МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения»**

М. В. Бураков

Теория автоматического управления

Часть 2

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2014

УДК 681.5
ББК

Рецензенты:

кандидат технических наук *Д. О. Якимовский*
(Федеральное государственное предприятие «НИИ командных приборов»);
кандидат технических наук доцент *А. А. Мартынов*
(Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения)

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Бураков М.В.

Д79 Теория автоматического управления: учеб. пособие. Часть 2/ М. В. Бураков;– СПб.: ГУАП, 2014. -258 с.: ил.
ISBN

Учебное пособие предназначено для подготовки бакалавров и магистров по направлению 220400 «Управление в технических системах», а также студентов других специальностей, изучающих дисциплины «Теория автоматического управления» и «Основы теории управления».

УДК 681.5
ББК

ISBN

©

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

1. МЕТОД ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

1.1. Модели в пространстве состояний

Практически все динамические объекты могут быть описаны с помощью дифференциальных уравнений.

Метод пространства состояний позволяет исследовать системы во временной области. Преимущества этого подхода обусловлены тем, что он позволяет единообразно исследовать и одномерные, и многомерные, и линейные, и нелинейные системы.

Состояние системы – это совокупность таких переменных, знание которых позволяет, при известном входе и известных уравнениях динамики, описать будущее состояние системы и значение ее выхода.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие составление уравнений в переменных состояния.

Пример 1.1. Тележка на колесах массой M, перемещающаяся под воздействием силы $f(t)$ вдоль оси x с коэффициентом трения k (рис. 1.1).

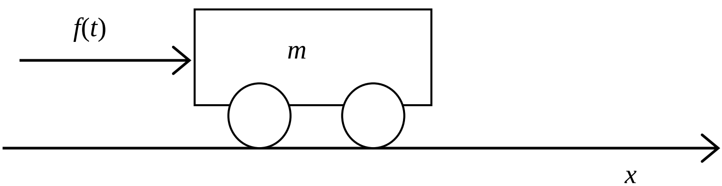


Рис.1.1. Тележка на колесах

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+k\frac{dx(t)}{dt}= f(t).$$

Введем переменные состояния:

$$x_1(t) = x(t),$$
$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \dot{x}(t).$$

Тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \dfrac{f(t)}{m} - \dfrac{k}{m} x_2(t). \end{cases}$$

В матричной записи:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{k}{m} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} f(t).$$

Пример 1.2. Механическая система с линейным перемещением (рис. 1.2).

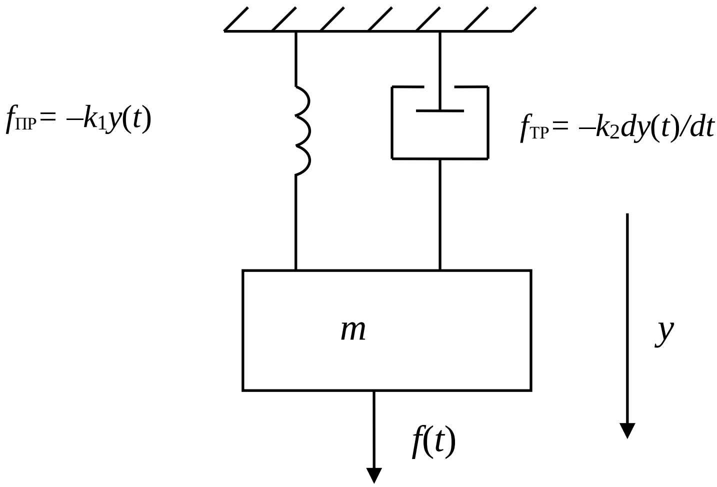


Рис.1.2. Механическая система с линейным перемещением

На тело массой m действует три силы: внешняя сила $f(t)$, сила трения $f_{\text{ТР}}(t)$, пропорциональная скорости с коэффициентом k_2, и сила упругости $f_{\text{ПР}}(t)$, пропорциональная перемещению вдоль оси $y(t)$ с коэффициентом k_1.

Под действием этих сил тело движется согласно закону Ньютона, который гласит, что сумма сил, действующих на тело, равна произведению массы тела на его ускорение:

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} = f(t) - k_2\frac{dy(t)}{dt} - k_1 y(t).$$

а передаточная функция (ПФ) равна

$$W(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + k_2 s + k_1}.$$

Это выражение определяет зависимость положения $y(t)$ от действующей силы $f(t)$.

Допустим, что нам нужна также информация о скорости $dy(t)/dt$. Введём следующие переменные:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases}$$

Далее можем записать:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -\dfrac{k_1}{m}x_1(t) - \dfrac{k_2}{m}x_2(t) + \dfrac{f(t)}{m}. \end{cases}$$

$$y = x_1(t).$$

Представим эту систему уравнений в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1}{m} & -\dfrac{k_2}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} f(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Пример 1.3. Рассмотрим систему, описываемую дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + k_1\dot{y}_1 + k_2 y_1 = u_1 + k_3 u_2 \\ \dot{y}_2 + k_4 y_2 + k_5\dot{y}_1 = k_6 u_1 \end{cases}.$$

где u_1 и u_2 - входные переменные, а y_1 и y_2 - выходные переменные.

Выберем переменные состояния:

$$\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = \dot{y}_1 = \dot{x}_1, \\ x_3 = y_2. \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -k_2 x_1 - k_1 x_2 + u_1 + k_3 u_2, \\ \dot{x}_3 = -k_5 x_2 - k_4 x_3 + k_6 u_1. \end{cases}$$

$$y_1 = x_1,$$

$$y_2 = x_3.$$

Эти уравнения можно записать в векторно-матричной форме:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_5 & -k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k_3 \\ k_6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.
$$

Уравнения состояний линейной стационарной системы имеют следующий общий вид:

$$
\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \\ Y(t) = CX(t) + DU(t). \end{cases}
$$

где X – вектор-столбец состояния $[n \times 1]$; A – матрица коэффициентов объекта $[n \times n]$; B – матрица входа $[n \times m]$; U – вектор входа (управления) $[m \times 1]$; Y – вектор выхода $[k \times 1]$; C – матрица выхода $[k \times n]$; D – матрица влияния входа непосредственно на выход системы $[k \times m]$.

Уравнениям состояния соответствует структурная схема, показанная на рис. 1.3.

