ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«БЕЛГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ**

**ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**(НИУ «БелГУ»)**

ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРНЫХ И ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**Кафедра математического и программного обеспечения информационных систем**

**Теорема К. Гёделя о неполноте**

Курсовая работа

по дисциплине «Математическая логика и дискретная математика»

студента очной формы обучения

направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика

4 курса группы 12001904

Теплых Илья Олегович

|  |  |
| --- | --- |
| ***Допущен к защите***  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2023 г.  \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  Подпись (расшифровка подписи) | Научный руководитель:  к.т.н., доц,\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  (степень, должность)  Великая Я.Г.\_\_\_\_\_\_\_\_\_  (Ф.И.О. руководителя) |
| ***Оценка\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_***  «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2023 г.  \_\_\_\_\_\_\_\_ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_  Подпись (расшифровка подписи) |  |

БЕЛГОРОД 2023

**СОДЕРЖАНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc130897747)

[1 СПРАВОЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ И ИСТОРИЧЕСКИЙ КОНТЕКСТ 5](#_Toc130897748)

[2 ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ 7](#_Toc130897749)

[3.1 Утверждение первой теоремы о неполноте 7](#_Toc130897750)

[3.2 Объяснение доказательства первой теоремы о неполноте 7](#_Toc130897751)

[3.3 Следствия первой теоремы о неполноте 9](#_Toc130897752)

[3 РАСШИРЕНИЯ И ДАЛЬНЕЙШИЕ РАЗРАБОТКИ 12](#_Toc130897753)

[4.1 Утверждение второй теоремы о неполноте 12](#_Toc130897754)

[4.2 Обзор других результатов, связанных с неполнотой, таких как диагональная лемма и теорема Тарского о неопределимости 13](#_Toc130897755)

[4 КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ И РАЗНОГЛАСИЯ 15](#_Toc130897756)

[5.1 Рассмотрение критических замечаний и возражений против теоремы Геделя о неполноте 15](#_Toc130897757)

[5.2 Обсуждение взаимосвязи между неполнотой и другими философскими проблемами, такими как свобода воли и основы этики 16](#_Toc130897758)

[5.3 Объяснение того, как неполнота использовалась для поддержки определенных философских взглядов, таких как платонизм 18](#_Toc130897759)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 20](#_Toc130897760)

[Список литературы 21](#_Toc130897761)

# ВВЕДЕНИЕ

Теорема о неполноте Курта Геделя является знаковым результатом в области математической логики, который оказал глубокое влияние на наше понимание математики, философии и природы человеческого знания. Теорема Геделя показала, что существуют пределы тому, что может быть доказано в рамках любой непротиворечивой формальной системы, и что существуют математические истины, которые по своей сути недоказуемы.

В этой курсовой работе мы исследуем предпосылки и исторический контекст теоремы Геделя о неполноте, а также ее следствия и расширения. Мы также рассмотрим критику и споры, связанные с теоремой, и то, как она повлияла на другие области математики, философии и интеллектуальной истории.

Для начала мы представим краткую биографию Курта Геделя и обзор его вклада в математическую логику. Затем мы углубимся в историческую подоплеку математической логики и основы математики, проследив происхождение теоремы о неполноте и ключевых фигур и концепций, предшествовавших Геделю.

Оттуда мы перейдем к самой теореме о неполноте, приводя формулировку первой теоремы о неполноте и объяснение ее доказательства. Затем мы обсудим следствия теоремы, включая ее влияние на философию математики и пределы человеческого знания.

Впоследствии мы рассмотрим расширения и дальнейшие разработки теоремы о неполноте, включая вторую теорему о неполноте, диагональную лемму и теорему Тарского о неопределимости. Мы также рассмотрим, как теорема о неполноте повлияла на другие области математики и философии, такие как философия разума и философия науки.

Наконец, мы рассмотрим некоторые критические замечания и противоречия, связанные с теоремой Геделя о неполноте, а также ее связь с другими философскими проблемами, такими как свобода воли и основы этики. В заключение мы поразмышляем о значении теоремы Геделя для математики, философии и интеллектуальной истории и предложим области для дальнейших исследований или чтения по этой теме.

