ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ
по дисциплине «Численные методы»

Ф.И.О. Бобров И.И., Игнатьев М.В., Абдуллаев Т.М.

ТЕМА курсового проекта

Рекуррентные формулы и интегрирование по Ромбергу.

ФОРМУЛИРОВКА задания:

- Создать алгоритм решения поставленной задачи, реализовать его, протестировать программы;
- Оформить и представить итоги проделанной работы в виде отчета;
- Сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки методов.

РУКОВОДИТЕЛЬ проекта____________/ Пак Т.В./

ДАТА ВЫДАЧИ задания 6 ноября 2021

СРОК ВЫПОЛНЕНИЯ задания 09.11.2020 – 10.01.2021

Задание получил Бобров И.И., Игнатьев М.В., Абдуллаев Т.М.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Кафедра информатики, математического и компьютерного моделирования

Курсовой проект

по дисциплине
«Численные методы»

Направление подготовки
01.03.02 "Прикладная математика и информатика"

Выполнили студенты
гр. Б8118-01.03.02миопд
Бобров И.И. ____________
(ФИО) *(подпись)*

Игнатьев М.В. ____________
(ФИО) *(подпись)*

Абдуллаев Т.М. ____________
(ФИО) *(подпись)*

Проверил доцент, к.ф.-м.н.
Пак Т.В ____________
(ФИО) *(подпись)*

« 5 » января 2021 г.

г. Владивосток
2021

Содержание

Введение

Объектом исследования являются численные методы решения задач численного интегрирования.
Цель работы – ознакомиться с рекуррентными формулами и методами интегрирования, решить предложенные типовые задачи, сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки методов, приобрести практические навыки и компетенции, а также опыт самостоятельной профессиональной деятельности, а именно:

- создать алгоритм решения поставленной задачи и реализовать его, протестировать программы;
- освоить теорию вычислительного эксперимента; современных компьютерных технологий;
- приобрести навыки представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

Работа над курсовым проектом предполагает выполнение следующих задач:

- дальнейшее углубление теоретических знаний обучающихся и их систематизацию;
- получение и развитие прикладных умений и практических навыков по направлению подготовки;
- овладение методикой решения конкретных задач;
- развитие навыков самостоятельной работы;
- развитие навыков обработки полученных результатов, анализа и осмысления их с учетом имеющихся литературных данных;
- приобретение навыков оформления описаний программного продукта;
- повышение общей и профессиональной эрудиции.

Основная часть

Рекуррентные формулы

Приближения имеют высокую точность, если использовать большее количество подынтервалов. Сколько их следует выбрать? Ответить на этот вопрос может помочь процесс последовательного выбора двух, четырех и т. д. подынтервалов, пока не будет достигнута требуемая точность. Сначала необходимо сгенерировать последовательность $T(J)$ формул трапеций для приближений. Как только число подынтервалов удваивается, число значений функции также приблизительно удваивается, поскольку функцию нужно вычислять во всех предыдущих точках и во всех средних точках предыдущих подынтервалов (рис 1). В теореме 7.4 объясняется, как удалить лишние вычисления функции и сложения.

