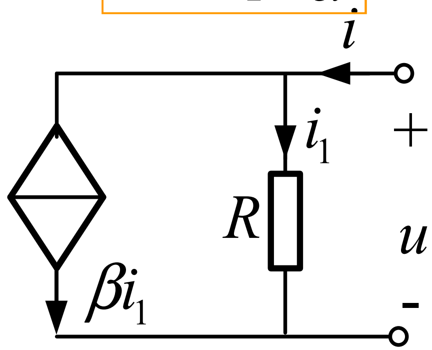
$$R_{\rm eq}=\frac{R}{1-\alpha}$$



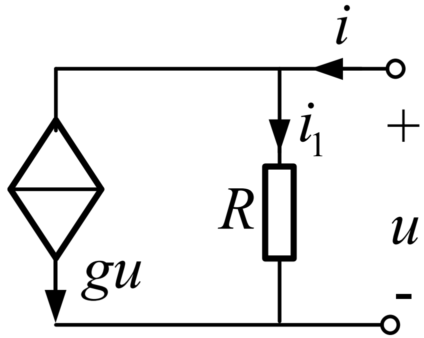
$$R_{\rm eq}=(1+\alpha)R$$



$$R_{\rm eq}=(1-\beta)R$$



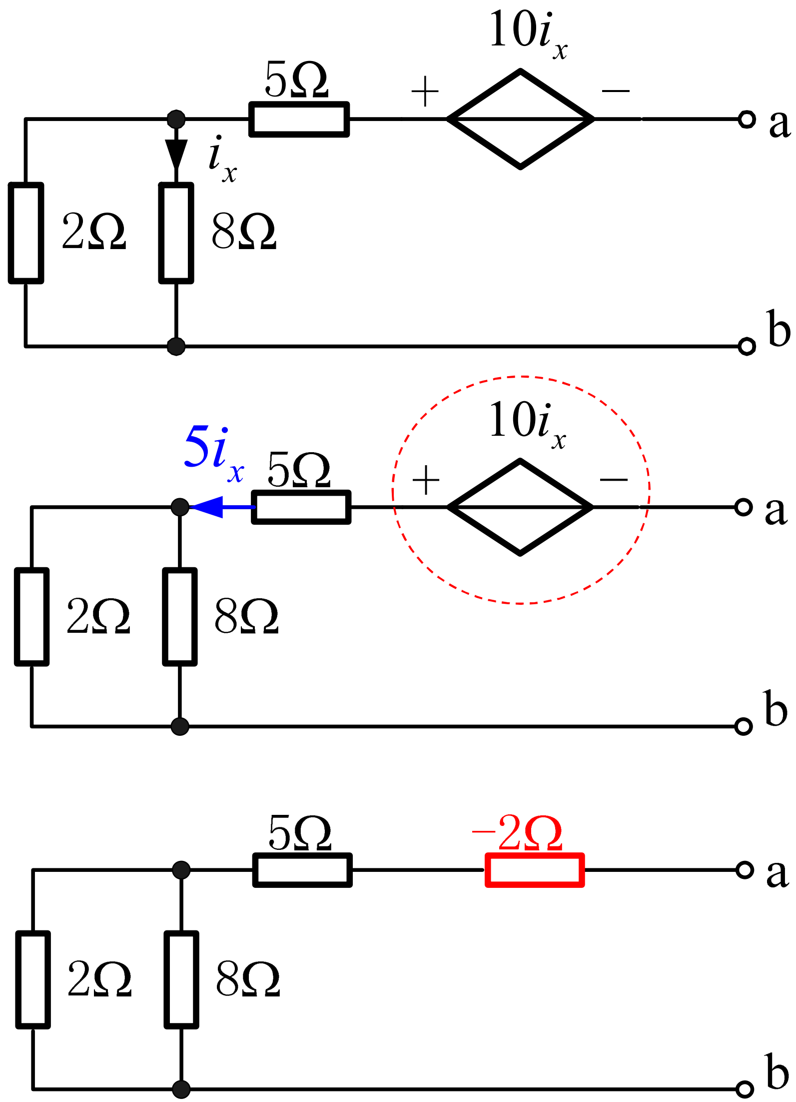