# СПРАВОЧНАЯ ИНФОРМАЦИЯ И ИСТОРИЧЕСКИЙ КОНТЕКСТ

Математическая логика - это изучение принципов и методов, используемых в математических рассуждениях, с целью понимания основ математики и разработки строгих доказательств. Истоки математической логики можно проследить до работ древнегреческих философов, таких как Аристотель, которые изучали принципы рассуждения и дедукции.

В 19 веке основы математики оказались под пристальным вниманием математиков и философов, стремившихся обеспечить строгую и последовательную основу для этой дисциплины. Одной из самых влиятельных фигур в этом отношении был немецкий математик Георг Кантор, который разработал теорию множеств и ввел понятие бесконечности.

Работа Кантора по теории множеств и бесконечности привела к ряду парадоксов и противоречий, которые, в свою очередь, привели к разработке новых концепций и методов в математической логике. Одной из наиболее важных фигур в этом отношении был британский философ и математик Бертран Рассел, который вместе со своим коллегой Альфредом Нортом Уайтхедом стремился разработать логическую основу математики в своей книге "Principia Mathematica".

Работа Рассела и Уайтхеда по основам математики была влиятельной, но также сложной и труднодоступной для понимания. В начале 20-го века ряд математиков и логиков стремились упростить и прояснить принципы математической логики, что привело к разработке новых систем, таких как исчисление предикатов и исчисление высказываний.

Именно в этом контексте Курт Гедель начал свою работу над основами математики в 1920-х годах. Гедель был блестящим австрийским математиком и логиком, на которого оказали глубокое влияние работы Рассела и Уайтхеда, а также австрийского философа Людвига Витгенштейна.

Первым крупным вкладом Геделя в математическую логику стала его теорема о неполноте, которую он опубликовал в 1931 году. Эта теорема показала, что существуют пределы тому, что может быть доказано в рамках любой непротиворечивой формальной системы, и что существуют математические истины, которые по своей сути недоказуемы.

Теорема Геделя о неполноте была глубоким результатом, который бросил вызов основам математики и имел далеко идущие последствия для нашего понимания пределов человеческого знания. В следующем разделе мы углубимся в детали теоремы о неполноте и ее доказательства [1].

# ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ

## 3.1 Утверждение первой теоремы о неполноте

Первая теорема Геделя о неполноте гласит, что любая непротиворечивая формальная система, достаточно мощная для выражения базовой арифметики, содержит утверждения, которые истинны, но не могут быть доказаны в рамках системы [2]. Другими словами, существуют математические истины, которые не могут быть выведены из аксиом системы.

Более формально теорему можно сформулировать следующим образом:

Пусть S - непротиворечивая формальная система, включающая базовую арифметику, и пусть P (x) - формула на языке S, выражающая свойство натуральных чисел. Тогда существует утверждение G на языке S, такое, что:

* S не может доказать G или его отрицание ~G.
* G выражает свойство P(n) для некоторого натурального числа n.

Другими словами, теорема показывает, что существуют утверждения, которые верны, но недоказуемы в любой непротиворечивой формальной системе, достаточно мощной для выражения базовой арифметики. Этот результат имеет глубокие последствия для нашего понимания математики, логики и пределов человеческих знаний и привел к ряду дальнейших разработок и расширений в области математической логики.

## 3.2 Объяснение доказательства первой теоремы о неполноте

Доказательство первой теоремы Геделя о неполноте основано на хитроумной конструкции утверждения, которое истинно, но не может быть доказано в рамках самой системы. Это утверждение известно как предложение Геделя, и его построение включает кодирование утверждений на языке формальной системы в виде чисел.

Основная идея, лежащая в основе доказательства, заключается в следующем: предположим, у нас есть формальная система S, которая достаточно мощна, чтобы выразить базовую арифметику. Затем мы можем использовать язык S для определения утверждения G, которое гласит: "Я недоказуем в S". Другими словами, G утверждает свою собственную недоказуемость внутри системы.

Чтобы построить предложение Геделя, мы сначала присваиваем уникальный номер каждой формуле на языке S, используя процесс, известный как нумерация Геделя. Затем мы можем использовать эти числа для кодирования утверждений в виде натуральных чисел. Например, утверждение "1+1 =2" могло бы быть закодировано как число 5, поскольку это пятая формула в схеме нумерации Геделя.