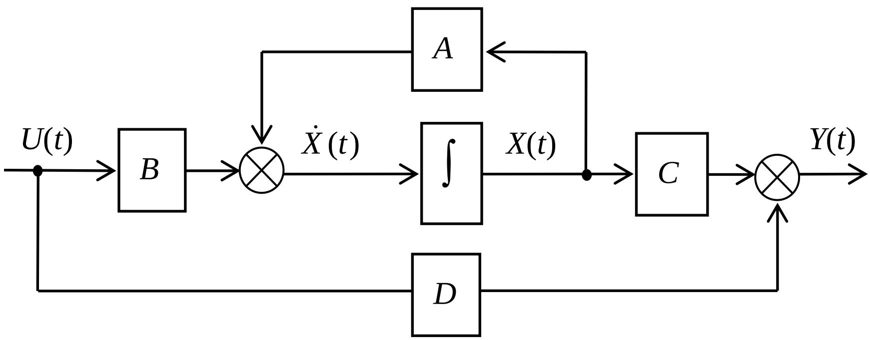


Рис. 1.3. Структура системы в пространстве состояний

На практике часто рассматриваются скалярные системы (с одним входом и одним выходом). Матрица *D* обычно нулевая. Тогда можно записать уравнения состояния в развернутом виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Имея описание скалярной системы в виде ПФ, можно легко получить описание в пространстве состояний:

$$W(s) = \frac{y(s)}{g(s)} = \frac{y(s)}{x(s)} \frac{x(s)}{u(s)},$$

где $y(s)$, $u(s)$, $x(s)$ - выход, вход и состояние системы.

Первой дроби соответствует уравнение выхода, а второй – уравнение состояния.

Пример 1.4. Имеется ПФ объекту управления:

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{5s+1}{15s^2+8s+1}.$$

Требуется получить уравнения состояния.

Решение.

$$W(s) = \frac{y(s)}{x(s)} \frac{x(s)}{u(s)} = (5s+1) \frac{1}{15s^2+8s+1}.$$

Уравнение состояния:

$$\frac{x(s)}{u(s)}=\frac{1}{15s^2+8s+1}.$$

Тогда

$$x(s)\left(15s^2+8s+1\right)=u(s).$$

Переходя во временную область, можем записать:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\frac{8}{15}\frac{dx(t)}{dt}-\frac{1}{15}x(t)+\frac{1}{15}u(t).$$

Выбираем переменные состояния: $x_1 = x$; $x_2(t) = dx/dt$, тогда можно записать

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{1}{15} & -\dfrac{8}{15}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{15}\end{bmatrix}u(t).$$

Уравнения выхода:

$$\frac{y(s)}{x(s)}=5s+1,$$

$$y(t)=x(t)+5\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix}1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

Пример 1.5. Рассмотрим систему 3-го порядка.

$$W(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{5s+7s+9}{s^3+8s^2+6s+2}.$$

$$W(s)=\frac{y(s)}{x(s)}\frac{x(s)}{u(s)}=\left(5s+7s+9\right)\frac{1}{s^3+8s^2+6s+2}.$$

$$\frac{x(s)}{u(s)}=\frac{1}{s^3+8s^2+6s+2},$$

$$u(s)=\left(s^3+8s^2+6s+2\right)x(s).$$

Переходя во временную область:

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} = -8\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 6\frac{dx(t)}{dt} - 2x(t) + u(t).$$

Вводим переменные состояния:

$$x_1 = x,\ x_2(t) = dx/dt,\ x_3(t) = d^2x/dt^2.$$

Получаем уравнение состояния

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -6 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Уравнение выхода

$$\frac{y(s)}{x(s)} = 5s^2 + 7s + 9,$$

$$y(t) = 9x(t) + 7\frac{dx}{dt} + 5\frac{d^2x}{dt^2} = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

1.2. Линеаризация в пространстве состояний

Как было показано выше, описание в пространстве состояний можно получить, выполняя преобразование ПФ объекта. Однако возможен и другой путь – на основании линеаризации исходных нелинейных уравнений объекта.

Рассмотрим нелинейное уравнение состояния

$$\dot{X} = F(X, U),$$

где X и F – векторы размерностью $[n \times 1]$, U – вектор размерностью $[r \times 1]$.

Пусть X_0 – рабочая точка нелинейной системы n-го порядка, а U_0 – постоянное значение входа, соответствующее этой точке.

Предположим, что появляется отклонение:

$$U = U_0 + \Delta U,$$
$$X = X_0 + \Delta X.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}(X_0 + \Delta X) = \dot{X}_0 + \Delta\dot{X} = F(X_0 + \Delta X, U_0 + \Delta U).$$

Для j-й компоненты вектора X можно записать:

$$\dot{x}_j^0 + \Delta\dot{x}_j = f_j(X_0, U_0) + \frac{\partial f_j}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial x_n}\Delta x_n + \frac{\partial f_j}{\partial u_1}\Delta u_1 + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial u_r}\Delta u_r.$$

Поскольку

$$\dot{x}_j^0 = f_j(X_0, U_0).$$

Получаем

$$\Delta\dot{x}_j = \frac{\partial f_j}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial x_n}\Delta x_n + \frac{\partial f_j}{\partial u_1}\Delta u_1 + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial u_r}\Delta u_r.$$

Для всех компонентов вектора X:

$$\Delta\dot{X} = A\Delta X + B\Delta U,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_r} \end{bmatrix}.$$

Эти матрицы называются якобианами.

Для удобства записи обычно вместо ΔX используют X, и вместо ΔU – U:

$$\dot{X} = AX + BU,$$

где под X понимаются отклонения переменных состояния от их установившихся значений, а под U – отклонения входных воздействий.

Рассмотрим пример линеаризации нелинейной системы.

Пусть дано нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка.

$$\ddot{x} + \dot{x} + \dot{x}x = u,$$

где все переменные являются функциями времени.

Введем переменные состояния:

$$\begin{cases} x_1 = x, \\ x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 - x_2 + u. \end{cases}$$

Нелинейные уравнения состояния примут вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u), \\ \dot{x}_2 = -x_1 x_2 - x_2 + u = f_2(x_1, x_2, u). \end{cases}$$

В векторной форме:

$$\dot{X} = F(X, U).$$

Рассмотрим аппроксимацию этих нелинейных уравнений в рабочей точке X_0, U_0.

