Введение в теорию адаптивных наблюдателей для нелинейных систем

Ведяков Алексей Алексеевич[1]

Ноябрь, 2022

[1]Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники, Санкт-Петербург, Россия

Содержание

Введение

Задачи идентификации и наблюдения

Идентификация — определение математической модели системы и значений её параметров

Идентификация — определение математической модели системы и значений её параметров

Параметрическая идентификация — определение значений параметров заданной математической модели

Идентификация — определение математической модели системы и значений её параметров

Параметрическая идентификация — определение значений параметров заданной математической модели

Онлайн идентификация — семейство методов параметрической идентификации, характеризующееся тем, что оценивание происходит одновременно с измерением. Ставится задача оценивания **текущих** значений параметров

Задачи идентификации и наблюдения

Идентификация — определение математической модели системы и значений её параметров

Параметрическая идентификация — определение значений параметров заданной математической модели

Онлайн идентификация — семейство методов параметрической идентификации, характеризующееся тем, что оценивание происходит одновременно с измерением. Ставится задача оценивания **текущих** значений параметров

Наблюдение — оценивание текущего значения переменных состояния динамической модели системы

Параметрическая идентификация

Регрессионная модель (регрессия)

$$y(t) = g(x(t), \theta), \tag{1}$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$ — зависимая переменная, $x \in \mathbb{R}^m$ — вектор независимых переменных, $\theta \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных постоянных параметров. Переменные $y(t)$ и $x(t)$ известные или измеряемые.

Регрессионная модель (регрессия)

$$y(t) = g(x(t), \theta), \tag{1}$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$ — зависимая переменная, $x \in \mathbb{R}^m$ — вектор независимых переменных, $\theta \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных постоянных параметров. Переменные $y(t)$ и $x(t)$ известные или измеряемые.

Линейная регрессия

$$y(t) = x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + \ldots + x_m\theta_m \tag{2}$$

или в матричной форме
$$y(t) = x^\top(t)\theta, \tag{3}$$

где

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}, \qquad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_m \end{bmatrix} \tag{4}$$

Градиентный метод оценивания

Рассмотрим линейную регрессионную модель в непрерывной и дискретной формах:

$$y(t) = \boldsymbol{\phi}^{\top}(t)\boldsymbol{\theta}(t), \tag{5}$$

$$y(k) = \boldsymbol{\phi}^{\top}(k)\boldsymbol{\theta}(k) \tag{6}$$

Градиентный метод оценивания

Рассмотрим линейную регрессионную модель в непрерывной и дискретной формах:

$$y(t) = \boldsymbol{\phi}^\top(t)\boldsymbol{\theta}(t), \tag{5}$$

$$y(k) = \boldsymbol{\phi}^\top(k)\boldsymbol{\theta}(k) \tag{6}$$

Ставится задача по измерениям $y(\cdot)$ и $\boldsymbol{\phi}(\cdot)$ получить оценку $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\cdot)$ вектора $\boldsymbol{\theta}$.

Рассмотрим линейную регрессионную модель в непрерывной и дискретной формах:

$$y(t) = \boldsymbol{\phi}^\top(t)\boldsymbol{\theta}(t), \tag{5}$$

$$y(k) = \boldsymbol{\phi}^\top(k)\boldsymbol{\theta}(k) \tag{6}$$

Ставится задача по измерениям $y(\cdot)$ и $\boldsymbol{\phi}(\cdot)$ получить оценку $\widehat{\boldsymbol{\theta}}(\cdot)$ вектора $\boldsymbol{\theta}$.

Для того, чтобы иметь возможность сравнить получаемые оценки, введем квадратичный критерий в непрерывной форме:

$$J_{SE}(t) := \frac{1}{2}e(t)^2, \tag{7}$$

где $e(t) := y(t) - \boldsymbol{\phi}^\top(t)\widehat{\boldsymbol{\theta}}(t)$, и дискретной форме:

$$J_{SE}(k) := \frac{1}{2}e(k)^2, \tag{8}$$

где $e(k) := y(k) - \boldsymbol{\phi}^\top(k)\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k)$.

