Tugas Besar 1 IF 2123 Aljabar Linear dan Geometri

Sistem Persamaan Linear, Determinan, dan Aplikasinya

Semester I Tahun 2021/2022

13520029	Muhammad Garebaldhie Er Rahman
13520065	Rayhan Kinan Muhannad
13520101	Aira Thalca Avila Putra

Kelompok “AlgeoKerenGeming”

Bab I

Deskripsi Masalah

Pada era digital ini, hampir semua bidang sains, matematika, statistika, hingga ekonomi menggunakan matriks dan sistem persamaan linear (SPL) untuk memproses tabel data atau informasi guna menyelesaikan suatu permasalahan. Dengan menggunakan matriks, kita dapat membuat representasi/model matematika dari permasalahan tersebut. Kemudian dengan menggunakan sistem persamaan linear, kita dapat menformulasikan solusinya.

Di dalam bidang matematika, matriks didefinisikan sebagai tabel yang berisi angka, simbol, atau ekspresi yang tersusun dalam baris dan kolom. Sebagai contoh, dibawah ini adalah gambar matriks 3 × 4 (memiliki tiga baris dan empat kolom):

$$\begin{bmatrix} 3 & 18 & 9 & -1 \\ 23 & 0 & 62 & 5 \\ 15 & 32 & 90 & 1 \end{bmatrix}$$

1.1. Matriks dengan ukuran 3 × 4

Salah satu fungsi dari matriks ini adalah memodelkan sistem persamaan linear (SPL). Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. SPL tersebut dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan ($x = A^{-1}B$), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan n peubah dan n persamaan). Sebagai contoh, dibawah ini adalah salah satu cara pemodelan SPL serta hasil penyelesaiannya:

$$3x + 2y + z = 10$$

$$x + 3y + z = 10$$

$$4x + y + 2z = 12$$

1.2. Sistem Persamaan Linear

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

1.3. Bentuk Matriks Augmented

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.4. Hasil OBE Matriks Augmented

$$x = 1; y = 2; z = 3$$

1.5. Solusi dari Sistem Persamaan Linear pada persamaan 1.2

Setiap metode penyelesaian SPL memiliki pola yang berulang. Hal ini membuat kita dapat membuat sebuah algoritma pada program komputer yang bisa menyelesaikan SPL dari metode-metode yang sudah kita ketahui.

Kita dapat menggunakan SPL untuk memecahkan beberapa permasalahan dalam berbagai bidang, seperti pada bidang statistika kita dapat mencari persamaan Interpolasi dan Regresi Linear Berganda dari data yang kita milikki. Pada Tugas Besar Aljabar Linear dan Geometri kali ini, penulis berencana untuk membuat algoritma agar dapat menyelesaikan kedua permasalahan tersebut.

Bab II

Teori Singkat

1. Determinan Matriks

Determinan adalah nilai yang dapat dihitung dari unsur-unsur suatu matriks persegi**.** Matriks persegi itu sendiri adalah matriks yang memiliki jumlah baris dan kolom yang sama. Dalam menghitung determinan sebuah matriks, ada dua metode utama yang biasanya digunakan. Metode yang pertama adalah metode ekspansi kofaktor. Metode ini memiliki definisi yaitu:

Jika A adalah sebuah matriks persegi, maka minor entri a_{ij} dinyatakan oleh M_{ij} dan didefinisikan menjadi determinan submatriks yang tetap setelah baris ke i dan kolom ke j dicoret dari A. Bilangan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dinyatakan sebagai C_{ij} dan dinamakan kofaktor entri a_{ij}. Contoh dari minor entri dan kofaktor adalah sebagai berikut.

Misal diketahui matriks dibawah ini. Tentukan minor entri dan kofaktor dari a_{11}.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 16$$

2.1. Kofaktor dari suatu matriks

Untuk mempermudah mengingat tanda positif negatif pada kofaktor, cukup melihat tabel dibawah ini.

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

2.2. Tabel tanda positif dan negatif dari kofaktor

Salah satu contoh perhitungan determinan dengan ekspansi kofaktor adalah sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 3\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 48 - 10 - 12 = 26$$

2.3. Cara mencari determinan menggunakan ekspansi kofaktor

Metode yang kedua adalah metode reduksi baris. Determinan dicari dengan menggunakan Operasi Baris Elementer untuk mendapatkan matriks segitiga atas ataupun matriks segitiga bawah.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{55} \end{bmatrix}, \det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$$

2.4. Cara mencari determinan menggunakan matriks segitiga

Fokus utama dari metode ini adalah menggunakan OBE untuk membuat sebuah matriks menjadi matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah.

$$[A] \sim [segitiga\ atas\ atau\ bawah]$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1k} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2k} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a'_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{kk} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^p a'_{11}a'_{22}a'_{33} \ldots a'_{kk}$$

2.5. Cara mencari determinan menggunakan matriks segitiga dan Opersi Baris Elementer

(Nilai p menyatakan banyaknya pertukaran baris dalam Operasi Baris Elementer)

2. Metode Eliminasi Gauss

Sebelum kita mengerti tentang Metode Eliminasi Gauss, kita terlebih dahulu harus mengetahui Matriks Eselon Baris. Matriks Eselon Baris (*row echelon form*) adalah matriks yang memiliki 1 utama pada setiap baris, kecuali baris yang seluruhnya 0. Dibawah ini adalah beberapa contoh dari Matriks Eselon Baris

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.6. Beberapa contoh dari Matriks Eselon Baris

(* : Nilai sembarang)

Sifat-sifat dari Matriks Eselon Baris adalah

1. Jika sebuah baris tidak terdiri dari seluruhnya 0, maka bilangan tidak 0 pertama di dalam baris tersebut adalah 1 (disebut 1 utama).
2. Jika ada baris yang seluruhnya 0, maka semua baris itu dikumpulkan di bagian bawah matriks.
3. Di dalam dua baris berurutan yang tidak seluruhnya 0, maka 1 utama pada baris yang lebih rendah terdapat lebih jauh ke kanan daripada 1 utama pada baris yang lebih tinggi.

