ЗАДАНИЕ НА КУРСОВОЙ ПРОЕКТ
по дисциплине «Численные методы»

Ф.И.О. Бобров И.И., Игнатьев М.В., Абдуллаев Т.М.

ТЕМА курсового проекта

Рекуррентные формулы и интегрирование по Ромбергу.

ФОРМУЛИРОВКА задания:

- Создать алгоритм решения поставленной задачи, реализовать его, протестировать программы;
- Оформить и представить итоги проделанной работы в виде отчета;
- Сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки методов.

РУКОВОДИТЕЛЬ проекта____________/ Пак Т.В./

ДАТА ВЫДАЧИ задания 6 ноября 2021

СРОК ВЫПОЛНЕНИЯ задания 09.11.2020 – 10.01.2021

Задание получил Бобров И.И., Игнатьев М.В., Абдуллаев Т.М.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Дальневосточный федеральный университет»
(ДВФУ)

ШКОЛА ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

Кафедра информатики, математического и компьютерного моделирования

Курсовой проект

по дисциплине
«Численные методы»

Направление подготовки
01.03.02 "Прикладная математика и информатика"

Выполнили студенты
гр. Б8118-01.03.02миопд
Бобров И.И. ____________
(ФИО) *(подпись)*

Игнатьев М.В. ____________
(ФИО) *(подпись)*

Абдуллаев Т.М. ____________
(ФИО) *(подпись)*

Проверил доцент, к.ф.-м.н.
Пак Т.В ________________
(ФИО) *(подпись)*

« 5 » января 2021 г.

г. Владивосток
2021

Содержание

Введение **4**

Основная часть **5**

Рекуррентные формулы. 5

Интегрирование по Ромбергу 6

Квадратура Буля 8

Вычислительный эксперимент 10

Эксперимент 1 10

Эксперимент 2 10

Эксперимент 3 11

Заключение **12**

Источники **13**

Приложения **14**

Реализация описанных методов на языке Python 3.6 14

Введение

Объектом исследования являются численные методы решения задач численного интегрирования.
Цель работы – ознакомиться с рекуррентными формулами и методами интегрирования, решить предложенные типовые задачи, сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки методов, приобрести практические навыки и компетенции, а также опыт самостоятельной профессиональной деятельности, а именно:

- создать алгоритм решения поставленной задачи и реализовать его, протестировать программы;
- освоить теорию вычислительного эксперимента; современных компьютерных технологий;
- приобрести навыки представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

Работа над курсовым проектом предполагает выполнение следующих задач:

- дальнейшее углубление теоретических знаний обучающихся и их систематизацию;
- получение и развитие прикладных умений и практических навыков по направлению подготовки;
- овладение методикой решения конкретных задач;
- развитие навыков самостоятельной работы;
- развитие навыков обработки полученных результатов, анализа и осмысления их с учетом имеющихся литературных данных;
- приобретение навыков оформления описаний программного продукта;
- повышение общей и профессиональной эрудиции.

Основная часть

Рекуррентные формулы

Приближения имеют высокую точность, если использовать большее количество подынтервалов. Сколько их следует выбрать? Ответить на этот вопрос может помочь процесс последовательного выбора двух, четырех и т. д. подынтервалов, пока не будет достигнута требуемая точность. Сначала необходимо сгенерировать последовательность $T(J)$ формул трапеций для приближений. Как только число подынтервалов удваивается, число значений функции также приблизительно удваивается, поскольку функцию нужно вычислять во всех предыдущих точках и во всех средних точках предыдущих подынтервалов (рис 1). В теореме 7.4 объясняется, как удалить лишние вычисления функции и сложения.

