Содержание

Введение

Объектом исследования является точный метод решения СЛАУ - построение QR-разложения методом отражений.
Цель работы – ознакомиться с алгоритмами метода отражений и построения QR-разложения, решить типовые задачи, сформулировать выводы по полученным решениям, отметить достоинства и недостатки метода, приобрести практические навыки и компетенции, а также опыт самостоятельной профессиональной деятельности, а именно:

- создать алгоритм решения поставленной задачи и реализовать его, протестировать;
- освоить теорию вычислительного эксперимента; современных компьютерных технологий;
- приобрести навыки представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати.

Работа над курсовым проектом предполагает выполнение следующих задач:

- дальнейшее углубление теоретических знаний обучающихся;
- получение и развитие прикладных умений и практических навыков по направлению подготовки;
- овладение методикой решения конкретных задач;
- развитие навыков самостоятельной работы;
- развитие навыков обработки полученных результатов, анализа и осмысления их с учетом имеющихся литературных данных;
- приобретение навыков оформления описаний программного продукта;
- повышение общей и профессиональной эрудиции.

Основная часть

Метод отражений

Метод отражения представляет собой алгоритм подбора унарных матриц преобразований P, таких что в результате всех этих преобразований исходная матрица A приводится к треугольному виду. Система с треугольной матрицей в дальнейшем решается, например, методом *Гаусса*. Не смотря на трудоемкость метода, он имеет широкое распространение благодаря своей устойчивости к накоплению вычислительной погрешности.

В n - мерном евклидовом пространстве рассмотрим гиперплоскость $(p, x) = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n = 0$, проходящую через начало координат ортогонально заданному вектору нормали $p = (p_1, p_2, ..., p_n)^*$. Поставив в соответствие каждому элементы x рассматриваемого пространства элемент

$$y = x - 2\frac{(p, x)}{(p, p)}p, \tag{1}$$

мы определим некоторое преобразование n пространства, которое называется преобразованием ортогонального отражения относительно гиперплоскости $(p, x) = 0$

Определение 1. *Матрицей отражения называется матрица вида* $F = I - \frac{2}{(p,p)}pp^*$, *относительно гиперплоскости с нормалью p Всякая матрица отражения целиком определяется соответствующим вектором нормали*

Рассмотрим некоторые свойства матрицы

1. $F^2 = I$
2. $F^* = F$
3. Матрица F - ортогональна.
4. Матрица отражения не изменяется, если в место нормали p, определяющего эту матрицу, использовать любой коллинеарный вектор βp $(\beta \neq 0)$.
5. Если $y = Fx$ и F - матрица отражения, то в качестве определяющего ее вектора нормали можно взять разность исходного и отраженного векторов:
$$p = x - y$$

6. Если первые k компонент вектора нормали нулевые, то первые k компонент отраженного вектора совпадают с соответствующими компонентами исходного вектора.

7. Если $p_1 = p_2 = ... = p_k = 0$ и $x_{k+1} = x_{k+2} = ... = x_n = 0$, то и $y_{k+1} = y_{k+2} = ... = y_n = 0$

Построение QR-разложения методом отражений

Теорема 1. *(О QR-разложении) Всякая невырожденная матрица $A \in M_n$ может быть представлена в виде $A = QR$, где Q - унитарная, а матрица R - верхняя треугольная с вещественным положительными элементами на главной диагонали. Это разложение единственно.*

Коротко по шагам опишем алгоритм приведения матрицы A к верхней треугольной форме с помощью преобразований отражения.

1. Строим матрицу A_1 по формуле (1). Для этого определим матрицу отражения F_1 так, чтобы первый столбец матрицы

$$A_1 = F_1 A \tag{2}$$

имел вид $(a_{11}^{(1)}, 0, 0, ..., 0)^*$. Для определения элемента $a_{11}^{(1)}$ воспользуемся свойством сохранения длины вектора при ортогональном преобразовании. Так мы построим первый столбец матрицы A_1. Для определения остальных необходимо воспользоваться формулой $a_j^{(1)} = F_1 a_j, j = 2, 3, ..., n$, где по определению матрицы F_1:

$$a_j^{(1)} = a_j - 2\frac{(p^{(1)}, p_j)}{(p^{(1)}, p^{(1)})}p^{(1)}, j = 2, 3, ..., n$$