Langkah-langkah yang harus dilakukan untuk mencari solusi dari Sistem Persamaan Linear menggunakan Metode Eliminasi Gauss adalah

1. Nyatakan Sistem Persamaan Linear dalam bentuk matriks *augmented*.
2. Terapkan Operasi Baris Elementer hingga matriks tersebut berbentuk matriks eselon baris.
3. Gunakan *backward substitusion* untuk mencari solusi dari setiap variabel.

Dibawah ini adalah contoh penyelesaian Sistem Persamaan Linear menggunakan Metode Eliminasi Gauss

$$2x + 3y - z = 5$$

$$4x + 4y - 3z = 3$$

$$-2x + 3y - z = 1$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_1/2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - 4R_1 \\ \sim \\ R_3 + 2R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix} \overset{R_2/(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{bmatrix} \overset{R_3 - 6R_2}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix} \overset{R_3/(-5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dari matriks *augmented* terakhir:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Diperoleh beberapa persamaan linear sebagai berikut:

$$x + \frac{3}{2}y - \frac{1}{2}z = \frac{5}{2}$$

$$y + \frac{1}{2}z = \frac{7}{2}$$

$$z = 3$$

Diselesaikan menggunakan *backward substitution*:

$$z = 3$$

$$y + \frac{1}{2}(3) = \frac{7}{3} \rightarrow y = 2$$

$$x + \frac{3}{2}(2) - \frac{1}{2}(3) = \frac{5}{2} \rightarrow x = 1$$

2.7. Contoh mencari solusi Sistem Persamaan Linear menggunakan Metode Gauss

3. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Selain Metode Eliminasi Gauss, kita juga dapat menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan untuk mencari solusi dari suatu Sistem Persamaan Linear. Secara garis besar, kedua metode tersebut sama-sama menggunakan Operasi Baris Elementer untuk mengubah bentuk matriks *augmented* dari persamaannya. Perbedaannya adalah pada Metode Eliminasi Gauss-Jordan, tidak diperlukan *backward substitution* dikarenakan bentuk akhir dari matriksnya adalah Matriks Eselon Baris Tereduksi (*reduced row echelon form*).

Sifat-sifat Matriks Eselon Baris Tereduksi sama dengan sifat dari Matriks Eselon Baris biasa, dengan sedikit tambahan. Pada Matriks Eselon Baris Tereduksi, setiap kolom yang memiliki 1 utama memiliki 0 di kolom lainnya. Dibawah ini adalah contoh dari Matriks Eselon Baris Tereduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.8. Beberapa contoh dari Matriks Eselon Baris Tereduksi

(* : Nilai sembarang)

Langkah-langkah yang harus dilakukan untuk mencari solusi dari Sistem Persamaan Linear menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan adalah

1. Fase maju atau fase eliminasi Gauss (menghasilkan nilai 0 dibawah 1 utama).
2. Fase mundur atau *backward phase* (menghasilkan nilai 0 diatas 1 utama).

Dibawah ini adalah contoh penyelesaian Sistem Persamaan Linear menggunakan Metode Eliminasi Gauss-Jordan

$$2x + 3y - z = 5$$

$$4x + 4y - 3z = 3$$

$$-2x + 3y - z = 1$$

Dari fase eliminasi Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Eliminasi fase mundur

$$\begin{bmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_1 - 3/2\, R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5/4 & -11/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_1 + 5/4\, R_3 \\ \sim \\ R_2 - 1/2\, R_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Diperoleh solusi dari Sistem Persamaan linear adalah sebagai berikut:

$$x = 1$$

$$y = 2$$

$$z = 3$$

2.9. Contoh mencari solusi Sistem Persamaan Linear menggunakan Metode Gauss-Jordan

4. Matriks Balikan

Balikan matriks dari A adalah sebuah kebalikan (invers) dari sebuah matriks persegi A yang akan menghasilkan identitas jika dikalikan ($A^{-1}A = I$). Matriks balikan biasanya digunakan untuk mencari solusi dari Sistem Persamaan Linear yang memiliki solusi tunggal.

$$Ax = B$$
$$A^{-1}Ax = A^{-1}B$$
$$Ix = A^{-1}B$$
$$x = A^{-1}B$$

(I adalah matriks identitas)

Ada dua metode yang biasanya digunakan untuk menentukan matriks balikan dari A. yang pertama adalah dengan menggunakan kofaktor, yaitu dengan rumus :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

Dengan $\det(A)$ adalah determinan dari matriks A dan $adj(A)$ adalah adjoin dari matriks A yang diperoleh dengan mentranspose matriks kofaktor dari A. Metode yang kedua adalah dengan metode eliminasi Gauss-Jordan. Matriks balikan pada metode ini diperoleh dengan mengubah matriks augmented $[A|I]$ ~(Gauss-Jordan)~ $[I|A^{-1}]$. Dalam hal ini, I adalah matriks identitas dengan ukuran sama dengan matriks A.

5. Matriks Kofaktor

Matriks kofaktor adalah matriks yang terbentuk dari kofaktor kofaktor matriks. Susunan elemen pada matriks kofaktor juga sesuai dengan susunan pada matriksnya. Secara umum matriks kofaktor dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1k} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2k} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cdots & C_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{k1} & C_{k2} & C_{k3} & \cdots & C_{kk} \end{bmatrix}$$

2.10. Contoh dari suatu matriks kofaktor

6. Matriks Adjoint

Adjoin dari matriks persegi A didefinisikan sebagai transpose dari matriks kofaktor dari A. Adjoin dari matriks A ditulis dengan adj(A). Adjoin dari matriks A digunakan untuk menentukan balikan dari matriks dengan rumus:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} * adj(A)$$

