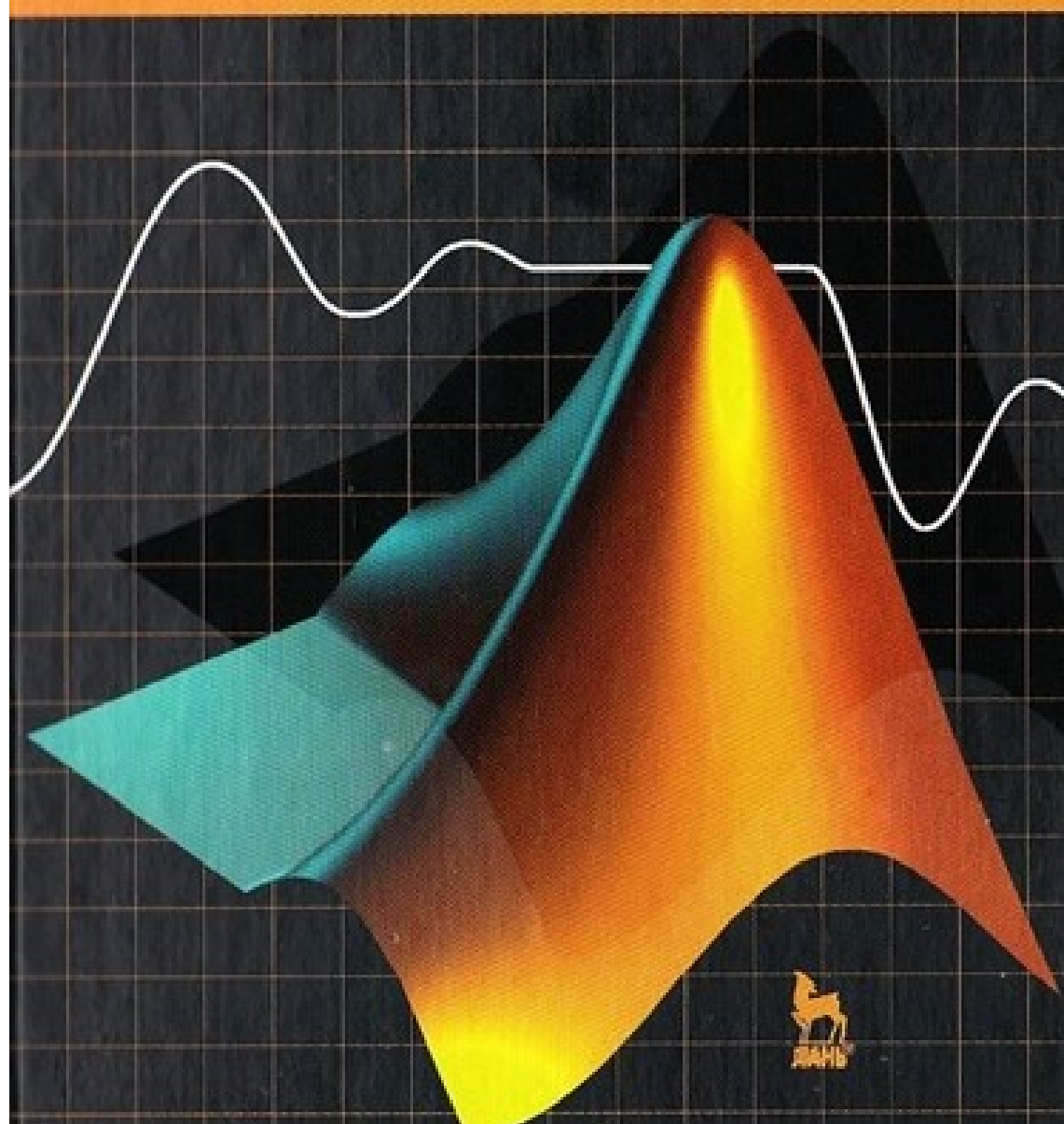


# СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

А. Ю. Ощепков

теория, применение, моделирование  
в **MATLAB**



УДК 519.71, 53.06  
ББК 22.181  
О 97

**Ощепков А.Ю.**

**О 97 Системы автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB: Учебное пособие для студентов физического факультета. 4-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2021. – 180 с.: ил. – (Учебники для вузов. Специальная литература).**

Пособие написано на основе лекций, читаемых автором на протяжении ряда лет на физическом факультете Пермского университета по дисциплинам “Теория автоматического управления” и “Проектирование цифровых систем управления”. В нём систематически изложены основы современной теории управления физическими системами и техническими устройствами. Рассмотрены основы математического моделирования систем управления, свойства систем управления с обратной связью и основные методы анализа устойчивости непрерывных и дискретных систем, описаны методы традиционной теории оптимального управления, а также современные адаптивные и робастные алгоритмы управления. В качестве программного продукта, сопровождающего лекции, использован пакет “MATLAB”

Рекомендовано для студентов физического факультета специальностей “Физика” и “Радиофизика и электроника”.

Рецензенты: кафедра математического моделирования систем и процессов Пермского национального исследовательского политехнического университета (зав. каф. д.ф.-м.н., проф. П.В. Трусков); зав. лаб. динамики дисперсных систем Института механики сплошных сред УрО РАН, д.ф.-м.н., проф. А.Ф. Пшеничников

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
ЛЕКЦИЯ 1. ОТ КЛЕПСИДРЫ ДО ТЕРМОДАТА.....	9
1.1. Структура систем автоматического управления .....	9
1.2. Регуляторы прямого действия.....	12
1.3. Регуляторы по отклонению .....	14
1.4. Современные цифровые системы автоматического управления.....	17
ЛЕКЦИЯ 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ .....	21
2.1. Общие свойства математических моделей .....	21
2.2. Математическая формулировка задач управления поворотом вала электродвигателя .....	24
ЛЕКЦИЯ 3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ .....	29
3.1. Математическая модель RLC-цепи .....	29
3.2. Пространство состояний.....	30
3.3. Сигнальные графы.....	33
3.4. Управляемость и наблюдаемость систем.....	34
ЛЕКЦИЯ 4. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ.....	35
4.1. Определение передаточных функций.....	35
4.2. Переходные характеристики систем управления.....	38
4.3. Структурные схемы.....	39
4.4. Связь между передаточными функциями и уравнениями состояния .....	40
ЛЕКЦИЯ 5. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ.....	43
5.1. Модель двигателя постоянного тока .....	43
5.2. Двигатель, управляемый по цепи возбуждения .....	44
5.3. Двигатель, управляемый по цепи якоря.....	46
ЛЕКЦИЯ 6. СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ .....	49
6.1. Свойства обратной связи .....	49
6.2. Показатели качества.....	52
6.3. Оценки качества .....	56
ЛЕКЦИЯ 7. СТАНДАРТНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ .....	58
7.1. Математические модели ПИД-регуляторов .....	58
7.2. Особенности работы стандартных регуляторов.....	59
7.3. Методы настройки ПИД-регуляторов .....	65
ЛЕКЦИЯ 8. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. ТЕОРЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ.....	68
8.1. Понятие устойчивости .....	68
8.2. Математическая устойчивость. Основные определения .....	70
8.3. Теоремы устойчивости.....	73
8.4. Устойчивость вращения твердого тела .....	74
ЛЕКЦИЯ 9. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ.....	78
9.1. Методы анализа устойчивости ЛСС.....	78
9.2. Анализ устойчивости во временной области .....	80
9.3. Частотные критерии устойчивости.....	85
9.4. Устойчивость систем с неопределенными параметрами.....	88
ЛЕКЦИЯ 10. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ .....	90
10.1. Структура цифровых систем управления .....	90
10.2. Цифровой ПИ-регулятор .....	93
10.3. Дискретные модели непрерывных систем .....	95
10.4. Передаточные функции дискретных систем .....	98

10.5. Устойчивость дискретных систем .....	100
ЛЕКЦИЯ 11. РАЗОМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ.....	102
11.1. Постановка и классификация задач оптимального управления .....	102
11.2. Вариационный метод для скалярного случая .....	105
11.3. Гамильтонова формулировка условия оптимальности.....	108
11.4. Построение оптимального управления .....	109
ЛЕКЦИЯ 12. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ.....	112
12.1. Оптимальное управление линейными системами с квадратичным функционалом .....	112
12.2. Линейно-квадратичная задача для скалярного случая .....	114
12.3. Управление на неограниченном интервале времени .....	117
ЛЕКЦИЯ 13. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЯЮЩИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ.....	120
13.1. Принцип максимума Понтрягина .....	120
13.1.1. Формулировка принципа максимума .....	120
13.1.2. Пример: поворот вала электродвигателя на максимальный угол.....	121
13.2. Метод динамического программирования.....	125
13.2.1. Уравнение Беллмана .....	125
13.2.2. Пример: задача об успокоении твердого тела .....	128
ЛЕКЦИЯ 14. УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ. РОБАСТНОСТЬ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ .....	131
14.1. Неопределённости объектов управления .....	131
14.2. Понятие грубости и робастности систем управления.....	133
14.3. Робастность систем управления с обратной связью .....	135
14.4. Метод скоростного градиента .....	137
ЛЕКЦИЯ 15. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ .....	140
15.1. Структура адаптивных систем управления .....	140
15.2. Классификация адаптивных систем управления.....	141
15.3. Адаптивное управление с эталонной моделью объектом первого порядка .....	144
ЛЕКЦИЯ 16. РОБАСТНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ .....	148
16.1. Градиентный метод .....	148
16.2. Быстрые алгоритмы для объектов 1-го и 2-го порядков .....	151
16.3. Идентификационное адаптивное управление объектом первого порядка на основе методов линейной регрессии.....	154
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	158
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ MATLAB ДЛЯ АНАЛИЗА СВОЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ.....	161
П1.1. Функции MATLAB для создания математических моделей систем управления .....	161
П1.2. Исследование свойств систем управления.....	163
П1.3. Анализ устойчивости систем управления .....	165
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ И НАСТРОЙКА ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ В ПАКЕТЕ Simulink.....	167
П2.1. Построение S-модели ПИД-регулятора для непрерывных систем .....	167
П2.2. Методы настройки ПИД-регуляторов с помощью Simulink .....	170
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.....	172
П3.1. Построение S-модели адаптивной системы управления с эталонной моделью для непрерывного объекта.....	172
П3.2. Построение S-модели идентификационной адаптивной системы управления для дискретного объекта.....	174
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	178

*All science is either physics or  
stamp collecting*

*Ernest Rutherford*

## ВВЕДЕНИЕ

“Feedback and its big brother, control theory, are such important concepts that it is odd that they usually find no formal place in the education of physicists”, – пишет в своей работе профессор университета Саймона Фразера (Simon Fraser University, Canada) Джон Беххофер<sup>1</sup>. На русском языке фраза кратко звучит примерно так: “Странно, что теория систем с обратной связью и её старшая сестра – теория управления не входят в обязательное образование физиков”. О необходимости применения кибернетических методов при проведении физических исследований говорит и профессор А.Л. Фрадков<sup>2</sup> (Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург). Почему же в современном мире физики должны изучать и применять теорию управления и, в частности, теорию систем с обратной связью?

Рассмотрим прежде всего пример, понятный не только физикам. Представьте себе, уважаемый читатель: Вы увидели грациознейшее создание природы – лошадь, причём не важно какой породы: арабской, орловской, клайдесдальской или любой другой. Вы захотели подробнее исследовать свойства находящегося перед Вами **объекта**. Как это сделать? Любой продвинутый юзер на Вашем месте немедленно открыл бы с помощью своего мобильного ресурса Internet, набрав ключевое слово «лошадь», вышел на сайт ЛОШАДИ.ru, познакомился бы с классификацией объектов исследования, узнав бы при этом, что лошадь по-другому именуют конём, самку лошади называют кобылой, самца называют жеребцом, а в определённых случаях – увы – мерином... Но Вы уже вышли из возраста юного компьютерщика, обладаете навыками экспериментатора. Вы подходите к лошади, гладите ее по холке, треплете гриву, ласково щелкаете по носу, увидев взмах хвостом, с удовлетворением убеждаетесь в справедливости одного из многочисленных законов природы, открытых знаменитой группой К.Пруtkова: «Щёлкни кобылу в нос – она махнёт хвостом». Наконец, набравшись смелости, Вы садитесь на лошадь верхом, берёте в руки повод – стоп!

Стоп, читатель. Перед нами качественно новая реальность! Всадник на коне – совсем не то, что исследователь около него, пусть и с ноутбуком

---

<sup>1</sup> Bechhoefer J. Feedback for physicists: A tutorial essay on control// Reviews of Modern Physics. 2005. V.77. P.783-836.

<sup>2</sup> Фрадков А.Л. О применении кибернетических методов в физике// Успехи физических наук. 2005. Т.175. № 2. С.113-138.

подмышкой. Конь для всадника – уже не объект изучения, а **объект управления**, повод в руке всадника – **управляющее устройство**, взгляд всадника – **датчик** направления движения, руки всадника реализуют **обратную связь**, заставляя объект управления двигаться в нужном всаднику направлении с заданной скоростью (можно сказать, по **алгоритму**, имеющемуся в голове всадника). Всё вместе называется **системой управления с обратной связью**. Согласитесь, что возможности системы с наличием обратной связи намного превосходят щёлканье по носу объекта изучения, хотя бы и с исследовательскими целями. Таким образом, система с обратной связью представляет собой новую сущность, достойную изучения.

В данном примере мы попутно познакомились с основными понятиями теории управления. Но откладывать книгу со словами: «А что, теорию управления я знаю!» – ещё рановато, поскольку рассмотренная нами система не является системой **автоматического** управления, так как в ней участвует человек.

Рассмотрим другой пример. Пусть вместо студента-исследователя мы имеем коллектив учёных, а в качестве объекта управления вместо лошади – вещество в виде достаточно горячей плазмы. Цель коллектива учёных – поддерживать плазму в таком состоянии, чтобы в ней непрерывно протекала реакция синтеза ядер, причём с заданной скоростью (управляемый термоядерный синтез). Коллектив учёных не может физически «оседлать» плазму. Задача коллектива теперь состоит в том, чтобы на основании глубоких знаний об объекте и с помощью применения теории управления создать (сконструировать) устройство, которое обеспечивало бы **устойчивое** управление термоядерной реакцией **автоматически**, т. е. без участия человека. Разумеется, что в реакторе должно присутствовать множество автономных автоматических **регуляторов**, но тем не менее весь термоядерный реактор можно рассматривать как пример современной системы автоматического управления с обратной связью, которую невозможно создать, не зная физики и теории управления одновременно.

Так что же такое «Теория автоматического управления»? В узком смысле – это теоретическое обоснование и разработка алгоритмов, на основании которых должно работать устройство управления. Действительно, устройство автоматического управления должно на основании входящих сигналов количественно обработать полученную **информацию** и выработать сигналы управления по определённому алгоритму или программе. Информационный сигнал не связан с физической природой объекта управления. Разрабатываемый алгоритм может предназначаться для управления объектами любой природы: социальными, финансово-экономическими, химическими, биологическими, физико-техническими. Поэтому систему управления рассматривают как абстрактную математическую модель, называемую **кибернетическим** блоком, а теорию автоматического управления – как один из разделов кибернетики наряду с теорией информации, системным анализом, теорией вычислительных машин, робототехникой и другими дисциплинами кибернетической науки.

Существует много учебников по теории управления, в которых излагается решение формализованных задач управления на основе строго доказываемых математических теорем. Однако для того чтобы сконструировать современную систему управления объектом, имеющим сложную физическую природу, нужно знать не только математическое обоснование того или иного алгоритма. Нужно хорошо понимать физические особенности управляемого процесса, уметь построить адекватную математическую модель, которую можно запрограммировать и с помощью компьютерного моделирования отладить с целью оптимизации алгоритма и его последующей аппаратной реализации. В настоящее время под аппаратной реализацией понимается разработка автономного цифрового устройства, осуществляющего процесс управления объектом с помощью высокотехнологичных исполнительных устройств.

Настоящее пособие написано в виде курса лекций. В лекциях приведены основы математического моделирования и рассмотрены формы представления математических моделей систем управления в пространстве состояний и в виде передаточных функций. Излагаются основные свойства систем управления с обратной связью и элементы теории устойчивости, необходимые для их анализа. Приведены алгоритмы построения оптимального управления в гамильтоновой формулировке для нескольких конкретных задач, рассмотрены современные адаптивные и робастные алгоритмы. Словом, в лекциях изложены основные традиционные методы теории управления, а также новые методы, которые применяются в современных системах управления. Для компьютерного моделирования и исследования свойств систем управления используется программный пакет MATLAB.

Несмотря на элементарность излагаемого материала, с точки зрения современной математической теории управления, предполагается, что читатель обладает сведениями по математическому анализу, линейной алгебре, теории функций комплексной переменной, вариационному исчислению, системному анализу в объеме, даваемом на физическом факультете университета.

Базовые знания, которые даются в лекциях, позволяют ориентироваться в современной теории систем управления с обратной связью и её применении в физических системах и технических устройствах. Более глубокие знания по тому или иному методу можно получить из литературы, перечисленной в библиографическом списке. В книге [7] имеется прекрасный перечень монографий и учебных пособий по современной теории управления на русском и английском языках (464 источника). Ссылки на оригинальные работы, монографии и сайты разработчиков, которые упоминаются по ходу изложения в данных лекциях, даются в постраничных сносках.

В первой лекции рассказ идёт, в основном, об истории развития техники автоматических регуляторов. Изложены принципы работы регуляторов прямого действия, простых аналоговых регуляторов по отклонению. Затем объясняется структура современных цифровых систем управления и, соответственно, намечаются требования к алгоритмам, на основании которых работают современные системы автоматического управления (САУ).

Лекции 2 – 5 посвящены проблемам построения математических моделей систем управления, что является в настоящее время очень важным при конструировании САУ. Рассматриваются основные формы представления математических моделей линейных стационарных систем: пространство состояний и сигнальные графы (лекция 3) и передаточные функции и структурные схемы (лекция 4), и способы перехода от одной формы к другой. В лекции 5 описаны конкретные примеры построения математических моделей.

В лекциях 6 и 7 рассмотрены общие свойства систем управления с обратной связью, алгоритмы работы и методы настройки стандартных ПИД-регуляторов, широко применяемых в современных автоматических устройствах.

Лекции 8 и 9 посвящены изложению теории устойчивости. Приведены теоремы устойчивости Ляпунова, рассмотрены основные методы анализа и критерии устойчивости линейных стационарных систем.

В лекции 10 кратко описываются дискретные системы управления и их устойчивость.

В лекциях 11 – 13 изложены основы теории оптимального управления в современной формулировке. Дана классификация задач оптимального управления, рассмотрены необходимые условия оптимальности, принцип максимума Понтрягина и метод динамического программирования Беллмана.

В лекциях 14 и 15 излагаются основные принципы работы современных робастных и адаптивных систем управления. Исследуется робастность систем управления с обратной связью, описывается алгоритм скоростного градиента для непрерывных систем, приводится пример адаптивного алгоритма с эталонной моделью для объекта первого порядка с параметрической неопределённостью.

В заключительной 16-й лекции приводятся алгоритмы работы робастных и адаптивных регуляторов для дискретных систем. В качестве примера робастного алгоритма описывается известный градиентный метод. Рассмотрены новые быстрые алгоритмы для систем 1-го и 2-го порядков и адаптивное управление объектом первого порядка на основе быстрого алгоритма с идентификацией параметров методами линейной регрессии.

О применении программного пакета MATLAB для моделирования систем управления рассказывается в отдельных приложениях. В приложении 1 дан перечень основных функций пакета, применяемых при моделировании и исследовании свойств систем управления, приведён пример построения переходной характеристики системы и анализа качества работы регуляторов. В приложении 2 приведены возможности пакета Simulink для моделирования линейных систем, которые проиллюстрированы примером настройки коэффициентов ПИД-регулятора при известных параметрах объекта управления. В приложении 3 описываются компьютерные модели адаптивных систем управления.

В лекциях и приложениях имеются упражнения, выполнение которых способствует закреплению и более глубокому усвоению изученного материала.



*...мы вступили окончательно в эру  
автоматики.*

*Р.Беллман*

## ЛЕКЦИЯ 1. ОТ КЛЕПСИДРЫ ДО ТЕРМОДАТА

### *1.1. Структура систем автоматического управления*

Центральной составляющей системы автоматического управления является **объект управления**. Перечислим несколько примеров физических (в широком смысле этого слова) систем или процессов, которые могут рассматриваться в качестве объектов управления:

- температура воздуха в комнате;
- скорость транспортного средства;
- курс корабля;
- орбита искусственного спутника Земли;
- рука робота-манипулятора;
- качество аудио- или видеосигнала;
- скорость химической или ядерной реакции;
- диссоциация отдельных молекул;
- прибыль фирмы;
- количество народонаселения.

Второй необходимой составляющей при формулировке задачи управления является понятие **цели** управления. Объект может находиться в состоянии, которое по каким-либо причинам нас не удовлетворяет. Цель управления состоит в том, чтобы перевести объект в нужное состояние.



**Рис. 1.1.** Процесс управления

Суть процесса управления показана на рис. 1.1. Очевидно, что при отсутствии одной из составляющих (объекта или цели управления) постановка задачи управления бессмысленна. Очень часто приходится

учитывать условия протекания процесса управления: ограниченность управляющих воздействий, критерии качества, стоимость затрат на управление и т.п., которые являются дополнительными условиями.

**Упражнение 1.1.** Сформулируйте возможные цели управления для приведённых выше примеров объектов управления.

Итак, дадим следующее определение:

**Определение 1.1. Управление** – это целенаправленное воздействие на объект, приводящее к его переходу в нужное (заданное) состояние.

В процессе управления может участвовать человек. Например, поддерживать комфортную температуру воздуха в комнате можно с помощью периодического подбрасывания дров в камин. Мы имеем в данном случае **систему управления** со всеми составляющими: температура воздуха и обстановки в комнате (объект управления), камин (исполнительное устройство), обитатель помещения (задатчик необходимых условий, датчик состояния объекта и исполнитель задающих воздействий одновременно). Интересно, что дрова, наружную температуру, состояние дверных и оконных уплотнений и т.д. мы не вводим в состав системы управления – это всё **окружающая среда**, являющаяся, с одной стороны, поставщиком **энергии**, а с другой – оказывающая **возмущающие воздействия**. Однако в работе рассмотренной системы управления участвует человек, поэтому она не является автоматической.

**Определение 1.2. Система автоматического управления** – это система, процесс управления в которой (функционирование системы) осуществляется автоматически, т.е. без участия человека.

**Примечание.** Если в системе управления часть функций выполняется автоматически, а часть функций – человеком (оператором), то такую систему принято называть **автоматизированной системой** [8].

Приведённые выше примеры, определения и понятия достаточно ясно указывают, что система автоматического управления (САУ) должна иметь структуру, изображённую на рис. 1.2. Работает эта САУ следующим образом. Физический сигнал о состоянии объекта по каналу **обратной связи** поступает на **измерительное устройство** (ИЗУ), которое выдаёт информационный сигнал на устройство сравнения с входным значением (заданный уровень сигнала, задатчик, уставка, – это синонимы для определения нужного значения выхода системы). Сигнал рассогласования  $E$  (*Error*) поступает в **устройство управления** (УУ), которое по заложенному в нём **алгоритму** обрабатывает информацию и вырабатывает **сигнал управления  $u$** , который поступает на вход исполнительного устройства (ИсУ). Исполнительное устройство воспринимает маломощный сигнал управления и вырабатывает **управляющее воздействие  $U$** , открывая

определённым образом каналы передачи энергии (электрическая энергия, топливо, сжатый воздух и т.п.) от окружения к объекту. Суть функционирования системы, таким образом, состоит в том, что необходимое воздействие на объект, переводящее его в заданное состояние (указывается на входе системы), определяется автоматически на основании обработки устройством управления результатов измерения выходных сигналов объекта.



**Рис. 1.2.** Структура системы автоматического управления:  
 $E$  – сигнал рассогласования (расстройка или невязка);  
 $u$  – сигнал управления;  
 $U$  – управляющее (энергетическое) воздействие

Отдельные элементы системы, изображенной на рис. 1.2, могут отсутствовать или объединяться, но принципиальным для схемы САУ является наличие обратной связи.

**Определение 1.3.** Системы автоматического управления с обратной связью называются **замкнутыми системами**, а системы без обратной связи – **разомкнутыми**.

Разомкнутые системы применяются, в основном, в тех случаях, когда выходные сигналы трудно измеримы или вообще отсутствуют. В этом случае сигналы управления заранее программируются в УУ, а в ходе работы системы передаются исполнительному устройству. Управление в разомкнутых системах принято называть программным или П-управлением, в отличие от синтеза управления в системах с обратной связью (С-управление).

**Упражнение 1.2.** Изобразите структуру разомкнутой системы управления. Приведите примеры замкнутых и разомкнутых САУ.

В завершение краткой классификации систем автоматического управления приведём три пока нестрогих определения. Управляющее устройство работает по алгоритму, содержащему параметры, настроенные на некоторое определённое внешнее воздействие. *Если алгоритм с заданными параметрами достигает цели управления при изменяющихся внешних воздействиях, он называется **робастным** (или грубым) алгоритмом, а диапазон изменения внешних воздействий, в котором алгоритм остаётся работоспособным, – **областью робастности**.* Если в алгоритме заложена корректировка параметров для наиболее точного управления в условиях изменения внешних воздействий, то он называется **адаптивным**. Наконец, если внешние воздействия изначально неизвестны, а алгоритм настраивается на достижение цели управления в ходе своей работы, он называется **самонастраивающимся**.

## 1.2. Регуляторы прямого действия

Подводя черту под очередным этапом технического развития человечества, в середине прошлого века американский ученый Ричард Беллман писал: «Следует признать тот факт, что мы вступили окончательно в эру автоматизации»<sup>3</sup>. Эта фраза подчёркивает, что существование цивилизованного общества сейчас немыслимо без использования автоматических устройств. Однако идея автоматического регулирования и первые регуляторы появились гораздо раньше. Рассмотрим на нескольких примерах историю развития техники автоматического регулирования.

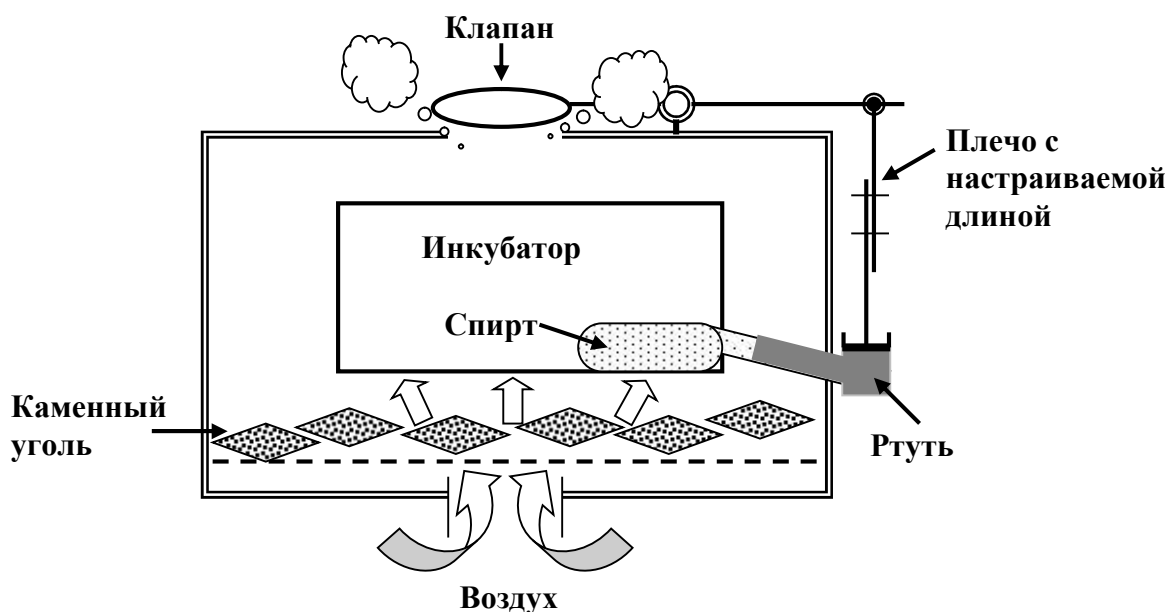
Одним из самых ранних автоматических устройств обычно упоминается регулятор для водяных часов (клепсидры), появившийся более 2 тысяч лет назад в Древнем Египте. Задача регулятора (цель управления) состоит в том, чтобы поддерживать постоянным уровень воды в баке (объект управления) для сохранения скорости вытекания струи из сливного отверстия. Для решения задачи был применён поплавковый клапан: в бак помещался поплавок с прикреплённым к нему дозирующим органом, например, иглой. При повышении уровня жидкости в баке поплавок

<sup>3</sup> Беллман Р. Процессы регулирования с адаптацией. М.: Наука, 1964. 360 с.

перемещается, а при достижении заданного уровня игла перекрывает входное отверстие, через которое жидкость подаётся из внешнего резервуара. Таким образом, система будет работать полностью в автоматическом режиме, пока не исчерпается вода в резервуаре (энергетические ресурсы внешней среды). Очевидно, что поплавковые регуляторы успешно применяются до сих пор в бытовых и технических устройствах, например, в карбюраторах двигателей внутреннего сгорания.

Далее сравним структуру рассмотренной системы автоматического управления со схемой рис. 1.2. Объект управления и цель управления мы уже указали. (Отметим, что речь идёт только о поплавковом регуляторе как устройстве, поддерживающем уровень жидкости; если говорить о водяных часах, то их цель – правильное измерение времени, а цель работы карбюратора – точная дозировка топливо-воздушной смеси, но, согласитесь, это уже проблемы не поплавкового регулятора, а более широких и сложных систем, частью которых он является). Поплавок в данном случае определяет уровень жидкости, а следовательно, является измерительным устройством. Если дозирующее устройство (в данном случае – игла), которое является исполнительным устройством, совмещено с измерительным, то устройство управления в этом случае становится не нужным. Регуляторы такого типа называются **регуляторами прямого действия**.

Другим интересным примером регулятора прямого действия является печь с автоматической регулировкой температуры, изобретённая голландским мастером Корнелиусом Дреббелем в 1620 г. Устройство печи изображено на рис. 1.3.



**Рис. 1.3.** Печь с автоматической регулировкой температуры (К. Дреббель, 1620 г.)

Объектом управления здесь является внутренний отсек печи (инкубатор), температуру в котором нужно поддерживать на заданном уровне, это – цель управления. Источником энергии служит горящий каменный уголь. Интенсивность горения обеспечивается степенью открытия демпфирующего клапана, перекрывающего вытяжное отверстие в верхней части печи: при полностью закрытом клапане горение прекращается, при полностью открытом – происходит самое интенсивное горение и обеспечивается максимально возможная температура в инкубаторе. Для автоматического регулирования положения клапана создана цепь обратной связи: в инкубатор помещается сосуд со спиртом, который расширяется или сжимается в зависимости от температуры в инкубаторе; спирт через трубку действует на ртуть в сосуде, ртуть выталкивает находящийся в ней поплавок, поплавок через систему рычагов с регулируемой длиной плеча действует на клапан.

**Упражнение 1.3.** Изобразите схематически структуру печи К.Дреббеля и укажите её основные элементы в конструкции печи. Поясните, как происходит изменение температурной уставки (требуемого значения температуры в инкубаторе).

Современные исследования печи К.Дреббеля показали, что с её помощью температура поддерживается с точностью до  $0,6^{\circ}\text{C}$ .

Другими классическими примерами регуляторов прямого действия являются центробежные регуляторы И.Ползунова (1766г.) и Дж.Уатта (1784г.), управляющие частотой вращения валов паровых двигателей. С их конструкцией читатель знаком из курса общей физики.

Рассмотренные примеры показывают, что в регуляторах прямого действия, являющихся исторически первыми автоматическими устройствами, требуемое значение выходного сигнала задаётся настройкой механических элементов в цепи обратной связи. Устройство управления в этих регуляторах отсутствует, можно сказать, что его роль выполнили инженерная мысль и творческая смекалка конструктора на стадии проектирования систем управления.

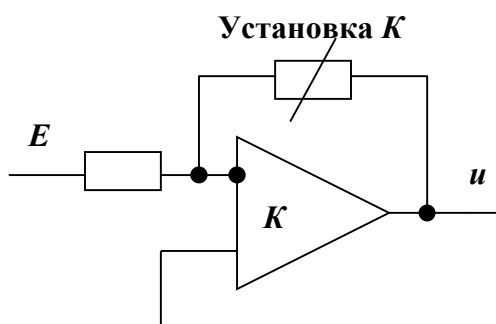
Появление в жизни человеческого общества электрической энергии совершило техническую революцию во многих областях, в том числе в разработке и сфере применения автоматических регуляторов.

### ***1.3. Регуляторы по отклонению***

Электрический сигнал является универсальным. Его легко измерить, преобразовать и подать на вход исполнительного устройства. Рассмотрим устройство и принципы работы **аналоговых** регуляторов, предшественников современных цифровых систем управления. В качестве измерительного устройства в таких регуляторах служит датчик, преобразующий любую физическую величину (температуру, давление, частоту вращения, расход

жидкости или газа и т.д.) в электрический сигнал<sup>4</sup>. Выходной сигнал измерительного устройства поступает на инверсный вход устройства сравнения, на положительный вход которого подаётся требуемое значение электрического сигнала (уставка). Величина уставки задаётся, например, изменением положения ручки потенциометра. Чтобы правильно определить эту величину, необходимо знать коэффициент преобразования измерительного устройства (в более общем случае, когда выходной сигнал датчика нелинейно зависит от измеряемой физической величины, необходимо знать номинальную статическую характеристику (НСХ) этого датчика).

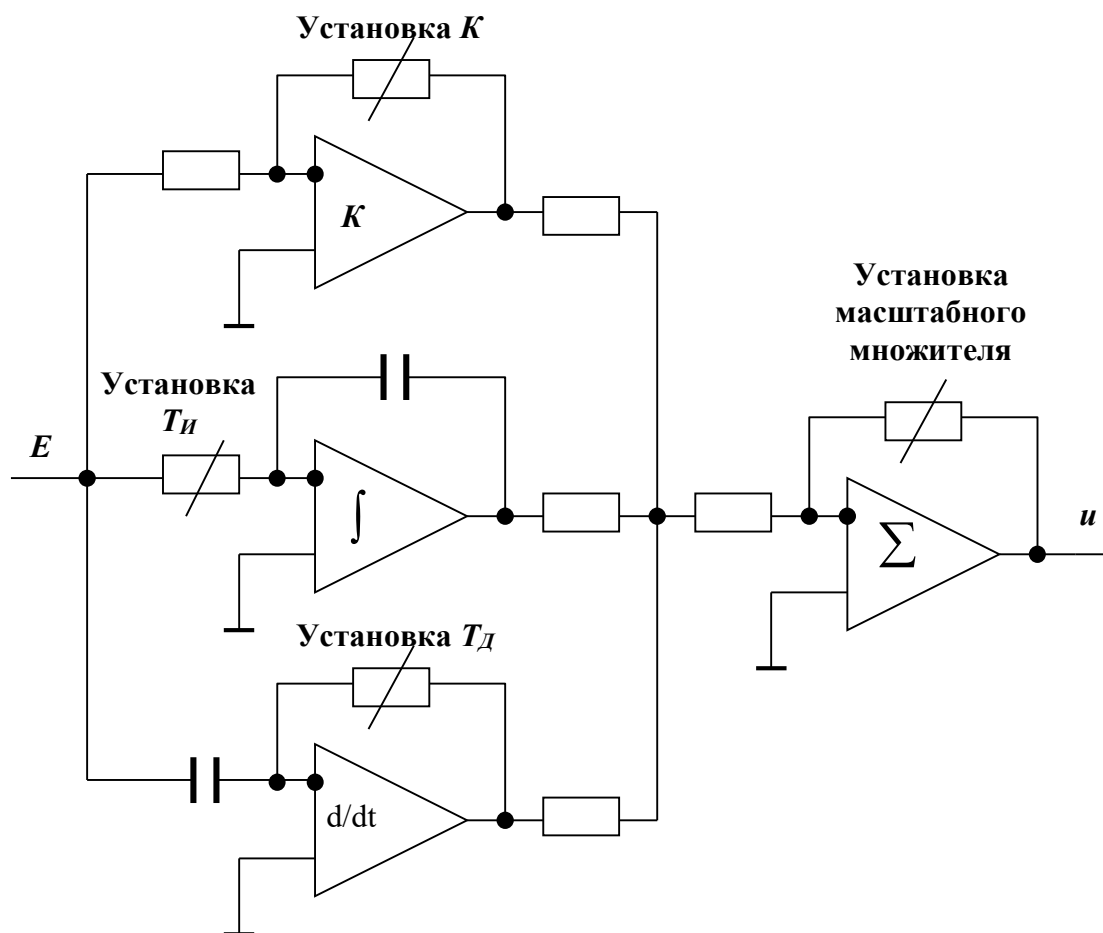
Сигнал рассогласования  $E$  (отклонение измеренного сигнала от требуемого значения) подаётся в устройство управления на обработку. На рис.1.4 приведена схема аналогового устройства управления, в котором происходит усиление сигнала  $E$  в  $K$  раз. Сигнал управления  $u$ , поступающий на вход исполнительного устройства, в этом случае оказывается пропорциональным отклонению выходного сигнала системы от требуемого значения, поэтому регуляторы с таким устройством управления называют **пропорциональными** или **П-регуляторами** (не путать с П-управлением!). Установка требуемого значения коэффициента  $K$  осуществляется подстроечным элементом – переменным резистором.



**Рис. 1.4.** Схема устройства управления аналогового П-регулятора

Для повышения точности регулирования в устройство управления дополнительно к усилителю включают цепь интегрирования и/или дифференцирования. Такие регуляторы сокращённо называют **ПИД-регуляторы**. Схема устройства управления аналогового ПИД-регулятора с усиливающим, интегрирующим и дифференцирующим звеньями приведена на рис. 1.5. Такой регулятор имеет три настроечных параметра: коэффициент  $K$ , время интегрирования  $T_I$  и время дифференцирования  $T_D$ . Параметры можно изменять с помощью подстроечных элементов, указанных на рис. 1.5.

<sup>4</sup> Левшина Е.С., Новицкий П.В. Электрические измерения физических величин. Измерительные преобразователи. Л.:Энергоатмиздат, 1983. 320 с.



**Рис. 1.5.** Схема устройства управления аналогового ПИД-регулятора

ПИД-регуляторы называются в настоящее время **стандартными регуляторами по отклонению**. Их настройка заключается в подборе трёх параметров и вводе их значений в управляющее устройство с помощью изменения номиналов подстроечных элементов соответствующих звеньев. Более 60 лет назад Зиглер и Никольс предложили методику настройки ПИД-регуляторов по экспериментальным данным, которая используется до сих пор. В настоящее время существует множество методов настройки стандартных регуляторов, в том числе с использованием компьютерного моделирования. Мы рассмотрим некоторые из них в последующих лекциях.

Отметим, что приемлемое качество регулирования достигается не при каких-то конкретных значениях настроечных коэффициентов, а в широком диапазоне их значений, поэтому ПИД-регулятор представляет собой пример универсального робастного регулятора, используемого в системах управления с обратной связью, что объясняет большую их популярность в технике.



#### **1.4. Современные цифровые системы автоматического управления**

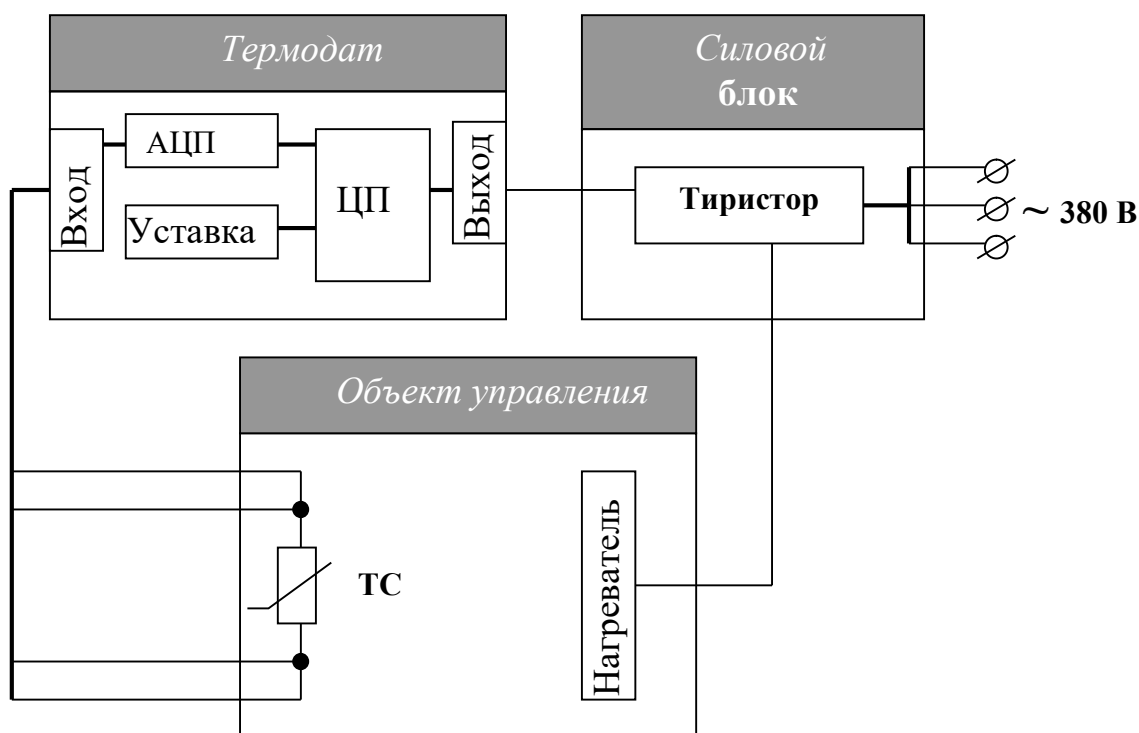
Современные системы управления содержат микроконтроллеры, в которые записывается алгоритм работы устройства управления. Рассмотрим состав современных цифровых САУ на примере системы автоматического управления температурой промышленных объектов с использованием прибора «Термодат», выпускаемого приборостроительным предприятием «Системы контроля» (г.Пермь)<sup>5</sup>. Функциональная схема такой системы приведена на рис. 1.6. В простейшем случае цель работы системы состоит в поддержании температуры объекта на заданном уровне (выше температуры окружающей среды). В качестве объекта могут выступать отдельное помещение, оборудованное электрическим обогревателем, муфельная печь, химический реактор с электроподогревом и т.д.

В рассматриваемом примере температура объекта измеряется с помощью термометра сопротивления (ТС), изготовленного на основе платинового или медного резистивного элемента, электрическое сопротивление которого изменяется в зависимости от температуры известным образом. Эта зависимость называется нормированной статической характеристикой (НСХ) первичного преобразователя. ТС подключается к входу электронного цифрового регулятора «Термодат», значение сопротивления преобразуется в электрическое напряжение и через аналого-цифровой преобразователь подаётся на вход центрального процессора (ЦП). В одноканальном регуляторе «Термодат-10» в качестве АЦП используется дельта-сигма преобразователь, а в качестве ЦП – микроконтроллер PH8951RC “Philips”, с характеристиками: 8 разрядов, программируемая память 32 kb, рабочая тактовая частота 11МГц.

В память процессора в табличном виде вводится НСХ первичного преобразователя, с которым будет работать данный прибор. Перед пуском системы управления на конкретном объекте оператор с помощью кнопок на панели вносит в память прибора требуемое значение температуры (уставки), и регулятор готов к работе. Возможностей процессора достаточно как для осуществления работы прибора по программе ПИД-регулятора с коэффициентами, устанавливаемыми вручную оператором, так и для выполнения сложных алгоритмов с функцией самонастройки.

---

<sup>5</sup> <http://www.termodat.ru>



**Рис. 1.6.** Система автоматического управления температурой с использованием цифрового регулятора «Термодат».

АЦП – аналого-цифровой преобразователь; ЦП – центральный процессор; ТС – термометр сопротивления

После обработки результатов измерений процессор на основе заложенного в нём алгоритма выдаёт сигналы управления на транзисторный выходной ключ по закону широтно-импульсного модулирования (ШИМ). Транзисторный ключ, в свою очередь, управляет внешним силовым тиристорным блоком, коммутирующим цепи питания однофазного или трёхфазного тока на полезную нагрузку – нагревательный элемент, расположенный на объекте.

**Упражнение 1.4.** Укажите основные элементы структуры системы автоматического управления температурой с регулятором «Термодат».

Как видим, современные системы автоматического управления содержат все элементы, указанные на схеме рис. 1.2. Отличительной особенностью систем с цифровым устройством управления является то, что микроконтроллер требует определённого времени на обработку сигнала, следовательно, в течение промежутка времени, пока идёт обработка, выходной сигнал не изменяется, а затем изменяется скачком до нового значения. Поэтому цифровое устройство управления называют **дискретным**, промежуток времени между последовательными выдачами сигналов управления – **шагом** или **периодом дискретизации**, а систему управления с

цифровым устройством также называют дискретной. Однако при этом нужно различать два случая: дискретное управление непрерывными объектами (рассмотренный выше пример) и управление дискретными объектами (пример дискретного объекта – шаговый двигатель).

Минимальный период дискретизации устройства управления определяется быстродействием процессора и сложностью заложенной в нём программы. Некоторые современные алгоритмы управления требуют специального подбора периода дискретизации, который, разумеется, не меньше минимального периода, а кратен ему. Минимальный период дискретизации не должен превышать естественных характерных времён протекания процессов в объекте управления. Отсюда вытекают требования к быстродействию микроконтроллеров, применяемых для регулирования. Собственные времена изменения температуры массивных тел составляют десятки секунд, а иногда достигают нескольких часов (например, в системах отопления зданий). Дискретность микропроцессорных регуляторов при этом незаметна, они работают как непрерывные. Если контроллер управляет, например, двигателем автомобиля, то тактовая частота процессора не должна быть меньше частоты вращения вала двигателя:  $3000 \dots 6000$  оборотов/мин =  $50 \dots 100$  Гц. Обработка и управление звуковыми сигналами в акустическом диапазоне требуют частот в десятки тысяч Гц, частота видеосигналов составляет сотни мегагерц, что предъявляет соответствующие требования к микроконтроллерам.

Сложность объектов управления и алгоритмов, используемых в современных системах автоматического управления, делают необходимым этап компьютерного моделирования при конструировании систем управления. Это моделирование должно быть весьма разносторонним: моделирование динамических процессов в объекте управления (разработка математической модели объекта), моделирование и отладка алгоритмов управления, эмуляция микропроцессора в компьютере, наконец, генерация машинного кода для прошивки микропроцессоров. Для выполнения указанных целей в настоящее время имеется много программных продуктов.

Для моделирования процессов управления очень хорошо подходит программный пакет **MATLAB** (MATrix LABoratory)<sup>6</sup>, разработанный фирмой “The Math Works, Inc.”, ставший фактически международным стандартом учебного программного обеспечения, в том числе в области теории управления. Стоит заметить, что свежие версии этого продукта далеко превосходят рамки обычного учебного программного обеспечения, позволяют работать с измерительными и управляющими устройствами через компьютерные порты и генерировать код для цифровых сигнальных процессоров (digital signal processor – DSP). В данном курсе лекций для учебных целей используется студенческая версия MATLAB. Основные сведения, необходимые для применения пакета MATLAB для исследования систем автоматического управления, приведены в приложениях.

---

<sup>6</sup> <http://matlab.exponenta.ru>

В некоторых российских вузах для преподавания курса "Теория систем автоматического регулирования" используется программный пакет **VisSim**<sup>7</sup>, разработанный фирмой Visual Solusions. Этот пакет имеет мощный интерфейс для визуализации моделируемых процессов, широкий набор инструментов для оценки качества, устойчивости, синтеза, коррекции, оптимизации, линеаризации, отладки систем в контуре моделирования и для программирования цифровых сигнальных процессоров.

Для решения серьёзных инженерных задач по моделированию динамических процессов в различных объектах (теплообмен, электромагнетизм, линейная и нелинейная прочность, гидрогазодинамика) предназначена система конечно-элементных расчётов **ANSYS**<sup>8</sup>, разработанная фирмой ANSYS, Inc. Систему можно использовать при моделировании сложных систем управления соответствующими процессами.

Фирма National Instruments разработала специальную платформу, позволяющую объединять и настраивать различные измерительные приборы, автоматизировать рутинные операции, основой платформы является среда графического программирования **LabVIEW**<sup>9</sup>. Программирование на LabVIEW сводится к настройке лицевой панели и блок-схемы виртуального прибора, функциональность и внешний вид которого определяются пользователем. При помощи LabVIEW можно вести измерения, анализировать сигналы и управлять исполнительными механизмами в режиме реального времени.

Перечисленные примеры обеспечивают понимание того, что системы автоматического управления находят широчайшее применение, теория автоматического управления непрерывно развивается, с одной стороны, вслед за развитием современных технологий, с другой стороны, помогает их непрерывному совершенствованию. Освоение знаний в области теории автоматического управления и разработка новых передовых технологий и алгоритмов управления очень актуальны и имеют большую перспективу.

---

<sup>7</sup> <http://vissim.nm.ru>

<sup>8</sup> <http://www.ansys.msk.ru>

<sup>9</sup> <http://www.labview.ru>

*Подобно тому, как дар слова обогащает нас мнениями других, так язык математических знаков служит средством еще более совершенным, более точным и ясным, чтобы один передавал другому понятия, которые он приобрел, истину, которую он постигнул, и зависимость между всеми частями, которую он открыл.*

*Н.И. Лобачевский*

## **ЛЕКЦИЯ 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ**

### **2.1. Общие свойства математических моделей**

Для того чтобы разработать и отладить алгоритм управления, в настоящее время нет необходимости в проведении длительных и дорогостоящих экспериментов. На помощь приходит **математическое моделирование**, которое оформилось в самостоятельную научную дисциплину в связи с широким применением компьютеров. Что такое математическая модель? Приведём общее определение:

**Определение 2.1.** Математическая модель – это совокупность математических объектов и отношений между ними, которые отображают объекты и отношения некоторой области реального мира (предметной области).

Описав с помощью математических терминов поведение объекта управления, составных частей измерительного и исполнительного устройств и добавив в схему численный алгоритм, мы получим математическую модель (ММ) системы управления. Создав адекватную математическую модель, конструктор получает в руки универсальный, гибкий и недорогой инструмент, с помощью которого можно проводить все необходимые «опыты»<sup>10</sup>.

Отметим, что при разработке системы управления на этапе построения её математической модели нет необходимости учитывать все тонкие детали строения объекта, т.к. основным критерием правильности модели в данном случае является достижение цели регулирования реальной системой, поэтому модель объекта может быть приближённой. Поясним эту мысль более подробно.

Математическое моделирование тесно связано с прикладной математикой и с общей теорией систем, но не совпадает с ними, поскольку теория систем, как и другие разделы математики, имеет дело лишь с математическими объектами. Предмет математического моделирования шире

---

<sup>10</sup> Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 320 с.

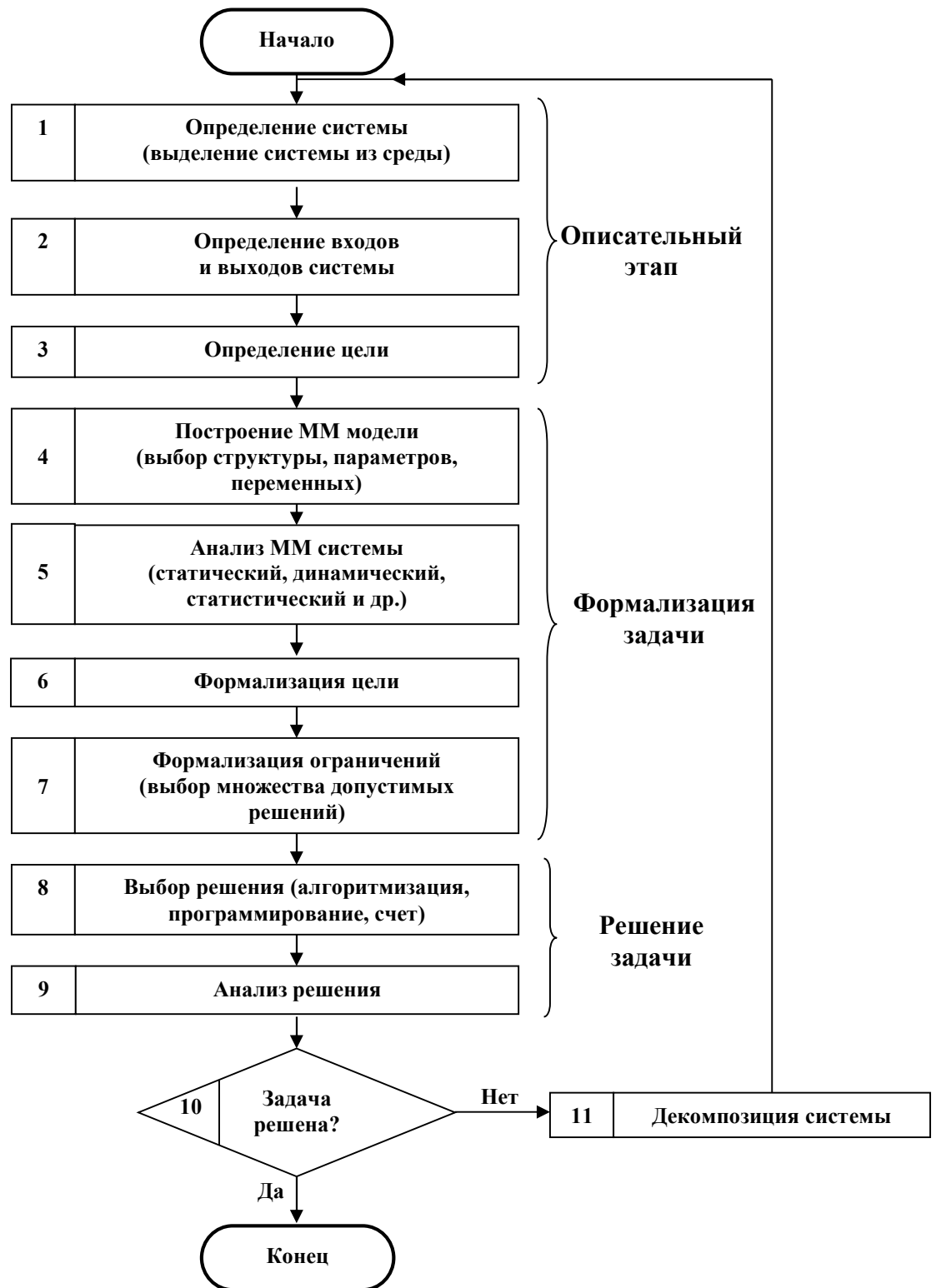


Рис. 2.1. Методика математического моделирования

## *Математическая формулировка задач управления*

и включает, кроме исследования математических объектов, формализацию постановки практической задачи и интерпретацию полученных практических результатов. Иными словами, началом и концом процесса математического моделирования является окружающая действительность. Это особенно справедливо по отношению к моделированию систем управления.