Далее мы используем нумерацию Геделя, чтобы закодировать утверждение "Я недоказуем в S" в виде числа, которое мы назовем g. Эта кодировка включает в себя использование числа g для представления формулы, которая гласит: "g недоказуемо в S". Другими словами, предложение Геделя утверждает свою собственную недоказуемость внутри системы.

Чтобы доказать, что предложение Геделя истинно, но недоказуемо, мы используем метод, известный как диагонализация. Мы строим новую формулу H(x), которая гласит: "формула с числом Геделя x не обладает свойством P(x)", где P(x) является свойством формул на языке S. Затем мы можем использовать H (g), чтобы показать, что предложение Геделя G истинно, но недоказуемо в S.

В частности, мы предполагаем ради противоречия, что S может доказать G или его отрицание ~ G. Если S может доказать G, то по определению G мы имеем доказательство утверждения "G недоказуемо в S". Но это противоречит предположению, что G истинно, поскольку это подразумевает, что G на самом деле доказуемо в S. Аналогично, если S может доказать ~ G, то у нас есть доказательство утверждения "G доказуемо в S", что снова противоречит предположению, что G истинно [3].

Таким образом, мы показали, что ни G, ни его отрицание не могут быть доказаны в S, что означает, что G истинно, но недоказуемо в системе. Это завершает доказательство первой теоремы Геделя о неполноте.

Следует отметить, что доказательство теоремы носит технический характер и требует глубокого понимания математической логики. Тем не менее, основная идея, лежащая в основе доказательства, относительно проста и имеет глубокие последствия для нашего понимания основ математики и пределов человеческих знаний.

## 3.3 Следствия первой теоремы о неполноте

Первая теорема Геделя о неполноте имеет значительные последствия в нескольких областях математики, философии и информатики. Вот некоторые из наиболее заметных из них::

* Ограничения формальных систем: Теорема показывает, что ни одна формальная система, какой бы мощной или последовательной она ни была, не может охватить все математические истины. Другими словами, всегда будут существовать истинные математические утверждения, которые не могут быть доказаны в рамках данной системы.
* Неполнота математики: Теорема предполагает, что математика является неполной дисциплиной, и всегда будут существовать математические истины, которые находятся за пределами нашей досягаемости, независимо от того, как много мы знаем или насколько изощренными становятся наши методы.
* Пределы человеческого знания: Теорема имеет важные последствия для пределов человеческого знания. Это подразумевает, что существуют определенные вопросы, на которые по своей сути нет ответа, независимо от того, каким объемом информации мы располагаем или насколько продвинутой становится наша технология.
* Неразрешимость определенных задач: Теорема подразумевает, что определенные математические задачи неразрешимы, а это означает, что не существует алгоритмического способа определить их истинность или ложность.
* Взаимосвязь между синтаксисом и семантикой: Теорема предполагает, что существует тесная связь между синтаксисом (формальной структурой) и семантикой (значением) формальной системы, и что эта связь имеет решающее значение для понимания ограничений таких систем.
* Важность метаматематики: Теорема подчеркивает важность метаматематики, которая является изучением основ и ограничений формальных систем. С тех пор эта область стала основной областью исследований в области математической логики.
* Влияние на философию: Теорема оказала значительное влияние на философию, особенно на философию математики и философию языка. Это привело к новым спорам о природе истины, знания и смысла.
* В целом, первая теорема о неполноте оказала глубокое влияние на многие области знаний, и она продолжает оставаться богатым источником вдохновения для новых идей и разработок в математике и философии.

Вторая теорема о неполноте Геделя утверждает, что никакая непротиворечивая формальная система S, способная выразить определенный объем арифметики, не может доказать свою собственную непротиворечивость. Другими словами, если S является формальной системой, которая способна выражать базовую арифметику, и если S непротиворечива (т.е. она не доказывает никаких противоречий), то S не может доказать, что она непротиворечива.

Более формально теорему можно сформулировать следующим образом: если S является непротиворечивой формальной системой, способной выражать базовую арифметику, то S не может доказать утверждение Con(S), которое утверждает непротиворечивость S.