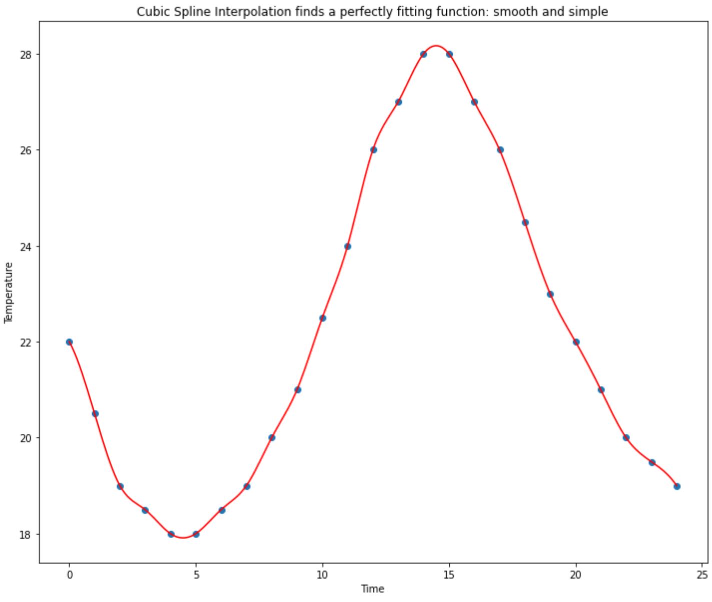
7. Kaidah Cramer

Kaidah Cramer adalah rumus yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan banyak persamaan sama dengan banyak variabel, dan berlaku ketika sistem tersebut memiliki solusi yang tunggal. Rumus ini menyatakan solusi dengan menggunakan determinan matriks koefisien (dari sistem persamaan) dan determinan matriks lain yang diperoleh dengan mengganti salah satu kolom matriks koefisien dengan vektor yang berada sebelah kanan persamaan. Misal $Ax = b$ adalah SPL yang terdiri dari k persamaan linear dengan k variabel. Jika $\det(A) \neq 0$, maka setiap variabel memiliki solusi unik yaitu:

$$x_1 = \frac{\det(\mathrm{A}_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}$$

Matriks A_i didapatkan dengan mengubah entri pada kolom ke-i dengan matriks b.

8. Interpolasi Polinom



2.11. Kurva interpolasi polinom yang dibuat menggunakan Matplotlib dan SciPy

Interpolasi Polinom adalah suatu metode analisis numeris (*numerical analysis*) yang memperkirakan/mengaproksimasi suatu nilai fungsi polinom berdasarkan beberapa titik data yang diketahui. Pada bidang sains dan rekayasa, seringkali kita mendapatkan kumpulan data dari hasil percobaan dan ingin memprediksi nilai tersebut ketika salah satu nilai variabel independennya diubah. Dengan bantuan Interpolasi

Polinom, kita dapat membuat fungsi projeksi dan membantu kita untuk memodelkan bagaimana data tersebut berubah-ubah terhadap variabel independennya. Tidak hanya membuat prediksi, Interpolasi Polinom juga dapat memperkirakan hubungan antara variabel data tersebut (berbanding terbalik, tidak berhubungan, berbanding linear, berbanding kuadratik, dkk).

Metode untuk mencari persamaan Interpolasi Polinom adalah sebagai berikut:

1. Misal diberikan $(n + 1)$ buah titik data yang berbeda.
$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$
2. Akan terdapat suatu polinom $p_n(x)$ yang memenuhi:
$$y_i = p_n(x_i) \; \forall \; i = 0, 1, 2, \dots, n$$
Polinom tersebut dapat diasumsikan memiliki bentuk:
$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$
3. Buatlah matriks *augmented* dari persamaan tersebut:
$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & {x_0}^2 & \cdots & {x_0}^n & y_0 \\ 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^n & y_1 \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^n & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^n & y_n \end{bmatrix}$$
4. Lakukan Eliminasi Gauss atau Eliminasi Gauss-Jordan pada matriks *augmented* agar mendapat nilai koefisien dari setiap variabel (contoh dibawah menggunakan metode Eliminasi Gauss-Jordan):
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & k_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & k_n \end{bmatrix}$$

Solusi:
$$a_0 = k_0$$
$$a_1 = k_1$$
$$a_2 = k_2$$
$$\vdots$$
$$a_n = k_n$$

9. Regresi Linear Berganda

Regresi Linear Berganda adalah suatu metode statistika untuk memodelkan hubungan antara beberapa variabel independen terhadap suatu variabel dependen. Sesuai namanya, Regresi Linear Berganda hanya dapat membuat hampiran linear dari beberapa titik data yang berbeda. Hal ini berbeda dengan Interpolasi Polinom yang dapat membuat hampiran polinomial derajat n. Meskipun begitu, Regresi Linear Berganda dapat memodelkan banyak variabel independen secara bersamaan, dibandingkan Interpolasi Polinom yang hanya bisa memodelkan satu variabel independen saja. Sama halnya dengan Interpolasi Polinom, Regresi Linear Berganda juga dapat memperkirakan hubungan antara variabel data independen (dengan catatan hubungan yang dapat diperkirakan hanya dapat berupa berbanding terbalik, tidak berhubungan, atau berbanding lurus).