Последовательность действий при постановке задач математического моделирования (методика математического моделирования) приведена на рис.2.1. Сначала мы должны чётко определить состав системы, определить, что подаётся на вход (входы) объекта и что получится на выходе (выходах), установить цель работы системы. Всё это осуществляется пока в описательных терминах (словами). Следующий этап является самым важным: мы должны определить каким законам или, может быть, частным соотношениям подчиняется объект и другие элементы системы управления и записать их в виде математических (формальных) зависимостей между некоторыми числовыми величинами. Числовые величины, связанные с системой, делятся на переменные и параметры.

**Определение 2.2. Параметры** – это величины, которые можно считать постоянными в промежутке времени рассмотрения системы. Остальные числовые величины являются **переменными**.

Значения переменных и параметров определяют количественную информацию о системе. Оставшаяся информация, качественная, определяет структуру системы. Выбор параметров определяется видом законов (универсальных зависимостей), которые применяются для описания системы. Итак, на данном этапе, собственно, и строится математическая модель: определяется структура системы и, соответственно, выбираются параметры и переменные, описывающие состояние объекта. Возможно, что полученная модель окажется слишком сложной для дальнейшей работы с ней. Тогда сложную задачу нужно разбить на несколько более простых подзадач или, как говорят, провести **декомпозицию**.

Далее мы должны формализовать цель работы системы, учесть существующие ограничения и также формализовать их. Получив математическую формулировку задачи, мы должны эту задачу решить. Решение может быть получено аналитически или с помощью компьютерного моделирования. Итогом решения является алгоритм работы системы. Но это не окончание процесса моделирования! Наличие математического решения не означает, что реальная система будет работать так, как предполагал разработчик. Задача моделирования системы управления будет полностью решённой, если предложенный алгоритм заработает практически, в противном случае нужно вернуться к началу, проанализировать ошибки и исправить их (см. рис.2.1).

Практика применения методов построения математических моделей к реальным объектам дала возможность выработать несколько простых

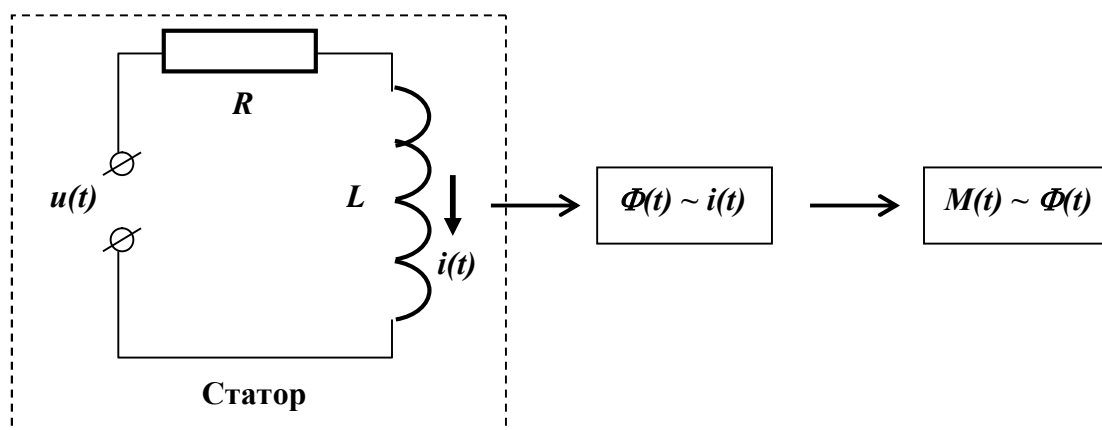
полезных советов, которые можно назвать «заповедями» математического моделирования [3]. Приведём их.

1. Не решай сложную задачу, не решив простую (принцип простоты).
2. Без ошибки нет модели, а потому негрубые модели – плохие (принцип А. А. Андропова).
3. Можно пренебрегать чем угодно, нужно только точно знать, как это повлияет на результат (принцип Э. Хемингуэя).
4. Чем проще модель, тем реже она обманет (принцип надежности).
5. Точность результатов не может быть выше точности исходных данных; точности результатов промежуточных вычислений должны быть согласованы (принцип А. Н. Крылова).
6. Цель расчетов – не числа, а понимание. Прежде чем решать задачу, подумай, что делать с ее решением (законы Р. Хемминга).

**Упражнение 2.1.** Попробуйте построить математическую модель печи К.Дреббеля.

## 2.2. Математическая формулировка задач управления поворотом вала электродвигателя

Рассмотрим задачу управления поворотом вала электродвигателя постоянного тока, управляемого по цепи возбуждения (статора) при постоянном токе в обмотке подвижного сердечника (якоря). К валу двигателя прикреплена полезная нагрузка, например, плечо руки робота. Вал вместе с нагрузкой нужно повернуть на определённый угол. Стоит заметить, что двигатели постоянного тока обладают такими качествами, как возможность регулирования скорости вращения в широком диапазоне, высокий вращающий момент, компактность, хорошие нагрузочные характеристики, поэтому они широко применяются в роботах-манипуляторах, лентопротяжных механизмах, дисковых, в машиностроении и исполнительных устройствах следящих систем.



**Рис. 2.2.** Простейшая модель электродвигателя, управляемого по цепи статора



## Математическая формулировка задач управления

Вернёмся к построению математической модели (схема рис. 2.1). Объект управления – электродвигатель, запитываемый от цепи постоянного тока. К валу двигателя прикреплена нагрузка. Вход объекта – приложенное напряжение, выход – угол поворота вала. Цель управления – удобно сформулировать после составления математической модели объекта. Переходим к этапу построения математической модели объекта, затем выберем цель и только потом составим ММ системы управления в целом.

В простейшем случае статор можно представить в виде электрической цепи, содержащей сопротивление  $R$  (активное сопротивление обмотки) и индуктивность  $L$ , межвитковыми ёмкостями пренебрегаем. Протекающий по обмотке статора ток  $i$  создаёт в зазоре двигателя магнитный поток  $\Phi$ , который взаимодействует с постоянным током якоря и вызывает крутящий момент  $M$ , что приводит к вращению якоря и жёстко скрепленного с ним вала с нагрузкой. (рис. 2.2).

Будем считать, что магнитный поток  $\Phi$  прямо пропорционален току  $i$  в статоре, а механический момент  $M$ , в свою очередь, пропорционален магнитному потоку

$$\Phi(t) = k_1 i(t), \quad M(t) = k_2 \Phi(t) = k_1 k_2 i(t) \equiv Ki(t). \quad (2.1)$$

Пренебрегая трением и силой сопротивления окружающей среды, для угла поворота вала  $\varphi$  запишем уравнение движения

$$J\ddot{\varphi}(t) = M(t) = Ki(t), \quad (2.2)$$

где  $J$  – момент инерции вала с нагрузкой.

Ток в статоре подчиняется закону Кирхгофа

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = u(t). \quad (2.3)$$

Подставляя выражение (2.2) в (2.3), получим уравнение для  $\varphi$

$$LJ\ddot{\varphi}(t) + RJ\dot{\varphi}(t) = Ku(t), \quad (2.4)$$

которое и представляет собой математическую модель объекта. Параметрами объекта являются четыре константы:  $L$ ,  $R$ ,  $J$  и  $K$ . Переменная  $u(t)$  – вход объекта, переменная  $\varphi(t)$  – выход. Отметим, что состояние объекта описывается тремя величинами, поскольку уравнение движения имеет третий порядок. Таким образом, выходная переменная не описывает полное состояние объекта.

Для задания состояния объекта в качестве независимых **переменных состояния**  $\{x_1, x_2, x_3\}$  выберем три величины: угол поворота, угловую скорость и угловое ускорение, - соответственно:  $x_1 = \varphi$ ,  $x_2 = \dot{\varphi}$ ,  $x_3 = \ddot{\varphi}$ . Эти переменные называются **фазовыми переменными**. Выходную

переменную обозначим буквой  $y$ . Теперь уравнение (2.4) можно записать в виде системы трёх дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\frac{R}{L}x_3 + \frac{k}{LI}u.\end{aligned}\tag{2.5}$$

К системе (2.5) нужно добавить **уравнение выхода**

$$y = x_1.\tag{2.6}$$

Получили математическую модель в виде системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (линейная стационарная система). Форма представления математической модели в виде (2.5), которая получается, когда в качестве переменных состояния выбирают фазовые переменные, называется формой Коши. Существуют другие формы представления математических моделей для линейных систем, которые будут подробно рассмотрены в следующем разделе (лекция 3).

Заметим, что вектор состояния задаётся тремя переменными, а выход системы представляет собой одну величину, т.е. не совпадает с вектором состояния.

**Определение 2.3.** Если управление системой осуществляется с учётом полного вектора состояния, оно называется **управлением по состоянию**, в противном случае управление называется **управлением по выходу**.

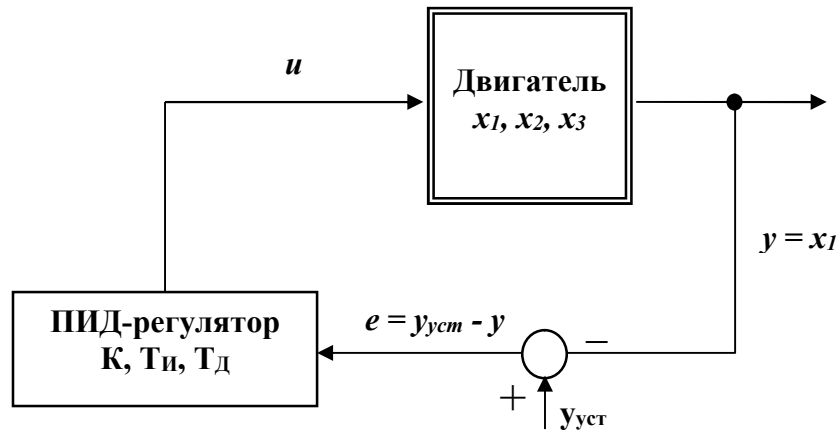
Для построения математической модели системы управления в целом необходимо выбрать и формализовать цель работы системы. Если мы можем измерить выходную величину  $y$  (в рассматриваемом случае должен иметься датчик угла поворота вала), то мы можем замкнуть объект обратной связью. Целью тогда может служить достижение определённого положения вала и удержание его в этом положении, что формально можно записать в виде

$$y \rightarrow y_{уст}, \quad 0 \leq t \leq \infty.\tag{2.7}$$

Значение  $y_{уст}$  должно быть подано на вход системы с обратной связью. В качестве устройства управления можно использовать стандартный ПИД-регулятор, математическая модель которого содержит три параметра:  $K$ ,  $T_i$ ,  $T_d$  (см. рис.1.5). Формулы, описывающие алгоритм работы ПИД-регулятора, будут рассмотрены в следующих лекциях, пока их конкретный вид не очень важен.

## Математическая формулировка задач управления

Итак, математическая модель системы автоматического управления поворотом вала электродвигателя готова (рис. 2.3). Модель можно очень просто запрограммировать в пакете Simulink среды MATLAB и с помощью компьютерного моделирования определить значения параметров ПИД-регулятора, при которых система имеет заданные динамические и точностные характеристики. Процесс оптимизации работы регуляторов в цепи обратной связи будет подробно рассмотрен в лекции 7. Остаётся ввести найденные параметры в реальный регулятор и убедиться в работоспособности реального двигателя, управляемого данным регулятором.



**Рис. 2.3.** Математическая модель системы управления электродвигателем с обратной связью

Если всё хорошо, процесс моделирования можно считать завершённым. В противном случае следует вернуться к процессу построения модели системы и понять, что не было учтено в модели объекта и составных частей системы, исправить модель и снова применить результаты моделирования к реальной системе. В нашем случае, например, не учтены времена срабатывания измерительного и исполнительного устройств. Если их промоделировать звеньями первого порядка, повысится порядок системы, т.е. изменится её структура.

Система управления электродвигателем может быть и разомкнутой, устройство управления в таком случае должно вырабатывать управление по заранее определённой зависимости  $u(t)$ . Целью по-прежнему остаётся поворот вала двигателя в течение заданного промежутка времени  $0 \leq t \leq T$ , но при этом накладываются **условия оптимальности**. Например, если мы имеем производственный цех с большим количеством электродвигателей, многократно повторяющих операции поворотов, то весьма разумно потребовать, чтобы эти операции осуществлялись с **минимальными энергозатратами**. Формализуем это требование для нашей модели.

Энергия, подводимая к двигателю, затрачивается на рассеяние в активном сопротивлении  $E_R$  и накапливается в индуктивности  $E_L$

$$E(t) = E_R(t) + E_L(t). \quad (2.8)$$

Составные части полной энергии  $E$ , затраченной в течение времени работы системы, имеют вид

$$E_R = R \int_0^T i^2(t) dt, \quad E_L = L \int_0^T i(t) \frac{di}{dt} dt = L[i^2(T) - i^2(0)]. \quad (2.9)$$

Зависимость тока  $i$  от времени определяется видом зависимости  $u(t)$ , следовательно, полная энергия является функционалом от управляющего воздействия. Требование оптимальности заключается в минимизации этого функционала

$$J_O(u) = E_R + E_L \rightarrow \min, \quad (2.10)$$

который в данном случае называется **критерием качества**. Систему (2.5) нужно решить с учётом требования (2.10) и найденную в результате решения зависимость  $u(t)$  запрограммировать в устройство управления. Методы решения таких оптимальных задач без ограничений на управляющие воздействия будут рассмотрены в лекциях 11 и 12.

Наконец, учтём и формализуем ограничения, накладываемые на управляющее воздействие. Электрическое напряжение, подаваемое на двигатель, не может быть больше напряжения источника питания  $U$ . Поэтому первое естественное ограничение может быть записано в виде неравенства

$$0 \leq u(t) \leq U. \quad (2.11)$$

Далее, если электродвижущая сила, возникающая в обмотке при изменении тока, превысит напряжение пробоя  $U_{пр}$ , то двигатель выйдет из строя, что нежелательно. Поэтому нужно наложить следующее ограничение:

$$L \left| \frac{di}{dt} \right| \leq U_{пр}. \quad (2.12)$$

О решении задач оптимального управления при ограничениях на управляющие воздействия будет рассказано в лекции 13.

Итак, мы прошли все этапы схемы, приведённой на рис. 2.1, и приблизились к окончанию процесса математического моделирования. Анализируя последнюю задачу, мы можем отметить, что ограничение (2.12) математически гораздо сложнее ограничения (2.11). Может быть, его не стоит учитывать? Ответить на этот вопрос можно в ходе самого процесса моделирования: предварительно решить задачу без ограничения (2.12) и проверить (в модели), нарушается или нет это неравенство. Можно поступить ещё проще, вспомнив принцип простоты и принцип надёжности. Нужно решить задачу, положив  $L = 0$ , при этом понизится порядок системы, а условие (2.12) отомрёт само собой. Если алгоритм, найденный на основе упрощенной модели, окажется работоспособным, дальнейшие усложнения не понадобятся.

*Воеет ветер дальних странствий,  
Раздается жуткий свист  
Это вышел в Подпространство  
Структуральнейший лингвист.*

*А. и Б. Стругацкие*

### ЛЕКЦИЯ 3. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. ПРОСТРАНСТВО СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим более подробно формы представления математических моделей линейных стационарных систем. Таких форм представления (можно даже сказать – наглядного изображения) существует много. Мы рассмотрим две основные формы: форму в виде дифференциальных уравнений (пространство состояний) и алгебраическую форму (передаточные функции в комплексном пространстве).

#### 3.1. Математическая модель RLC-цепи

Начнём с примера. Пусть имеется простейшая RLC-цепь, изображенная на рис. 3.1 (колебательный контур). Построим её математическую модель. В первую очередь необходимо определить

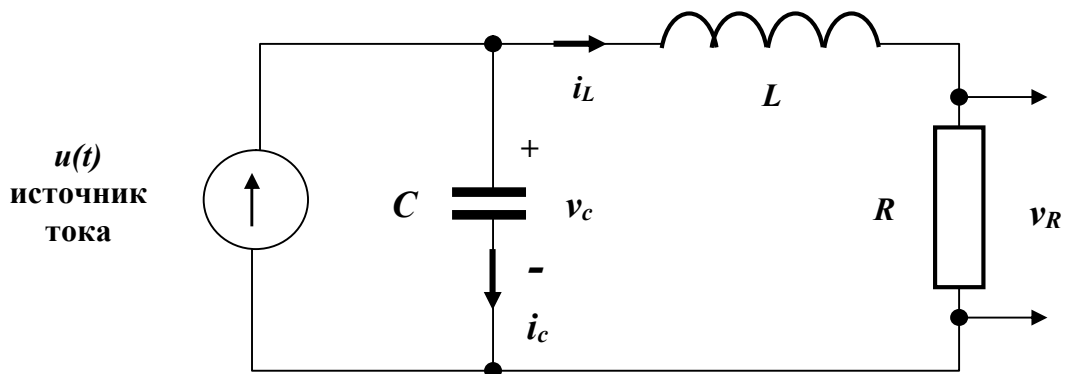


Рис. 3.1. RLC – цепь

переменные, описывающие состояние системы. Кроме того, необходимо определить какие переменные являются входными, а какие – выходными. Переменные состояния выберем из следующих соображений: поскольку энергия  $E$ , запасенная в RLC-цепи, выражается через напряжение на конденсаторе  $v_c(t)$  и через ток в индуктивности  $i_L(t)$ :  $E = (1/2)Li_L^2 + (1/2)Cv_c^2$ , то в качестве переменных состояния  $\{x_1, x_2\}$  выбираем эти величины:

$$x_1 = v_c(t), x_2 = i_L(t). \quad (3.1)$$

Входной переменной будем считать ток источника  $u(t)$ , в качестве выходной переменной рассмотрим напряжение на резисторе  $v_R$ . Используя закон Кирхгофа для токов, запишем дифференциальное уравнение первого порядка, определяющее скорость изменения напряжения на конденсаторе

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = u(t) - i_L. \quad (3.2)$$

Закон Кирхгофа для напряжений, примененный к правому контуру, дает уравнение, определяющее скорость изменения тока через индуктивность

$$L \frac{di_L}{dt} = -Ri_L + v_c. \quad (3.3)$$

Выход системы определяется линейным алгебраическим уравнением  $v_R = Ri_L(t)$ .

Уравнения (3.2) и (3.3) мы можем переписать в виде системы двух дифференциальных уравнений относительно переменных состояния  $x_1$  и  $x_2$

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тогда выходной сигнал будет равен

$$y(t) = v_R(t) = Rx_2. \quad (3.5)$$

Используя уравнения (3.4) и (3.5), а также начальные условия  $[x_1(t_0), x_2(t_0)]$ , мы сможем определить будущее поведение системы и выходную переменную. Итак, мы получили математическую модель RLC-цепи в виде линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Такие системы называются **линейными стационарными системами** (ЛСС). По-английски: Linear TimeInvariant (LTI) Systems.

### 3.2. Пространство состояний

Переменные состояния, описывающие систему, не являются единственными, всегда можно выбрать другую комбинацию переменных. Например, для системы второго порядка, такой как RLC-цепь, в качестве переменных состояния можно выбрать любые две линейно независимые комбинации  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Для RLC-цепи мы могли бы принять за переменные состояния два напряжения:  $v_c(t)$  и  $v_L(t)$ , где  $v_L$  — напряжение на индуктивности. Тогда новые переменные состояния,  $x_1^*$  и  $x_2^*$ , будут связаны со старыми переменными  $x_1$  и  $x_2$  соотношениями:

$$x_1^* = v_c = x_1, \quad (3.6)$$

$$x_2^* = v_L = v_c - Ri_L = x_1 - Rx_2. \quad (3.7)$$

**Упражнение 3.1.** Постройте математическую модель RLC-цепи в переменных  $\{x_1^*, x_2^*\}$ .

В реальной системе всегда можно образовать несколько наборов переменных состояния, которые адекватно описывают ее динамику. При составлении модели электродвигателя (2.5) мы выбирали в качестве переменных состояния выходную величину (угол поворота вала) и её производные (угловую скорость и угловое ускорение). При этом получили систему дифференциальных уравнений в форме Коши, которая часто используется при математическом исследовании поведения системы. Однако сейчас стоит заметить, что модель в форме Коши не всегда удобно использовать в системах управления с обратной связью по состоянию. В электродвигателе можно измерить тахометром угловую скорость вращения вала, но прибор для измерения углового ускорения является экзотикой. Зато легко измерить ток в обмотке статора, который и нужно использовать в качестве одной из переменных состояния. Так часто и поступают при проектировании систем управления: **на практике в качестве переменных состояния часто выбирают такие физические переменные, которые легко могут быть измерены.**

**Упражнение 3.2.** Постройте математическую модель электродвигателя (рис. 2.2) в переменных  $x_1 = \dot{\varphi}$ ,  $x_2 = i$ ,  $x_3 = \varphi$ .

Переменные состояния характеризуют динамику системы. Инженера в первую очередь интересуют физические системы, в которых переменными являются напряжения, токи, скорости, перемещения, давления, температуры и другие аналогичные физические величины. Однако понятие состояния применимо к анализу не только физических, но и биологических, социальных и экономических систем. Для этих систем понятие состояния не ограничивается рамками представлений об энергии и подходит к переменным состояния в более широком смысле, трактуя их как **переменные любой природы, описывающие будущее поведение системы.**

В общем случае состояние линейной динамической системы задаётся набором переменных состояния  $\{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ , а изменение переменных состояния описывается линейными дифференциальными уравнениями первого порядка. Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1m}u_m; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2m}u_m; \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nm}u_m,\end{aligned}\tag{3.8}$$

где  $\{u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}$  – компоненты вектора управляющих воздействий  $\bar{u}$  (входной сигнал). Здесь и далее буквами с чертой вверху будем обозначать

векторы вещественного пространства, что символически можно записать  $\bar{x} \in R_n$ , где  $n$  – размерность пространства.

В матричной форме уравнения (3.8) примут вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Введём обозначения для матриц и векторов

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}, \bar{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

Теперь систему (3.9) можно записать в компактном виде

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = A\bar{x} + B\bar{u}. \quad (3.10)$$

Матрица  $A$  является квадратной матрицей  $n \times n$ , она определяет **свободную динамику** объекта, т. е. его поведение при  $\bar{u} = 0$ , а матрица  $B$  имеет размерность  $n \times m$  и определяет вклад каждого из входов в динамику системы. В общем случае выходные сигналы  $\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)\}$  связаны с переменными состояния **уравнением выхода**

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{p1} & \dots & d_{pm} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}$$

или в компактной форме

$$\bar{y} = C\bar{x} + D\bar{u}. \quad (3.11)$$

В современной теории управления модель (3.10) – (3.11) называют моделью в **пространстве состояний (State space)**. В MATLAB эта модель называется **ABCD-моделью**. Для модели (3.4) – (3.5), например, матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  имеют вид



$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/C \\ 1/L & -R/L \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad R], \quad D = 0. \quad (3.12)$$

Если система управления имеет один вход ( $m = 1$ ) и один выход ( $p = 1$ ) – single-input-single-output – она называется SISO-системой. Если у системы несколько входов и несколько выходов – multiple-input-multiple-output – она называется MIMO-системой. Мы будем рассматривать, в основном, SISO-системы.

### 3.3. Сигнальные графы

Модель системы в переменных состояния можно представить графически в виде сигнального графа. **Сигнальный граф** для системы (3.4)-(3.5) имеет вид, приведенный на рис. 3.2.

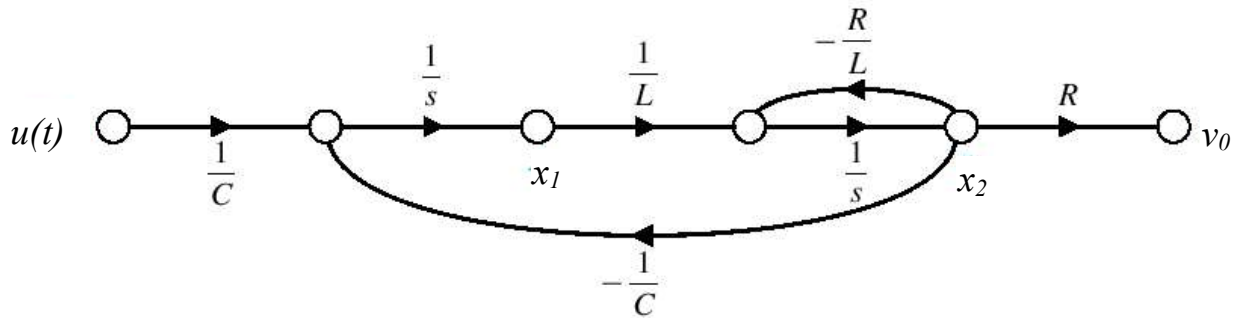


Рис. 3.2. Сигнальный граф для RLC-цепи

Сигнальный граф – это совокупность направленных отрезков (**ветвей**), начинающихся и оканчивающихся в **узлах** графа. На рис. 3.2 ветви изображены отрезками или дугами с нанесенными на них направлениями, а узлы – кружочками. Ветвь, входящая в узел, означает входящий сигнал, а выходящая ветвь – исходящий сигнал. При движении по ветви сигнал претерпевает изменения: умножается на константу, интегрируется или дифференцируется. Символ операции указывается около соответствующей ветви. Так, во второй слева узел на рис. 3.2 входит величина  $U$ , умноженная на  $1/C$ , и величина  $x_2$ , умноженная на  $-1/C$ ; оба сигнала складываются в узле и интегрируются на выходе из узла (символ интегрирования  $\frac{1}{s}$ ), в результате получаем величину  $x_1$ .

**Упражнение 3.3.** Изобразите сигнальный граф для RLC-цепи в переменных  $\{x_1^*, x_2^*\}$ .

Использование сигнальных графов является удобным наглядным методом записи системы алгебраических уравнений, который позволяет показывать взаимосвязь между переменными. Можно решить и обратную

задачу: зная взаимосвязь между переменными, изобразить модель системы в виде сигнального графа и на основании этой модели записать уравнения состояния. Это тривиально сделать для алгебраических уравнений. Для дифференциальных уравнений просто нужно иметь в виду, что на входе любого интегратора, который имеется в графе, всегда должна стоять производная величины, получающейся в результате операции интегрирования. Поэтому, анализируя, например, граф на рис.3.2, мы видим, что в узел перед первым интегратором приходит сумма  $\frac{1}{C}u(t) - \frac{1}{C}x_2$ , которую нужно приравнять производной  $\dot{x}_1$ , в результате получается первое уравнение системы (3.4). Анализируя узел перед вторым интегратором, получаем второе уравнение этой системы.

### 3.4. Управляемость и наблюдаемость систем

**Управляемость.** Говорят, что система, описываемая матрицами  $A$  и  $B$ , является **управляемой**, если существует такое неограниченное управление  $\bar{u}$ , которое может перевести систему из произвольного начального состояния  $\bar{x}(0)$  в любое другое заданное состояние  $\bar{x}(t)$ . Для системы с одним входом и одним выходом вводится понятие матрицы управляемости  $P_c$ , которая выражается как

$$P_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (3.13)$$

и имеет размерность  $n \times n$ . **Если определитель матрицы управляемости отличен от нуля, то система является управляемой.**

Ответить на вопрос, является ли система управляемой, можно и другим способом. Для этого надо изобразить граф системы в переменных состояния и определить, имеются ли пути от управляющего сигнала  $u$  к каждой из переменных состояния. Если такие пути существуют, то система **может быть управляемой**, т.е. этот признак не является достаточным.

**Наблюдаемость** системы связана со способностью оценивать переменные состояния по результатам измерения выходного сигнала. Говорят, что система является **наблюдаемой**, если каждая переменная состояния вносит свой вклад в выходной сигнал системы. Система является наблюдаемой тогда и только тогда, когда существует конечное время  $T$  такое, что начальное состояние  $\bar{x}(0)$  может быть определено в результате наблюдения выходной переменной  $y(t)$ ,  $t \in T$ , при заданном управлении  $u(t)$ . Здесь вводят понятие матрицы наблюдаемости размерности  $n \times n$ :

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

**Система наблюдаема, если определитель матрицы  $Q$  отличен от нуля.**

Функции MATLAB, которые применяются для исследования систем на управляемость и наблюдаемость, приведены в приложении 1.

**Упражнение 3.4.** Система описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + u;$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2 - u, \quad y = x_1 + x_2$$

Проведите анализ системы на управляемость и наблюдаемость с помощью построения сигнального графа и с помощью MATLAB. Прокомментируйте полученный результат.

*Есть только миг между прошлым и будущим*

*Л. Дербенев*

## ЛЕКЦИЯ 4. ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

### 4.1. Определение передаточных функций

По своему смыслу передаточная функция (ПФ) – это функция, связывающая один входной и один выходной сигналы СУ. Она является формой записи системы уравнений движения, решённой относительно требуемой выходной переменной. В подавляющем большинстве случаев ПФ записывается не для функций времени  $x(t)$ , а для их преобразований Лапласа  $X(s)$ , т.е. ПФ связывает в этом варианте не сигналы, а их изображения, поскольку эта связь алгебраическая, а не интегральная.

Найдем передаточную функцию для нашего примера RLC - цепи. Это можно сделать, подвергнув преобразованию Лапласа непосредственно систему (3.4)-(3.5), однако пояснения удобно вести, перейдя к одному дифференциальному уравнению второго порядка.

Обозначим  $x(t) = x_2(t)$  и продифференцируем второе уравнение в (3.4) по времени. Получим уравнение

$$\ddot{x} + \frac{R}{L} \dot{x} + \frac{1}{LC} x = \frac{1}{LC} u, \quad (4.1)$$

эквивалентное системе (3.4)-(3.5).

Сначала найдём решение **неоднородного** уравнения (4.1) при **однородных** начальных условиях  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$  (это важно для определения ПФ!) с помощью преобразования Лапласа:  $F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ .

Отметим, что величина  $s$  определена в комплексном пространстве (комплексная частота). В физике часто используется преобразование с вещественной частотой – преобразование Фурье. Однако в теории управления преобразование Лапласа имеет преимущество, поскольку в нём явно присутствуют начальные условия, поэтому здесь применяют преобразование с комплексной частотой.

Преобразования Лапласа от первой и второй производных  $f_1 = \dot{x}, f_2 = \ddot{x}$  соответственно равны:

$$\begin{aligned} F_1(s) &= \int_0^{\infty} \dot{x}(t)e^{-st} dt = sX(s) - x(0) \\ F_2(s) &= \int_0^{\infty} \ddot{x}(t)e^{-st} dt = s^2 X(s) - sx(0) - s\dot{x}(0) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Поэтому, подвергая (4.1) преобразованию Лапласа и учитывая однородность начальных условий, получим

$$(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC})X(s) = \frac{1}{LC}U(s). \quad (4.3)$$

Отметим, что уравнение

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad (4.4)$$

является характеристическим уравнением системы (3.4)-(3.5), а сам полином

$$q(s) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} \quad (4.5)$$

называется **характеристическим полиномом**, который играет важную роль в исследовании СУ с помощью передаточных функций.

Поскольку преобразование Лапласа выходного сигнала  $y(t)$  имеет вид  $Y(s) = R \cdot X(s)$ , то, умножив (4.3) на  $R$ , с учётом (4.5), получим

### Передаточные функции

$q(s)Y(s) = \frac{R}{LC}U(s)$ . Отсюда получаем связь между изображениями управляющего воздействия (входа)  $U(s)$  и наблюдаемой величиной (выходом)  $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{R/LC}{q(s)}U(s) \equiv G(s)U(s), \quad (4.6)$$

где

$$G(s) = \frac{R/LC}{q(s)} = \frac{R}{LCs^2 + RCs + 1}. \quad (4.7)$$

В соответствии с вышеизложенным  $G(s)$  и является передаточной функцией рассматриваемой системы.

**Определение 4.1.** Передаточная функция системы (**Transfer function**) – это отношение преобразования Лапласа выходной переменной к преобразованию Лапласа входной переменной при нулевых начальных условиях

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

Передаточная функция имеет размерность, которая определяется отношением размерности величины выхода к размерности входной величины. В рассмотренном примере  $[G] = \text{Ом}$ .

В общем случае  $G(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ , где в знаменателе находится характеристический полином степени  $n$  (**порядок системы**), а в числителе – полином  $p(s)$ , степени  $n-1$  или более низкой:

$$G(s) = \frac{p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_0}{s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_0}, \quad m \leq n-1. \quad (4.8)$$

**Определение 4.2.** Корни характеристического полинома  $q(s)$  называются **полюсами**, а корни полинома  $p(s)$  – **нулями** передаточной функции.

Чтобы найти полное решение уравнения (4.1), найдём решение однородного уравнения ( $u=0$ ) при ненулевых начальных условиях:  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$ . Учитывая (4.2), получаем

$$X(s) = \frac{m(s)}{q(s)}, \quad m(s) = (as + b)x_0 + a\dot{x}_0, \quad a = 1, b = \frac{R}{L}. \quad (4.9)$$

Полное решение запишется в виде суммы решений (4.6) и (4.9)

$$X(s) = \frac{m(s)}{q(s)} + \frac{p(s)}{q(s)}U(s). \quad (4.10)$$

#### 4.2. Переходные характеристики систем управления

Однородность начальных условий, требуемая при определении передаточной функции, означает физически, что система в момент времени  $t = 0$  находится в состоянии покоя (равновесия). В этот момент на вход системы подаётся какой-то сигнал. Этот сигнал может оставаться постоянным (ступенчатое входное воздействие) или переменным, например, импульсным или периодическим.

Если на систему оказать постоянное воздействие, то она перейдёт с течением времени в новое состояние покоя (релаксирует к новому состоянию). Если оказывается импульсное воздействие, система выходит из равновесия, а затем возвращается в исходное состояние. В любом случае переходной процесс будет представлять собой некоторую функцию времени.

Единичная ступенчатая функция описывается выражением

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Единичная импульсная функция (дельта-функция Дирака) описывается как

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}1(t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1. \quad (4.12)$$

Преобразования Лапласа этих функций имеют вид

$$1(s) = \frac{1}{s}, \quad (4.13)$$

$$\delta(s) = 1. \quad (4.14)$$

**Определение 4.3.** Реакция системы на ступенчатое воздействие называется **переходной функцией (переходной характеристикой)**. Реакция системы на импульсное воздействие называется **весовой функцией (характеристикой)**.

### Передаточные функции

На рис. 4.1 приведена для примера переходная характеристика для RLC-цепи при следующих значениях параметров:

$$\begin{aligned} R &= 20 \text{ Ом}, L = 10 \text{ Гн}, \\ C &= 40 \text{ мкФ}, \\ u(t) &= \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ 10 \text{ мА}, t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

**Рис. 4.1.** Переходная характеристика RLC-цепи

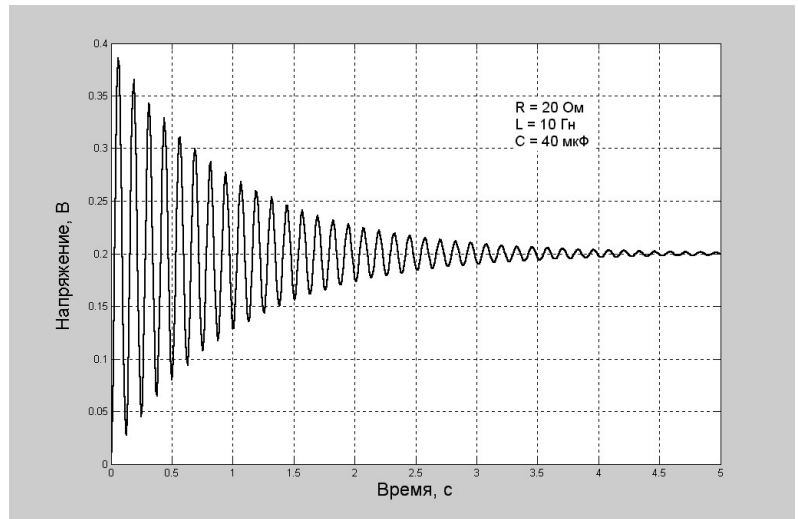


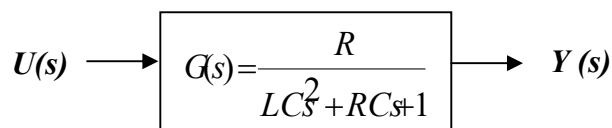
График построен с помощью применения функций MATLAB (см. приложение 1). Отметим, что выход системы в установившемся режиме  $y_{\infty} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  может быть найден с помощью преобразования Лапласа выходной переменной по известному правилу

$$y_{\infty} \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s). \quad (4.15)$$

**Упражнение 4.1.** Определите аналитически величину установившегося выходного сигнала RLC-цепи при указанных на рис. 4.1 значениях параметров. Прокомментируйте полученный результат.

### 4.3. Структурные схемы

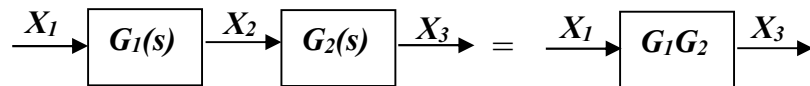
Зная передаточную функцию, мы можем изобразить причинно-следственную связь между переменными в наглядной схематической форме в виде **структурной схемы**. Структурные схемы состоят из блоков направленного действия, каждому из которых соответствует определённая передаточная функция.



**Рис. 4.2.** Структурная схема RLC-цепи

На рис. 4.2 изображена структурная схема RLC-цепи. Если структурная схема состоит из нескольких блоков, то полная передаточная функция

системы может быть записана в виде произведения передаточных функций этих блоков. Данное правило проиллюстрировано на рис. 4.2.



**Рис. 4.2.** Преобразование структурной схемы

Другие правила работы со структурными схемами будут рассмотрены по ходу изложения. Заметим только, что анализ систем путём преобразования структурных схем даёт гораздо лучшее представление о роли каждого элемента, чем это было бы при рассмотрении уравнений.

#### 4.4. Связь между передаточными функциями и уравнениями состояния

Модель системы в виде передаточных функций можно представить в виде дифференциальных уравнений состояния и наоборот. Рассмотрим, каким образом осуществляется переход от одной формы представления математической модели к другой форме для систем с одним входом и одним выходом (SISO).

Пусть задана передаточная функция системы вида (4.8). Она позволяет элементарно перейти к системе дифференциальных уравнений в форме Коши (в фазовом пространстве) или к канонической диагональной форме. Проиллюстрируем этот переход на примере системы третьего порядка, чтобы не загромождать обозначений. ПФ имеет вид

$$G(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}. \quad (4.16)$$

Поскольку в знаменателе стоит характеристический полином, мы можем сразу записать соответствующее ему дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = u. \quad (4.17)$$

Обозначим  $x_1 = x$  и, действуя как и ранее в п. 2.2, получаем цепочку уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 + u. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Это и есть система уравнений состояния в форме Коши.

В числителе функции (4.16), согласно определению ПФ, стоит преобразование Лапласа от выходной переменной. Следовательно, мы можем сразу записать уравнение выхода



$$y(t) = b_2 x_3 + b_1 x_2 + b_0 x_1. \quad (4.19)$$

Разложим теперь функцию (4.16) на элементарные дроби, используя метод неопределённых множителей. При отсутствии кратных полюсов можем записать

$$G(s) = \frac{k_1}{s - s_1} + \frac{k_2}{s - s_2} + \frac{k_3}{s - s_3}. \quad (4.20)$$

Введём три переменных  $\{x_1, x_2, x_3\}$ , каждая из которых соответствует полюсу ПФ с соответствующим индексом. Система дифференциальных уравнений для этих переменных сразу записывается в виде

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \cdot \bar{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u(t). \quad (4.21)$$

Уравнение выхода имеет вид

$$y(t) = [k_1 \quad k_2 \quad k_3] \cdot \bar{x}. \quad (4.22)$$

Физический смысл переменных состояния в модели (4.21), (4.22) является весьма туманным. При наличии кратных полюсов (корней характеристического полинома) матрица  $A$  примет не диагональную, а блок-диагональную (жорданову) форму.

Если требуется перейти от передаточной функции к модели переменных состояния, имеющих определённый физический смысл, то поступают следующим образом. Дробь (4.16) разбивают на сомножители, являющиеся составными блоками структурной схемы системы управления, при этом выходами блоков должны служить выбранные физические величины. По виду выражений этих блоков и с помощью структурной схемы составляется сигнальный граф системы, на основании которого и записываются дифференциальные уравнения пространства состояний. Подробно с методами построения сигнальных графов для сложных систем можно познакомиться в [4, п. 3.4].

Покажем теперь, как найти передаточную функцию, если известны уравнения состояния для SISO-системы. Положим матрицу  $D$  равной нулю и запишем уравнения ABCD-модели в виде

$$\frac{d}{dt} \bar{x} = A\bar{x} + Bu, \quad (4.23)$$

$$y = C\bar{x}.$$

Матрицы и векторы в (4.23), например, для системы 3-го порядка, имеют следующую структуру:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{bmatrix}, C = [\bullet \quad \bullet \quad \bullet]. \quad (4.26)$$

Преобразуя уравнения (4.23) по Лапласу при нулевых начальных условиях  $\bar{x}(0) = 0$ , получим

$$s\bar{X}(s) = A\bar{X}(s) + BU(s), \quad Y(s) = C\bar{X}(s). \quad (4.27)$$

Первое равенство в (4.27) запишем в виде

$$(sI - A)\bar{X}(s) = BU(s), \quad (4.28)$$

где  $I$  – единичная матрица размерности  $n \times n$ . Умножим равенство (4.28) слева на матрицу

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}, \quad (4.29)$$

которая, как известно, является преобразованием Лапласа от **фундаментальной матрицы** системы  $\Phi(t) = \exp(At)$ . В результате получим

$$\bar{X}(s) = \Phi(s)BU(s) \quad (4.30)$$

Подставив выражение (4.30) во второе равенство в (4.27), найдём выражение для выхода

$$Y(s) = C\Phi(s)BU(s). \quad (4.31)$$

Сравнивая это выражение с опр. 4.1 передаточной функции  $G(s)$ , находим её вид

$$G(s) = C\Phi(s)B. \quad (4.32)$$

Если учесть структуру матриц в (4.26), то легко увидеть, что свёртка матриц в (4.32) действительно представляет собой скаляр.

**Упражнение 4.1.** Найдите с помощью формул (4.29), (4.32) передаточную функцию для системы (3.12). Убедитесь, что  $G(s)$  имеет вид, приведённый в (4.7).

Таким образом, мы убедились, что возможен переход от модели пространства состояний к модели в форме передаточных функций и обратно. Алгоритмы перехода запрограммированы в MATLAB в функциях **ss** и **tf**. Применение этих функций описано в приложении 1.

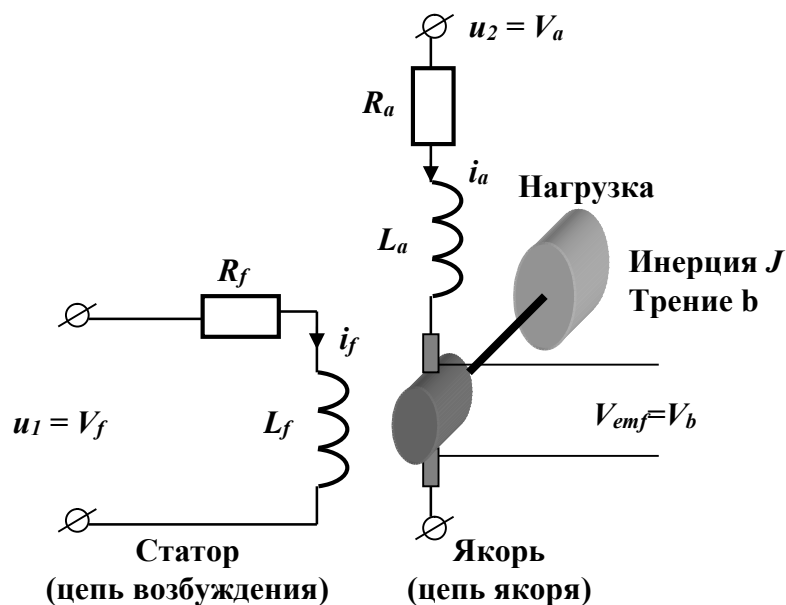
*Простейшие управляющие  
системы – линейные системы.*

*Н.Винер*

## ЛЕКЦИЯ 5. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

### 5.1. Модель двигателя постоянного тока

Рассмотрим различные формы представления математических моделей на примере системы управления поворотом вала двигателя постоянного тока.



**Рис. 5.1.** Модель двигателя постоянного тока

На рис.5.1 представлена модель электродвигателя, более полная по сравнению с рассмотренной выше в п. 2.2 упрощенной моделью. Величины, относящиеся к элементам и переменным цепи статора, имеют индекс “f” (field), элементы и переменные в цепи якоря имеют индекс “a” (armature). Крутящие моменты будем обозначать буквой “T” (torque). Если отсутствует насыщение, то магнитный поток в воздушном зазоре пропорционален току возбуждения:

$$\Phi(t) = K_f i_f. \quad (5.1)$$

Пренебрегая нелинейными эффектами, такими как гистерезис и падение напряжения на щётках, будем считать, что момент, развиваемый двигателем, линейно зависит от  $\Phi$  и тока якоря

$$T_m = K_1 \Phi(t) i_a(t) = K_1 K_f i_f(t) i_a(t). \quad (5.2)$$

В случае, когда управление происходит по двум входам, модель двигателя оказывается нелинейной. Для того чтобы двигатель можно было считать линейным элементом, один из токов должен быть постоянным. Если задан ток якоря ( $i_a = \text{const}$ ), мы имеем двигатель, управляемый по цепи возбуждения. Если фиксирован ток в обмотке статора ( $i_f = \text{const}$ ) или магнитное поле в зазоре создаётся постоянными магнитами, мы имеем двигатель, управляемый по цепи якоря. Рассмотрим оба случая.

### 5.2. Двигатель, управляемый по цепи возбуждения

Модель в пространстве состояний для этого случая у нас описана ранее в п.2.2. Поэтому рассмотрим модель в форме передаточных функций, входом является напряжение на клеммах статора  $v_f(t)$ , в  $s$ -пространстве входом будет преобразование Лапласа этой величины -  $V_f(s)$ . Преобразование Лапласа выходной переменной ( $\varphi(t)$ ) обозначим как  $\Theta(s)$ .

Структурная схема двигателя, управляемого по цепи возбуждения, приведена на рис. 5.2. Задача состоит в том, чтобы найти выражение для  $G(s)$ .

Соотношения между переменными нужно записать в алгебраической форме в  $s$ -пространстве и разрешить их, чтобы связать между собой вход и выход. Составляем цепочку уравнений. Преобразуя (5.2) по Лапласу, получим

$$T_m(s) = (K_1 K_f I_a) I_f(s) \equiv K_m I_f(s), \quad (5.3)$$

где  $I_a$  – постоянный ток якоря, а  $K_m$  носит название постоянной электродвигателя. Входная переменная связана с током в статоре уравнением (преобразование Лапласа уравнения Кирхгофа (2.2))

$$V_f(s) = (R_f + L_f s) I_f(s). \quad (5.4)$$

Далее, развиваемый двигателем момент  $T_m$ , создаёт полезный момент на нагрузке (load) и компенсирует возмущающий момент (disturbance)

$$T_m(s) = T_L(s) + T_d(s). \quad (5.5)$$

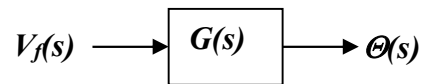


Рис. 5.2. Структурная схема электродвигателя

Возмущающим моментом во многих случаях можно пренебречь, однако, если двигатель управляет, например, антенной локатора, то нельзя не учитывать влияние порывов ветра на антенну, которые и создают внешнее возмущение. Угол поворота определяется моментом  $T_L$  в соответствии с уравнением вращательного движения при наличии трения. Преобразование Лапласа этого уравнения имеет вид

$$T_L(s) = Js^2\Theta(s) + bs\Theta(s). \quad (5.6)$$

Записаны все необходимые соотношения. Примем  $T_d=0$ , тогда в левую часть соотношения (5.3) можно подставить правую часть (5.6), а ток  $I_f$  выразить из (5.4). В результате получается равенство

$$s(Js + b)\Theta(s) = K_m \frac{V_f(s)}{L_f s + R_f},$$

из которого находится искомое выражение для передаточной функции

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m}{s(Js + b)(L_f s + R_f)}. \quad (5.7)$$

Структурную схему системы с передаточной функцией (5.7) можно разбить на ряд блоков со своими передаточными функциями, так что выход одного блока является входом другого, а полная передаточная функция – их произведением. Такой вид структурной схемы приведен на рис.5.3.

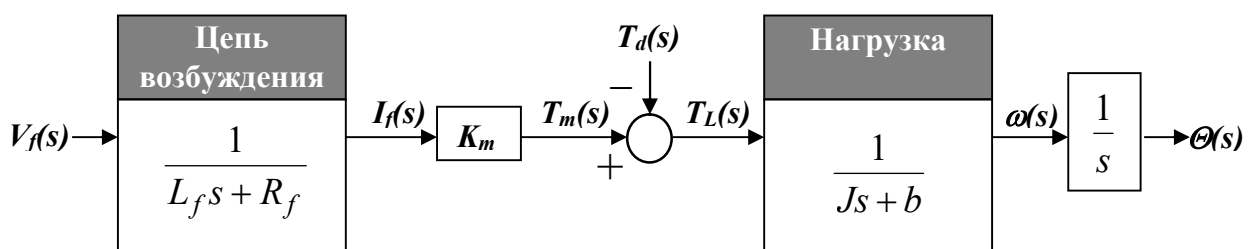


Рис. 5.3. Структурная схема двигателя, управляемого по цепи возбуждения

Как видим, структурная схема очень удобна для анализа. Явно видны электрическая часть устройства и механическая часть, указано даже влияние возмущения, отсутствующее в формуле (5.7). Эту схему легко запрограммировать в пакете Simulink, чтобы численными методами исследовать поведение системы при различных значениях её параметров и при различных внешних воздействиях.

В рассматриваемой модели двигателя мы можем выделить два времени выхода на режим:

$$\tau_f = \frac{L_f}{R_f} \quad \text{и} \quad \tau_L = \frac{J}{b} \quad (5.8)$$

характерное время электрической цепи статора и характерное время механической вращающейся части соответственно. Используя обозначения (5.8), мы можем записать передаточную функцию (5.7) в стандартном виде

$$G(s) = \frac{1}{s(\tau_f s + 1)(\tau_L s + 1)} \cdot \frac{K_m}{bR_f}.$$

Таким образом, для двигателя мы получили линейную модель третьего порядка, которая состоит из двух блоков первого порядка с передаточными функциями вида

$$G_1(s) = \frac{K}{(\tau s + 1)} \quad (5.9)$$

и блока интегрирования (интегратора) с передаточной функцией  $\frac{1}{s}$ .

### 5.3. Двигатель, управляемый по цепи якоря

Построим математическую модель двигателя, управляемого по цепи якоря. Начнём с модели в пространстве состояний. Входным воздействием теперь является напряжение на якоре  $u_2(t) = v_a(t)$  (см. рис. 5.1). Если ток в обмотке статора  $i_f$  зафиксирован (или используется постоянный магнит), то момент  $\tau_m(t)$ , развиваемый двигателем, определится как

$$\tau_m(t) = (K_1 K_f i_f) i_a(t) = K_m i_a(t). \quad (5.10)$$

Уравнение Кирхгофа для цепи якоря запишется в виде

$$v_a(t) = L_a \frac{di_a(t)}{dt} + R_a i_a(t) + v_b(t), \quad (5.11)$$

где  $v_b(t)$  – противоЭДС (electromotive force), возникающая на щётках, пропорциональная скорости вращения

$$v_b(t) = K_b \omega(t). \quad (5.12)$$

Уравнения вращательного движения с учётом коэффициента трения (viscosity)  $K_v$  запишем в виде

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = K_m i_a(t) - K_v \omega(t);$$

$$\dot{\varphi}(t) = \omega(t).$$
(5.13)

Интересно отметить, что в установившемся режиме работы двигателя мощность, подводимая к якорю  $v_b i_a = K_b \omega i_a$ , равна мощности, сообщаемой валу  $\tau_m \omega = K_m \omega i_a$ , откуда следует, что  $K_m = K_b$ .

Уравнения (5.11)-(5.13) дают систему уравнений для величин  $i_a$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$ , которые, очевидно, и являются переменными состояния:

$$\begin{aligned} \frac{di_a}{dt} &= -\frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{K_b}{L_a} \omega + \frac{1}{L_a} v_a(t); \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{K_m}{J} i_a - \frac{K_v}{J} \omega; \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega. \end{aligned}$$
(5.14)

Выходной переменной является угол поворота вала, поэтому уравнение выхода имеет вид

$$y = \varphi.$$
(5.15)

Уравнения (5.14), (5.15) можно записать в виде ABCD-модели:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_m}{J} & -\frac{K_v}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot v_a(t);$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \cdot v_a(t).$$
(5.16)

Отметим, что рассмотренная нами модель используется в пакете MATLAB в качестве демонстрационного примера, описывающего работу MATLAB по моделированию систем управления в пространстве состояний.