$$R_{\rm eq}=\frac{R}{1+\beta}$$



$$R_{\rm eq}=\frac{R}{1+gR}$$

2.4 电源变换Source transformation

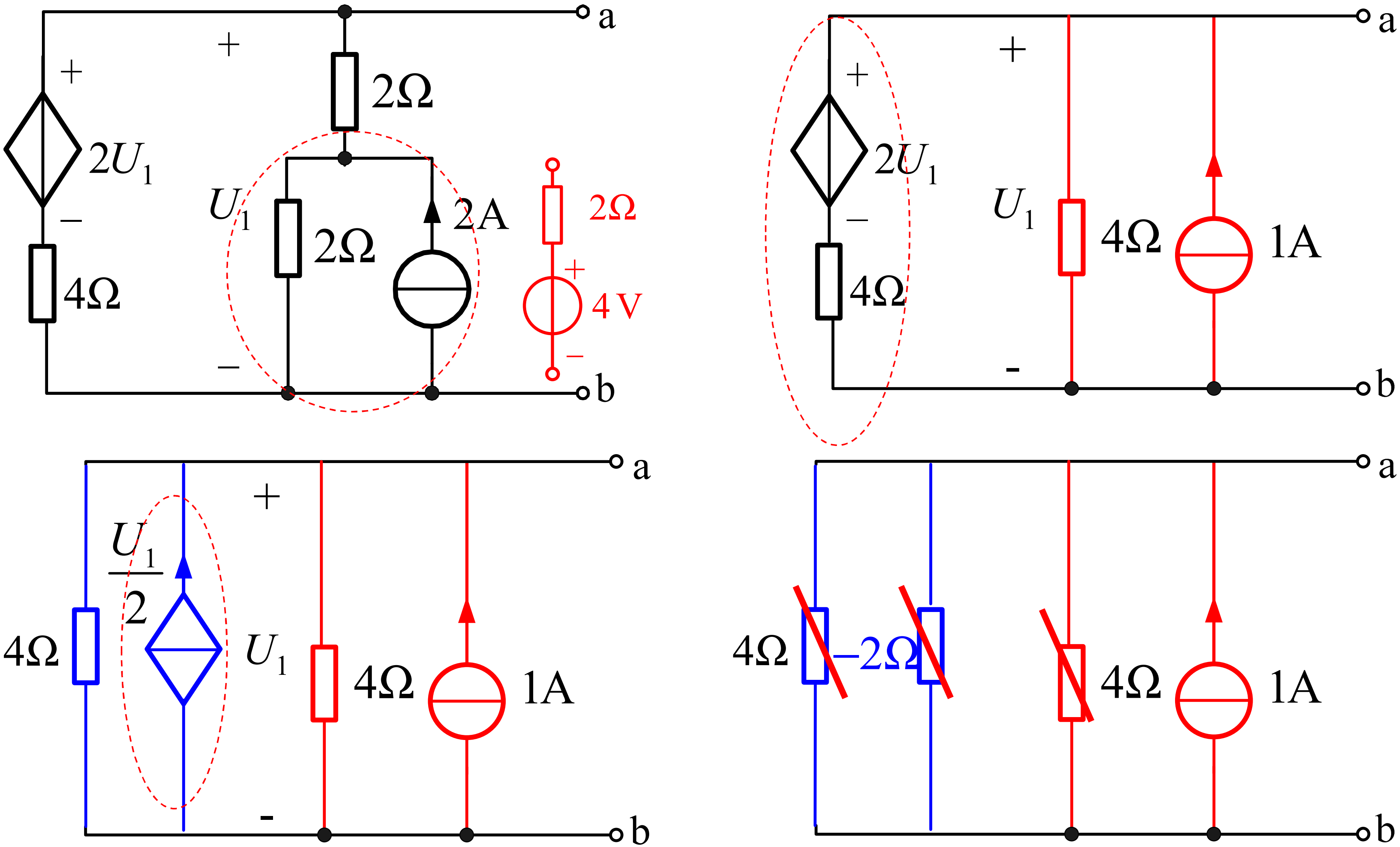
例8.计算端口等效电阻。



$$R_{ab} = 4.6\Omega$$

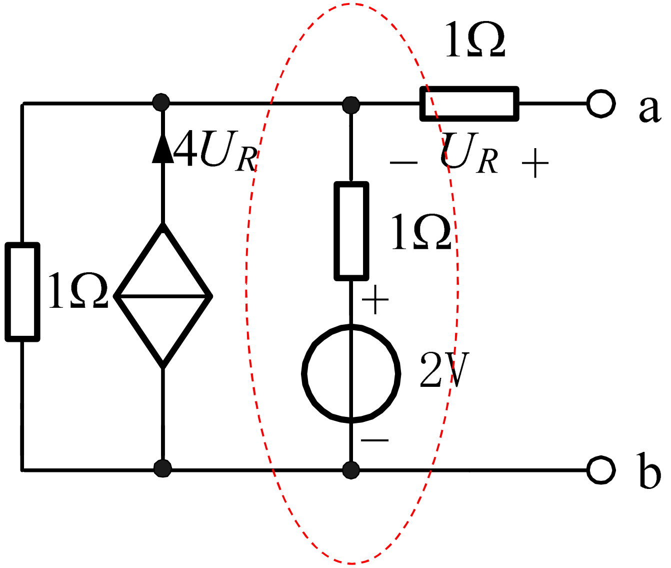
