ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ
по дисциплине «Численные методы»

Ф.И.О. Бобров И.И., Игнатьев М.В., Абдуллаев Т.М.

ТЕМА курсового проекта

Рекуррентные формулы и интегрирование по Ромбергу.

ФОРМУЛИРОВКА задания:

- Создать алгоритм решения поставленной задачи, реализовать его, протестировать программы;
- Оформить и представить итоги проделанной работы в виде отчета;
- Сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки методов.

РУКОВОДИТЕЛЬ проекта____________/ Пак Т.В./

ДАТА ВЫДАЧИ задания 6 ноября 2021

СРОК ВЫПОЛНЕНИЯ задания 09.11.2020 – 10.01.2021

Задание получил Бобров И.И., Игнатьев М.В., Абдуллаев Т.М.

Содержание

Рекуррентные формулы и интегрирование по Ромбергу

Введение

Объектом исследования являются численные методы решения задач численного интегрирования.
Цель работы – ознакомиться с численными рекуррентными формулами и методами интегрирования, решить предложенные типовые задачи, сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки методов, приобрести практические навыки и компетенции, а также опыт самостоятельной профессиональной деятельности, а именно:

- создать алгоритм решения поставленной задачи и реализовать его, протестировать программы;
- освоить теорию вычислительного эксперимента; современных компьютерных технологий;
- приобрести навыки представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

Работа над курсовым проектом предполагает выполнение следующих задач:

- дальнейшее углубление теоретических знаний обучающихся и их систематизацию;
- получение и развитие прикладных умений и практических навыков по направлению подготовки;
- овладение методикой решения конкретных задач;
- развитие навыков самостоятельной работы;
- развитие навыков обработки полученных результатов, анализа и осмысления их с учетом имеющихся литературных данных;
- приобретение навыков оформления описаний программного продукта;
- повышение общей и профессиональной эрудиции.

Основная часть

Приближения имеют высокую точность, если использовать большее количество подынтервалов. Сколько их следует выбрать? Ответить на этот вопрос может помочь процесс последовательного выбора двух, четырех и т. д. подынтервалов, пока не будет достигнута требуемая точность. Сначала необходимо сгенерировать последовательность T(J) формул трапеций для приближений. Как только число подынтервалов удваивается, число значений функции также приблизительно удваивается, поскольку функцию нужно вычислять во всех предыдущих точках и во всех средних точках предыдущих подынтервалов (рис 1). В теореме 7.4 объясняется, как удалить лишние вычисления функции и сложения.

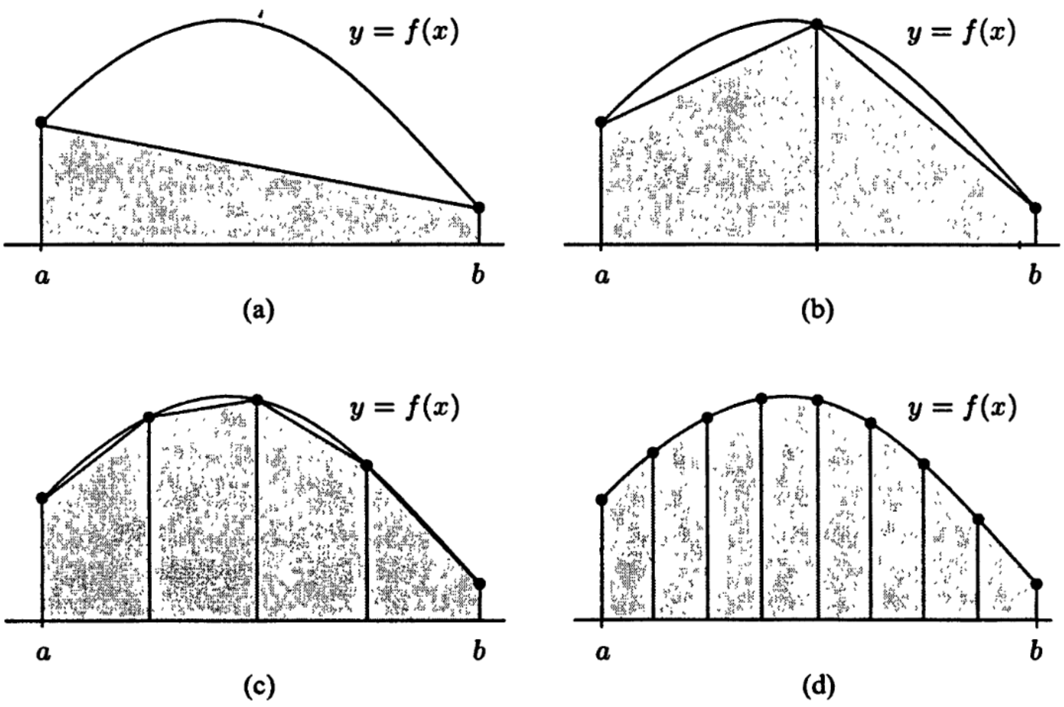

Рис. 1: **(a)** $T(0)$ — площадь под $2^0 = 1$ трапецией, **(b)** $T(1)$ — площадь под $2^1 = 2$ трапециями, **(c)** (2) — площадь под $2^2 = 4$ трапециями, **(d)** (3) — площадь под $2^3 = 8$ трапециями

