# Содержание

**Введение** **2**

**Основная часть** **3**
Метод отражений. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
Построение QR-разложения методом отражений . . . . . . . . . 4
Вычислительный эксперимент . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6
Эксперимент 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

**Заключение** **7**

**Источники** **8**

**Приложения** **9**
Реализация выше описанных методов на языке MATLAB . . . . 9

# Введение

Объектом исследования является точный метод решения СЛАУ - построение QR-разложения методом отражений.
*Цель работы* – ознакомиться с алгоритмами метода отражений и построения QR-разложения, решить типовые задачи, сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки метода, приобрести практические навыки и компетенции, а также опыт самостоятельной профессиональной деятельности, а именно:

- создать алгоритм решения поставленной задачи и реализовать его, протестировать;
- освоить теорию вычислительного эксперимента; современных компьютерных технологий;
- приобрести навыки представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

Работа над курсовым проектом предполагает выполнение следующих задач:

- дальнейшее углубление теоретических знаний обучающихся;
- получение и развитие прикладных умений и практических навыков по направлению подготовки;
- овладение методикой решения конкретных задач;
- развитие навыков самостоятельной работы;
- развитие навыков обработки полученных результатов, анализа и осмысления их с учетом имеющихся литературных данных;
- приобретение навыков оформления описаний программного продукта;
- повышение общей и профессиональной эрудиции.

# Основная часть

## Метод отражений

Метод отражения представляет собой алгоритм подбора унарных матриц преобразований $P$, таких что в результате всех этих преобразований исходная матрица $A$ приводится к треугольному виду. Система с треугольной матрицей в дальнейшем решается, например, методом *Гаусса*. Не смотря на трудоемкость метода, он имеет широкое распространение благодаря своей устойчивости к накоплению вычислительной погрешности.

В n - мерном евклидовом пространстве рассмотрим гиперплоскость $(p, x) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = 0$, проходящую через начало координат ортогонально заданному вектору нормали $p = (p_1, p_2, ..., p_n)^*$. Поставив в соответствие каждому элементы x рассматриваемого пространства элемент

$$y = x - 2\frac{(p, x)}{(p, p)}p, \tag{1}$$

мы определим некоторое преобразование n пространства, которое называется преобразованием ортогонального отражения относительно гиперплоскости $(p, x) = 0$

**Определение 1.** *Матрицей отражения называется матрица вида* $F = I - \frac{2}{(p,p)}pp^*$*, относительно гиперплоскости с нормалью p Всякая матрица отражения целиком определяется соответствующим вектором нормали*

Рассмотрим некоторые свойства матрицы

1. $F^2 = I$
2. $F^* = F$
3. Матрица $F$ - ортогональна.
4. Матрица отражения не изменяется, если в место нормали $p$, определяющего эту матрицу, использовать любой коллинеарный вектор $\beta p$ $(\beta \neq 0)$.
5. Если $y = Fx$ и $F$ - матрица отражения, то в качестве определяющего ее вектора нормали можно взять разность исходного и отраженного векторов:
$$p = x - y$$

6. Если первые $k$ компонент вектора нормали нулевые, то первые $k$ компонент отраженного вектора совпадают с соответствующими компонентами исходного вектора.

7. Если $p_1 = p_2 = ... = p_k = 0$ и $x_{k+1} = x_{k+2} = ... = x_n = 0$, то и $y_{k+1} = y_{k+2} = ... = y_n = 0$

## Построение QR-разложения методом отражений

**Теорема 1.** *(О QR-разложении) Всякая невырожденная матрица $A \in M_n$ может быть представлена в виде $A = QR$, где $Q$ - унитарная, а матрица $R$ - верхняя треугольная с вещественным положительными элементами на главной диагонали. Это разложение единственно.*

Коротко по шагам опишем алгоритм приведения матрицы $A$ к верхней треугольной форме с помощью преобразований отражения.

