

УДК 681.52
ББК Ж 30

СИНТЕЗ АДАПТИВНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ КВАДРОКОПТЕРОМ МЕТОДОМ ПАССИФИКАЦИИ¹

Белявский А. О.^{a,2}

Томашевич С. И.^{a,b,3}

^{a)}(Университет ИТМО, Санкт-Петербург)

^{b)}(ФГБУН Институт проблем машиноведения РАН,
Санкт-Петербург)

Работа посвящена синтезу адаптивного управления для системы стабилизации квадрокоптера на основе метода пассивации. Показано построение системы стабилизации квадрокоптера в случае использования ПД-регуляторов и с помощью метода обратной связи. Приведены примеры моделирования и произведено сравнение предложенного метода с другими.

Ключевые слова: БПЛА, квадрокоптер, пассивация, адаптивное управление.

Введение

В последнее время наблюдается рост интереса к беспилотным летательным аппаратам (БПЛА) в связи с большей доступностью и относительной простотой управления. Цели, которые ставятся перед БПЛА, могут варьироваться от съемок фото- и видеоматериалов до транспортировки каких-либо легких грузов,

¹ Разработка алгоритма на основе метода пассивации выполнена при поддержке Правительства Российской Федерации (грант 074-U01).

² Андрей Олегович Белявский, магистрант
(belyavskiy.a.o@gmail.com).

³ Станислав Игоревич Томашевич, аспирант
(tomashevich.stanislaw@gmail.com).

именно поэтому движение в пространстве должно выполняться с высокой точностью.

Особое распространение получили такие БПЛА как квадрокоптеры – ультралегкие ЛА, обладающие четырьмя винтами. Эта популярность подтверждается большим количеством статей и квалификационных работ, которые посвящены исключительно квадрокоптерам [15, 23, 40, 42]. Самым распространенным способом стабилизации является использование ПИД-регуляторов и их разновидностей, поэтому существует множество работ, посвященных проектированию регуляторов такого типа, например, [17, 29, 33, 36, 44]. Также существуют адаптивные алгоритмы для управления системой стабилизации квадрокоптера. Алгоритмы на основе бэкстеппинга могут быть найдены в [21, 34, 35, 45]. Алгоритмы других типов рассмотрены в [7, 25, 26, 27, 31, 33, 37, 38]. На основе имеющихся алгоритмов стабилизации можно вводить управления для движения по заданным траекториям в пространстве, таким алгоритмам посвящена, например, работа [2].

Основным принципом использования большинства вышеуказанных алгоритмов является знание параметров квадрокоптера, например масс, моментов инерций и коэффициентов сопротивления воздуха, коэффициентов тяги винта и многих других. Очевидно, что в полете все параметры могут меняться, поэтому одним из эффективных способов управления в условиях параметрической неопределенности является применение методов адаптивного управления, которые не используют параметры БПЛА. Также положительной стороной применения таких алгоритмов является то, что они более универсальны: параметры двух идентичных квадрокоптеров могут различаться ввиду, например, небольших дефектов винтов, разных аккумуляторов и многих других расхождений. Таким образом, становится очевидной цель создания более универсальных алгоритмов, которые работают в различных условиях для одного квадрокоптера, а также переносятся на другие квадрокоптеры с минимальной корректировкой настроек.

Также одной из приоритетных задач является использование как можно меньшего количества измеряемых сигналов, таких как скорости, ускорения и т.д. Этому вопросу специально посвящены многие работы, например, в работе [43] предложен способ управления, основанный только на знании координат, без их производных.

В данной работе используется более полная математическая модель. Многие работы используют упрощенные модели, в которых сделано множество допущений, например, не учитывается аэродинамический эффект, хотя его учет крайне важен. В этом можно убедиться по работам [22, 23, 28, 40], в которых показано, насколько сложна динамика квадрокоптера, учитывая взаимодействие между всеми его узлами. Кроме того, в настоящей работе предложен алгоритм управления высотой и углами поворота на основе метода пассивации, не использующий информации о параметрах квадрокоптера. В самой модели не считается, что углы тангажа и крена не влияют друг на друга, а алгоритм строится, учитывая эти перекрестные взаимодействия. Это является положительной стороной, в то время как в других работах опускается это взаимодействие и максимально упрощается модель движения.

В данной работе ставится задача синтеза закона управления положением квадрокоптера для перемещения внутри помещения. Эта задача довольно актуальна в связи с уменьшением размеров и масс квадрокоптеров, что позволяет им функционировать в помещении (см. [14, 16, 20, 39, 41]). Закон управления необходимо синтезировать на основе метода пассивации [1] для избежания использования знания многих параметров квадрокоптера. С ее помощью разработаны алгоритмы управления ЛА, но для управления вертолетом [38]. Сама модель квадрокоптера основана на моделях из работ [4, 19, 33]. Такой алгоритм позволит не учитывать некоторые параметры системы, которые требуется знать при проектировании управления на основе ПИД-регуляторов. Также необходимо сравнить работу регулятора с другими типами при подъеме на небольшую высоту и при стабилизации малых углов.

1. Математическая модель квадрокоптера

1.1. Координаты движения

Неинерциальная система отсчета (НСО) связывается с квадрокоптером и движется относительно инерциальной системы отсчета (ИСО). ИСО, в свою очередь, связана с Землей и задана ортогональными координатными осями OX , OY , OZ . В системе отсчета квадрокоптера оси O_bX_b , O_bY_b , O_bZ_b ортогональны между собой, а с осями инерциальной системы отсчета – сонаправлены и параллельны. Центр O_b находится в центре масс квадрокоптера. Основной задачей квадрокоптера является перемещение в нужную точку в ИСО, в то время как движение сопровождается наклонами системы, которые происходят в ИСО и НСО по-разному, поэтому необходимо правильно соблюдать переходы из одной системы в другую. Углы, на которые квадрокоптер отклоняется относительно неподвижной системы, являются углами Эйлера и обозначаются γ , ϑ и ψ . На рис. 1 представлены обе системы отсчета, основные направления и углы, которые формируют общее движение системы. Линейное положение квадрокоптера описывается переменными x , y , z – координатами центра масс [5].