Градиентный метод оценивания

На основе критериев (7) и (8) вводятся градиентные алгоритмы идентификации, построенные на идее движения в направлении *против* градиента $\nabla_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} J$.

Для непрерывного времени

$$\dot{\widehat{\boldsymbol{\theta}}}(t) = -\gamma \nabla_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} J_{SE}(t) = \gamma \boldsymbol{\phi}(t) e(t), \tag{9}$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент адаптации, а для дискретного времени

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) - \gamma \nabla_{\widehat{\boldsymbol{\theta}}} J_{SE}(k) = \widehat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \gamma \frac{\boldsymbol{\phi}(k) e^0(k)}{1 + \gamma \boldsymbol{\phi}^\top(k) \boldsymbol{\phi}(k)}, \tag{10}$$

где $e^0(k) := y(k) - \boldsymbol{\phi}^\top(k) \widehat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$.

Градиентный метод оценивания

На основе критериев (7) и (8) вводятся градиентные алгоритмы идентификации, построенные на идее движения в направлении *против* градиента $\nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} J$.

Для непрерывного времени

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(t) = -\gamma \nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} J_{SE}(t) = \gamma \boldsymbol{\phi}(t) e(t), \tag{9}$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент адаптации, а для дискретного времени

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) - \gamma \nabla_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} J_{SE}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \gamma \frac{\boldsymbol{\phi}(k) e^0(k)}{1 + \gamma \boldsymbol{\phi}^\top(k) \boldsymbol{\phi}(k)}, \tag{10}$$

где $e^0(k) := y(k) - \boldsymbol{\phi}^\top(k) \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1)$.

Также в дискретном времени иногда рассматривается упрощенный градиентный алгоритм вида

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(k) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(k-1) + \gamma \boldsymbol{\phi}(k) e^0(k). \tag{11}$$

Однако, он не является устойчивым для любых $\gamma > 0$

Градиентный метод. Скалярный случай

Рассмотрим скалярную регрессионную модель

$$y(t) = x(t)\theta, \tag{12}$$

где $y(t), x(t), \theta \in \mathbb{R}$, и градиентный метод оценивания её параметров

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \gamma x(t)\left(y(t) - x(t)\hat{\theta}(t)\right) \tag{13}$$

Рассмотрим скалярную регрессионную модель

$$y(t) = x(t)\theta, \tag{12}$$

где $y(t), x(t), \theta \in \mathbb{R}$, и градиентный метод оценивания её параметров

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \gamma x(t)\left(y(t) - x(t)\hat{\theta}(t)\right) \tag{13}$$

Проанализируем модель ошибки $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\dot{\hat{\theta}}(t), \tag{14}$$

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma x(t)\left(y(t) - x(t)\hat{\theta}(t)\right), \tag{15}$$

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma x^2(t)\tilde{\theta}(t) \tag{16}$$

Градиентный метод. Скалярный случай

Рассмотрим скалярную регрессионную модель

$$y(t) = x(t)\theta, \tag{12}$$

где $y(t), x(t), \theta \in \mathbb{R}$, и градиентный метод оценивания её параметров

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = \gamma x(t)\left(y(t) - x(t)\hat{\theta}(t)\right) \tag{13}$$

Проанализируем модель ошибки $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$:

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\dot{\hat{\theta}}(t), \tag{14}$$

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma x(t)\left(y(t) - x(t)\hat{\theta}(t)\right), \tag{15}$$

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma x^2(t)\tilde{\theta}(t) \tag{16}$$

Решением последнего дифференциального уравнения является

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)e^{-\gamma\int_0^t x^2(\tau)d\tau} \tag{17}$$

Градиентный метод. Скалярный случай

Рассмотрим полученное решение

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)e^{-\gamma \int_0^t x^2(\tau)d\tau} \tag{18}$$

Возможны следующие случаи

1. $x \equiv 0 \Rightarrow \int_0^t x^2(\tau)d\tau \equiv 0, \ldots$

Рассмотрим полученное решение

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)e^{-\gamma \int_0^t x^2(\tau)d\tau} \tag{18}$$