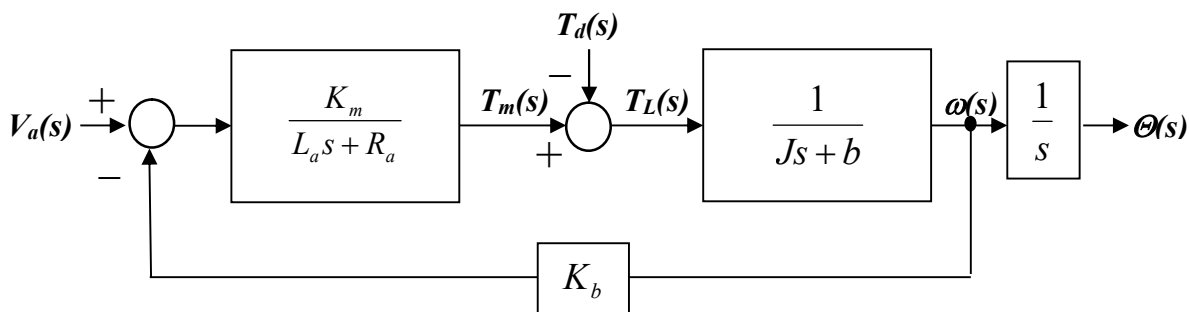
Подвергнув уравнения (5.14), (5.15) преобразованию Лапласа, легко получить передаточную функцию, которая в данном случае имеет вид

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{s[(Js + K_v)(L_a s + R_a) + K_b K_m]}. \quad (5.17)$$

Такой же результат можно получить путём применения формул перехода (4.29), (4.32).

**Упражнение 5.1.** Найдите с помощью формул (4.29), (4.32) передаточную функцию для системы (5.16). Убедитесь, что  $G(s)$  имеет вид, приведённый в (5.17).

Структурная схема двигателя, управляемого по цепи якоря, приведена на рис. 5.4. Из схемы видно, что в этом случае в двигателе возникает естественная обратная связь, которой не было в случае управления по цепи возбуждения. Кроме того, в структурной схеме учтено внешнее воздействие  $T_d$ , отсутствующее в выражении для передаточной функции.



**Рис. 5.4.** Структурная схема двигателя, управляемого по цепи якоря

**Упражнение 5.2.** Задайте следующие параметры двигателя:  $R = 2$  Ом,  $L = 0,5$  Гн,  $J = 0,02$  Н м,  $K_m = K_b = 0,015$  Н м/А,  $K_v = 0,2$  Н м/с. Исследуйте работу двигателя в MATLAB: составьте ABCD-модель и найдите передаточную функцию двигателя; промоделируйте структурную схему рис. 5.4 в Simulink и исследуйте переходную характеристику системы.



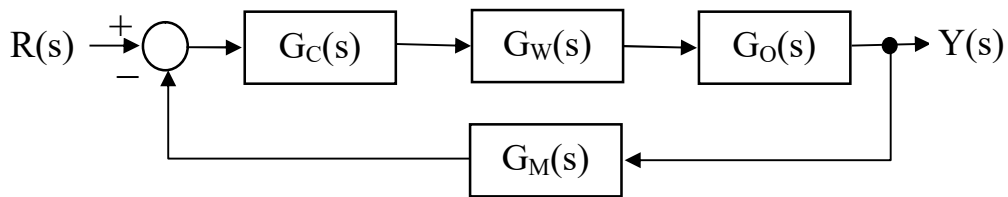
Где начало того конца,  
которым оканчивается начало?

К.Прутков

## ЛЕКЦИЯ 6. СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

### 6.1. Свойства обратной связи

На рис. 6.1 приведена структурная схема замкнутой системы управления, изображённой на рис. 1.2.



**Рис. 6.1.** Структурная схема замкнутой системы управления:

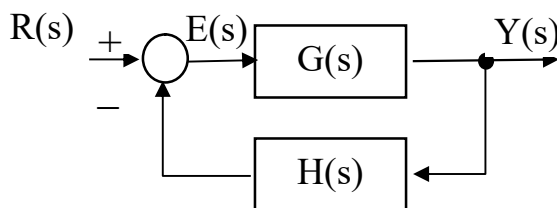
$G_o(s)$  – передаточная функция объекта;

$G_m(s)$  – передаточная функция измерительного устройства;

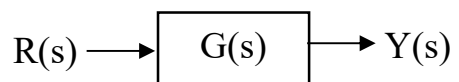
$G_c(s)$  – передаточная функция устройства управления (регулятора);

$G_w(s)$  – передаточная функция исполнительного устройства

Для анализа свойств систем с обратной связью и исследования их особенностей по сравнению с разомкнутыми системами пока не будем заострять внимание на алгоритмах работы регулятора и положим  $G_c = G_w = 1$ . ПФ объекта обозначим просто  $G(s)$ , а ПФ измерительного устройства –  $H(s)$  – это теперь передаточная функция цепи обратной связи.



**Рис. 6.2.** Система управления с обратной связью



**Рис. 6.3.** Разомкнутая система управления

Структурная схема системы управления с обратной связью приведена на рис 6.2, на рис. 6.3 – схема разомкнутой системы, т.е. объекта, на вход которого подаётся воздействие  $R$ . Заметим, что передаточная функция  $G$  преобразует входной сигнал в выходной сигнал, а передаточная функция  $H$  совершает обратное преобразование: превращает измеренный сигнал выхода

в величину, имеющую размерность входного сигнала, поэтому можно сделать вывод, что произведение этих функций

$$G(s) \cdot H(s) \equiv GH(s) \quad (6.1)$$

есть величина безразмерная.

Найдём передаточную функцию системы с обратной связью  $T(s)$ . Из рис. 6.2 следует, что величина ошибки  $E(s)$  равна разности между входным сигналом  $R(s)$  и измеренным преобразованным выходным сигналом  $H(s)Y(s)$

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s). \quad (6.2)$$

Выход  $Y(s)$  определяется произведением  $G(s)E(s)$ , поэтому

$$Y(s) = G(s)[R(s) - H(s)Y(s)], \quad G(s)R(s) = Y(s)[1 + GH(s)].$$

Искомое выражение для передаточной функции системы  $T(s) = Y(s)/R(s)$  имеет вид

$$T(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)}. \quad (6.3)$$

Из (6.3) видно, что разомкнутой системе соответствует  $H(s)=0$ . При  $H(s)=1$  (выход объекта подаётся на его вход с противоположным знаком) замкнутую систему называют системой с единичной отрицательной обратной связью.

Если передаточная функция объекта имеет стандартный вид (4.8)

$$G(s) = \frac{p(s)}{s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \dots + q_0},$$

то замыкание объекта цепью обратной связи с ПФ  $H(s)$  даст систему с передаточной функцией

$$T(s) = \frac{p(s)}{s^n + q_{n-1}s^{n-1} + \dots + q_0 + p(s)H(s)}. \quad (6.4)$$

Мы видим, что полином в знаменателе функции  $T(s)$  отличается от полинома в знаменателе  $G(s)$ , а это означает, что **динамика системы с обратной связью отличается от динамики свободного объекта** (разомкнутой системы). Изменяя вид ПФ  $H(s)$ , можно менять переходную характеристику системы.

Сравним поведение разомкнутой и замкнутой систем. Предположим, что мы каким-то образом определили параметры объекта и рассчитали воздействие так, чтобы обеспечить требуемый выходной сигнал. После подачи рассчитанного воздействия на вход объекта его выход будет оставаться на нужном уровне, пока не изменятся параметры объекта. Для наглядности можно привести пример моторной лодки, которой нужно двигаться поперёк течения реки. Если моторист, определив опытным путём положение руля и тягу двигателя для требуемого курса, решит отдохнуть, зафиксировав руль и газ, мы получим разомкнутую систему. Лодка будет двигаться по заданному курсу, пока не достигнет участка реки с другой скоростью течения, после чего курс лодки изменится.

Таким образом, разомкнутая система **чувствительна** к изменению параметров. Чувствительность замкнутой системы к изменению параметров объекта меньше, чем в разомкнутой системе. Покажем это. Если произведение  $G$  и  $H$  велико для всех значений комплексной величины  $s$  (комплексной частоты), то из (6.3) следует

$$Y(s) \approx \frac{1}{H(s)} R(s), \quad GH(s) \gg 1, \quad (6.5)$$

т.е. в этом случае выход системы вообще не зависит от вида передаточной функции объекта, а следовательно, и от её изменения. Нужно, однако, иметь в виду, что большой коэффициент усиления в цепи обратной связи, как это будет видно в дальнейшем, может привести к неустойчивой работе системы управления.

Дадим количественную оценку эффекту снижения чувствительности системы к изменению параметров (эффекту заглубления). Определим чувствительность системы, как отношение процентного изменения передаточной функции системы к процентному изменению передаточной функции объекта

$$S = \frac{\Delta T(s)/T(s)}{\Delta G(s)/G(s)}. \quad (6.6)$$

В пределе малых изменений формула (6.6) приобретает вид

$$S_G^T = \frac{\partial T/T}{\partial G/G} = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T}. \quad (6.7)$$

**Определение 6.1.** Чувствительность системы — это отношение изменения её передаточной функции к изменениям передаточной функции объекта управления при условии их малости.

Для разомкнутой системы чувствительность, по определению, равна 1. Для замкнутой системы из формул (6.3), (6.7) получаем

$$S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G} \cdot \frac{G}{T} = \frac{1}{(1 + GH)^2} \cdot \frac{G}{G/(1 + GH)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}. \quad (6.8)$$

Чувствительность замкнутой системы действительно меньше единицы и стремится к нулю с ростом произведения  $GH$ .

Идея обратной связи широко применяется в настоящее время для стабилизации работы усилителей. Впервые мысль об её использовании «пришла в голову» сотруднику фирмы «Белл лабораториз» корпорации AT&T Гарольду С. Блэку более 80 лет назад. В то время главной задачей, над которой работала фирма, было улучшение качества телефонной связи и используемых при этом усилителей сигналов. Блэку было поручено заняться линеаризацией и стабилизацией усилителей, устанавливаемых в тракте голосовых сообщений на расстояния в тысячи миль. Послушаем удивительные и поучительные воспоминания самого Г.С.Блэка [4, п.1.3]:

“Было утро вторника 2 августа 1927г., когда во время переправы на пароме через Гудзон по дороге на работу мне внезапно в голову пришла мысль об использовании в усилителе отрицательной обратной связи. Более 50 лет я размышлял, как и почему возникла эта идея, но даже и теперь я не могу сказать, как все произошло. Я знаю только то, что после нескольких лет работы над проблемой я неожиданно понял, что если подать сигнал с выхода усилителя на его вход, причем в обратной фазе, и воспрепятствовать самовозбуждению усилителя (свисту, как мы позже назвали этот эффект), то я получу именно то, что хотел – способ устранения искажения выходного сигнала. Я раскрыл утреннюю газету *Нью-Йорк Таймс* и на полях набросал соответствующую схему, дополнив ее формулой для коэффициента усиления с учетом обратной связи. Я подписался под этой схемой, а 20 минут спустя, когда я прибыл в лабораторию на Уэст-стрит, 463, ее также заверил своей подписью ныне покойный Эрл К.Блессинг.”

Итак, основное преимущество систем с обратной связью состоит в их способности снижать чувствительность к изменению параметров или внешних воздействий. Но у обратной связи есть и издержки:

- очевидное уменьшение коэффициента усиления (следует из формулы (6.3));
- возможная потеря устойчивости (методы анализа устойчивости рассмотрим в дальнейших лекциях);
- увеличение числа элементов и сложности системы.

Для устранения отмеченных недостатков в современных системах используют стандартные робастные ПИД-регуляторы. Мы рассмотрим алгоритмы их работы и методы настройки, но прежде необходимо познакомиться с тем, как определяется качество работы систем управления.

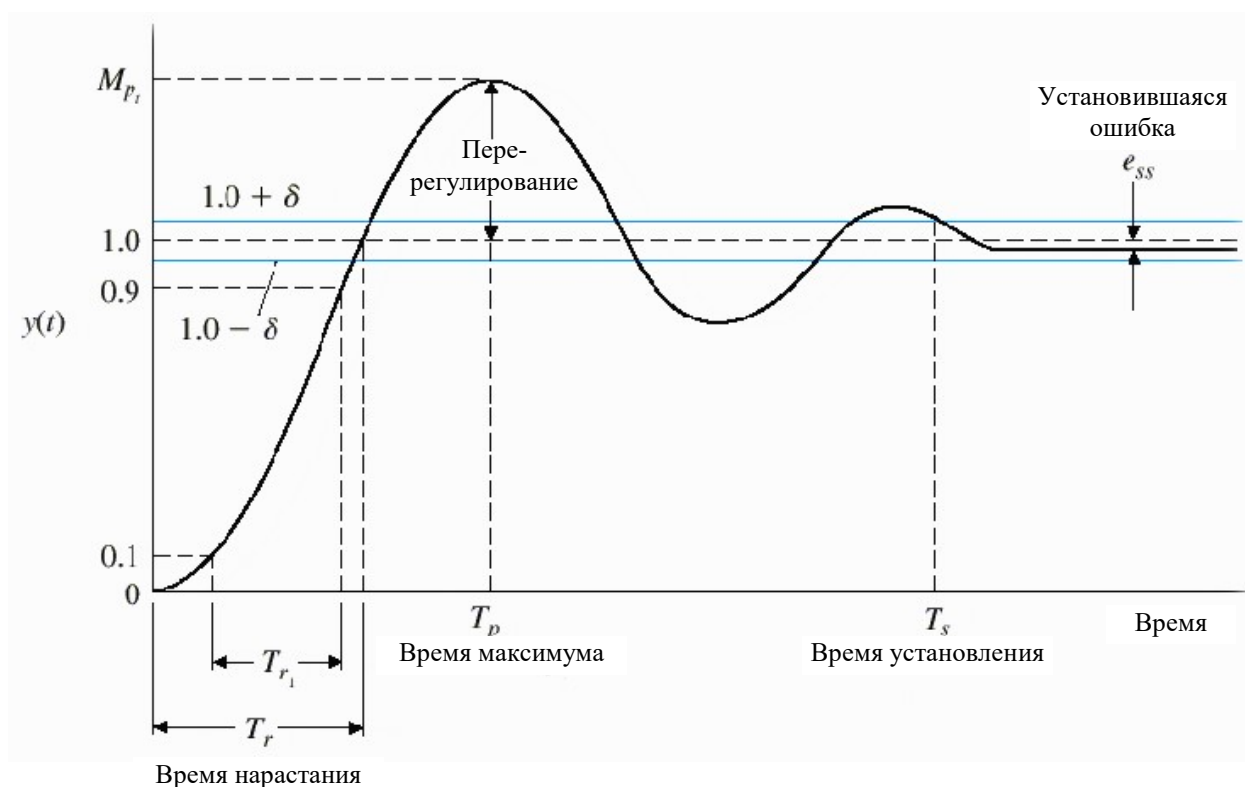
## 6.2. Показатели качества

Показатели качества регулирования определяются обычно по переходной характеристике системы (опр. 4.3). Типичный её вид при единичном ступенчатом воздействии приведен на рис. 6.4. На графике

нанесены наименования основных параметров кривой, которые характеризуют работу системы управления. По своему смыслу эти параметры (показатели качества) делятся на динамические и точностные [8].

**Определение 6.2.** Динамические показатели качества описывают работу системы управления до выхода в установившийся режим; точностные показатели качества описывают работу системы в установившемся режиме.

Перечень характеристик приведён в табл. 6.1.



**Рис. 6.4.** Реакция системы управления на ступенчатое воздействие

Таблица 6.1

Наименование показателя		Обозначение	Вид показателя
Русское	Английское		
Время нарастания	Rise time	$T_r$ ( $T_{r1}$ )	Динамический
Время максимума	Peak time	$T_p$	Динамический
Перерегулирование (заброс регулятора)	Overshoot	$M_{pt}$	Динамический
Коридор (зона)	Zone	$\pm\delta$	Точностной
Время установления	Settling time	$T_s$	Динамический
Установившаяся ошибка	Stationary error	$e_{ss}$	Точностной

**Упражнение 6.1.** Дайте определения основным параметрам переходной характеристики, указанным в табл. 6.1.

Если система выходит на режим без колебаний (передемпфированная система), то перерегулирование отсутствует, время максимума  $T_P$  смысла не имеет, а в качестве времени нарастания  $T_{rl}$  рассматривается интервал, в течение которого переходная характеристика изменяется от 10 до 90% её значения.

Цель управления обычно состоит в том, чтобы установившаяся ошибка  $e_{ss}$  лежала внутри коридора (зоны)  $\delta$ , назначаемой конструктором после согласования с будущим потребителем проектируемой системы управления. Очень часто накладываются требования быстрогодействия (уменьшение времени установления  $T_S$ ) и уменьшения величины перерегулирования (заброса регулятора). Интуитивно ясно, что два этих требования взаимно противоречивы, поэтому конструктору приходится прибегать к компромиссу. Если, например, большой заброс регулятора может вызвать катастрофические последствия для объекта управления, в первую очередь уменьшают заброс, а если время выхода определяется технологией управляемого процесса, то необходимо обеспечить требуемую длительность этого времени и т.д. Перерегулирование обычно определяют как отношение разности заброса регулятора и установившегося значения к установившемуся значению (в процентах) – в этом случае говорят об **относительном перерегулировании**:

$$\delta_p = \frac{M_P - y_\infty}{y_\infty} \cdot 100\% . \quad (6.9)$$

В качестве примера найдём показатели качества для системы второго порядка. Передаточная функция  $T(s)$  в этом случае может быть представлена в удобном для анализа виде

$$T(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} , \quad (6.10)$$

где  $K$  – масштабный коэффициент (при анализе переходной характеристики он может быть положен равным единице),  $\omega_n$  имеет размерность частоты (как и переменная  $s$ ), а  $\zeta$  – безразмерный параметр (декремент). Обозначения (6.10) удобны тем, что полюса ПФ имеют вид

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} , \quad (6.11)$$

поэтому величина безразмерного декремента  $\zeta$  непосредственно позволяет судить о характере поведения системы:

- выход в установившийся режим без колебаний – при  $\zeta > 1$ ;
- критический режим ( $\zeta = 1$ );
- закритический режим (затухающие колебания) – при  $\zeta < 1$ .

Поскольку выход системы  $Y$  связан со входом  $R$  соотношением  $Y(s) = T(s)R(s)$ , то для единичного ступенчатого воздействия, описываемого выражением (4.13):  $R(s) = \frac{1}{s}$ , мы получим

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}. \quad (6.12)$$

Подвергнув (6.12) обратному преобразованию Лапласа, находим явный вид переходной функции  $y(t)$  при  $0 < \zeta < 1$  (в колебательном режиме)

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \arccos \zeta). \quad (6.13)$$

Эту функцию легко проанализировать аналитически и найти показатели качества работы системы. Формулы, по которым можно рассчитать основные показатели качества для системы второго порядка, приведены в табл.6.2.

Таблица 6.2

Показатель	Обозначение	Расчетная формула
Время максимума	$T_P$	$\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$
Время установления ( $\delta=2\%$ )	$T_S$	$\approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$
Относительное перерегулирование	$\delta_p = \frac{M_P - y_\infty}{y_\infty} \cdot 100\%$	$100 \cdot e^{-\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}}$

**Упражнение 6.2.** Получите расчётные формулы, приведённые в табл. 6.2.

Поскольку для систем более высокого порядка аналитический расчёт показателей качества весьма громоздок, то в этом случае помощь оказывает компьютерное моделирование систем управления в пакете MATLAB.

### 6.3. Оценки качества

Современная теория управления предполагает, что разработчик способен количественно определить требуемое качество системы в виде интегральной (по времени) оценки. Эта численная оценка должна учитывать те стороны процесса управления, которые наиболее важны. Речь идет, по сути, об оптимизации регулятора численными методами. Дадим следующее простое определение оценки качества [4]:

**Определение 6.3. Оценка качества** – это численный показатель качества системы, который выбирается так, чтобы подчеркнуть наиболее важное требование, предъявляемое к системе.

Если параметры системы выбираются из требования минимальности оценки качества, то система управления будет оптимальной по отношению к тем требованиям, которые учитывает оценка.

В общем случае интеграл, оценивающий качество системы, имеет вид

$$I = \int_0^T f[e(t), r(t), y(t), t] dt, \quad (6.14)$$

где  $y$  – выходной сигнал,  $e$  – ошибка,  $r$  – воздействие (затраты на управление). Вид функции  $f$  и время интегрирования  $T$  определяются требованиями, предъявляемыми к системе.

Наиболее употребительные оценки качества, минимизирующие ошибку, приведены в табл.6.3.

Таблица 6.3

Название оценки	Аббревиатура	Интеграл
Интеграл от квадрата ошибки	ИКО	$\int_0^T e^2(t) dt$
Интеграл от модуля ошибки	ИМО	$\int_0^T  e(t)  dt$
Интеграл от взвешенного модуля ошибки	ИВМО	$\int_0^T t  e(t)  dt$
Интеграл от взвешенного квадрата ошибки	ИВКО	$\int_0^T t e^2(t) dt$

Наилучшей считается оценка ИВМО [4].



Для передаточной функции вида

$$T_q(s) = \frac{\omega_n^q}{s^q + b_{q-1}s^{q-1} + \dots + b_1s + b_0}. \quad (6.15)$$

были определены значения коэффициентов  $b_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, q-1$ , которые минимизируют оценку ИВМО. Эти коэффициенты приведены в табл.6.4 для  $q = 1, \dots, 5$ .

Таблица 6.4

Оптимальные значения коэффициентов  $T(s)$ , основанные на критерии ИВМО, при ступенчатом входном сигнале

Порядок <b>q</b>	Коэффициенты ПФ					
	<b>b<sub>5</sub></b>	<b>b<sub>4</sub></b>	<b>b<sub>3</sub></b>	<b>b<sub>2</sub></b>	<b>b<sub>1</sub></b>	<b>b<sub>0</sub></b>
1	-	-	-	-	1	$\omega_n$
2	-	-	-	1	$1,4\omega_n$	$\omega_n^2$
3	-	-	1	$1,75\omega_n$	$2,15\omega_n^2$	$\omega_n^3$
4	-	1	$2,1\omega_n$	$3,4\omega_n^2$	$2,7\omega_n^3$	$\omega_n^4$
5	1	$2,8\omega_n$	$5,0\omega_n^2$	$5,5\omega_n^3$	$3,4\omega_n^4$	$\omega_n^5$

Таким образом, оптимальная (по критерию ИВМО) передаточная функция, например, для системы 3-го порядка имеет вид

$$T_3^{ИВМО}(s) = \frac{\omega_n^3}{s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3} \quad (6.16)$$

Отметим, что в любом случае система порядка  $q$ , оптимизированная по критерию ИВМО, обладает нулевой установившейся ошибкой, а ее передаточная функция имеет  $q$  полюсов и не содержит нулей.

*Во всём мне хочется дойти  
до самой сути.*

*Б.Л. Пастернак*

## ЛЕКЦИЯ 7. СТАНДАРТНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

### 7.1. Математические модели ПИД-регуляторов

Рассмотрим системы управления с единичной отрицательной обратной связью, содержащие управляющие устройства (блоки регулирования). Многолетняя практика автоматизации показала, что подавляющее большинство задач синтеза одноканального управления может быть решено с помощью регуляторов по отклонению, учитывающих текущее значение ошибки (отклонения выходной величины от заданного значения), первую производную ошибки и интеграл от ошибки за время регулирования<sup>11</sup>). В настоящее время пропорционально-интегрально-дифференциальный закон и его частные случаи считаются стандартными линейными законами регулирования, наиболее часто используемыми в промышленных регуляторах.

Регулятор, в котором реализован пропорционально-интегрально-дифференциальный закон (ПИД-регулятор), представляет собой пример универсального робастного регулятора, используемого в системах управления с обратной связью. Схема аналогового устройства, в котором реализован ПИД-алгоритм, приведена выше на рис. 1.5, пример математической модели с таким устройством управления приведён на рис. 2.3. Регулятор имеет три настроечных параметра:  $K$ ,  $T_I$ ,  $T_D$ . Проанализируем работу систем управления, содержащих ПИД-регуляторы, с точки зрения общей теории систем с обратной связью.

Для анализа удобно ввести следующие три параметра:

$$K_P = K, \quad K_I = \frac{K}{T_I}, \quad K_D = K \cdot T_D \quad - \quad (7.1)$$

пропорциональный, интегральный и дифференциальный коэффициенты соответственно. Отметим, что эти коэффициенты – суть положительные числа определённой размерности.

Управляющее воздействие  $u(t)$ , которое вырабатывает ПИД-регулятор на рис. 1.5, описывается выражением

---

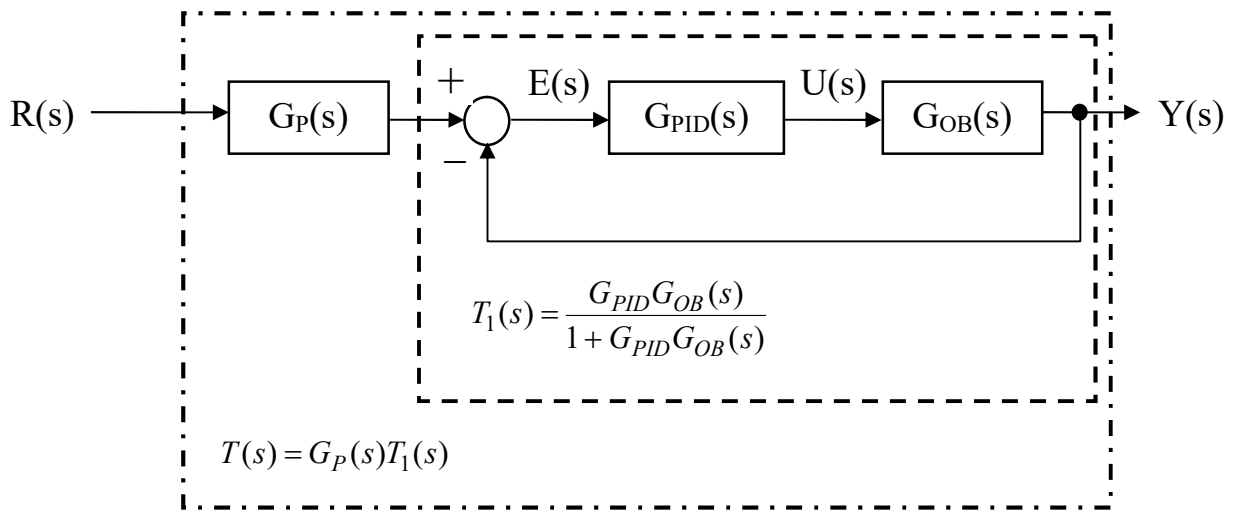
<sup>11</sup> Власенко В.А., Мансурова О.К. Динамическая настройка стандартных регуляторов. СПб: СПбГИТМО(ТУ), 2002. 52 с.

## Стандартные регуляторы с обратной связью

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}, \quad (7.2)$$

где  $e(t) = y_{\text{уст}} - y(t)$  – сигнал ошибки, поступающий на вход регулятора (масштабный множитель включён в пропорциональный коэффициент).

Структурная схема системы управления с ПИД-регулятором приведена на рис.7.1.



**Рис. 7.1.** Структурная схема системы управления с ПИД-регулятором и предшествующим фильтром

На рис. 7.1  $G_{OB}(s)$  – передаточная функция объекта управления,  $G_{PID}(s)$  – ПФ регулятора, которая в соответствии с (7.2) имеет вид

$$G_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}, \quad (7.3)$$

$G_P(s)$  – ПФ фильтра, установленного на входе системы по задающему воздействию (предшествующий фильтр [4, п.12.6]). Наличие такого, определенным образом подобранного фильтра, позволяет улучшить качество работы регулятора.

## 7.2. Особенности работы стандартных регуляторов

Начнём исследование работы регуляторов с простейшего случая, когда

$$K_I = K_D = 0, \quad u(t) = K_P e(t), \quad G_{PID}(s) = K_P, \quad (7.4)$$

а предшествующий фильтр отсутствует. Регулятор в этом случае носит название **пропорционального** или **П-регулятора**.

Передаточная функция системы управления с П-регулятором, согласно рис. 7.1 и формул (7.4), имеет вид

$$T(s) = \frac{K_P G_{OB}(s)}{1 + K_P G_{OB}(s)}. \quad (7.6)$$

Отклик системы на единичное ступенчатое воздействие  $R(s) = 1(s) = \frac{1}{s}$  (см. формулу (4.13)) определится как

$$Y(s) = T(s)R(s) = \frac{K G_{OB}(s)}{1 + K G_{OB}(s)} \cdot \frac{1}{s}. \quad (7.7)$$

Значение выходной величины в установившемся режиме  $y_\infty$ , в соответствии с формулой (4.15), равно

$$y_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s Y(s) = \frac{K_P G_{OB}(0)}{1 + K_P G_{OB}(0)}. \quad (7.8)$$

При единичном значении входной переменной  $y_{уст} = 1$  мы имеем установившуюся ошибку (см. рис. 6.4)

$$e_{ss} = y_{уст} - y_\infty = 1 - \frac{K_P G_{OB}(0)}{1 + K_P G_{OB}(0)} = \frac{1}{1 + K_P G_{OB}(0)}, \quad (7.9)$$

не равную нулю, кроме случая  $K_P \rightarrow \infty$ .

**Определение 7.1.** Регуляторы с ненулевой установившейся ошибкой называют **статическими** Регуляторы, у которых установившаяся ошибка равна нулю, называют **астатическими**.

П-регулятор при конечных значениях пропорционального коэффициента является статическим; цели регулирования (2.7) он не достигает.

Чтобы понять смысл работы П-регулятора, рассмотрим для примера **задачу стабилизации температуры объекта**, который можно считать точечным, т.е. не учитывать процессы теплопроводности внутри него (тело, имеющее малые размеры или высокую теплопроводность). Единственная переменная состояния – средняя температура  $\Theta$ , измеряемая одним датчиком. Управляющее воздействие – мощность  $q(t)$ , выводимая на нагреватель; температура среды снаружи объекта  $\Theta_H$ ; теплообмен происходит по закону Фурье; коэффициент теплообмена  $k$ ; теплоёмкость тела  $C_O$ ; начальная

### Стандартные регуляторы с обратной связью

температура  $\Theta_0$ . Задача заключается в том, чтобы достичь заданной температуры  $\Theta_{уст}$  и удерживать её в течение всего времени работы регулятора (задача терминального управления [8]).

Уравнение, описывающее поведение температуры объекта, имеет вид

$$C_o \dot{\Theta} = -k(\Theta - \Theta_H) + q(t), \quad \Theta(0) = \Theta_0 < \Theta_{уст}. \quad (7.10)$$

Если ввести обезразмеренную величину  $x$  – отклонение температуры от заданного значения, измеренное в единицах уставки:

$$x = \frac{\Theta - \Theta_{уст}}{\Theta_{уст}}, \quad (7.11)$$

то уравнение (7.10) можно записать в виде

$$\dot{x} + \frac{1}{\tau_o} x = \frac{1}{\tau_o} \cdot F_d + \frac{1}{\tau_o} \cdot u(t), \quad x(0) = x_o < 0, \quad x_{уст} = 0, \quad (7.12)$$

где введены обозначения

$$\tau_o = \frac{C_o}{k}, \quad F_d = \frac{\Theta_H - \Theta_{уст}}{\Theta_{уст}}, \quad u(t) = \frac{q(t)}{k\Theta_{уст}}. \quad (7.13)$$

Выходной переменной в рассматриваемой математической модели является переменная состояния  $x$ , т.е. уравнение выхода имеет простой вид

$$y = x; \quad (7.14)$$

цель регулирования можно представить аналогично (2.7)

$$y \rightarrow 0, \quad 0 \leq t \leq \infty. \quad (7.15)$$

Прежде чем исследовать работу П-регулятора, проанализируем полученную математическую модель (7.12) – (7.15). Уравнение (7.12) при отсутствии управляющего воздействия имеет решение:

$$x = (x_o - F_d) \cdot e^{-\frac{t}{\tau_o}} + F_d. \quad (7.16)$$

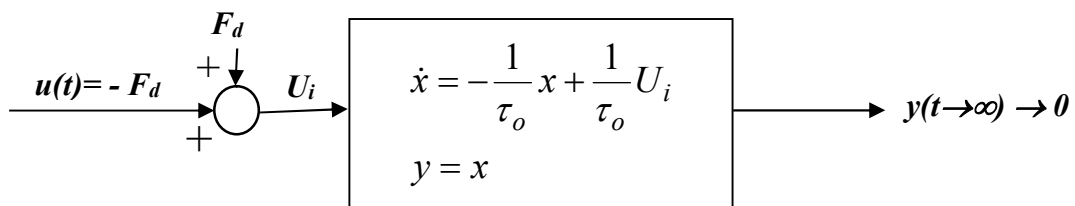
Из (7.16) следует, что требуемое состояние системы  $x = 0$  не является равновесным при  $u(t) = 0$  из-за наличия в правой части уравнения (7.12) величины  $F_d$ . Указанную величину можно интерпретировать как постоянное внешнее воздействие (**внешнее возмущение**). Физический смысл этой ситуации состоит в том, что тело имеющее начальную температуру  $\Theta_{уст}$ , которая выше температуры  $\Theta_H$ , отдает тепло окружающей среде, и его

температура релаксирует к температуре окружения  $\Theta_H$  с характерным временем  $\tau_o$ . И наоборот, если температура тела в начальный момент времени удовлетворяет условию равновесия  $x(0) = F_d < 0$ , а в этот момент включается постоянное управляющее воздействие (на нагреватель выводится постоянная мощность)

$$u(t) = -F_d, \quad (7.17)$$

то система переходит в требуемое состояние  $x = 0$  с тем же характерным временем  $\tau_o$ .

Таким образом, управляющее воздействие вида (7.17) **компенсирует внешнее воздействие** и обеспечивает достижение цели регулирования в течение характерного (собственного) времени релаксации системы. Если бы величина  $F_d$  была известна, можно было бы синтезировать разомкнутую систему управления, изображенную на рис. 7.2. Однако разомкнутая система, как было отмечено в разд. 6.1, очень чувствительна к изменению величины внешнего воздействия.



**Рис. 7.2.** Разомкнутая схема управления для компенсации внешнего воздействия

Кроме того, внешнее воздействие не измеряется и в замкнутой системе управления. Управляющее устройство получает от измерительного устройства информацию не о внешнем воздействии, а о выходном сигнале (точнее, устройство получает информацию о сигнале ошибки) и по этой информации алгоритм управляющего устройства должен автоматически перейти в режим (7.17). Другими словами, алгоритм регулирования, с помощью которого достигается цель управления, должен вырабатывать воздействие, удовлетворяющее обязательному условию (для линейных регуляторов):

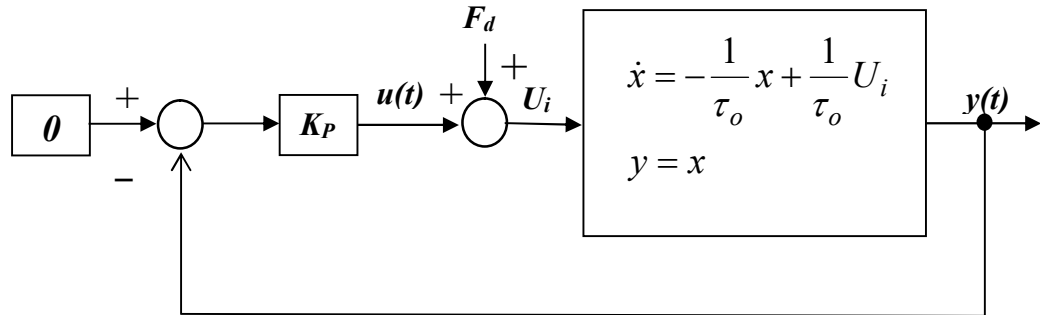
$$u(t) \rightarrow -F_d, \quad t \rightarrow \infty. \quad (7.18)$$

Переход регулятора в режим (7.18) должен происходить автоматически, в этом и состоит смысл работы регуляторов.

Вернёмся к П-алгоритму для рассматриваемого примера. В данном случае  $e(t) = 0 - x(t) = -x(t)$ , поэтому

$$u(t) = -K_p x(t). \quad (7.19)$$

Можно построить структурную схему рассматриваемой системы во временно́й области (анализ схемы, содержащей передаточные функции в комплексном пространстве, затруднен из-за наличия внешнего возмущения). Вид схемы изображён на рис. 7.3. Эту схему можно реализовать в Simulink и провести исследование работы системы с помощью компьютерного моделирования.



**Рис. 7.3.** Схема управления для компенсации внешнего воздействия с П-регулятором

В нашем случае исследование легко провести аналитически. Подставив (7.14), (7.19) в (7.12), получим уравнение для выходной величины

$$\dot{y} + \frac{1}{\tau_o}(1 + K_P)y = \frac{1}{\tau_o}F_d, \quad y(0) = y_o < 0. \quad (7.20)$$

Решение этого уравнения имеет вид, аналогичный (7.16)

$$y = (y_o - \frac{\tau}{\tau_o}F_d)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\tau}{\tau_o}F_d, \quad (7.21)$$

однако переходный процесс теперь происходит в течение времени

$$\tau = \frac{\tau_o}{1 + K_P}, \quad (7.22)$$

которое меньше собственного времени объекта.

Таким образом, пропорциональный регулятор, во-первых, ускоряет протекание переходных процессов, во-вторых, установившееся значение выходной величины

$$y_\infty = \frac{\tau}{\tau_o}F_d = \frac{1}{1 + K_P} \cdot F_d \quad (7.23)$$

приближается к нулю, т.е. к требуемому значению, с ростом коэффициента  $K_P$ . Отметим, что формулы (7.23) и (7.9) совпадают при единичном воздействии, поскольку для объекта первого порядка  $G(0) = 1$ .

Для устранения статической ошибки в цепь регулятора вводится интегрирующее звено, которое накапливает ошибку и изменяет управляющее воздействие, приближая его к требуемому значению (7.18). Пропорционально-интегральный регулятор (**ПИ-регулятор**) имеет передаточную функцию

$$G_{PI}(s) = K_P + \frac{K_I}{s}, \quad (7.24)$$

поэтому ПФ системы с обратной связью в этом случае принимает вид

$$T(s) = \frac{sK_P G_{OB}(s) + K_I G_{OB}(s)}{s(1 + K_P G_{OB}(s)) + K_I G_{OB}(s)}. \quad (7.25)$$

Отметим, что введение интегрирующего звена повышает порядок системы на единицу.

Для величины выхода в установившемся режиме получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sT(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_I G_{OB}(0)}{K_I G_{OB}(0)} = 1, \quad (7.26)$$

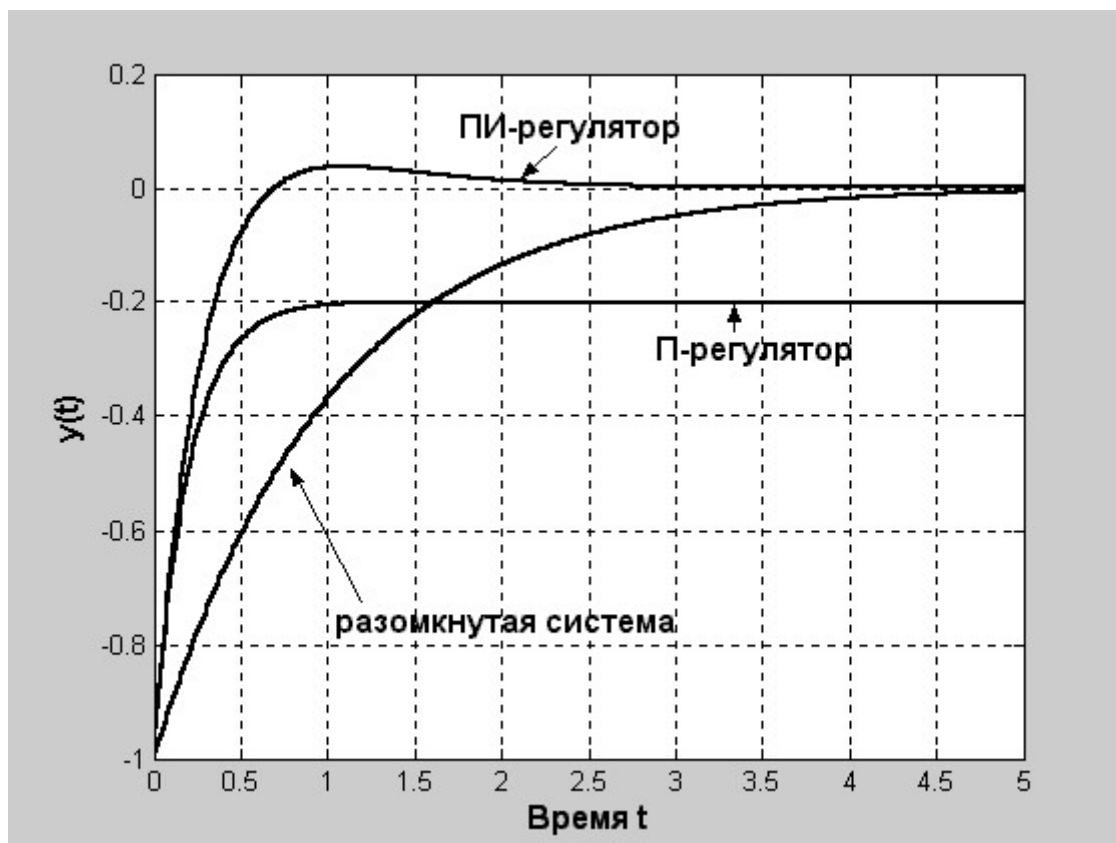
следовательно, установившаяся ошибка равна нулю.

На рис. 7.4 приведены графики переходных процессов в системе (7.12) при разомкнутой схеме регулирования, при работе П-регулятора и ПИ-регулятора.

**Упражнение 7.1.** Проанализируйте аналитически и с помощью компьютерного моделирования в MATLAB работу ПИ-регулятора для системы (7.12) и покажите, что управляющее воздействие удовлетворяет условию (7.18).

Добавление дифференцирующего звена в регулятор не изменяет собственных времён, порядка системы и установившейся ошибки по сравнению с ПИ-регулятором. Смысл работы этого звена состоит в уменьшении управляющего воздействия при слишком быстром изменении выхода, т.е. дифференцирующее звено делает процесс регулирования более плавным, вместе с тем расширяются возможности настройки регулятора.





**Рис. 7.4.** Переходные процессы в разомкнутой системе с компенсацией внешнего воздействия и в замкнутой системе с П-регулятором и ПИ-регулятором

### 7.3. Методы настройки ПИД-регуляторов

Существуют аналитические и экспериментальные методы настройки ПИД-регуляторов. В настоящее время экспериментальный метод чаще всего разделяется на два этапа: экспериментально определяются параметры объекта управления, т.е. его передаточная функция, а настройка коэффициентов регулятора проводится с помощью компьютерного моделирования. Здесь мы рассмотрим аналитический метод, использующий критерий ИВМО. Экспериментальный метод Зиглера-Никольса рассмотрен в приложении 2 с привлечением для моделирования регуляторов с целью повышения точности настройки коэффициентов блока NCD Outport пакета Simulink. Разумеется, что способы настройки не ограничиваются этими двумя методами, количество методов настройки непрерывно увеличивается. Однако указанные два являются наиболее характерными, поэтому рассмотрим их, легко понять суть остальных методов.

Аналитический способ настройки ПИД-регулятора предполагает подбор трех коэффициентов, минимизирующих оценку ИВМО, при которой система обладает хорошей, в смысле показателей качества, реакцией на ступенчатый сигнал. Передаточная функция объекта управления считается

известной. Процедура синтеза для объекта второго порядка включает в себя следующие этапы:

- 1) по заданному времени установления определить параметр  $\omega_n$  замкнутой системы;
- 2) используя найденное значение  $\omega_n$  и соответствующее выражение для характеристического полинома из табл.6.4, определить три коэффициента передаточной функции  $T_I(s)$ ;
- 3) определить предшествующий фильтр  $G_P(s)$  так, чтобы передаточная функция  $T(s)$  не имела нулей, как этого требует выражение (6.16).

Применение способа рассмотрим на конкретном примере [4; пример 12.8].

**Пример.** Синтезировать регулятор температуры объекта, имеющего передаточную функцию  $G_{об}(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$ , так, чтобы время установления (по критерию 2%) было менее 0,5 с, а система была оптимальной по критерию ИВМО.

Если замкнуть объект регулирования единичной обратной связью (положить  $G_{PID}=G_P=1$ ) и подать ступенчатый входной сигнал, то по виду переходной характеристики можно определить, что установившаяся ошибка составляет примерно 50%, а время установления – более 3 с.

Подставив заданное выражение для ПФ объекта и для ПФ ПИД-регулятора (7.3) в формулу для  $T_I$  (рис.7.1), получаем

$$T_I(s) = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s^3 + (2 + K_D)s^2 + (1 + K_P)s + K_I}. \quad (7.27)$$

По табл. 6.4 определяем, что знаменатель (7.27) для минимальной оценки ИВМО должен иметь вид

$$s^3 + 1,75\omega_n s^2 + 2,15\omega_n^2 s + \omega_n^3. \quad (7.28)$$

Отсюда получаем три условия для определения трех коэффициентов. Осталось определить параметр  $\omega_n$ , т.е. выполнить первый этап процедуры.

Значение  $\omega_n$  может быть определено неоднозначно, поскольку требование к времени выхода наложено в виде неравенства. Будем считать, что время выхода для системы 3-го порядка приближенно описывается выражением для  $T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}$ , полученным для систем 2-го порядка. Из этого

### Стандартные регуляторы с обратной связью

выражения следует, что для  $\zeta$  порядка 1 время выхода будет менее 0,5 с, если  $\omega_n$  больше 8. Поступим, как предлагает первоисточник: «выберем  $\omega_n=10$ ».

Приравнивая знаменатель (7.27) выражению (7.28) при  $\omega_n=10$ , находим значения коэффициентов  $K_1=214$ ,  $K_2=1000$ ,  $K_3=15,5$ . Теперь выражение (7.27) примет вид

$$T_1(s) = \frac{15,5s^2 + 214s + 1000}{s^3 + 17,5s^2 + 215s + 1000}. \quad (7.29)$$

Реакция системы с данной передаточной функцией имеет перерегулирование около 32%, время установления – 0,2 с.

Система, оптимальная по критерию ИВМО, должна иметь ПФ вида (6.16), т. е. не должна иметь нулей. Функция (7.29) этому требованию не удовлетворяет. Таким образом, минимизировать критерий ИВМО для ПИД-регулятора без использования предшествующего фильтра невозможно. Из выражения для  $T(s)$  (см. рис.7.1) следует, что ПФ фильтра должна иметь вид

$$G_p(s) = \frac{1000}{15,5s^2 + 214s + 1000} = \frac{64,5}{s^2 + 13,8s + 64,5}. \quad (7.30)$$

Окончательно для ПФ замкнутой системы получаем выражение

$$T(s) = \frac{1000}{s^3 + 17,5s^2 + 215s + 1000}. \quad (7.31)$$

Показатели качества системы с ПФ (7.31), т.е. с найденными коэффициентами ПИД-регулятора и характеристиками сглаживающего предшествующего фильтра, следующие:

- относительное перерегулирование 1,9%;
- время установления 0,45 с;
- установившаяся ошибка 0,0%.

Можно считать, что синтез дал прекрасные результаты.

**Упражнение 7.2.** Найдите с помощью компьютерного моделирования в Simulink показатели качества для объекта управления, рассмотренного в примере, при его замыкании единичной обратной связью, а также для систем (7.29) и (7.31). Убедитесь, что показатели имеют значения, приведенные в тексте.

*Посмотрите: вот он без страховки идёт,  
Чуть левее наклон – упадёт, пропадёт,  
Чуть правее наклон – всё равно не спасти....*

*В.С.Высоцкий*

## **ЛЕКЦИЯ 8. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. ТЕОРЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ**

### **8.1. Понятие устойчивости**

Рассматривая в предыдущих лекциях количественные показатели и оценки качества работы систем управления, мы имели в виду, что они имеют конечное значение. Это возможно только для **устойчивых** систем. Для неустойчивых систем такие показатели, как время выхода, установившаяся ошибка, а также все оптимальные оценки становятся бессмысленными, поскольку они обращаются в бесконечность. Неустойчивые системы управления неработоспособны, поэтому требование к устойчивости – это первое требование, выполнение которого должно проверяться при разработке автоматических систем управления. К рассмотрению способов анализа устойчивости систем мы и приступаем.

На самом деле понятие устойчивости относится не только к системам управления, а к динамическим системам вообще. Чтобы лучше понять смысл терминов и определений, которые здесь будут даны, приведём три примера. Обычный маятник в поле силы тяжести при отсутствии трения является **устойчивой системой**: при малом толчке он выходит из состояния равновесия и раскачивается, не увеличивая амплитуду. Если маятник находится в вязкой среде или велико трение в точке подвеса, маятник будет раскачиваться с уменьшающейся амплитудой и вернётся в состояние равновесия – это пример **асимптотически устойчивой системы**. Перевернутый маятник покинет положение равновесия и будет уходить всё дальше от него при сколь угодно малом внешнем воздействии – это **неустойчивая система**. Заметим, что перевернутый маятник можно стабилизировать путём быстрых осцилляций точки подвеса (маятник Капицы), и это яркий пример того, что с помощью внешних управляющих воздействий можно создать устойчивую систему для неустойчивого изначально объекта.

Можно дать следующее простое определение устойчивости [5]: **устойчивая система – это динамическая система, обладающая ограниченной реакцией на ограниченный входной сигнал**. Однако это качественное определение. Для анализа необходимы количественные оценки (критерии). Кроме того, различают две концепции устойчивости [8]:

- устойчивость по выходу, или техническую устойчивость;
- устойчивость по состоянию, или математическую устойчивость.

### Теоремы устойчивости для непрерывных систем

Рассмотрим понятие математической устойчивости, а затем укажем на её связь с технической устойчивостью.

Пусть все переменные состояния исследуемой системы управления доступны измерению, так что выходной вектор совпадает с вектором состояния  $\bar{y} = \bar{x}$  (управление по состоянию), а управляющее воздействие является известной функцией времени и переменных состояния:  $\bar{u} = \bar{u}(t, \bar{x})$ . Тогда математическую модель можно представить в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ f_n(t; x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \dots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \dots \\ x_{n0} \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

где  $f_k, k=1, 2, \dots, n$  - набор некоторых, вообще говоря, **нелинейных** функций, которые будем полагать вещественными непрерывными функциями своих аргументов. Исследования устойчивости динамической системы теперь сводятся к исследованию устойчивости решения системы дифференциальных уравнений [1].

Многие фундаментальные результаты теории устойчивости были получены великим русским математиком Александром Михайловичем Ляпуновым (1857-1918) в его докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения» (1892). Для формулировки основных результатов запишем систему (8.1) в краткой векторной форме

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x), & x &\in R_n, \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

(черта сверху в обозначениях векторов опущена), которую также будем называть «система (8.1)».

Пространство  $R_n$  является евклидовым линейным пространством, в котором определено скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$ :<sup>12</sup>

$$(x, y) \equiv [x_1, x_2, \dots, x_n] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n x_k y_k \equiv (x | y). \quad (8.2)$$

---

<sup>12</sup> Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия. М: Наука, 1979. 336 с.

Здесь введено удобное обозначение для скалярного произведения, предложенное Полем Адриеном Морисом Дираком для работы с векторами состояний в квантовой механике<sup>13</sup>. Однако в рассматриваемом нами случае компоненты векторов считаются вещественными числами, в отличие от квантовой механики, поэтому справедливо равенство  $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$ . Норма (длина) вектора в пространстве  $R_n$  определится как  $|x| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$ .

## 8.2. Математическая устойчивость. Основные определения

В теории устойчивости Ляпунова исследуется на устойчивость какое-нибудь одно решение. Пусть  $z(t, t_0, z_0)$  – решение задачи (8.1), продолжимое вправо до бесконечности, т.е.  $z(t)$  существует на интервале  $[t_0, \infty)$  и лежит внутри шара радиуса  $H$  в евклидовом пространстве  $R_n$ . Следуя Ляпунову, назовём его **невозмущённым решением**, а решение  $x(t, t_0, x_0)$  той же задачи с начальными условиями  $x_0$ , несколько отличающимися от  $z_0$ , назовём **возмущённым**.

**Определение 8.1.** Решение  $z(t, t_0, z_0)$  задачи (8.1) называется **устойчивым по Ляпунову**, если для любого  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < H$ ) существует  $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$  такое, что все решения  $x(t, t_0, x_0)$  задачи (8.1) бесконечно продолжимы вправо, как только  $|x_0 - z_0| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$ , и для этих решений справедливо неравенство

$$|x(t, t_0, x_0) - z(t, t_0, z_0)| \leq \varepsilon, \quad t_0 \leq t \leq \infty.$$

Для одномерного пространства определение устойчивости легко интерпретировать геометрически: график зависимости  $x(t)$  отклоняется от  $z(t)$  не более чем на  $\varepsilon$  на всем интервале времени.

Подчеркнём, что определение 8.1 дано для устойчивости **одного** определённого решения, а не всех решений задачи.

Исследование устойчивости любого решения  $z(t)$  векторного уравнения (8.1) можно свести к исследованию устойчивости тривиального (нулевого) решения некоторого другого уравнения. Функция  $y(t) = x(t) - z(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{y}(t) = f(t, y + z) - f(t, z) = g(t, y), \quad g(t, 0) = 0. \quad (8.3)$$

Из свойства функции  $g$  следует, что тривиальное решение  $y \equiv 0$  является решением однородного уравнения  $\dot{y} = 0$ . Поэтому важно (и достаточно) рассмотреть определение устойчивости тривиального решения.

<sup>13</sup> Дирак П.А.М. Принципы квантовой механики. 2-е изд. М: Наука, 1979. 480 с.

## Теоремы устойчивости для непрерывных систем

**Определение 8.2.** Тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  уравнения (8.3) называется **устойчивым по Ляпунову**, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдётся  $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$  такое, что неравенство  $|x(t, t_0, x_0)| \leq \varepsilon$  выполнено при всех  $t \geq t_0$ , как только  $|x_0| \leq \delta(\varepsilon, t_0)$ .

Примеры устойчивого решения и фазовой траектории для устойчивого решения приведены на рис. 8.1 и рис. 8.2.