1.2. Конструкция квадрокоптера

Квадрокоптер имеет симметричную структуру с четырьмя двигателями, расположенными на лучах по осям O_bX_b и O_bZ_b на расстоянии l от центра масс. Матрица инерции имеет следующий вид:

$$(1) \quad I_A = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_z & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix},$$

где I_x , I_y , I_z – моменты инерции при вращении вдоль соответствующих осей, $I_x = I_z$.

Квадрокоптер можно представить в виде шара с закрепленными на концах лучей четырьмя шарами, означающими двигатели. Также в модели учтена инерция винтов, представленных в

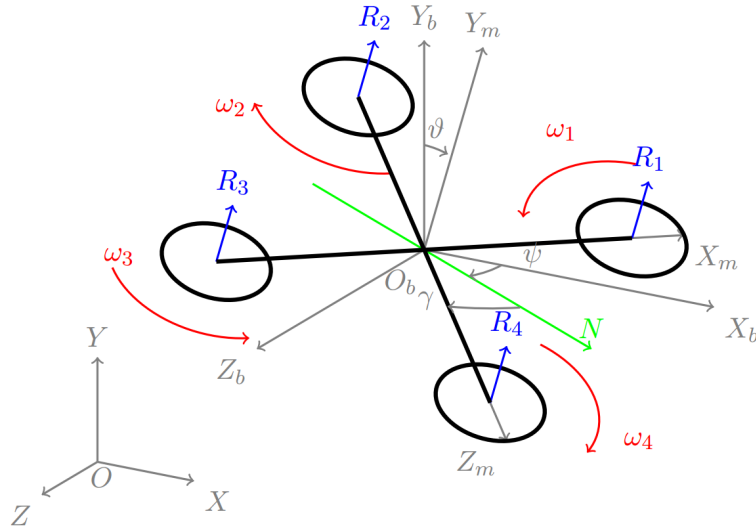


Рис. 1. Схематичное изображение квадрокоптера

виде стержней, закрепленных посередине на оси винтов перпендикулярно им. На рис. 2 показано данное представление квадрокоптера.

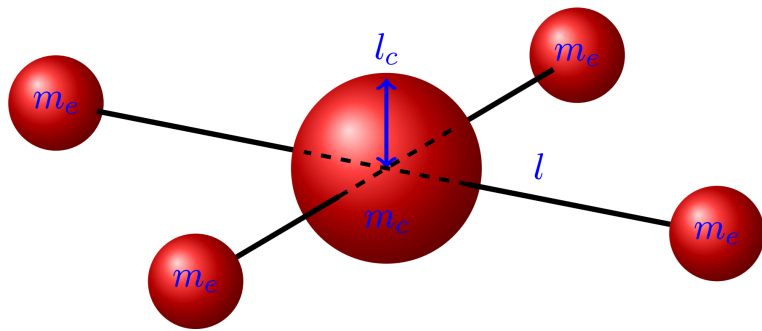


Рис. 2. Схематичное изображение квадрокоптера

Инерции считаются следующим образом:

$$(2) \quad I_x = I_z = \frac{1}{2}m_c l_c^2 + 2m_e l^2, \quad I_y = \frac{1}{2}m_c l_c^2 + 4m_e l^2,$$

где m_c – масса центра квадрокоптера; l_c – радиус центра шара, которым описывается центр квадрокоптера; m_e – масса двигателя. Также необходимо учитывать инерцию ротора двигателя I_r :

$$(3) \quad I_r = \frac{1}{3}m_p R^2,$$

где m_p – масса несущего винта, а R – его радиус. Общая масса считается как сумма всех элементов:

$$(4) \quad m = m_c + 4m_e + 4m_p.$$

1.3. Вращение роторов и управления

Вращение ротора каждого двигателя описывается выражением $\dot{\omega}_i = I_r(\ddot{\omega}_i - \omega_i)$, где $\ddot{\omega}_i$ – желаемая скорость, определяемая контроллером оборотов на платформе квадрокоптера [32]. Два винта вращаются по часовой стрелке, два – против, а их скорости ограничиваются как $0 < \omega_{min} \leq \omega_i \leq \omega_{max}$. В полете винт не может двигаться реверсивно, имеет пределы вращения и не может быть остановлен. Ввиду относительной малости момента инерции ротора двигателя I_r и постоянной времени цепи якоря, в дальнейшем инерционность двигателя не учитывается.

Вместе силы четырех роторов создают тягу τ_y в направлении оси $O_b Y_b$. Крутящий момент τ состоит из моментов τ_γ , τ_ϑ и τ_ψ в направлении, соответствующем углу поворота системы отсчета квадрокоптера.

Введем формулы вырабатываемых сил по соответствующим осям и углам вращения:

$$(5) \quad \tau_y = k_l(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4),$$

$$(6) \quad \tau = \begin{bmatrix} \tau_\gamma \\ \tau_\vartheta \\ \tau_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(\omega_2 - \omega_4) \\ l(\omega_1 - \omega_3) \\ a_r(\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4) \end{bmatrix},$$

где a_r – постоянная вращательного движения.