Metode untuk mencari persamaan Regresi Linear Berganda adalah sebagai berikut:

1. Misal terdapat k peubah $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ pada suatu data.
2. Untuk melakukan regresi, dibutuhkan k buah titik data yang berbeda pada data tersebut.
3. Akan terdapat suatu fungsi $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k)$ yang memenuhi:

$$y_i = f(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}, \dots, x_{ki})$$

   Fungsi tersebut dapat diasumsikan memiliki bentuk:

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \cdots + \beta_k x_k + \epsilon_i$$

4. Buatlah matriks *augmented* dari persamaan tersebut menggunakan rumus *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression*:

$$\begin{bmatrix} k & \sum_{i=1}^{k} x_{1i} & \sum_{i=1}^{k} x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} x_{ki} & \sum_{i=1}^{k} y_i \\ \sum_{i=1}^{k} x_{1i} & \sum_{i=1}^{k} {x_{1i}}^2 & \sum_{i=1}^{k} x_{1i}x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} x_{1i}x_{ki} & \sum_{i=1}^{k} x_{1i}y_i \\ \sum_{i=1}^{k} x_{2i} & \sum_{i=1}^{k} x_{2i}x_{1i} & \sum_{i=1}^{k} {x_{2i}}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{k} x_{2i}x_{ki} & \sum_{i=1}^{k} x_{2i}y_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} x_{ki} & \sum_{i=1}^{k} x_{ki}x_{1i} & \sum_{i=1}^{k} x_{ki}x_{2i} & \cdots & \sum_{i=1}^{k} {x_{ki}}^2 & \sum_{i=1}^{k} x_{ki}y_i \end{bmatrix}$$

5. Lakukan Eliminasi Gauss atau Eliminasi Gauss-Jordan pada matriks *augmented* agar mendapat nilai koefisien dari setiap variabel (contoh dibawah menggunakan metode Eliminasi Gauss-Jordan):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n_0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & n_1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & n_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & n_k \end{bmatrix}$$

Solusi:

$$\beta_0 = n_0$$
$$\beta_1 = n_1$$
$$\beta_2 = n_2$$
$$\vdots$$
$$\beta_k = n_k$$

BAB III

Implementasi Program

1. Class Matrix
   - Attribute

Nama	Tipe	Deksripisi
row	private Int	Jumlah baris
Col	Private int	Jumlah kolom
Mtrx	Private Double[][]	Akan terisi dengan elemen matrix
sc	Private Scanner	Scanner untuk melakukan input

   - Method

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
Matrix	Public Constructor	(Int row, int col), (int row, int col, doble val)	Membuat matrix baru dengan spesifikasi tertentu
getRow	Public int		Mengembalikan nilai jumlah Baris
getCol	Public int		Mengembalikan nilai jumlah kolom
getElmt	Public double	(int row, int col)	Mengembalikan elemen matrix pada baris row dan kolom col

setRow	Public void	Int Row	Merubah nilai efektif baris menjadi Row
setCol	Public void	Int Col	Merubah nilai efektif baris menjadi col
createMatrix	Public void		Menginput matrix dengan jumlah kolom dan baris yang sudah ada pada attribute
createIdentityMatrix	Public void		Membuat identitas matriks dengan ukuran kolom dan baris pada attribute
displayMatrix	Public void		Mendisplay matrix
copyMatrix	Public Matrix	Matrix a	Membuat copy dari sebuah matrix inputan misalnya matrix a ke sebuah matrix baru
getDiagonalElmt	Public double	Int idx	Mengembalikan nilai elemen dengan baris

			idx dan kolom idx
isSquare	Public Boolean		Mengembalikan nilai true jika matrix tersebut merupakan matrix persegi
isIdentity	Public Boolean		Mengembalikan nilai true jika matrix tersebut merupakan matrix identitas
setPrecision	Public void	Int scale	Merubah presisi menjadi scale angka dibelakang koma
setPrecisionWORounding	Public void	Int scale	Merubah presisi sebesar scale angka dibelakang koma namun tanpa dilakukan pembulatan

2. Class Operation

- Attribute

Class ini tidak memiliki attribute

- Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
addMatrix	Public static Matrix	Matrix a, Matrix b	Mengembalikan matrix penjumlahan dari matrix a dengan matrix b
subtractMatrix	Public static Matrix	Matrix a, Matrix b	Mengembalikan matrix pengurangan dari matrix a dengan matrix b
timesRowCol	Public static double	Matrix a, Matrix b, int row, int col	Mengembalikan nilai perkalian antara baris a dengan kolom b
multMatrix	Public static Matrix	Matrix a, Matrix b	Mengembalikan nilai perkalian antara matrix a dan matrix b
rowTimesK	Public static void	Matrix a, double k, int row	Mengalikan setiap element matrix pada

			baris row dengan k
swapRow	Public static void	Matirx a, int row1, int row2	Merubah baris row1 dengan baris row2 pada matrix tersebut
swapCol	Public static void	Matrix a, int col1, int col2	Merubah kolom col1 dengan kolom col2 pada matrix tersebut
setRow	Public static void	Matrix a, Matrix b, int row1, int row2	Merubah baris row1 pada matrix a menjadi baris row2 pada matrix b
setCol	Public static void	Matrix a, Matrix b, int col1, int col2	Merubah kolom col1 pada matrix a menjadi kolom col2 pada matrix b
sumCol	Public static double	Matrix m, int col	Mengembalikan jumlah element pada kolom col
sumColTCol	Public static double	Matrix m, int col1, int col2	Mengembalikan jumlah perkalian element pada setiap kolom col1 dengan

			col2 lalu dijumlahkan totalnya
transpose	Public static Matrix	Matrix a	Mengembalikan matrix transpose dari matrix a
rowReduction	Public static void	Matrix a, int row1, int row2, int col	Melakukan operasi obe dengan merubah baris row 2 dengan obe dari baris row1 dengan menggunakan acuan element pada row1, col dan row2, col
augmentedMatrix	Public static Matrix	Matrix a, Matrix b	Membuat augmented matrix dengan menyatukan matrix a dan matrix b
splitAugmentedMatrix	Public static void	Matrix in, Matrix a, Matrix b	Membelah matrix augmented menjadi 2 matrix yaitu matrix a dan matrix b

setPrecisionValue	Public static double	Double d, int scale	Mengembalikan nilai d yang memiliki presisi yang khusus sebesar scale
setPrecisionArray	Public static void	Double[] d, Int scale	Mengeset presisi setiap element d pada array dengan presisi scale
setPrecision2dArray	Public static void	Double[][]d, int scale	Merubah presisi setiap elemen pada array d dengan presisi khusus yaitu sebesar scale
Eval	Public static double	String s	Melakukan evaluasi jika ditemukan string / (dapat membaca bilangan pecahan) lalu mengembalikan nilai tersebut