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -x_2 & -x_1 - 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.2. Структурные преобразования в пространстве состояний

Рассмотрим соединение двух подсистем, описываемых в пространстве состояний, в одну. Предполагается, что обе подсистемы описываются соотношениями:

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = A_1 X_1(t) + B_1 u(t), \\ y_1(t) = C_1 X_1(t). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{X}_2(t) = A_2 X_2(t) + B_2 u(t), \\ y_2(t) = C_2 X_2(t). \end{cases}$$

Параллельное соединение подсистем показано на рис. 1.4.

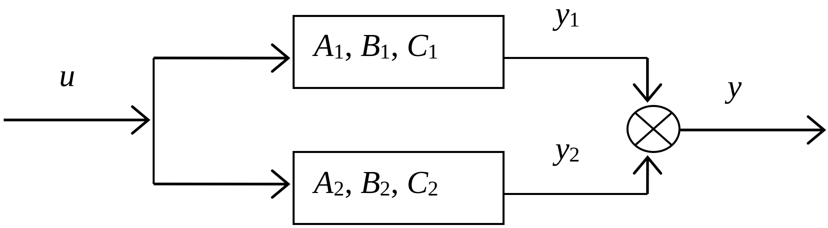


Рис. 1.4. Параллельное соединение подсистем

Для параллельного соединения:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

Последовательное соединение подсистем показано на рис. 1.5.

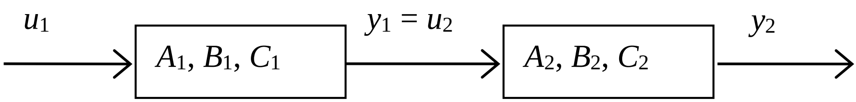


Рис. 1.5. Последовательное соединение подсистем

Для последовательного соединения:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

Соединение с обратной связью показано на рис. 1.6.

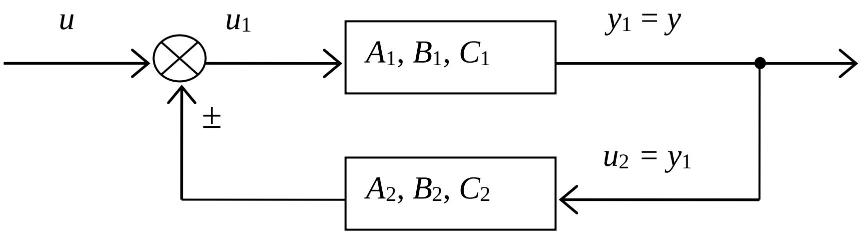


Рис. 1.6. Соединение подсистем с обратной связью

Для рис. 1.6 справедливо

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = A_1 X_1(t) + B_1\left(u(t) \pm C_2 X_2\right), \\ \dot{X}_2(t) = A_2 X_2(t) + B_2 C_1 X_1. \end{cases}$$

$$y = C_1 X_1.$$

В матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & \pm B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

1.3. Фундаментальная матрица состояния

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu,$$

где a и b – числа, x и u – скалярные переменные.

Преобразование этого уравнения по Лапласу дает

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s).$$

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s).$$

Обратное преобразование Лапласа этого уравнения дает

$$x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau.$$

Это формула обобщается для системы произвольного вида

$$X(t) = e^{At}X(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau.$$

Введем обозначение

$$\varPhi(t) = e^{At},$$

Тогда

$$X(t) = \Phi(t)X(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)BU(\tau)d\tau.$$

Таким образом, матричная экспоненциальная функция $\Phi(t)$ описывает свободное движение системы. Она называется фундаментальной матрицей или переходной матрицей состояния.

Если $U = 0$, то происходит свободное движение системы, т.е.

$$X(t) = \Phi(t)X(0).$$

В развернутом виде можно записать

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & \dots & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & \dots & \phi_{21}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & \dots & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \dots \\ x_n(0) \end{bmatrix}.$$

Здесь $\varphi_{ij}(t)$ представляет собой реакцию i-й переменной состояния на начальное значение j-й переменной состояния при условии, что начальные значения всех остальных переменных состояния равны 0.

Определим выходной сигнал системы, используя преобразование Лапласа. Для этого матричную запись уравнений состояния

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t).$$

Преобразуем это уравнение по Лапласу и получим окончательный результат в матричной форме

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s).$$

Где вектор начальных условий

$$X(0) = [x_1(0) \quad x_2(0) \quad \dots \quad x_n(0)]^{\mathrm{T}}.$$

Выразим вектор состояния через остальные переменные:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} X(0) + (sI - A)^{-1} BU(s).$$

Тогда вектор состояния $X(t)$ будет обратным преобразованием Лапласа от $X(s)$**.**

Общее решение матричного уравнения определятся через фундаментальную матрицу $\Phi(t)$:

$$\Phi(t) = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}.$$

Заметим, что для системы *n*-го порядка фундаментальная матрица имеет размерность $(n \times n)$. Обратное преобразование Лапласа для матрицы определяется путем применения обратного преобразования к каждому элементу этой матрицы.

Пример 1.6. Дана матрица системы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Требуется найти фундаментальную матрицу.

Решение.

$$sI - A = s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}.$$

Присоединенная матрица

$$adj(sI - A) = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}.$$

и вычислим определитель

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2).$$

Тогда обратная матрица будет получена путем деления присоединенной матрицы на определитель

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}.$$

Фундаментальную матрицу получим с помощью обратного преобразования Лапласа

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Программа MatLab позволяет выполнить эти преобразования более экономно

1.3. Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость

При анализе систем в пространстве состояний важное значение имеют свойства управляемости, наблюдаемости и идентифицируемости.

Система, описываемая матрицами A и B, называется полностью управляемой, если её можно перевести из любого начального состояния $X(0)$ в любое конечное $X(t)$ с помощью управления $U(t)$ за конечное время.

Управляемость системы описывается условием:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B; & AB; & A^2B; & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n.$$

Для системы с одним входом и одним выходом вводится понятие матрицы управляемости (размером $n \times n$):

$$\begin{bmatrix} B; & AB; & A^2B; & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}.$$

Если детерминант этой матрицы отличен от нуля, то система управляема.