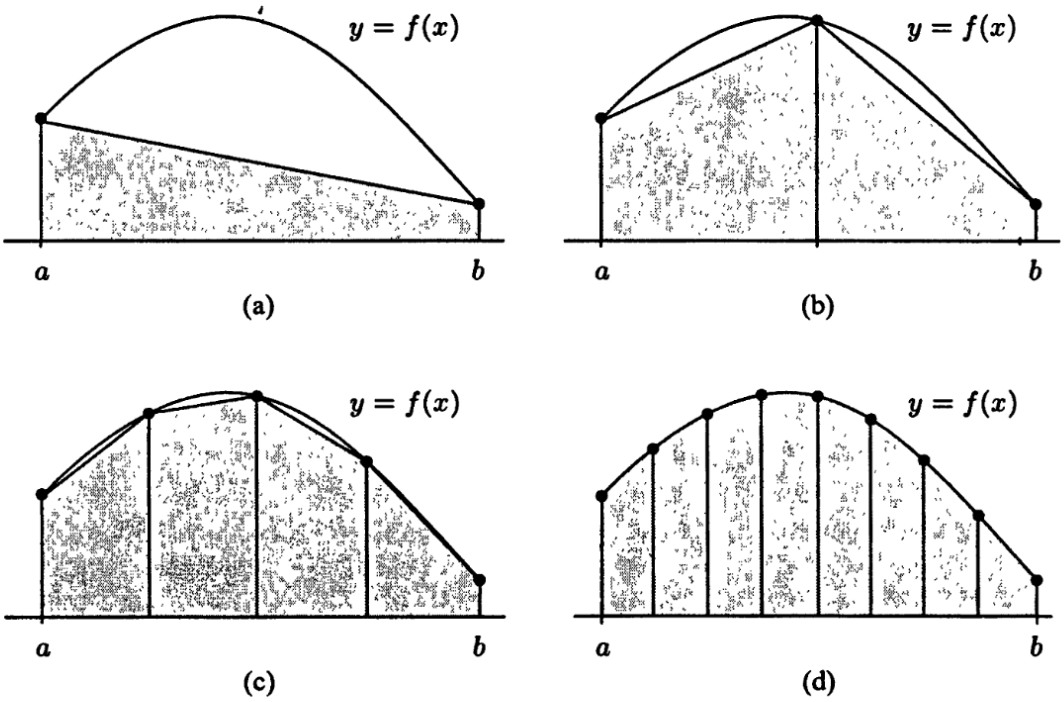

Рис. 1: **(a)** $T(0)$ — площадь под $2^0 = 1$ трапецией, **(b)** $T(1)$ — площадь под $2^1 = 2$ трапециями, **(c)** (2) — площадь под $2^2 = 4$ трапециями, **(d)** (3) — площадь под $2^3 = 8$ трапециями

Теорема 1. ***(последовательные формулы трапеций).*** *Предположим, что $J \geqslant 1$ и точки $\{x_k = a + kh\}$ делят интервал $[a; b]$ на $2^J = 2M$ подынтервалов с одинаковым шагом $h = (b - a)/2^J$. Формулы трапеций $T(f, h)$ и $T(f, 2h)$ удовлетворяют соотношению*

$$T(f,h) = \frac{T(f,2h)}{2} + h\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1}) \tag{1}$$

Определение 1. ***(последовательность формул трапеций).*** *Определим $T(0) = (h/2)(f(a) + f(b))$ как формулу трапеций с шагом длины $h = b - a$. Затем для каждого $J \geq 1$ определим $T(J) = T(f, h)$, где $T(f, h)$ - формула трапеций с шагом длины $h = (b - a)/2$.*

Следствие 1. ***(рекуррентная формула трапеций).*** *Начнем с $(0) = (h/2)(f(a) + f(b))$. Тогда последовательность формул трапеций $T(J)$ генерируется согласно рекуррентной формуле*

$$T(J) = \frac{T(J-1)}{2} + h \sum_{k-1}^{M} f(x_{2k-1}) \quad \text{для } J = 1, 2, \ \ldots \ . \tag{2}$$

где $h = (b - a)/2^J$ и $x_k = a + kh$.

Теорема 2. ***(рекуррентная формула Симпсона).*** *Предположим, что $\{T(J)\}$ - последовательность формул трапеций, сгенерированная согласно следствию (1). Если $J \geq 1$ и $S(J)$ - формула Симпсона для 2^J подынтервалов $[a; b]$, то $S(J)$ и формулы трапеций $T(J - 1)$ и $T(J)$ удовлетворяют соотношению*

$$S(J) = \frac{4T(J) - T(J-1)}{3} \quad \text{для } J = 1, 2, \ \ldots \ . \tag{3}$$

Теорема 3. ***(рекуррентная формула Буля).*** *Предположим, что $\{S(J)\}$ - последовательность формул Симпсона, сгенерированная согласно теореме (2). Если $J \geq 2$ и $B(J)$ - формула Буля для 2^J подынтервалов интервала $[a; b]$, то $B(J)$ и формулы Симпсона $S(J - 1)$ и $S(J)$ удовлетворяют соотношению*

$$B(J) = \frac{16S(J) - S(J-1)}{15} \quad \text{для } J = 2, 3, \ \ldots \ . \tag{4}$$

Интегрирование по Ромбергу

Предположим, что формула приближения используется с шагами длины h и 2Л. Воспользуемся алгебраическими преобразованиями двух ответов, чтобы получить уточненный ответ. Каждый последующий уровень улучшения увеличивает порядок остаточного члена с $O(h^{2N})$ до $O(h^{2N+2})$. Этот процесс, называемый интегрированием по Ромбергу.