3. Class SistemPersamaanLinear

- Attribute

  Class ini tidak memiliki attribute

- Methods

Name	Tipe	Parameter	Deskripsi
isEmpty	Public static Boolean	Double[] m	Mengecek apakah array m memiliki elemen tidak nol
ToString	Public static String	Double[] m	Mengembalikan nilai dari formatted solusi m
MatrixGaussJordan	Public static Matrix	Matrix m	Mengembalikan matrix m yang telah dilakukan obe sesuai kaidah gauss jordan
SPLInverse	Public static void	Matrix m	Menyelesaikan spl matrix m dengan metode spl inverse dan langsung mengeluarkan solusi yang telah di format
matrixGauss	Public static matrix	Matrix m	Mengembalikan matrix m yang telah dilakukan obe

			sesuai kaidah gauss
SPLGauss	Public static void	Matrix m	Menyelesaikan SPL matrix m Sengan metode gauss lalu mengeluarkan solusi yang telah di format
SPLGaussJordan	Public static void	Matrix m	Menyelesaikan spl matrix m dengan metode GaussJordan lalu mengeluarkan solusi yang telah di format
FileSPLInverse	Public static void	Matrix m, String namaFile	Melakukan write solusi dari matrix m sesuai dengan format SPL Inverse ke file namaFile.txt
FileSPlGauss	Public static void	Matrix m, string namaFile	Melakukan write solusi dari matrix m sesuai dengan format Gauss ke file namaFile.txt

FileSPLGaussJordan	Public static void	Matrix m, string namaFile	Melakukan write solusi dari matrix m sesuai dengan format Gauss Jordan ke file namaFile.txt

4. Class RLB

- Attribute

  Class ini tidak memiliki attribute

- Methods

Nama	Tipe	Paramter	Deskripsi
convertRLBMatrix	Public static Matrix	Matrix m	Merubah nilai input menjadi rlb matrix yang telah di selesaikan menggunakan matrix gauss Jordan lalu disimpan ke matrix m
fileRLB	Public static Matrix	Matrix m, String namaFile	Melakukan write solusi dari regresi linear berganda ke dalam file namaFile.txt
OuputRLB	Public static void	Matrix m, int x	Mengeluarkan prediksi RLB

			dari matrix m, dengan jumlah peubah x yang telah diformat sesuai kaidah regresi linear berganda
keluarkanRLB	Public static void	Matrix m	Mengeluarkan solusi RLB berupa fungsi f(x) yang telah di format ke layar

5. Class inverse
   - Attribute

     Class ini tidak memiliki attribute

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
Matrikskofaktor	Public static Matrix	Matrix a	Mengembalikan nilai matrix kofaktor dari matrix a
Adjoint	Public static Matrix	Matrix a	Mengembalikan adjoint dari matrix a
inverseAdjoint	Public static Matrix	Matrix a	Mengembalikan nilai null apabila determinannya nol dan mengembalikan matrix inverse dari matrix a

displayInverseAdjoint	Public static void	Matrix m	Mengeeluarkan output matrix m sesuai dengan kondisi inverseAdjoint
eleminasiGaussJordan	Public static Matrix	Matrix a	Mengembalikan nilai matrix a yang telah dilakukan eleminasi gauss Jordan dan null apabila tidak memiliki balikan
displayGaussJordan	Public static void	Matrix m	Mengeluarkan output matrix m sesuai kondisi eliminasiGaussJordan
fileInverseAdjoint	Public static void	Matrix m, string namaFile	Melakukan write solusi inverseAdjoint dari matrix m dengan file namaFile.txt
fileGaussJordan	Public static void	Matrix m, string namaFile	Melakuikan write solusi GaussJordan dari matrix m dengan file namaFile.txt

6. Class Interpolasi
    - Attribute

      Class ini tidak memiliki attribute
    - Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
masukanInterpolasi	Public static void	Int n	Menerima masukan sebsar n diikuti dengan n

			pasangan x y dengan tipe interpolasi dari keyboard
keluarkanInterpolasi	Public static void	Matrix a	Mengoutput nilai interpolasi matrix a yang telah diolah sesuai dengan format
MatrixToMatrixInterpolasi	Public static Matrix	Matrix m	Merubah matrix m (nx2) ke dalam bentuk matrix interpolasi yang siap diolah
getAnsInterpolasi	Public static Matrix	Matrix a	Mengembalikan array solusi dari matrix interpolasi a untuk diolah dan di format
outputInterpolasi	Public static void	Matrix a, double x	Melakukan taksiran nilai terhadap solusi interpolasi dan mengeluarkannya ke dalam layer
fileInterpolasi	Public static void	Matrix a, String namaFile	Melakukan write solusi interpolasi dari matrix a

			ke sebuah file Bernama namaFile.txt

7. Class Determinan

- Attribute

  Class ini tidak memiliki attribute

- Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
Kofaktor	Public static double	Matrix m, int a, int b	Mengembalikan nilai kofaktor ukuran pada baris a kolom b dari sebuah matrix m
Ekspansikofaktor	Public static double	Matrix m	Mengembalikan nilai dari determinan matrix m dengan metode kofaktor
displayEkspansiKofaktor	Public static double	Matrix m	Ouput nilai determinan matrix m berdasarkan metode ekspansi kofaktor
determinanOBE	Public static double	Matrix m	Mengembalikan deteriman dari matrix a

			dengan metode OBE
displayOBE	Public static void	Matrix m	Mengoutput nilai determinan matrix m dengan metode obe sesuai dengan format
displaySarrus	Public static void	Matrix m	Mencari sekaligus mengeluarkan determinan matrix m sesuai format dengan metode sarrus namun hanya untuk matrix 3×3
fileEkspansiKofaktor	Public static void	Matrix m, String namaFile	Melakukan write solusi dari ekspansi kofaktor ke sebuah file Bernama namaFile.txt
fileOBE	Public static void	Matrix m, String namaFile	Melakukan write solusi dari Operasi Baris Elementer matrix m ke sebuah file