2.4 电源变换Source transformation

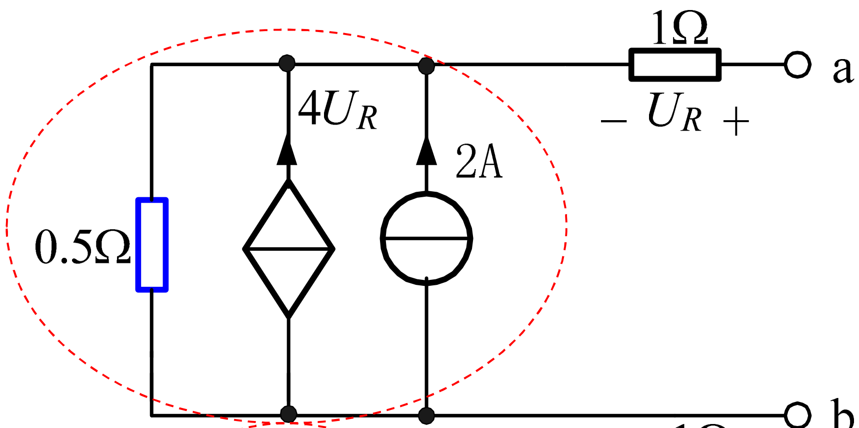
例9.找出最简等效电路。

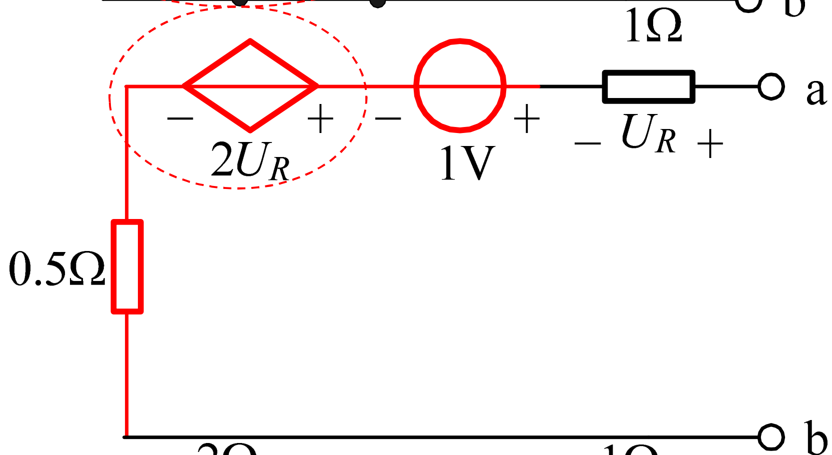


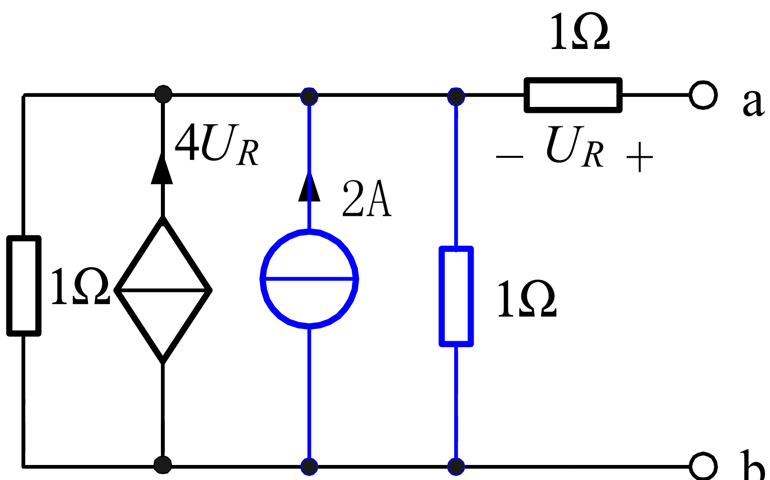
2.4 电源变换Source transformation