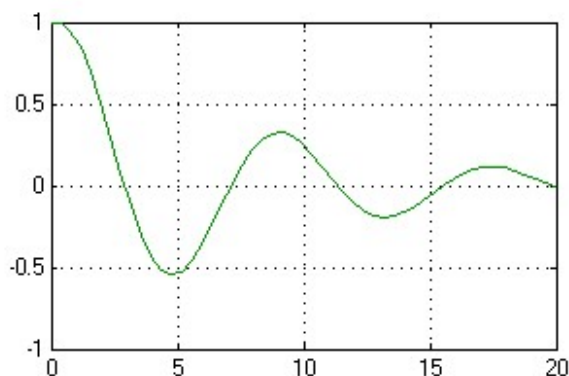


Рис. 8.1. График устойчивого решения

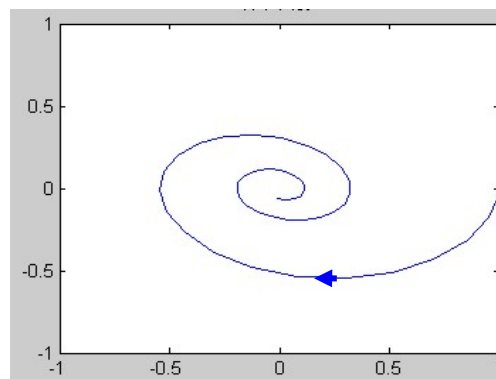


Рис. 8.2. Фазовая траектория устойчивого решения

Решение, не являющееся устойчивым, называют неустойчивым.

**Определение 8.3.** Тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  называется **неустойчивым по Ляпунову**, если для некоторого  $\varepsilon > 0$  и любого  $\delta > 0$  найдутся решения  $x(t, t_0, x_0)$ , и момент времени  $t_1 > t_0$ , такие, что  $|x(t_1, t_0, x_0)| > \varepsilon$ , хотя  $|x_0| \leq \delta$ .

Примеры неустойчивого решения и фазовой траектории для неустойчивого решения приведены на рис. 8.3 и рис. 8.4

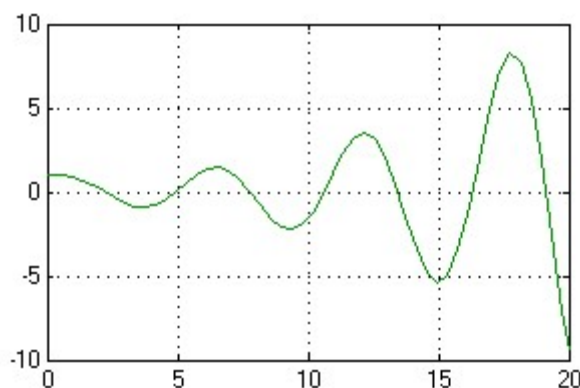


Рис. 8.3. График неустойчивого решения

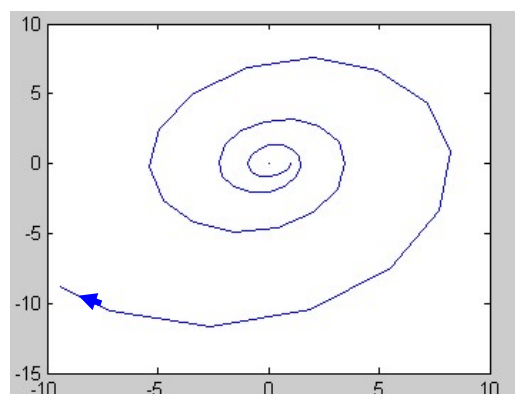


Рис. 8.4. Фазовая траектория неустойчивого решения

Согласно определению устойчивости 8.2 возмущённое решение может оставаться внутри трубки сечения  $2\varepsilon$ . Если величина  $\varepsilon$  превышает допустимую ошибку регулирования, то требование устойчивости системы является недостаточным. Применяют понятие асимптотической устойчивости, усиливающее понятие устойчивости по Ляпунову.

**Определение 8.4.** Тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  уравнения (8.1) называется **асимптотически устойчивым**, если:

- 1) оно устойчиво по Ляпунову;
- 2) для всякого  $t_0$  существует  $\Delta = \Delta(t_0) > 0$  такое, что  $x(t, t_0, x_0) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$  при  $|x_0| \leq \Delta$ .

Решение, график которого приведен на рис. 8.1, в соответствии с определением 8.4, является асимптотически устойчивым.

Если выполняется только условие 2 из определения 8.4, то говорят, что тривиальное решение является **притягивающим** (или **аттрактором**).

Частным случаем асимптотической устойчивости является экспоненциальная устойчивость.

**Определение 8.5.** Говорят, что тривиальное решение уравнения (8.1) **экспоненциально устойчиво**, если всякое решение  $x(t, t_0, x_0)$  этого уравнения удовлетворяет оценке

$$|x(t, t_0, x_0)| \leq B |x_0| \exp(-\alpha(t - t_0)),$$

$$B > 0, \alpha > 0, t \geq t_0, x_0 < H.$$

Отметим, что для линейных уравнений  $\dot{x} = A(t)x(t)$  экспоненциальная устойчивость эквивалентна асимптотической устойчивости.

При исследовании устойчивости по выходу (техническая устойчивость) используются другие термины. Соответствие определений математической устойчивости и технической устойчивости приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Математическая устойчивость	Техническая устойчивость
Система устойчива по Ляпунову	Система нейтрально устойчива
Система асимптотически устойчива	Система устойчива
Система неустойчива	Система неустойчива



## 8.3. Теоремы устойчивости

Для линейных уравнений устойчивость одного решения влечёт устойчивость любого другого решения и можно говорить, что некоторая линейная система устойчива (или неустойчива). Справедлива следующая теорема [1, §1]:

**Теорема 8.1.** Для устойчивости решения  $z(t, t_0, z_0)$  линейной системы  $\dot{y}(t) = A(t)y(t) + f(t)$  при любом  $z_0$  и любой правой части  $f(t)$ , где  $A(t)$  и  $f(t)$  – непрерывные функции, необходимо и достаточно, чтобы тривиальное решение  $x(t) \equiv 0$  однородной системы  $\dot{x} = A(t)x(t)$  было устойчивым.

Таким образом, устойчивость линейной системы определяется свойствами матрицы  $A(t)$ . В частности, для устойчивости линейных стационарных систем достаточно, чтобы вещественные части всех корней характеристического уравнения были отрицательны. В MATLAB имеются две функции: **poly(A)** – определяет характеристический полином матрицы  $A$  и **roots(p)** – находит корни полинома  $p$ . Применение этих функций решает вопрос об исследовании на устойчивость ЛСС. Кроме того, существуют критерии, на основании которых можно судить об устойчивости линейной стационарной системы, **не решая** её характеристического уравнения. Их мы рассмотрим позже.

Универсальным методом исследования устойчивости различных классов систем является второй метод Ляпунова<sup>14</sup>. В качестве инструмента исследования в этом методе используются некоторые специально подобранные функции, называемые функциями Ляпунова.

Вещественную непрерывно дифференцируемую функцию  $V(t, x)$ , удовлетворяющую условию  $V(t, 0) \equiv 0$ , называют **функцией Ляпунова**. Поскольку вектор  $x$  удовлетворяет уравнению (8.1), то полная производная функции Ляпунова по времени имеет вид

$$\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x} \middle| f(t, x) \right\rangle. \quad (8.4)$$

Из выражения (8.4) следует, что для вычисления  $\dot{V}$  фактического решения  $x(t)$  не требуется.

Кроме функции  $V$  ниже будут использоваться скалярные непрерывные неубывающие функции  $\omega_k(u) (u \geq 0, k = 1, 2, \dots)$  такие, что  $\omega_k(0) = 0$  и  $\omega_k(u) > 0$  при  $u > 0$ .

<sup>14</sup> Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.:Л.:Гостехиздат, 1950. 472 с.

**Теорема 8.2 (первая теорема Ляпунова).** Пусть существует функция Ляпунова  $V(t, x)$  такая, что

$$\omega_1(|x|) < V(t, x), \quad (8.5)$$

$$\dot{V} \leq 0. \quad (8.6)$$

Тогда тривиальное решение уравнения (8.1) устойчиво по Ляпунову.

Функция  $V$  в этом случае называется **определенно-положительной** (свойство (8.5)) со **знакоотрицательной** производной (8.6). Напомним, что свойства функции Ляпунова исследуются на классе решений уравнения (8.1), так что её полная производная определяется по формуле (8.4). Доказательство теоремы приведено в [1, § 2].

**Теорема 8.3 (вторая теорема Ляпунова).** Пусть существует функция Ляпунова  $V(t, x)$  такая, что

$$\omega_1(|x|) \leq V(t, x) \leq \omega_2(|x|), \quad (8.7)$$

$$\dot{V}(t, x) \leq -\omega_3(|x|). \quad (8.8)$$

Тогда тривиальное решение уравнения (8.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство теоремы приведено в [1, § 2].

**Упражнение 8.1.** Исследуйте с помощью теорем Ляпунова устойчивость тривиального решения следующих уравнений:

$$\text{а) } \dot{x} = -2x - 3y + x^5, \dot{y} = x + y - y^2, V = 4x^2 + 14xy + 19y^2;$$

$$\text{б) } \dot{x} = -xy^4, \dot{y} = yx^4, V = x^4 y^4;$$

$$\text{в) } \dot{x} = -2y - x^5, \dot{y} = 5x - y^5, V = 5x^2 + y^2.$$

Как выбирается вид функции Ляпунова при исследовании устойчивости систем, рассмотрим на конкретном примере.

#### 8.4. Устойчивость вращения твёрдого тела

Уравнение вращательного движения твёрдого тела в подвижной системе координат имеет вид<sup>15</sup>

$$\dot{\vec{M}} = \vec{M} \times \vec{\Omega} + \vec{K}, \quad \vec{M} = \vec{I} \cdot \vec{\Omega}, \quad (8.9)$$

<sup>15</sup> Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М.:Наука, 1973. 208 с.

### Теоремы устойчивости для непрерывных систем

где  $\vec{M}$  – момент импульса тела,  $\vec{\Omega}$  – угловая скорость,  $\vec{K}$  – момент внешних сил,  $\vec{I}$  – тензор инерции. Обозначив главные моменты инерции как  $I_1, I_2, I_3$ , запишем уравнения свободного вращения ( $\vec{K} = 0$ ) в проекциях на координатные оси собственной системы (начало координат находится в центре инерции, координатные оси 1, 2, 3 направлены по главным осям инерции):

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 &= (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3, \\ I_2 \dot{\Omega}_2 &= (I_3 - I_1) \Omega_3 \Omega_1, \\ I_3 \dot{\Omega}_3 &= (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2, \end{aligned} \quad (8.10)$$

уравнения Эйлера. Отметим, что система (8.10) имеет два интеграла движения: полную энергию  $E$  и абсолютную величину момента  $M$ , т.е. величины

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2), \\ M^2 &= I_1^2 \Omega_1^2 + I_2^2 \Omega_2^2 + I_3^2 \Omega_3^2 \end{aligned}$$

не изменяются с течением времени. Для дальнейшего анализа удобно немного переопределить сохраняющиеся величины и выбрать их следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1 &= 2E = I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2, \\ F_2 &= M^2 - I_1 F_1 = I_2 (I_2 - I_1) \Omega_2^2 + I_3 (I_3 - I_1) \Omega_3^2. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Непосредственной подстановкой в (8.10) можно убедиться, что выполняются равенства

$$\dot{F}_1 = 0, \quad \dot{F}_2 = 0. \quad (8.12)$$

Исследуем устойчивость вращения тела вокруг первой оси, т.е. устойчивость следующего решения нелинейной системы (8.10)

$$\Omega_1 = \Omega_0, \Omega_2 = 0, \Omega_3 = 0. \quad (8.13)$$

Решение (8.13) не является тривиальным, поэтому теоремы устойчивости не применимы. Поступим так, как рекомендовано выше (см. (8.3)). Введём новые переменные

$$x_1 = \Omega_1 - \Omega_0, x_2 = \Omega_2, x_3 = \Omega_3. \quad (8.14)$$

Теперь нам нужно исследовать устойчивость тривиального решения  $x = 0$ , но для другой системы

$$\begin{aligned} I_1 \dot{x}_1 &= (I_2 - I_3)x_2x_3, \\ I_2 \dot{x}_2 &= (I_3 - I_1)x_3(x_1 + \Omega_0), \\ I_3 \dot{x}_3 &= (I_1 - I_2)x_2(x_1 + \Omega_0). \end{aligned} \quad (8.15)$$

Выдающийся русский учёный Николай Гурьевич Четаев (1902-1959) показал<sup>16</sup>, что функцию Ляпунова можно искать в виде **связки интегралов**

$$V_\lambda = F_1^2 - \lambda F_2, \quad \lambda = \text{const}. \quad (8.16)$$

В силу равенств (8.12) мы имеем  $\dot{V}_\lambda = 0$  при любом  $\lambda$ , т.е. выполнено условие (8.6) теоремы 8.2. Если теперь удастся найти  $\lambda$ , при котором функция (8.16) будет определённо-положительна, решение будет устойчивым, в противном случае – неустойчивым.

Рассмотрим движение асимметрического или симметрического волчка, вытянутого вдоль первой оси, вокруг которой он вращается:

$$I_1 < I_2 \leq I_3. \quad (8.17)$$

Положив  $\lambda = -1$ , с помощью формул (8.11), (8.14) и (8.16) получим

$$V_{-1} = [I_1(x_1^2 + 2x_1\Omega_0) + I_2x_2^2 + I_3x_3^2]^2 + I_2(I_2 - I_1)x_2^2 + I_3(I_3 - I_1)x_3^2. \quad (8.18)$$

Видим, что функция  $V_{-1}$  является определённо-положительной, поэтому вращение вокруг оси с наименьшим моментом инерции устойчиво.

Если рассмотреть вращение сплюснутого волчка

$$I_1 > I_2 \geq I_3 \quad (8.19)$$

вокруг оси с наибольшим моментом инерции, то в качестве функции Ляпунова можно взять

$$V_{+1} = [I_1(x_1^2 + 2x_1\Omega_0) + I_2x_2^2 + I_3x_3^2]^2 + I_2(I_1 - I_2)x_2^2 + I_3(I_1 - I_3)x_3^2. \quad (8.20)$$

Функция  $V_{+1}$  также является определённо-положительной, и вращение вокруг оси с наибольшим моментом инерции тоже устойчиво.

При вращении вокруг средней оси ( $I_3 > I_1 > I_2$ ) не существует  $\lambda$ , при котором функция (8.16) определённо-положительна, поэтому вращение вокруг средней оси неустойчиво, вектор угловой скорости будет изменять своё положение в пространстве.

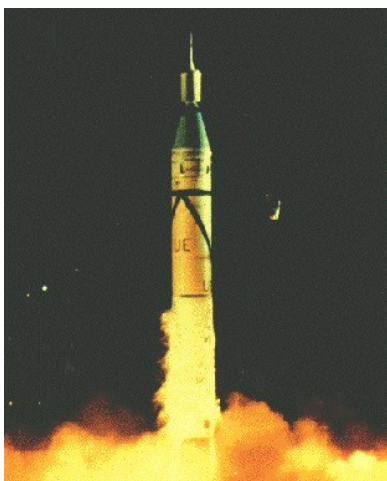
<sup>16</sup> Четаев Н.Г. Устойчивость движения. – 4-е изд. – М.:Наука, 1990. 175 с.

## Теоремы устойчивости для непрерывных систем

Полученные результаты можно применить для исследования движения реальных объектов, например, при изучении угловых движений космических аппаратов (КА). Обработка радиоастрономических наблюдений показала, что первый искусственный спутник Земли имел устойчивое вращение, а спутник «Эксплорер-1» оказался неустойчивым и совершал переходы из одного крайнего положения в другое каждые 90 мин.

### Историческая справка:

Первый спутник Земли (СССР, **4 октября 1957г.**) представлял из себя хромированный шар диаметром 58 см и весом 83,6 кг. На его поверхности были закреплены четыре антенны, непрерывно передававшие с двух бортовых передатчиков простейшие сигналы. Эти слабые позывные смогли принять множество радиолюбителей во всем мире. На околоземной орбите спутник просуществовал всего 92 дня. За это время он успел облететь Землю 1400 раз, пройдя около 60 млн "космических" километров.



«Эксплорер-1» (Explorer-1, "Исследователь") был первым космическим аппаратом Соединённых Штатов. Это был спутник цилиндрической формы, весивший 13,6 кг. Эксплорер-1 был запущен при помощи четырёхступенчатой ракеты «Юпитер-С» (модифицированная баллистическая ракета армии США "Redstone") и вышел на околоземную орбиту **31 января 1958 г.** На «Эксплорер-1» были установлены приборы для измерения внутренней и внешней температур, регистрации микрометеоритных столкновений, был проведён эксперимент по измерению плотности электронов и ионов в космосе (Дж.А. Ван Аллен). Был открыт пояс вокруг Земли из высокоэнергетичных электронов и ионов, захваченных земной магнитосферой (пояс Ван Аллена). «Эксплорер-1» прекратил радиопередачи 28 февраля 1958 г., однако находился на орбите ещё до марта 1970 г.

На самом деле реальные КА являются упругими, а не твёрдыми телами. Теоретическое изучение полученных экспериментальных результатов привело к выводу о том, что учет упругих сил меняет устойчивость вращения тела вокруг неподвижной точки<sup>17</sup>. Тщательное исследование вопроса об устойчивости вращения упругого тела вокруг неподвижной точки показывает, что, как и для твердого тела, вращение вокруг средней оси – неустойчивое. Вращение же вокруг малой оси при учете упругих сил становится неустойчивым. Рассмотренный пример говорит о том, что к разработке математических моделей систем управления нужно подходить очень тщательно, особенно при исследовании систем на устойчивость.

---

<sup>17</sup> Ликинз П. Угловые движение КА и управление. Личная оценка ранних разработок// Аэрокосмическая техника. 1986. № 12.

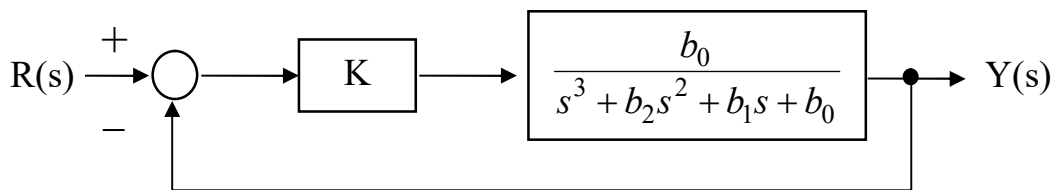
*Человек раздвоен снизу, а не сверху, — для того, что две опоры надежнее одной.*

*К. Прутков*

## ЛЕКЦИЯ 9. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

### 9.1. Методы анализа устойчивости ЛСС

Устойчивые, асимптотически устойчивые и неустойчивые линейные стационарные системы можно различить по виду переходных характеристик. Графиком переходной характеристики асимптотически (экспоненциально) устойчивой ЛСС будет колебательная или монотонно изменяющаяся кривая, огибающая которой по экспоненте стремится к определённому значению. Графиком переходной характеристики устойчивой системы будет кривая, амплитуда изменения которой находится в полосе конечного размера. Неустойчивая система имеет переходную характеристику, амплитуда которой неограниченно возрастает с течением времени.



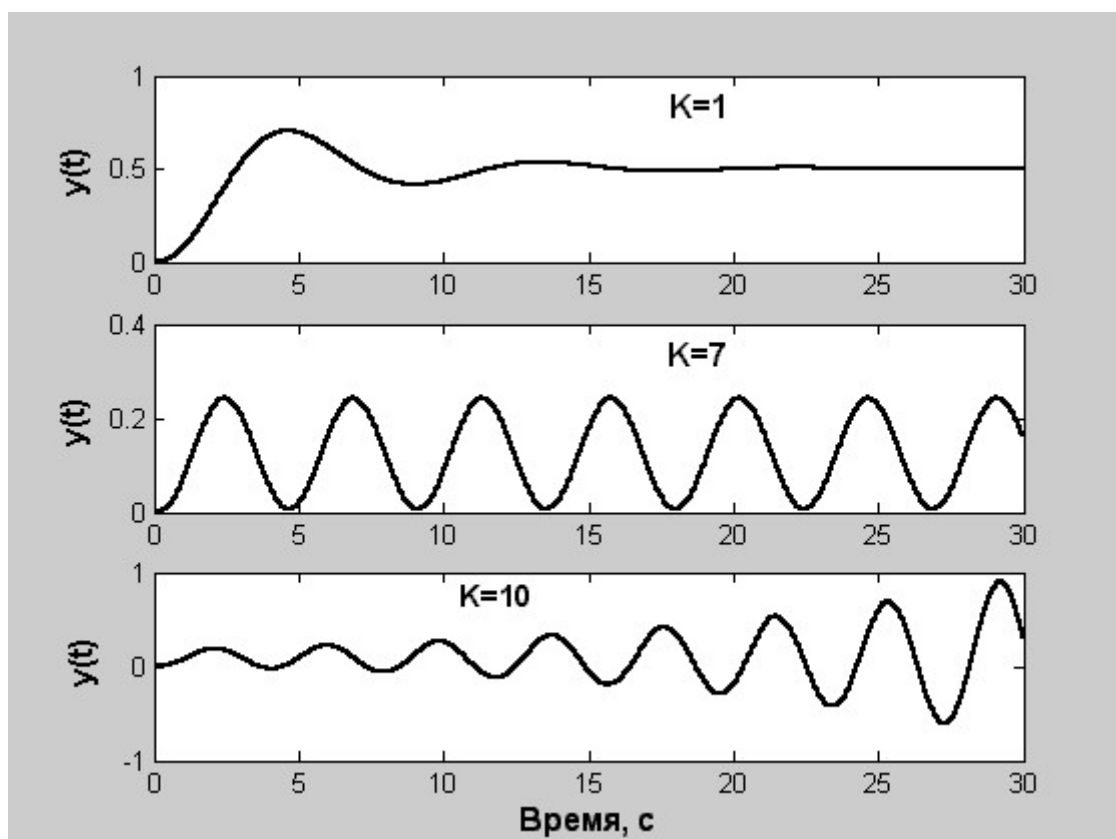
**Рис. 9.1.** Структурная схема П-регулятора для объекта 3-го порядка

Рассмотрим систему управления со структурной схемой, изображённой на рис. 9.1. Её переходные характеристики при  $b_2 = 4, b_1 = 2, b_0 = 1$  изображены на рис. 9.2 для трёх различных значений коэффициента усиления  $K$ . Из вида графиков следует, что при коэффициенте  $K = 1$  система асимптотически устойчива, при  $K = 7$  устойчива (технический термин – нейтрально устойчива), при  $K = 10$  система неустойчива.

Таким образом, зная вид переходной характеристики, мы можем сделать вывод об устойчивости системы. Если мы решим характеристическое уравнение, то устойчивость или неустойчивость системы определится по виду корней характеристического уравнения. Однако существуют методы анализа устойчивости линейных стационарных систем, позволяющие судить об устойчивости или неустойчивости системы с данными параметрами или даже в некоторых областях изменения параметров, не решая характеристического уравнения и не строя переходных характеристик.

Методы анализа устойчивости ЛСС можно разделить на две группы: анализ устойчивости систем дифференциальных уравнений (анализ во временнóм домене) и анализ в частотной области с использованием комплексной частоты  $s$  или действительной частоты  $\omega$ . Методы с

использованием действительной частоты можно применять аналитически, а также реализовать экспериментально (в этом их большое преимущество).



**Рис. 9.2.** Переходные характеристики асимптотически устойчивой ( $K = 1$ ), устойчивой ( $K = 7$ ) и неустойчивой ( $K = 10$ ) систем управления

Основные методы анализа устойчивости приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Метод (критерий)	Авторы	Дата
Анализ устойчивости во временной области: - критерий Рауса-Гурвица; - критерий Лъенара-Шипара	А.Гурвиц, Э.Дж.Раус	Конец XIX века
Анализ устойчивости в частотной области: - диаграммы Боде - метод Найквиста; - критерий Михайлова;	Г.У.Боде Г.Найквист А.В.Михайлов	1927 г. 1932 г. 1936 г.
Анализ корней в s-плоскости - метод корневого годографа	У.Р.Эванс	1948 г.

Рассмотрим некоторые из этих методов.

## 9.2. Анализ устойчивости во временной области

В соответствии с теоремой 8.1 для исследования устойчивости линейной стационарной системы вида (3.10) достаточно исследовать устойчивость тривиального решения системы

$$\dot{x} = Ax(t) \quad x \in R_n. \quad (9.1)$$

Напомним, что общее решение этой системы имеет вид<sup>18</sup>

$$\bar{x}(t) = \sum_{i=1}^k \left( \sum_{q=1}^{r_i} C_{iq} \frac{t^{r_i-q}}{(r_i-q)!} \bar{h}_q^{(i)} \right) e^{\lambda_i t}, \quad r_1 + r_2 + \dots + r_k = n. \quad (9.2)$$

Здесь  $\lambda_i$  – действительное или комплексное число, являющееся одним из собственных значений матрицы  $A$ , т.е. корнем **характеристического уравнения** матрицы  $A$

$$\det(\lambda I - A) = 0, \quad (9.3)$$

кратности  $r_i$ ;  $\bar{h}^i$  – собственный вектор матрицы  $A$ , соответствующий собственному значению  $\lambda_i$ ; константы  $C_{iq}$  определяются начальными условиями.

Пусть корень  $\lambda_j$  имеет вид

$$\lambda_j = \operatorname{Re} \lambda_j + i \operatorname{Im} \lambda_j, \quad i^2 = -1. \quad (9.4)$$

Если этот корень не вырожден ( $r_j = 1$ ), в сумме (9.2) будут присутствовать слагаемое, содержащее экспоненту  $e^{i \operatorname{Im} \lambda_j t} \cdot e^{\operatorname{Re} \lambda_j t}$ , которое увеличивается до бесконечности при  $t \rightarrow \infty$ , если  $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ , стремится к нулю при  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$  или изменяется в конечных пределах, если  $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$ . Если  $r_j > 1$ , то в сумме (9.2) будут присутствовать слагаемые, содержащие произведение экспоненты на степенные функции:  $t^m \cdot e^{i \operatorname{Im} \lambda_j t} \cdot e^{\operatorname{Re} \lambda_j t}$ ,  $m = 1, 2, \dots, r_j - 1$ . Эти слагаемые стремятся к нулю только при  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ , при  $\operatorname{Re} \lambda_j \geq 0$  они расходятся. В результате анализа решения (9.2) доказана теорема:

<sup>18</sup> Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. 5-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 320 с.



**Теорема 9.1.** Для устойчивости тривиального решения уравнения (9.1) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения  $\lambda_i$  матрицы  $A$  удовлетворяли условию  $\operatorname{Re} \lambda_i \leq 0$ , причём собственные значения  $\lambda_j$  такие, что  $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$  имеют  $r_j = 1$ . Для асимптотической устойчивости уравнения (9.1) необходимо и достаточно, чтобы  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ .

Таким образом, устойчивость (асимптотическая устойчивость или неустойчивость) уравнения (9.1) определяется расположением относительно мнимой оси корней характеристического уравнения (9.3) матрицы  $A$  (рис.9.3).

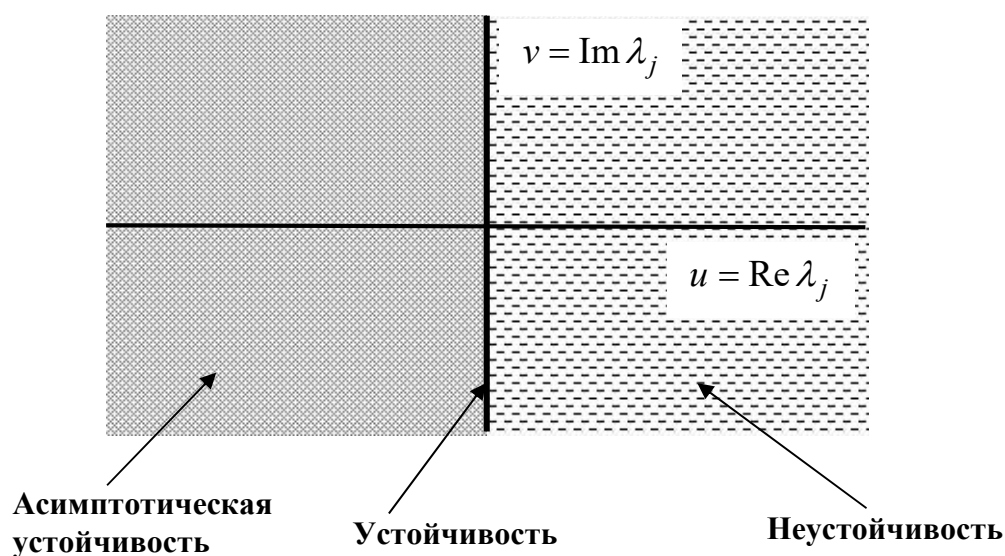


Рис. 9.3. Области устойчивости

Раскрывая определитель, можно привести уравнение (9.3) к виду

$$P_n(\lambda) = 0,$$

где

$$P_n(\lambda) = a_0 + a_1 \lambda + \dots + a_n \lambda^n, a_n = 1. \quad (9.5)$$

**Определение 9.1.** Многочлен (9.5) называется **устойчивым многочленом (многочленом Гурвица)**, если все его корни  $\lambda_j$  имеют отрицательную вещественную часть, т.е.  $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$ . Матрицу  $A$  в этом случае тоже называют **устойчивой** или **гурвицевой**.

Необходимое условие устойчивости любого многочлена было сформулировано Александром Стодолой в виде теоремы.

**Теорема 9.2.** (А.Стодола). Все коэффициенты устойчивого многочлена положительны.

Действительно, пусть  $\lambda_j^{\pm} = -\alpha_j \pm i\beta_j$ ,  $j = (1, \dots, r)$ ,  $\lambda_k = -\gamma_k$   $k = (1, \dots, l)$ ,  $2r + l = n$  – корни устойчивого многочлена  $P_n(\lambda)$ , т.е.  $\alpha_j > 0, \gamma_k > 0$ . Раскладывая  $P_n(\lambda)$  на множители, имеем

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= \prod_{j=1}^r (\lambda - \lambda_j^+) (\lambda - \lambda_j^-) \prod_{k=1}^l (\lambda - \lambda_k) = \\ &= \prod_{j=1}^r (\lambda^2 + 2\alpha_j \lambda + \alpha_j^2 + \beta_j^2) \prod_{k=1}^l (\lambda + \gamma_k). \end{aligned}$$

Таким образом,  $P_n(\lambda)$  представлен в виде произведения многочленов с положительными коэффициентами, поэтому все его коэффициенты положительны.

Положительность коэффициентов является необходимым условием устойчивости, т.е. многочлен, имеющий хотя бы один отрицательный коэффициент, является неустойчивым. Но это простое условие, к сожалению, не является достаточным для устойчивости многочлена. Другими словами, существуют многочлены с положительными коэффициентами, которые неустойчивы. Например, многочлен  $P_3(z) = 30 + 4z + z^2 + z^3$  имеет корни  $z_1 = -3, z_{2,3} = 1 \pm 3i$ .

Необходимый и достаточный признак устойчивости был сформулирован в конце XIX в. А.Гурвицем и Э.Дж.Раусом независимо друг от друга. Составим из коэффициентов многочлена (9.5) матрицу:

$$M_{P_n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \dots & a_n \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

Если в этой матрице встречается коэффициент  $a$  с индексом больше  $n$ , он полагается равным нулю.

**Определение 9.2.** Матрица (9.6) называется **матрицей Гурвица**.

**Критерий Рауса-Гурвица.** Для того чтобы многочлен  $P_n(\lambda)$  с  $a_0 > 0$  и  $a_n \neq 0$  был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы были положительны все главные диагональные миноры его матрицы Гурвица  $M_{P_n}$ :

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}.$$

**Критерий Льенара-Шипара.** Для того чтобы многочлен с положительными коэффициентами был устойчивым, необходимо и достаточно выполнение одного из двух условий: 1)  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$ , ..., 2)  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_4 > 0$ , ... .

Таким образом, если при анализе устойчивости многочлена заранее известно, что его коэффициенты положительны, т.е. выполнены условия теоремы 9.2, то применяют критерий Льенара-Шипара, при этом достаточно проверить в два раза меньше условий, чем в критерии Рауса-Гурвица.

Доказательства этих критериев можно найти в книге Б.П.Демидовича<sup>19</sup>.

Для примера рассмотрим устойчивость системы управления валом электродвигателя, математическая модель которой записана в виде дифференциальных уравнений в фазовом пространстве (2.5). Синтезируем ПД-регулятор:

$$u = -K\varphi - K_D\dot{\varphi} = -Kx_1 - K_Dx_2. \quad K > 0, K_D > 0. \quad (9.7)$$

Подстановка (9.7) в (2.5) приводит к системе (9.1) с матрицей  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K \cdot k}{LI} & -\frac{K_D \cdot k}{LI} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}. \quad (9.8)$$

Характеристическое уравнение матрицы (9.8) имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ \frac{K \cdot k}{LI} & \frac{K_D \cdot k}{LI} & \lambda + \frac{R}{L} \end{bmatrix} = 0 \quad (9.9)$$

Многочлен  $P_3(\lambda)$ , соответствующий (9.9), имеет вид

$$P_3(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \lambda^3, \\ a_0 = \frac{Kk}{LI}, a_1 = \frac{K_D k}{LI}, a_2 = \frac{R}{L}. \quad (9.10)$$

---

<sup>19</sup> Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472с.

Составляем матрицу Гурвица:  $M_P = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Поскольку, согласно (9.10), все коэффициенты исследуемого многочлена положительны, достаточно воспользоваться критерием Ляпунова-Шипара, который в нашем случае сводится к одному неравенству

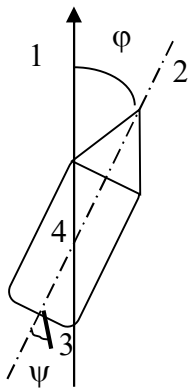
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 > 0. \quad (9.11)$$

Используя выражения (9.10) для коэффициентов многочлена, запишем неравенство (9.11) в виде

$$K \cdot L < K_D \cdot R. \quad (9.12)$$

Это и есть условие устойчивости ПД-регулятора, управляющего поворотом вала электродвигателя. Самостоятельно прокомментируйте полученный результат.

**Упражнение 9.1.** Рассмотрим задачу об автоматической стабилизации курса корабля. Корабль, двигающийся с постоянной скоростью, испытывает вращательное движение вокруг вертикальной оси (изменяет курс), если положение руля отклоняется от осевой линии. Простейшая модель этого движения описывается уравнением



$$I\ddot{\varphi} + h\dot{\varphi} = k\psi,$$

**Рис. 9.4.** Модель корабля: 1 – курс корабля, 2 – ось корабля, 3 – центр инерции, 4 – руль

где  $\varphi$  – угол отклонения корабля от курса,  $\psi$  – угол отклонения руля от оси судна,  $I$  – момент инерции корабля относительно вертикальной оси, проходящей через центр корабля,  $h$  – коэффициент жидкостного трения,  $k$  – коэффициент эффективности руля (рис. 9.4). Пусть автоматический регулятор положения руля (авторулевой) работает на основе ПД-алгоритма, так что уравнение авторулевого имеет вид

$$T\dot{\psi} + \psi = -\alpha\dot{\xi} - \beta\xi.$$

Здесь  $\xi$  – измеренное значение угла отклонения,  $\alpha$  и  $\beta$  – пропорциональный и дифференциальный коэффициенты (параметры авторулевого, которые могут подбираться),  $T$  – постоянная времени авторулевого. В уравнении авторулевого учтено, что измерение угла отклонения  $\varphi$  не происходит мгновенно, а описывается уравнением  $\tau\dot{\xi} + \xi = \varphi$ , где  $\tau$  – постоянная времени измерителя.

## Устойчивость линейных стационарных систем

1. Опишите структуру автоматической системы управления курсом корабля. Составьте структурную схему замкнутой системы управления.
2. Пусть в некоторых единицах измерения параметры системы имеют следующие значения:  $I = 1000$ ,  $h = 0,01$ ,  $k = 1$ ,  $T = 100$ ,  $\tau = 0,1$ . В пространстве параметров  $(\alpha, \beta)$  найдите ту область, в которой замкнутая система управления асимптотически устойчива.
3. Постройте Simulink-модель системы управления и проверьте результаты аналитического определения области устойчивости.

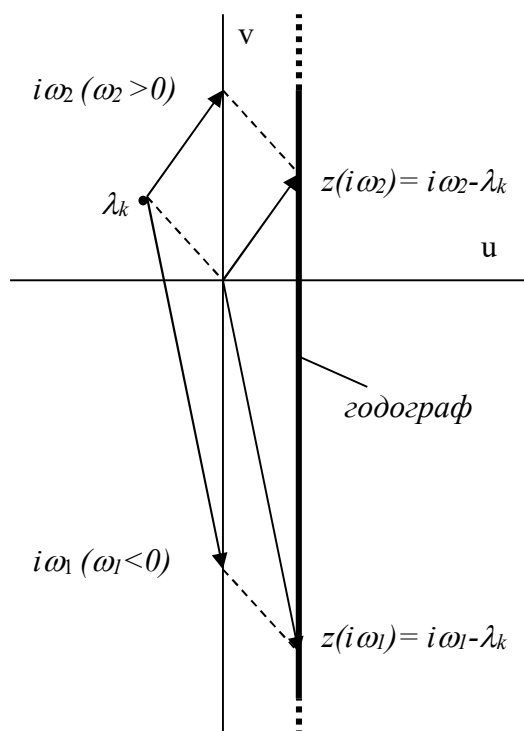
### 9.3. Частотные критерии устойчивости

Применение критерия Рауса – Гурвица к реальным системам автоматического регулирования приводит к сложным вычислениям и не позволяет выявить влияние отдельных параметров на устойчивость системы. Более удобными в приложениях оказываются частотные критерии А.В.Михайлова и Г.Найквиста.

Рассмотрим многочлен (9.5). Положим  $\lambda = i\omega$ , ( $i^2 = -1$ ) и построим **годограф Михайлова (амплитудно-фазовую характеристику)**  $P_n(i\omega)$  этого многочлена, разложив его на множители

$$z = P_n(i\omega) = a_n(i\omega - \lambda_1) \dots (i\omega - \lambda_n).$$

Геометрически  $i\omega - \lambda_k$  есть вектор в комплексной плоскости  $z$ , началом которого служит точка  $\lambda_k$  - корень многочлена  $P_n(\lambda)$ , а концом – точка  $\lambda = i\omega$  (рис.9.5).



**Рис. 9.5.** Годограф для одного устойчивого корня

Так как  $P_n(i\omega)$  - комплексное число, то

$$\arg P_n(i\omega) = \arg a_n + \arg(i\omega - \lambda_1) + \dots + \arg(i\omega - \lambda_n) \quad (9.13)$$

Если корень  $\lambda_k$  лежит в левой полуплоскости ( $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ ), то при изменении  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  вектор  $i\omega - \lambda_k$  вращается в положительном направлении (против хода часовой стрелки) и приращение аргумента равно  $\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$

$$\Delta \arg(i\omega - \lambda_k) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = \pi. \quad (9.14)$$

Если же корень  $\lambda_l$  лежит в правой полуплоскости, то вектор  $(i\omega - \lambda_l)$  вращается по ходу часовой стрелки и

$$\Delta \arg(i\omega - \lambda_l) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = -\pi.$$

Из соотношений (9.13) и (9.14) вытекает следующая теорема.

**Теорема 9.3.** Многочлен  $P_n(\lambda)$ , не имеющий чисто мнимых корней, является устойчивым тогда и только тогда, когда

$$\Delta \arg P_n(i\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = n\pi. \quad (9.15)$$

Для упрощения условия (9.15) отделим действительную и мнимую части  $P_n(i\omega)$ . Имеем

$$P_n(i\omega) = a_0 + a_1 i\omega + a_2 (i\omega)^2 + \dots + a_n (i\omega)^n = (a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 + \dots) + i(a_1 \omega - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 + \dots).$$

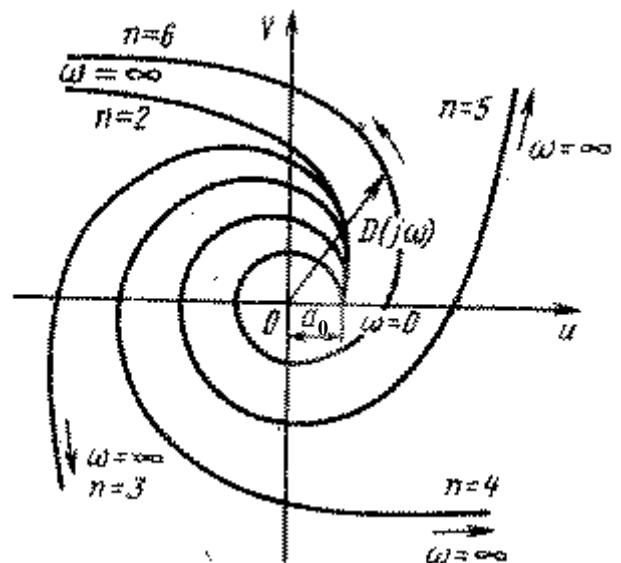
Отсюда видно, что  $\operatorname{Re} P_n(i\omega)$  есть четная функция от  $\omega$ , а  $\operatorname{Im} P_n(i\omega)$  - нечетная. Поэтому годограф многочлена  $P_n(i\omega)$  состоит из двух частей, симметричных относительно действительной оси, первая из которых соответствует изменению  $\omega$  от  $-\infty$  до 0, а вторая - от 0 до  $+\infty$ . В результате получаем следующее утверждение.

**Критерий Михайлова.** Для устойчивости многочлена  $P_n(\lambda)$ , не имеющего чисто мнимых корней, необходимо и достаточно, чтобы

$$\Delta \arg P_n(i\omega) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2} n. \quad (9.16)$$

На рис. 9.6 приведены различные годографы Михайлова для  $n = 2, \dots, 6$  [1]. Чем ближе годограф подходит к началу координат, тем меньше запас устойчивости. Если годограф проходит через начало координат, то система находится на границе области устойчивости. Таким образом, критические значения параметров  $a_{кр}$  и частоты  $\omega_{кр}$  линейной стационарной системы с характеристическим уравнением (9.2) находят из условий

$$\operatorname{Re} P_n(i\omega_{кр}, a_{кр}) = \operatorname{Im} P_n(i\omega_{кр}, a_{кр}) = 0.$$



**Рис. 9.6.** Годографы Михайлова для устойчивых систем при  $n = 2, 3, 4, 5, 6$

Чтобы подчеркнуть зависимость многочлена (9.2) от параметров  $a = (a_0, \dots, a_n)$ , он обозначен через  $P_n(\lambda, a)$ .

Интересно отметить, что годограф  $P_n(i\omega)$  можно определить экспериментально, подавая на вход линейной стационарной системы сигнал  $r(t) = e^{i\omega t}$  (частоты  $\omega$  и амплитуды 1). В установившемся режиме на выходе получится сигнал  $x_\infty(t) = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$ , где амплитуда  $A = |P_n(i\omega)|^{-1}$ , а сдвиг фазы  $\varphi = \arg(P_n(i\omega))$  (рис. 9.7), поэтому годограф Михайлова называют амплитудно-фазовой характеристикой.

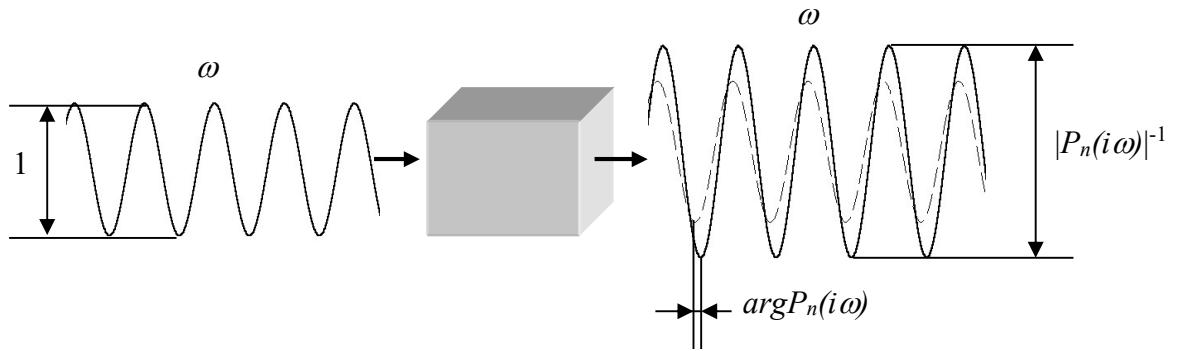


Рис.9.7. Физический смысл годографа Михайлова

В методе Найквиста геометрически исследуется расположение полюсов передаточной функции на  $s$ -плоскости. Поскольку полюсы передаточной функции  $G$  совпадают с корнями многочлена  $P$  ( $G = \frac{1}{P}$ ), критерии Михайлова и Найквиста практически совпадают, поэтому нередко частотный критерий устойчивости называют критерием Михайлова-Найквиста.

В качестве примера найдём критическое значение коэффициента  $K$ , при котором система с П-регулятором, изображённая на рис. 9.1, теряет устойчивость. Передаточная функция системы, в соответствии с (6.4), имеет вид

$$T(s) = \frac{Kb_0}{s^3 + b_2s^2 + b_1s + b_0(1 + K)}.$$

Запишем годограф Михайлова:  $P_3(i\omega) = b_0(1 + K) + ib_1\omega - b_2\omega^2 - i\omega^3$ .

Составляем два условия для определения критических параметров:

$$\operatorname{Re} P_3(i\omega_{кр}, K_{кр}) = b_0(1 + K) - b_2\omega^2 = 0; \quad (9.17a)$$

$$\operatorname{Im} P_3(i\omega_{кр}, K_{кр}) = b_1\omega - \omega^3 = 0. \quad (9.17b)$$

Из уравнения (9.17b) определяем  $\omega_{кр}^2 = b_1$ , подставляя это выражение в (9.17a), получаем значение критического коэффициента усиления

$$K_{кр} = \frac{b_2 b_1}{b_0} - 1. \quad (9.18)$$

Подставив значения коэффициентов  $b_k$ , для которых построены переходные характеристики исследуемой системы на рис. 9.2, в (9.18), получаем  $K_{кр} = \frac{4 \cdot 2}{1} - 1 = 7$ . Из графиков, приведённых на рис. 9.2, следует, что при  $K < K_{кр}$  система асимптотически устойчива, при  $K = K_{кр}$  – устойчива, при  $K > K_{кр}$  – неустойчива.

Программы, численно реализующие критерии Рауса-Гурвица и Михайлова, приведены в книге В.Е. Болонкина и П.И. Чинаева.<sup>20</sup>

#### 9.4. Устойчивость систем с неопределёнными параметрами

Приведённые в теоремах этого параграфа условия устойчивости получены в предположении, что все коэффициенты системы  $\dot{x} = Bx$ , т.е. все элементы постоянной матрицы  $B$ , априори известны точно. Однако указанное предположение не всегда выполняется. В реальной ситуации зачастую бывает известна лишь некоторая область  $U$ , которой принадлежит матрица  $B$ . Ясно, что если устойчивость имеет место при любой матрице  $B$  из области  $U$ , то реальная система также будет устойчива. Систему, которая устойчива не при каких-то конкретных значениях параметров матрицы, а в интервале этих значений, можно назвать робастно устойчивой системой. Оказывается, что в некоторых ситуациях об устойчивости всех систем при произвольных матрицах  $B \in U$  можно судить по их отдельным представителям.

Пусть  $P_n(\lambda)$  – характеристический многочлен матрицы  $B$ , а  $W$  – множество всех таких многочленов, соответствующих всем матрицам  $B \in U$ . Произвольный многочлен  $P_n(\lambda) \in W$  запишем в виде

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + b_2 \lambda^{n-2} + \dots + b_n. \quad (9.19)$$

Предположим, что известны границы изменения коэффициентов  $b_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , когда многочлен  $P_n(\lambda)$  пробегает множество  $W$ . Иначе говоря, предположим, что известны числа  $\alpha_i, \beta_i, (i=1, \dots, n)$ , такие что

$$\alpha_i = \min_{P_n \in W} b_i, \beta_i = \max_{P_n \in W} b_i, b_i \in [\alpha_i, \beta_i], 0 < \alpha_i \leq \beta_i, i=1, \dots, n. \quad (9.20)$$

<sup>20</sup> Болонкин В.Е., Чинаев П.И. Анализ и синтез автоматического управления на ЭВМ// Алгоритмы и программы. М.: Радио и связь, 1986.



Оказывается, что для проверки устойчивости всего **бесконечного** множества многочленов  $W$  достаточно убедиться в устойчивости только **четырёх** многочленов:

$$f_n^1(\lambda), f_n^2(\lambda), f_n^3(\lambda), f_n^4(\lambda), f_n^k(\lambda) = \lambda^n + a_1^k \lambda^{n-1} + a_2^k \lambda^{n-2} + \dots + a_n^k.$$

Выбор коэффициентов многочленов  $a_i^k$  происходит в соответствии с табл. 9.2.

Таблица 9.2

$k$	$i = n - 2j$		$i = n - 2j - 1$	
	$j$ - чётно	$j$ - нечётно	$j$ - чётно	$j$ - нечётно
1	$\beta_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\alpha_i$
2	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$
3	$\alpha_i$	$\beta_i$	$\beta_i$	$\alpha_i$
4	$\beta_i$	$\alpha_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$

**Теорема 9.4.** (В.Л.Харитонов<sup>21</sup>). Для того чтобы любой многочлен  $P_n(\lambda)$  вида (9.19) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям (9.20), был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все четыре многочлена  $f_n^1(\lambda), f_n^2(\lambda), f_n^3(\lambda), f_n^4(\lambda)$  были устойчивыми.

Для примера установим необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости множества скалярных систем третьего порядка

$$\ddot{x}(t) + b_1 \dot{x}(t) + b_2 x(t) + b_3 x(t) = 0 \quad (9.21)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условиям

$$0 < \alpha_i \leq b_i \leq \beta_i, i = 1, 2, 3. \quad (9.22)$$

Характеристический многочлен уравнения (9.21) имеет вид  $\lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0$ .

Построим многочлены  $f_3^1(\lambda), f_3^2(\lambda), f_3^3(\lambda), f_3^4(\lambda)$ . Поскольку  $n=3$ , в первом многочлене  $i = 1$  при  $j = 1$  ( $i = n - 2j$ ), поэтому, в соответствии с табл. 9.2,  $a_1^1 = \alpha_1$ . Выбирая аналогично все остальные коэффициенты, получаем четыре многочлена:

$$f_3^1(\lambda) = \lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \beta_2 \lambda + \beta_3; \quad f_3^2(\lambda) = \lambda^3 + \beta_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \alpha_3$$

<sup>21</sup> Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия системы линейных дифференциальных уравнений//Дифференциальные уравнения, 1978. Т.14, № 11.

$$f_3^3(\lambda) = \lambda^3 + \beta_1 \lambda^2 + \beta_2 \lambda + \alpha_3; \quad f_3^4(\lambda) = \lambda^3 + \alpha_1 \lambda^2 + \alpha_2 \lambda + \beta_3. \quad (9.23)$$

Воспользовавшись критерием Ляпунова-Шипара, запишем условия устойчивости многочленов (9.23). Они имеют вид

$$0 < \beta_3 < \alpha_1 \beta_2, 0 < \alpha_3 < \beta_1 \alpha_2, 0 < \alpha_3 < \beta_1 \beta_2, 0 < \beta_3 < \alpha_1 \alpha_2. \quad (9.24)$$

Поскольку  $\alpha_3 < \beta_3$  и  $\alpha_1 \alpha_2$  меньше любого из произведений  $\alpha_1 \beta_2$ ,  $\beta_1 \alpha_2$  и  $\beta_1 \beta_2$ , все условия (9.24) будут выполняться одновременно, если окажется выполненным лишь одно неравенство

$$0 < \beta_3 < \alpha_1 \alpha_2. \quad (9.25)$$

Таким образом, все уравнения из множества (9.21) с коэффициентами, удовлетворяющими условию (9.22), устойчивы, если выполнены неравенства (9.25), т.е. наибольшее значение коэффициента  $b_3$  меньше произведения наименьших значений  $b_1$  и  $b_2$ .

*Ни пустоты, ни тьмы нам не дано:  
Есть всюду свет, предвечный и безликий...*

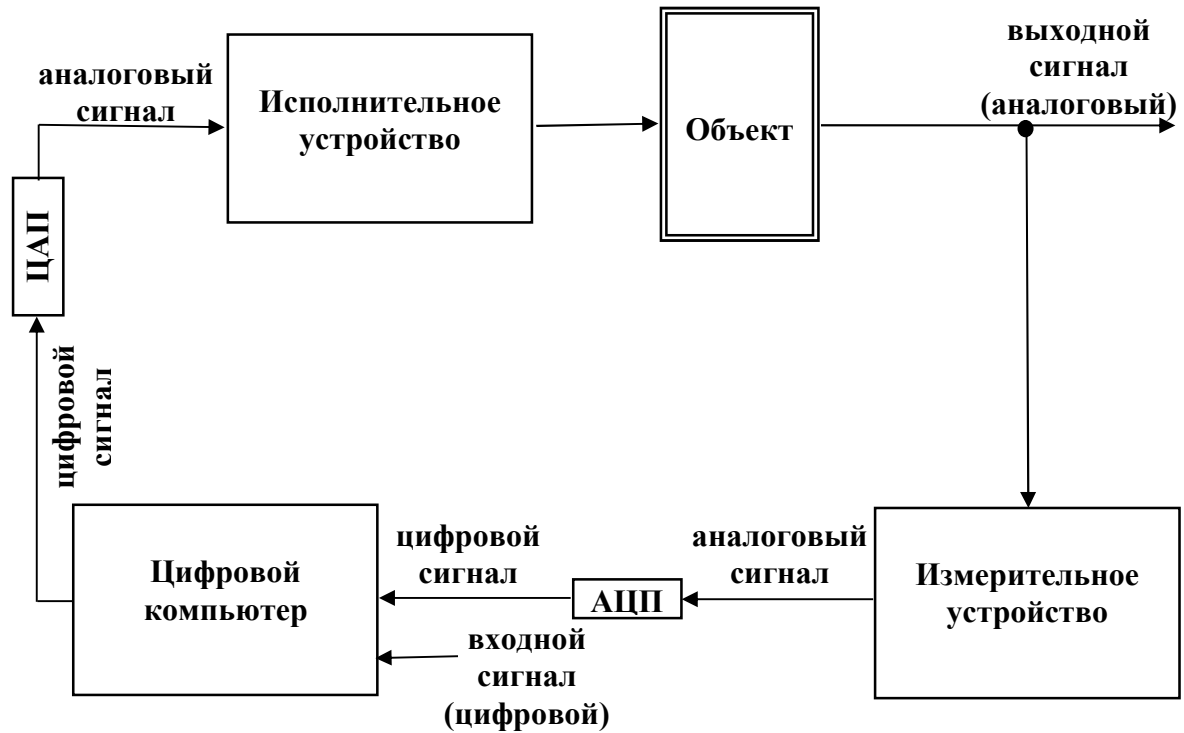
*И.А.Бунин*

## ЛЕКЦИЯ 10. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

### 10.1. Структура цифровых систем управления

В современных системах управления роль управляющего устройства всё чаще играет цифровой регулятор, работающий под управлением микропроцессора. Регулятор может быть создан на базе обычного настольного компьютера или реализован в специально разработанном автономном контроллере с менее мощным микропроцессором («бортовой вариант» компьютера). Цифровое устройство управления назовём обобщённо цифровым компьютером, а систему, использующую цифровой компьютер, назовём **цифровой системой управления**. Структура такой системы изображена на рис. 10.1.