Пример 1.5. Пусть система описывается матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Проверка на управляемость:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix};$$

$$W = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix};$$

$$\det W \neq 0$$

Определитель не равен нулю, следовательно, система полностью управляема.

Для полностью управляемой системы область управляемости совпадает со всем пространством состояний. Однако возможна ситуация, когда ранг матрицы управляемости больше нуля, но меньше порядка системы. Здесь система является частично управляемой, и можно рассматривать подпространство управляемости, которое порождается совокупностью независимых столбцов матрицы управляемости.

Решение.

$$W = \begin{bmatrix} B; & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \det(A) = 0 .$$

Запишем уравнения статики для данного объекта

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(s).$$

$$\begin{cases} x_2 + u = 0, \\ 4x_1 + 2u = 0. \end{cases}$$

Таким образом, получили множество конечных состояний, описываемое соотношением:

$$x_1 = 0{,}5x_2.$$

Все вектора, удовлетворяющие этому условию, образуют подпространство управляемости.

Пример 1.7. Непрерывный объект управления; характеризуется матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Найти подпространство управляемости.

Решение.

$$W = [B; \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix}; \quad \det(A) = 0\,.$$

Запишем уравнения статики для данного объекта

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix} u(s).$$

$$\begin{cases} x_2 + u = 0, \\ 10x_1 + 3x_2 + 5u = 0. \end{cases}$$

Получаем множество конечных состояний

$$x_1 = 0{,}5x_2.$$

Все вектора, входящие в это множество, образуют подпространство управляемости.

В общем случае подпространство управляемости образуют линейно независимые столбцы матрицы управляемости.

Система, описываемая матрицами A и C, является *наблюдаемой* тогда и только тогда, когда существует конечное время T такое, что начальное состояние $X(0)$ может быть определено в результате наблюдения выходной переменной $y(t)$, $t \in T$ при заданном управлении $u(t)$

Наблюдаемость системы описывается условием:

$$\operatorname{rank}\left[C;\quad CA;\quad CA^2;\quad \ldots\quad CA^{n-1}\right]^{\mathrm{T}\cdot} = n.$$

Для системы с одним входом и одним выходом матрица наблюдаемости (размером $n \times n$) имеет вид:

$$\left[C;\quad CA;\quad CA^2;\quad \ldots\quad CA^{n-1}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Если детерминант этой матрицы отличен от нуля, то система наблюдаема.

Пример 1.7. Непрерывный объект управления; характеризуется матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix};\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Проверка на наблюдаемость:

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 14 & 10 \end{bmatrix};\quad \det(W) \neq 0.$$

Рассмотрим далее линейную однородную систему

$$\dot{X} = AX.$$

При начальном условии: $X_0 = X(0)$.

Линейная однородная система называется полностью *идентифицируемой* по вектору состояния, если при заданном векторе начальных условий X_0 матрица параметров A может быть однозначно восстановлена за конечный отрезок времени идентификации по одной временной последовательности $X = X(t)$.

Критерий параметрической идентифицируемости напоминает критерии управляемости и наблюдаемости.

Необходимое и достаточное условие полной идентифицируемости пары (A, X_0,) определяется условием

$$\operatorname{rank}\left[X_0; \quad AX_0; \quad A^2X_0; \quad \ldots \quad A^{n-1}X_0\right] = n.$$

Для системы с одним входом и одним выходом матрица идентифицируемости имеет вид:

$$\left[X_0; \quad AX_0; \quad A^2X_0; \quad \ldots \quad A^{n-1}X_0\right].$$

Если детерминант этой матрицы отличен от нуля, то система идентифицируема.

Рассмотрим доказательство критерия идентифицируемости линейной однородной системы. Для этого рассмотрим движение системы за n шагов:

$$\begin{cases} X_1 = AX_0; \\ X_2 = AX_1 = A^2X_0; \\ \ldots \\ X_n = A^nX_0. \end{cases}$$

В матричной форме записи:

$$\left[X_1; \quad X_2; \quad \ldots \quad X_n\right] = A\left[X_0; \quad AX_0; \quad A^2X_0; \quad \ldots \quad A^{n-1}X_0\right].$$

Введем обозначение для матрицы идентифицируемости

$$F = \left[X_0; \quad AX_0; \quad A^2X_0; \quad \ldots \quad A^{n-1}X_0\right].$$

Тогда

$$A = \left[X_1; \quad X_2; \quad \ldots \quad X_n\right]F^{-1}.$$

Решение существует, если матрица F невырожденная, т. е. ее определитель не равен нулю.

Пример 1.8. Заданы матрица объекта A и начальное состояние X_0:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -14 & -9 \end{bmatrix}; \qquad X_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Требуется определить, идентифицируема ли эта система?

Решение.

$$F = \left[X_0; \quad AX_0\right] = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}.$$

Определитель F не равен нулю, следовательно, система идентифицируема.

1.3. Каноническая форма управляемости

Задача выбора переменных состояния в общем случае неоднозначна, однако для скалярных систем существуют стандартные алгоритмы перехода от дифференциального уравнения, описывающего систему, к уравнениям состояния.

Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом (рис. 1.7).

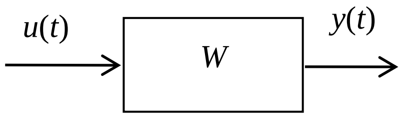


Рис. 1.7. Одномерная система

Связь между входом и выходом описывается соотношением

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$

$$= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \ldots b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t).$$

Обозначая через s оператор дифференцирования:

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right) y(t) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots b_1 s + b_0\right) u(t).$$

Введем обозначения:

$$\tilde{A} = \sum_{i=0}^{n} a_i s^i = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0,$$

$$\tilde{B} = \sum_{j=0}^{m} b_j s^j = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0,$$

тогда можно записать:

$$\tilde{A} y(t) = \tilde{B} u(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \tilde{A}^{-1} \tilde{B} u(t).$$

Вводя обозначение:

$$x(t) = \widetilde{A}^{-1}u(t),$$

имеем:

$$\begin{cases} \widetilde{A}x(t) = u(t), \\ \widetilde{B}x(t) = y(t). \end{cases}$$