			Bernama namaFile.txt
fileSarrus	Public static void	Matrix m, string namaFile	Melakukan write solusi dari Sarrus matrix m ke sebuah nama file Bernama namaFile.txt

8. Class Crammer
   - Attribute

     Class ini tidak memiliki attribute
   - Methods

Nama	Tipe	Parameter	Deskripsi
Crammer	Public static void	Matrix m	Mencari determinan matrix m dengan metode crammer sekaligus mengeluarkan solusinya
isDetZero	Public static Boolean	Matrix m	Mengeleuarkan nilai true Ketika determinan sebuah matrix bernilai nol
matrixCrammer	Public static Matrix	Matrix m	Mengembalikan array determinan yang telah

			dilakukan operasi crammer dari matrix m
fileCrammer	Public static void	Matrix m, String namaFile	Melakukan write solusi dari kaidah crammer ke sebuah file Bernama namaFile.txt

BAB IV

Eksperimen

1. Solusi SPL $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{B}$

a)	Solusi
$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$	`SPL tidak memiliki solusi`

b)	Solusi

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$	`x1 = a + 3.00`
	`x2 = 2.00a`
	`x3 = b`
	`x4 = a - 1.00`
	`x5 = a`

c)	Solusi

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	`x1 = b`
	`x2 = -a + 1.00`
	`x3 = c`
	`x4 = -a - 2.00`
	`x5 = a + 1.00`
	`x6 = a`

d) $n = 6$	$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Solusi	x1 = 36.00 x2 = -630.00 x3 = 3360.00 x4 = -7560.00 x5 = 7560.00 x6 = -2772.00

d) $n = 10$	$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} & \frac{1}{17} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} & \frac{1}{17} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} & \frac{1}{13} & \frac{1}{14} & \frac{1}{15} & \frac{1}{16} & \frac{1}{17} & \frac{1}{18} & \frac{1}{19} \end{bmatrix},$ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Solusi	x1 = 100.00 x2 = -4949.73 x3 = 79194.16 x4 = -600546.77 x5 = 2522265.53 x6 = -6305599.22 x7 = 9608448.58 x8 = -8750485.97 x9 = 4375214.56 x10 = -923651.15

2. SPL berbentuk *Augmented Matrix*

a)	Solusi
$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$	x1 = b - 1.00 x2 = 2.00a x3 = a x4 = b

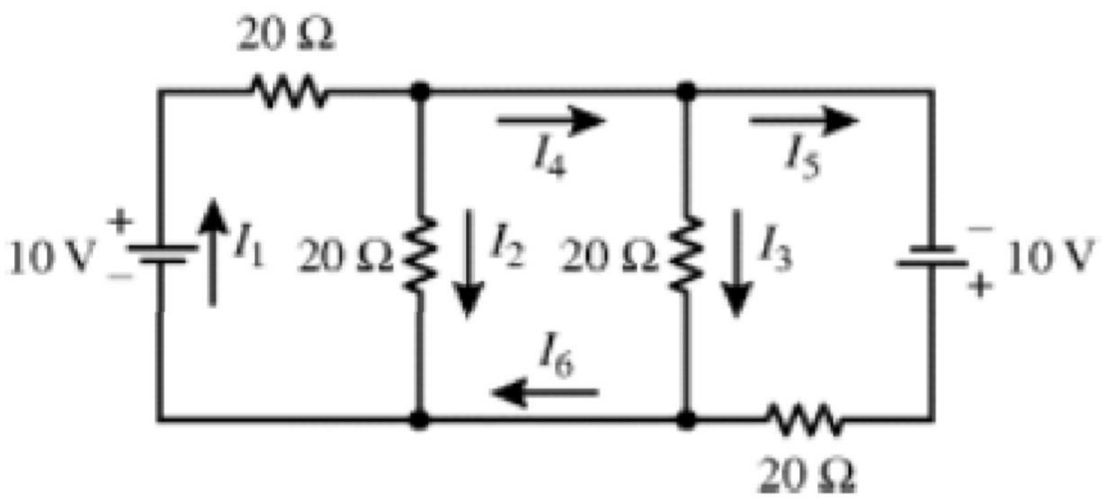
b)	Solusi
$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 6 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$	x1 = 0 x2 = 2.00 x3 = 1.00 x4 = 1.00

3. SPL bentuk normal

a)	Solusi
$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 9 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	x1 = -0.22 x2 = 0.18 x3 = 0.71 x4 = -0.26

b)	$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04289 & 0 & 0.04289 & 0.75 & 0.04289 & 0.75 & 0.61396 \\ 0 & 0.25 & 0.91421 & 0.25 & 0.91421 & 0.25 & 0.91421 & 0.25 & 0 \\ 0.61396 & 0.75 & 0.04289 & 0.75 & 0.04289 & 0 & 0.04289 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.04289 & 0.75 & 0.61396 & 0 & 0.04289 & 0.75 & 0 & 0 & 0.04289 \\ 0.91421 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.91421 & 0.25 & 0 & 0.25 & 0.91421 \\ 0.04289 & 0 & 0 & 0.75 & 0.04289 & 0 & 0.61396 & 0.75 & 0.04289 \end{bmatrix},$ $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 13 \\ 15 \\ 8 \\ 14.79 \\ 14.31 \\ 83.81 \\ 18 \\ 12 \\ 6 \\ 10.51 \\ 16.13 \\ 7.04 \end{bmatrix}$
Solusi	`SPL tidak memiliki solusi`