Теорема 1. ***(последовательные формулы трапеций).*** *Предположим, что $J \geqslant 1$ и точки $\{x_k = a + kh\}$ делят интервал $[a; b]$ на $2^J = 2M$ подынтервалов с одинаковым шагом $h = (b-a)/2^J$. Формулы трапеций $T(f,h)$ и $T(f,2h)$ удовлетворяют соотношению*

$$T(f,h) = \frac{T(f,2h)}{2} + h\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1}) \qquad (1)$$

Опредление 1. ***(последовательность формул трапеций).*** *Определим $T(0) = (h/2)(f(a) + f(b))$ как формулу трапеций с шагом длины $h = b - a$. Затем для каждого $J \geq 1$ определим $T(J) = T(f, h)$, где $T(f, h)$ - формула трапеций с шагом длины $h = (b - a)/2$.*

Следствие 1. ***(рекуррентная формула трапеций).*** *Начнем с $(0) = (h/2)(f(a) + f(b))$. Тогда последовательность формул трапеций $T(J)$ генерируется согласно рекуррентной формуле*

$$T(J) = \frac{T(J-1)}{2} + h\sum_{k-1}^{M} f(x_{2k-1}) \quad для J = 1, 2, \ \dots \ . \tag{2}$$

где $h = (b - a)/2^J$ и $x_k = a + kh$.

Теорема 2. ***(рекуррентная формула Симпсона).*** *Предположим, что $\{T(J)\}$ - последовательность формул трапеций, сгенерированная согласно следствию (1). Если $J \geq 1$ и $S(J)$ - формула Симпсона для 2^J подынтервалов $[a; b]$, то $S(J)$ и формулы трапеций $T(J - 1)$ и $T(J)$ удовлетворяют соотношению*

$$S(J) = \frac{4T(J) - T(J-1)}{3} \quad для \ J = 1, 2, \ \dots \ . \tag{3}$$

Теорема 3. ***(рекуррентная формула Буля).*** *Предположим, что $\{S(J)\}$ - последовательность формул Симпсона, сгенерированная согласно теореме (2). Если $J \geq 2$ и $B(J)$ - формула Буля для 2^J подынтервалов интервала $[a; b]$, то $B(J)$ и формулы Симпсона $S(J - 1)$ и $S(J)$ удовлетворяют соотношению*

$$B(J) = \frac{16S(J) - S(J-1)}{15} \quad для \ J = 2, 3, \ \dots \ . \tag{4}$$

Интегрирование по Ромбергу

Лемма 1. ***(улучшение Ричардсона для интегрирования по Ромбергу).*** *Заданы два приближения, $R(2h, {}^{-}1)$ и $R(h, K^{-}1)$, для величины Q, которые удовлетворяют равенствам*

$$Q = R(h, K-1) + c_1 h^{2K} + c_2 h^{2K+2} + \dots \tag{5}$$

и

$$Q = R(2h, K-1) + c_1 4^K h^{2K} + c_2 4^{K+1} h^{2K+2} + \dots \ . \tag{6}$$

Улучшенное приближение имеет вид

$$Q = \frac{4^K R(h, K-1) - R(2h, K-1)}{4^K - 1} + O(h^{2K+2}). \tag{7}$$

Опредление 2. *Определим последовательность* $R(J, K) : J \geq K_{J=0}^{\infty}$ *формул квадратуры для* $f(x)$ *на интервале* $[a; b]$ *следующим образом.*

$$
\begin{aligned}
R(J, 0) &= T(J) \quad \text{для } J \geq 0, \text{ последовательная формула трапеций.} \\
R(J, 1) &= S(J) \quad \text{для } J \geq 1, \text{ последовательная формула Симпсона.} \\
R(J, 2) &= B(J) \quad \text{для } J \geq 2, \text{ последовательная формула Буля.}
\end{aligned} \tag{8}
$$

Вот это обычный текст за пределами теорем и определений. Вот это обычный текст за пределами теорем и определений. Вот это обычный текст за пределами теорем и определений. Вот это обычный текст за пределами теорем и определений. Вот это обычный текст за пределами теорем и определений. Вот это обычный текст за пределами теорем и определений. Вот это обычный текст за пределами теорем и определений. Вот это обычный текст за пределами теорем и определений.

Теорема 4. ***(точность интегрирования по Ромбергу).*** *Предположим, что* $f \in C^{2K+2}[a; b]$*. Тогда ошибка усечения для приближения Ромберга задается формулой*

$$\int_a^b f(x)dx = R(J, K) + b_K h^{2K+2} f^{(2K+2)}(c_{J,K}) = R(J, K) + O(h^{2K+2}), \tag{9}$$

где $h = (b - a)/2^J$, b_K *- постоянная, зависящая от* K*, и* $c_{J,K} \in [a; b]$.

Вычислительный эксперимент

Заключение

В результате работы над курсовым проектом приобрел практические навыки владения:

- современными численными методами решения задач математической экономики;
- основами алгоритмизации для численного решения задач математической экономики на одном из языков программирования;
- инструментальными средствами, поддерживающими разработку программного обеспечения для численного решения задач математической экономики;

а также навыками представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

Список используемых источников

Источники

1. Численные методы. Использование Matlab. Третье издание. Джон Г. Мэтьюз Издательский дом "Вильямс" 2001

Приложения