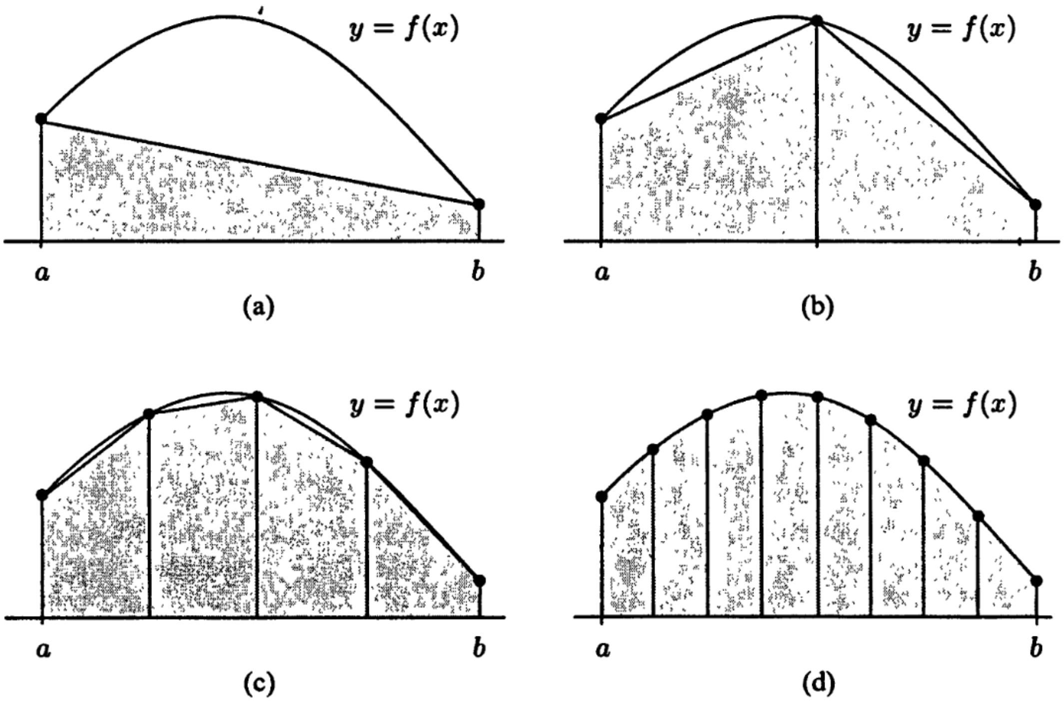

Рис. 1: **(a)** $T(0)$ — площадь под $2^0 = 1$ трапецией, **(b)** $T(1)$ — площадь под $2^1 = 2$ трапециями, **(c)** (2) — площадь под $2^2 = 4$ трапециями, **(d)** (3) — площадь под $2^3 = 8$ трапециями

Теорема 1. ***(последовательные формулы трапеций).*** *Предположим, что $J \geqslant 1$ и точки $\{x_k = a + kh\}$ делят интервал $[a; b]$ на $2^J = 2M$ подынтервалов с одинаковым шагом $h = (b-a)/2^J$. Формулы трапеций $T(f,h)$ и $T(f,2h)$ удовлетворяют соотношению*

$$T(f,h) = \frac{T(f,2h)}{2} + h\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1}) \qquad (1)$$

Определение 1. ***(последовательность формул трапеций).*** *Определим $T(0) = (h/2)(f(a) + f(b))$ как формулу трапеций с шагом длины $h = b - a$. Затем для каждого $J \geq 1$ определим $T(J) = T(f, h)$, где $T(f, h)$ - формула трапеций с шагом длины $h = (b - a)/2$.*

Следствие 1. ***(рекуррентная формула трапеций).*** *Начнем с $(0) = (h/2)(f(a) + f(b))$. Тогда последовательность формул трапеций $T(J)$ генерируется согласно рекуррентной формуле*

$$T(J) = \frac{T(J-1)}{2} + h \sum_{k-1}^{M} f(x_{2k-1}) \quad \text{для } J = 1, 2, \ \dots \ . \tag{2}$$

где $h = (b - a)/2^J$ и $x_k = a + kh$.