Возможны следующие случаи

1. $x \equiv 0 \Rightarrow \int_0^t x^2(\tau)d\tau \equiv 0$, оценивание не происходит: $\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)$ для $\forall t$

Градиентный метод. Скалярный случай

Рассмотрим полученное решение

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)e^{-\gamma \int_0^t x^2(\tau)d\tau} \tag{18}$$

Возможны следующие случаи

1. $x \equiv 0 \Rightarrow \int_0^t x^2(\tau)d\tau \equiv 0$, оценивание не происходит: $\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)$ для $\forall t$
2. $\int_0^\infty x^2(t)dt = C < \infty \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}_2$, тогда ошибка …

Градиентный метод. Скалярный случай

Рассмотрим полученное решение

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)e^{-\gamma \int_0^t x^2(\tau)d\tau} \tag{18}$$

Возможны следующие случаи

1. $x \equiv 0 \Rightarrow \int_0^t x^2(\tau)d\tau \equiv 0$, оценивание не происходит: $\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)$ для $\forall t$
2. $\int_0^\infty x^2(t)dt = C < \infty \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}_2$, тогда ошибка не сходится к нулю

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)C \tag{19}$$

Градиентный метод. Скалярный случай

Рассмотрим полученное решение

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)e^{-\gamma \int_0^t x^2(\tau)d\tau} \tag{18}$$

Возможны следующие случаи

1. $x \equiv 0 \Rightarrow \int_0^t x^2(\tau)d\tau \equiv 0$, оценивание не происходит: $\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)$ для $\forall t$
2. $\int_0^\infty x^2(t)dt = C < \infty \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}_2$, тогда ошибка не сходится к нулю
$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)C \tag{19}$$
3. $\int_0^\infty x^2(t)dt = \infty \Leftrightarrow x \notin \mathcal{L}_2$, тогда ошибка ...

Градиентный метод. Скалярный случай

Рассмотрим полученное решение

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)e^{-\gamma \int_0^t x^2(\tau)d\tau} \tag{18}$$

Возможны следующие случаи

1. $x \equiv 0 \Rightarrow \int_0^t x^2(\tau)d\tau \equiv 0$, оценивание не происходит: $\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)$ для $\forall t$
2. $\int_0^\infty x^2(t)dt = C < \infty \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}_2$, тогда ошибка не сходится к нулю
$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)C \tag{19}$$
3. $\int_0^\infty x^2(t)dt = \infty \Leftrightarrow x \notin \mathcal{L}_2$, тогда ошибка асимптотически сходится к нулю
$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\theta}(t) = 0 \tag{20}$$

Градиентный метод. Скалярный случай

Рассмотрим полученное решение

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)e^{-\gamma \int_0^t x^2(\tau)d\tau} \tag{18}$$

Возможны следующие случаи

1. $x \equiv 0 \Rightarrow \int_0^t x^2(\tau)d\tau \equiv 0$, оценивание не происходит: $\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)$ для $\forall t$
2. $\int_0^\infty x^2(t)dt = C < \infty \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}_2$, тогда ошибка не сходится к нулю
$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)C \tag{19}$$
3. $\int_0^\infty x^2(t)dt = \infty \Leftrightarrow x \notin \mathcal{L}_2$, тогда ошибка асимптотически сходится к нулю
$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\theta}(t) = 0 \tag{20}$$
4. $\int_0^t x^2(\tau)d\tau \geq at$, тогда $e^{-\gamma \int_0^t x^2(\tau)d\tau} \leq e^{-\gamma at}$ и ошибка ...

Градиентный метод. Скалярный случай

Рассмотрим полученное решение

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)e^{-\gamma \int_0^t x^2(\tau)d\tau} \tag{18}$$