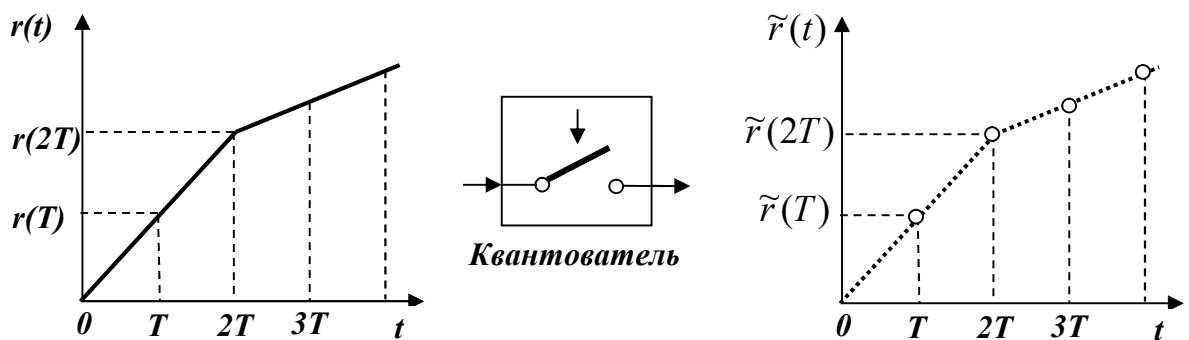
В цифровой системе управления непрерывными объектами должен присутствовать аналого-цифровой преобразователь (АЦП), преобразующий непрерывный (аналоговый) сигнал в цифровую форму для последующей компьютерной обработки, и цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП), который преобразует цифровой выходной сигнал компьютера в непрерывную форму. Прежде чем рассматривать математические модели дискретных регуляторов, построим математические модели АЦП и ЦАП.



**Рис. 10.1** Структура цифровой системы управления:  
**АЦП** – аналого-цифровой преобразователь;  
**ЦАП** – цифро-аналоговый преобразователь

Будем считать, что все числа (результаты измерений и сигналы управления в цифровой форме) вводятся в компьютер и выводятся из него с одним и тем же фиксированным промежутком времени  $T$ .

**Определение 10.1.** Фиксированный промежуток времени между последовательными измерениями и выводами сигнала называется **периодом квантования** (синонимы: период дискретизации, интервал квантования, шаг дискретизации).



**Рис. 10.2.** Математическая модель АЦП в виде идеального квантователя

Математическая модель АЦП представлена на рис. 10.2 в виде **квантователя** (Sampler). Квантователь можно рассматривать как ключ, который замыкается каждые  $T$  секунд и превращает величину входного сигнала  $r(t = kT), k = 0, 1, 2, \dots$  в отсчёт  $\tilde{r}(kT)$ . Отсчёт (числовое значение), вообще говоря, не совпадает с измеряемой величиной вследствие конечного количества двоичных разрядов машинного регистра АЦП. Возникает ошибка квантования уровня сигнала, или ошибка оцифровки. Современные устройства имеют высокую разрядность, поэтому с разумной степенью точности ошибкой оцифровки сигнала можно пренебречь. На рис. 10.2 представлена математическая модель АЦП в виде **идеального квантователя**: ключ замыкается на бесконечно малый отрезок времени, и выполняется равенство  $r(kT) = \tilde{r}(kT)$ .

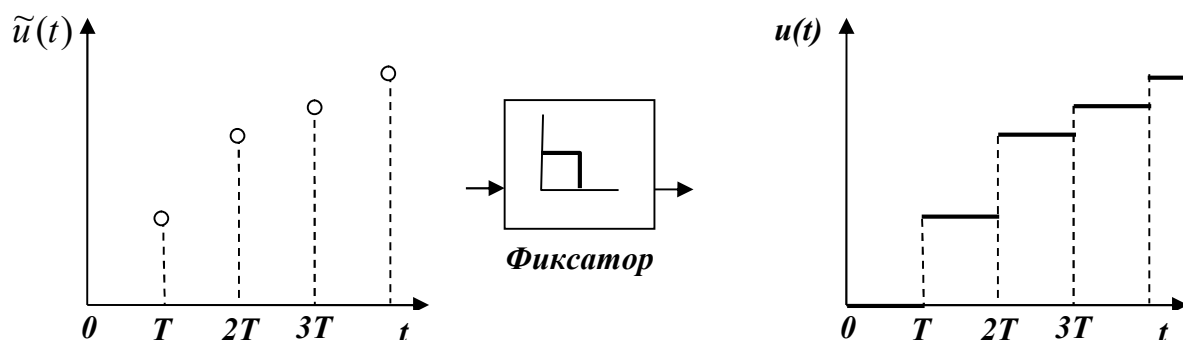
Выходной сигнал идеального квантователя можно представить в виде амплитудно-модулированной импульсной последовательности

$$\tilde{r}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \delta(t - kT). \quad (10.1)$$

**Определение 10.2.** Функции, имеющие вид амплитудно-модулированных импульсных последовательностей, т.е. определённые в дискретные моменты времени, разделённые фиксированным периодом, называются **решётчатыми функциями**.

Математическую модель ЦАП, т.е. устройства, преобразующего дискретный выходной сигнал компьютера  $\tilde{u}(t)$  в непрерывный сигнал  $u(t)$ , можно представить в виде фиксатора (экстраполятора нулевого порядка – Zero-order holder). Экстраполятор воспринимает значение  $\tilde{u}(kT)$  и сохраняет его на своём выходе в течение всего периода квантования. Математическая модель ЦАП изображена на рис. 10.3. Работу экстраполятора можно описать формулой

$$u(t) = \tilde{u}(kT), kT \leq t \leq (k+1)T. \quad (10.2)$$



**Рис. 10.2.** Математическая модель ЦАП в виде фиксатора (экстраполятора нулевого порядка)

## 10.2. Цифровой ПИ-регулятор

Рассмотрим в качестве примера алгоритм работы цифрового ПИ-регулятора в задаче стабилизации температуры объекта (непрерывная модель (7.12), (7.2)). Запишем уравнение для непрерывного регулятора с учётом обозначений (7.1)

$$\begin{aligned} \dot{x} + \frac{1}{\tau_o} x &= \frac{1}{\tau_o} \cdot F_d + \frac{1}{\tau_o} \cdot u(t), \quad x(0) = x_o < 0, \quad x_{уст} = 0. \\ u(t) &= -Kx(t) - \frac{K}{T_{II}} \int_0^t x(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Компьютер «не видит» производных и интегралов. Цифровой способ обработки информации предусматривает использование только арифметических операций и позволяет легко реализовывать алгебраические алгоритмы управления и сводящиеся к ним рекуррентные процедуры, которые представляют собой решения разностных уравнений. Попытаемся записать уравнения (10.3) в разностной форме. Предположим, что период квантования  $T$  много меньше собственного времени задачи  $\tau_o$ . В этом случае производную в момент измерения  $kT$  можно представить в виде конечной разности<sup>22</sup>

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=kT} = \frac{x((k+1)T) - x(kT)}{T}, \quad (10.4)$$

а величину интеграла записать по формуле прямоугольников в виде суммы

$$\int_0^{kT} x(t) dt = \sum_{j=0}^k x(jT) \cdot T. \quad (10.5)$$

Введём обозначение:  $f(kT) \equiv f_k$ . Тогда уравнение движения с учётом (10.4) запишется в разностной форме

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{T} + \frac{1}{\tau_o} x_k = \frac{1}{\tau_o} \cdot u_k + \frac{1}{\tau_o} \cdot F_d, \quad (10.6)$$

где управляющее воздействие  $u_k$  имеет вид

<sup>22</sup> Самарский А.А. Введение в численные методы. 3-е изд. СПб.:Лань, 2005. 288 с.

$$u_k = -K(1 + \frac{T}{T_H})x_k - K \frac{T}{T_H} \sum_{j=0}^{k-1} x_j. \quad (10.7)$$

Отметим, что алгоритм (10.7) является нерекуррентным и требует вычисления больших сумм. Чтобы найти рекуррентный алгоритм дискретного ПИ-регулятора, запишем выражение для управляющего воздействия в  $(k+1)$ -й момент времени

$$u_{k+1} = -K(1 + \frac{T}{T_H})x_{k+1} - K \frac{T}{T_H} \sum_{j=0}^{k-1} x_j - K \frac{T}{T_H} x_k.$$

Вычитая из последнего равенства равенство (10.7), получаем рекуррентный алгоритм

$$u_{k+1} = u_k + Kx_k - K(1 + \frac{T}{T_H})x_{k+1}, \quad (10.8)$$

который легко программируется и широко применяется в реальных цифровых системах управления. Отметим, что при достижении цели управления ( $x = 0$ ) из (10.8) следует, что

$$u_{k+1} = u_k \text{ при } x_k = 0, x_{k+1} = 0, \quad (10.9)$$

т.е. алгоритм дискретного ПИ-регулятора автоматически выходит на компенсацию внешнего воздействия (с точностью до ошибки квантования уровня сигнала) как и для непрерывного случая, в соответствии с (7.18).

Подстановка выражения (10.7) в (10.6) при  $F_d = 0$  даёт разностное уравнение для замкнутой системы

$$x_{k+1} = f(k; x_k, x_{k-1}, \dots, x_0), \quad (10.10)$$

где

$$f = [1 + \frac{T}{\tau_0}(1 - K(1 + \frac{T}{T_H}))]x_k + K \frac{T}{\tau_0} \frac{T}{T_H} \sum_{j=0}^{k-1} x_j.$$

Системы типа (10.10) называются **дискретными системами**. Таким образом, применение современных цифровых методов управления приводит к необходимости рассмотрения свойств дискретных систем, в первую очередь к исследованию их устойчивости. При управлении непрерывными объектами немаловажной также является задача построения дискретной модели, эквивалентной исходной непрерывной. Обе эти задачи будут рассмотрены ниже.

Здесь в заключение заметим, что дискретными свойствами в системе управления может обладать не только устройство управления. Дискретным может быть исполнительное устройство, например, шаговый двигатель. Многие фирмы, специализирующиеся на выпуске средств измерений физических величин, в настоящее время производят датчики с цифровым выходом, так что дополнительного АЦП при применении таких датчиков не требуется. Наконец, сам объект управления может иметь дискретную природу. Например, финансовая система любого российского предприятия имеет естественную квантовую единицу – рубль. Можно привести интересный пример из биологии: перемещение тела за счёт изменения формы (локомоторные движения; так плавают, например, микроорганизмы в воде). Математические модели этих перемещений можно описать в виде последовательности локомоторных циклов<sup>23</sup>, так что уравнения движения будут представлены в виде дифференциальных форм Пфаффа. Периодом квантования в данном случае будет время прохождения цикла. Таким образом, понятие дискретной системы не только возникает в цифровых системах управления, но и является более общим понятием, т.е. математическими моделями многих динамических систем в физике, биологии, экономике являются системы разностных уравнений.

Казалось бы, с точки зрения квантовой механики, описывающей движение микроскопических частиц (электронов, протонов, фотонов) на микроскопических расстояниях (менее  $1 \dots 10$  Ангстрем), на вопрос: «Существуют ли дискретные системы?» – следует ответить: «Существуют только дискретные системы». Однако это поспешный и не совсем правильный ответ. Дело в том, что частица, совершающая финитное движение, действительно, имеет дискретный спектр энергетических состояний (для неограниченного – инфинитного – движения спектр непрерывный). Однако математическая модель квантового объекта описывается системой дифференциальных уравнений (конечной или бесконечной) для непрерывных параметров. Роль этих параметров могут играть коэффициенты разложения волновой функции в заданном базисе для случая чистых состояний или компоненты матрицы плотности для смешанных состояний<sup>24</sup>. Управление квантовыми системами может осуществляться непрерывно или импульсно<sup>25</sup>. Поэтому *системы управления квантовыми объектами*, как и классическими, могут описываться как непрерывными, так и дискретными математическими моделями.

### ***10.3. Дискретные модели непрерывных систем***

Рассмотрим более подробно **задачу построения дискретных моделей непрерывных систем**, т.е. алгоритмы преобразования моделей систем, заданных в виде дифференциальных уравнений, к разностным уравнениям.

Пусть математическая модель непрерывной стационарной системы в пространстве состояний имеет вид

---

<sup>23</sup> Кислухин Н.М., Марценюк М.А. Синтез локомоторного управления в задаче плавания// Вестник Пермского университета. 2005. Вып. 4. С.52-61.

<sup>24</sup> Блум К. Теория матрицы плотности и её приложения. М.:Мир, 1983. 248 с.

<sup>25</sup> Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И. Управление квантовомеханическими процессами. М.:Наука, 1984. 256 с.

$$\frac{d}{dt} \bar{x}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t); \quad \bar{y}(t) = C\bar{x}(t) + D\bar{u}(t). \quad (10.11)$$

Требуется получить эквивалентную систему разностных уравнений

$$\bar{x}[k+1] = P\bar{x}[k] + Q\bar{u}[k], \quad \bar{y}[k] = C'\bar{x}[k] + D'\bar{u}[k], \quad k=0,1,\dots \quad (10.12)$$

Эквивалентность систем понимается в том смысле, что при соответствующих начальных условиях их реакции на одно и то же входное воздействие совпадают. Более подробно это означает, что при  $\bar{u}[k] = \bar{u}(t_k)$ , где  $t_k = kT$ , выполнено  $\bar{y}[k] = \bar{y}(t_k)$ , - решения уравнений (10.11) и (10.12) совпадают при  $t_k = kT$ .

Рассмотрим задачу вычисления матриц  $P, Q, C', D'$  в (10.12) по заданным матрицам  $A, B, C, D$  в (10.11), исходя из сформулированного выше требования эквивалентности указанных систем по отношению к входному процессу  $u(t)$ .

Решение системы (10.11), соответствующее начальному условию  $\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0$ , выражается **формулой Коши**

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \quad (10.13)$$

(черта в обозначении векторов здесь и ниже временно опущена). В показателе экспоненты в (10.13) стоит матрица, выражение  $e^{At}$  называется **матричной экспонентой**. Используя формулу (10.13), проинтегрируем уравнение (10.11) на интервале  $[t_k, t_{k+1}]$ , полагая на нем  $u(t) = u(t_k)$  при  $x_0 = x(t_k)$ . Получим

$$x(t_{k+1}) = e^{A(t_{k+1}-t_k)} x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} B u(\tau) d\tau = e^{AT} x(t_k) + \left( \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau \right) \cdot B u(t_k).$$

Для вычисления интеграла введем новую переменную  $\theta \equiv t_{k+1} - \tau$ . Тогда  $\tau = t_{k+1} - \theta$  и  $\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\tau)} d\tau = \int_0^T e^{A\theta} d\theta$ . Полагая матрицу  $A$  невырожденной ( $\det A \neq 0$ ), получим, что  $\int_0^T e^{A\theta} d\theta = A^{-1}(e^{AT} - I_n)$ , где  $I_n$  - единичная матрица  $n \times n$ . Следовательно,

$$x(t_{k+1}) = e^{AT} x(t_k) + A^{-1}(e^{AT} - I_n) B u(t_k), \quad \det A \neq 0. \quad (10.14)$$

Согласно уравнению выхода в (10.11)  $y(t_k) = Cx(t_k) + Du(t_k)$ . Сопоставим найденным для моментов  $t_k$  значениям непрерывного процесса значения переменных дискретной модели:  $x[k] \equiv x(t_k)$ ,  $u[k] \equiv u(t_k)$ ,  $y[k] \equiv y(t_k)$ .



Сравнивая уравнение (10.12) с полученным выражением (10.14), находим, что матрицы  $P, Q, C', D'$  определяются равенствами

$$P = e^{At}, \quad Q = A^{-1}(P - I_n)B, \quad C' = C, \quad D' = D. \quad (10.15)$$

Полученные формулы перехода от непрерывных систем к их дискретным аналогам показывают, что необходимо располагать достаточно эффективными алгоритмами вычисления матричной экспоненты  $e^{At}$ . Если матрица  $A$  имеет диагональный вид (в базисе собственных векторов), то матричная экспонента записывается **точно**, в соответствии с правилом:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}. \quad (10.16)$$

В других случаях нужно использовать приближенные методы, которые основаны на различных аппроксимациях бесконечного ряда для разложения экспоненты выражениями, содержащими конечное число слагаемых. Наиболее очевидной является **аппроксимация Тейлора порядка  $k$** , согласно которой ряд Тейлора приближенно заменяется конечной суммой

$$e^{A\tau} \approx I_n + A\tau + \frac{(A\tau)^2}{2} + \dots + \frac{(A\tau)^k}{k!} \equiv I_n + \sum_{i=1}^k \frac{(A\tau)^i}{i!}. \quad (10.17)$$

Например, при  $k=1$  получаем линейное приближение

$$e^{A\tau} \approx I_n + A\tau, \quad (10.18)$$

которое будем называть **аппроксимацией Эйлера**.

Аппроксимация (10.18) не является наилучшей. Во многих отношениях более предпочтительна общая **аппроксимация Паде**. При такой аппроксимации экспонента  $e^x$  представляется рациональной функцией  $e^x \approx \frac{F_{\mu\nu}(x)}{G_{\mu\nu}(x)}$  с числителем  $F_{\mu\nu}$  степени  $\mu$  и знаменателем  $G_{\mu\nu}$  степени  $\nu$ , определяемыми формулами

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= 1 + \frac{\mu}{(\mu+\nu)!}x + \frac{\mu(\mu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)2!}x^2 + \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots 2 \cdot 1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\dots(\nu+1)\mu!}x^\mu \\ G_{\mu\nu}(x) &= 1 - \frac{\nu}{(\mu+\nu)!}x + \frac{\nu(\nu-1)}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)2!}x^2 + \dots \\ &\quad + (-1)^\nu \frac{\nu(\nu-1)\dots 2 \cdot 1}{(\mu+\nu)(\mu+\nu-1)\dots(\mu+1)\nu!}x^\nu \end{aligned} \quad (10.19)$$

Соответственно, для матричного аргумента  $x = A\tau$  запишем

$$e^{A\tau} \approx F_{\mu\nu}(A\tau)G_{\mu\nu}^{-1}(A\tau), \quad (10.20)$$

где  $F_{\mu\nu}(A\tau)$ ,  $G_{\mu\nu}(A\tau)$  - матричные многочлены вида (10.19). В дальнейшем (10.20) будем называть **аппроксимацией Паде  $(\mu, \nu)$** .

Приведем некоторые частные случаи (10.20). Прежде всего отметим, что аппроксимация Тейлора (10.17) является частным случаем (10.20) при  $\nu=0$ . Следовательно, формула метода Эйлера (10.18) совпадает с аппроксимацией Паде (1,0). Аппроксимация Паде (0,1) имеет вид

$$e^{A\tau} \approx (I_n - A\tau)^{-1} \quad (10.21)$$

и в дальнейшем будет называться **неявным методом Эйлера**.

Аппроксимация Паде (1,1) соответствует **методу Тастина** и определяется формулой

$$e^{A\tau} \approx (I_n + A\tau/2)(I_n - A\tau/2)^{-1}, \quad (10.22)$$

формула Паде (2,2) дает выражение

$$e^{A\tau} \approx (12I_n + 6A\tau + (A\tau)^2)(12I_n - 6A\tau + (A\tau)^2)^{-1}. \quad (10.23)$$

Одним из преимуществ аппроксимаций Паде является их более высокая точность, чем соответствующих (при  $k=\max(\mu, \nu)$ ) аппроксимаций Тейлора. Ошибка аппроксимации (10.17) имеет порядок малости  $O(\tau^k)$ , а ошибка «диагональных» аппроксимаций (10.20) $(\mu, \nu)$  при  $\mu=\nu$  - порядок малости  $O(\tau^{2\mu+1})$ . Другим достоинством формулы Паде при  $\nu \neq 0$  является сохранение свойства устойчивости непрерывной системы при переходе к дискретной модели. Недостатком неявных методов является необходимость обращения матрицы  $G_{\mu\nu}(A\tau)$  и связанная с этим проблема ее вырожденности. Заметим, что при  $\tau \rightarrow 0$   $G_{\mu\nu}(A\tau) \rightarrow I_n$ , следовательно, выбор достаточно малого  $\tau$  гарантирует  $\det G_{\mu\nu}(A\tau) \neq 0$ .

#### 10.4. Передаточные функции дискретных систем

Математические модели дискретных систем можно представить в виде передаточных функций, аналогично непрерывным системам. Для этого используется не преобразование Лапласа, а z-преобразование. Рассмотрим его.

Поскольку выходной сигнал идеального квантователя  $r^*(t)$  представляет собой последовательность импульсов с амплитудами  $r^*(kt)$ , то его можно описать выражением

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \delta(t - kT), \quad (10.24)$$

где предполагается, что сигнал  $r(t)$ , существует для  $t > 0$ . Преобразовав (10.24) по Лапласу, получим

$$L\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) e^{-ksT}.$$

Это выражение представляет собой бесконечный ряд по степеням члена  $e^{sT}$ . Введем переменную

$$z = e^{sT}, \quad (10.25)$$

которая осуществляет конформное отображение с  $s$ -плоскости на  $z$ -плоскость. Тогда мы можем определить новое преобразование, называемое  **$z$ -преобразованием**

$$Z\{r(t)\} = Z\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) z^{-k}. \quad (10.26)$$

В качестве примера найдем  $z$ -преобразование единичной ступенчатой функции  $l(t)$ , описываемой выражением (4.11)

$$Z[l(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} l(kT) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}, \quad (10.27)$$

т.к.  $l(kT) = 1$  для всех  $k \geq 0$ . Этот ряд можно представить в замкнутой форме, используя выражение для суммы членов геометрической прогрессии

$$l(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}. \quad (10.28)$$

В общем случае мы будем определять  **$z$ -преобразование** функции  $f(t)$  как

$$Z\{f(t)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) z^{-k}. \quad (10.29)$$

**Пример. Преобразование экспоненты**

Получим  $z$ -преобразование функции  $f(t) = e^{-at}$  для  $t \geq 0$ . Имеем

$$Z\{e^{-at}\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (ze^{aT})^{-k}. \quad (10.30)$$

Этот ряд можно представить в форме, аналогичной (10.28)

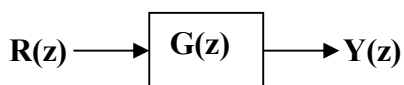
$$F(z) = \frac{1}{1 - (ze^{aT})^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}. \quad (10.31)$$

Можно показать, что

$$Z\{e^{-at} f(t)\} = F(e^{aT} z). \quad (10.32)$$

Поскольку непрерывной функции времени  $f(t)$  соответствует преобразование Лапласа  $L\{f(t)\} = F(s)$  и z-преобразование  $Z\{f(t)\} = F(z)$ , то мы можем находить z-преобразования от образов функций времени в s-пространстве. Например, поскольку преобразование Лапласа экспоненты  $e^{-at}$  имеет вид  $L\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$ , то для передаточной функции  $G(s) = \frac{1}{s+a}$  мы можем найти z-преобразование, используя (10.31)

$$G(z) = Z\{G(s)\} = \frac{z}{z - e^{-aT}}. \quad (10.33)$$



**Рис. 10.3.** Структурная схема дискретной системы управления

Подвергая z-преобразованию составные части уравнения выхода непрерывной системы  $Y(s) = G(s)R(s)$ ,

получим уравнение выхода для дискретной системы

$$Y(z) = G(z)R(z). \quad (10.34)$$

Таким образом, математическую модель дискретной системы управления можно представить в виде структурной схемы с передаточными функциями (рис. 10.3). Для дискретной системы первого порядка переходная характеристика опишется следующей формулой в z-пространстве

$$Y(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}} \cdot \frac{z}{z - 1} = \frac{z^2}{(z - e^{-aT})(z - 1)}. \quad (10.35)$$

### 10.5. Устойчивость дискретных систем

Приведем основные сведения об устойчивости дискретных систем. Рассмотрим математическую модель дискретной системы (10.10) в простейшей форме

$$x_{k+1} = f(k, x_k), \quad x_k \in R_n, \quad f(k, 0) \equiv 0. \quad (10.36)$$

Решение уравнения (10.36) с начальным условием  $x_{k_0} = x^0$  обозначим через  $x(k, k_0, x^0)$ .

**Определение 10.3.** Решение  $x_k \equiv 0$  уравнения (10.36) называется **равномерно устойчивым**, если для всякого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что из неравенства  $|x_{k_0}| \leq \delta(\varepsilon)$  следует  $|x_k| \leq \varepsilon$  при всех  $k \geq k_0$ .  
Решение  $x_k \equiv 0$  называется **равномерно асимптотически устойчивым**, если оно равномерно устойчиво и для любого  $\gamma > 0$  найдутся целое число  $N(\gamma) > 0$  и число  $H_l > 0$  такие, что  $|x(k, k_0, x^0)| \leq \gamma$  при  $k \leq k_0 + N(\gamma)$  и  $|x^0| \leq H_l$ .

Остальные определения устойчивости для разностного уравнения (10.36) аналогичны соответствующим определениям для дифференциального уравнения (8.1). Для исследования устойчивости решения  $x_k \equiv 0$  уравнения (10.36) можно также использовать второй метод Ляпунова. Приведем без доказательства некоторые утверждения.

**Теорема 10.1.** Для равномерной устойчивости решения  $x_k \equiv 0$  уравнения (10.36) необходимо и достаточно, чтобы существовала функция  $V(k, x)$ , удовлетворяющая условиям

$$\omega_1(|x|) \leq V(k, x) \leq \omega_2(|x|), \quad V(k+1, f(k, x)) - V(k, x) \leq 0.$$

**Теорема 10.2.** Пусть существует функция  $V(k, x)$  такая, что

$$\omega_1(|x|) \leq V(k, x) \leq \omega_2(|x|), \quad V(k+1, f(k, x_k)) - V(k, x_k) \leq -\omega_3(|x_k|).$$

Тогда решение  $x_k \equiv 0$  равномерно асимптотически устойчиво.

На разностные уравнения вида (10.36) естественным образом переносятся и другие теоремы устойчивости для непрерывных систем.

Рассмотрим случай **линейного стационарного разностного уравнения**

$$x_{k+1} = Px_k, \quad x_0 = x^0, \quad x \in R_n. \quad (10.37)$$

Легко вывести условие устойчивости уравнения (10.37) для системы первого порядка  $x_{k+1} = px_k$ . В этом случае справедливо равенство

$$x_{k+1} = p^{k+1}x_0. \quad (10.38)$$

Очевидно, что «система» (10.38) будет устойчивой, если модуль числа  $p$  меньше единицы:  $|p| < 1$ . С помощью выражений (10.15), (10.16) легко понять, что это условие должно выполняться в случае устойчивых систем для собственных чисел  $\lambda_i(P)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) матрицы  $P$ . Действительно, справедлива следующая теорема:

**Теорема 10.3.** Если  $|\lambda_i(P)| < 1$  для всех  $i$ , то решение  $x_k \equiv 0$  уравнения (10.36) равномерно асимптотически устойчиво. Если же  $|\lambda_i(P)| \leq 1$  и все собственные значения  $\lambda_k$ , для которых  $|\lambda_k(P)| = 1$  не вырождены, то решение  $x_k \equiv 0$  равномерно устойчиво. Во всех других случаях решение  $x_k \equiv 0$  неустойчиво.

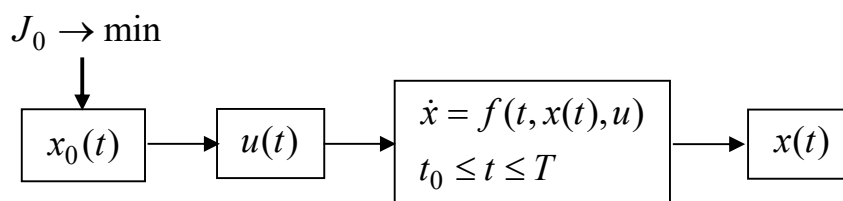
*В мире не происходит ничего, в чём не был бы виден смысл какого-нибудь максимума или минимума.*

Л.Эйлер

## ЛЕКЦИЯ 11. РАЗОМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

### 11.1. Постановка и классификация задач оптимального управления

Рассмотрим разомкнутую систему управления, структурная схема которой изображена на рис. 11.1. Управление в таких системах определяется заранее на основе требования **критерия качества** на определённом промежутке времени и подаётся на вход объекта в соответствии с рассчитанными значениями (П-управление). Выходной вектор не отслеживается. Разумеется, такая система управления может применяться, если есть уверенность в адекватности математической модели, применявшейся при расчётах, и параметры объекта не изменяются на указанном промежутке времени или изменяются так, как предполагалось в модели. Несмотря на все недостатки разомкнутых систем, упоминавшиеся выше, такие системы, называемые системами **оптимального управления**, достаточно широко применяются на практике, особенно в тех случаях, когда выходные переменные трудно измерить, например, при управлении космическими аппаратами, ядерными реакторами и т.д.



**Рис. 11.1.** Структурная схема разомкнутой системы оптимального управления

Если выходная величина доступна измерению, то современные алгоритмы оптимального управления позволяют построить замкнутую систему управления. Ниже мы рассмотрим несколько примеров такого

синтеза управления (С-управление). Здесь пока сосредоточим внимание на разомкнутых системах.

Что означает понятие оптимальности в теории управления? Слово «оптимальный» происходит от латинского *optimus*, что значит – наилучший, совершенный. Процитируем фразу, с которой начинается замечательный учебник по оптимальному управлению для студентов математических специальностей<sup>26</sup>: «Людам свойственно стремление к лучшему, и если им приходится выбирать из нескольких возможностей, то желание найти среди них *оптимальную* представляется вполне естественным». Отсюда следует, что понятие оптимального управления является антропоцентристским понятием, поскольку требования к движению системы выдвигает человек – разработчик системы управления. Этим понятие оптимальности в теории управления отличается от понятия оптимальности, с которым встречаются исследователи естественных физических систем.

При изучении неживой природы установлено, что весь мир движется по оптимальным траекториям (геодезическим линиям). В физике требования к этим траекториям формулируются в виде вариационных принципов, например, в виде принципа наименьшего действия в классической механике. Решение задачи минимизации функционала действия приводит к уравнениям движения в форме Лагранжа или Гамильтона, в зависимости от выбора переменных состояния. Однако вариационные принципы для естественных физических систем придуманы не человеком, а кем-то Другим.

В физике существуют законы сохранения величин, являющихся интегралами уравнений движения, причём каждый закон сохранения следует из инвариантности этих уравнений по отношению к какому-либо преобразованию (симметрии системы)<sup>27</sup>. Система управления, как разомкнутая, так и замкнутая, является открытой системой и требует постоянного энергетического обмена с окружающей средой. Здесь можно говорить не о сохранении какой-то величины, а о достижении ею какого-либо определённого значения при помощи заданного управления [6]. Если энергетические ресурсы ограничены, то это приходится учитывать при конструировании системы управления.

Ранее (лекции 6 и 7) мы уже встречались с оптимизацией систем управления с обратной связью. Требования оптимальности там накладывались в виде требований минимизации ошибки управления – какой-то из оценок качества, перечисленных в табл. 6.3. Точнее сказать, речь шла даже не о минимизации ошибки, а о попадании выходной величины в заданный интервал, т.е. об определённой **точности** работы автоматического регулятора. Оптимизация осуществлялась преимущественно численными методами путём подбора коэффициентов, параметризующих функционал.

---

<sup>26</sup> Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.:Наука, 1979. 432 с.

<sup>27</sup> Это утверждение сформулировано в виде теоремы и доказано женщиной-математиком Эмми Нётер. Кратко теорема формулируется так: «Всякая симметрия в мире порождает закон сохранения».

Сейчас рассмотрим общий случай, когда критерий качества записывается в виде функционала, содержащего как переменные состояния, описывающие траекторию движения, так и управляющие воздействия, и методы решения этих задач. Отметим, что термин «качество» теперь не всегда означает «точность», а является более общим понятием. Требования к точности управления зачастую «спрятаны», и достаточно глубоко, в форме записи критерия качества.

Составим математические модели оптимальных систем управления **без учёта ограничений на управляющие воздействия**. Математическую модель движения объекта представим в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, как в (8.1). Кратко эту систему запишем в виде [1]

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(t, x(t), u), & x &\in R_n, & u &\in R_m. \\ x(t_0) &= x_0.\end{aligned}\tag{11.1}$$

В зависимости от способа задания минимизируемого функционала принято различать задачи Лагранжа, Майера и Больца.

В задаче **Лагранжа** критерий качества  $J_0$  имеет вид

$$J_0 = \int_{t_0}^T F_0(t, x(t), u) dt, \quad x \in R_n, \quad u \in R_m.\tag{11.2}$$

где  $F_0$  – заданная скалярная функция, а  $T$  – момент окончания движения. Момент  $T$  может быть либо заранее задан, либо определяться конкретной траекторией движения. В последнем случае  $T$  можно рассматривать как дополнительный параметр оптимизации.

В задаче **Майера** критерий качества  $J$  зависит от траектории системы только в момент  $T$  окончания движения

$$J_0 = \varphi_0(T, x(T)).\tag{11.3}$$

Наконец, в задаче **Больца** требуется минимизировать функционал  $J$  смешанного вида

$$J_0 = \int_{t_0}^T F_0(t, x(t), u) dt + \varphi_0(T, x(T)).\tag{11.4}$$

Эти задачи имеют различные алгоритмы решений. Стоит отметить, что приведенное деление задач управления по виду минимизируемого функционала весьма условно. Так, задача Больца (а тем самым, конечно, и задача Лагранжа) легко сводится к задаче Майера. Для этого введем еще одну скалярную переменную  $x_{n+1}(t)$ , определяемую соотношением

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F_0(t, x(t), u), \quad t \geq t_0, \quad x_{n+1}(t_0) = 0.\tag{11.5}$$



Тогда  $x_{n+1}(T) = \int_{t_0}^T F_0(t, x(t), u) dt$ . Поэтому функционал (11.4) можно записать

следующим образом в форме (11.3):

$$J_0 = x_{n+1}(T) + \varphi_0(T, x(T)). \quad (11.6)$$

Таким образом, для объекта управления (11.1), (11.5) получена задача Майера с критерием качества (11.6), эквивалентная исходной задаче (11.1), (11.4). Однако задача Майера будет решаться не для того объекта, для которого решалась задача Больца, а для другого.

В некоторых специфических случаях задачи имеют специальные названия. Если в функционале (11.2) функция  $F_0(t, x, u) = 1$ , ( $J_0 = T$ ,  $t_0 = 0$ ), то задача, состоящая в минимизации времени управления, называется **задачей быстрогодействия**:  $T \rightarrow \min$ .

В ряде случаев целью управления является **стабилизация заданного программного движения**, т.е. удержание истинной траектории движения в некоторой окрестности желаемой траектории. В этом случае функции  $F_0$  и  $\varphi_0$  в функционале (11.4) должны характеризовать отклонение реальной траектории от программной.

Довольно часто в задаче Больца используют **квадратичные функционалы**, имеющие вид

$$J_0 = \langle x(T) | N_1 | x(T) \rangle + \int_{t_0}^T (\langle x(t) | N_2(t) | x(t) \rangle + \langle u(t) | N_3(t) | u(t) \rangle) dt, \quad (11.7)$$

где  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – неотрицательно определенные квадратные матрицы ( $\langle x | N_i | x \rangle \geq 0$ ) соответствующих размерностей. Последнее слагаемое в (11.7), характеризующее затраты на управление, возникает весьма естественным образом в ряде задач.

## 11.2. Вариационный метод для скалярного случая

Для того чтобы понять современную формулировку условий оптимальности и алгоритмы синтеза оптимального управления, рассмотрим решение классической вариационной задачи для скалярного случая в том виде, в котором оно приведено в классической книге Р.Беллмана (см. сноску в п.1.2).

Единственную переменную состояния обозначим, как обычно, буквой  $x$ , а скалярное управляющее воздействие – буквой  $y$ . Уравнение (11.1) запишется в виде:

$$\dot{x} = f(x, y), \quad x(0) = x_0. \quad (11.8)$$

Критерий качества запишем в виде (11.2) (задача Лагранжа)

$$J[x, y] = \int_0^T g(x, y) dt \rightarrow \min. \quad (11.9)$$

Итак, нужно найти такое управление  $\tilde{y} = \tilde{y}(t)$  – оптимальное управление, которое бы привело к движению объекта по оптимальной траектории  $\tilde{x}(t)$ , так что

$$J[\tilde{x}, \tilde{y}] = \min. \quad (11.10)$$

Отметим, что в математике вместо понятий минимума функционала ( $\min$ ) и максимума ( $\max$ ) используются более строгие понятия точной нижней грани числа и точной верхней грани –  $\inf$  и  $\sup$  соответственно. Мы будем использовать  $\min$  и  $\max$ , как более физически понятные.

Рассмотрим малые отклонения решения задачи (11.8), (11.9) от оптимального решения

$$x = \tilde{x} + \varepsilon \xi(t), \quad y = \tilde{y} + \varepsilon \eta(t), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (11.11)$$

где  $\xi(t)$ ,  $\eta(t)$  – произвольные функции времени, удовлетворяющие единственному условию

$$\xi(0) = 0 \quad (11.12)$$

в силу заданности траектории в начальный момент времени (11.8).

Подставим (11.11) в критерий качества (11.9) и разложим функцию  $g$  в ряд Тейлора в линейном по  $\varepsilon$  приближении

$$J[x, y] = \int_0^T g(\tilde{x} + \varepsilon \xi, \tilde{y} + \varepsilon \eta) dt = J[\tilde{x}, \tilde{y}] + \varepsilon \int_0^T (\xi g_{\tilde{x}} + \eta g_{\tilde{y}}) dt. \quad (11.13)$$

Здесь нижними индексами обозначены частные производные по соответствующим переменным.

Из (11.8) аналогично получим

$$\dot{\tilde{x}} + \varepsilon \dot{\xi} = f(\tilde{x}, \tilde{y}) + \varepsilon (\xi f_{\tilde{x}} + \eta f_{\tilde{y}}). \quad (11.14)$$

Для оптимальной траектории  $\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}, \tilde{y})$  и  $J[x, y] = J[\tilde{x}, \tilde{y}]$ , поэтому из (11.13), (11.14) получим

$$\dot{\xi} = \xi f_{\tilde{x}} + \eta f_{\tilde{y}}; \quad (11.15)$$

$$\int_0^T (\xi g_{\tilde{x}} + \eta g_{\tilde{y}}) dt = 0. \quad (11.16)$$

Произвольную функцию  $\eta$  можно выразить с помощью (11.15) и подставить в (11.16)

$$\int_0^T \left( \xi g_{\tilde{x}} + \frac{\dot{\xi} - \xi f_{\tilde{x}}}{f_{\tilde{y}}} \cdot g_{\tilde{y}} \right) dt = 0. \quad (11.17)$$

Проинтегрируем слагаемое, содержащее  $\dot{\xi}$ , по частям

$$\int_0^T \frac{\dot{\xi}}{f_{\tilde{y}}} \cdot g_{\tilde{y}} dt = \xi \frac{g_{\tilde{y}}}{f_{\tilde{y}}} \Big|_0^T - \int_0^T \xi \frac{d}{dt} \left( \frac{g_{\tilde{y}}}{f_{\tilde{y}}} \right) dt.$$

Значение функции в правой части равенства на нижнем пределе равно нулю в силу условия (11.12). Потребуем выполнения дополнительного условия

$$\frac{g_{\tilde{y}}}{f_{\tilde{y}}} \Big|_{t=T} = 0, \quad (11.18)$$

тогда выражение (11.17) примет вид

$$\int_0^T \left[ g_{\tilde{x}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{g_{\tilde{y}}}{f_{\tilde{y}}} \right) - \frac{f_{\tilde{x}}}{f_{\tilde{y}}} \cdot g_{\tilde{y}} \right] \xi(t) dt = 0.$$

Поскольку функция  $\xi$  произвольна, выражение в квадратных скобках под знаком интеграла должно быть тождественно равно нулю. Это условие можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{g_{\tilde{y}}}{f_{\tilde{y}}} \right) = \frac{g_{\tilde{x}} f_{\tilde{y}} - g_{\tilde{y}} f_{\tilde{x}}}{f_{\tilde{y}}}. \quad (11.19)$$

В вариационном исчислении уравнение (11.19) называется **уравнением Эйлера** (не путать с уравнениями вращательного движения в собственной системе координат (8.10), также впервые записанными Л.Эйлером!). Знаки тильды над переменными в (11.19) можно опустить.

В результате доказано **утверждение** о том, что *решение задачи Лагранжа (11.8), (11.9) сводится к решению системы дифференциальных уравнений:*

$$\dot{x} = f(x, y), \quad (11.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{g_y}{f_y} \right) = \frac{g_x f_y - g_y f_x}{f_y}, \quad (11.21)$$

$$x(0) = x_0, \quad \frac{g_y}{f_y} \Big|_{t=T} = 0. \quad (11.22)$$

Математически система уравнений (11.20) – (11.22) формулирует **необходимые условия оптимальности** в задаче Лагранжа для скалярной

переменной. Отметим, что первое граничное условие в (11.22) ставится в начале движения, а второе условие – в конце движения. Такие задачи называются **двухточечными**.

### 11.3. Гамильтонова формулировка условия оптимальности

Чтобы записать необходимые условия оптимальности для системы  $n$ -го порядка, вспомним гамильтонову формулировку уравнений движения в классической механике. Известно, что полную энергию механической системы можно выразить через обобщённые координаты  $q_k$  и импульсы  $p_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ), которые называются канонически сопряжёнными переменными. Полную энергию  $H = H(\bar{p}, \bar{q})$  в этом случае называют функцией Гамильтона. Уравнения движения принимают вид уравнений Гамильтона

$$\dot{\bar{q}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}}, \quad \dot{\bar{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}}. \quad (11.23)$$

Если переменные состояния  $\bar{x}$  в математической модели объекта  $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$  считать «координатами», то можно ввести вспомогательные сопряжённые переменные – «импульсы» –

$$\bar{\psi}(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix}$$

и записать функцию

$$H = H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{\psi}(t)) = \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \cdot f_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \equiv \langle \bar{\psi}(t) | \bar{f}(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \rangle. \quad (11.24)$$

Тогда уравнение (11.1) примет вид  $\dot{\bar{x}} = \frac{\partial H}{\partial \bar{\psi}}$ , а для вектора  $\bar{\psi}$  можно записать уравнение

$$\dot{\bar{\psi}} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} \equiv -H_{\bar{x}}. \quad (11.25)$$

Для уравнения (11.25) нужно конкретизировать граничные условия.

Рассмотрим задачу Майера:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u), & x \in R_n, u \in R_m. & \quad x(t_0) = x_0. \\ J(u) &= \varphi(x(T)) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Оказывается, необходимые условия оптимальности для задачи (11.26) могут быть сформулированы в виде следующей теоремы [1]:

**Теорема 11.1.** Пусть  $u_0(t)$  – оптимальное  $P$ -управление в задаче (11.26), а  $x_0(t)$  – соответствующая ему траектория  $\dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), u_0(t))$ ,  $x_0(t_0) = x_0$ . Тогда

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_{\substack{x_0(t) \\ u_0(t)}} = H_u(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)) \equiv 0, \quad t_0 \leq t \leq T. \quad (11.27)$$

Здесь  $\psi(t) \in R_n$  есть решение задачи Коши

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \quad \psi(T) = -\varphi_x(x_0(T)). \quad (11.28)$$

Верхняя черта в обозначении векторов здесь и далее опущена. Данная теорема утверждает, что решение задачи Майера сводится к решению системы дифференциальных уравнений (11.1), (11.28) при условии (11.27), означающем стационарность (по управлению) гамильтониана  $H$ .

#### 11.4. Построение оптимального управления

Применим теорему 11.1 к решению задачи Больца, как наиболее общей из вышеперечисленных.

Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \quad (11.29)$$

$$J(u) = \int_{t_0}^T F(t, x(t), u(t)) dt + \varphi(x(T)) \rightarrow \min. \quad (11.30)$$

Здесь  $t_0$  и  $T$  – заданные моменты времени, а  $x_0 \in R_n$  – заданный вектор начального положения системы. Правый конец траектории  $x(T)$  свободен (задача со свободным правым концом). Необходимые условия оптимальности в задаче (11.29), (11.30) можно получить с помощью теоремы 11.1, воспользовавшись описанным в п.11.1 способом сведения задачи Больца к задаче Майера. В соответствии с этим способом задача (11.29), (11.30) эквивалентна задаче

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1}(t) &= F(t, x(t), u(t)), & x_{n+1}(t_0) &= 0, \\ \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)), & x(t_0) &= x_0, \\ x_{n+1}(T) &+ \varphi(x(T)) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Необходимые условия оптимальности в задаче (11.31) сформулированы в теореме 11.1. В рассматриваемом случае вследствие соотношений (11.31), (11.24) функция  $H$  имеет вид

$$H = \langle \psi(t) | f(t, x, u) \rangle + \psi_{n+1}(t) \cdot F(t, x, u). \quad (11.32)$$

Уравнение для вектора  $\psi(t) \in R_n$  сохраняет прежний вид (11.25), а скалярная функция  $\psi_{n+1}(t)$ , как следует из (11.28), (11.31) и (11.32), удовлетворяет соотношениям

$$\dot{\psi}_{n+1}(t) = -\partial H / \partial x_{n+1} = 0, \quad \psi_{n+1}(T) = -1.$$

Значит,  $\psi_{n+1}(t) \equiv -1$ . Поэтому

$$H(t, x, u, \psi) = -F(t, x, u) + \langle \psi(t) | f(t, x, u) \rangle.$$

Таким образом, совокупность необходимых условий оптимальности в задаче (11.29), (11.30), которым удовлетворяют оптимальная траектория  $x_0(t)$ , выражается соотношениями

$$\dot{x}_0(t) = f(t, x_0(t), u_0(t)), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x_0(t_0) = x_0, \quad (11.33)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= -\langle f_x(t, x_0(t), u_0(t)) | \psi(t) \rangle + F_x(t, x_0(t), u_0(t)), \\ \psi(T) &= -\varphi_x(x_0(T)), \end{aligned} \quad (11.34)$$

$$\langle f_u(t, x_0(t), u_0(t)) | \psi(t) \rangle - F_u(t, x_0(t), u_0(t)) = 0. \quad (11.35)$$

**Упражнение 11.1.** Покажите, что в скалярном случае для задачи Лагранжа условия (11.33) – (11.35) эквивалентны системе (11.20) – (11.22).

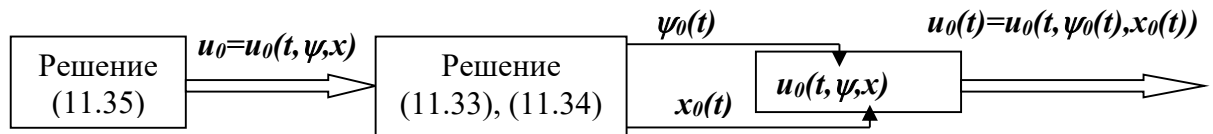
Если решение задачи оптимального управления (11.29), (11.30) существует и единственно, то оно полностью определяется соотношениями (11.33), (11.34).

Построение оптимального управления состоит из следующих шагов:

1. Решают уравнение (11.35) (не дифференциальное) относительно  $u_0$  и определяют функцию  $u_0 = u_0(t, \psi, x)$ .
2. Подставляют найденное выражение  $u_0$  в уравнения (11.33), (11.34). В результате получается двухточечная краевая задача относительно неизвестных  $x_0(t)$  и  $\psi(t)$ .

3. Решают полученную краевую задачу и определяют функции времени  $x_0(t)$  и  $\psi(t)$ . Подставляя найденные функции  $x_0(t), \psi(t)$  в формулу, определяющую оптимальное управление, получают **программное оптимальное управление  $u_0(t)$** .

Описанная выше последовательность действий при построении оптимального управления (алгоритм) изображена на рис. 11.2.



**Рис. 11.2.** Построение оптимального управления

Реализация изложенного метода в конкретных случаях сопряжена с многочисленными трудностями, связанными, в частности, с необходимостью решать краевую задачу (11.33), (11.34), большой размерностью систем, их нелинейностью и т.д.

Вместе с тем в некоторых важных случаях описанный метод может быть эффективно осуществлен. Один из таких случаев – управление линейной системой с квадратичным функционалом, который будет рассмотрен в следующей лекции.

*Взирая на высоких людей и на высокие предметы, придерживай картуз свой за козырек.*

*К. Прутков*

## ЛЕКЦИЯ 12. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

### 12.1. Оптимальное управление линейными системами с квадратичным функционалом

Линейно-квадратичная задача, ниже для краткости называемая ЛК-задачей, состоит в минимизации квадратичного функционала типа (11.7)

$$J(x) = \langle x(T) | N_1 | x(T) \rangle + \int_{t_0}^T (\langle x(t) | N_2(t) | x(t) \rangle + \langle u(t) | N_3(t) | u(t) \rangle) dt \quad (12.1)$$

на траекториях линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \in [t_0, T], \quad x \in R_n, \quad u \in R_m; \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Моменты времени  $t_0$  и  $T$ , а также начальное положение  $x_0$  заданы. Предполагается, что матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $N_2(t)$ ,  $N_3(t)$  соответствующих размерностей имеют кусочно-непрерывные элементы, причем

$$N_1(t) \geq 0, N_2(t) \geq 0, N_3(t) > 0. \quad (12.3)$$

Напомним, что матрица  $N \geq 0$ , если  $\langle x | N | x \rangle \geq 0$  для любого вектора  $x \in R_n$ , и  $N > 0$ , если  $\langle x | N | x \rangle > 0$ , для любого  $x \in R_n, x \neq 0$ .

Для определения оптимального управления в ЛК-задаче (12.1), (12.2) используем установленные в п.11.3 необходимые условия оптимальности (11.33 – 11.35). В рассматриваемом случае они заданы уравнениями (12.2) и соотношениями

$$\begin{aligned} H(t, x(t), u(t), \psi(t)) &= -\langle x(t) | N_2(t) | x(t) \rangle - \langle u(t) | N_3(t) | u(t) \rangle + \\ &+ \langle \psi(t) | [A(t)x(t) + B(t)u(t)], \\ -\frac{\partial H}{\partial x} = \dot{\psi}(t) &= -\tilde{A}(t)\psi(t) + 2N_2(t)x(t), \quad t_0 \leq t \leq T, \\ \psi(T) &= -2N_1x(T), \\ \frac{\partial H}{\partial u} = \tilde{B}(t)\psi(t) - 2N_3(t)u(t) &= 0. \end{aligned} \quad (12.4)$$



Знак тильды над матрицей означает операцию транспонирования.

Построение оптимального управления. Для определения оптимального управления с помощью необходимых условий (12.2), (12.4) применим описанный в п.11.3 метод, алгоритм которого представлен на рис.11.2.

1. Из уравнения (12.4) следует, что оптимальное управление  $u_0$  определяется формулой

$$u_0 = \frac{1}{2} N_3^{-1}(t) \tilde{B}(t) \psi(t). \quad (12.5)$$

2. Подставим выражение (12.5) в (12.2), (12.4). В результате получится краевая задача для оптимальной траектории  $x_0(t)$  и вектора сопряженных переменных  $\psi(t)$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= A(t)x_0(t) + \frac{1}{2} B_1(t)\psi(t), \\ x_0(t) &= x_0, \\ \dot{\psi}(t) &= -\tilde{A}(t)\psi(t) + 2N_2(t)x_0(t), \\ \psi(T) &= -2N_1x_0(T), \\ B_1(t) &= B(t)N_3^{-1}(t)\tilde{B}(t). \end{aligned} \quad (12.6)$$

3. Для решения краевой задачи (12.6) будем искать функцию  $\psi(t)$  в виде линейной зависимости от  $x_0(t)$

$$\psi(t) = -2P(t)x_0(t), \quad (12.7)$$

где симметричная матрица  $P(t)$  подлежит определению. Продифференцируем обе части равенства (12.7) по  $t$

$$\dot{\psi}(t) = -2[\dot{P}(t)x_0(t) + P(t)\dot{x}_0(t)].$$

Заменим здесь производные  $\dot{\psi}$  и  $\dot{x}_0$  в соответствии с равенствами (12.6), а затем подставим вместо  $\psi(t)$  выражение (12.7). Получим

$$\begin{aligned} -\tilde{A}(t)\psi(t) + 2N_2(t)x_0(t) &= -2[\dot{P}(t)x_0(t) + P(t)A(t)x_0(t) + \frac{1}{2}P(t)B_1(t)\psi(t)], \\ [\dot{P}(t) + \tilde{A}(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B_1(t)P(t) + N_2(t)]x_0(t) &= 0, \\ P(T)x_0(T) &= N_1x_0(T). \end{aligned}$$

Последние равенства будут выполнены для любого вектора  $x_0(t)$ , если

$$\dot{P}(t) + \tilde{A}(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B_1(t)P(t) + N_2(t) = 0, \quad (12.8)$$

$$P(T) = N_1.$$

Уравнение (12.8), служащее для определения матрицы  $P(t)$ , называется **матричным уравнением Риккати**. Оно играет важную роль в теории ЛК-задач управления.