Теорема 2. ***(рекуррентная формула Симпсона).*** *Предположим, что $\{T(J)\}$ - последовательность формул трапеций, сгенерированная согласно следствию (1). Если $J \geq 1$ и $S(J)$ - формула Симпсона для 2^J подынтервалов $[a; b]$, то $S(J)$ и формулы трапеций $T(J-1)$ и $T(J)$ удовлетворяют соотношению*

$$S(J) = \frac{4T(J) - T(J-1)}{3} \quad \text{для } J = 1, 2, \ \dots \ . \tag{3}$$

Теорема 3. ***(рекуррентная формула Буля).*** *Предположим, что $\{S(J)\}$ - последовательность формул Симпсона, сгенерированная согласно теореме (2). Если $J \geq 2$ и $B(J)$ - формула Буля для 2^J подынтервалов интервала $[a; b]$, то $B(J)$ и формулы Симпсона $S(J-1)$ и $S(J)$ удовлетворяют соотношению*

$$B(J) = \frac{16S(J) - S(J-1)}{15} \quad \text{для } J = 2, 3, \ \dots \ . \tag{4}$$

Интегрирование по Ромбергу

Предположим, что формула приближения используется с шагами длины h и 2Л. Воспользуемся алгебраическими преобразованиями двух ответов, чтобы получить уточненный ответ. Каждый последующий уровень улучшения увеличивает порядок остаточного члена с $O(h^{2N})$ до $O(h^{2N+2})$. Этот процесс, называемый интегрированием по Ромбергу.

$$\int_a^b f(x)dx \ = \ T(f, h) + O(h^2),$$

$$\int_a^b f(x)dx = S(f,h) + O(h^4),$$
$$\int_a^b f(x)dx = B(f,h) + O(h^6).$$

Лемма 1. ***(улучшение Ричардсона для интегрирования по Ромбергу).*** *Заданы два приближения, $R(2h, -1)$ и $R(h, K-1)$, для величины Q, которые удовлетворяют равенствам*

$$Q = R(h, K-1) + c_1 h^{2K} + c_2 h^{2K+2} + ... \tag{5}$$

и

$$Q = R(2h, K-1) + c_1 4^K h^{2K} + c_2 4^{K+1} h^{2K+2} + ... \ . \tag{6}$$

Улучшенное приближение имеет вид

$$Q = \frac{4^K R(h, K-1) - R(2h, K-1)}{4^K - 1} + O(h^{2K+2}). \tag{7}$$

Определение 2. *Определим последовательность $R(J, K) : J \geq K_{J=0}^{\infty}$ формул квадратуры для $f(x)$ на интервале $[a; b]$ следующим образом.*

$$\begin{aligned} R(J,0) &= T(J) \quad \text{для } J \geq 0, \text{ последовательная формула трапеций.} \\ R(J,1) &= S(J) \quad \text{для } J \geq 1, \text{ последовательная формула Симпсона.} \\ R(J,2) &= B(J) \quad \text{для } J \geq 2, \text{ последовательная формула Буля.} \end{aligned} \tag{8}$$

Общей формулой построения улучшения

$$R(J, K) = \frac{4^K R(J, K-1) - R(J-1, K-1)}{4^K - 1} \quad \text{для} \quad J \geq K. \tag{9}$$

Теорема 4. ***(точность интегрирования по Ромбергу).*** *Предположим, что $f \in C^{2K+2}[a; b]$. Тогда ошибка усечения для приближения Ромберга задается формулой*

$$\int_a^b f(x)dx = R(J,K) + b_K h^{2K+2} f^{(2K+2)}(c_{J,K}) = R(J,K) + O(h^{2K+2}), \tag{10}$$

где $h = (b-a)/2^J$, b_K - постоянная, зависящая от K, и $c_{J,K} \in [a; b]$.