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ T(f, h) + O(h^2),$$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= S(f,h)+O(h^4),\\ \int_a^b f(x)dx &= B(f,h)+O(h^6).\end{aligned}$$

Лемма 1. ***(улучшение Ричардсона для интегрирования по Ромбергу).*** *Заданы два приближения, $R(2h,\,-1)$ и $R(h,K-1)$, для величины Q, которые удовлетворяют равенствам*

$$Q = R(h,K-1)+c_1h^{2K}+c_2h^{2K+2}+... \tag{5}$$

и

$$Q = R(2h,K-1)+c_1 4^K h^{2K}+c_2 4^{K+1}h^{2K+2}+...\ . \tag{6}$$

Улучшенное приближение имеет вид

$$Q = \frac{4^K R(h,K-1)-R(2h,K-1)}{4^K-1}+O(h^{2K+2}). \tag{7}$$

Определение 2. *Определим последовательность $R(J,K) : J \geq K_{J=0}^{\infty}$ формул квадратуры для $f(x)$ на интервале $[a;b]$ следующим образом.*

$$\begin{aligned} R(J,0) &= T(J) \quad \text{для } J\geq 0, \text{ последовательная формула трапеций.}\\ R(J,1) &= S(J) \quad \text{для } J\geq 1, \text{ последовательная формула Симпсона.}\\ R(J,2) &= B(J) \quad \text{для } J\geq 2, \text{ последовательная формула Буля.} \end{aligned} \tag{8}$$

Общей формулой построения улучшения

$$R(J,K) = \frac{4^K R(J,K-1)-R(J-1,K-1)}{4^K-1} \quad \text{для} \quad J\geq K. \tag{9}$$

Теорема 4. ***(точность интегрирования по Ромбергу).*** *Предположим, что $f \in C^{2K+2}[a;b]$. Тогда ошибка усечения для приближения Ромберга задается формулой*

$$\int_a^b f(x)dx = R(J,K)+b_K h^{2K+2} f^{(2K+2)}(c_{J,K}) = R(J,K)+O(h^{2K+2}), \tag{10}$$

где $h=(b-a)/2^J$, b_K - постоянная, зависящая от K, и $c_{J,K}\in[a;b]$.

Квадратура Буля

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{90} \cdot (7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4)$$

Как мы ее получили?
Построим полином Лагранжа 4ой степени от $f(x)$, посчитаем аналитически интеграл от этого полинома, полученный результат и будет квадратурой Буля.

$$h = \frac{b-a}{4}$$

$$x_i = a + i \cdot h = a + i \cdot \frac{b-a}{4}$$

$$L_4(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2 + l_3(x)y_3 + l_4(x)y_4$$

Построим базисные полиномы к полиному Лагранжа:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} =$$

$$= \frac{(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-3h)(x-a-4h)}{24h^4}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} =$$

$$= -\frac{(x-a)(x-a-2h)(x-a-3h)(x-a-4h)}{6h^4}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} =$$

$$= \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-3h)(x-a-4h)}{4h^4}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} =$$

$$= -\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-4h)}{6h^4}$$

$$l_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} =$$

$$= \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-3h)}{24h^4}$$

Проинтегрируем базисные полиномы:

$$\int_a^b l_0(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-3h)(x-a-4h)}{24h^4}\,dx = \frac{7}{90}(b-a)$$

$$\int_a^b l_1(x)\,dx = \int_a^b -\frac{(x-a)(x-a-2h)(x-a-3h)(x-a-4h)}{6h^4}\,dx = \frac{16}{45}(b-a)$$

$$\int_a^b l_2(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-3h)(x-a-4h)}{4h^4}\,dx = \frac{2}{15}(b-a)$$

$$\int_a^b l_3(x)\,dx = \int_a^b -\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-4h)}{6h^4}\,dx = \frac{16}{45}(b-a)$$

$$\int_a^b l_4(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-3h)}{24h^4}\,dx = \frac{7}{90}(b-a)$$