Кроме того, в модели квадрокоптера требуется учитывать суммарную скорость ω_R , которая рассчитывается следующим образом:

$$(7) \quad \omega_R = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4.$$

Пересчет скоростей, исходя из задающих воздействий, происходит по следующей формуле:

$$(8) \quad \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \\ \omega_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2l} & -\frac{1}{4a_r} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2l} & 0 & \frac{1}{4a_r} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2l} & -\frac{1}{4a_r} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2l} & 0 & \frac{1}{4a_r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_y \\ \tau_\gamma \\ \tau_\vartheta \\ \tau_\psi \end{bmatrix}.$$

В реальной системе присутствуют различные аэродинамические воздействия, например: зависимость тяги от угла атаки, взаимодействие лопастей винта и воздушного потока. Модель, учитывающая эти факторы, обладает высокой сложностью и содержит большое число параметров, которые трудно рассчитать. Поэтому на этапе синтеза алгоритмов управления этими факторами будем пренебрегать, их значимость для поведения системы определится в результате экспериментальных исследований.

1.4. Свод основных формул

Основываясь на вышеперечисленных работах, сформируем совокупность уравнений, полностью описывающих динамику квадрокоптера. Система выглядит следующим образом:

$$(9) \quad \begin{cases} m\dot{V}_x = \tau_y(C_\psi S_\vartheta C_\gamma + S_\psi S_\gamma) - V_x A_x, \\ m\dot{V}_y = -mg + \tau_y(C_\vartheta C_\gamma) - V_y A_y, \\ m\dot{V}_z = \tau_y(S_\psi S_\vartheta C_\gamma - C_\psi S_\gamma) - V_z A_z, \\ \dot{\gamma} = \omega_x + S_\gamma T_\vartheta \omega_z + C_\gamma T_\vartheta \omega_y, \\ \dot{\vartheta} = C_\gamma \omega_z - S_\gamma \omega_y, \\ \dot{\psi} = \frac{S_\gamma}{C_\vartheta} \omega_z + \frac{C_\gamma}{C_\vartheta} \omega_y, \\ I_x \dot{\omega}_x = (I_y - I_z) \omega_y \omega_z - I_r \omega_z \omega_r + \tau_\gamma, \\ I_y \dot{\omega}_y = (I_z - I_x) \omega_x \omega_z + \tau_\psi, \\ I_z \dot{\omega}_z = (I_x - I_y) \omega_x \omega_y + I_r \omega_x \omega_r + \tau_\vartheta, \end{cases}$$

где V_x, V_y, V_z – линейные скорости по соответствующим осям; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – угловые скорости вращения квадрокоптера вокруг соответствующих осей; A_x, A_y, A_z – аэродинамические коэффициенты по соответствующим осям; $S_\alpha = \sin(\alpha)$, $C_\alpha = \cos(\alpha)$, $T_\alpha = \tan(\alpha)$; g – ускорение свободного падения.

Таблица 1. Параметры математической модели

Параметр	Величина	Параметр	Величина	Размерность
Массы, кг		Коэффициенты		
m_c	1	g	9,81	м/с ²
m_e	0,1	k_l	$3 \cdot 10^{-6}$	кг · м
m_p	0,01	a_r	0,033	кг · м
m	1,44	A_x	0,25	кг/с
Моменты инерций, кг·м ²		A_y	0,25	кг/с
I_x	0,0151	A_z	0,25	кг/с
I_y	0,0253	l	0,225	м
I_z	0,0151	l_c	0,1	м
I_r	$5,38 \cdot 10^{-5}$	R	0,127	м

За основу взят реальный квадрокоптер, некоторые параметры которого были получены с помощью идентификации в работе [13] (см. также [24]). Величины, используемые в математической модели, приведены в таблице 1.

2. Синтез ПД-регуляторов

Линеаризируем модель квадрокоптера, используя управляющие воздействия как входы, а результирующую координату y и углы – как выходы. Линеаризацию системы (9) произведем в нулевой точке, считая, что углы γ , ϑ , ψ – малы, соответствующие синусы близки к нулю, косинусы близки к единице. Также считаем, что все взаимные произведения угловых скоростей $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ близки к нулю, как и произведения $I_r \omega_x, I_r \omega_z$, ввиду малости I_r . Окончательно получим систему линеаризованных

уравнений, описывающих динамику:

$$(10) \quad \begin{cases} m\ddot{y} = -mg + \tau_y - \dot{y}A_y, \\ \dot{\gamma} = \omega_x, \\ \dot{\vartheta} = \omega_z, \\ \dot{\psi} = \omega_y, \\ I_x\ddot{\gamma} = \tau_\gamma, \\ I_y\ddot{\vartheta} = \tau_\vartheta, \\ I_z\ddot{\psi} = \tau_\psi, \end{cases}$$

откуда получим следующие передаточные функции от входов $\tau_y, \tau_\gamma, \tau_\vartheta, \tau_\psi$ к выходам $y, \gamma, \vartheta, \psi$ соответственно:

$$(11) \quad W_y(s) = \frac{m^{-1}}{s(s + A_y m^{-1})}, \quad W_\gamma(s) = \frac{I_x^{-1}}{s^2}, \\ W_\vartheta(s) = \frac{I_z^{-1}}{s^2}, \quad W_\psi(s) = \frac{I_y^{-1}}{s^2},$$

которые описывают движение вдоль оси OY и по углам γ, ϑ, ψ соответственно.

Для управления движением квадрокоптера будем использовать ПД-регуляторы, так как П-регулятор сделает систему управления углами колебательной, при использовании ПИ-регулятора в системе управления углами также будут два комплексных корня, а при ПИД-регуляторе порядок системы возрастает до третьего. Для выбора коэффициентов воспользуемся методом стандартных переходных функций, основываясь на желаемом времени переходных процессов.