Квадратура Буля

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{90} \cdot (7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4)$$

Как мы ее получили?
Построим полином Лагранжа 4ой степени от $f(x)$, посчитаем аналитически интеграл от этого полинома, полученный результат и будет квадратурой Буля.

$$h = \frac{b-a}{4}$$

$$x_i = a + i \cdot h = a + i \cdot \frac{b-a}{4}$$

$$L_4(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2 + l_3(x)y_3 + l_4(x)y_4$$

Построим базисные полиномы к полиному Лагранжа:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)} =$$

$$= \frac{(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-3h)(x-a-4h)}{24h^4}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} =$$

$$= -\frac{(x-a)(x-a-2h)(x-a-3h)(x-a-4h)}{6h^4}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} =$$

$$= \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-3h)(x-a-4h)}{4h^4}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} =$$

$$= -\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-4h)}{6h^4}$$

$$l_4(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)} =$$

$$= \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-3h)}{24h^4}$$

Проинтегрируем базисные полиномы:

$$\int_a^b l_0(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-3h)(x-a-4h)}{24h^4}\,dx = \frac{7}{90}(b-a)$$

$$\int_a^b l_1(x)\,dx = \int_a^b -\frac{(x-a)(x-a-2h)(x-a-3h)(x-a-4h)}{6h^4}\,dx = \frac{16}{45}(b-a)$$

$$\int_a^b l_2(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-3h)(x-a-4h)}{4h^4}\,dx = \frac{2}{15}(b-a)$$

$$\int_a^b l_3(x)\,dx = \int_a^b -\frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-4h)}{6h^4}\,dx = \frac{16}{45}(b-a)$$

$$\int_a^b l_4(x)\,dx = \int_a^b \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)(x-a-3h)}{24h^4}\,dx = \frac{7}{90}(b-a)$$

Тогда интеграл от полинома Лагранжа будет следующим:

$$\int_a^b L_4(x)\,dx = y_0\int_a^b l_0(x)\,dx + y_1\int_a^b l_1(x)\,dx +$$

$$+y_2\int_a^b l_2(x)\,dx + y_3\int_a^b l_3(x)\,dx + y_4\int_a^b l_4(x)\,dx =$$

$$= \frac{7}{90}(b-a)\cdot y_0 + \frac{16}{45}(b-a)\cdot y_1 + \frac{2}{15}(b-a)\cdot y_2 + \frac{16}{45}(b-a)y_3 + \frac{7}{90}(b-a)\cdot y_4 =$$

$$= (b-a)\cdot\left(\frac{7}{90}\cdot y_0 + \frac{16}{45}\cdot y_1 + \frac{2}{15}\cdot y_2 + \frac{16}{45}\cdot y_3 + \frac{7}{90}\cdot y_4\right)$$

Домножим полученное выражение на $\frac{90}{90}$ и получим квадратурную формулу Буля:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{90}\cdot(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4)$$

Вычислительный эксперимент

В данных экспериментах интеграл вычисляется не с заданной точностью, а с разными интервалами ($n = 2^J$, J - параметр в рекуррентных формулах)

Эксперимент 1

$$\int_1^5 \frac{dx}{x} = 1.609437912$$

Ответ по рекуррентной формуле трапеций:

$$T(0) = 2.4000000000, \Delta T(0) = 0.7905620880$$

$$T(1) = 1.8666666667, \Delta T(1) = 0.2572287547$$
$$T(2) = 1.6833333333, \Delta T(2) = 0.0738954213$$
$$T(3) = 1.6289682540, \Delta T(3) = 0.0195303420$$

Ответ по рекуррентной формуле Симпсона:

$$S(1) = 1.6888888889, \Delta S(1) = 0.0794509769$$

$$S(2) = 1.6222222222, \Delta S(2) = 0.0127843102$$
$$S(3) = 1.6108465608, \Delta S(3) = 0.0014086488$$