2. Пусть в результате выполнения $k-1$ шагов мы получили матрицу A_k. На k-м шаге определим матрицу отражения F_k так, чтобы k-й столбец матрицы

$$A_k = F_k A_{k-1} \tag{3}$$

имел вид $(a_{1k}^{(1)}, a_{2k}^{(2)}, ..., a_{k-1k}^{(k-1)}, a_{kk}^{(k)}, 0, ..., 0)^*$.Согласно свойству 5 $P^{(k)} = a_k^{(k-1)} - a_k^{(k)}$, т.е.

$$P_l^{(k)} = 0, \quad l = 1, 2, .., k-1, \quad P_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} - a_{kk}^{(k)},$$

$$P_l^{(k)} = a_{lk}^{(k-1)}, \quad l = k-1, ..., n$$

Элементы $a_{kk}^{(k)}$ определены из условия равенства длин столбцов $a_k^{(k-1)}$

$$akk^{(k)} = -\sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} [a_{lk}^{(k-1)}]^2},$$

где

$$\sigma = \begin{cases} 1 & \text{, если } a_{kk}^{(k-1)} \geq 0 \\ -1 & \text{, если } a_{kk}^{(k-1)} < 0 \end{cases}$$

Тогда

$$P_k^{(k)} = a_{kk}^{(k-1)} + \sigma_k \sqrt{\sum_{l=k}^{n} [a_{lk}^{(k-1)}]^2}$$

Полностью определив вектор нормали $P^{(k)}$, а значит и матрицу отражения F_k, можем приступить к выполнению k-го шага, состоящего в вычислении матрицы A_k по формуле (3)

3. Определив k-тый столбец матрицы, определяем остальные воспользовавшись формулами $a_j^{(k)} = F_k a_j^{(k-1)}$. По определению матрицы отражения F_k получаем

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - 2\frac{p_i^{(k)}}{\sum_{l=k}^{n}(p_l^{(k)})^2} \sum_{l=k}^{n} p_l^{(k)} a_{lj}^{(k-1)}. \tag{4}$$

4. В результате выполнения n-1 шагов мы придем к матрице $A-n-1$, имеющий требуемую верхнюю треугольную матрицу которую будем обозначать за R. Последовательно использование рекуррентной формулы (3) дает:

$$R = A_{n-1} = F_{n-1}A_{n-2} = F_{n-1}F_{n-2}A_{n-3} = ... = F_{n-1}F_{n-2} \cdots F_2 F_1 A$$

Обозначив через Q произведение матриц и вычислив Q^* получим $R = Q^*A$ и

$$A = Q \cdot R$$

Реализация метода на языке MATLAB

Метод QR-разложения для удобства использования был вынесен в отдельную функцию:

```
function [Q,R] = functionQR(A)
    [n, m] = size(A);
    %Проверка корректности матрицы
    if (n ~= m)
    error('Error functionQR: Матрица не является квадратной');
    terminateExecution
    pause(0.1)
    end
    %Инициализация матриц
    I = eye(n,m);
    Q = I;
    R = A;
    %Главный цикл
    for k = 1:n-1
        x = A(:,k); %выбираем новый столбец на каждом шаге
        if (k > 1)
            for i = 1:k-1
                x(i) = 0;
            end
        end
        %вычисляем норму
        norm_x = norm(x(:));

        a = zeros(n,1);
        a(k,1) = 1;

        p = x(:) - norm_x * a;

        norm_p = norm(p(:));
        %p' - транспонированная матрица p
        F = I - (2*p.*p')/(norm_p^2);
        Q = Q*F;
        A = F*A;
        R = A;
    end

end
```

Main файл:

```
clear all %осчистить буфер
clc %очистить консоль
format Long

%...
%...инициализация матрицы A...
%...

try
    [Q,R] = functionQR(A)
    A
    Q*R %проверка
catch e
    fprintf('(%s)\n',e.message);
end
```

Вычислительный эксперимент

Проведем вычислительные эксперименты, с помощью QR-разложения рассмотрим матрицы разных размеров и проанализируем вычислительную погрешность метода.

Эксперимент 1

Матрица A размера 3x3:

```
A = [   1       2       4
        3       3       2
        4       9       3]
```

Результат вычисления:

```
Q =

0.196116135138184   0.063966030264690   0.978492109580163
0.588348405414552  -0.805971981335094  -0.065232807305345
0.784464540552736   0.588487478435148  -0.195698421916032


R =

5.099019513592784   9.217458351494649   4.314554973040049
-0.000000000000000   3.006403422440430   0.409382593694015
-0.000000000000000   0.000000000000000   3.196407557961867


A =

1       2       4
3       3       2
4       9       3


Q*R =

1.000000000000000   2.000000000000000   4.000000000000000
3.000000000000000   3.000000000000002   2.000000000000000
4.000000000000000   8.999999999999998   3.000000000000000
```