Для синтеза регуляторов используем метод модального управления [3]. Поскольку перерегулирование при полете в помещении должно быть исключено, зададим желаемый характеристический многочлен замкнутой системы $D(s)$ в форме бинома Ньютона $D(s) = s^2 + 2\omega_0 s + \omega_0^2$, где ω_0 – параметр, определяющий быстродействие. Сначала рассчитаем коэффициенты для вертикального перемещения вдоль оси OY , для остальных перемещений процесс будет аналогичным. Пусть необходимо, чтобы время переходного процесса составляло 1 с, тогда желаемая частота $\omega_0 = 4,8$. Обращаясь к желаемому полиному и решая по-

лучившиеся уравнения, находим пропорциональный и дифференциальный коэффициенты регулятора: $K_p^y = 33,18$ и $K_d^y = 13,58$ соответственно. Коэффициенты для углов γ, ϑ, ψ рассчитываются аналогично. Полученные данные сведены в таблицу 2.

3. Линеаризация обратной связью

При синтезе ПД-регуляторов была использована линеаризованная в нулевой точке модель, что упростило важные члены в динамике. Чтобы избежать этого, воспользуемся методом линеаризации модели замыканием обратной связи [12, 30], однако, в отличие от работы [18], при синтезе управления используется более полная модель динамики движения. Пусть есть система

$$(12) \quad \ddot{\bar{x}} = f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) + g(\bar{x}, t)\Theta,$$

где \bar{x} – вектор состояния системы; f – вектор-функция соответствующих размеров; g – функция входа; Θ – управляющее воздействие; t – время. Тогда используя закон управления

$$(13) \quad \Theta = g(\bar{x}, t)^{-1}(v - f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t)),$$

где v – новое управление, можно преобразовать систему (12) к виду

$$(14) \quad \ddot{\bar{x}} = v,$$

что позволяет задать динамику изменения \bar{x} .

3.1. Стабилизация по углам

Уравнение изменения углового положения из системы (10) можно преобразовать как

$$(15) \quad \ddot{\eta} = (I_A W_\eta)^{-1} \left((I_A W_\eta \dot{\eta}) \times (W_\eta \dot{\eta}) - I_A \dot{W}_\eta \dot{\eta} - \right. \\ \left. - I_r W_\eta \eta \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_R \right) + (I_A W_\eta)^{-1} \tau,$$

где W_η – матрица поворота, имеющая вид

$$(16) \quad W_\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\vartheta \\ 0 & C_\gamma & C_\vartheta S_\gamma \\ 0 & -S_\gamma & C_\vartheta C_\gamma \end{bmatrix},$$

и представить в виде (12):

$$(17) \quad \begin{aligned} \bar{x} = \eta, \quad f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) &= (I_A W_\eta)^{-1} \left((I_A W_\eta \dot{\eta}) \times (W_\eta \dot{\eta}) - \right. \\ &\quad \left. - I_A \dot{W}_\eta \dot{\eta} - I_r W_\eta \eta \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_R \right), \\ g(\bar{x}, t) &= (I_A W_\eta)^{-1}, \quad \Theta = \tau. \end{aligned}$$

Тогда управляющее воздействие τ должно иметь вид

$$(18) \quad \tau = I_A W_\eta \zeta - (I_A W_\eta \dot{\eta}) \times (W_\eta \dot{\eta}) + I_A \dot{W}_\eta \dot{\eta} + I_r W_\eta \eta \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega_R,$$

где ζ – вспомогательное управление. Подставляя (18) в (17), получим

$$(19) \quad \ddot{\eta} = \zeta.$$

Зададим ζ как

$$(20) \quad \zeta = \ddot{\zeta}_t - k_2(\dot{\eta} - \dot{\zeta}_t) - k_1(\eta - \zeta_t),$$

где $\zeta_t = [\gamma_t \quad \vartheta_t \quad \psi_t]^\top$ – вектор задающих воздействий для каждого из углов, а k_1^ζ, k_2^ζ – коэффициенты, выбираемые разработчиком. Теперь подставляя (20) в (19) и учитывая, что $\eta - \zeta = e_\eta$ – ошибка слежения, получим модель движения системы:

$$(21) \quad \ddot{e}_\eta + k_2^\zeta \dot{e}_\eta + k_1^\zeta e_\eta = 0,$$

в которой, задавая коэффициенты k_1^ζ и k_2^ζ , выбирается динамика затухания ошибки. Эти коэффициенты могут быть выбраны, например, методом стандартных полиномов.

3.2. Стабилизация по высоте

Аналогичным способом реализуем стабилизацию по высоте: возьмем соответствующее уравнение из (9) и представим в виде (12):

$$(22) \quad \bar{x} = y, \quad f(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) = -g - \frac{A_y}{m} \dot{y}, \quad g(\bar{x}, t) = \frac{C_\vartheta C_\gamma}{m}, \quad \Theta = \tau_y.$$

Аналогично случаю с углами управление должно иметь вид

$$(23) \quad \tau_y = \frac{m}{C_\vartheta C_\gamma} \left(g + \frac{A_y}{m} \dot{y} + \zeta_y \right),$$

где ζ_z – вспомогательное управление. Зададим его следующим образом:

$$(24) \quad \zeta_y = \ddot{y}_t - k_2^y(\dot{y} - \dot{y}_t) - k_1^y(y - y_t),$$

где y_t – задающее воздействие по оси OY . Подставляя (23) в (22) и учитывая, что $e_y = y - y_t$ – рассогласование, получим уравнение динамики ошибки:

$$(25) \quad \ddot{e}_y + k_2^y \dot{e}_y + k_1^y e_y = 0.$$

Коэффициенты k_1^y и k_2^y выбираются таким образом, чтобы ошибка сходилась по желаемой траектории. Исходя из этого, данный метод позволяет качественно задавать движение системы, однако его главным недостатком является сложность законов управления, а также необходимость знания и использования практически всех параметров квадрокоптера. В качестве моделирования были использованы значения коэффициентов, обеспечивающих схождение к задающим воздействиям за 1 секунду, полученные из метода стандартных многочленов и приведенные в таблице 2.