Возможны следующие случаи

1. $x \equiv 0 \Rightarrow \int_0^t x^2(\tau)d\tau \equiv 0$, оценивание не происходит: $\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)$ для $\forall t$
2. $\int_0^\infty x^2(t)dt = C < \infty \Leftrightarrow x \in \mathcal{L}_2$, тогда ошибка не сходится к нулю
$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0)C \tag{19}$$
3. $\int_0^\infty x^2(t)dt = \infty \Leftrightarrow x \notin \mathcal{L}_2$, тогда ошибка асимптотически сходится к нулю
$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\theta}(t) = 0 \tag{20}$$
4. $\int_0^t x^2(\tau)d\tau \geq at$, тогда $e^{-\gamma \int_0^t x^2(\tau)d\tau} \leq e^{-\gamma at}$ и ошибка экспоненциально сходится к нулю
$$|\tilde{\theta}(t)| \leq |\tilde{\theta}(0)|e^{-\gamma at} \tag{21}$$

Векторный случай

Рассмотрим регрессионную модель

$$y(t) = x^\top(t)\theta, \tag{22}$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$, $x(t), \theta \in \mathbb{R}^n$.

Векторный случай

Рассмотрим регрессионную модель

$$y(t) = x^\top(t)\theta, \tag{22}$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$, $x(t), \theta \in \mathbb{R}^n$.

Определение. Вектор $x(t) \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения (Persistent Excitation, PE), если $\exists \alpha > 0$ и $T > 0$ такие, что

$$\int_t^{t+T} x(\tau)x^\top(\tau)\mathrm{d}\tau \succeq \alpha T I$$

для $\forall t \geq 0$.

Векторный случай

Рассмотрим регрессионную модель

$$y(t) = x^\top(t)\theta, \tag{22}$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$, $x(t), \theta \in \mathbb{R}^n$.

Определение. Вектор $x(t) \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения (Persistent Excitation, PE), если $\exists \alpha > 0$ и $T > 0$ такие, что

$$\int_t^{t+T} x(\tau)x^\top(\tau)\mathrm{d}\tau \succeq \alpha T I$$

для $\forall t \geq 0$.

Теорема. Для регрессионной модели (22) градиентный алгоритм (9) обеспечивает экспоненциальную сходимость к нулю ошибки оценивания тогда и только тогда, когда $x(t)$ является ограниченным и удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения.

Наблюдатель для линейной системы

Наблюдаемость

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{23}$$

$$y(t) = Cx(t), \tag{24}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — входной (управляющий) сигнал, $y(t) \in \mathbb{R}^k$ — выходной сигнал; $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{k\times n}$ — матрицы состояний, входов и выходов соответственно.

Наблюдаемость

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{23}$$

$$y(t) = Cx(t), \tag{24}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — входной (управляющий) сигнал, $y(t) \in \mathbb{R}^k$ — выходной сигнал; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ — матрицы состояний, входов и выходов соответственно.

Определение. Система называется *полностью наблюдаемой*, если на конечном интервале времени $[t_0, t_1]$ по значению $y(t)$ для $t \in [t_0, t_1]$ при известном управляющем воздействии $u(t)$ на этом интервале можно определить все начальные компоненты вектора состояния $x(t_0)$.

Наблюдаемость

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{23}$$

$$y(t) = Cx(t), \tag{24}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ — входной (управляющий) сигнал, $y(t) \in \mathbb{R}^k$ — выходной сигнал; $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ и $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ — матрицы состояний, входов и выходов соответственно.

Определение. Система называется *полностью наблюдаемой*, если на конечном интервале времени $[t_0, t_1]$ по значению $y(t)$ для $t \in [t_0, t_1]$ при известном управляющем воздействии $u(t)$ на этом интервале можно определить все начальные компоненты вектора состояния $x(t_0)$.

Определение. Система называется *детектируемой*, если наблюдаемыми являются только некоторые компоненты состояния, а остальные сходятся к нулю.

Критерий наблюдаемости

Система (23)–(24) является полностью наблюдаемой, если матрица наблюдаемости

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (25)$$

имеет полный ранг, т.е. $\mathrm{rank} O = n$.

Наблюдатель для линейной системы

Рассмотрим наблюдатель вида

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \tag{26}$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \tag{27}$$

Наблюдатель для линейной системы

Рассмотрим наблюдатель вида

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \tag{26}$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \tag{27}$$

Построим модель ошибки $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t), \tag{28}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = F\tilde{x}(t), \tag{29}$$

где $F = A - LC$.