После того как матрица  $P(t)$  определена, оптимальное управление в силу равенств (12.5) и (12.7) выражается формулой

$$u_0(t) = -N_3^{-1} \tilde{B}(t) P(t) x_0(t). \quad (12.9)$$

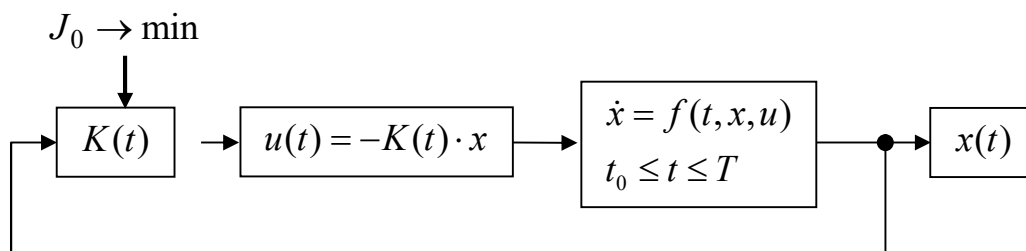
Кроме того, минимальное значение критерия качества (12.1), соответствующее управлению (12.9), определяется соотношением

$$\min J(u) = J(u_0) = \langle x_0 | P(t) | x_0 \rangle. \quad (12.10)$$

Таким образом, построение матрицы  $P(t)$  позволяет полностью решить задачу управления (12.1), (12.2).

Отметим, что управление (12.9) получено в виде С-управления, т.е. в виде функции времени и фазовых координат. В самом деле, обозначая реализованное значение оптимальной траектории  $x_0(t)$  через  $x$ , получим, что оптимальное управление системой, находящейся в состоянии  $x$  в момент  $t$ , имеет вид

$$u_0(t, x) = -K(t)x, \quad K(t) = N_3^{-1} \tilde{B}(t) P(t) \quad (12.11)$$



**Рис. 12.1.** Структурная схема замкнутой системы оптимального управления

Таким образом, если все компоненты выходного вектора  $x$  доступны измерениям, можно синтезировать систему управления с обратной связью, как это показано на рис. 12.1. Коэффициент  $K$  при этом должен меняться в зависимости от времени по закону, описанному в (12.11).

## 12.2. Линейно-квадратичная задача для скалярного случая

Исследуем решение ЛК-задачи в скалярном случае для стационарной системы

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x(0) = x_0, \quad (12.12)$$

$$J(u) = N_1 x^2(T) + \int_{t_0}^T (N_2 x^2(t) + N_3 u^2(t)) dt \rightarrow \min.$$

Величину  $B_1$ , входящую в уравнения (12.6), обозначим через  $\frac{1}{r}$ :

$$B_1 = \frac{b^2}{N_3} \equiv \frac{1}{r}, \quad r = \frac{N_3}{b^2}. \quad (12.13)$$

Отметим, что коэффициент  $b$  в уравнении (12.12) описывает **эффективность** управления, а множитель  $N_3$  в критерии качества характеризует **стоимость** управления. Параметр  $r$ , таким образом, равен отношению «цена/качество».

Уравнение (12.8) для скалярной функции  $P(t)$  теперь примет вид

$$\dot{P}(t) = -N_2 - 2aP(t) + \frac{1}{r} P^2(t), \quad P(T) = N_1. \quad (12.14)$$

Уравнение для оптимальной траектории с учётом (12.7) запишется в виде

$$\dot{x}(t) = (a - \frac{1}{r} P(t))x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (12.15)$$

а оптимальное управление  $u_0(t)$ , в соответствии с (12.5), (12.7), выразится формулой

$$u_0(t) = -\frac{b}{N_3} P(t)x(t). \quad (12.16)$$

Уравнение (12.14) интегрируется методом разделения переменных, после чего может быть найдена оптимальная траектория с использованием формулы Коши

$$x(t) = x_0 \exp \left[ at - \frac{1}{r} \cdot \int_0^t P(s) ds \right],$$

а затем определено оптимальное управление по формуле (12.16).

Приведём формулу, выражающую зависимость  $P(t)$ , а остальные результаты изобразим графически, ввиду громоздкости аналитических выражений. Зависимость  $P(t)$  имеет вид

$$P(t) = r \cdot \frac{k_+(a + \beta) - k_-(a - \beta)\alpha(t)}{k_+ - k_-\alpha(t)}, \quad \alpha(t) = \exp[2\beta(t - T)]. \quad (12.17)$$

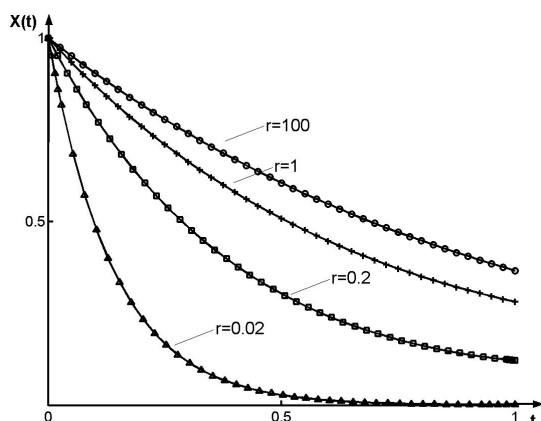
Здесь введены обозначения

$$\beta = \sqrt{a^2 + N_2 r^{-1}}, \quad k_{\pm} = N_1 r^{-1} - a \pm \beta. \quad (12.18)$$

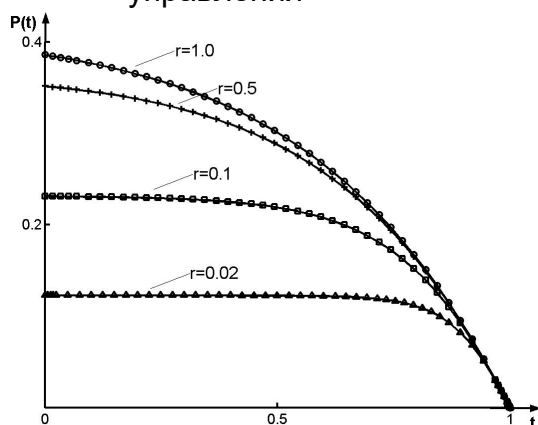
На рис 12.2 изображены оптимальные траектории  $x(t)$  для следующих фиксированных значений величин:

$$a = -1, N_1 = 0, N_2 = 1, T = 1, x(0) = 1, -$$

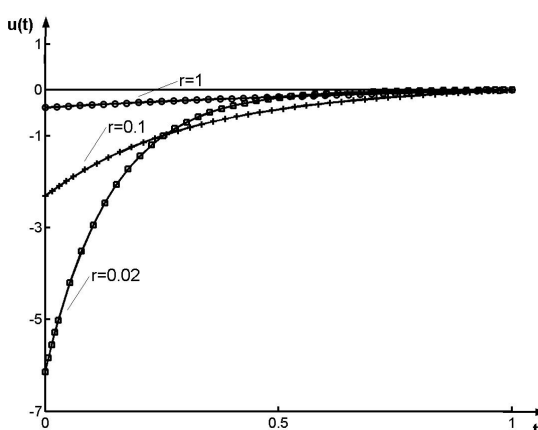
$$(12.19)$$



**Рис. 12.2.** Переходные процессы в системе оптимального управления



**Рис. 12.3.** Решения уравнения (12.14).



**Рис. 12.4.** Оптимальное управление в задаче (12.12)

при нескольких различных значениях параметра  $r$ , указанных на графиках. Из графиков следует, что при больших значениях параметра  $r$  выход системы под действием управления меняется слабо, т.е. управление малоэффективно. Применять управление с  $r > 1$ , очевидно, не имеет смысла.

Из выражений (12.17) и (12.18) следует, что при больших значениях параметра  $\beta$  (малые  $r$ ) на временах

$$0 \leq t \leq T - 3\beta/2 \quad (12.20)$$

функция  $\alpha(t)$  близка к нулю, следовательно, функция  $P(t)$  остаётся постоянной величиной, приближённо равной  $r \cdot (a + \beta)$ . Последнее означает, что на интервале времени (12.20) коэффициент усиления в замкнутой системе управления, схема которой изображена на рис. 12.1, практически остаётся постоянным, т.е. оптимальное управление синтезируется по схеме П-регулятора, и лишь перед окончанием движения происходит резкое изменение коэффициента обратной связи. Это хорошо видно на рис. 12.3, где приведены графики функции  $P(t)$ .

На рис. 12.4 изображены графики оптимального управления при различных значениях параметра  $r$ . Видно, что при уменьшении  $r$  (уменьшение стоимости или увеличение эффективности управления) оптимальное управление стремится к дельта-функции, т.е. принимает импульсный характер.

**Упражнение 12.1.** Постройте графики переходных процессов в системе оптимального управления, приведённые на рис. 12.2, с помощью MATLAB.

### 12.3. Управление на неограниченном интервале времени

Ранее при рассмотрении стандартных регуляторов с обратной связью (лекция 7) мы формулировали цель управления в виде

$$x \rightarrow 0, \quad 0 \leq t \leq \infty,$$

где величина  $x$  представляла собой отклонение выхода от заданного значения (уставки). Оптимизационные требования заключались в выборе времени выхода на режим и максимального перерегулирования. Время работы регулятора **не ограничивалось**, т.е. речь шла об управлении на неограниченном интервале времени. Требования к управляющему воздействию не накладывались. Интересно рассмотреть эту задачу с точки зрения общей теории оптимального управления, с учётом требований к управляющему воздействию.

Нельзя просто совершить предельный переход  $T \rightarrow \infty$  в результатах, полученных для ограниченного интервала движения (например, в формуле (12.17)). Здесь нужно поступить по-другому, а именно: необходимо сформулировать задачу сразу для неограниченного интервала времени. Для этого математическую модель представим в стандартном виде (11.1), а управление будем искать в классе функций, зависящих от времени  $t$  и текущих координат  $x(t)$ , т.е. в форме С-управления вида

$$u = u(t, x(t)). \quad (12.21)$$

Итак, задача формулируется следующим образом:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u), \quad x \in R_n, \quad u \in R_m. \quad (12.22)$$

$$x(t_0) = x_0.$$

$$J(u) = \int_0^{\infty} F_0(t, x(t), u(t, x)) dt \rightarrow \min_u. \quad (12.23)$$

Задачу (12.22)-(12.23) можно решить с помощью параметризации зависимости (12.21). Например, если эту зависимость выбрать в виде пропорционального закона  $u = -Kx$ , то выражение для  $u$  можно подставить в уравнение (12.22), найти зависимость  $x(t)$  и всё подставить в (12.23). Вычислив интеграл в (12.23) (если это возможно), мы получим зависимость

$J = J(K)$ . Оптимальное значение коэффициента  $K$  определится из решения уравнения  $\frac{dJ}{dK} = 0$ .

Решение задачи (12.22) – (12.23) в общем случае сложно, однако в некоторых случаях его можно найти. Отметим, что полученное решение должно быть проанализировано на устойчивость. Более того, задачи устойчивости и управления объединяют и получают задачу в следующей постановке: *найти управление  $u(t, x)$ , которое минимизирует функционал (12.23) и одновременно превращает систему (12.22) в устойчивую*. Вспомним маятник Капицы, о котором упоминалось в лекции 8, или представим ракету, взлетающую вертикально, движущийся по заданному курсу реактивный самолет, – все эти объекты являются устойчивыми исключительно благодаря управлению.

Сформулированная выше задача называется **задачей оптимальной стабилизации**. Рассмотрим её на примере ЛК-задачи. Запишем аналог задачи (12.1) – (12.2) для неограниченного интервала времени при  $N_I = 0$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad t \geq 0, \quad x \in R_n, \quad u \in R_m \quad x(0) = x_0; \quad (12.24)$$

$$J(u) = \int_0^\infty (\langle x(t) | N_2(t) | x(t) \rangle + \langle u(t) | N_3(t) | u(t) \rangle) dt \rightarrow \min_u, \quad (12.25)$$

матрицы  $N_2(t)$ ,  $N_3(t)$  непрерывно положительно определены:

$$\langle x | N_2(t) | x \rangle \geq C \langle x | x \rangle, \quad \langle x | N_3(t) | x \rangle \geq C \langle x | x \rangle, \quad C > 0.$$

Оказывается, что оптимальное управление  $u_0$  и матрица  $P(t)$  для задачи (12.24) – (12.25) удовлетворяют соотношениям

$$u_0(t, x) = -N_3^{-1} \tilde{B}(t) P(t) x, \quad t \geq 0, \quad (12.26)$$

$$\dot{P}(t) + \tilde{A}(t) P(t) + P(t) A(t) - P(t) B(t) N_3^{-1}(t) \tilde{B}(t) P(t) + N_2(t) = 0. \quad (12.27)$$

Уравнение (12.27) теперь решается на бесконечном промежутке времени. Если существует решение  $P(t)$  уравнения (12.27) такое, что

$$\langle x | P(t) | x \rangle \geq \alpha \langle x | x \rangle, \quad \|P(t)\| < C, \quad C > 0, \alpha > 0, \quad (12.28)$$

то система (12.24) при оптимальном управлении (12.26) экспоненциально устойчива (см. [1, гл. VII]). Двойными вертикальными чертами в (12.28) обозначена норма матрицы, равная корню квадратному из суммы квадратов её элементов. Нелинейное дифференциальное матричное уравнение (12.27) может быть решено с помощью процедуры последовательных приближений.

Ситуация упрощается в **стационарном случае**. Если матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $N_2$  и  $N_3$  в (12.24), (12.25) не зависят от времени, то матрица  $P$  в силу бесконечного верхнего предела в интеграле критерия качества (12.25) тоже не должна зависеть от времени. Поэтому для **стационарной линейно-квадратичной задачи** оптимальное управление на неограниченном интервале времени имеет вид

$$u_0(t, x) = u_0(x) = -N_3^{-1} \tilde{B} P x, \quad (12.29)$$

где постоянная симметричная матрица  $P > 0$  является решением уравнения

$$\tilde{A} P + P A - P B N_3^{-1} \tilde{B} P + N_2 = 0, \quad (12.30)$$

которое называется **алгебраическим уравнением Риккати**. Для скалярного случая необходимо выбирать положительный корень квадратного уравнения, к которому сводится уравнение (12.30).

**Упражнение 12.2.** Процесс изменения температуры  $\Theta(t)$  воздуха в комнате опишем математической моделью в виде уравнения (7.10)

$$C_o \dot{\Theta} = -k(\Theta - \Theta_H) + q(t).$$

(Обозначения величин в соответствии с п. 7.2). С помощью этой модели рассмотрите следующие **задачи оптимального управления температурой воздуха в комнате**:

а) Пусть требуется нагреть комнату до температуры  $\Theta_{уст}$  за заданное время  $T$  при минимальных расходах на управление и при заданной начальной температуре  $\Theta(0) = \Theta_o < \Theta_{уст}$ . Найдите управление, минимизируя функционал

$$J(q) = \alpha \cdot (\Theta(T) - \Theta_{уст})^2 + \int_0^T q^2(t) dt, \quad (\alpha > 0).$$

Средствами MATLAB исследуйте работу рассчитанного оптимального регулятора для комнаты объёмом  $60 \text{ м}^3$  при различных значениях остальных параметров, соответствующих условиям уральской зимы.

б) Постройте управление, стабилизирующее температуру в комнате на заданном уровне  $\Theta_{уст}$ , используя П-регулятор  $q(t) = -K \cdot (\Theta(t) - \Theta_{уст})$ . Коэффициент  $K$  найдите путём решения уравнения для математической модели системы с обратной связью и последующей минимизации функционала

$$J(q) = \int_0^{\infty} [\alpha \cdot (\Theta(t) - \Theta_{уст})^2 + q^2(t)] dt.$$

Исследуйте работу регулятора для комнаты с помощью моделирования в Simulink с исходными данными, как в задании а).

в) Решите задачу пункта б), используя алгебраическое уравнение Риккати (12.30). Сравните полученные результаты.

*Наши ноги и челюсти быстры,  
Но почему же, возжак, дай ответ,  
Мы затравленно рвёмся на выстрел  
И не пробуем – через запрет?*

*В.С.Высоцкий*

## **ЛЕКЦИЯ 13. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЯЮЩИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ**

### **13.1. Принцип максимума Понтрягина**

#### **13.1.1. Формулировка принципа максимума**

Необходимые условия оптимальности, приведённые в разделе 11.3, сформулированы для случая, когда на управляющее воздействие не накладывается никаких ограничений, поэтому его можно варьировать произвольным образом, достигая выхода на оптимальную траекторию. Если вектор управляющих воздействий  $u(t)$  принадлежит некоторому замкнутому ограниченному множеству  $U$  ( $u(t) \in U$ ), то его нельзя варьировать произвольным образом на границе множества, следовательно, методы, изложенные выше, неприменимы. Наличие ограничения требует модификации условия (11.27) теоремы 11.1. Отметим, что здесь мы рассматриваем ограничения типа приведённого в лекции 2 простейшего примера (2.11).

Необходимые условия оптимальности, учитывающие ограничения на управление, называют **принципом максимума Понтрягина**<sup>28</sup>. Сформулируем его для задачи Больца. Рассмотрим задачу управления

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x \in R_n, u \in R_m, t_0 \leq t \leq T, x(t_0) = x_0. \quad (13.1)$$

$$J(u) = \int_{t_0}^T F(t, x(t), u(t)) dt + \varphi(x(T)) \rightarrow \min, \quad (13.2)$$

$$u(t) \in U. \quad (13.3)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 13.1 (принцип максимума Понтрягина).** Пусть  $u_0(t)$  – оптимальное управление в задаче (13.1) – (13.3), а  $x_0(t)$  – оптимальная траектория. Тогда существует такой вектор  $\psi(t) \in R_n$ , удовлетворяющий уравнениям

---

<sup>28</sup> Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Наука, 1989. 60 с.



Оптимальное управление при ограничениях

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad \psi(T) = -\varphi_x(x_0(T)), \quad (13.4)$$

что справедливо условие максимума

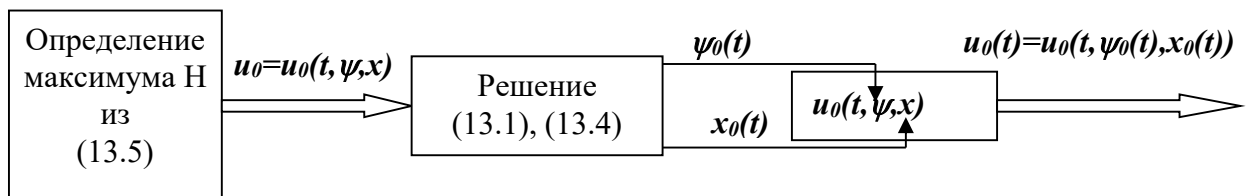
$$\max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \quad (13.5)$$

где гамильтониан  $H$  определяется равенством

$$H(t, x(t), u, \psi(t)) = -F(t, x(t), u) + \langle \psi(t) | f(t, x(t), u) \rangle. \quad (13.6)$$

Как видим, из условий оптимальности (11.33) – (11.35) два условия сохраняются, а выражение (11.35), получающееся из условия стационарности гамильтониана  $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ , заменяется на условие максимума (13.5). Отметим, что максимум функции  $H(t, x_0(t), u, \psi(t))$  в левой части условия (13.5) вычисляется по параметру  $u(t) \in U$  при фиксированных значениях остальных аргументов  $t, x_0(t), \psi(t)$ .

Построение оптимального управления при ограничениях проводится также, как в задаче без ограничений, с той лишь разницей, что управление определяется благодаря использованию соотношения (13.5). Последовательность действий при построении оптимального управления изображена на рис. 13.1.



**Рис. 13.1.** Построение оптимального управления с использованием принципа максимума

### 13.1.2. Пример: поворот вала электродвигателя на максимальный угол

Рассмотрим применение принципа максимума на примере задачи о повороте вала электродвигателя на максимальный угол. Математическую модель двигателя представим в форме (2.4):

$$LJ\ddot{\varphi}(t) + RJ\dot{\varphi}(t) = Kv(t), \quad (13.7)$$

где  $v(t)$  – управляющее напряжение, прикладываемое к цепи статора. Двигатель считается реверсивным, поэтому на напряжение накладываются ограничения

$$-V_{\max} \leq v(t) \leq V_{\max}. \quad (13.8)$$

Упростим математическую модель объекта, считая индуктивность обмотки статора  $L = 0$ . В начальный момент вал двигателя неподвижен, угол поворота равен нулю. Модель (13.7) – (13.8) теперь можно представить в форме уравнений в фазовом пространстве

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad (13.9)$$

$$|u| \leq b, \quad (13.10)$$

где  $x_1 = \varphi$ ,  $x_2 = \dot{\varphi}$ ,  $u = \frac{K}{RJ} v$ ,  $b = \frac{K}{RJ} V_{\max}$ . Требуется выбрать управление так, чтобы в заданный момент времени  $T$  скорость вращения была равна нулю, а угол поворота при этом был максимальным

$$x_2(T) = 0, x_1(T) \rightarrow \max. \quad (13.11)$$

При отсутствии ограничений поставленная задача имела бы мало смысла, поскольку прикладывая бесконечно большое напряжение, мы могли бы получить бесконечно большой угол поворота. Очевидно, что прикладывая напряжение  $V_{\max}$ , мы тоже будем достигать максимально возможного угла поворота вала. Однако в момент времени  $T$  вал должен остановиться, т.е. когда-то нужно приложить отрицательное напряжение, чтобы начать тормозить вал. Может быть, вследствие симметрии задачи из-за отсутствия трения, половину времени  $T$  мы должны разгонять вал, прикладывая напряжение  $V_{\max}$  (управление  $b$  в (13.9)), а вторую половину времени останавливать его напряжением  $-V_{\max}$ , чтобы получить максимально возможный угол поворота? Проверим эту гениальную догадку с помощью принципа максимума.

Условие (13.11) отличается от (13.2) при  $F = 0$  (задача Майера) тем, что функция от переменных состояния в момент окончания движения принимает не минимальное, а максимальное значение. В этом случае применяют **метод штрафных функций**.

Введём функционал

$$J_k(u) = -x_1(T) + \frac{k}{2} x_2^2(T) \rightarrow \min. \quad (13.12)$$

Здесь  $k \gg 1$  называется *коэффициентом штрафа*. Можно доказать, что при  $k \rightarrow \infty$  **оптимальное управление** в задаче (13.9), (13.12) должно стремиться к оптимальному управлению в задаче (13.11).

Для задачи (13.9), (13.12) на основании теоремы 13.1 ( $F = 0$ ) получаем

$$H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \quad \dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \quad \psi_1(T) = 1; \quad (13.13)$$

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\psi_1, \quad \psi_2(T) = -kx_2(T), \quad \max_{|u| \leq b} H = \max_{|u| \leq b} \psi_2 u.$$

Из равенств (13.13) следует, что оптимальное управление имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &\equiv 1, \quad \psi_2(t) = C - t, \quad u_0(t) = b \operatorname{sign} \psi_2(t), \\ u_0^k(t) &= \begin{cases} b, & 0 \leq t \leq \tau, \\ -b, & \tau \leq t \leq T. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.14)$$

Здесь  $\tau$  - **момент переключения**, для которого  $\psi_2(\tau) = 0$ ; он будет определен ниже. Из уравнений (13.9) для  $x_2(t)$  и  $x_1(t)$  при управлении (13.14) получим

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \begin{cases} bt, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 2b\tau - bt, & \tau \leq t \leq T. \end{cases} \\ x_1(t) &= \begin{cases} b\frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 2b\tau - b\frac{t^2}{2} - b\tau^2, & \tau \leq t \leq T. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.15)$$

Для нахождения момента переключения  $\tau$  используем краевое условие  $\psi_2(T) = -kx_2(T)$ . Отсюда следует, что

$$\psi_2(T) = C - T = -k(2b\tau - bT), \quad C = T - k(2b\tau - bT).$$

Поскольку  $\psi_2(\tau) = 0$ , имеем

$$T - k(2b\tau - bT) - \tau = 0.$$

Таким образом, для определения момента переключения получаем формулу

$$\tau = T(1 + bk)(1 + 2bk)^{-1}. \quad (13.16)$$

Из равенства (13.16) видно, что  $\tau \rightarrow \frac{T}{2}$  при  $k \rightarrow \infty$ . Далее, так как  $x_2(T) = bT(1 + 2bk)^{-1}$ , то  $x_2(T) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Следовательно, оптимальное управление  $u_0^k(t)$  найдено и при достаточно большом  $k$  близко к оптимальному управлению  $u_0(t)$  в задаче (13.9), которое равно

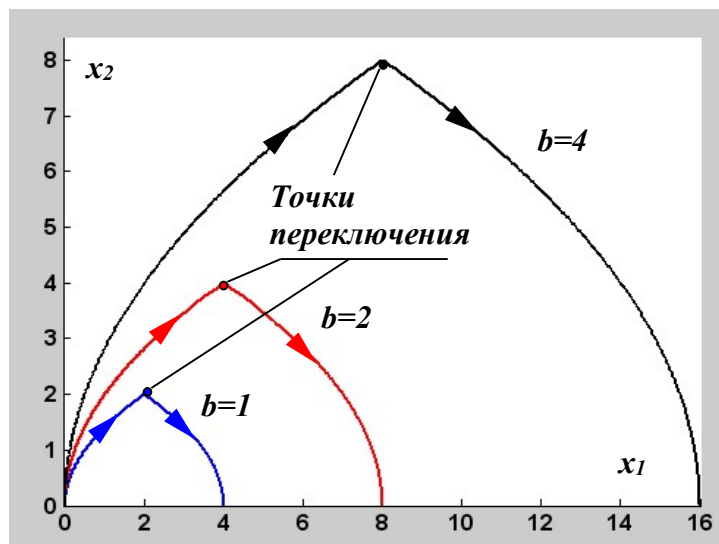
$$u_0(t) = \begin{cases} b, & 0 \leq t \leq T/2, \\ -b, & T/2 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (13.17)$$

Наша догадка полностью подтвердилась.

Построим фазовые траектории для системы (13.9) при управлении (13.17) – **оптимальные фазовые траектории** – для различных значений параметров  $b$  и  $T$ .

Выражая время  $t$ , как параметр из выражений (13.15) для  $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ , получаем участок фазовой траектории

$$x_1 = \frac{1}{2b} x_2^2, \quad 0 \leq t \leq \frac{T}{2}. \quad (13.18)$$



**Рис. 13.2.** Оптимальные траектории в задаче (13.9) – (13.11) при  $T = 4$  и различных  $b$ .

В момент  $t = \frac{T}{2}$  происходят **переключение** управления и переход на другую траекторию, которая определяется аналогично (13.18) и имеет вид

$$x_1 = \frac{bT^2}{4} - \frac{1}{2b} x_2^2, \quad \frac{T}{2} \leq t \leq T. \quad (13.19)$$

Запишем значения для  $x_1, x_2$  в (13.15) в момент времени  $t = \frac{T}{2}$ , когда происходит переключение

$$x_1 = \frac{bT^2}{8}, \quad x_2 = \frac{bT}{2}. \quad (13.20)$$

Выражения (13.20) представляют собой координаты **точки переключения** на фазовой плоскости.

На рис. 13.2 изображены оптимальные траектории в задаче о повороте вала электродвигателя на максимальный угол при  $T = 4$  и нескольких различных значениях параметра  $b$ . Фазовые траектории, являющиеся удобным графическим средством представления решений оптимальных задач, часто применяются для анализа.

Принцип максимума Понтрягина находит широкое применение при исследовании различных технических систем управления. В книге [1]

приведены следующие конкретные примеры применения принципа максимума:

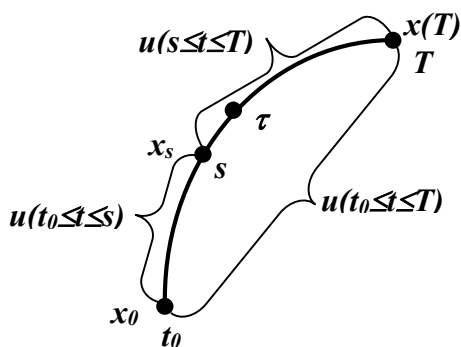
- оптимальная компоновка ядерного реактора (минимизация расхода ядерного горючего);
- управление линейной и билинейной механической системой (перевод системы из произвольной точки фазового пространства в нулевую – остановка в заданном месте или «успокоение» – за минимальное время);
- задача о плоском переходе космического аппарата с одной круговой орбиты на другую (минимизация расхода топлива);
- управление экологическими системами (различные постановки).

Все задачи решаются по алгоритму, приведённому на рис. 13.1. Читатель может, при необходимости, самостоятельно разобраться в деталях решения.

### 13.2. Метод динамического программирования

#### 13.2.1. Уравнение Беллмана

Принцип максимума позволяет построить оптимальное П-управление при наличии ограничений. Метод динамического программирования даёт возможность синтезировать С-управление. Можно сказать, что принцип максимума выделяет отдельную оптимальную траекторию, тогда как метод динамического программирования основан на изучении всего множества оптимальных траекторий.



**Рис. 13.3.** Оптимальная траектория и принцип динамического программирования

На рис. 13.3 условно изображена траектория  $x_0 \rightarrow x(T)$ , полученная с помощью применения оптимального управления  $u$  на всём промежутке времени  $t_0 \leq t \leq T$ . Пусть с помощью управления  $u$  в момент времени  $t = s$  достигнуто состояние  $x_s$ . Если теперь использовать  $x_s$  в качестве нового начального состояния и построить оптимальное управление по тому же критерию, как для  $u$ , на отрезке  $s \leq t \leq T$ , то какое состояние мы получим в момент времени  $T$ ?

«Мы получим состояние  $x(T)$ , причём независимо от положения точки  $s$ », – утверждает принцип динамического программирования<sup>29</sup>. Сформулируем его.

<sup>29</sup> Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960.

**Принцип динамического программирования:** *оптимальное управление обладает тем свойством, что для любого начального состояния и использованного начального управления последующее оптимальное управление совпадает с исходным оптимальным управлением относительно состояния, получающегося в результате применения начального управления.*

Данный принцип показывает, что мы можем находить последующее оптимальное управление, зная состояние системы в каждый момент времени. Но в таком случае мы получаем С-управление! Это управление строится с помощью решения специального уравнения (уравнения Беллмана) для специально вводимой функции (функции Беллмана).

Получим, для примера, уравнение Беллмана для задачи управления на конечном интервале времени (задача Больца) следующей системой:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u), \quad t_0 \leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \quad u \in U, \quad (13.21)$$

$$J(u) = \varphi(x(T)) + \int_{t_0}^T F(t, x(t), u) dt \rightarrow \inf_{u \in U}. \quad (13.22)$$

Введём скалярную функцию  $V(s, x)$ , называемую **функцией Беллмана**, которая равна инфимуму (точной нижней грани) функционала (13.22), но на интервале  $s \leq t \leq T$  по *всем управлениям*, для которых существует решение поставленной задачи

$$V(s, x) = \inf_{u(t) \in U} \left[ \varphi(x(T)) + \int_s^T F(t, x(t), u) dt \right]. \quad (13.23)$$

Возьмём теперь два момента времени  $s$  и  $\tau$  такие, что  $t_0 \leq s \leq \tau \leq T$  (см. рис. 13.3). Из определения функции Беллмана и принципа динамического программирования легко получить выражение

$$V(s, x) = \inf_{\substack{u(t) \in U \\ s \leq t \leq \tau}} \left[ \int_s^{\tau} F(t, x(t), u) dt + V(\tau, x(\tau)) \right], \quad (13.24)$$

которое является, по сути, уравнением для функции  $V$ . Заметим, что из (13.23) следует:  $V(T, x) = \varphi(x(T))$ . Перепишем уравнение (13.24) в виде

$$\inf_{\substack{u(t) \in U \\ s \leq t \leq \tau}} \left[ \int_s^{\tau} F(t, x(t), u) dt + V(\tau, x(\tau)) - V(s, x) \right] = 0. \quad (13.25)$$

Уравнение (13.25) можно упростить, переходя к пределу

$$\tau - s \rightarrow 0. \quad (13.26)$$

Предполагая функцию  $V$  непрерывно дифференцируемой, в случае (13.26) можем записать

$$V(\tau, x(\tau)) - V(s, x) \approx \dot{V}(s, x)(\tau - s), \quad (13.27)$$

где

$$\dot{V}(s, x) = \frac{\partial V(s, x)}{\partial s} + \langle \partial V(s, x) / \partial x | f(t, x, u) \rangle. \quad (13.28)$$

Интеграл в (13.25) в случае (13.26) примет вид

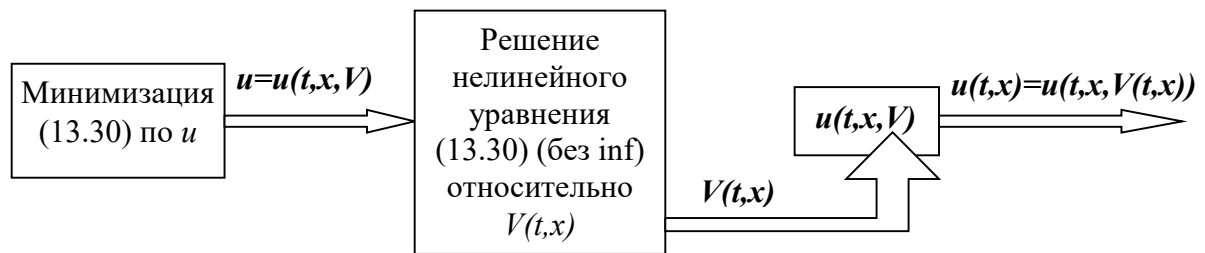
$$\int_s^\tau F(t, x(t), u) dt \approx F(s, x, u) \cdot (\tau - s). \quad (13.29)$$

Подставив (13.27) – (13.29) в (13.25) и разделив обе части этого равенства на  $\tau - s$ , в пределе  $\tau \rightarrow s + 0$  получим **уравнение Беллмана**

$$\inf_{u \in U} [V_t(t, x) + \langle V_x(t, x) | f(t, x, u) \rangle + F(t, x, u)] = 0. \quad (13.30)$$

$$t_0 \leq t \leq T, \quad V(T, x) = \varphi(x).$$

Отметим, что точная нижняя грань в уравнении (13.30) вычисляется по векторному параметру  $u \in U \subset R_m$ .



**Рис. 13.4.** Построение оптимального управления с использованием метода динамического программирования

Основные этапы построения С-управления на основе метода динамического программирования приведены на рис. 13.4. Подчеркнём ещё раз, что после подстановки выражения  $u(t, x, V)$  в уравнение (13.30) оно становится нелинейным уравнением в частных производных для скалярной функции  $V(t, x)$ . С помощью принципа максимума решение задачи управления сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, что иногда является более простым по сравнению с решением уравнения в частных производных.

**Упражнение 13.1.** Постройте структурную схему замкнутой системы оптимального управления на основе метода динамического программирования.

Метод динамического программирования и принцип максимума направлены на решение одной и той же задачи – построение оптимального

управления при ограничениях на управляющие воздействия. Было бы странно, если бы в одинаковых условиях они давали различные результаты. На самом деле, оба эти подхода дают, конечно, одинаковые результаты и тесно связаны методически. Так, из метода динамического программирования может быть выведен принцип максимума, а для линейно-квадратичной задачи, например, функция Беллмана находится как  $V(t, x) = \langle x | P(t) | x \rangle$ , где  $P(t)$  – решение матричного уравнения Риккати.

### 13.2.2. Пример: задача об успокоении твёрдого тела

Рассмотрим задачу о наискорейшем успокоении твёрдого тела, совершающего вращательное движение вокруг центра масс. Составим математическую модель объекта управления. Уравнения (8.9) в собственной системе координат примут вид

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\Omega}_1 &= (I_2 - I_3) \Omega_2 \Omega_3 + K_1, \\ I_2 \dot{\Omega}_2 &= (I_3 - I_1) \Omega_3 \Omega_1 + K_2, \\ I_3 \dot{\Omega}_3 &= (I_1 - I_2) \Omega_1 \Omega_2 + K_3. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Если речь идёт о движении космического аппарата, то предполагается, что моменты сил  $K_1, K_2, K_3$  создаются с помощью соответствующих двигателей. Абсолютная величина полного момента ограничена

$$\sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2} \leq K_{\max}. \quad (13.32)$$

Вводя обозначения  $I_j \Omega_j = x_j, K_j = u_j, j = 1, 2, 3, K_{\max} = b$ , запишем (13.31), (13.32) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{(I_2 - I_3)}{I_2 I_3} x_2 x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= \frac{(I_3 - I_1)}{I_3 I_1} x_1 x_3 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= \frac{(I_1 - I_2)}{I_1 I_2} x_2 x_1 + u_3, \end{aligned} \quad (13.33)$$

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \leq b. \quad (13.34)$$

В начальный момент времени  $t_0 = 0$  вектор момента имеет заданное значение  $\vec{r}(0)$ , причём  $|\vec{r}(0)| \geq R$ . Обозначим через  $T > 0$  первый момент времени, когда  $|\vec{r}(T)| = R$ , т.е. величина момента уменьшилась до заданного значения (произошло успокоение движения). Управление требуется выбрать так, чтобы время успокоения  $T$  было минимальным.



### Оптимальное управление при ограничениях

Используем метод динамического программирования. Поскольку в задаче быстрогодействия  $\varphi = 0, F = 1$ , то, в соответствии с определением функции Беллмана (13.23), здесь она имеет смысл минимального времени успокоения. Поскольку уравнения движения (13.33) и ограничения на управление (13.34) не зависят явно от времени, функция  $V$  также не будет содержать времени:  $V = V(x_1, x_2, x_3)$ . Уравнение Беллмана примет вид

$$\inf_{-b \leq u \leq b} \left[ \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \left( \frac{(I_2 - I_3)}{I_2 I_3} x_2 x_3 + u_1 \right) + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \left( \frac{(I_3 - I_1)}{I_1 I_3} x_1 x_3 + u_2 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial V}{\partial x_3} \cdot \left( \frac{(I_1 - I_2)}{I_2 I_1} x_2 x_1 + u_3 \right) \right] + 1 = 0, \quad V(\vec{x}) = 0, |\vec{x}| = R. \quad (13.35)$$

Необходимо найти вектор управления, при котором достигается инфимум скалярного произведения

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot u_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot u_2 + \frac{\partial V}{\partial x_3} \cdot u_3 \equiv \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{u}, \quad |\vec{u}| \leq b.$$

Очевидно, что вектор  $\vec{u}$  должен быть по модулю равен  $b$  и иметь направление, противоположное вектору градиента  $\frac{\partial V}{\partial \vec{r}}$

$$\vec{u} = -b \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{1}{|\vec{V}_{\vec{r}}|}, \quad |\vec{V}_{\vec{r}}| = \sqrt{\left( \frac{\partial V}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial V}{\partial x_3} \right)^2}. \quad (13.36)$$

Здесь введён вектор  $\vec{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$ . Подставляя управление (13.36) в (13.35), получаем нелинейное уравнение для функции  $V$

$$b \cdot |\vec{V}_{\vec{r}}| + \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \left( \frac{(I_3 - I_2)}{I_3 I_2} x_2 x_3 \right) + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \left( \frac{(I_1 - I_3)}{I_1 I_3} x_1 x_3 \right) + \frac{\partial V}{\partial x_3} \cdot \left( \frac{(I_2 - I_1)}{I_2 I_1} x_2 x_1 \right) = 1. \quad (13.37)$$

Вследствие сферической симметрии задачи будем искать решение уравнения (13.37) в виде

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{b} \omega(r), \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad (13.38)$$

где  $\omega(r)$  – скалярная функция. Подстановка (13.38) в (13.37) приводит к уравнению для  $\omega(r)$ :

$$\frac{d\omega(r)}{dr} = 1, \quad \omega(R) = 0, \quad (13.39)$$

которое имеет решение  $\omega(r) = r - R$ . В результате находим оптимальное управление  $\vec{u}$  и время успокоения  $V(\vec{r})$

$$\vec{u} = -b \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad V(\vec{r}) = \frac{1}{b}(r - R). \quad (13.40)$$

Выражения (13.40) показывают, что вектор оптимального управления максимален по величине, а его направление противоположно направлению вектора углового момента.

Рассмотренные выше простые примеры являются лишь первым шагом на пути к конструированию современных замкнутых или разомкнутых многоканальных систем управления. Интересно сравнить алгоритмы управления, реализованные в технических устройствах, например, в многозвенной механической руке робота-манипулятора и в живых организмах. Вот что пишет по этому поводу основатель кибернетической науки Норберт Винер<sup>30</sup>, рассматривая произвольные действия человека с точки зрения теории систем с обратной связью: «Допустим теперь, что я поднимаю карандаш. Чтобы это сделать, я должен привести в движение определённые мышцы. Однако никто, за исключением специалистов-анатомов, не знает, какие это мышцы ... Нами осознаётся лишь конечная цель – поднять карандаш. Когда мы решили это сделать, наше движение совершается так, что, грубо говоря, степень, в которой карандаш ещё не взят, на каждом этапе уменьшается. Всё движение мы выполняем почти бессознательно». Добавим, что эти «почти бессознательные» (рефлекторные) движения происходят по оптимальным траекториям. В качестве других замечательных рефлексов, присущих животным и человеку, Н.Винер называет рефлекс ходьбы и чесательный рефлекс, причём в этих случаях оказываются задействованными несколько уровней обратных связей.

Чтобы робот рефлекторно, т.е. «не задумываясь», причём плавно и красиво выполнял команду «поднять карандаш», разработчикам необходимо тщательно подумать о его программно-аппаратном обеспечении, схемотехнических решениях и механических частях исполнительных устройств.

---

<sup>30</sup> Винер Н. Кибернетика, или управление и связь в животном и машине. М.: Наука, 1983. 344 с.

*Прочь влияния извне,  
Привыкайте к новизне!*

*В.С.Высоцкий*

## **ЛЕКЦИЯ 14. УПРАВЛЕНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ. РОБАСТНОСТЬ СИСТЕМ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ**

### ***14.1. Неопределённости объектов управления***

Традиционные методы теоретического анализа и синтеза систем управления, рассмотренные выше, основаны на предположении, что математическая модель объекта является известной и абсолютно точно описывает его поведение. Однако для современных подходов к постановке и решению задач управления характерен более критичный взгляд на точность математических моделей, имеющихся в распоряжении разработчика. Дело в том, что, как уже говорилось в лекции 2, любая модель представляет собой идеализированное (т.е. упрощенное) описание реального объекта. Кроме того, некоторые характеристики объекта могут быть заранее неизвестными или значительно изменяться в процессе его функционирования. При этом говорят о **неопределенности математической модели объекта** (или просто – о **неопределенном объекте**, понимая под этим неопределенность его математической модели [5]). Математическую модель, на основании которой разрабатываются алгоритмы управления, называют **номинальной**.

В условиях существенной неопределенности традиционные методы теории управления оказываются неприменимыми или дают плохие результаты. Поэтому для объектов с неопределенными (т.е. с неточно известными) математическими моделями необходимо применение специальных методов анализа и синтеза систем управления.

Рассмотрим основные типы неопределенностей математических моделей на примере модели двигателя постоянного тока (лекция 5).

**1. Параметрическая неопределенность** означает, что неизвестными являются постоянные параметры математической модели. Значения параметров, использованные при синтезе алгоритма управления, называют *номинальными*. Во многих практических случаях *реальные* значения параметров могут существенно отличаться от принятых номинальных.

В модели двигателя, в принципе, все параметры ( $L$ ,  $R$ ,  $b$ ,  $J$ ) определены с какой-то погрешностью. Особо нужно отметить величину момента инерции, которая может быть разной для различных нагрузок. Если мы хотим, чтобы система управления двигателя работала в широком диапазоне нагрузок  $J_{\min} \leq J \leq J_{\max}$ , мы должны создавать алгоритм для *параметрически неопределённой* модели.

2. **Сигнальная неопределенность** означает, что математическая модель содержит неизвестные функции времени. Как правило, такие функции представляют собой математическую форму описания нестационарных (переменных во времени) параметров объекта или внешних возмущений, действующих на объект.

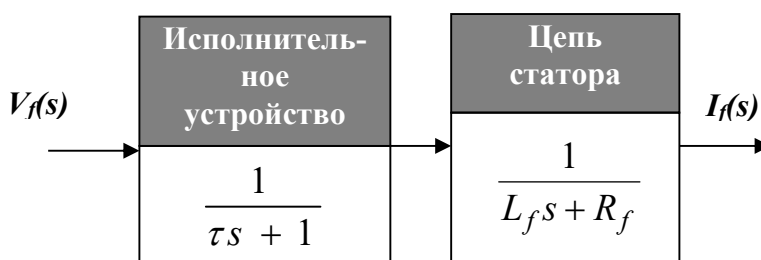
Примером внешних возмущений может служить момент  $T_d$ , являющийся случайной функцией времени. Кроме того, при работе двигателя происходит разогрев, в результате чего активное сопротивление обмоток  $R$  изменяется с течением времени по неизвестному закону  $R(t)$  – это *сигнальная неопределённость*.

3. **Функциональная неопределенность** означает, что математическая модель объекта содержит неизвестные функции координат состояния, регулируемых переменных или сигналов управления.

Во многих случаях, например, при управлении вентиляторами или валами гребных установок судов внешний момент является сложной, причём неизвестной функцией частоты вращения вала:  $T_d = T_d(\omega)$ . Учёт данной зависимости даст нам систему с *функциональной неопределённостью*.

4. **Структурная неопределенность** означает, что структура математической модели является неточно известной. Как правило, структурная неопределенность выражается в том, что динамический порядок (степень) реального объекта выше порядка его математической модели. При этом говорят о наличии **немоделируемой (паразитной) динамики**.

Двигатель, управляемый по цепи возбуждения, является, в соответствии с выражением для передаточной функции (5.7), объектом третьего порядка. Однако при построении этой модели не было учтено время срабатывания исполнительного устройства  $\tau$ , передающего управляющее напряжение в цепь возбуждения. Если учесть это время, входную цепь двигателя нужно изобразить в виде, указанном на рис. 14.1.



**Рис. 14.1.** Входная цепь двигателя, управляемого по цепи статора, с учётом времени срабатывания исполнительного устройства (паразитной динамики)

Порядок системы при этом увеличивается на единицу. Блок с передаточной функцией  $\frac{1}{\tau s + 1}$  описывает *паразитную динамику*.

Наконец, отметим, что по отношению к этапу синтеза управления неопределенности делятся на априорные неопределенности и текущие вариации математической модели. *Априорная* (т.е. изначальная) неопределенность существует уже на этапе синтеза системы. Она может быть обусловлена отсутствием точной информации о свойствах объекта управления и условиях его функционирования, отсутствием точного математического описания объекта, технологическим разбросом характеристик системы управления при ее изготовлении и т.п. *Текущие вариации математической модели* представляют собой непредсказуемые изменения математической модели объекта в ходе его рабочего функционирования. Причинами таких вариаций могут быть: изменения свойств нагрузки (например, уменьшение или увеличение приведенного момента инерции), изменение характеристик объекта управления (нагрев обмоток двигателя, уменьшение массы топлива в баках ракет или самолета), изменение условий функционирования объекта (изменение режимов его работы или свойств внешней среды).

Можно задать естественный вопрос: «Если нельзя использовать традиционные методы теории управления, то как управлять неопределёнными объектами?». Ответ на этот вопрос даёт современная теория адаптивных и робастных систем, которая изучает методы управления неопределёнными объектами [2; 5]. Рассмотрим её применительно к линейным SISO-системам.

#### ***14.2. Понятие грубости и робастности систем управления***

Задача исследования систем с неопределенностями может быть сформулирована следующим образом. Пусть система с номинальной математической моделью обладает некоторыми *желаемыми свойствами* (например, определенным типом устойчивости, заданными показателями точности или заданными показателями динамического качества и т.п.). Сохранятся ли эти свойства при изменениях (*вариациях* или *возмущениях*) математической модели? Проблема сохранения некоторого свойства системы при изменениях ее математической модели изучается *теорией грубости свойства систем управления*. Дадим следующее определение.

***Определение 14.1.*** Если некоторое свойство системы сохраняется хотя бы при малых (в определенном смысле) вариациях ее математической модели, то данное свойство называется **грубым** по отношению к выделенному классу вариаций. В противном случае свойство называется **негрубым**.

Термин «грубая система» был введен в научный оборот А.А. Андроновым<sup>31</sup>, изучавшим топологические свойства динамических систем, через 45 лет после исследований устойчивости систем А.М. Ляпуновым. Для теории динамических систем с целенаправленно изменяемыми внешними воздействиями (т.е. для задач теории управления) характерна более широкая трактовка понятия грубости как сохранения некоторых свойств (и не обязательно – только топологической структуры траекторий) динамической системы при малых изменениях ее математической модели. Так как фундаментальным свойством любой динамической системы является устойчивость, то прежде всего интересуются грубостью свойств устойчивости (хотя можно изучать грубость свойств переходных процессов, грубость точностных свойств, грубость частотных характеристик и т.п.).

В последнее время в литературе часто вместо термина «грубость» используется термин робастность (от англ. *robust* – крепкий, сильный). Обычно, говоря о робастности, предполагают знание количественных оценок допустимых вариаций математической модели. В этом смысле «грубость» может трактоваться как «локальная робастность». Термины «грубый» и «робастный» используются также по отношению к алгоритмам управления и замкнутым системам. При этом для корректного использования этих терминов необходимо оговаривать класс номинальных *моделей* систем управления, класс допустимых *вариаций* и указывать *свойство* системы, которое сохраняется при данных вариациях. Однако во многих специальных разделах современной теории управления термин «робастный» используется в специальном, более узком смысле без каких-либо дополнительных оговорок и условий.

**Робастные (грубые) системы** – это системы управления, обеспечивающие приемлемое (в смысле некоторого критерия) качество при наличии параметрических, сигнальных, функциональных или структурных неопределенностей объекта управления. При этом, как правило, в ходе рабочего функционирования системы *коэффициенты регулятора не подстраиваются*, а малая чувствительность (т.е. грубость или робастность) к различного рода вариациям математической модели объекта достигается за счет специальным образом выбранной структуры регулятора (алгоритм управления).

Таким образом, робастные системы относятся к классу *ненастраивающихся* систем управления, а их малая чувствительность к различного рода вариациям математической модели объекта обеспечивается на этапе синтеза алгоритма управления.

---

<sup>31</sup> Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. XIV. № 5. С. 247-250.

## 14.3. Робастность систем управления с обратной связью

В лекции 6 мы ввели понятие чувствительности системы с обратной связью как величины, обуславливающей изменение выходного сигнала системы при изменении её параметров. Фактически мы рассмотрели робастность точностных свойств систем управления с обратной связью в условиях параметрической неопределённости. Определим робастность (грубость) свойства устойчивости таких систем и их робастность по отношению к структурным возмущениям для случая отрицательной обратной связи с положительным коэффициентом усиления в блоке управления (П-регулятор).

Рассмотрим простейшую систему управления для скалярной переменной  $x$  вида

$$\dot{x} = \theta x + u, \quad (14.1)$$

здесь  $\theta$  – постоянный параметр, истинное значение которого неизвестно. Цель управления:  $x \rightarrow 0$ ,  $0 \leq t \leq \infty$  (задача асимптотической стабилизации – см. (7.15)). Для выработки алгоритма управления предположим, что значение параметра – *номинальное значение* равно  $\xi$ . Очевидно, что для номинальной модели задача будет решена с помощью управления

$$u = -\xi x - kx, \quad (14.2)$$

где  $k > 0$  – коэффициент обратной связи. Действительно, подставив (14.2) в (14.1) при  $\theta = \xi$ , получим

$$\dot{x} = -kx. \quad (14.3)$$

Уравнение (14.3) является *номинальной моделью* замкнутой системы, поскольку оно получено при номинальном значении параметра. Тривиальное решение этого уравнения экспоненциально устойчиво. Сохранится ли данное свойство при отклонении номинального значения от истинного? Подставляя (14.2) в (14.1) при условии  $\theta \neq \xi$ , получаем

$$\dot{x} = -kx + \tilde{\theta}x, \quad (14.4)$$

где величина  $\tilde{\theta} = \theta - \xi$  носит название *параметрического возмущения* (или *параметрической ошибки*). Модель (14.4) называется *параметрически возмущённой моделью*. Очевидно, что возмущённая модель экспоненциально устойчива, если  $\tilde{\theta} < k$ . Таким образом, свойство экспоненциальной устойчивости является грубым по отношению к параметрическим возмущениям, так как оно сохраняется хотя бы при малых отклонениях

истинных параметров объекта от принятых номинальных значений. Область робастности регулятора (14.2) определяется неравенством  $\hat{\theta} + k > \theta$ .

Рассмотрим теперь случай структурных возмущений, вызванных наличием паразитной динамики, на примере линейного объекта второго порядка, управляемого по выходу. Пусть номинальная модель объекта описывается передаточной функцией

$$G_o(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}. \quad (14.5)$$

Охватим объект отрицательной обратной связью, введём коэффициент усиления  $K$  и учтём время срабатывания исполнительного устройства  $\tau$ . Структурная схема возмущённой модели замкнутой системы изображена на рис. 14.2. Номинальная модель замкнутой системы получается при  $\tau=0$ , а ранее (лекция 9) было показано, что она экспоненциально устойчива.

