

Жесткие системы ОДУ

Вариант 12.5

Модель дифференциации растительной ткани.

Данный пример — типичный случай биохимической модели «умеренной» размерности (современные модели, например, фотосинтеза включают сотни уравнений подобного типа). Хотя данная модель является умеренно жесткой, тем не менее, ее лучше решать с помощью методов, предназначенных для решения ЖС ОДУ.

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= -1.71y_1 + 0.43y_2 + 8.23y_3 + 0.0007, \\ \dot{y}_2 &= 1.71y_1 - 8.75y_2, \\ \dot{y}_3 &= -10.03y_3 + 0.43y_4 + 0.035y_5, \\ \dot{y}_4 &= 8.32y_2 + 1.71y_3 - 1.12y_4, \\ \dot{y}_5 &= -1.745y_5 + 0.43y_6 + 0.43y_7, \\ \dot{y}_6 &= -280y_6y_8 + 0.69y_4 + 1.71y_5 - 0.43y_6 + 0.69y_7, \\ \dot{y}_7 &= 280y_6y_8 - 1.87y_7, \\ \dot{y}_8 &= -\dot{y}_7.\end{aligned}$$

Начальные значения всех переменных системы равны нулю, кроме $y_1(0) = 1$, $y_8(0) = 0.0057$. Длина отрезка интегрирования $T_k = 421.8122$.

Получить численное решение с помощью метода CROS (одностадийный метод Розенброка с комплексными коэффициентами), однократно диагональным неявным методом Рунге-Кутты с двумя стадиями (второго порядка аппроксимации, асимптотически устойчивому, Таблица 1 и Таблица 2, и третьего порядка аппроксимации, Таблица 3).

Таблица 1.

$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	0
$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$-\sqrt{2}$	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
	1/2	1/2

Таблица 2.

$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	0
$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{2}$	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$
	1/2	1/2

Таблица 3.

$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$	0
$\frac{3-\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3-2\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3+\sqrt{3}}{6}$
	1/2	1/2

Сравнить полученные результаты с результатами, полученным методом ФДН:

$$k = 2: \frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = hf_{n+1}.$$

(недостающее начальное значение досчитывается с помощью метода Рунге-Кутты) и с помощью того же метода в представлении Нордсика (многозначного метода). Заметим, что в представлении Нордсика метод оказался самостоятельным стартовым.

Построить функции устойчивости всех используемых численных методов.