4. Алгоритм на основе пассивификации

4.1. Сигнально-параметрический регулятор

Для управления воспользуемся сигнально-параметрическим регулятором (СПР) на основе метода пассивификации, который более подробно описан в [1]. Очевидным плюсом является адаптивная составляющая, позволяющая управлять положением системы, не зная ее параметров.

Пусть объект описывается моделью ВСВ:

$$(26) \quad \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}, \quad \tilde{y} = C\tilde{x},$$

где $\tilde{x} \in R^n$ – вектор состояния; $\tilde{u} \in R^m$ – вход модели; $\tilde{y} \in R^l$ – выход модели; A, B, C – матрицы соответствующих размерностей.

Пусть цель работы алгоритма состоит в стабилизации по состоянию:

$$(27) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) = 0.$$

Дополнительно потребуем осуществление скользящего режима вдоль поверхности $\sigma = 0$, где $\sigma = G\tilde{y}$, G – матрица размерности $l \times n$.

Зададим тогда закон управления в следующем виде:

$$(28) \quad \tilde{u} = -\gamma_\sigma \operatorname{sign} \sigma, \quad \sigma = G\tilde{y},$$

где $\gamma_\sigma > 0$ – параметр, выбираемый разработчиком.

Для последующих выкладок потребуется определение гипер-минимальнофазовости [9].

Определение 1. Гипер-минимально-фазовой передаточной функцией называется минимально-фазовая (ее числитель – гурвицев многочлен) функция с единичной относительной степенью и положительным высокочастотным коэффициентом усиления GCB .

Воспользуемся теоремой о пассивации [10].

Теорема 1. Цель управления (27) достигается для модели (26) с законом управления (28) тогда, когда выполнены следующие условия: существует положительно-определенная матрица $P = P^\top > 0$ и такой вектор K_* , что выполняется $PA_* + A_*^\top P < 0$, $PB = GC$ и $A_* = A + BK_*^\top C$. Другими словами, если функция $GC(\lambda I_n - A)^{-1}B$ – гипер-минимально-фазовая, то при достаточно большом выбранном коэффициенте γ_σ с управлением (28) достигается цель управления (27).

Для того чтобы избежать зависимости устойчивости системы от начальных условий, воспользуемся сигнально-параметрическим адаптивным законом управления [1]:

$$(29) \quad \tilde{u} = -K^\top(t)\tilde{y}(t) - \gamma_\sigma \operatorname{sign}(\sigma(\tilde{y})), \quad \sigma(\tilde{y}) = G\tilde{y},$$

$$\dot{K}(t) = \sigma(\tilde{y})\Gamma\tilde{y}(t),$$

$\Gamma = \Gamma^\top > 0$ – матрица соответствующей размерности.

Замечание 1. Условия стабилизации объекта управления сильной обратной связью известны из ряда работ по высокоточному управлению, по системам с переменной структурой и т.д. [8, 11]. Следует заметить, что в этих работах предполагается использование полного набора производных от выхода объекта (или их оценивание дифференцирующими наблюдателями), в то

время как согласно теореме 1 достаточно измерения $k - 1$ производной, где k – относительная степень передаточной функции объекта по отношению к выходу σ . Кроме того, в используемом алгоритме содержится и параметрическая составляющая, которой нет в традиционных системах управления с переменной структурой.

В случае скалярного входа вместо алгоритма (29) может быть использована следующая модификация алгоритма, обеспечивающая скользящий режим вдоль поверхности $\sigma \equiv 0$:

$$(30) \quad \tilde{u} = -k(t)\tilde{y}(t) - \gamma_\sigma \operatorname{sign}(\sigma(\tilde{y}))\sqrt{|\sigma(\tilde{y})|}, \quad \sigma(\tilde{y}) = G\tilde{y},$$

$$\dot{k}(t) = \gamma_k \sigma(t)^2,$$

где $\gamma_k > 0$ подлежит выбору разработчиком.

Модифицированное слагаемое с функцией знака sign обеспечивает более гладкое управление, чем немодифицированный алгоритм (29). Здесь σ может быть обозначена как «ошибка адаптации», поэтому равенство $\sigma \equiv 0$ означает успешное достижение цели управления.

Коэффициент усиления $K(t)$ в (29) ($k(t)$ в (30)) может бесконечно расти при наличии внешних возмущений (например, из-за упраздненных членов движения, принятых за возмущения), поэтому необходимо его ограничить. Для этого воспользуемся окончательным алгоритмом:

$$(31) \quad \tilde{u} = -k(t)\tilde{y}(t) - \gamma_\sigma \operatorname{sign}(\sigma(\tilde{y}))\sqrt{|\sigma(\tilde{y})|}, \quad \sigma(\tilde{y}) = G\tilde{y},$$

$$\dot{k}(t) = \gamma_k \sigma(t)^2 - \alpha_k (k(t) - k^0), \quad k^0 = k(0),$$

где $\alpha_k \geq 0$ регулирует обратную связь. Этот алгоритм является усеченным алгоритмом супер-твистинга [6].

Для скалярного случая и возможности измерения текущей координаты со скоростью алгоритм может трактоваться следующим образом: введем ошибку выполнения алгоритма для перемещений и углов как

$$(32) \quad e_h(t) = h^*(t) - h(t),$$

где $h^*(t)$ – задающее воздействие, $h(t)$ – текущие значения. Тогда зададим поверхность для скользящего режима как

$$(33) \quad \sigma(t) = e_h(t) - \alpha_h \dot{h}(t),$$

где $\alpha_h > 0$ – параметр алгоритма, отвечающий за скорость схождения ошибки.