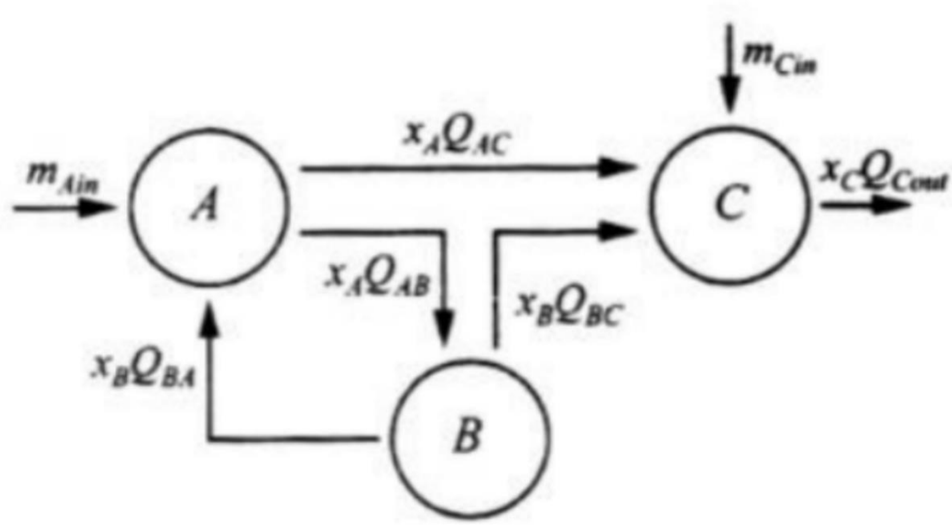
4. Tentukan arus yang mengalir pada rangkaian listrik dibawah ini



	Solusi

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20 & 0 & 20 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	x1 = 0.50 x2 = 0 x3 = 0 x4 = 0.50 x5 = 0.50 x6 = 0.50

5. Lihatlah sistem reaktor pada gambar berikut



Dengan laju volume Q dalam $m^3/_S$ dan input massa m_{in} dalam $^{mg}/_S$. Konservasi massa pada tiap inti reaktor reaktor adalah sebagai berikut:

$$m_{A_{in}} + Q_{BA}x_B - Q_{AB}x_A - Q_{AC}x_A = 0$$
$$Q_{AB}x_A - Q_{BA}x_B - Q_{BC}x_B = 0$$
$$m_{C_{in}} + Q_{AC}x_A + Q_{BC}x_B - Q_{C_{out}}x_c = 0$$

Tentukan solusi x_A, x_B, x_C dengan menggunakan parameter berikut : $Q_{AB} = 40\, ^{m^3}/_S$, $Q_{AC} = 80\, ^{m^3}/_S$, $Q_{BA} = 60\, ^{m^3}/_S$, $Q_{BC} = 20\, ^{m^3}/_S$, dan $Q_{C_{out}} = 150\, ^{m^3}/_S$ serta $m_{A_{in}} = 1300\, ^{mg}/_S$ dan $m_{C_{in}} = 200\, ^{mg}/_S$.

	Solusi

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 120 & -60 & 0 \\ 40 & -80 & 0 \\ 80 & 20 & -150 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1300 \\ 0 \\ -200 \end{bmatrix}$	x1 = 14.44 x2 = 7.22 x3 = 10.00

6. Studi kasus interpolasi

a) Gunakan tabel di bawah ini untuk mencari polinom interpolasi dari pasangan titik-titik yang terdapat pada tabel. Program menerima masukan nilai x yang akan dicari nilai fungsi $f(x)$.

x	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3
$f(x)$	0.003	0.067	0.148	0.248	0.370	0.518	0.697

Menggunakan interpolasi, didapatkan:

```
f(x) = -0.0230 + (0.2400)x + (0.1974)x^2 + (-0.0000)x^3 + (0.0260)x^4 + (-0.0000)x^5 + (0.0000)x^6
```

Lakukan pengujian pada nilai-nilai *default* berikut:

x	$f(x)$
0.2	Taksiran nilai f(0.2000) ialah: 0.0330
0.55	Taksiran nilai f(0.5500) ialah: 0.1711
0.85	Taksiran nilai f(0.8500) ialah: 0.3372
1.28	Taksiran nilai f(1.2800) ialah: 0.6775

b) Jumlah kasus positif baru Covid-19 di Indonesia semakin fluktuatif dari hari ke hari. Di bawah ini diperlihatkan jumlah kasus baru Covid-19 di Indonesia mulai dari tanggal 17 Juni 2021 hingga 31 Agustus 2021:

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
17/06/2021	6.567	12624
30/06/2021	7	21807
08/07/2021	7.258	38391
14/07/2021	7.451	54517
17/07/2021	7.548	51952
26/07/2021	7.839	28228

05/08/2021	8.161	35764
15/08/2021	8.464	20813
22/08/2021	8.709	12408
31/08/2021	9	10534

Menggunakan interpolasi, didapatkan:

```
f(x) = 7188748202653.1260 + (-9348952473956.2750)x + (5335216176448.6700)x^2 + (-1757115382284.7368)x^3 + (368609837174.7909)x^
4 + (-51139478954.7599)x^5 + (4696458211.7001)x^6 + (-275510431.4655)x^7 + (9374000.5738)x^8 + (-141010.1065)x^9
```

Gunakanlah data diatas dengan memanfaatkan polinom interpolasi untuk melakukan prediksi jumlah kasus baru Covid-19 pada tanggal-tanggal berikut:

Tanggal	Tanggal (desimal)	Jumlah Kasus Baru
16/07/2021	7.516	`Taksiran nilai f(7.5160) ialah: 53533.9805`
10/08/2021	8.323	`Taksiran nilai f(8.3230) ialah: 36288.4219`
05/09/2021	9.167	`Taksiran nilai f(9.1670) ialah: -667728.8359`
30/09/2021	10	`Taksiran nilai f(10.0000) ialah: -216942091.4063`

c) Sederhanakan fungsi

$$f(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{e^x + x}$$

Dengan polinom interpolasi derajat n di dalam selang $[0, 2]$. Sebagai contoh, jika $n = 5$, maka titik-titik yang diambil di dalam selang $[0, 2]$ berjarak $h = \frac{2-0}{5} = 0.4$.