Наблюдатель для линейной системы

Рассмотрим наблюдатель вида

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \tag{26}$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \tag{27}$$

Построим модель ошибки $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t), \tag{28}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = F\tilde{x}(t), \tag{29}$$

где $F = A - LC$.

Наблюдатель (26)–(27) обеспечит экспоненциальную сходимость к нулю ошибки оценивания $\tilde{x}$, если матрица L такая, что F — гурвицева.

Наблюдатель для линейной системы

Рассмотрим наблюдатель вида

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}), \tag{26}$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \tag{27}$$

Построим модель ошибки $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$:

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t), \tag{28}$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = F\tilde{x}(t), \tag{29}$$

где $F = A - LC$.

Наблюдатель (26)–(27) обеспечит экспоненциальную сходимость к нулю ошибки оценивания $\tilde{x}$, если матрица L такая, что F — гурвицева.

Если система (23)–(24) является полностью наблюдаемой, то такой вектор L существует.

Наблюдатели для нелинейных систем

Для детектируемой системы вида

$$\dot{x}(t) = f(x, u), \tag{30}$$

$$y(t) = h(x) \tag{31}$$

наблюдатель

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}, u) + L(y - h(\hat{x})), \tag{32}$$

где L выбирается так, чтобы матрица $A - LC$ была гурвицевой,

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{ss}, u_{ss}), \qquad C = \frac{\partial h}{\partial x}(x_{ss}), \tag{33}$$

а x_{ss} и u_{ss} соответствуют установившемуся движению:

$$0 = f(x_{ss}, u_{ss}), \qquad 0 = h(x_{ss}), \tag{34}$$

для достаточно малых $\|\tilde{x}(t)\|$, $\|x(0) - x_{ss}\|$ и $\sup_{t\geq 0}\|u(t) - u_{ss}\|$ обеспечивает

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{x}(t) = 0 \tag{35}$$

[1] H. K. Khalil, “Nonlinear Systems,” 3rd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002

Расширенный фильтр Калмана[2]

Рассмотрим наблюдатель

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(\hat{x}, u) + L(t)(y - h(\hat{x})), \tag{36}$$

где

$$L(t) = P(t)C^\top R^{-1}, \tag{37}$$

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t), u(t)), \quad C(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}(t)), \tag{38}$$

$$\dot{P} = AP + PA^\top + Q - PC^\top R^{-1} CP, \quad P(t_0) = P_0, \tag{39}$$

матрицы P_0, Q, R — симметрические, положительно определенные.

Если для всех $t > t_0$ существует $P(t)$: $\alpha_1 I \leq P(t) \leq \alpha_2 I$, $\alpha_i > 0$, то $\exists c, k, \lambda$ такие, что

$$\|\tilde{x}(0)\| \leq c \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{x}(t)\| \leq k e^{-\lambda(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0 \geq 0 \tag{40}$$

[2] H. K. Khalil, “Nonlinear Systems,” 3rd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002

Глобальный наблюдатель[3]

Для системы вида

$$\dot{x}(t) = Ax + \psi(u, y), \tag{41}$$

$$y(t) = Cx, \tag{42}$$

если пара (A, C) наблюдаема, тогда наблюдатель вида

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x} + \psi(u, y) + L(y - C\hat{x}), \tag{43}$$

где L выбирается так, чтобы матрица $A - LC$ была гурвицевой, обеспечивает

$$\lim_{t \to \infty} \tilde{x}(t) = 0, \quad \forall \tilde{x}(0) \tag{44}$$

[3] H. K. Khalil, “Nonlinear Systems,” 3rd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002

Вместо заключения

Вместо заключения

- Проблема синтеза наблюдателей для нелинейных систем остается открытой

Вместо заключения

- Проблема синтеза наблюдателей для нелинейных систем остается открытой
- Проблема еще сильнее усложняется, если все или часть параметров модели неизвестны, т.е. требуется синтезировать *адаптивный наблюдатель*

Вместо заключения

- Проблема синтеза наблюдателей для нелинейных систем остается открытой
- Проблема еще сильнее усложняется, если все или часть параметров модели неизвестны, т.е. требуется синтезировать *адаптивный наблюдатель*
- Существующие методы имеют те или иные ограничения, и при решении задач требуется найти подходящий