Тогда динамика движения будет описываться следующим образом:

$$(34) \quad \alpha_h \dot{h}(t) + h(t) = h^*(t),$$

что соответствует динамике апериодического звена и качественно подходит к функционированию квадрокоптера для движения без перерегулирования.

4.2. Адаптивное управление высотой

Рассмотрим уравнение, описывающее движение по высоте из системы (9), и учтем, что углы крена и тангажа во время движения малы, более того, подъем или спуск при движении квадрокоптера осуществляется преимущественно без наклонов. Тогда движение будет описываться следующим уравнением:

$$(35) \quad \ddot{y} + A_y m^{-1} \dot{y} = m^{-1} \tau_y - g.$$

Передаточная функция этого движения совпадает с полученной ранее в выражении (11), однако имеет относительную степень, равную 2. Чтобы пассивировать систему, необходимо задать управление через текущую координату и ее скорость. Перейдем от (35) к модели ВСВ и предположим, что измерению доступен вектор с координатой и скоростью $\tilde{x}_y = [y \quad \dot{y}]^T$:

$$(36) \quad \dot{\tilde{x}}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -A_y m^{-1} \end{bmatrix} \tilde{x}_y + \begin{bmatrix} 0 \\ m^{-1} \end{bmatrix} \tau_y, \quad \tilde{y}_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}_y,$$

где \tilde{y}_y – новый выход системы, включающий и координату, и скорость. Тогда необходимо выбрать матрицу G_y так, чтобы функция $G_y C_y (sI_2 - A_y)^{-1} B_y$ была гипер-минимально-фазовой, где матрицы A_y , B_y , C_y – матрицы состояния, входа и выхода соответственно в выражении (36), а I_2 – единичная матрица размерности 2×2 . Выберем матрицу $G_y = [1 \quad \alpha_y]$, где $\alpha_y > 0$ – параметр регулирования. Тогда функция $G_z C_z (sI_2 - A_z)^{-1} B_z = \frac{\alpha_y s + 1}{ms^2 + A_y s}$ – минимально-фазовая ($\alpha_y > 0$), имеет единичную относительную степень и $G_y C_y B_y = \alpha_y m^{-1} > 0$, поэтому управление движением (35) по теореме 1 может быть задано с помощью сигнально-параметрического регулятора (31).

4.3. Адаптивное управление углами наклона

Рассмотрим уравнения изменения углового положения квадрокоптера из системы (10) и воспользуемся предположением, что скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ малы, поэтому первый член можно считать малым и отбросить. Также будем считать, что $\omega_x = \dot{\gamma}$, $\omega_y = \dot{\psi}$, $\omega_z = \dot{\vartheta}$, что следует из формул (9) при подстановке малых углов. Тогда вращательное движение (рыскание) можно отделить от остальных и записать в виде

$$(37) \quad \ddot{\psi} = I_y^{-1} \tau_\psi,$$

что можно представить в модели вида ВСВ с вектором состояния $\tilde{x}_\psi = [\psi \quad \dot{\psi}]^T$:

$$(38) \quad \dot{\tilde{x}}_\psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x}_\psi + \begin{bmatrix} 0 \\ I_y^{-1} \end{bmatrix} \tau_\psi, \quad \tilde{y}_\psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x}_\psi.$$

Выбирая $G_\psi = [1 \quad \alpha_\psi]$, где $\alpha_\psi > 0$ – параметр регулирования, получаем передаточную функцию $G_\psi C_\psi (sI_2 - A_\psi)^{-1} B_\psi = \frac{\alpha_\psi s + 1}{I_z s^2}$, где матрицы A_ψ , B_ψ , C_ψ – матрицы состояния, входа и выхода соответственно в выражении (38), которая является гипер-минимально-фазовой, что означает по теореме 1, что есть возможность воспользоваться регулятором (31).

Движения по углам ϑ и γ сведутся в систему

$$(39) \quad \begin{bmatrix} \ddot{\gamma} \\ \ddot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \\ \dot{\vartheta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I_r I_x^{-1} \omega_R & 0 & 0 \\ I_r I_x^{-1} \omega_R & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\vartheta} \\ \gamma \\ \vartheta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_x^{-1} & 0 \\ 0 & I_x^{-1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_\gamma \\ \tau_\vartheta \end{bmatrix},$$

$$\tilde{y}_{\gamma\vartheta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\vartheta} \\ \gamma \\ \vartheta \end{bmatrix}.$$

Получившаяся система является многомерной, поэтому принцип работы с ней несколько отличается и описан в книге [9].

Пусть матрица $P(s)$ – матрица размерности 4×4 из правильных дробно-рациональных функций от s , имеющая вид $G_{\gamma\vartheta} C_{\gamma\vartheta} (sI_4 - A)^{-1} B_{\gamma\vartheta}$, где I_4 – единичная матрица 4×4 , матрицы $A_{\gamma\vartheta}$, $B_{\gamma\vartheta}$, $C_{\gamma\vartheta}$ соответствуют матрицам состояния входа, вы-

хода из выражения (39), а матрица $G_{\gamma\vartheta}$ имеет размерность 2×4 и выбирается разработчиком.

Определение 2. Матрица $P(s)$ называется минимально-фазовой, если многочлен $\delta(s)\det P(s)$ гурвицев. Матрица $P(s)$ называется строго минимально-фазовой, если многочлен $\delta(s)\det P(s)$ гурвицев, а матрица $\Gamma_P = \lim_{|s| \rightarrow \infty} sP(s)$ симметрична и положительно определена. Многочлен $\delta(s)$ считается как $\delta(s) = \det(sI_4 - A_{\gamma\vartheta})$.