Утверждение Con(S) может быть выражено на языке S следующим образом: "не существует формулы, которая может быть доказана как истинная, так и ложная в S." Другими словами, Con(S) утверждает, что S не доказывает никаких противоречий [4].

Значение второй теоремы о неполноте заключается в том факте, что она показывает, что непротиворечивость формальной системы не может быть установлена внутри самой системы. Это означает, что если мы хотим доказать непротиворечивость формальной системы, мы должны использовать какой-то внешний метод или критерий, который лежит вне системы. Это имеет важные последствия для основ математики и пределов формальных рассуждений.

# РАСШИРЕНИЯ И ДАЛЬНЕЙШИЕ РАЗРАБОТКИ

## 4.1 Утверждение второй теоремы о неполноте

Вторая теорема о неполноте Геделя утверждает, что никакая непротиворечивая формальная система S, способная выразить определенный объем арифметики, не может доказать свою собственную непротиворечивость. Другими словами, если S является формальной системой, которая способна выражать базовую арифметику, и если S непротиворечива (т.е. она не доказывает никаких противоречий), то S не может доказать, что она непротиворечива.

Более формально теорему можно сформулировать следующим образом: если S является непротиворечивой формальной системой, способной выражать базовую арифметику, то S не может доказать утверждение Con(S), которое утверждает непротиворечивость S.

Утверждение Con(S) может быть выражено на языке S следующим образом: "не существует формулы, которая может быть доказана как истинная, так и ложная в S." Другими словами, Con(S) утверждает, что S не доказывает никаких противоречий [5].

Значение второй теоремы о неполноте заключается в том факте, что она показывает, что непротиворечивость формальной системы не может быть установлена внутри самой системы. Это означает, что если мы хотим доказать непротиворечивость формальной системы, мы должны использовать какой-то внешний метод или критерий, который лежит вне системы. Это имеет важные последствия для основ математики и пределов формальных рассуждений.

## 4.2 Обзор других результатов, связанных с неполнотой, таких как диагональная лемма и теорема Тарского о неопределимости

В дополнение к первой и второй теоремам о неполноте существует несколько других важных результатов, связанных с неполнотой, включая диагональную лемму и теорему Тарского о неопределимости.

Диагональная лемма: Диагональная лемма, также известная как лемма о неподвижной точке, является результатом математической логики, который был впервые доказан Куртом Геделем. Лемма предоставляет метод построения самореферентных предложений в рамках формальной системы [6]. Этот метод играет решающую роль в доказательстве первой теоремы о неполноте и имеет приложения в других областях логики и информатики.

Теорема Тарского о неопределимости: Теорема Тарского о неопределимости - еще один важный результат в математической логике, который был впервые доказан Альфредом Тарским. Теорема утверждает, что в любой формальной системе, достаточно мощной для выражения базовой арифметики, нет формулы, которая могла бы определить понятие истинности для всех предложений языка системы. Этот результат имеет важные последствия для философии языка и основ математики.

Трюк Россера: Трюк Россера - это модификация доказательства первой теоремы Геделя о неполноте. Этот трюк позволяет использовать более сильную форму теоремы, которая гласит, что если формальная система непротиворечива, то существует утверждение, которое одновременно недоказуемо и отрицание которого также недоказуемо [7]. Эта более сильная форма теоремы часто используется на практике, поскольку она обеспечивает более прямой способ показать неполноту формальной системы.

Тезис Черча-Тьюринга: Тезис Черча-Тьюринга - это гипотеза в области информатики и математической логики, которая утверждает, что любая функция, которая может быть эффективно вычислена человеком с помощью карандаша и бумаги, также может быть вычислена универсальной машиной Тьюринга. Диссертация имеет важные последствия для изучения алгоритмов и вычислимости и тесно связана с концепцией неполноты в математической логике.

Эти и другие результаты углубили наше понимание пределов формальных рассуждений и основ математики и продолжают оставаться активными областями исследований в области математической логики и информатики.

# КРИТИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ И РАЗНОГЛАСИЯ

## 5.1 Рассмотрение критических замечаний и возражений против теоремы Геделя о неполноте

Теорема Геделя о неполноте является устоявшимся результатом в математической логике и как таковая на протяжении многих лет подвергалась ряду критических замечаний и возражений. Вот некоторые из основных критических замечаний, которые были высказаны в адрес теоремы:

* Возражение против релевантности: Некоторые критики утверждают, что теорема о неполноте не имеет отношения к реальной математической практике. Они утверждают, что теорема имеет дело с идеализированными, формальными системами, которые мало похожи на реальные математические рассуждения, имеющие место на практике [8].
* Возражение против самореферентности: Еще одна критика теоремы о неполноте заключается в том, что она в значительной степени опирается на самореферентность, которая является проблематичным понятием в математике. Критики утверждают, что самореференцию трудно точно определить и что теорема о неполноте опирается на скользкое понятие самореференции, которое трудно интерпретировать [8].
* Возражение против согласованности: Некоторые критики утверждали, что теорема о неполноте зависит от предположения о согласованности, которое является недоказанным предположением. Они утверждают, что если рассматриваемая формальная система непоследовательна, то теорема о неполноте больше не выполняется [8].
* Возражение против формализма: Еще одна критика теоремы о неполноте заключается в том, что она опирается на особую формалистическую философию математики, которая, возможно, не является единственно верным подходом к предмету. Критики утверждают, что другие философские подходы к математике, такие как интуиционизм или конструктивизм, возможно, не подвержены тем же ограничениям, что и формализм [8].
* Эмпирическое возражение: Наконец, некоторые критики утверждают, что теорема о неполноте является чисто теоретической и не имеет эмпирической основы. Они утверждают, что теорему невозможно проверить в реальном мире и что поэтому она имеет ограниченное отношение к нашему пониманию математики и логики [8].

Хотя эти критические замечания, безусловно, заслуживают рассмотрения, важно отметить, что теорема о неполноте остается мощным и влиятельным результатом в математической логике, который привел ко многим важным достижениям в этой области. Более того, многие возражения, выдвинутые против теоремы, были рассмотрены и опровергнуты последующей работой в этой области, демонстрирующей надежность теоремы и ее сохраняющуюся актуальность для современной математики и логики.

## 5.2 Обсуждение взаимосвязи между неполнотой и другими философскими проблемами, такими как свобода воли и основы этики

Теоремы о неполноте, особенно первая, имеют глубокие последствия не только для математики и логики, но и для широкого круга философских проблем, включая свободу воли и основы этики.

Свобода воли: Первая теорема о неполноте демонстрирует, что существуют утверждения, которые неразрешимы в рамках формальной системы, а это означает, что не существует механической процедуры, которая может быть использована для определения того, является ли утверждение истинным или ложным. Некоторые философы восприняли это как доказательство того, что существуют пределы тому, что можно знать или предсказывать о будущем, и что это может подразумевать определенную степень неопределенности или свободы в принятии решений человеком. Если существуют утверждения, которые по своей сути неразрешимы, это предполагает, что могут существовать пределы тому, в какой степени поведение человека может быть предсказано или контролироваться внешними факторами [9].

Этика: Первая теорема о неполноте также имеет значение для основ этики. Если существуют утверждения, которые неразрешимы в рамках формальной системы, это поднимает вопросы о природе моральных истин и основе для этических рассуждений. Некоторые философы утверждали, что моральные истины могут быть по своей сути субъективными или зависящими от контекста и что могут существовать пределы тому, в какой степени моральные принципы могут быть выведены из чисто логических или математических рассуждений [9].

Эпистемология: Теоремы о неполноте также были связаны с более широкими проблемами эпистемологии, такими как природа знания и пределы человеческого понимания. Тот факт, что существуют утверждения, которые неразрешимы в рамках формальной системы, предполагает, что могут существовать пределы тому, что может быть известно или доказано чисто логическими или математическими средствами. Это побудило некоторых философов исследовать альтернативные способы познания и понимания, такие как интуиция, опыт или личное озарение [9].

В заключение отметим, что теоремы о неполноте имеют далеко идущие последствия не только для математики и логики, но и для широкого круга философских проблем, включая свободу воли, этику и эпистемологию. Эти выводы продолжают изучаться и обсуждаться философами и другими мыслителями, демонстрируя сохраняющуюся актуальность и важность новаторской работы Геделя.