Тогда интеграл от полинома Лагранжа будет следующим:

$$\int_a^b L_4(x)\,dx = y_0\int_a^b l_0(x)\,dx + y_1\int_a^b l_1(x)\,dx +$$

$$+y_2\int_a^b l_2(x)\,dx + y_3\int_a^b l_3(x)\,dx + y_4\int_a^b l_4(x)\,dx =$$

$$= \frac{7}{90}(b-a)\cdot y_0 + \frac{16}{45}(b-a)\cdot y_1 + \frac{2}{15}(b-a)\cdot y_2 + \frac{16}{45}(b-a)y_3 + \frac{7}{90}(b-a)\cdot y_4 =$$

$$= (b-a)\cdot\left(\frac{7}{90}\cdot y_0 + \frac{16}{45}\cdot y_1 + \frac{2}{15}\cdot y_2 + \frac{16}{45}\cdot y_3 + \frac{7}{90}\cdot y_4\right)$$

Домножим полученное выражение на $\frac{90}{90}$ и получим квадратурную формулу Буля:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{90}\cdot(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4)$$

Вычислительный эксперимент

В данных экспериментах интеграл вычисляется не с заданной точностью, а с разными интервалами ($n = 2^J$, J - параметр в рекуррентных формулах)

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:
J - параметр в рекуррентных формулах
K - параметр точности
x - численный результат выполнения метода
Δ - абсолютная погрешность
δ - относительная погрешность

Эксперимент 1

$$\int_1^5 \frac{dx}{x} = 1.609437912$$

Результаты выполнения методов трапеций, Симпсона и Буля:

J	method	x	Δ	δ
0	Trapezoid	2.400000000	0.790562088	0.491203843
1	Trapezoid	1.866666667	0.257228755	0.159825211
2	Trapezoid	1.683333333	0.073895421	0.045913807
3	Trapezoid	1.628968254	0.019530342	0.012134884
1	Simpson	1.688888889	0.079450977	0.049365668
2	Simpson	1.622222222	0.012784310	0.007943339
3	Simpson	1.610846561	0.001408649	0.000875243
2	Boole	1.617777778	0.008339866	0.005181850
3	Boole	1.610088183	0.000650271	0.000404036

Результаты выполнения метода Ромберга:

K	J	x	Δ	δ
3	3	1.609966126368243	0.000528214368243	0.000328090361401
3	4	1.609456191297068	0.000018279297068	0.000011357436858
3	5	1.609438212042127	0.000000300042127	0.000000186426621
3	6	1.609437914959609	0.000000002959609	0.000000001838909
3	7	1.609437912447631	0.000000000447631	0.000000000278129

(Полные результаты в приложении, *Рис.5*)
Построим график погрешности (*Приложения: Рис.2*)

Для $J = 3$

$$h = \frac{a-b}{2^J} = \frac{5-1}{2^3} = \frac{4}{8} = 0.5$$

1. $h^2 = 0.25$ - максимальная допустимая погрешность для метода трапеций в случае данного примера.
   Получили погрешность, равную примерно $0,019530342$, что удовлетворяет необходимой точности.

2. $h^4 = 0,0625$ - максимальная допустимая погрешность для формулы Симпсона в случае данного примера.
   Получили погрешность, равную примерно $0,001408649$, что тоже удовлетворяет необходимой точности.

3. $h^6 = 0,015625$ - максимальная допустимая погрешность для формулы Буля в случае данного примера.
   Получили погрешность, равную примерно $0,000650271$, что также удовлетворяет необходимой точности.

4. Проверим точность интегрирования по Ромбергу при использовании улучшения Ричардсона. Для $K = 3$, $h^{2K+2} = h^8 = 0,00390625$ - максимальная допустимая погрешность для данного приближения в случае данного примера.
   Получили погрешность, равную примерно 0,000528214368243. Эта погрешность тоже удовлетворяет требуемой точности.
   Таким образом, можно сделать вывод, что интегрирование по Ромбергу при помощи метода трапеций, формул Симпсона и Буля, а также улучшения Ричардсона является достаточно точным вычислительным методом, подходящим для приближённого вычисления интегралов.