Вместо заключения

- Проблема синтеза наблюдателей для нелинейных систем остается открытой
- Проблема еще сильнее усложняется, если все или часть параметров модели неизвестны, т.е. требуется синтезировать *адаптивный наблюдатель*
- Существующие методы имеют те или иные ограничения, и при решении задач требуется найти подходящий
- Наблюдатели стали особенно популярны на волне исследований, посвященных бессенсорным методам управления

Метод динамического расширения и смешивания регрессора[4]

Метод динамического расширения и смешивания регрессора (англ. Dynamic Regressor Extension и Mixing, DREM) — метод онлайн оценивания параметров линейной регрессионной модели, состоящий из следующих шагов

[4] S. Aranovskiy et al. Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing, IEEE Transactions on Automatic Control, 2017

Метод динамического расширения и смешивания регрессора[4]

Метод динамического расширения и смешивания регрессора (англ. Dynamic Regressor Extension и Mixing, DREM) — метод онлайн оценивания параметров линейной регрессионной модели, состоящий из следующих шагов

Шаг 1. **Расширение** (англ. extension) — получение дополнительных $n-1$ регрессионных уравнений на основе исходного

Шаг 2. **Смешивание** (англ. mixing) — получение из n регрессионных уравнений с n параметрами n новых скалярных регрессий

Шаг 3. **Оценивание** — оценивание неизвестных параметров из полученных скалярных регрессий

[4] S. Aranovskiy et al. Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing, IEEE Transactions on Automatic Control, 2017

Наблюдатель на основе оценивания параметров[5]

Наблюдатель на основе оценивания параметров (англ. Parameter Estimation-Based Observers, PEBO) — метод синтеза наблюдателей для нелинейных систем, основанный на сведении задачи наблюдения за переменными состояния к задаче оценивания постоянных параметров.

[5] R. Ortega et al. A parameter estimation approach to state observation of nonlinear systems, Systems & Control Letters, 2015

Наблюдатель на основе оценивания параметров (англ. Parameter Estimation-Based Observers, PEBO) — метод синтеза наблюдателей для нелинейных систем, основанный на сведении задачи наблюдения за переменными состояния к задаче оценивания постоянных параметров.

Шаг 1. Представление (части) переменных состояния, как суммы известных функций и постоянных параметров

Шаг 2. Получение линейной регрессии из исходной модели путем преобразований и замены переменных состояния согласно п.1

Шаг 3. Оценивание постоянных параметров

Шаг 4. Использование оценок постоянных параметров, для формирования оценок неизвестных переменных состояния

[5] R. Ortega et al. A parameter estimation approach to state observation of nonlinear systems, Systems & Control Letters, 2015

Адаптивные наблюдатели на основе DREM[6]

Адаптивные наблюдатели на основе DREM (англ. DREM-Based Adaptive Observers, DREMBAO) — метод синтеза наблюдателей для нелинейных систем, основанный на получении регрессионной модели, где неизвестными являются как постоянными параметры, так и неизмеряемые элементы вектора состояния.

[6] A. Pyrkin et al. Adaptive state observers using dynamic regressor extension and mixing, Systems & Control Letters, 2019

Адаптивные наблюдатели на основе DREM[6]

Адаптивные наблюдатели на основе DREM (англ. DREM-Based Adaptive Observers, DREMBAO) — метод синтеза наблюдателей для нелинейных систем, основанный на получении регрессионной модели, где неизвестными являются как постоянными параметры, так и неизмеряемые элементы вектора состояния.

Шаг 1. Получение α-параметризованной регрессионной модели относительно неизвестных параметров и неизмеряемых элементов вектора состояния

Шаг 2. «Расширение»: формирования набора регрессионных моделей

Шаг 3. Применение «смешивания» из DREM

Шаг 4. Оценивание неизвестных параметров

Шаг 5. Синтез наблюдателя неизмеряемых состояний с использованием полученных скалярных уравнений и оценок параметров

[6] A. Pyrkin et al. Adaptive state observers using dynamic regressor extension and mixing, Systems & Control Letters, 2019