## 5.3 Объяснение того, как неполнота использовалась для поддержки определенных философских взглядов, таких как платонизм

Одним из философских воззрений, которое было поддержано теоремами неполноты Геделя, является платонизм. Платонизм - это философская точка зрения, согласно которой абстрактные сущности, такие как числа и математические понятия, имеют реальное существование, независимое от человеческой мысли или опыта [10].

Теоремы о неполноте поддерживают платонизм, показывая, что математическая истина не может быть сведена к чисто формальной или механической системе правил. Другими словами, существуют математические утверждения, которые верны, но не могут быть доказаны в рамках данной формальной системы. Это подразумевает, что математическая истина существует независимо от какой-либо конкретной формальной системы, и, следовательно, поддерживает точку зрения о том, что математические понятия имеют реальное, объективное существование.

Более того, теоремы о неполноте предполагают, что существует обширная и бесконечная область математической истины, которая лежит за пределами досягаемости любой конечной формальной системы. Это подтверждает платоновскую точку зрения о том, что существует бесконечное царство абстрактных сущностей, которые существуют независимо от человеческой мысли или опыта и которые могут быть постигнуты только с помощью интуиции или озарения.

Наконец, теоремы о неполноте также предполагают, что человеческие знания и понимание математической истины изначально ограничены и что всегда может быть что-то еще, что нужно открыть и понять. Это подтверждает мнение о том, что математика - это постоянно развивающаяся и расширяющаяся область, где новые открытия и озарения ждут своего часа.

Таким образом, теоремы о неполноте использовались для поддержки платонизма, показывая, что математическая истина не может быть сведена к конечной формальной системе, что математические концепции имеют реальное существование, независимое от человеческой мысли или опыта, и что человеческие знания и понимание математической истины по своей сути ограничены.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что теоремы Геделя о неполноте представляют собой эпохальное достижение в истории математики и логики и имели далеко идущие последствия для широкого круга философских проблем. Теоремы демонстрируют, что любая непротиворечивая формальная система, достаточно мощная, чтобы включать базовую арифметику, обязательно будет содержать утверждения, которые неразрешимы в рамках этой системы. Это означает, что существуют пределы тому, что может быть доказано или познано чисто логическими или математическими средствами.

Теоремы о неполноте использовались для поддержки различных философских взглядов, таких как платонизм, и поднимали вопросы о природе свободной воли, этике и пределах человеческого понимания. Эти теоремы также были связаны с другими важными результатами в логике, такими как диагональная лемма и теорема Тарского о неопределимости.

Несмотря на критику и возражения против теорем неполноты, они остаются краеугольным камнем современной логики и математики и продолжают вдохновлять на новые исследования и проникновение в природу математической истины и человеческого понимания.

# Список литературы

1. *Gödel, K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I. / Gödel K, - Monatshefte für Mathematik und Physik, 1931. – 173-198*
2. *Gödel, K. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, II. / Gödel, K. - Monatshefte für Mathematik und Physik, 1931. – 449-472.*
3. *Hofstadter D. Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid. / Hofstadter D. - Basic Books, 1980.*
4. *Boolos G. The Unprovability of Consistency: An Essay in Modal Logic. / Boolos G. - Cambridge University Press, 1990.*
5. *Smith B. Kurt Gödel: Critical Assessments of Leading Philosophers, Vol. III: Philosophy of Mathematics, Logic and Foundations of Mathematics. / Smith B. – Routledge, 2007.*
6. *Wang H. Reflections on Kurt Gödel. / Wang H. - MIT Press, 1987.*
7. *Maddy P. Second Philosophy: A Naturalistic Method. / Maddy P. - Oxford University Press, 2007.*
8. *Davis, M. Engines of Logic: Mathematicians and the Origin of the Computer. / Davis, M - W. W. Norton & Company, 2004.*
9. *Feferman S. Gödel's Program for New Axioms: Why, Where, How and What? In Kurt Gödel: Writings in Logic and Mathematics. / Feferman S. - Oxford University Press, 1996. – 305-326.*
10. *Hodes H. T. Logical Pluralism and the Incompleteness Theorems. / Hodes H. T. - Philosophy Compass, 2017.*