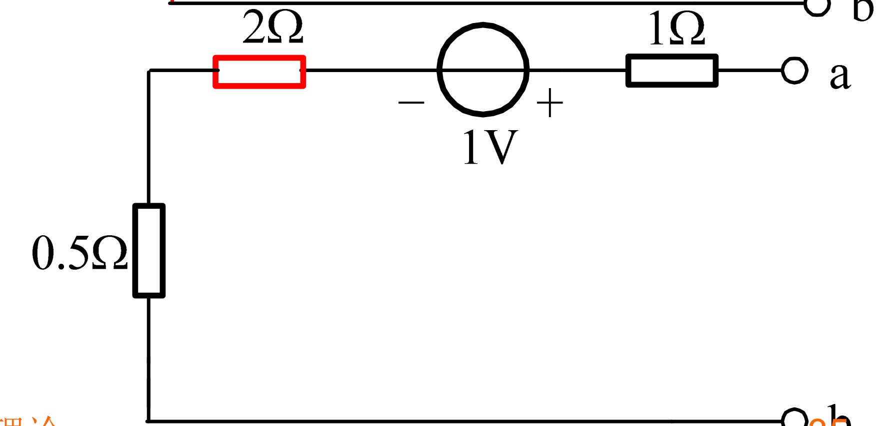
例10.找出最简等效电路。



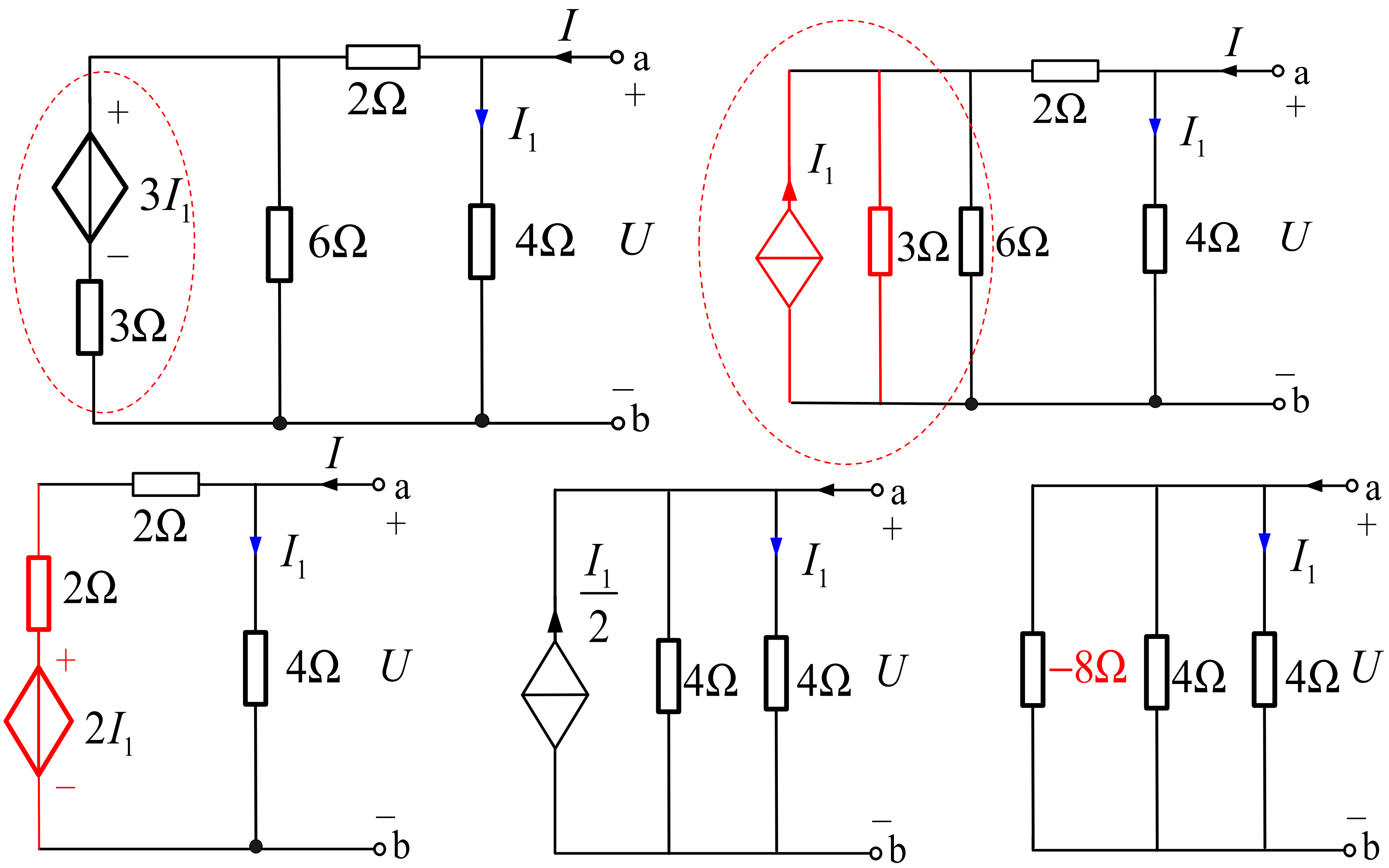








练习.计算端口等效电阻。



$$R_{eq} = 4//4//(-8) = \frac{8}{3}\Omega$$

计划学时：3学时；课后学习9学时

作业：

2-12，2-14　/串并联