1. Строим матрицу $A_1$ по формуле (1). Для этого определим матрицу отражения $F_1$ так, чтобы первый столбец матрицы

$$A_1 = F_1 A \tag{2}$$

имел вид $(a_{11}^{(1)}, 0, 0, ..., 0)^*$. Для определения элемента $a_{11}^{(1)}$ воспользуемся свойством сохранения длины вектора при ортогональном преобразовании. Так мы построим первый столбец матрицы $A_1$. Для определения остальных необходимо воспользоваться формулой $a_j^{(1)} = F_1 a_j, j = 2, 3, ..., n$, где по определению матрицы $F_1$:

$$a_j^{(1)} = a_j - 2\frac{(p^{(1)}, p_j)}{(p^{(1)}, p^{(1)})} p^{(1)}, j = 2, 3, ..., n$$

2. Пусть в результате выполнения $k-1$ шагов мы получили матрицу $A_k$. На $k$-м шаге определим матрицу отражения $F_k$ так, чтобы $k$-й столбец матрицы

$$A_k = F_k A_{k-1} \tag{3}$$

имел вид $(a_{1k}^{(1)}, a_{2k}^{(2)}, ..., a_{k-1k}^{(k-1)}, a_{kk}^{(k)}, 0, ..., 0)^*$.Согласно свойству 5 $P^{(k)} = a_k^{(k-1)} - a_k^{(k)}$, т.е.

$$P_l^{(k)} = 0, \quad l = 1, 2, .., k-1, \quad P_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} - a_{kk}^{(k)},$$

$$P_l^{(k)} = a_{lk}^{(k-1)}, \quad l = k-1, ..., n$$

Элементы $a_{kk}^{(k)}$ определены из условия равенства длин столбцов $a_k^{(k-1)}$

$$akk^{(k)} = -\sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} [a_{lk}^{(k-1)}]^2},$$

где

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{, если } a_{kk}^{(k-1)} \geq 0 \\ -1 & \text{, если } a_{kk}^{(k-1)} < 0 \end{cases}$$

Тогда

$$P_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} + \sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} [a_{lk}^{(k-1)}]^2}$$

Полностью определив вектор нормали $P^{(k)}$, а значит и матрицу отражения $F_k$, можем приступить к выполнению $k$-го шага, состоящего в вычислении матрицы $A_k$ по формуле (3)

3. Определив $k$-тый столбец матрицы, определяем остальные воспользовавшись формулами $a_j^{(k)} = F_k a_j^{(k-1)}$. По определению матрицы отражения $F_k$ получаем

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - 2 \frac{p_i^{(k)}}{\sum_{l=k}^{n} (p_l^{(k)})^2} \sum_{l=k}^{n} p_l^{(k)} a_{lj}^{(k-1)}. \tag{4}$$

4. В результате выполнения $n$-1 шагов мы придем к матрице $A{-}n-1$, имеющий требуемую верхнюю треугольную матрицу которую будем обозначать за $R$. Последовательно использование рекуррентной формулы (3) дает:

$$R = A_{n-1} = F_{n-1}A_{n-2} = F_{n-1}F_{n-2}A_{n-3} = ... = F_{n-1}F_{n-2} \cdots F_2F_1A$$

Обозначив через $Q$ произведение матриц и вычислив $Q^*$ получим $R = Q^*A$ и

$$A = Q \cdot R$$

## Вычислительный эксперимент

В данных экспериментах интеграл вычисляется не с заданной точностью, а с разными интервалами ($n = 2^J$, $J$ - параметр в рекуррентных формулах)

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:
$J$ - параметр в рекуррентных формулах
$K$ - параметр точности
$x$ - численный результат выполнения метода
$\Delta$ - абсолютная погрешность
$\delta$ - относительная погрешность

### Эксперимент 1

# Заключение

В данной работе мы рассмотрели алгоритм построения QR-разложения методом отражений. Были проведены вычислительные эксперименты, демонстрирующие эффективность и точность данного метода. В результате работы над курсовым проектом были приобретены практические навыки владения:

- современными численным методам решения задач математической экономики;
- основами алгоритмизации для численного решения задач математической экономики на одном из языков программирования;
- инструментальными средствами, поддерживающими разработку программного обеспечения для численного решения задач математической экономики;

а также навыками представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати, а именно программы LaTeX.

# Список используемых источников

## Источники

1. Метод Хаусхолдера (отражений) QR-разложения квадратной матрицы, вещественный точечный вариант algowiki-project.org

# Приложения

## Реализация выше описанных методов на языке MATLAB