Пусть переменные состояния определяются соотношением:

$$x_{i+1} = \frac{d}{dt}x_i$$

Тогда можно записать:

$$\begin{cases} x_1(t) = x(t), \\ x_2(t) = \dot{x}_1(t), \\ x_3(t) = \dot{x}_2(t), \\ \quad \ldots \\ x_n(t) = \dot{x}_{n-1}(t), \end{cases}$$

Рассмотрим еще раз уравнение

$$\widetilde{A}x(t) = u(t)$$

в развернутом виде:

$$\left(a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0\right)x(t) = u(t) \;\; \Rightarrow$$
$$a_n s^n x(t) = u(t) - a_{n-1}s^{n-1}x(t) - a_{n-2}s^{n-2}x(t) - \ldots - a_1 s x(t) - a_0 x(t).$$

откуда следует

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \frac{1}{a_n}u(t) - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n(t) - \frac{a_{n-2}}{a_n}x_{n-1}(t) - \ldots - \frac{a_1}{a_n}x_2(t) - \frac{a_0}{a_n}x_1(t),$$

окончательно в матричной форме получается:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & -\dfrac{a_2}{a_n} & \dots & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dfrac{1}{a_n} \end{bmatrix} u(t)$$

Такое представление уравнений состояния называется канонической формой Фробениуса, или *канонической формой управляемости*.

Рассмотрим еще раз уравнение

$$\tilde{B}x(t) = y(t).$$

В развернутом виде:

$$\left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots b_1 s + b_0\right) x(t) = y(t).$$

Поскольку $m \le n$ (условие физической реализуемости), можно положить $m = n$ при равенстве нулю коэффициентов b_i с индексами $i > m$.

$$\left(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots b_1 s + b_0\right) x(t) = y(t) \Rightarrow$$
$$b_n s^n x(t) + b_{n-1} s^{n-1} x(t) + \dots + b_1 s x(t) + b_0 x(t) = y(t).$$

Тогда при использовании введенных переменных состояния следует:

$$b_n s^n x(t) = b_n \left(\frac{1}{a_n} u(t) - \frac{a_{n-1}}{a_n} x_n(t) - \frac{a_{n-2}}{a_n} x_{n-1}(t) - \dots - \frac{a_1}{a_n} x_2(t) - \frac{a_0}{a_n} x_1(t) \right),$$

и, окончательно,

$$y(t) = (b_0 - \frac{a_0}{a_n} b_n) x_1(t) + (b_1 - \frac{a_1}{a_n} b_n) x_2(t) + \ldots (b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} b_n) x_n(t) + \frac{b_n}{a_n} u(t).$$

Таким образом, в канонической форме управляемости уравнения состояния имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = AX(t) + Bu(t), \\ y(t) = CX(t) + ku(t), \end{cases}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\dfrac{a_0}{a_n} & -\dfrac{a_1}{a_n} & -\dfrac{a_2}{a_n} & \ldots & -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \dfrac{1}{a_n} \end{bmatrix},$$

$$C^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} b_0 - \dfrac{a_0}{a_n} b_n \\ b_1 - \dfrac{a_1}{a_n} b_n \\ b_2 - \dfrac{a_2}{a_n} b_n \\ \ldots \\ b_{n-1} - \dfrac{a_{n-1}}{a_n} b_n \end{bmatrix}, \qquad k = \frac{b_n}{a_n}.$$

Пример 1.8. Пусть объект управления описывается ПФ:

$$W(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{2s+3}{s^2+4s+1},$$

тогда

$$y(s)(s^2+4s+1)=u(s)(2s+3)$$

и, очевидно,

$$b_2=0,\qquad b_1=2,\qquad b_0=3.$$
$$a_2=1,\qquad a_1=4,\qquad a_0=1.$$

Уравнения состояния в канонической форме управляемости приобретают вид:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t),$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}.$$

Пример 1.9. Апериодическое звено 1-го порядка:

$$W(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{K}{Ts+1}.$$

Здесь

$$y(s)(Ts+1)=u(s)K,$$

$$b_0=K,\quad a_1=T,\quad a_0=1.$$

Получается система уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=-\dfrac{a_0}{a_1}x+\dfrac{b_0}{a_1}u=-\dfrac{1}{T}x+\dfrac{1}{T}u,\\ y=Kx.\end{cases}$$

Этой системе соответствует система, приведенная на рис. 1.8.

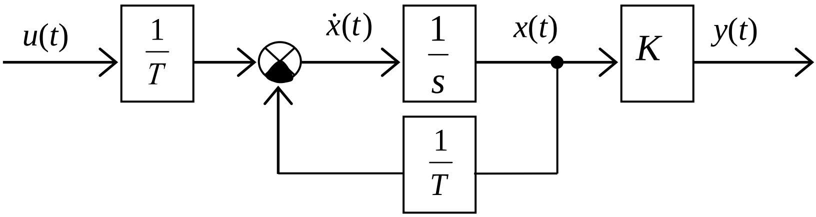


Рис. 1.8. Апериодическое звено 1-го порядка

Пример 1.10. Запишем уравнения состояния для системы, приведенной на рис. 1.9.

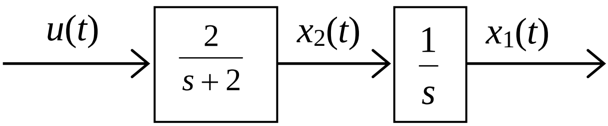


Рис. 1.9. Пример динамической системы

Передаточная функция системы:

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{2}{(2s+1)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{2}{2s^2+s},$$

$$y(s)(2s^2+s) = 2u(s).$$

$$b_0=2, \quad a_2=2, \quad a_1=1, \quad a_0=0.$$

Уравнения состояния:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Пример 1.11. Пусть задана передаточная функция

$$W(p) = \frac{p^3 + 12p^2 + 5p + 1}{2p^3 + 10p^2 + 2p + 1},$$

здесь

$$b_3 = 1, \quad b_2 = 12, \quad b_1 = 5, \quad b_0 = 1,$$

$$a_3, = 2, \quad a_2, = 10, \quad a_1 = 2, \quad a_0 = 1.$$

Используя каноническую форму управляемости, получаем:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.5 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0.5 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + 0.5u(t).$$

Кроме канонической формы управляемости существует *каноническая форма наблюдаемости*, в которой наиболее простой вид имеет матрица C.