Введем управление вида

$$(40) \quad \tilde{u}(t) = \xi^\top(t)\tilde{y}(t), \quad \dot{\xi}_j = -(G_j\tilde{y})\Gamma_j\tilde{y},$$

где $j = 1, \dots, m$, а m – размер вектора управления $\tilde{u}(t)$, ξ_j – столбцы матрицы настраиваемых параметров ξ , G_j – соответствующая строка матрицы G , $\Gamma_j = \Gamma_j^\top > 0$ – матрицы размера $l \times l$, где l – размер вектора выхода.

Теорема 2. Для системы (26) с управлением (40) выполняется целевое условие (27), если матрица $GW(s)$ строго минимально-фазовая.

То есть можно использовать регулятор (31), но в варианте для многомерных систем (40), который также необходимо модернизировать, убрав зависимость от начальных условий и внешних возмущений. Тогда окончательно алгоритм управления (40) с учетом скалярного случая (31) принимает вид

$$(41) \quad \begin{aligned} \tilde{u}(t) &= \xi^\top(t)\tilde{y}(t) - \gamma_M \text{sign}(\sigma(\tilde{y}))\sqrt{|\sigma(\tilde{y})|}, \\ \sigma(\tilde{y}) &= G_j\tilde{y} - h^*, \quad \dot{\xi}_j = -(G_j\tilde{y})\Gamma_j\tilde{y} - \alpha_M(\xi - \xi_0), \quad \xi_0 = \xi(0). \end{aligned}$$

Выбирая матрицу $G_{\gamma\vartheta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha_\gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_\vartheta \end{bmatrix}$, выражение $P_{\gamma\vartheta} = G_{\gamma\vartheta}C_{\gamma\vartheta}(sI_4 - A_{\gamma\vartheta})^{-1}B_{\gamma\vartheta}$ является передаточной матрицей и равняется

$$(42) \quad P_{\gamma\vartheta} = \frac{1}{s(I_x^2 s^2 + I_r^2 \omega_R^2)} \begin{bmatrix} I_x s^2 + I_x \alpha_\gamma s & -I_r \omega_R(s + \alpha_\gamma) \\ I_r \omega_R(s + \alpha_\vartheta) & I_x s^2 + I_x \alpha_\vartheta s \end{bmatrix}.$$

Многочлен $\delta(s)$ равен $I_x^{-2}(I_x^2 s^3 + I_r^2 \omega_R^2 s)$, тогда многочлен $\delta(s)\det P_{\gamma\vartheta} = I_x^{-2}(s^2 + (\alpha_\gamma + \alpha_\vartheta)s + \alpha_\vartheta \alpha_\gamma)$ является гурвицевым.

Теперь рассчитаем $\Gamma_P = \lim_{|s| \rightarrow \infty} sP_{\gamma\vartheta}$:

$$(43) \quad \Gamma_P = GCB = \begin{bmatrix} I_x^{-1} & 0 \\ 0 & I_x^{-1} \end{bmatrix},$$

которая выполняет требуемое условие $\Gamma = \Gamma^\top > 0$, отсюда по теореме 2 можно видеть, что для данной системы также можно использовать сигнально-параметрический-регулятор.

5. Моделирование

На основе всего вышесказанного можно сформировать три алгоритма управления системой стабилизации квадрокоптера и сравнить их функционирование. В качестве цели движения выбран подъем на высоту 0,2 метра и поворот на углы, не превышающих 0,2 радиан. Параметры для алгоритмов различных типов приведены в таблице 2.

Таблица 2. Коэффициенты регуляторов

	ПД-регулятор		ЛОС		СПР				
	K_p	K_d	K_1	K_2	α	ς	γ_k	γ_σ	k^0
z	33,18	13,58	23,04	9,6	1/3	1	100	225	17
ψ	0,58	0,24	23,04	9,6	1/3	1	10000	0,2	2
γ	0,35	0,14	23,04	9,6	1/3	1	$100I_4$	10	$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$
ϑ	0,35	0,14	23,04	9,6	1/3	1	$100I_4$	10	$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

Результаты моделирования приведены на рис. 3–4.

На рис. 5–6 представлено слежение за задающим сигналом для всех трех алгоритмов. Заданы ненулевые начальные условия

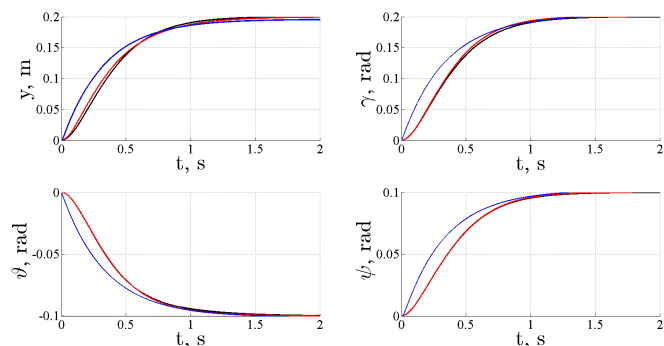


Рис. 3. Изменение координат при работе адаптивного алгоритма (синие линии), при работе системы при линейаризации обратной связи и с ПД-регуляторами (черные и красные линии соответственно)

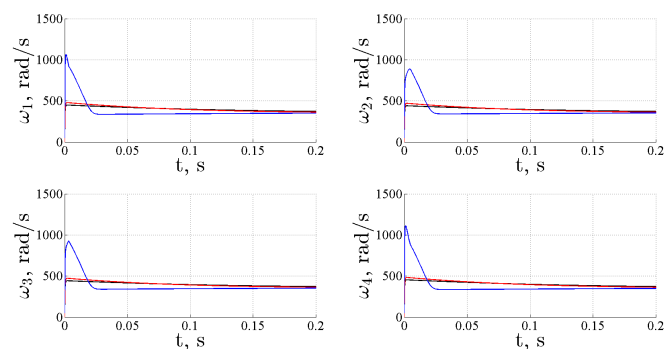


Рис. 4. Изменение угловых скоростей винтов при работе адаптивного алгоритма (синие линии), при работе системы при линейаризации обратной связи и с ПД-регуляторами (черные и красные линии соответственно)