Эксперимент 2

$$\int_{-0.75}^{0.75} \cos(x)dx = 1.36327752$$

Результаты выполнения программы

Результаты выполнения методов трапеций, Симпсона и Буля:

K	J	x	Δ	δ
0	Trapezoid	1.097533303	0.265744217	0.194930389
1	Trapezoid	1.298766652	0.064510868	0.047320423
2	Trapezoid	1.347264042	0.016013478	0.011746308
3	Trapezoid	1.359281201	0.003996319	0.002931406
1	Simpson	1.365844434	0.002566914	0.001882899
2	Simpson	1.363429839	0.000152319	0.000111730
3	Simpson	1.363286920	0.000009400	0.000006895
2	Boole	1.363268866	0.000008654	0.000006348
3	Boole	1.363277392	0.000000128	0.000000094

Результаты выполнения метода Ромберга:

K	J	x	Δ	δ
6	6	1.363277520046668	0.000000000046668	0.000000000034232
6	7	1.363277520046668	0.000000000046668	0.000000000034232
7	7	1.363277520046668	0.000000000046668	0.000000000034232

(Полные результаты в приложении, *Рис.6*)
Построим график погрешности (*Приложения: Рис.2*)
Как и в первом эксперименте, мы получили погрешность удовлетворяющую заданной точности.

Эксперимент 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 + x + 1\right) \cos(x) dx = 2.038197427076$$

Результаты выполнения программы
Результаты выполнения методов трапеций, Симпсона и Буля:

K	J	x	Δ	δ
0	Trapezoid	0.785398163	1.252799264	0.614660409
1	Trapezoid	1.726812657	0.311384770	0.152774587
2	Trapezoid	1.960534167	0.077663261	0.038103895
3	Trapezoid	2.018793948	0.019403479	0.009519921
1	Simpson	2.040617488	0.002420061	0.001187353
2	Simpson	2.038441336	0.000243909	0.000119669
3	Simpson	2.038213875	0.000016448	0.000008070
2	Boole	2.038296260	0.000098833	0.000048490
3	Boole	2.038198711	0.000001284	0.000000630

Результаты выполнения метода Ромберга:

K	J	x	Δ	δ
6	6	2.038197427067236	0.000000000008764	0.000000000004300
6	7	2.038197427067236	0.000000000008765	0.000000000004300
7	7	2.038197427067236	0.000000000008765	0.000000000004300

(Полные результаты в приложении, *Рис.6*)
Построим график погрешности (*Приложения: Рис.2*)

В результате вычислительных экспериментов мы обнаружили что решение по методу Ромберга является очень точным.

Заключение

В данной работе мы рассмотрели рекуррентные формулы численного интегрирования, а именно методы трапеций, Симпсона, Буля, Ромберга с улучшением Ричардсона. Были проведены вычислительные эксперименты, демонстрирующие эффективность и точность данных методов. В результате работы над курсовым проектом каждый приобрел практические навыки владения:

- современными численными методами решения задач математической экономики;
- основами алгоритмизации для численного решения задач математической экономики на одном из языков программирования;
- инструментальными средствами, поддерживающими разработку программного обеспечения для численного решения задач математической экономики;

а также навыками представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати, а именно программы LaTeX.

Распределение задач по проекту

- Абдуллаев Тахир Махирович
  1. Метод Ромберга
  2. Написание тестов, помощь в отладке кода
  3. Помощь при верстке отчета
  4. Вычислительный эксперимент 1
- Бобров Илья Игоревич
  1. Метод трапеций
  2. Верстка отчета курсовой работы в LaTeX
  3. Метод Симпсона
  4. Вычислительный эксперимент 2
- Игнатьев Максим Владимирович
  1. Реализация описанных методов на языке python 3.6
  2. Написание кода генерации таблиц и графиков
  3. Квадратура Буля
  4. Вычислительный эксперимент 3

Список используемых источников

Источники

1. Численные методы. Использование Matlab. Третье издание. Джон Г. Мэтьюз Издательский дом "Вильямс" 2001

2. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы

3. Documentation Python 3.6

Приложения

Обозначения в графиках: красный - метод трапеций зеленый - метод Симпсона синий - метод Буля

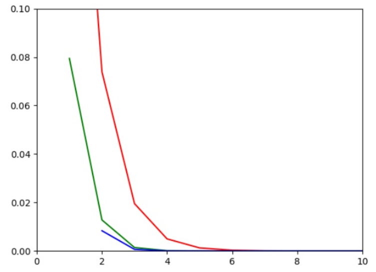

Рис. 2: Графики погрешности. Эксперимент 1

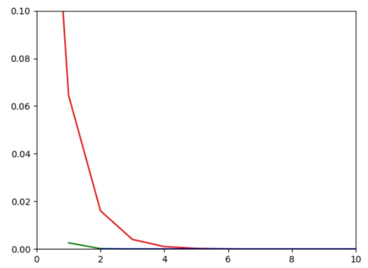

Рис. 3: Графики погрешности. Эксперимент 1

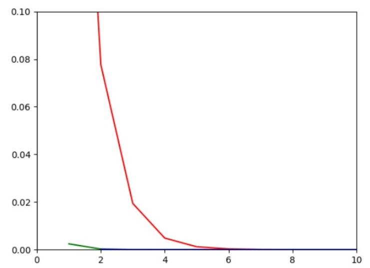

Рис. 4: Графики погрешности. Эксперимент 1

Реализация выше описанных методов тестов на языке Python 3.6

```
import math
from tabulate import tabulate
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
#метод трапеций
def T(context, J):
  a, b, f = context['a'], context['b'], context['f']
  h = (b - a) / (2 ** J)
  if J == 0:
    return h * (f(a) + f(b)) / 2
  s = 0
  m = 2 ** (J - 1)
  for i in range(1, m + 1):
    s += f(a + (2 * i - 1) * h)
  return T(context, J - 1) / 2 + h * s

#метод Симпсона
def S(context, J):
  return (4 * T(context, J) - T(context, J - 1)) / 3

#метод Буля
def B(context, J):
  return (16 * S(context, J) - S(context, J - 1)) / 15

#метод Ромберга
def R(context, J, K):
  if K == 0:
    return T(context, J)
  if K == 1:
    return S(context, J)
  if K == 2:
    return B(context, J)
  return ((4 ** K) * R(context, J, K - 1) -
    R(context, J - 1, K - 1)) / (4 ** K - 1)

#тесты
tests = [
  {'a': 1, 'b': 5, 'f': lambda x: 1 / x,
    'x*': 1.609437912, 'text_func': 'x/1'},
  {'a': -0.75, 'b': 0.75, 'f': lambda x: math.cos(x),
    'x*': 1.363277520, 'text_func': 'cos(x)'},
  {'a': 0, 'b': math.pi / 2,
    'f': lambda x: (x ** 2 + x + 1) * math.cos(x),
    'x*': 2.038197427076, 'text_func': '(x^2 + x + 1) * cos(x)'}
]
```

```
headers = ['J', 'method', 'x', 'del', 'sig']
methods = [(T, 'Trapezoid', 0, 10),
  (S, 'Simpson', 1, 10), (B, 'Boole', 2, 10)]

for i, test_context in enumerate(tests):
  a, b, f, ans, text_func = test_context.values()
  print('f(x) = %s' % test_context['text_func'])
  print('a = %f, b = %f' % (a, b))
  print('integral of f(x) dx from a to b = %0.15f' % ans)
  rows = []
  G = []
  C = ['red', 'green', 'blue']
  for method, name, i, j in methods:
    X = []
    Y = []
    for J in range(i, j + 1):
      x = method(test_context, J)
      delta = math.fabs(ans - x)
      X.append(J)
      Y.append(delta)
      rows.append([J, name, x, delta, delta / ans])
    G.append([X, Y])
  plt.xlim([0, 10])
  plt.ylim(0, 0.1)
  for i, D in enumerate(G):
    plt.plot(D[0], D[1], color=C[i])
  plt.show()
  print(tabulate(rows, headers, tablefmt='orgtbl',
    colalign=('center', (*(['center'] * 4))), floatfmt='0.9f'))
  print('\n')
  print('Integration by Romberg:')
  headers = ['K', 'J', 'x', 'del', 'sig']
  rows = []
  for K in range(8):
    for J in range(K, 8):
      x = R(test_context, J, K)
      delta = math.fabs(ans - x)
      rows.append([K, J, x, delta, delta / x])
  print(tabulate(rows, headers, tablefmt='orgtbl',
    colalign=('center', (*(['center'] * 4))), floatfmt='0.15f'))
  print('\n')
```