В канонической форме наблюдаемости уравнения состояния имеют вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{n-2}}{a_n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} b_n \\ b_{n-2} - \frac{a_{n-2}}{a_n} b_n \\ \dots \\ b_0 - \frac{a_0}{a_n} b_n \end{bmatrix} u(t).$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} x(t) + \frac{b_n}{a_n} u(t).$$

Таким образом, описанный алгоритм получения канонической формы управляемости скалярной системы позволяет легко выполнять переход от описания системы, заданного ПФ, к описанию в пространстве состояний.

Поскольку выбор переменных состояния неоднозначен, одной и той же ПФ могут соответствовать разные модели в пространстве состояний, но при обратном переходе всем этим моделям соответствует одна и та же ПФ.

Иногда ПФ называют внешней моделью системы, а представление в пространстве состояний – внутренней моделью.

1.4. Матричные передаточные функции

Скалярные системы управления характеризуются внешними и внутренними характеристиками. Внешние характеристики однозначны. Это дифференциальные уравнения и соответствующие им ПФ. Количество внутренних характеристик (моделей состояния) неограниченно.

При исследовании систем управления может возникать задача определения ПФ по уравнению состояния.

Рассмотрим уравнение состояния:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \\ Y(t) = CX(t). \end{cases}$$

Преобразуем по Лапласу при нулевых начальных условиях первое уравнение

$$sX(s) = AX(s) + BU(s).$$

Это уравнение можно привести к виду

$$(sI - A)X(s) = BU(s).$$

Таким образом:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s).$$

Преобразуем по Лапласу второе уравнение

$$Y(s) = CX(s) = C(sI - A)^{-1} BU(s) = W(s)U(s).$$

Если входной и выходной сигнал являются скалярными величинами, то передаточная функция ***разомкнутой*** системы выражается через матрицы *A*, *B*, *C*.

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B.$$

Обратная матрица существует для квадратной матрицы, определитель которой не равен нулю.

Рассмотрим задачу нахождения обратной матрицы. Здесь используется формула:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A_{+}^{T}.$$

Где $|A|$ - определитель матрицы, A_{+}^{T} - транспонированная матрица алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы *A*.

Пример 1.11. Нахождение обратной матрицы для матрицы *A*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad |A| = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Алгебраическим дополнением называется число:

$$A_{\mathrm{ij}} = (-1)^{\mathrm{i+j}} M_{\mathrm{ij}},$$

где i и j – номер строки и столбца, M_{ij} – дополнительный минор элемента с индексами i и j.

Матрица миноров

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{+} = (-1)^{\mathrm{i+j}} M_{\mathrm{ij}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_{+}^{T} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Проверка

$$A \cdot A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4-6 & -2+2 \\ 12-12 & -6+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.13. Найти ПФ для системы, заданной матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$W(s) = C(sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим обратную матрицу:

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}}{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix}$$

Таким образом

$$W(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{s^2+3s+2} & \dfrac{1}{s^2+3s+2} \\ \dfrac{-2}{s^2+3s+2} & \dfrac{s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2+3s+2}.$$

Пример 1.14. Рассмотрим уравнения в пространстве состояний и передаточную функцию *RLC* – цепи (рис. 1.10).

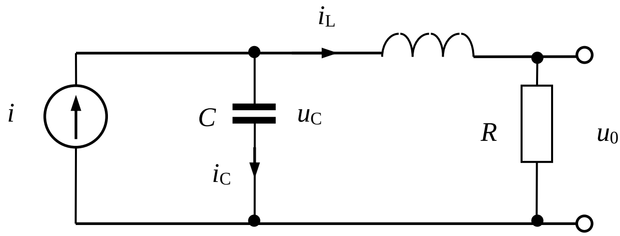


Рис. 1.10. *RLC* - цепь

Входной переменной здесь является ток i источника тока, а выходной переменной u_0 – напряжение на сопротивлении.

Здесь можно использовать следующие переменные состояния:

$$\begin{cases} i_C = C\dfrac{du_c}{dt} = i - i_L, \\ u_C = L\dfrac{di_L}{dt} + Ri_L. \end{cases}$$

$$u_0 = Ri_L.$$

Введем переменные состояния:

$$\begin{cases} x_1 = u_C, \\ x_2 = i_L. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -\dfrac{1}{C}x_2 + \dfrac{1}{C}i(t), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{1}{L}x_1 - \dfrac{R}{L}x_2. \end{cases}$$

Уравнение выхода:

$$y(t) = Rx_2.$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i(t).$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Выполним переход от уравнений состояния к ПФ:

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s+\frac{R}{L} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+\frac{R}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s \end{bmatrix}}{s^2 + s\frac{R}{L} - \frac{1}{LC}}.$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{I(s)} = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} s+\frac{R}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s \end{bmatrix}}{s^2 + s\frac{R}{L} - \frac{1}{LC}} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{R/LC}{s^2 + s\frac{R}{L} - \frac{1}{LC}}.$$

Рассмотрим далее матричную ПФ для системы, у которой матрица D ненулевая:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \\ Y(t) = CX(t) + DU(t). \end{cases}$$

Здесь

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s), \\ Y(s) = CX(s) + DU(s). \end{cases}$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s).$$

Таким образом:

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s).$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s).$$

Окончательно

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D.$$

Рассмотрим матричную ПФ замкнутой системы (рис. 1.11).

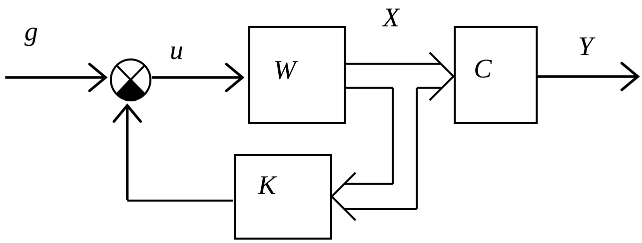


Рис. 1.11. Структурная схема системы с обратной связью

$$u(s) = g(s) - KX(s).$$

$$(sI - A)X(s) = B(g(s) - KX(s)).$$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} B(g(s) - KX(s)).$$

$$(sI - A + BK)X(s) = Bg(s),$$

$$X(s) = \frac{Bg(s)}{sI - A + BK}.$$

Таким образом

$$Y(s) = CX(s),$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{g(s)} = \frac{CB}{sI - A + BK}.$$

1.5. Уравнения состояния и сигнальный граф

С помощью сигнальных графов и формулы Мейсона можно переходить от уравнений состояния к ПФ и наоборот.