для углов ($\gamma_0 = -0,1$, $\vartheta_0 = 0,15$, $\psi_0 = 0,2$ рад) и задающие воздействия в виде импульсов разной частоты и с различным заполнением. Как видно из рис. 3–6, движение квадрокоптера с предложенным сигнально-параметрическим алгоритмом опережает движение с прочими алгоритмами ввиду того, что при его использовании движение сводится к аperiodическому звену. Из рис. 4 и 6 также видно, что сигнально-параметрический алгоритм имеет более жесткое управление, сильнее раскручивая винты, что накладывает ограничение на его использование или более аккуратный подход.

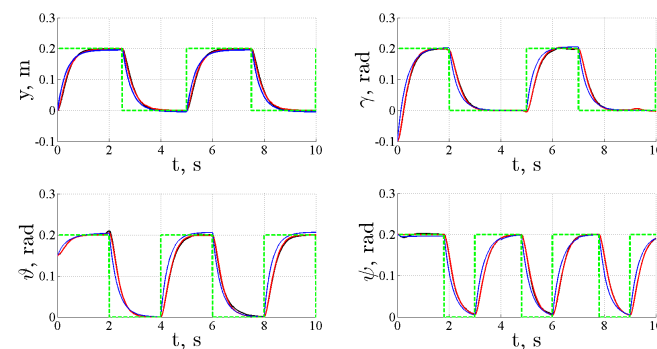


Рис. 5. Изменение координат при работе адаптивного алгоритма (синие линии), при работе системы при линейаризации обратной связи и с ПД-регуляторами (черные и красные линии соответственно) во время слежения за задающим воздействием

6. Заключение

В работе была предложена система стабилизации квадрокоптера с использованием сигнально-параметрических регуляторов для скалярного случая сигнала управления (стабилизация в вертикальной плоскости и по углу рыскания) и для векторного (ста-

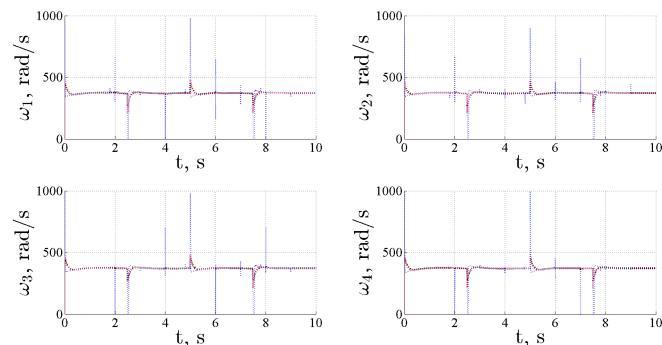


Рис. 6. Изменение угловых скоростей винтов при работе адаптивного алгоритма (синие линии), при работе системы при линеаризации обратной связи и с ПД-регуляторами (черные и красные линии соответственно) во время слежения за задающим воздействием

билизация по углам крена и тангажа). Предложенный алгоритм обладает очевидным достоинством, которое выражается в том, что не требуется знать ни одного параметра квадрокоптера для проектирования системы управления. Кроме того, алгоритм учитывает особенность перекрестного взаимодействия наклонов по углам крена и тангажа, не опуская соответствующие члены в математической модели. Однако присутствует характерная особенность для High-Gain алгоритмов: заметно возросшее управление – винты квадрокоптера раскручиваются сильнее, чем при использовании других рассмотренных алгоритмов.

В остальном предложенный алгоритм качественно не отличается от алгоритмов, использующих конкретные параметры квадрокоптера. В следующих работах планируется внести учет максимально возможных скоростей вращения винтов и предложить формирование управлений исходя из этих ограничений.

Литература

- АНДРИЕВСКИЙ Б.Р., ФРАДКОВ А.Л. *Метод пассивации в задачах адаптивного управления, оценивания и синхронизации* // Автоматика и телемеханика. – 2006. – №11. – С. 3–37.
- БЕЛОКОНЬ С.А., ЗОЛУХИН Ю.Н., КОТОВ К.Ю., МАЛЫЦЕВ А.С., НЕСТЕРОВ А.А., СОБОЛЕВ М.А., ФИЛИППОВ М.Н., ЯН А.П. *Управление параметрами полёта квадрокоптера при движении по заданной траектории* // Автометрия. – 2013. – С. 32–42.
- БЕСЕКЕРСКИЙ В.А., ПОПОВ Е.П. *Теория систем автоматического управления*. – М.: Наука, 1975.
- ГУРЬЯНОВ А.Е. *Моделирование управления квадрокоптером* // Инженерный вестник. – 2014. – №8. – С. 522–534.
- Динамика летательных аппаратов в атмосфере. Термины, определения и обозначения*. – Государственный Комитет СССР по Стандартам, 1981.
- ЕМЕЛЬЯНОВ С.В., КОРОВИН С.К., ЛЕВАНТОВСКИЙ Л.В. *Новый класс алгоритмов скольжения второго порядка* // Математическое моделирование. – 1990. – Том 2, №3. – С. 89–100.
- ЖУЧКОВ Р.Н. *Применение идей прогнозирующего управления в синтезе стабилизирующего управления сетевыми объектами* // Управление большими системами. – 2013. – Вып. 46. – С. 147–162.
- МЕЕРОВ М.В. *Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности*. – М.: Физматгиз, 1959.
- ФРАДКОВ А.Л. *Адаптивное управление в сложных системах*. – М.: Наука, 1990. – 296 с.