K	J	x	Δ	δ
0	0	2.400000000000000	0.790562088000000	0.329400870000000
0	1	1.866666666666667	0.257228754666667	0.137801118571429
0	2	1.683333333333333	0.073895421333333	0.043898270099010
0	3	1.628968253968254	0.019530341968254	0.011989393851401
0	4	1.614406323810349	0.004968411810349	0.003077547292197
0	5	1.610685896079233	0.001247984079233	0.000774815302146
0	6	1.609750285716523	0.000312373716523	0.000194051039652
0	7	1.609516029503222	0.000078117503222	0.000048534778026
1	1	1.688888888888889	0.079450976888889	0.047043341578947
1	2	1.622222222222222	0.012784310222222	0.007880739178082
1	3	1.610846560846561	0.001408648846561	0.000874477359172
1	4	1.609552347091047	0.000114435091047	0.000071097464617
1	5	1.609445753502195	0.000007841502195	0.000004872175516
1	6	1.609438415595620	0.000000503595620	0.000000312901454
1	7	1.609437944098788	0.000000032098788	0.000000019944098
2	2	1.617777777777778	0.008339865777778	0.005155136813187
2	3	1.610088183421517	0.000650271421517	0.000403873171800
2	4	1.609466066174012	0.000028154174012	0.000017492865867
2	5	1.609438647262938	0.000000735262938	0.000000456844341
2	6	1.609437926401849	0.000000014401849	0.000000008948372
2	7	1.609437912665665	0.000000000665666	0.000000000413601
3	3	1.609966126368243	0.000528214368243	0.000328090361401
3	4	1.609456191297068	0.000018279297068	0.000011357436858
3	5	1.609438212042127	0.000000300042127	0.000000186426621
3	6	1.609437914959609	0.000000002959609	0.000000001838909
3	7	1.609437912447631	0.000000000447631	0.000000000278129
4	4	1.609454191551691	0.000016279551691	0.000010114951874
4	5	1.609438141535245	0.000000229535245	0.000000142618246
4	6	1.609437913794580	0.000000001794580	0.000000001115035
4	7	1.609437912437780	0.000000000437780	0.000000000272008
5	5	1.609438125846079	0.000000213846080	0.000000132870022
5	6	1.609437913571959	0.000000001571959	0.000000000976713
5	7	1.609437912436454	0.000000000436454	0.000000000271184
6	6	1.609437913520122	0.000000001520122	0.000000000944505
6	7	1.609437912436176	0.000000000436176	0.000000000271012
7	7	1.609437912436110	0.000000000436110	0.000000000270971