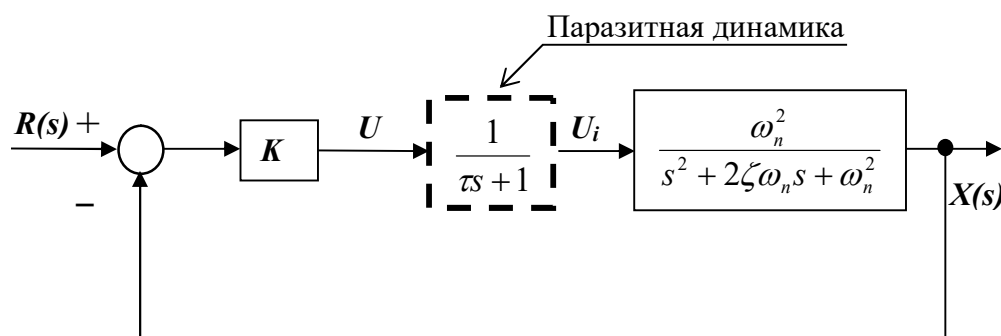


Рис. 14.2. Структурная схема модели с паразитной динамикой

Рассмотрим вопрос об экспоненциальной устойчивости модели, изображённой на рис. 14.2, хотя бы при малых значениях постоянной времени  $\tau$ . Передаточная функция замкнутой системы, в соответствии с (6.3), имеет вид

$$T(s) = \frac{K\omega_n^2}{\tau s^3 + (1 + 2\alpha\zeta)s^2 + (\alpha + 2\zeta)\omega_n s + \omega_n^2(1 + K)}, \quad (14.6)$$

где введён безразмерный параметр  $\alpha = \tau\omega_n$ .

Характеристический многочлен, соответствующий передаточной функции (14.6), имеет вид

$$P(\lambda) = \tau\lambda^3 + (1 + 2\alpha\zeta)\lambda^2 + (\alpha + 2\zeta)\omega_n\lambda + \omega_n^2(1 + K). \quad (14.7)$$

Поскольку все коэффициенты этого многочлена положительны, для исследования устойчивости достаточно использовать критерий Ляпунова-Шипара, который в данном случае приводит к неравенству



$$(1 + 2\alpha\zeta)(\alpha + 2\zeta) > \alpha^2(1 + K). \quad (14.8)$$

С помощью (14.8) можно определить точное значение параметра  $\alpha$ , при котором система теряет устойчивость (найти область робастности П-регулятора). Здесь принципиально исследовать случай малых значений  $\alpha \ll 1$ . Пренебрегая членами второй степени в (14.8), получим неравенство  $(1 + 4\zeta^2)\alpha + 2\zeta > 0$ , которое выполняется при любом  $\zeta$ . Таким образом, мы показали, что возмущённая система сохраняет свойство экспоненциальной устойчивости при малых временах  $\tau$ . В [5, п.2.1] с помощью функций Ляпунова исследованы произвольные линейные стационарные системы с вектором обратных связей и показано, что свойство экспоненциальной устойчивости является грубым по отношению к паразитной динамике для класса линейных стационарных систем.

На рассмотренных примерах мы показали, что системы с обратной связью, содержащие регуляторы по отклонению выхода от заданной величины (SISO-системы), являются робастными системами. На практике это означает, что если регулятор обеспечивает экспоненциальную устойчивость с номинальной (упрощенной, идеализированной) моделью, то этот же регулятор обеспечит экспоненциальную устойчивость и для реальной системы при небольших отклонениях её параметров или структуры от номинальных. Это позволяет при синтезе управления использовать приближённые значения параметров и пренебрегать малыми постоянными времени.

Робастные алгоритмы обобщаются на многоканальные системы (MIMO) в виде робастного модального управления с помощью теории *обобщённого модального управления*<sup>32</sup>. Теория обобщённого модального управления объектами с параметрическими неопределённостями рассматривается в главе 3 книги [5]. Другим обобщением является метод скоростного градиента. Рассмотрим его подробнее.

#### 14.4. Метод скоростного градиента

Метод предназначен для решения задач управления непрерывными по времени системами, в которых цель управления задана при помощи **целевой функции** [2, 6]

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(x(t), t) = 0, \quad (14.9)$$

где  $Q(x(t), t)$  – гладкая целевая функция. Выбор вида целевой функции достаточно произволен. Опишем построение алгоритмов скоростного

---

<sup>32</sup> Ушаков А.В. Обобщённое модальное управление // Изв. Вузов. Приборостроение. 2000. Т.43. №3. С.8-16.

градиента для непрерывной нестационарной системы вида (11.1) при цели управления, заданной соотношением (14.9).

Для построения алгоритма вычисляется скалярная функция  $\dot{Q} = \omega(x, u, t)$  – скорость изменения величины  $Q_t = Q(x(t), t)$  в силу уравнения объекта (11.1)

$$\omega(x, u, t) = \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} + \langle \nabla_x Q(x, t) | f(x, u, t) \rangle.$$

Затем находится градиент функции  $\omega(x, u, t)$  по входным (управляющим) переменным

$$\nabla_u \omega(x, u, t) = \left\langle \frac{\partial f(x, u, t)}{\partial u} \middle| \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} \right\rangle.$$

Наконец, задается алгоритм изменения  $u(t)$  дифференциальным уравнением

$$\frac{du}{dt} = -\Gamma \nabla_u \omega(x, u, t), \quad (14.10)$$

где  $\Gamma = \tilde{\Gamma} > 0$  – симметрическая положительно определенная матрица, например,  $\Gamma = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ ,  $\gamma_i > 0$ . Алгоритм (14.10) естественно назвать *алгоритмом скоростного градиента (АСГ)*, поскольку в нем изменение  $u(t)$  происходит пропорционально градиенту скорости изменения  $Q_t$ .

Происхождение алгоритма (14.10) можно объяснить следующим образом. Для достижения цели управления (14.9) желательно изменять  $u(t)$  в направлении уменьшения  $Q(x(t), t)$ . Поскольку  $Q(x(t), t)$  не зависит от  $u(t)$ , найти такое направление затруднительно. Поэтому можно пытаться уменьшить  $\dot{Q}$ , стремясь к выполнению неравенства  $\dot{Q} < 0$ , означающего, в свою очередь, уменьшение  $Q(x(t), t)$ . Функция  $\dot{Q} = \omega(x, u, t)$  уже явно зависит от  $u$ , что позволяет написать алгоритм (14.10).

В качестве примера рассмотрим применение алгоритма скоростного градиента для линейной стационарной системы

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u}, \quad \bar{y} = C\bar{x}. \quad \bar{x} \in R_n, u \in R_m, \bar{y} \in R_p. \quad (14.11)$$

Пусть требуется приблизить вектор выхода  $\bar{y}$  к желаемой функции времени  $\bar{y}_*(t)$ , т.е. решить **задачу слежения** (если величина  $\bar{y}_*$  – уставка – не зависит от времени, задача называется **задачей стабилизации**). Выберем в качестве целевой функции квадрат модуля отклонения выходного вектора от желаемого значения

$$Q(\bar{x}, t) = \frac{1}{2} \langle \bar{y} - \bar{y}_*(t) | \bar{y} - \bar{y}_*(t) \rangle. \quad (14.12)$$

Скорость изменения функции (14.12), в соответствии с системой (14.11), будет равна

$$\omega(\bar{x}, \bar{u}, t) = \langle \bar{y} - \bar{y}_*(t) | CA\bar{x} + CB\bar{u} - \dot{\bar{y}}_*(t) \rangle. \quad (14.13)$$

Скоростной градиент и алгоритм скоростного градиента, полученные с помощью функции (14.13), примут вид

$$\nabla_u \omega(\bar{x}, \bar{u}, t) = \tilde{B} \cdot \tilde{C} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_*(t)), \quad (14.14)$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = -\Gamma \cdot \tilde{B} \cdot \tilde{C} \cdot (\bar{y} - \bar{y}_*(t)). \quad (14.15)$$

В скалярном случае для задачи стабилизации, когда  $y_*(t) = y_{уст} = const$ , интегрирование (14.15) приводит к *интегральному закону управления*

$$u = -K \int_0^t e(t) dt, \quad e(t) = y - y_{уст}, \quad K = \Gamma \cdot B \cdot C > 0.$$

Таким образом, алгоритм скоростного градиента является обобщением робастного интегрального закона регулирования. Аналогичным образом строится и обобщение другого классического закона регулирования – пропорционального. Это так называемый *алгоритм скоростного градиента в конечной форме*

$$\bar{u}(t) = \bar{u}_0 - \Gamma \cdot \nabla_u \omega(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t), \quad (14.16)$$

где  $u_0$  – некоторое начальное (опорное) значение управления (обычно берется  $u_0=0$ ). АСГ в различных формах применяется в настоящее время для управления свойствами сложных физических систем [6], таких как:

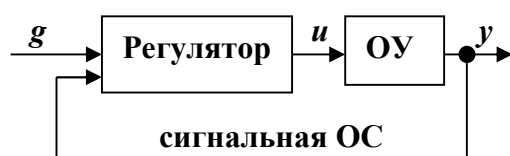
- нелинейные системы с динамическим хаосом;
- распределённые системы;
- маятник Капицы;
- химические реакции с фазовым переходом;
- квантово-механические системы (диссоциация молекул, спиновая динамика) и др.

## ЛЕКЦИЯ 15. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

### 15.1. Структура адаптивных систем управления

**Адаптивные (самонастраивающиеся) системы** – это системы управления, обеспечивающие *компенсацию параметрических, сигнальных, функциональных или структурных* неопределенностей объекта управления за счет автоматической *подстройки регулятора в ходе рабочего функционирования* системы. Другими словами, адаптивные системы восполняют нехватку априорной информации об объекте управления в ходе работы системы.

На рис. 15.1,а приведена обобщённая структурная схема замкнутой неадаптивной системы управления. «Регулятором» здесь назван весь управляющий комплекс: устройство измерения, блок сравнения, управляющее устройство, содержащее алгоритм управления, и исполнительное устройство, оказывающее управляющее воздействие на объект управления (ОУ). Вход системы  $g$  может быть константой (задача стабилизации) или заданной функцией времени  $g = g(t)$  (задача слежения). Выходной сигнал системы  $y$  подаётся на регулятор по каналу *сигнальной обратной связи* (ОС).



**Рис.15.1,а.** Схема неадаптивной замкнутой системы



**Рис.15.1,б.** Схема адаптивной замкнутой системы

Структурная схема замкнутой адаптивной системы управления приведена на рис.15.1,б. Отличительной чертой адаптивных (самонастраивающихся) систем является наличие дополнительной обратной связи, образованной цепью, содержащей блок настройки параметров регулятора. Эта обратная связь получила название *параметрической* в отличие от сигнальной обратной связи, образованной непосредственно

регулятором. Блок настройки предназначен для корректировки математической модели в ходе функционирования системы.

### 15.2. Классификация адаптивных систем управления

По принципу действия алгоритма блока настройки адаптивные системы разделяют на два типа:

- *идентификационные адаптивные системы (системы с косвенной адаптацией);*
- *безыдентификационные адаптивные системы (системы с прямой адаптацией).*

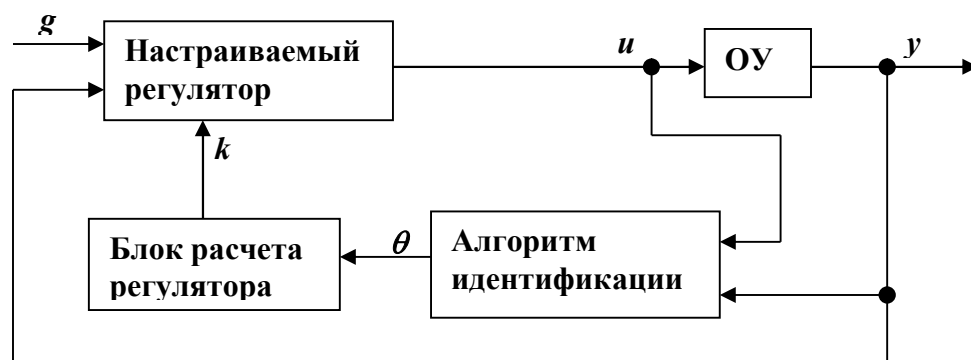


Рис. 15.2. Система идентификационного адаптивного управления

Структурная схема **идентификационной адаптивной системы** приведена на рис. 15.2. Принцип построения идентификационных адаптивных систем (или систем с косвенной адаптацией) основан на использовании процедур идентификации объекта, т.е. на получении оценок его параметров или динамических характеристик<sup>33</sup> по результатам измерений выходного сигнала и управляющих воздействий. Полученные оценки используются далее для расчета коэффициентов регулятора. Таким образом, в своей структуре идентификационные адаптивные системы содержат: блок (алгоритм) идентификации, вырабатывающий оценки неизвестных параметров объекта управления  $\theta$ , блок расчета параметров регулятора  $k$  и собственно настраиваемый регулятор. Очевидно, что при стремлении оценок параметров объекта к истинным свойства замкнутой системы будут приближаться к желаемым.

Идентификационные адаптивные системы относятся к наиболее простому по реализации типу адаптивных систем. Несмотря на простоту основной идеи, системы с косвенной адаптацией обладают рядом недостатков. Во-первых, описанная выше стратегия требует дополнительного времени на изучение объекта, что приводит к задержке при выработке

<sup>33</sup> Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989. 263 с.

правильного управления. Во-вторых, цели функционирования настраиваемого регулятора и блока оценки параметров оказываются, по существу, различными. Цель функционирования регулятора – обеспечение желаемого поведения регулируемой переменной  $y$ , в то время как цель блока идентификации – получение оценок параметров объекта управления. В этом смысле цепь настройки параметров является разомкнутой по главной цели управления: блок настройки параметров не отслеживает качество выходного сигнала и не связывает ошибку выхода с возможными неточностями идентификации параметров.

Более совершенной, хотя и более сложной в реализации, является стратегия, состоящая в настройке параметров регулятора из условия минимизации ошибки управления. При этом и настраиваемый регулятор, и блок (алгоритм) его настройки объединяются единой целью функционирования. На таком принципе основаны **безыдентификационные адаптивные системы** (или **системы с прямой адаптацией**). Выделяют два вида систем с прямой адаптацией:

- системы с эталонной моделью;
- системы экстремального регулирования.

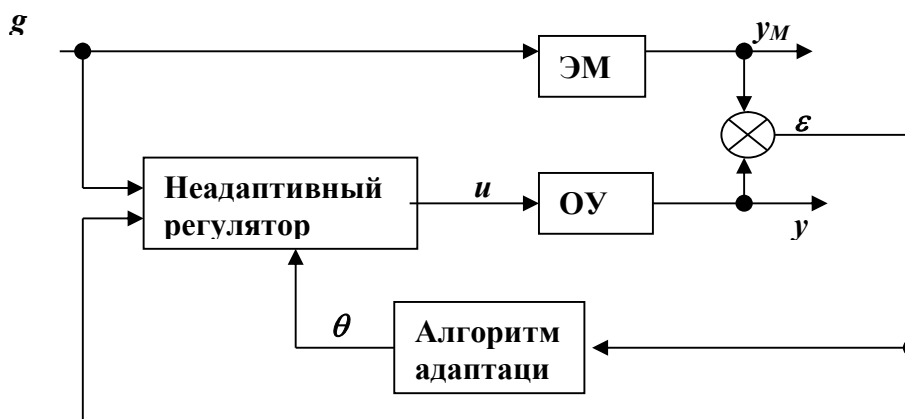


Рис. 15.3. Система адаптивного управления с эталонной моделью

В **системах с эталонной моделью** (рис. 15.3) цель управления задаётся с помощью *эталонного* (модельного) значения регулируемой переменной  $y_M(t)$ . Для выработки эталонного значения регулируемой переменной  $y_M(t)$ , как правило, используется специальный динамический блок – эталонная модель (отсюда второе название эталонной переменной – модельная переменная). Наиболее часто эталонная модель (ЭМ) реализуется в виде линейной системы, формирующей желаемый отклик на задающее воздействие  $g(t)$ . Настраиваемый регулятор строится таким образом, чтобы при соответствии его коэффициентов параметрам объекта управления его замкнутая система вела себя точно так же, как эталонная модель. Тогда информацию о параметрических рассогласованиях в системе будет нести ошибка слежения за эталонной моделью  $\varepsilon = y - y_M$ . При этом в качестве цели

работы алгоритма адаптации (или алгоритма настройки коэффициентов регулятора) естественно принять минимизацию ошибки  $\varepsilon$ . Таким образом, происходит объединение самого регулятора и алгоритма его адаптации единой целью – минимизацией ошибки слежения за эталонной моделью. Отметим, что, в отличие от идентификационного подхода, в данном случае не требуется проведения процедуры оценки неизвестных параметров объекта, а коэффициенты регулятора настраиваются непосредственно из условия выполнения главной цели управления.

Адаптивные системы с эталонной моделью впервые были предложены более сорока лет назад<sup>34</sup>. В настоящее время адаптивные системы с эталонной моделью представляют собой хорошо разработанный класс адаптивных систем, получивших наиболее широкое распространение в практических реализациях и широко представленных в научной литературе<sup>35</sup>.

Альтернативный подход к построению безыдентификационных адаптивных систем состоит в том, чтобы сформировать некоторый критерий качества  $Q=Q(y(t))$ , значение которого достигает минимума (максимума) при соответствии коэффициентов регулятора параметрам объекта управления. Тогда настройку параметров объекта управления можно вести из условия минимизации (максимизации) значения критерия качества. Самонастраивающиеся системы, основанные на таком принципе, получили название **систем экстремального регулирования**<sup>36</sup>. Их структура представлена на рис. 15.4.

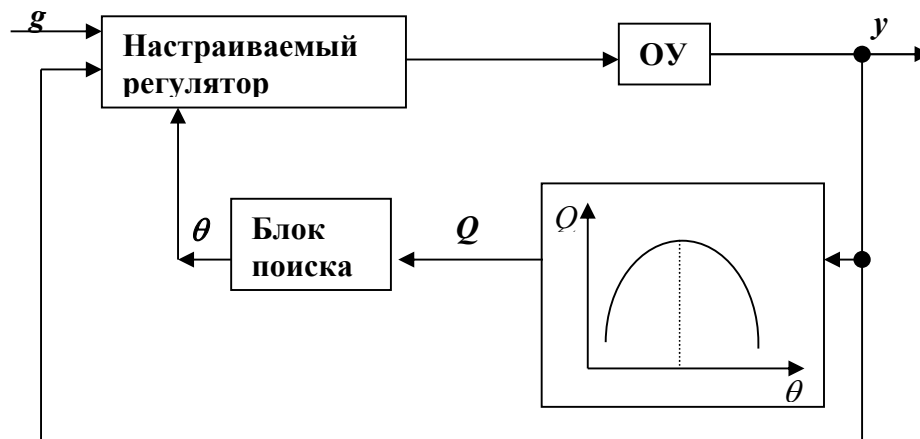


Рис. 15.4. Система экстремального регулирования

Здесь в качестве примера работы систем с прямой адаптацией рассмотрим систему управления с эталонной моделью для непрерывного

<sup>34</sup> Osburn P.V., Whitaker H.P., Kezer A. New development in the design of adaptive control system. // Paper 61 –39. Inst. Aerospace Sc. 29<sup>th</sup> Annual Meeting. N.-Y., 1961.

<sup>35</sup> Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб:Наука, 2000. 549 с.

<sup>36</sup> Растрингин Л.А. Системы экстремального регулирования. М.:Наука, 1974.

объекта первого порядка. В следующей лекции опишем идентификационный адаптивный алгоритм для дискретных систем.

### 15.3. Адаптивное управление с эталонной моделью объектом первого порядка

Рассмотрим скалярный объект, описываемый уравнением, подобным (14.1)

$$\dot{x} = \theta x + u, \quad (15.1)$$

где  $x$  – регулируемая переменная,  $u$  – сигнал управления,  $\theta$  – постоянный параметр, который неизвестен. Робастный регулятор достигает цели управления с приемлемой точностью при *неизменных* коэффициентах регулирования. Теперь попытаемся *одновременно* определить значение неизвестного параметра в ходе работы регулятора и достичь цели управления с наибольшей точностью.

Вход системы (задающее воздействие) описывается функцией времени  $g(t)$ . Мы хотим, чтобы выход системы приближался к входному сигналу так же, как для **эталонной модели**

$$\dot{x}_M = -\lambda x_M + \lambda g, \quad (15.2)$$

где сигнал  $x_M$  носит название *эталонного выхода*, а положительная постоянная  $\lambda$  определяет *желаемые динамические свойства замкнутой системы*. Очевидно, что модель (15.2) можно переписать в виде передаточной функции

$$X_M(s) = \frac{1}{Ts + 1} G(s),$$

где  $T=1/\lambda$  – постоянная времени апериодического звена первого порядка. Введение эталонной модели позволяет формализовать постановку задачи, потребовав выполнения *целевого условия*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_M(t)) = 0 \quad (15.3)$$

для любых задающих воздействий  $g(t)$ . Другими словами, необходимо синтезировать управление  $u$ , обеспечивающее нулевое установившееся значение *ошибки слежения за эталонной моделью*

$$\varepsilon = x - x_M. \quad (15.4)$$



Алгоритм адаптивного управления удобно представить в виде двух блоков:

- настраиваемого регулятора

$$u = -\lambda x - \xi x + \lambda g; \quad (15.5)$$

- алгоритма адаптации

$$\dot{\xi} = \tau(\varepsilon, x). \quad (15.6)$$

Структура алгоритма адаптации  $\tau(\varepsilon, x)$  будет определена ниже. В уравнениях (15.5), (15.6)  $\xi$  – настраиваемый параметр регулятора, генерируемый алгоритмом адаптации **из условия минимизации ошибки слежения  $\varepsilon$** . Особо отметим, что порядок замкнутой системы повысился за счет включения в ее структуру динамического блока – алгоритма адаптации (15.6). Поэтому при исследовании устойчивости замкнутой системы необходимо расширить вектор состояния, добавив новую координату – *параметрическую ошибку*  $\tilde{\theta} = \theta - \xi$ .

Чтобы определить вид алгоритма адаптации, перейдем к координатам  $\varepsilon$ ,  $\tilde{\theta}$ . Подставляя (15.5) в (15.1), вычитая из полученного уравнения (15.2) и принимая во внимание, что  $\dot{\tilde{\theta}} = \dot{\theta} - \dot{\xi} = -\dot{\xi}$ , получим следующую модель замкнутой системы в координатах  $\varepsilon$  и  $\tilde{\theta}$  (т.е. *модель ошибки*):

$$\dot{\varepsilon} = -\lambda \varepsilon + \tilde{\theta} x, \quad (15.7)$$

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\tau(\varepsilon, x). \quad (15.8)$$

Для выбора структуры алгоритма адаптации  $\tau(\varepsilon, x)$  используем функцию Ляпунова вида

$$V(\varepsilon, \tilde{\theta}) = \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{1}{2\gamma} \tilde{\theta}^2, \quad (15.9)$$

где  $\gamma$  – произвольный положительный коэффициент. Тогда производная функции (15.9) в силу уравнений (15.7), (15.8) после элементарных преобразований принимает вид

$$\dot{V}(\varepsilon, \tilde{\theta}) = -\lambda \varepsilon^2 + \tilde{\theta} \varepsilon x - \frac{1}{\gamma} \tilde{\theta} \tau(\varepsilon, x). \quad (15.10)$$

Очевидно, что при выборе  $\tau(\varepsilon, x) = \gamma \varepsilon x$  после сокращения одинаковых слагаемых получаем

$$\dot{V}(\varepsilon, \tilde{\theta}) = -\lambda \varepsilon^2 \leq 0. \quad (15.11)$$

Из последнего неравенства следует устойчивость по Ляпунову состояния равновесия  $(\varepsilon, \tilde{\theta}) = (0, 0)$  (в силу теоремы 8.2) и выполнения (в силу уравнения (15.7)) равенства

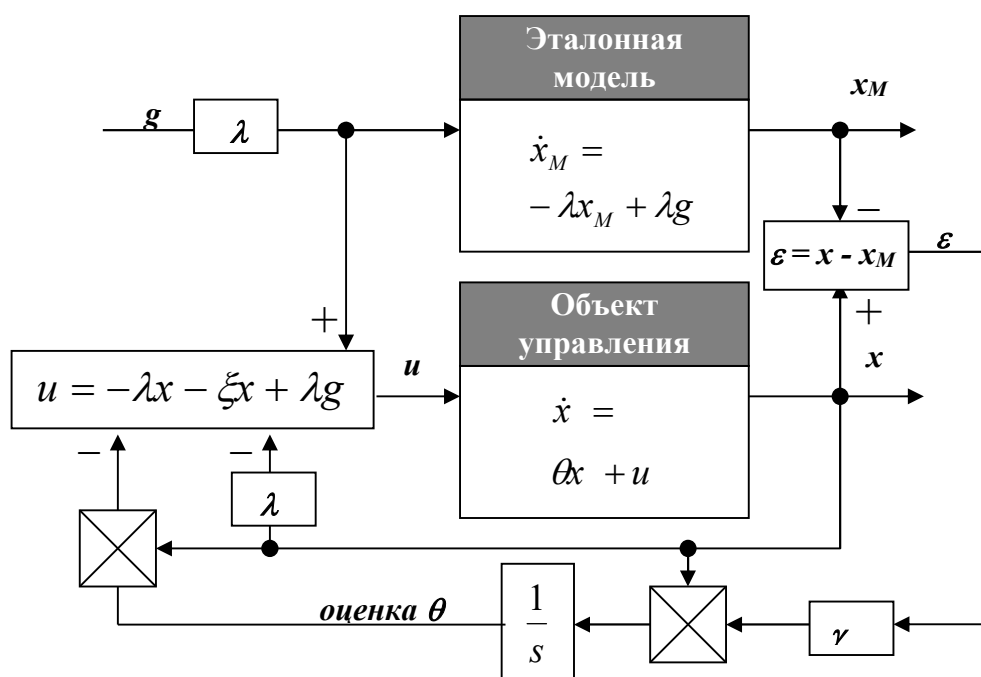
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$$

(сходимость по переменной  $\varepsilon$ ), что означает выполнение целевого условия (15.3).

Другими словами, алгоритм адаптивного управления (рис. 15.5)

$$\begin{aligned} u &= -\lambda x - \xi x + \lambda g, \\ \dot{\xi} &= \gamma \varepsilon x \end{aligned} \quad (15.12)$$

обеспечивает асимптотическое слежение за эталонной моделью для параметрически неопределенного объекта (15.1).



**Рис. 15.5.** Структурная схема системы адаптивного управления с эталонной моделью объектом первого порядка

Коэффициент  $\gamma$  в формуле (15.12) определяет скорость настройки параметра  $\xi$  и носит название *коэффициента адаптации*. В структуре алгоритма адаптации (15.12) присутствуют функции времени  $\varepsilon(t)$  и  $x(t)$ , которые называют *сигналом ошибки слежения* ( $\varepsilon(t)$ ) и *регрессором* ( $x(t)$ ). В приложении 3 описывается построение S-модели системы адаптивного управления с эталонной моделью и приведены примеры ее работы.

**Упражнение 15.1.** Постройте с помощью Simulink компьютерную модель системы адаптивного управления, соответствующую структурной схеме рис. 15.5. Исследуйте работу системы для  $g(t) = 5\sin t$ ,  $\theta = -2$ ,  $\lambda = 10$  при разных значениях коэффициента адаптации  $\gamma$ . Постройте графики величин  $\varepsilon(t)$ ,  $u(t)$ ,  $x(t)$ ,  $x_M(t)$  для  $\gamma = 10, 5, 0.1, 0.01$ ; сделайте вывод о роли коэффициента адаптации.

Адаптивный алгоритм (15.12) автоматически определяет значение неопределённого параметра  $\theta$ , следовательно, является робастным алгоритмом по отношению к параметрическим возмущениям. Однако адаптивные системы обладают высокой чувствительностью к структурным и сигнальным возмущениям. Если объект подвергается воздействию **внешнего** возмущения  $F_d(t)$ , как в случае задачи стабилизации температуры (7.12)

$$\dot{x} = \theta x + u + F_d(t), \quad (15.13)$$

то можно показать [5], что параметрическая ошибка  $\tilde{\theta}$  будет неограниченно расти при малых значениях ошибки слежения  $\varepsilon$ , что недопустимо. Поэтому для управления параметрически неопределённым объектом в условиях **внешних возмущений** применяются другие, специальные алгоритмы, *компенсирующие внешние возмущения*<sup>37</sup>.

Другим развивающимся в настоящее время подходом к синтезу систем управления в условиях неконтролируемых возмущений является разделение системы управления на подсистему с медленным движением и с быстрым движением. Это достигается искусственным введением в систему управления малого параметра в результате применения большого коэффициента усиления в законе обратной связи. Такой метод получил название *синтеза систем управления с разнотемповыми процессами*<sup>38</sup>.

Можно использовать более простые идентификационные алгоритмы (рис. 15.2), определяющие значения параметров и величину внешнего возмущения в ходе функционирования системы. Пример такого алгоритма рассмотрим в следующей лекции.

---

<sup>37</sup> Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003. 282 с.

<sup>38</sup> Юркевич В.Д. Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. СПб.: Наука, 2000. 288 с.

## **ЛЕКЦИЯ 16. РОБАСТНЫЕ И АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ СИСТЕМАМИ**

### **16.1. Градиентный метод**

Как уже говорилось в лекции 10, в настоящее время всё большую роль играет синтез управления дискретными системами. Рассмотрим некоторые современные подходы к решению этой проблемы. Математическую модель дискретной системы управления представим в виде

$$x_{k+1}=f_k(x_k,u_k), \quad (16.1)$$

где  $k=0,1,2,\dots$  – номер стадии функционирования дискретной системы или номер очередного момента измерения и подачи управления  $t_k$ ;  $x_k \in R_n$  – вектор переменных состояния (фазовых переменных),  $u_k \in R_m$  – вектор входов (управлений), соответствующих моменту  $t_k$ .

Рассмотрим **градиентный метод** [6], который предназначен для построения управления моделью (16.1) в случае, когда цель управления задана при помощи некоторой гладкой неотрицательной **целевой функции**  $Q=Q(x)$  в виде

$$Q(x_{k+1}) \leq \Delta, \text{ при } k > k_*, \quad (16.2)$$

где  $\Delta > 0$  – заданное значение порога точности задачи. В качестве целевой функции, аналогично непрерывному случаю (14.12), может быть выбрана функция дискретного аргумента

$$Q(x_{k+1}) = \frac{1}{2} \langle x_{k+1} - x_* | x_{k+1} - x_* \rangle \quad (16.3)$$

Выразим очередное состояние объекта из (16.1) и подставим в (16.2). Тогда получим приведенную целевую функцию (точнее, семейство функций  $Q_k(u)$ , зависящих от номера шага), непосредственно зависящую от управления

$$Q_k(u) = Q(f_k(x_k, u)). \quad (16.4)$$

Градиентный метод основан на изменении вектора  $u_k$  в направлении, противоположном направлению градиента (вектора из частных производных) от функции  $Q_k$  по управляющим переменным

$$u_{k+1} = u_k - \gamma_k \nabla_u Q_k(u_k), \quad (16.5)$$

где  $\nabla_u = \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_m} \right\}^T$  – вектор градиента,  $\gamma_k \geq 0$  – коэффициент шага по

управлению. Идея метода хорошо известна в теории оптимизации: при малом  $\gamma_k$  поправка  $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$  приводит к уменьшению значения функции  $Q_k(u)$ . В более изощренном выборе нет необходимости, поскольку на следующем шаге управления целевая функция изменится в силу динамики системы. Однако простая форма алгоритма не означает простоты условий его применимости. Условия, гарантирующие достижение цели управления (16.2) в системе (16.1) с алгоритмом (16.5), определяются дополнительно<sup>39</sup>. В число этих условий входит выпуклость функции  $Q_k(u)$  по  $u$ , существование общего решения  $u = u^*$  системы целевых неравенств  $Q_k(u) < \Delta$  и выбор коэффициента шага  $\gamma_k$  с зоной нечувствительности

$$\text{если } Q_k(u_k) \leq \Delta, \text{ то } \gamma_k = 0. \quad (16.6)$$

Условие (16.6) означает, что при достижении цели регулирования вектор управления компенсирует внешние воздействия, не изменяясь по величине, аналогично алгоритму ПИ-регулятора (10.9).

Очевидно, что ПИ-алгоритм для дискретных систем является частным случаем градиентного метода так же, как в непрерывном случае интегральный закон регулирования является частным случаем алгоритма скоростного градиента (14.15). Рассмотрим подробнее связь между ПИ-регулятором и градиентным методом для линейного объекта первого порядка. Пусть разностное уравнение движения имеет вид, аналогичный (10.6). В общем случае его можно представить в следующей форме:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + F, \quad (16.7)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $F$  – некоторые константы. Рекуррентный ПИ-алгоритм, полученный путём дискретизации непрерывной системы, определяется выражением (10.8), которое запишем в виде

$$u_{k+1} = u_k - K(1 + \frac{T}{T_H})x_{k+1} + Kx_k. \quad (16.8)$$

<sup>39</sup> Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.:Наука, 1981.

Найдём алгоритм управления, который получается на основе градиентного метода с целевой функцией вида (16.3). Поскольку выражение (16.8) получено для задачи стабилизации при  $x_* = 0$ , то целевая функция в рассматриваемом случае принимает простой вид

$$Q(x_{k+1}) = \frac{1}{2} x_{k+1}^2. \quad (16.9)$$

Подставим (16.7) в (16.9) и найдём частную производную полученной функции по переменной  $u$

$$\frac{\partial Q_k(u)}{\partial u} = (Ax_k + Bu_k + F) \cdot B = Bx_{k+1}. \quad (16.10)$$

Подстановка (16.10) в формулу (16.5) приводит к закону управления

$$u_{k+1} = u_k - \gamma_k \cdot B \cdot x_{k+1}, \quad (16.11)$$

с учётом условия (16.6), имеющего в данном случае вид

$$\text{если } \frac{1}{2} x_{k+1}^2 \leq \Delta, \text{ то } \gamma_k = 0.$$

Мы получили, что применение градиентного метода привело к алгоритму (16.11), похожему на алгоритм (16.8), но без слагаемого, содержащего  $x_k$  (значение переменной состояния на предыдущем шаге). Кроме того, ПИ-алгоритм не предусматривает выполнения условия типа (16.6). При приближении к цели управления эти отличия становятся несущественными.

Сравнительный анализ законов управления (16.8) и (16.11) позволяет предложить для произвольного объекта первого порядка (16.7) следующий робастный алгоритм:

$$u_{k+1} = u_k - \Gamma_k x_{k+1}, \quad \Gamma_k = \begin{cases} \Gamma > 0, & x_{k+1}^2 > \Delta; \\ 0, & x_{k+1}^2 \leq \Delta. \end{cases} \quad (16.12)$$

Алгоритм (16.12) нужно исследовать на устойчивость.

**Упражнение 16.1.** Исследуйте систему управления (16.7) с алгоритмом управления (16.12) на устойчивость. Найдите допустимые значения коэффициента  $\Gamma$ .

**Ответ:**  $\Gamma > \frac{A-1}{B}$ , если  $A > 1$ . В остальных случаях  $\Gamma > 0$ .

## 16.2. Быстрые алгоритмы для объектов 1-го и 2-го порядков

Рассмотрим дискретную систему первого порядка, номинальная модель которой имеет вид (16.7)

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + F, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad x_0 = \tilde{x}_0 \neq 0. \quad (16.13)$$

В отсутствии управления ( $u_k \equiv 0$ ) объект является асимптотически устойчивым при  $|A| < 1$ . В этом случае предельное значение дискретной переменной состояния, обусловленное наличием внешнего воздействия  $C$ , будет равно

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \frac{F}{1 - A}. \quad (16.14)$$

**Упражнение 16.2.** Найдите предельное значение переменной  $x_k$  для дискретной модели непрерывной системы (10.6) при  $u_k = 0$ . Сравните полученный результат с непрерывным случаем.

Выберем цель регулирования в виде (16.2) с целевой функцией (16.9). При  $\Delta \rightarrow 0$  цель регулирования (16.2) – (16.9) можно записать в простой форме

$$x_{k+1} \rightarrow 0, \quad \text{при } k > k_* \quad (16.15)$$

Если параметры номинальной модели соответствуют реальной системе, цель регулирования (16.15) может быть достигнута **за один шаг** с помощью управляющего воздействия<sup>40</sup>

$$u_k = -\frac{1}{B}(Ax_k + F). \quad (16.16a)$$

Подстановка (16.16a) в (16.13) даст  $x_{k+1} = 0$ , поэтому для дальнейших шагов получим

$$u_{k+1} = -\frac{F}{B}, \quad u_{k+2} = u_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (16.16b)$$

Алгоритм управления (16.16) назовём **быстрым алгоритмом** (fast algorithm). Если возможности управления ограничены и управляющее

---

<sup>40</sup> Кунцевич В.М. Адаптивное управление: алгоритмы, системы, применение. Киев: Вища школа, 1988. 64 с.

воздействие, рассчитанное по формуле (16.16a), превосходит максимально возможное значение  $U_{\max}$ , на вход объекта управления должна подаваться величина  $U_{\max}$  с соответствующим знаком, что обеспечит движение системы в нужном направлении, аналогично градиентному методу.

Рассмотрим теперь систему управления, математическая модель которой имеет вид дифференциального уравнения второго порядка:

$$\varepsilon \cdot \frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{dX}{dt} + X = K \cdot u(t) + F_0, \quad (16.17)$$

где  $X$  – отклонение регулируемой величины от заданного значения (в безразмерных единицах);  $F_0$  – внешнее воздействие,  $u(t)$  – управляющее воздействие,  $K$  – масштабный множитель. Величина  $\varepsilon > 0$  представляет собой безразмерный параметр, эффективно учитывающий инерционные свойства объекта либо наличие дополнительного динамического звена в системе управления объектом первого порядка. Величины  $X(0)$  и  $\dot{X}(0)$  предполагаются не равными нулю. Цель регулирования

$$X(t) \rightarrow 0, \dot{X}(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (16.18)$$

Перепишем уравнение (16.17) в фазовом пространстве состояний:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2; \\ \dot{X}_2 &= -\frac{1}{\varepsilon} \cdot X_1 - \frac{1}{\varepsilon} \cdot X_2 + \frac{1}{\varepsilon} (K \cdot u(t) + F_0). \end{aligned} \quad (16.19)$$

Величину  $X_1 = X$  будем называть координатой, а  $X_2$  – скоростью.

Чтобы синтезировать быстрый алгоритм для объекта с инерцией<sup>41</sup>, аналогичный (16.16), проведем дискретизацию системы с периодом квантования  $\Delta t$ , аппроксимируя матричную экспоненту по методу Эйлера. Получим дискретную систему, эквивалентную непрерывной:

$$\begin{aligned} X_1(k+1) &= X_1(k) + \frac{1}{\beta} \cdot X_2(k); \\ X_2(k+1) &= -\alpha \cdot X_1(k) + (1-\alpha) \cdot X_2(k) + C \cdot U(k) + G, \end{aligned} \quad (16.20)$$

где  $X_i(k) \equiv X_i(k \cdot \Delta t)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , и введены удобные для последующей работы обозначения:

<sup>41</sup> Ощепков А.Ю., Исаков К.А. Универсальные быстрые алгоритмы управления для объектов с инерцией//Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2009. № 3, С.10-16.



$$\alpha = \frac{\Delta t}{\varepsilon}; \beta = \frac{1}{\Delta t}; C = \frac{\Delta t}{\varepsilon} \cdot K; G = \frac{\Delta t}{\varepsilon} \cdot F_0. \quad (16.21)$$

Цель регулирования (16.18) для дискретного случая запишется в виде:

$$X_1(k) = 0, X_2(k) = 0, \quad k \geq k^*. \quad (16.22)$$

Быстрым алгоритмом, как и в предыдущем случае, назовём алгоритм, достигающий цели (16.22) при наименьшем количестве шагов.

Будем считать, что измерению доступен полный вектор состояния  $\{X_1, X_2\}$  (управление по состоянию). Поскольку управляющее воздействие входит только в одно из двух выражений системы (16.20), мы не можем подобрать его таким, чтобы цель (16.22) была достигнута за один шаг, как это было для системы 1-го порядка. Проведя измерения выходного вектора системы на  $k$ -м шаге, можно потребовать выполнения условия  $X_2(k+1) = 0$ , означающего уменьшения скорости до требуемого нулевого значения. Из этого условия получим:

$$U(k) = -\frac{G}{C} - \frac{1}{C}(1-\alpha) \cdot X_2(k) + \frac{\alpha}{C} X_1(k). \quad (16.23)$$

Последовательное применение данного алгоритма за два шага переводит систему в стационарное состояние

$$X_1(n+1) = X_1(n), X_2(n+1) = 0, \quad n > k+1.$$

Цель регулирования (16.22) не достигается.

Попробуем теперь выбрать управляющее воздействие из условия  $X_2(k+1) = -\beta X_1(k)$ :

$$U(k) = -\frac{G}{C} - \frac{1}{C}(1-\alpha) \cdot X_2(k) + \frac{\alpha}{C} X_1(k) - \frac{\beta}{C} X_1(k). \quad (16.24)$$

Подстановка выдвинутого условия в первое равенство системы (16.20) дает:  $X_1(k+2) = X_1(k+1) - X_1(k)$ ,  $X_2(k+2) \neq 0$ . Таким образом, система не останавливается в результате однократного применения управления (16.23), однако координата изменяется в сторону уменьшения, т.е. в требуемом направлении, как это происходит при применении описанного ранее градиентного метода. Если будем чередовать на последовательных шагах управления (16.23) и (16.24), то, начав с  $k=0$ , получим цепочку значений управляющих воздействий и выходных величин:

$$\begin{aligned}
& X_1(0) = X_1^0, X_2(0) = X_2^0; \\
1. \quad & U(0) = -\frac{G}{C} - \frac{1}{C}(1-\alpha) \cdot X_2^0 + \frac{\alpha}{C} X_1^0. \\
& X_1(1) = X_1^0 + \frac{1}{\beta} X_2^0, X_2(1) = 0; \\
2. \quad & U(1) = -\frac{G}{C} - \frac{\beta}{C} X_1(1). \\
& X_1(2) = X_1(1), X_2(2) = -\beta X_1(1); \\
3. \quad & U(2) = -\frac{G}{C} - \frac{1}{C}(1-\alpha) \cdot X_2(2) + \frac{\alpha}{C} X_1(2). \\
& X_1(3) = 0, X_2(3) = 0; \\
4. \quad & U(3) = -\frac{G}{C}.
\end{aligned}$$

Далее выполняются условия

$$X_1(n) = 0, X_2(n) = 0; \quad U(n) = -\frac{G}{C}, \quad n \geq 3. \quad (16.25)$$

Таким образом, чередование алгоритмов (16.23) и (16.24) переводит дискретную систему (16.20) из любого начального состояния в заданное состояние за 4 шага регулирования.

Формулы для алгоритмов (16.23) и (16.24) отличаются только слагаемым  $\frac{\beta}{C} X_1(k)$ , поэтому окончательно **быстрый алгоритм для систем с инерцией, управляемых по состоянию**, может быть описан одним выражением:

$$\begin{aligned}
U(k) = & -\frac{G}{C} - \frac{1}{C}(1-\alpha) \cdot X_2(k) + \frac{\alpha}{C} X_1(k) + \\
& + \frac{1}{2} [(-1)^k - 1] \frac{\beta}{C} X_1(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \quad (16.26)$$

Если параметры системы, входящие в алгоритмы (16.16) или (16.26), неизвестны или могут изменяться в ходе работы системы управления, необходимо их идентифицировать. Ниже рассмотрим способ идентификации параметров на основе методов линейной регрессии для системы первого порядка.

### ***16.3. Идентификационное адаптивное управление объектом первого порядка на основе методов линейной регрессии***

Неизвестные параметры системы (16.13) можно найти, применив в течение нескольких шагов любой устойчивый робастный алгоритм (предполагается, что параметры системы в течение этих шагов не изменяются). В результате мы получим **идентификационный адаптивный**

**алгоритм управления на основе быстрого алгоритма.** Рассмотрим его подробнее.

Будем использовать П-регулятор на первых трёх шагах управления:  $u_k = -K_p x_k, k = 0, 1, 2$ . В результате, в соответствии с (16.13), получим три выражения:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 + Bu_0 + F, \\ x_2 &= Ax_1 + Bu_1 + F, \\ x_3 &= Ax_2 + Bu_2 + F. \end{aligned} \quad (16.27)$$

Здесь значения входов объекта  $u_k$  и измеряемых выходов  $x_k, k = 0, 1, 2, 3$  — являются известными величинами, а три параметра  $A, B, F$  составляют вектор неизвестных параметров, подлежащих идентификации<sup>42</sup>.

Введём векторы  $|\xi\rangle, |Y\rangle$  и матрицу  $G_3$  по правилам:

$$|\xi\rangle = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A \\ B \\ F \end{pmatrix}, \quad |Y\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad G_3 = \begin{pmatrix} x_0 & u_0 & 1 \\ x_1 & u_1 & 1 \\ x_2 & u_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (16.28)$$

тогда систему уравнений (16.27) можно записать в виде

$$G_3 \cdot |\xi\rangle = |Y\rangle. \quad (16.29)$$

Вектор неизвестных параметров определится после решения (16.29)

$$|\xi\rangle = G_3^{-1} \cdot |Y\rangle. \quad (16.30)$$

Определив параметры  $A, B, F$ , можем синтезировать быстрый алгоритм (16.16) при  $k = 3$ . С целью фильтрации возможных ошибок измерений алгоритм идентификации позволяет использовать  $n$  начальных шагов, где  $n \geq 3$ . В этом случае вместо системы трёх уравнений (16.29) мы получим следующую систему:

$$G_n \cdot |\xi\rangle = |Y\rangle, \quad |Y\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad G_n = \begin{pmatrix} x_0 & u_0 & 1 \\ x_1 & u_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & u_{n-1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (16.31)$$

Система (16.31) содержит число уравнений, превосходящее количество неизвестных, т.е. является несовместной. Для решения используется метод

<sup>42</sup> Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 432 с.

наименьших квадратов или другие методы линейного регрессионного анализа. Полученный вектор будет называться псевдорешением системы (16.31).

Заметим, что произведение матрицы  $G_n$  из (16.31) на транспонированную матрицу  $\tilde{G}_n$  даст квадратную симметричную матрицу размерности  $3 \times 3$ , для которой можно найти обратную матрицу. Умножив обе части системы (16.31) на  $\tilde{G}_n$  и проведя операцию обращения квадратной матрицы, найдём вектор  $|\xi\rangle$

$$|\xi\rangle = (\tilde{G}_n G_n)^{-1} \cdot \tilde{G}_n \cdot |Y\rangle. \quad (16.32)$$

Вычисления по формуле (16.32) легко провести в MATLAB. Следует, однако, иметь в виду, что при достижении цели регулирования (16.15) первый столбец матрицы  $G_n$  будет состоять из нулей, поэтому расчёты по формуле (16.32) становятся невозможными. С другой стороны, достижение цели регулирования говорит о правильной идентификации параметров объекта, следовательно, их не нужно рассчитывать, а следует брать их предыдущие значения. Аналогично (16.2) нужно назначить значение порога точности задачи  $\Delta > 0$ , а целевую функцию определить как сумму квадратов переменных состояния на всех  $n$  шагах этапа идентификации

$$Q_n = \sum_{j=1}^n x_{k+j}^2. \quad (16.33)$$

Полностью работа идентификационной адаптивной системы управления на основе быстрого алгоритма должна быть описана следующим образом:

$$u_{k+1} = -K \cdot x_{k+1} - V, \quad K = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}, V = \frac{F_{k+1}}{B_{k+1}}. \quad (16.34)$$

Здесь  $A_{k+1}, B_{k+1}, F_{k+1}$  – значения параметров системы на  $(k+1)$ -м шаге, определённые по алгоритму:

- если  $Q_n > \Delta$ , то  $A_{k+1} = \xi_1, B_{k+1} = \xi_2, F_{k+1} = \xi_3$ , вектор  $|\xi\rangle$  определяется по формуле (16.32);
- если  $Q_n \leq \Delta$ , то  $A_{k+1} = A_k, B_{k+1} = B_k, F_{k+1} = F_k$ .

$$(16.35)$$

**Упражнение 16.3.** Составьте структурную схему замкнутой системы управления с алгоритмом (16.24)-(16.25).

Построение S-модели системы идентификационно-адаптивного управления системой первого порядка и результаты ее работы приведены в приложении 3.

Экспериментальные исследования<sup>43</sup> и результаты численного моделирования в MATLAB<sup>44</sup> показали возможность реализации рассмотренного алгоритма управления, его эффективность и преимущества по сравнению с оптимально настроенными стандартными регуляторами. Задача управления сложными системами, например, распределённым полем температуры в твёрдых телах, может быть сведена к синтезу управления по независимым каналам на основе математических моделей (16.13), если использовать декомпозицию объекта с помощью спектрального метода<sup>45</sup>. Этот подход также успешно подтвержден работой реальных систем управления<sup>46</sup>.

---

<sup>43</sup> Ощепков А.Ю., Сергеев М.В. Экспериментальные исследования адаптивного регулятора для системы первого порядка // Вестник Пермского университета. Сер. Физика. 2000. Вып. 6. С. 78 - 80.

<sup>44</sup> Ощепков А.Ю., Кирюшов В.В. Исследование свойств цифрового регулятора с функцией самонастройки в среде Matlab // Вест. Перм. ун-та. Сер. Информационные системы и технологии. 2005. С. 37 – 42.

<sup>45</sup> Martsenyuk M.A., Oschepkov A.Yu. Precision control of thermal field in solid sample// Proc.Intern.Conf. "Physics and Control 2005", St.Petersburg, Aug.24-26, 2005. P.750-753.

<sup>46</sup> Ощепков А.Ю., Марценюк М.А., Кирюшов В.В. Термоградиентная стабилизация температурных полей в твердых телах // Вест. Перм. ун-та, сер. Физика, вып. 2 (17). - 2011. – С. 52 – 64.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Если, уважаемый читатель, Вы внимательно прочитали эту книгу и Вам удалось решить все упражнения, значит, Вы освоили самые простые методы традиционной и современной теории управления, а также познакомились с элементами моделирования и конструирования систем автоматического управления (назовём это обобщённо **кибернетическими методами**). Если Вы проштудировали литературу, приведённую в библиографическом списке, и просмотрели хотя бы несколько источников, указанных в постраничных сносках, Вы наверняка почувствовали интерес к этой области науки, и у Вас возник естественный вопрос: «Где можно применить полученные знания?»

Перечислим для примера научные работы, проводимые на физическом факультете Пермского университета и в других его подразделениях, посвящённые исследованию свойств физических систем с применением обратных связей. Исследования проводятся по научным направлениям, таким как: магнитный резонанс и спектроскопия, гидродинамика жидкостей и газов, конвекция и теплообмен, гидромеханика невесомости, физика магнитных жидкостей, которые давно и успешно развиваются в университете. Научные школы по радиоспектроскопии и теоретической гидродинамике получили в 1996 г. официальный статус ведущих научных школ России.

В настоящее время проводятся теоретические исследования и компьютерное моделирование процессов управления квантовыми системами, а именно: исследуются управление динамикой мультиспиновых систем на основе обобщённых уравнений Блоха с помощью полей Раби и способы подавления декогеренции. Областью применения результатов этих работ является разработка способов записи и хранения информации на квантовом уровне.

Специалисты по прикладной и теоретической гидродинамике используют активное управление с обратной связью в задачах стабилизации механического равновесия жидкости и надкритических конвективных режимов при неравномерном нагреве жидкости в поле силы тяжести. В качестве управляющего воздействия обычно выбирается изменение взаимной ориентации продольного градиента температуры и вектора ускорения свободного падения. Результаты исследований могут быть применены для управления процессами тепломассопереноса в различных технологических установках и для решения вопросов безопасного функционирования теплообменных систем.

В лабораториях университета и ОКБ «Маяк» при Пермском университете проводятся исследования по синтезу прецизионного управления температурными полями в твёрдых телах в условиях внешних возмущений. При этом используются высокоточные миниатюрные абсолютные и дифференциальные датчики температуры и локализованные нагревательные элементы. Осуществляется разработка контроллеров, реализующих идентификационные адаптивные и робастные алгоритмы управления в многоканальных системах. Основная область применения результатов – это стабилизация формы поверхности элементов крупногабаритных оптических конструкций, в том числе космического применения, а также прецизионная термостабилизация оборудования при лабораторных измерениях геометрических размеров на уровне нескольких нанометров.

На приборостроительном предприятии «Системы контроля», ведущими специалистами которого являются выпускники физического факультета ПГУ, освоено серийное производство приборов регулирования технологических процессов марки «Термодат». Алгоритмы работы этих цифровых приборов непрерывно совершенствуются, в них учитываются самые новые методы теории управления.

Учёные университета проводят исследования по управлению не только непрерывными, но и дискретными объектами. Исследование явления коагуляции частиц в магнитных жидкостях возбудили интерес к изучению механизмов передвижения в жидкости живых организмов. В настоящее время к области исследования дискретных систем управления относится разработка теории управления биомеханическими системами, уравнения движения которых заданы в виде дифференциальных форм Пфаффа. Проводится компьютерное моделирование движения плавающих тел в виде локомоторных циклов и процессов адаптивного управления перемещениями тел в средах с переменной структурой.

Новые работы по магнитному компьютерному видению, распознаванию образов и разработка способов навигации в магнитном поле источника-ориентира, проводимые в университете, также предполагают использование обратных связей.

Приведённые примеры показывают, что кибернетические методы всё шире и шире применяются в физических исследованиях. Интерес к этой области научных исследований велик не только в России, но и во всём мире. Речь идёт даже о зарождении новой отрасли науки – **кибернетической физики**. Создано Международное общество по физике и управлению (“The International Physics And Control Society” – IPACS), основной целью которого является расширение взаимодействия между исследователями, работающими в области, относящейся к физике и к теории управления.

Очевидно, что современные специалисты, имеющие физическое образование, должны быть знакомыми с кибернетическими методами исследования и уметь разрабатывать современные системы автоматического

управления. Надеюсь, что данная книга внесёт свой скромный вклад в развитие процесса овладения физиками знаниями современных методов теории управления и в подготовку будущих специалистов в области кибернетической физики.

В заключение выражаю благодарность руководителям научных работ, проводимых на физическом факультете Пермского государственного университета за проявленный интерес, внимание к работе и оказанные консультации., а также сотрудникам кафедры систем управления и информатики Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики и лаборатории «Управление сложными системами» Института проблем машиноведения РАН (г. С.Петербург) за предоставление материалов, учебных пособий и монографий, излагающих современные методы теории управления. Особую благодарность выражаю Президенту IPACS, профессору Александру Львовичу Фрадкову, без обаятельного влияния которого вряд ли появилась бы эта книга.