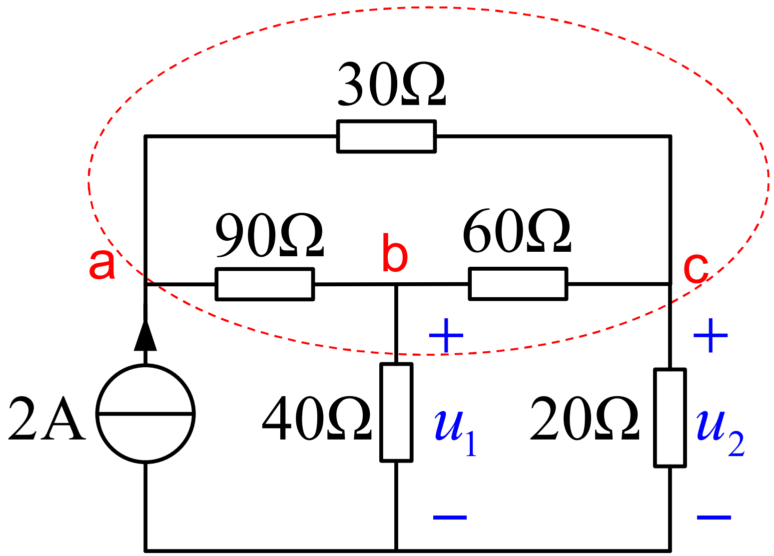
2-16，2-20，2-24 平衡电桥 星三角变换

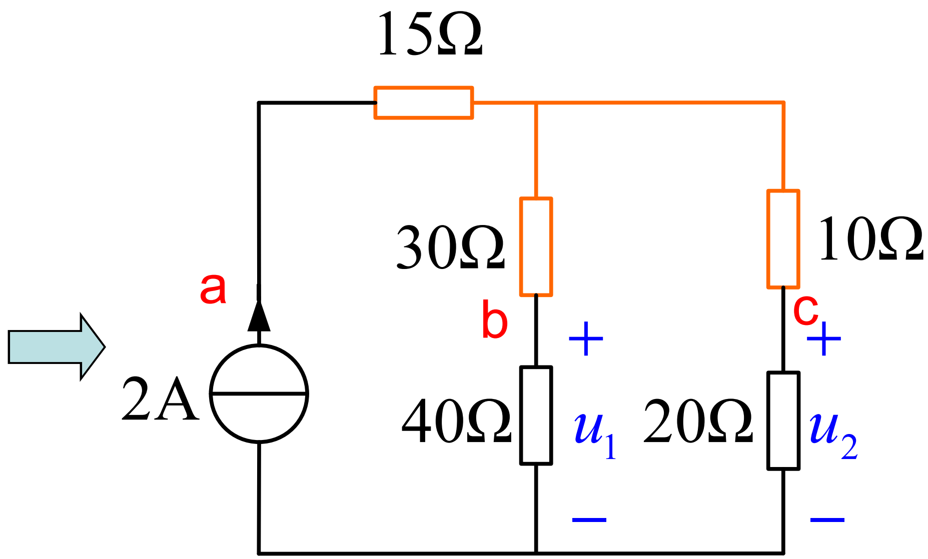
2-26 /独立电源变换

2-32 / 受控电源变换

2-36 /综合分析

2-24：确定电路中电压u_1、u_2。

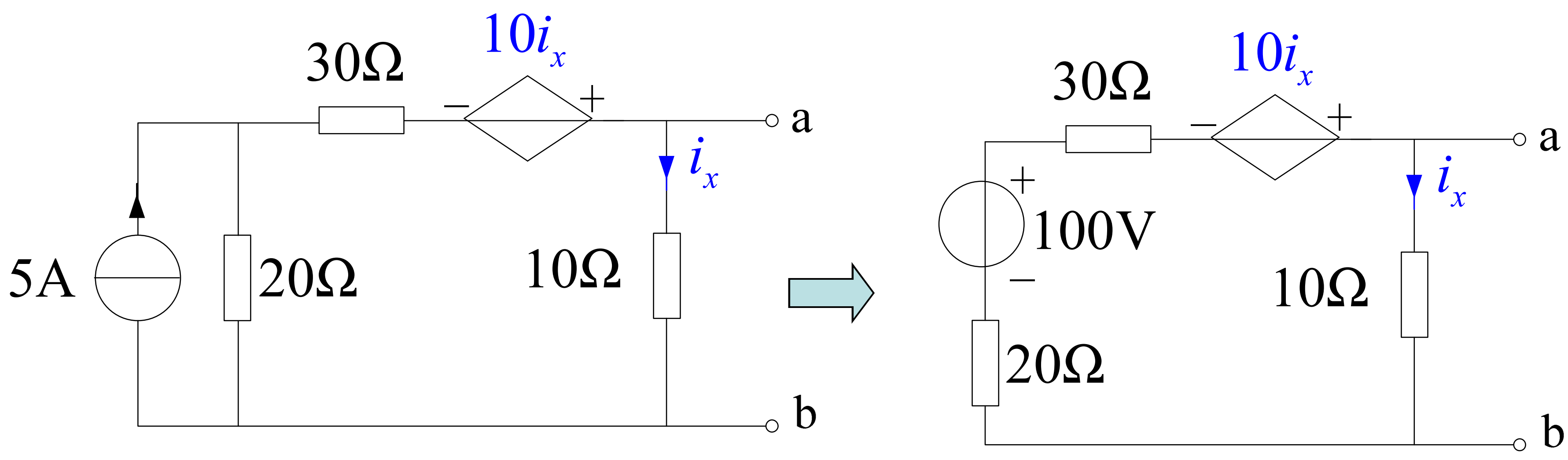