Ответ по рекуррентной формуле Буля:

$$B(2) = 1.6177777778, \Delta B(2) = 0.0083398658$$

$$B(3) = 1.6100881834, \Delta B(3) = 0.0006502714$$

Ответ по методу Ромберга:

$$R(5,5) = 1.6094381258, \Delta R(5,5) = 0.0000002138$$

Эксперимент 2

$$\int_{-0.75}^{0.75} \cos(x)dx \approx 1.363277520$$

Ответ по рекуррентной формуле трапеций:

$$T(0) = 1.0975333033, \quad \Delta T(0) = 0.2657442167$$

$$T(1) = 1.2987666517, \quad \Delta T(1) = 0.0645108683$$
$$T(2) = 1.3472640423, \quad \Delta T(2) = 0.0160134777$$
$$T(3) = 1.3592812008, \quad \Delta T(3) = 0.0039963192$$

Ответ по рекуррентной формуле Симпсона:

$$S(1) = 1.3658444344, \quad \Delta S(1) = 0.0025669144$$
$$S(2) = 1.3634298391, \quad \Delta S(2) = 0.0001523191$$
$$S(3) = 1.3632869203, \quad \Delta S(3) = 0.0000094003$$

Ответ по рекуррентной формуле Буля:

$$B(2) = 1.3632688661, \quad \Delta B(2) = 0.0000086539$$
$$B(3) = 1.3632773923, \quad \Delta B(3) = 0.0000001277$$

Ответ по методу Ромберга:

$$R(5,5) = 1.3632775200, \quad \Delta R(5,5) = 0.0000000000$$

Эксперимент 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(x^2 + x + 1\right) \cos(x) dx \approx 2.038197427076$$

Ответ по рекуррентной формуле трапеций:

$$T(0) = 0.7853981634, \quad \Delta T(0) = 1.2527992637$$
$$T(1) = 1.7268126568, \quad \Delta T(1) = 0.3113847703$$
$$T(2) = 1.9605341666, \quad \Delta T(2) = 0.0776632605$$
$$T(3) = 2.0187939481, \quad \Delta T(3) = 0.0194034790$$

Ответ по рекуррентной формуле Симпсона:

$$S(1) = 2.0406174879, \quad \Delta S(1) = 0.0024200608$$
$$S(2) = 2.0384413365, \quad \Delta S(2) = 0.0002439094$$
$$S(3) = 2.0382138752, \quad \Delta S(3) = 0.0000164482$$

Ответ по рекуррентной формуле Буля:

$$B(2) = 2.0382962597, \quad \Delta B(2) = 0.0000988327$$
$$B(3) = 2.0381987112, \quad \Delta B(3) = 0.0000012841$$

Ответ по методу Ромберга:

$$R(5,5) = 2.0381974271, \quad \Delta R(5,5) = 0.0000000000$$

В результате вычислительных экспериментов мы обнаружили что решение по методу Ромберга является очень точным.

Заключение

В результате работы над курсовым проектом приобрел практические навыки владения:

- современными численными методами решения задач математической экономики;
- основами алгоритмизации для численного решения задач математической экономики на одном из языков программирования;
- инструментальными средствами, поддерживающими разработку программного обеспечения для численного решения задач математической экономики;

а также навыками представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

Список используемых источников

Источники

1. Численные методы. Использование Matlab. Третье издание. Джон Г. Мэтьюз Издательский дом "Вильямс" 2001

2. wikipedia Численное интегрирование
   $https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_integration$

3. Documentation Python 3.6

Приложения

Реализация описанных методов на языке Python 3.6

```
import math


def T(context, J):
  a, b, f = context['a'], context['b'], context['f']
  h = (b - a) / (2 ** J)
  if J == 0:
    return h * (f(a) + f(b)) / 2
  s = 0
  m = 2 ** (J - 1)
  for i in range(1, m + 1):
    s += f(a + (2 * i - 1) * h)
  return T(context, J - 1) / 2 + h * s


def S(context, J):
  return (4 * T(context, J) - T(context, J - 1)) / 3


def B(context, J):
  return (16 * S(context, J) - S(context, J - 1)) / 15


def R(context, J, K):
  if K == 0:
    return T(context, J)
  if K == 1:
    return S(context, J)
  if K == 2:
    return B(context, J)
  return ((4**K)*R(context,J,K-1)-R(context,J-1,K-1))/(4**K-1)
```