Кафедра компьютерных систем и телекоммуникаций  
Пермского государственного национального исследовательского  
университета,

доц. А.Ю.Ощепков

1 июня 2012 г.



## ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ MATLAB ДЛЯ АНАЛИЗА СВОЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Система технических расчётов MATLAB® с пакетом имитационного моделирования SIMULINK®, разрабатываемая фирмой MathWorks, непрерывно развивается. Модели систем управления, приведенные в данном пособии, составлены с помощью версий MATLAB 6.5 и Simulink 4. После получения навыков моделирования в этих версиях переход к использованию более высоких версий не составит большого труда. Кроме того, будет легко понять и использовать моделирование в пакете SciLab, созданном разработчиками ОС Linux.

### *П1.1. Функции MATLAB для создания математических моделей систем управления*

В данном приложении рассказывается, как с помощью MATLAB создавать математические модели систем управления в пространстве состояний и определять передаточные функции систем, исследовать основные свойства систем (устойчивость, наблюдаемость, управляемость), а также находить переходные характеристики систем управления. Небольшие программы, которые необходимы для моделирования, в MATLAB принято называть скриптами. Скрипт – это определенная последовательность команд, набранных в командном окне (Command Window), разделенных точками с запятой. Ввод последней команды без точки с запятой приводит к выполнению всей программы.

Скрипт, выполненный в Command Window, повторно не редактируется. Для редактирования и отладки программ их рекомендуется оформлять в виде m-файлов<sup>47</sup>. М-файлы могут быть набраны в любом текстовом редакторе и затем скопированы в командное окно. Однако лучшим вариантом является использование собственного редактора MATLAB. Редактор запускается из основного окна MATLAB последовательными действиями “File – New – M-file” или нажатием специальной клавиши на линейке управления основного окна MATLAB.

Очистка командного окна осуществляется командой “*clc*”, очистка рабочего пространства (Workspace), созданного при выполнении программ, производится командой “*clear*”.

Для определения модели в **пространстве состояний** и последующего анализа во временной области необходимо, согласно ABCD-модели (3.10)-(3.11), задать четыре матрицы. Первое число в размерности матриц – количество строк, второе – количество столбцов.

---

<sup>47</sup> Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. MATLAB 6.x: программирование численных методов. СПб.: БХВ-Петербург, 2004. 672 с.

Матрица	Размерность	Определение
<b>A</b>	$n \times n$	Матрица коэффициентов
<b>B</b>	$n \times m$	Матрица входа
<b>C</b>	$p \times n$	Матрица выхода
<b>D</b>	$p \times m$	Матрица обхода

Для систем с одним входом и одним выходом (SISO)  $p = m = 1$ . При работе с матрицами в MATLAB нужно помнить, что *элементы строки разделяются между собой пробелами, а строки отделяются друг от друга точками с запятой*.

В MATLAB модель в пространстве состояний задается функцией **ss( )**. Аргументами являются четыре матрицы. Построим, например, математическую модель RLC-цепи, изображённой на рис. 3.1, при значениях параметров:  $R = 51 \text{ Ом}$ ,  $L = 100 \text{ мГн}$ ,  $C = 20 \text{ мкФ}$ . Ниже приведён скрипт для построения ABCD-модели и результат его выполнения:

```
% Математическая модель RLC-цепи
% в пространстве состояний (State Space)
R=51; L=100e-3; Ce=20e-6;
A=[0 -1/Ce; 1/L -R/L];
B=[1/Ce; 0]; C=[0 R]; D=0;
su_ss=ss(A,B,C,D)
```

```
a =
      x1      x2
x1      0 -5e+004
x2     10    -510
```

(П1.1)

```
b =
      u1
x1 5e+004
x2      0
```

```
c =
      x1 x2
y1 0 51
```

```
d =
      u1
y1 0
```

**Continuous-time model.**

Для задания передаточной функции объекта (ПФ), в соответствии с формулой (4.8), необходимо знать полином  $p(s)$ , стоящий в числителе ПФ, и

полином  $q(s)$  – знаменатель ПФ. Полиномы в MATLAB представляются в виде векторов-строк, состоящих из коэффициентов в убывающем порядке степеней. Например, полином  $p(s) = s^3 + 3s^2 - 5$  определится командой “ $p=[1\ 3\ 0\ -5];$ ”.

Передаточная функция в MATLAB описывается функцией **tf( )**. Аргументы – полиномы числителя (*numerator*) и знаменателя (*denominator*). Передаточная функция RLC-цепи при вышеуказанных значениях параметров находится с помощью MATLAB следующим образом:

```
% Передаточная функция (Transfer Function) RLC-цепи
R=51; L=100e-3; Ce=20e-6;
pn=R; pd=[L*Ce R*Ce 1];
su_tf=tf(pn, pd)
```

```
Transfer function:
      51
```

```
-----
2e-006 s^2 + 0.00102 s + 1
```

(П1.2)

Эти же функции (**ss** и **tf**) позволяют переходить от передаточной функции к эквивалентной модели в пространстве состояний и наоборот, т.е. реализуют алгоритмы, описанные в п. 4.4. Если переменная *su\_ss* описывает модель в пространстве состояний, в соответствии с (П1.1), то в результате выполнения команды

```
sys_tf=tf(su_ss)
```

переменная *sys\_tf* примет выражение для передаточной функции (П1.2). Команда

```
sys_ss=ss(su_tf)
```

осуществляет переход от модели (П1.2) к модели (П1.1), т.е. *sys\_ss* и *su\_ss* будут иметь одинаковый смысл моделей в пространстве состояний, хотя переменные состояния в них могут отличаться из-за неоднозначности выбора этих переменных.

Передаточная функция объекта, математическая модель которого состоит из двух последовательно соединенных ПФ (см. рис. 4.2), находится с помощью функции **series(sys1,sys2)**, где *sys1* представляет ПФ  $G_1(s)$ , а *sys2* –  $G_2(s)$ .

Если известны ПФ разомкнутой системы  $G(s)$  и обратной связи  $H(s)$ , с помощью MATLAB легко найти ПФ замкнутой системы. Для этого используется функция **feedback(sysg,sys\_h)**, где *sysg* и *sys\_h* – передаточные функции  $G(s)$  и  $H(s)$  соответственно, они должны быть определены заранее.

## П1.2. Исследование свойств систем управления

Задав математическую модель СУ в MATLAB, можно далее исследовать ее свойства и изучать поведение системы с течением времени.

**Построение переходных характеристик.** Важнейшей характеристикой линейной системы является её отклик на единичное ступенчатое воздействие (переходная характеристика). Переходная характеристика системы, заданной переменной *sys*, вычисляется в MATLAB с помощью функции *step()*:

```
y=step(sys);           %формирование зависимости выходного сигнала
                        %от времени в виде массива
plot(y), grid          %построение графика переходной характеристики
                        %с нанесением сетки
xlabel('Время (с)')    %подпись оси X
ylabel('Выход системы') %подпись оси Y
```

Если необходимо вычислить переходную характеристику системы *sys* за определенный интервал времени с определенным шагом, необходимо использовать следующие команды:

```
t=[0:0.005:3]; [y,t]=step(sys,t);
plot(t,y),grid
xlabel('Время (с)')
ylabel('Выход системы')
```

Данный скрипт построит график переходной характеристики в первые 3 с с шагом 0,005 с.

Реакция системы на импульсное воздействие (весовая функция) определяется с помощью функции *impulse()*. Применение этой функции полностью аналогично функции *step()*.

Если воздействие является произвольной функцией времени (например, линейное, квадратичное, синусоидальное и т.д.), то для исследования отклика системы используют функцию *lsim()*. Обязательными аргументами этой функции являются переменные, описывающие систему и воздействие.

Пример применения функции *lsim()* описывает следующий скрипт:

```
t=[0:0.0001:0.02];
u=2*t;           % формирование массива воздействия
[y,T]=lsim(sys,u,t); % формирование функции отклика
plot(T,y), grid
```

Здесь T – вектор времени моделирования

**Управляемость и наблюдаемость систем.** Для проверки свойств управляемости и наблюдаемости необходимо найти матрицу управляемости  $P_c$  (3.13) и матрицу наблюдаемости  $Q$  (3.14). Если известны матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$ , то матрицы  $P_c$  и  $Q$  определяются с помощью функций *ctrb()* и *obsv()* соответственно:

```
Pc=ctrb(A,B);
```

$Q = \text{obsv}(A, C).$

Для того чтобы найти определители этих матриц, нужно использовать функцию **det()**, аргументом которой является соответствующая матрица. Система управляема, если определитель матрицы  $P_c$  отличен от нуля. Система наблюдаема, если определитель матрицы  $Q$  отличен от нуля.

Встречаются случаи, когда созданная математическая модель системы не является полностью управляемой, но её можно привести к управляемой системе. Для этого необходимо найти передаточную функцию системы и сократить в её числителе и знаменателе одинаковые сомножители. Затем найти по этой передаточной функции новую, **модифицированную** систему в переменных состояния. Функция **tf()** автоматически сокращает одинаковые множители в передаточной функции при её получении, поэтому для получения модифицированной системы в переменных состояния необходимо получить передаточную функцию системы и применить к ней функцию **ss()**.

### П1.3. Анализ устойчивости систем управления

В соответствии с теоремой 9.1 для асимптотической устойчивости линейной системы необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения матрицы  $A$  (они же полюсы передаточной функции) были отрицательными.

В MATLAB вычисление собственных значений матрицы  $A$  осуществляется при помощи функции **eig(A)**. Нахождение характеристического полинома, соответствующего матрице  $A$ , осуществляется с помощью функции **poly(A)**, а корни характеристического уравнения находятся с помощью функции **roots()**, аргументом является характеристический полином.

Если система в MATLAB задана передаточной функцией **sys\_tf**, то следует использовать функцию **pole(sys\_tf)**, которая формирует вектор-столбец полюсов системы. Проанализировав их, можно сделать выводы об устойчивости системы.

Введение цепи обратной связи изменяет свойства объекта. Неустойчивую разомкнутую систему можно превратить в устойчивую и даже добиться выполнения некоторых желаемых свойств, определенным образом подобрав **матрицу обратной связи**.

Для системы с одним входом и одним выходом матрицу коэффициентов обратной связи по состоянию  $K = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ , с помощью которой формируется управляющий сигнал  $u = -Kx$ , можно определить с помощью формулы Аккермана. Если задан желаемый характеристический полином замкнутой системы (т.е. известны её полюсы)

$$q(s) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_n,$$

то матрица коэффициентов обратной связи по состоянию определяется выражением

$$\mathbf{K} = [0 \quad 0 \dots \quad 1] \mathbf{P}_c^{-1} \mathbf{q}(\mathbf{A}), \quad (\text{П1.3})$$

где  $\mathbf{q}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_1 \mathbf{A}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{A} + \alpha_n \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{P}_c$  – матрица управляемости,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица.

Перечень функций, применяемых для построения математических моделей систем управления и их анализа, приведён в табл.П1.1

Таблица П1.1

Функция MATLAB	Назначение функции
<b>ss(A,B,C,D)</b>	Определяет модель в пространстве состояний по заданным матрицам A, B, C и D
<b>tf(num,den )</b>	Определяет передаточную функцию по полиномам числителя (num) и знаменателя (den)
<b>ss(sys_tf )</b>	Определяет модель в пространстве состояний по известной передаточной функции (переменная sys_tf)
<b>tf(sys_ss)</b>	Определяет передаточную функцию по известной модели в пространстве состояний (переменная sys_tf)
<b>series(sys1,sys2)</b>	Определяет передаточную функцию двух последовательно соединенных блоков, описываемых переменными sys1 и sys2
<b>feedback(sysg,sys_h)</b>	Определяет передаточную функцию системы с обратной связью (sysg – передаточная функция объекта, sys_h – передаточная функция цепи обратной связи)
<b>eig(A)</b>	Вычисляет собственные значения матрицы A
<b>det(A)</b>	Находит определитель матрицы A
<b>poly(A)</b>	Определяет характеристический полином матрицы A
<b>roots(p)</b>	Находит корни полинома p
<b>pole(sys_tf)</b>	Находит полюса передаточной функции sys_tf
<b>ctrb(A,B)</b>	Определяет матрицу управляемости по известным матрицам A и B
<b>obsv(A,C)</b>	Определяет матрицу наблюдаемости по известным матрицам A и C
<b>step(sys)</b>	Формирует переходную характеристику системы в виде массива
<b>impz(sys)</b>	Формирует весовую функцию системы в виде массива
<b>lsim(sys,u,t)</b>	Вычисляет реакцию системы на входное воздействие $u$ , являющееся функцией $t$

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ И НАСТРОЙКА ПИД-РЕГУЛЯТОРОВ В ПАКЕТЕ SIMULINK

### П2.1. Построение S-модели ПИД-регулятора для непрерывных систем

Построение моделей средствами Simulink (S-моделей)<sup>48</sup> основано на использовании технологии Drag-and-Drop (“Перетаски и оставь”). В качестве “кирпичиков” для построения используются блоки, хранящиеся в библиотеках Simulink. Таким образом, пакет Simulink, обеспечивая пользователю доступ ко всем основным возможностям системы MATLAB, является в то же время самостоятельным ее компонентом, для работы с которым нет необходимости иметь навыки в использовании других инструментов, входящих в состав системы. Несомненно, что лучший способ изучить работу Simulink – это работа в Simulink.

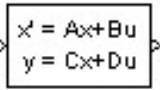
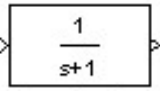





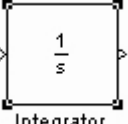
Основные блоки пакета Simulink, которые должны быть использованы при построении S-модели ПИД-регулятора для непрерывных систем, приведены в табл.П2.1. Для создания S-модели необходимо открыть окно построения моделей Simulink и построить модель, перенося в окно необходимые блоки.

Перед построением модели ПИД-регулятора нужно определить, в какой форме удобнее представить объект управления: в пространстве состояний или в виде передаточной функции, затем поместить соответствующую диаграмму в окно моделей. Дважды кликнув на диаграмму в окне, нужно открыть ее маскирующую иконку и задать свойства объекта (ввести элементы матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  для пространства состояний или коэффициенты полинома числителя и знаменателя передаточной функции). Выход объекта следует подключить к просмотрщику сигналов из библиотеки получателей сигналов (*Sinks*).

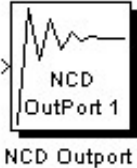

Далее на рабочем поле окна модели необходимо расставить все составные части структурной схемы системы управления (рис. 7.1): входной сигнал (источник сигналов выбирается из библиотеки источников (*Sources*)); предшествующий фильтр, заданный в виде передаточной функции; блок сравнения (сумматор сигналов с соответствующими знаками входов); элементы ПИД-регулятора. На заключительном этапе необходимо соединить выходы и входы соответствующих блоков модели и замкнуть цепь обратной связи.

---

<sup>48</sup> Дзэбни Дж., Харман Т.Л. Simulink 4. Секреты мастерства. М.: БИНОМ, 2003. 403 с.

№ п/п	Название	Блок Simulink			
		Blockset	Библиотека	Наименование	Диаграмма
1	Модель в пространстве состояний (ABCD-модель)	Simulink	Continuous	State-Space	 State-Space1
2	Передаточная функция	Simulink	Continuous	Transfer Fcn	 Transfer Fcn
3	Константа	Simulink	Sources	Constant	 Constant
4	Ступенчатая функция	Simulink	Sources	Step	 Step
5	Сумматор сигналов	Simulink	Math Operations	Sum	
6	Умножение сигнала на константу (усиление)	Simulink	Math Operations	Gain	 Gain
7	Нахождение производной по времени	Simulink	Continuous	Derivative	 Derivative
8	Интегрирование сигнала по времени	Simulink	Continuous	Integrator	 Integrator



№ п/п	Название	Блок Simulink			
		Blockset	Библиотека	Наименование	Диаграмма
9	Блок оптимизации параметров нелинейных систем управления	NCD Blockset	—	NCD Outport	
10	Индикатор выходного сигнала	Simulink	Sinks	Scope	

Вариант S-модели ПИД-регулятора без предшествующего фильтра приведён на рис. П2.2.

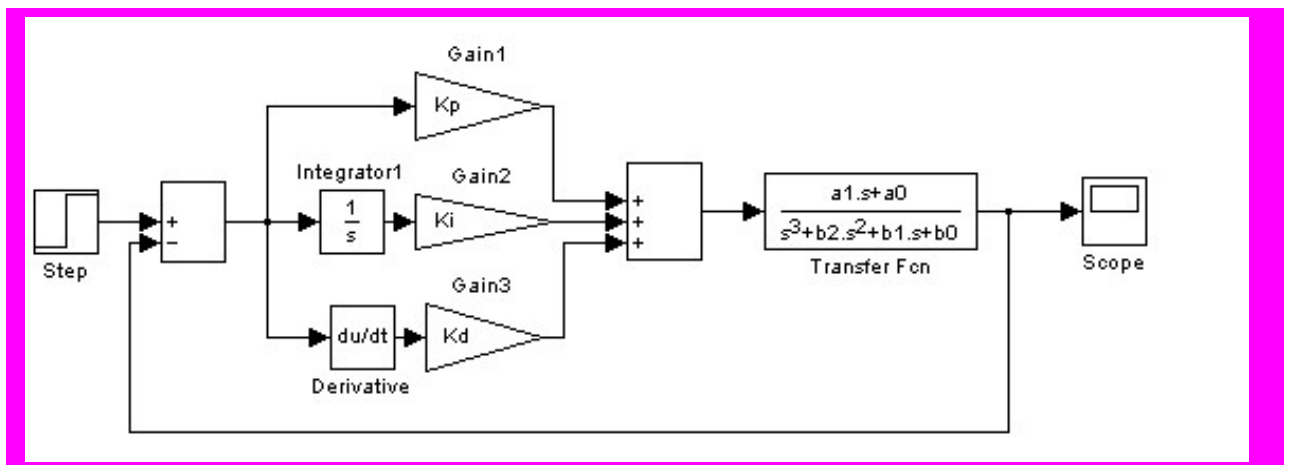


Рис. П2.2. S-модель ПИД-регулятора

Параметры конкретного блока модели можно задавать в численном виде непосредственно на его иконке, которая открывается двойным кликом мыши на изображение диаграммы, или указывать значения переменных в командном окне MATLAB. Например, в приведённой S-модели регулятора значения пропорционального, интегрального и дифференциального коэффициентов можно обозначить как  $K_P$ ,  $K_i$  и  $K_d$  в соответствующих блоках *Gain*, а их значения задать в *Command Window*, предварительно объявив их глобальными переменными:

```
>> global Kp Ki Kd
>> Kp=1; Ki=0.1; Kd=0.2;
```

(П2.1)

После создания модели ее нужно запустить командой *Run* и посмотреть выходной сигнал, изменив при необходимости свойства окна просмотра. Длительность моделирования устанавливается в следующей последовательности: *Simulation – Simulation Parameters – Stop Time*.

## П2.2. Методы настройки ПИД-регуляторов с помощью Simulink

Рассмотрим настройку регулятора, предполагающую подбор трёх коэффициентов:  $K_P$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ , – параметры объекта управления считаются известными. В лекции 7 был рассмотрен аналитический метод настройки регулятора по критерию ИВМО для объектов второго порядка, предполагающий использование предшествующего фильтра. С помощью модели, приведённой на рис.П2.2, легко проверить правильность проведённых расчётов (упражнение 7.2), поместив между входом системы и сумматором сигналов передаточную функцию предшествующего фильтра. Здесь рассмотрим экспериментальные методы, применимые для любых объектов. Под «экспериментом» будем понимать проведение компьютерного моделирования в Simulink.

**Метод Зиглера-Никольса.** Более 60 лет назад Зиглер (Ziegler J.G.) и Никольс (Nichols N.B.) предложили методику настройки ПИД-регуляторов по экспериментальным данным<sup>49</sup>, которая используется до сих пор, поскольку является простой и эффективной.

Настройка трех коэффициентов  $K_P$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  проводится в следующей последовательности:

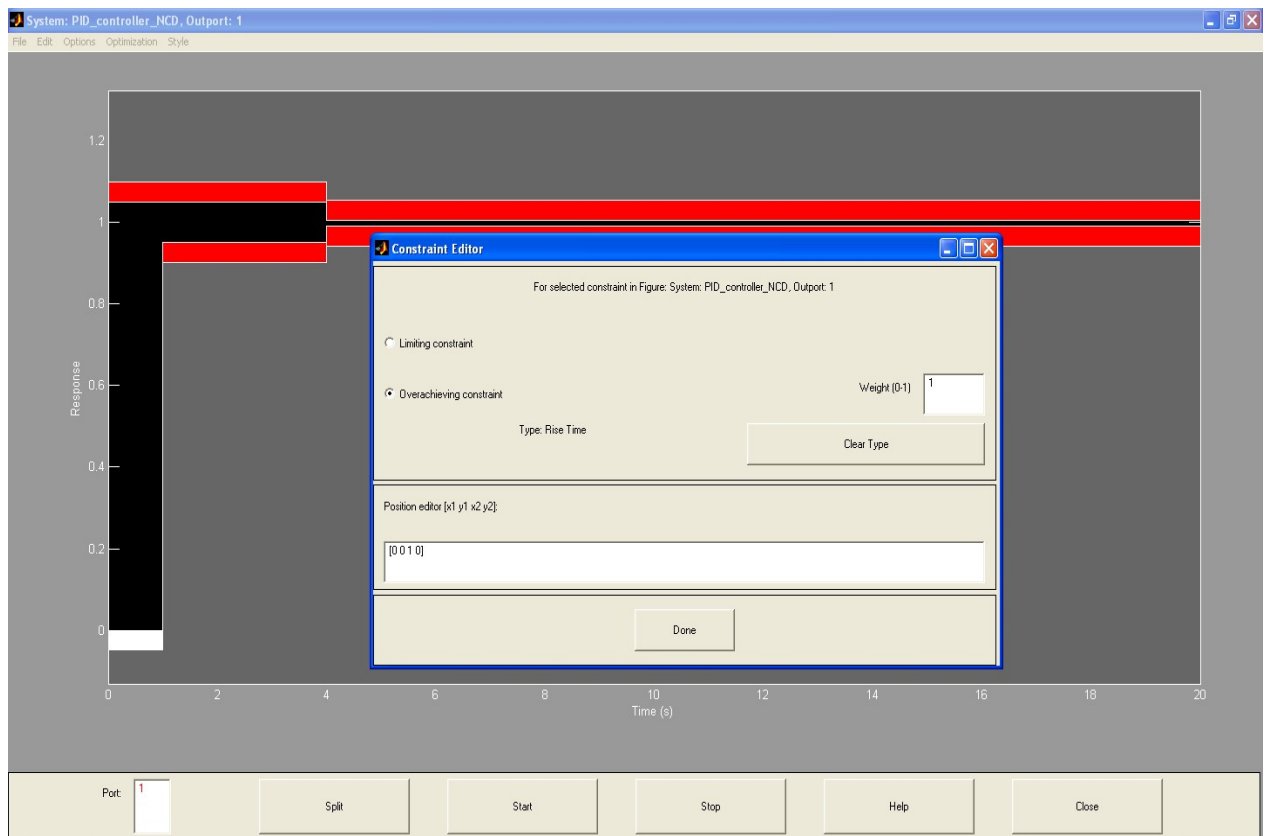
- коэффициенты  $K_i$  и  $K_d$  устанавливаются равными нулю, а коэффициент  $K_P$  увеличивается до тех пор, пока система не потеряет устойчивость;
- предельное значение  $K_P$  обозначается как  $K_U$ , а период автоколебаний при этом значении – как  $P_U$ ;
- задаются следующие значения коэффициентов регулятора:

$$K_P = \frac{3K_U}{5}, K_i = \frac{6K_U}{5P_U}, K_d = \frac{3}{40} K_U P_U. \quad (\text{П2.2})$$

При использовании модели рис.П2.2 период  $P_U$  определяется по графику синусоидальных колебаний в окне просмотрщика (*Scope*). Колебания соответствуют устойчивому режиму работы системы (график на рис.9.2 при  $K=7$ ), возникающему между асимптотически устойчивым режимом и неустойчивым режимом. После вычислений коэффициентов по формулам (П2.2) следует подставить их в модель и посмотреть переходную характеристику системы с целью проверки правильности настройки регулятора.

<sup>49</sup> Ziegler J.G., Nichols N.B. Optimal Settings for Automatic Controllers// Trans.ASME. 1942. Vol.64. P.759-762.

**Использование пакета NCD.** В Simulink имеется специальный пакет для настройки нелинейных (в том числе, разумеется, и для линейных) систем управления Nonlinear Control Design (NCD), реализующий метод динамической оптимизации. Диаграмма этого блока (табл.П2.1, п.9) устанавливается на выходе системы вместо блока *Scope* или параллельно ему, поскольку блок NCD имеет свой просмотрщик (графический интерфейс), в окне которого можно установить требуемые характеристики системы и указать параметры, которые следует оптимизировать (рис.П2.3).



**Рис. П2.3** Рабочее окно блока NCD Outport с открытым окном редактора ограничений (Constraint Editor)

Список настраиваемых коэффициентов должен быть приведён (через пробел) в строке настраиваемых параметров блока NCD (последовательность действий: *Optimization – Parameters – Tunable Variables*). Перед запуском блока требуется задать в *Command Window* основного меню MATLAB **начальные значения** коэффициентов, как это показано в (П2.1). После запуска (кнопка “Start”) блок NCD будет подбирать значения коэффициентов  $K_P$ ,  $K_i$ ,  $K_d$  так, чтобы переходная характеристика (рис.6.4) лежала в указанных границах.

При работе с блоком NCD требуемые значения характеристик (constraint) могут устанавливаться тремя способами:

1. Выделение линии нажатием левой клавиши мыши и перетаскивание (грубая установка).

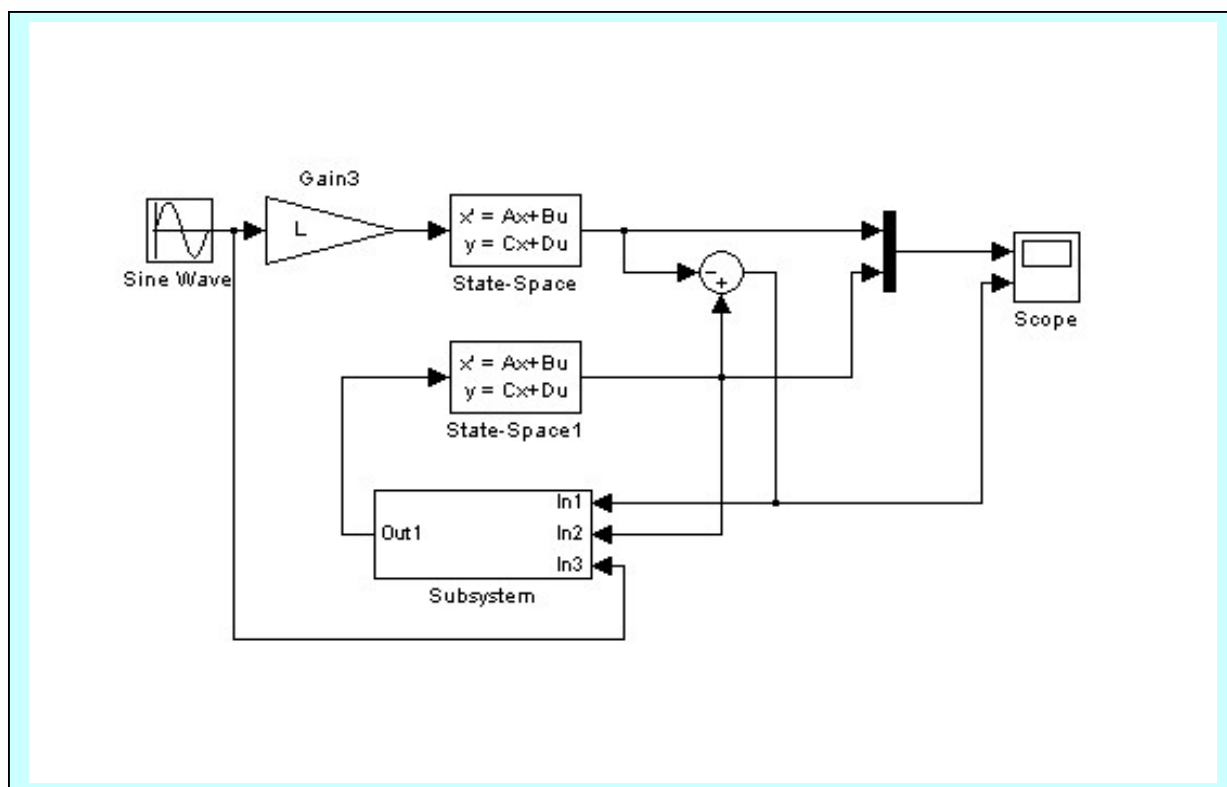
2. Выделение линии щелчком левой клавиши мыши и установление ее координат в меню *Edit – Edit constraint* (точная установка).
3. Использование установок в меню *Options – Step response*.

Очевидно, что в блоке NCD могут быть заданы важнейшие показатели качества: перерегулирование, время установления и установившаяся ошибка (табл. 6.1). Настройка коэффициентов с использованием блока NCD является наиболее точной. Однако при работе с блоком NCD следует соблюдать определённую осторожность, поскольку алгоритм его работы не обладает абсолютной устойчивостью по отношению к начальным значениям настраиваемых параметров. В качестве начальных значений коэффициентов регулятора рекомендуется выбирать значения, найденные по методике Зиглера-Никольса.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ АДАПТИВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

#### *П3.1. Построение S-модели адаптивной системы управления с эталонной моделью для непрерывного объекта*

Построим средствами Simulink адаптивную систему управления с эталонной моделью для непрерывного объекта, алгоритм работы которой описывается выражениями (15.12), а структурная схема приведена на рис. 15.5. В соответствии со структурной схемой, мы должны промоделировать



**Рис. П3.1.** S-модель адаптивной системы управления с эталонной моделью

поведение самого объекта управления и эталонной модели. Для этого используем два блока *State Space*.

Алгоритм управления (15.12) предполагает использование трех величин, являющихся функциями времени: задающего сигнала  $g$ , выхода объекта  $x$  и ошибки  $\varepsilon$ . Настраиваемый параметр  $\xi$  должен определяться внутри блока путем интегрирования произведения ошибки и выхода. Для моделирования блока управления используем блок *Subsystem* библиотеки *Port&Subsystems* в Simulink.

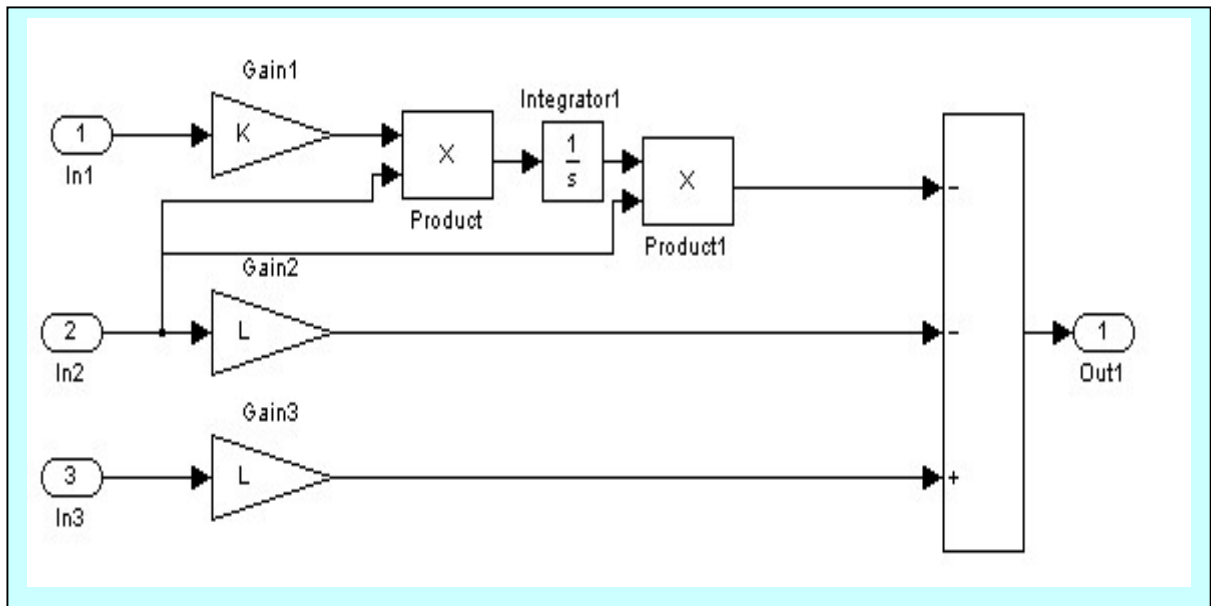
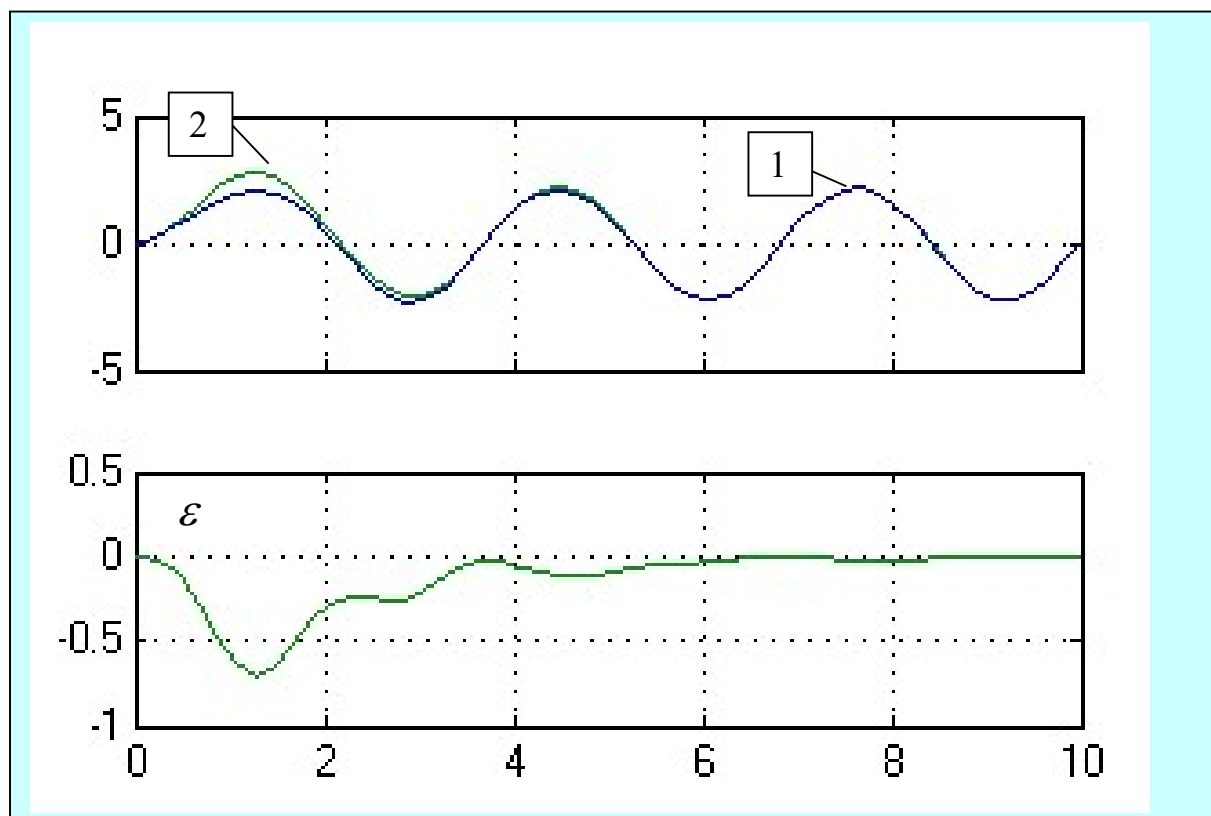


Рис. ПЗ.2. S-модель блока управления (блок *Subsystem*)

Блок поместим на рабочее поле, откроем его, кликнув мышью, и перенесем в него дополнительно два входных блока *In1* библиотеки *Port&Subsystems*. Первый вход будет соответствовать ошибке  $\varepsilon$ , второй – выходу объекта  $x$ , а третий – задающему сигналу  $g$ . Выход блока является сигналом управления для объекта. Поэтому внешнее соединение блока управления в модели системы должно быть таким, как на рис. ПЗ.1.

Внутренний вид блока управления показан на рис.ПЗ.2. Параметр эталонной модели  $\lambda$  обозначен буквой L, параметр регулятора  $\gamma$  – буквой K. В блоке *State Space1* (рис. ПЗ.1) промоделировано поведение объекта (уравнение (15.1)), в блоке *State Space* – поведение эталонной модели (уравнение (15.2)).

На рис. ПЗ.3 приведен пример работы адаптивной системы с эталонной моделью, изображенной на рис. 15.5 со следующими параметрами:  $g(t) = 2,5\sin 2t$ ,  $\theta = -1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\gamma = 1$ . Обратим внимание, что в верхнем окне просмотрщика изображены сразу два графика: переходные характеристики эталонной модели (1) и объекта (2). Это сделано с помощью блока *Mux* (библиотека *Signal Routing* в Simulink).



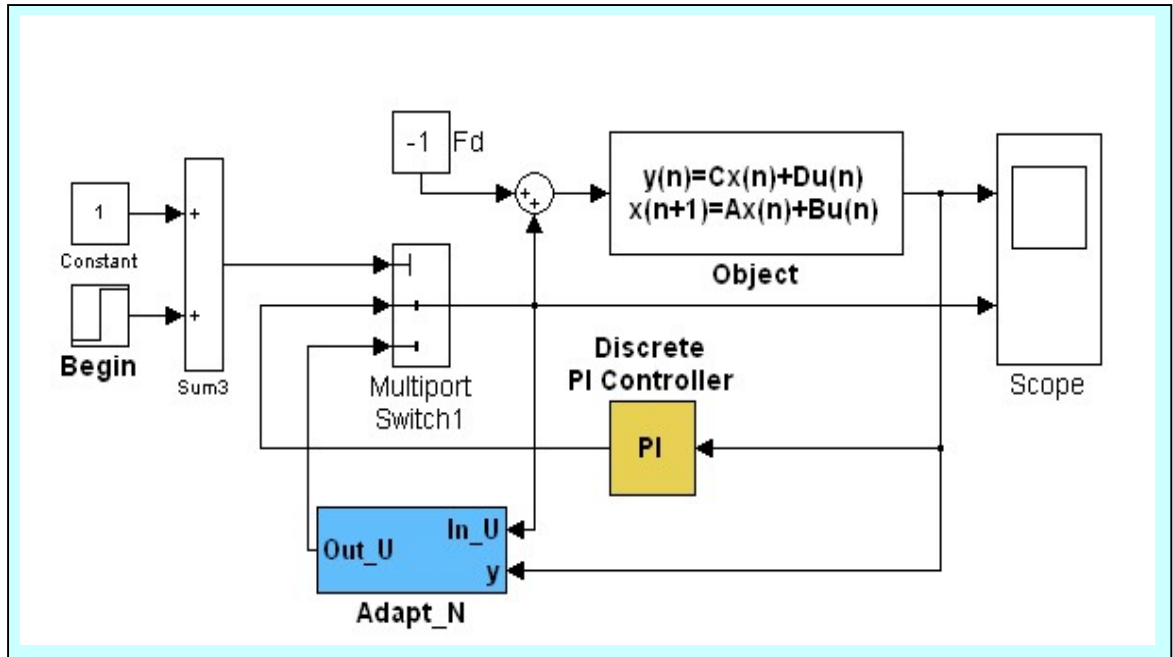
**Рис. ПЗ.3.** Пример работы адаптивной системы. Верхний график - переходные характеристики эталонной модели (1) и объекта (2). Нижний график - поведение ошибки.

Из графиков следует, что максимальная ошибка не превышает 30%, а спустя 6 с после работы системы объект входит в установившийся режим, т.е. следует за эталонной моделью. Максимальную ошибку и время выхода на режим можно изменять, меняя значение коэффициента адаптации  $\gamma$ .

### ***ПЗ.2. Построение S-модели идентификационной адаптивной системы управления для дискретного объекта***

Рассмотрим теперь модель адаптивной системы управления дискретным объектом с применением идентификационного адаптивного управления на основе быстрого алгоритма. Алгоритм описывается выражениями (16.34)-(16.35).

Первая сложность при моделировании связана с тем, что для определения вектора неопределенных параметров  $|\xi\rangle$  по алгоритму (16.32) на начальном этапе функционирования системы с применением робастного ПИ-регулятора необходимо сформировать вектор  $|Y\rangle$ , определить матрицу  $G_n$ , состоящую из компонент векторов  $|X\rangle$  и  $|U\rangle$ , и лишь потом переключиться на адаптивный алгоритм. Начальный этап должен состоять из  $n \geq 3$  шагов. Переключение предлагается осуществить с помощью блока *Multiport Switch* (библиотека *Signal Routing*).



**Рис. ПЗ.4.** S-модель адаптивной системы управления с применением идентификационного адаптивного управления на основе быстрого алгоритма

Полная S-модель адаптивной системы изображена на рис. ПЗ.4. Начальный алгоритм моделируется стандартным блоком дискретного ПИ-регулятора с ограничениями на управляющее воздействие. Модель адаптивного регулятора, обозначенная на рис. ПЗ.4 как **Adapt\_N**, создана на базе блока *Subsystem*. Шаг дискретизации, который здесь обозначим  $T_s$ , должен быть одинаковым для дискретного объекта, ПИ-регулятора и блока адаптивного управления.

Блок переключения **Multiport Switch1** в модели работает следующим образом: если на управляющий вход подается величина не более единицы, на выход блока выводится сигнал с «прямого» входа (в нашем случае – от ПИ-регулятора), если на управляющий вход подать сигнал, превышающий 1, на выход блока будет выводиться сигнал с другого входа (от блока адаптивного регулятора). Момент переключения определяется блоком *Step* (в модели обозначен **Begin**), который в течение первых  $n$  шагов выводит «0», а затем «1».

Рассмотрим работу модели адаптивного регулятора **Adapt\_N**, представленную на рис. ПЗ.5. В соответствии с общей схемой идентификационного адаптивного управления (рис. 10.3) в блок управления должны подаваться входной и выходной сигналы объекта, поэтому блок **Adapt\_N** имеет два входа. Сигналы поступают на блоки **Вектор |Y)** и **Вектор |U)**, созданные на базе блоков *Subsystem* (библиотека *Port&Subsystems*). Блок **Вектор |U)** формирует вектор  $|U\rangle$ , блок **Вектор |Y)** – векторы  $|X\rangle$  и  $|Y\rangle$ .

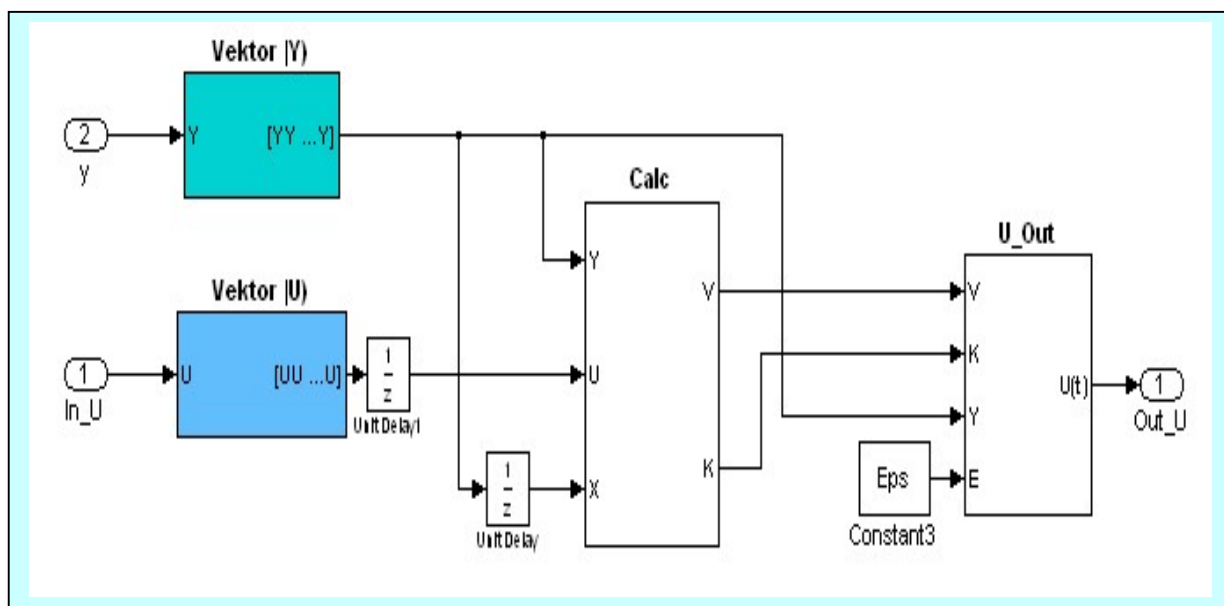


Рис. ПЗ.5. S-модель адаптивного регулятора на основе быстрого алгоритма

Векторы поступают на вход блока **Calc** (рис. ПЗ.6), осуществляющего расчет параметров адаптивного регулятора: коэффициента  $K$  и компенсирующего воздействия  $V$ . Векторы  $|U\rangle$ ,  $|X\rangle$  и  $|1\rangle$  формируют прямоугольную матрицу, которая подается на вход «А» «решателя» **QR Solver**. Вектор  $|Y\rangle$  подается на вход «В» «решателя», поскольку является, в соответствии с (16.31), правой частью несовместной системы линейных уравнений.

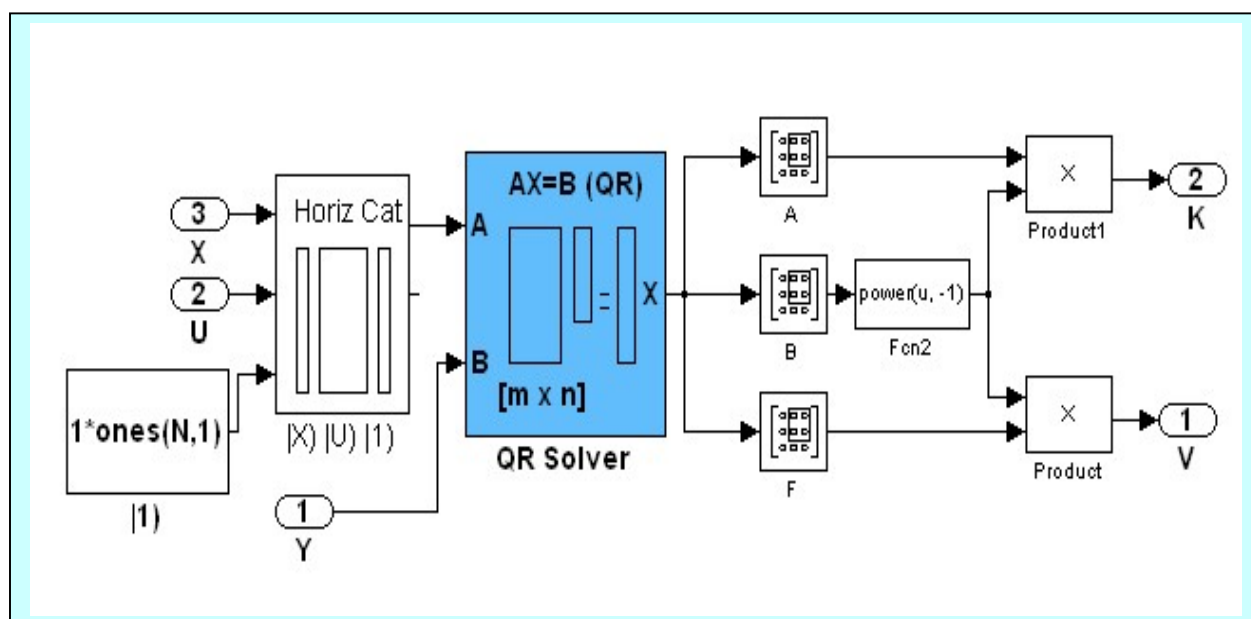
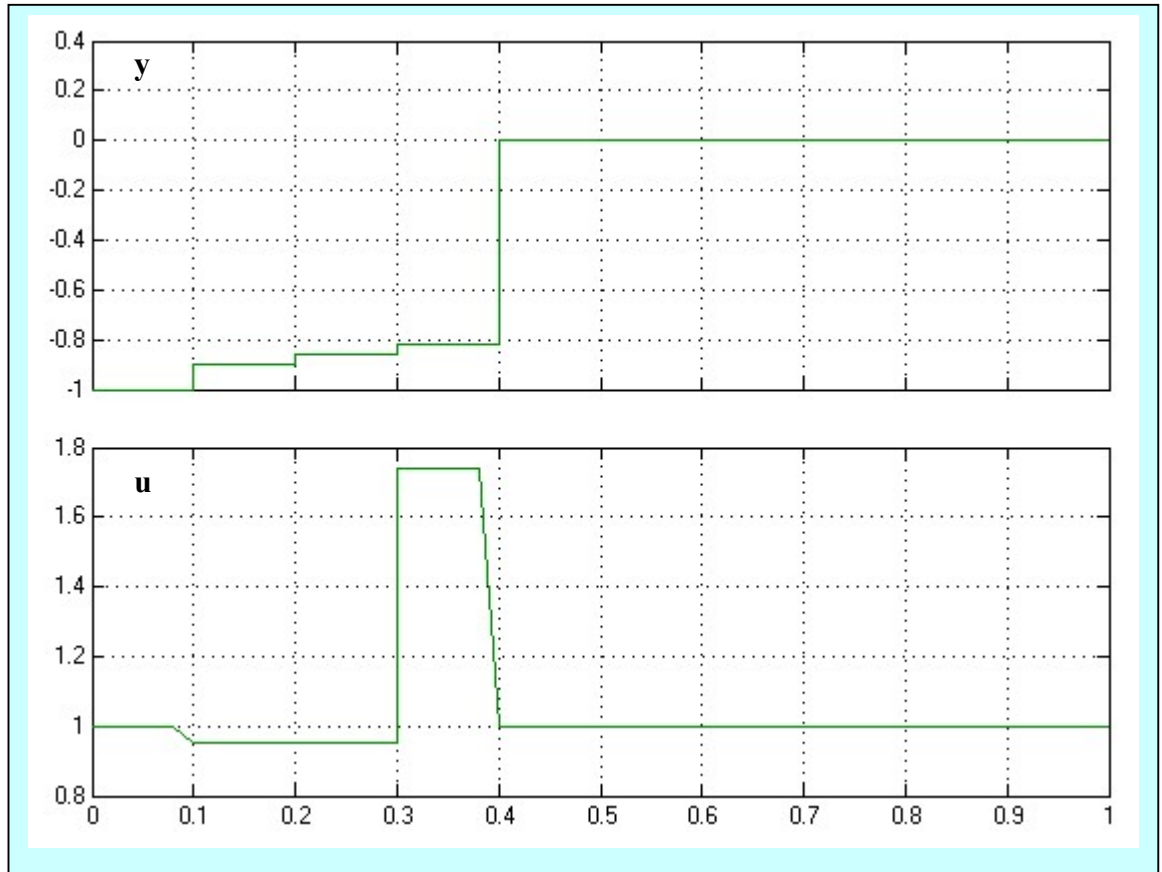


Рис. ПЗ.6. S-модель блока вычислений адаптивного регулятора **Calc**



Блок возвращает компоненты вектора  $|\xi\rangle$ , т.е. находит псевдорешение системы (16.31). Расположение блока **QR Solver** в Simulink: *DSP Blockset / Math Function / Matrices and Linear Algebra / Linear System Solvers / QR Solver*.

По найденным значениям компонент вектора  $|\xi\rangle$  с помощью формул (16.34), (16.18) определяются параметры  $K$  и  $V$ , которые передаются в блок определения управляющего воздействия **U\_Out**. В этом блоке учтено ограничение на управление и реализована процедура (16.35), для чего на один из входов блока подается значение порога точности задачи  $\Delta$ , обозначенное в модели как *Eps*.



**Рис. ПЗ.7.** Пример работы идентификационного адаптивного дискретного регулятора для дискретного объекта

На рис. ПЗ.7 приведен пример работы адаптивного регулятора для объекта первого порядка:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + F_d; \quad x_0 = -1$$

со следующими параметрами:

- объект:  $A=0,9$ ;  $B=1$ ;  $F_d=-1$ ;
- регулятор:  $K_p=1$ ;  $K_i=0,5$ ;  $T_s=0,1$ ;  $n=4$ ;  $\Delta = 0.0001$ ;  $0 \leq u \leq 2$ .

Видим, что цель регулирования достигается после четвертого шага управления и сохраняется на всех остальных шагах.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Афанасьев В.Н.* Математическая теория конструирования систем управления / В.Н.Афанасьев, В.Б.Колмановский, В.Р.Носов. М.: Высш. шк., 1998. 574 с.
2. *Андриевский Б.Р.* Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б.Р.Андриевский, А.Л.Фрадков. СПб.: Наука, 1999. 467 с.
3. *Андриевский Б.Р.* Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab / Б.Р.Андриевский, А.Л.Фрадков. СПб.: Наука, 2001. 286 с.
4. *Дорф Р.* Современные системы управления / Р.Дорф, Р.Бишоп. М.: Лаборатория Базовых Знаний. 2002. 800 с.
5. *Никифоров В.О.* Управление в условиях неопределённости: чувствительность, адаптация, робастность / В.О.Никифоров, А.В.Ушаков. СПб.:СПб ГИТМО (ТУ), 2002. 232 с.
6. *Фрадков А.Л.* Кибернетическая физика: принципы и примеры / А.Л.Фрадков. СПб.: Наука, 2003. 208 с.
7. *Леонов Г.А.* Введение в теорию управления / Г.А.Леонов. СПб.:Изд-во СПб. ун-та, 2004. 218 с.
8. *Мирошник И.В.* Теория автоматического управления. Линейные системы / И.В.Мирошник. СПб.: Питер, 2005. 306 с.