Маршрут 14

1. Линейные системы уравнений. Устойчивость численных методов.

Получите численное решение системы уравнений

$u' = -2u + v,$

$v' = u - 2v$

$u(0) = v(0) = 1.$

и сравните с точным решением. Для численного решения использовать явный и неявный методы Эйлера, метод Эйлера с центральной точкой, метод трапеций, метод Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации. Получить «эталонное» решение с помощью метода Дормана-Принца.

Априорно оценить шаги, для которых используемые методы будут устойчивыми (кроме метода Дормана-Принца).

Указание. Для исследования на устойчивость перейти в базис из собственных векторов матрицы системы ОДУ.

Какой шаг интегрирования необходимо взять, чтобы численное решение было устойчивым? Сравнить полученное Вами оцененное значение с тем, при котором метод теряет устойчивость в расчетах.

На основании правила Рунге оценить фактическую погрешность полученного решения по каждому методу

2. Нелинейная система уравнений

Система Лоренца Конвективные течения в слое жидкости при определенных предположениях можно описывать следующей системой ОДУ (модель Лоренца):

$\dot{x} = \sigma y - \sigma x,$

$\dot{y} = -xz + rx - y,$

$\dot{z} = xy - bz.$

с начальными условиями

$x(0) = 0, \qquad y(0) = y_0, \qquad z(0) = z_0.$

(Здесь x — одна из компонент скорости, y, z — соответствуют членам разложения температуры в ряд Фурье, σ — число Прандтля, r — число Рэлея, b — положительная константа).

Явными методами Адамса разных порядков аппроксимации (2, 3, 4) численно решить систему Лоренца

$x(0) = y(0) = z(0) = 1$

при $b = 1, 2, 8/3, 10, 20.$ $\sigma = 10,$ $r = 28.$ Считаем, что $0 < t \le 150.$ Объяснить полученные результаты.

Проанализировать (в зависимости от шага численного интегрирования) при каких временах решения, полученные методами разного порядка аппроксимации, совпадают, а при каких начинают расходиться. Объяснить это явление. Почему при этом практически не изменяются картины в проекциях сечения фазового пространства на координатные плоскости?

3. Особые точки и особые траектории.

Исследуйте поведение фазовых траекторий для системы ОДУ

$x' = y,$

$y' = x^2 - 1$

вблизи особых точек (1, 0) и (–1, 0) с помощью двух методов Рунге–Кутты (первого и четвертого порядка точности). Объясните наблюдаемые эффекты. Значения $x(0)$ и $y(0)$ выбираются самостоятельно в окрестности особой точки.