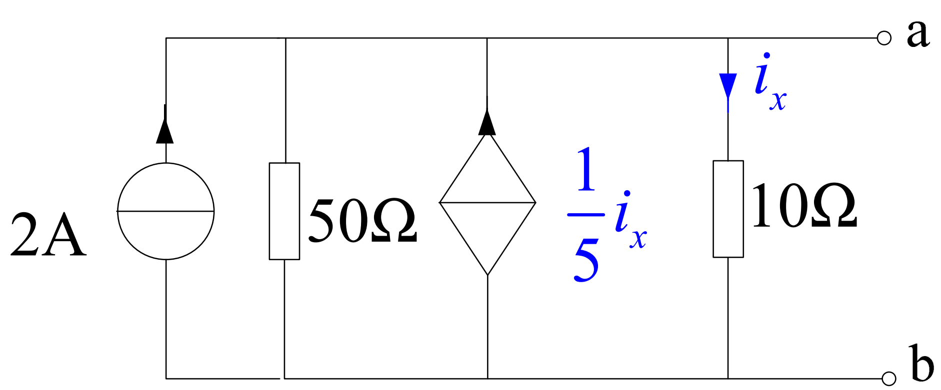


$$u_1 = \frac{30}{70+30} \times 2 \times 40 = 24\text{V}$$

$$u_2 = \frac{70}{70+30} \times 2 \times 20 = 28\text{V}$$

2-32：确定最简单等效电路。





$$R = 50 / /(-50) / /10 = 10\Omega$$