Эксперимент 2

Матрица A размера 3x3:

```
A = [   1.4  1    1
        1    0.9  1
        1    1    1.4]
```

Результат вычисления:

```
Q =

0.703526470681448  -0.680413817439772   0.205152484965555
0.502518907629606   0.272165526975908  -0.820609939862218
0.502518907629606   0.680413817439772   0.533396460910442


R =

1.989974874213240   1.658312395177700   1.909571848992503
-0.000000000000000   0.244948974278318   0.544331053951817
0.000000000000000  -0.000000000000000   0.131297590377955


A =

1.400000000000000   1.000000000000000   1.000000000000000
1.000000000000000   0.900000000000000   1.000000000000000
1.000000000000000   1.000000000000000   1.400000000000000


Q*R =

1.400000000000000   1.000000000000000   1.000000000000000
1.000000000000000   0.900000000000000   1.000000000000000
1.000000000000000   1.000000000000000   1.400000000000000
```

Эксперимент 3

Матрица A размера 5x5:

```
A = [    1  3 -2  0 -2
         3  4 -5  1 -3
        -2 -5  3 -2  2
         0  1 -2  5  3
        -2 -3  2  3  4];
```

Результат вычисления:

```
Q =

  0.235702260395516   0.496956188056659  -0.007875114405325  -0.759703701182689   0.346795704383812
  0.707106781186548  -0.453742606486515  -0.441006406698203   0.067860243460763   0.308262848341167
 -0.471404520791032  -0.604990141982020  -0.275629004186377  -0.574329377582556  -0.077065712085292
                  0   0.388922234131299  -0.759948540113867   0.024826918339304  -0.520193556575719
 -0.471404520791032   0.172854326280577  -0.389818163063590   0.296267892182356   0.712857836788948


R =

  4.242640687119286   7.306770072260991  -6.363961030678928   0.235702260395516  -5.421151989096865
 -0.000000000000000   2.571208103423586  -0.972305585328246   3.219411826975751   1.015519166898391
 -0.000000000000000   0.000000000000000   2.134156003843088  -4.858945588085554  -3.051606832063456
  0.000000000000000   0.000000000000000  -0.000000000000000   2.229457266869460   1.426720240565311
 -0.000000000000000  -0.000000000000000   0.000000000000000   0.000000000000000  -0.481660700533072


A =

  1     3    -2     0    -2
  3     4    -5     1    -3
 -2    -5     3    -2     2
  0     1    -2     5     3
 -2    -3     2     3     4


Q*R =

  1.000000000000000   3.000000000000001  -2.000000000000000   0.000000000000000  -2.000000000000000
  3.000000000000000   4.000000000000000  -5.000000000000002   1.000000000000000  -3.000000000000000
 -2.000000000000000  -5.000000000000000   3.000000000000000  -2.000000000000000   2.000000000000000
 -0.000000000000000   1.000000000000000  -2.000000000000000   5.000000000000001   3.000000000000000
 -2.000000000000000  -3.000000000000000   2.000000000000000   3.000000000000000   4.000000000000001
```

Вывод

Используя метод QR-разложения мы получаем две матрицы за n - итераций, где n это кол-во столбцов исходной матрицы A. Заметим, что при расчете матриц Q и R на месте нулей стоят очень маленькие значения, в том числе и отрицательные, это обусловлено вычислительными ошибками, которыми можно пренебречь. Перемножение найденных матриц Q и R дает нам исходную матрицу A с незначительной погрешностью.

Заключение

В данной работе мы рассмотрели алгоритм построения QR-разложения методом отражений. Были проведены вычислительные эксперименты, демонстрирующие эффективность и точность данного метода. В результате работы над курсовым проектом были приобретены практические навыки владения:

- современному численному методу разложения матрицы;
- основами алгоритмизации для численного решения задач математической экономики на одном из языков программирования;
- инструментальными средствами, поддерживающими разработку программного обеспечения для численного решения задач математической экономики;

а также навыками представления итогов проделанной работы в виде отчета, оформленного в соответствии с имеющимися требованиями, с привлечением современных средств редактирования и печати, а именно программы LaTeX.

Список используемых источников

Источники

1. Метод Хаусхолдера (отражений) QR-разложения квадратной матрицы, вещественный точечный вариант algowiki-project.org

2. Численные методы. Андреев В.Б

3. Вычисленные методы. Амосов А.А., Дубинский Ю.А. Копченова Н.В.