Пусть $X(s)$ и $Y(s)$ – входная и выходная переменные системы. Тогда для вычисления ПФ системы управления по ее графу можно воспользоваться формулой Мейсона:

$$W(s)=\frac{X(s)}{Y(s)}=\frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{N}P_i(s)\Delta_i(s)$$

где $P_i(s)$ – передаточная функция i-го отдельного прямого пути от $X(s)$ до $Y(s)$, вычисленная как произведение передаточных функций дуг, входящих в этот путь;

$\Delta(s)$ – определитель графа.

$$\Delta(s)=1-\sum_{j}L_j(s)+\sum_{j,k}L_j(s)L_k(s)-\sum_{j,k,m}L_j(s)L_k(s)L_m(s)+\ldots$$

где $L_j(s)$ – ПФ j-го замкнутого контура, равная произведению ПФ дуг, входящих в этот контур;

$L_j(s)L_k(s)$ – произведение ПФ пары (j-го и k-го) замкнутых контуров, не касающихся ни дугами, ни вершинами, суммирование осуществляется по всем парам не касающихся контуров;

$L_j(s)L_k(s)L_m(s)$ – произведение тройки (j-го, k-го и m-го) не касающихся контуров, суммирование производится по всем тройкам не касающихся контуров.

$\Delta_i(s)$ – дополнительный множитель для i– го пути равен определителю графа, в котором приравнены нулю коэффициенты передачи контуров, касающихся этого пути.

Пример 1.15. Рассмотрим еще раз уравнения состояния *RLC* – цепи:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-\dfrac{1}{C}x_2+\dfrac{1}{C}i(t),\\ \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{1}{L}x_1-\dfrac{R}{L}x_2.\end{cases}$$

$$y(t)=Rx_2.$$

Им соответствует сигнальный граф, показанный на рис. 1.12.

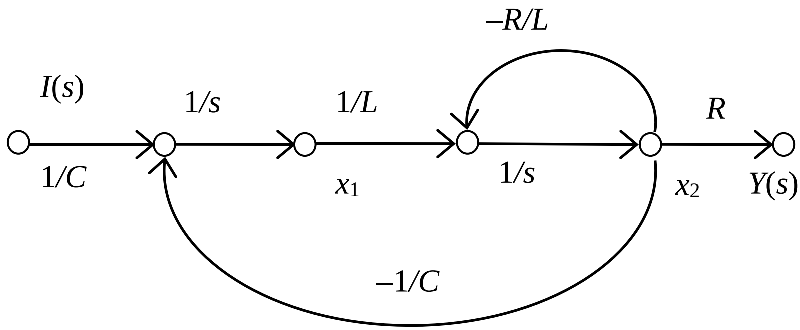


Рис. 1.12. Сигнальный граф для уравнений состояния

Граф содержит один путь и два касающихся контура:

$$P = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{s} R;$$

$$L_1 = -\frac{R}{L} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{R}{sL}; \qquad L_2 = -\frac{1}{C}\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{s} = -\frac{1}{s^2 LC}.$$

По формуле Мейсона ПФ оказывается равна:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{I(s)} = \frac{\dfrac{R}{s^2 LC}}{1 - \left(-\dfrac{R}{Ls} - \dfrac{1}{s^2 LC} \right)} = \frac{R/(LC)}{s^2 + \dfrac{Rs}{L} + \dfrac{1}{LC}}.$$

Рассмотрим далее ПФ вида

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_4 s^{-4}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_3 s^{-3} + a_4 s^{-4}}.$$

Если считать, что это формула Мейсона, то числитель соответствует единственному прямому пути в графе, а знаменатель является определителем графа, содержащего четыре касающихся контура. Таким образом, получаем граф, представленный на рис. 1.13.

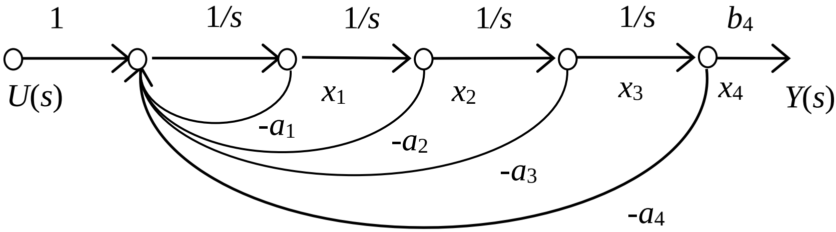


Рис. 1.13. Сигнальный граф для передаточной функции

Рассмотрим теперь ПФ более общего вида

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_1s^{-1}+b_2s^{-2}+b_3s^{-3}+b_4s^{-4}}{1+a_4s^{-1}+a_3s^{-2}+a_2s^{-3}+a_1s^{-4}}.$$

Знаменатель здесь такой же как в предыдущем примере, а числитель можно рассматривать как сумму 4-х прямых путей. Получаем граф, показанный на рис. 1.14.

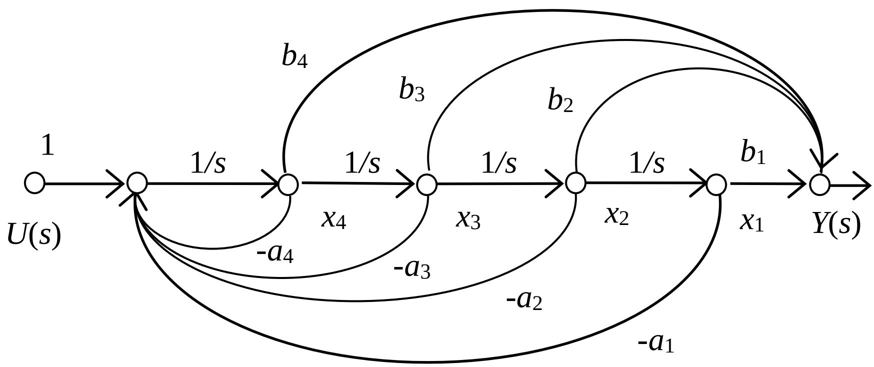


Рис. 1.14. Сигнальный граф для ПФ общего вида

Для графа на рис. 1.14 можно записать

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 - a_4 x_4 + u(t). \end{cases}$$

$$y(t) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4.$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

1.6. Преобразование подобия

Для одной и той же системы можно предложить неограниченное количество троек матриц A, B, C, каждой из которых будет соответствовать модель в переменных состояния. Выбор той или иной модели зависит от конкретных обстоятельств:

Преобразованиями подобия называются такие преобразования, которые изменяют внутреннюю структуру системы (модель состояния), но не изменяют соотношение между входом и выходом (передаточную функцию системы).