Рис. 5: Ромберг для Эксперимента 1

K	J	x	Δ	δ
0	0	1.097533303310731	0.265744216689269	0.242128613216242
0	1	1.298766651655366	0.064510868344634	0.049670869099088
0	2	1.347264042261919	0.016013477738081	0.011885923795009
0	3	1.359281200755581	0.003996319244419	0.002940023920141
0	4	1.362278879474866	0.000998640525134	0.000733066143930
0	5	1.363027887335357	0.000249632664643	0.000183145676594
0	6	1.363215113582982	0.000062406417018	0.000045778847664
0	7	1.363261918537875	0.000015601462125	0.000011444214727
1	1	1.365844434436911	0.002566914436910	0.001879360761878
1	2	1.363429839130770	0.000152319130770	0.000111717615676
1	3	1.363286920253468	0.000009400253468	0.000006895286186
1	4	1.363278105714628	0.000000585714628	0.000000429636936
1	5	1.363277556622188	0.000000036622188	0.000000026863339
1	6	1.363277522332189	0.000000002332189	0.000000001710722
1	7	1.363277520189506	0.000000000189506	0.000000000139008
2	2	1.363268866110360	0.000008653889640	0.000006347896483
2	3	1.363277392328315	0.000000127671685	0.000000093650556
2	4	1.363277518078706	0.000000001921294	0.000000001409320
2	5	1.363277520016025	0.000000000016025	0.000000000011755
2	6	1.363277520046190	0.000000000046189	0.000000000033881
2	7	1.363277520046661	0.000000000046661	0.000000000034227
3	3	1.363277527665108	0.000000007665108	0.000000005622559
3	4	1.363277520074744	0.000000000074744	0.000000000054826
3	5	1.363277520046776	0.000000000046776	0.000000000034312
3	6	1.363277520046668	0.000000000046668	0.000000000034232
3	7	1.363277520046668	0.000000000046668	0.000000000034232
4	4	1.363277520044977	0.000000000044977	0.000000000032992
4	5	1.363277520046667	0.000000000046667	0.000000000034231
4	6	1.363277520046668	0.000000000046668	0.000000000034232
4	7	1.363277520046668	0.000000000046668	0.000000000034232
5	5	1.363277520046668	0.000000000046668	0.000000000034233
5	6	1.363277520046668	0.000000000046668	0.000000000034232
5	7	1.363277520046668	0.000000000046668	0.000000000034232
6	6	1.363277520046668	0.000000000046668	0.000000000034232
6	7	1.363277520046668	0.000000000046668	0.000000000034232
7	7	1.363277520046668	0.000000000046668	0.000000000034232

Рис. 6: Ромберг для Эксперимента 2

K	J	x	Δ	δ
0	0	0.785398163397449	1.252799263678552	1.595113564130626
0	1	1.726812656758236	0.311384770317764	0.180323423678356
0	2	1.960534166563895	0.077663260512105	0.039613316532107
0	3	2.018793948077854	0.019403478998147	0.009611421223360
0	4	2.033347341805016	0.004850085270984	0.002385271405071
0	5	2.036984954990182	0.001212472085818	0.000595228787943
0	6	2.037894312128623	0.000303114947378	0.000148739287201
0	7	2.038121648525174	0.000075778550826	0.000037180582857
1	1	2.040617487878499	0.002420060802499	0.001185945340993
1	2	2.038441336499114	0.000243909423114	0.000119654865091
1	3	2.038213875249173	0.000016448173173	0.000008069895595
1	4	2.038198473047404	0.000001045971404	0.000000513184274
1	5	2.038197492718571	0.000000065642571	0.000000032206188
1	6	2.038197431174769	0.000000004098769	0.000000002010978
1	7	2.038197427324024	0.000000000248024	0.000000000121688
2	2	2.038296259740489	0.000098832664488	0.000048487880020
2	3	2.038198711165844	0.000001284089844	0.000000630012097
2	4	2.038197446233953	0.000000019157953	0.000000009399459
2	5	2.038197427363316	0.000000000287316	0.000000000140965
2	6	2.038197427071849	0.000000000004151	0.000000000002037
2	7	2.038197427067308	0.000000000008693	0.000000000004265
3	3	2.038197162775770	0.000000264300230	0.000000129673535
3	4	2.038197426155669	0.000000000920331	0.000000000451542
3	5	2.038197427063781	0.000000000012219	0.000000000005995
3	6	2.038197427067223	0.000000000008777	0.000000000004306
3	7	2.038197427067236	0.000000000008765	0.000000000004300
4	4	2.038197427188531	0.000000000112531	0.000000000055211
4	5	2.038197427067343	0.000000000008658	0.000000000004248
4	6	2.038197427067236	0.000000000008764	0.000000000004300
4	7	2.038197427067236	0.000000000008765	0.000000000004300
5	5	2.038197427067224	0.000000000008776	0.000000000004306
5	6	2.038197427067236	0.000000000008764	0.000000000004300
5	7	2.038197427067236	0.000000000008765	0.000000000004300
6	6	2.038197427067236	0.000000000008764	0.000000000004300
6	7	2.038197427067236	0.000000000008765	0.000000000004300
7	7	2.038197427067236	0.000000000008765	0.000000000004300

Рис. 7: Ромберг для Эксперимента 3