Sebagai contoh, di bawah ini diperlihatkan titik-titik x yang diambil dari dalam selang $[0, 2]$ dengan $n = 6$:

x	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0
$f(x)$	0	0.418884	0.507158	0.560925	0.583686	0.576652

Menggunakan interpolasi, didapatkan:

```
f(x) = (2.0353)x + (-3.5527)x^2 + (3.2371)x^3 + (-1.4213)x^4 + (0.2363)x^5
```

7. Studi kasus regresi linear berganda

Diberikan sekumpulan data sesuai pada tabel berikut ini.

$Nitrous\ Oxide, y$	$Humidity, x_1$	$Temp., x_2$	$Pressure, x_3$
0.90	72.4	76.3	29.18
0.91	41.6	70.3	29.35
0.96	34.3	77.1	29.24
0.89	35.1	68.0	29.27
1.00	10.7	79.0	29.78
1.10	12.9	67.4	29.39
1.15	8.3	66.8	29.69
1.03	20.1	76.9	29.48
0.77	72.2	77.7	29.09
1.07	24.0	67.7	29.60
1.07	23.2	76.8	29.38
0.94	47.4	86.6	29.35
1.10	31.5	76.9	29.63
1.10	10.6	86.3	29.56
1.10	11.2	86.0	29.48
0.91	73.3	76.3	29.40
0.87	75.4	77.9	29.28
0.78	96.6	78.7	29.29
0.82	107.4	86.8	29.03
0.95	54.9	70.9	29.37

Gunakan *Normal Estimation Equation for Multiple Linear Regression* untuk mendapatkan regresi linear berganda dari data tabel diatas, kemudian estimasi nilai $Nitrous\ Oxide$ apabila $Humidity$ bernilai 50%, temperatur 76°F, dan tekanan udara sebesar 29.30.

Menggunakan regresi linear berganda, didapatkan:

```
y = (-3.5078) + (-0.0026)x1 + (0.0008)x2 + (0.1542)x3
```

$Nitrous\ Oxide, y$	$Humidity, x_1$	$Temp., x_2$	$Pressure, x_3$
`Prediksi nilai y dari regresi linear adalah : 0.9384`	50	76	29.30

BAB V

Kesimpulan, Saran, dan Refleksi

Sistem Persamaan linear dapat diselesaikan dengan banyak metode diantaranya dengan menggunakan metode eliminasi gauss, eliminasi gauss Jordan, kaidah Cramer, serta matriks inverse. Setiap metode memiliki ciri khas dan ketentuannya masing masing terutama pada kaidah Cramer serta metode inverse hanya dapat digunakan untuk matriks persegi yang memiliki determinan tak nol

Sistem Persamaan Linear selalu memiliki penyelesaian namun penyelesaian untuk Sistem Persamaan Linear ada 3 jenis, Solusi tunggal, solusi banyak, serta tidak ada solusi

Untuk solusi tunggal dapat dilihat pada contoh kasus matrix Hilbert dengan n = 6. Didapat solusi penyelesaian spl tersebut ialah

$$x_1 = 36; x_2 = -630; x_3 = 3360; x_4 = -7560; x_5 = 7560; x_6 = -2772$$

Untuk sistem persamaan lienar yang memiliki solusi parametrik(tak hingga) ada di kasus 2a dengan solusi

$$x_1 = b - 1; x_2 = 2a; x_3 = a; x_4 = b \; untuk \; a, b \in \mathbb{R}$$

Sedangkan untuk sistem persamaan lienar yang tidak memilki solusi ada pada contoh kasus 1a, hal ini terjadi karena terdapat baris yang memiliki nilai variable nol namun nilai persamaannya tak nol sehingga tidak memilki solusi.

Aplikasi sistem persamaan linear ini juga dapat digunakan untuk menyelesaikan berbagai macam masalah. Interpolasi polinom dan regresi linear berganda memanfatkan sistem persamaan linear untuk perhitungannya.

Interpolasi polinom dapat digunakan untuk memprediksi kasus berdasarkan fungsi yang telah didapat. Sebagai contoh pada kasus 6b, kita diminta untuk melakukan prediksi dari data yang diberikan dan didapat pada tanggal 16/07/2021 didapat nilai 53533.9805 untuk prediksi jumlah kasus baru dan seterusnya

Regresi linear berganda pun menerapkan sistem persamaan linear untuk penyelesaiannya, pada kasus no 7 kita diminta untuk mengestimasi nilai Nitrous Oxide Ketika humidity bernilai 50%, temperature 76°F serta tekanan udara sebesar 29.30. Didapat estimasi nilai Nitrous Oxide tersebut ialah sekitar 0.934.

Saran untuk selanjutnya yaitu sertakan solusi untuk setiap test case agar memudahkan pengecekan hasilnya.

Untuk tugas ini, kami merasa kami kurang bekerja secara maksimal. Kami masih bisa membuat GUI jika mengerjakan dengan rajin dan teratur. Namun *overall*, kami pikir kinerja kami sudah cukup baik dan mantap.

Referensi

- https://www.ruangguru.com/blog/cara-mencari-determinan-dan-invers-matriks (Diakses pada 26 September 2021, 20.22)
- https://jagostat.com/aljabar-linear/menghitung-determinan-matriks-menggunakan-metode-ekspansi-kofaktor (Diakses pada 26 September 2021, 19.55)
- https://www.quipper.com/id/blog/mapel/matematika/invers-matriks-kelas-12/ (Diakses pada 26 September 2021, 20.36)
- http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-02-Matriks-Eselon.pdf
  (Diakses pada 26 September 2021, 19.37)
- http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-03-Sistem-Persamaan-Linier.pdf
  (Diakses pada 26 September 2021, 21.48)
- http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-05-Sistem-Persamaan-Linier-2.pdf
  (Diakses 27 September 2021, 00.23)
- http://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/AljabarGeometri/2020-2021/Algeo-07-Aplikasi-SPL-2.pdf
  (Diakses 27 September 2021, 09.54)