Для системы с вектором состояния X рассмотрим невырожденное линейное преобразование

$$Z = PX \quad \Rightarrow \quad X = P^{-1}Z.$$

где Z – вектор состояния системы в новом базисе, P – произвольная невырожденная матрица (определитель не равен нулю).

Для перехода к новому базису подставим новый вектор состояния

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = PAP^{-1}Z(t) + PBU(t), \\ Y(t) = CP^{-1}Z(t). \end{cases} \qquad \text{или}$$

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = A_Z Z(t) + B_Z U(t), \\ Y(t) = C_Z Z(t). \end{cases}$$

где

$$A_Z = PAP^{-1}, \quad B_Z = PB, \quad C_Z = CP^{-1}.$$

Если в системе имеется ненулевая матрица D, то $D_z = D$.

Пример 1.15. Пусть дана система, матрицы A, B и C которой имеют вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Запишем уравнения состояния

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Этим уравнениям соответствует структурная схема, приведенная на рис.1.15.

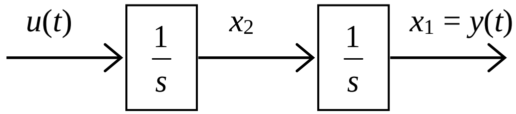


Рис. 1.15. Система из двух интеграторов

Очевидно, что для этой схемы

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2}.$$

Рассмотрим невырожденное преобразование координат, заданное матрицей P:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Преобразованные матрицы в новой системе координат имеют вид:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$A_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_Z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_Z = CP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) = \begin{bmatrix} z_2 + u(t) \\ u(t) \end{bmatrix},$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = z_1 - z_2.$$

Полученным уравнениям состояния соответствует структура, показанная на рис. 1.16.

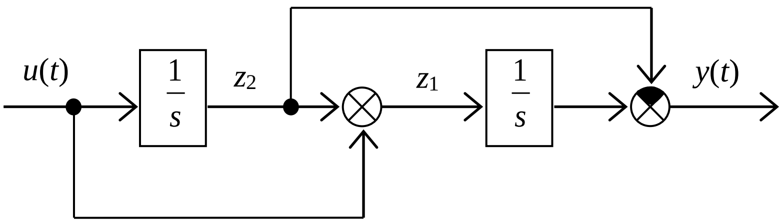


Рис. 1.16. Преобразованная система из двух интеграторов

Для проверки построим передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = C(sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2}.$$

Таким образом, разным представлениям в пространстве состояний соответствует одна и та же ПФ.

Можно показать в общем виде, что преобразования подобия не меняют ПФ объекта.

$$\begin{aligned} \frac{y(s)}{u(s)} &= C_Z \left(sI - A_z\right)^{-1} B_Z = \\ &= CP^{-1}(sI - PAP^{-1})^{-1} PB = \\ &= CP^{-1}(PsIP^{-1} - PAP^{-1})^{-1} PB = \\ &= CP^{-1}P(sI - A)^{-1} P^{-1} PB = C(sI - A)^{-1} B. \end{aligned}$$

Соответственно, можно сделать вывод, что при преобразованиях подобия не меняются и корни характеристического уравнения.

Можно также показать, что преобразования подобия не изменяют такие свойства системы как управляемость и наблюдаемость.

Например, рассмотрим преобразование матрицы управляемости.

$$A_Z = PAP^{-1}, \quad B_Z = PB.$$

$$\begin{aligned} W_Z &= \left[PB \quad \left(PAP^{-1}\right)PB \quad \left(PAP^{-1}\right)^2 PB \quad \dots \right] = \\ &= \left[PB \quad \left(PAP^{-1}\right)PB \quad \left(PAP^{-1}\right)PAP^{-1}PB \quad \dots \right] = \\ &= \left[PB \quad PAB \quad PA^2B \quad \dots \right] = P\left[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \right] = PW. \end{aligned}$$

1.7. Получение канонической управляемой формы

Рассмотрим линейную динамическую систему со скалярным входом:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t).$$

Пусть эта система является полностью управляемой:

$$W = \left[B; \quad AB; \quad A^2B; \quad \dots \quad A^{n-1}B\right]; \qquad |W| \neq 0.$$

Характеристический полином имеет вид

$$|A - \lambda I| = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0.$$

Рассмотрим матрицу T, составленную из коэффициентов характеристического полинома

$$T = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

С помощью неособого линейного преобразования

$$X = WTZ.$$

можно записать уравнения состояния в канонической форме управляемости

$$\dot{Z}(t) = A_Z Z(t) + B_Z u(t).$$

Для нахождения матриц A_z и B_z выполним подстановку

$$WT\dot{Z}(t) = AWTZ(t) + Bu(t),$$
$$\dot{Z}(t) = T^{-1}W^{-1}AWTZ(t) + T^{-1}W^{-1}Bu(t).$$

$$A_Z = T^{-1}W^{-1}AWT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$B_Z = T^{-1}W^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.16. Получить каноническую форму управляемости для системы, заданной матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \qquad .$$

Решение. Матрица управляемости

$$W = [B; \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}; \qquad W^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}. \qquad .$$

Определитель W = 1, следовательно, система является полностью управляемой.

$$|A - \lambda I| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2.$$

Таким образом, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = -5$, $\alpha_0 = -2$.

$$T = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$A_Z = T^{-1} W^{-1} AWT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$B_Z = T^{-1} W^{-1} B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, если система управляемая, то для нее всегда можно получить каноническую форму управляемости.

1.8. Диагональная каноническая форма

Кроме канонических форм управляемости и наблюдаемости большое значение имеет так называемая диагональная (жорданова) форма, которая строится на основании принципа суперпозиции линейных систем.

Рассмотрим передаточную функцию объекта

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j s^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i s^i}.$$

Предположим для простоты, что характеристическое уравнение не имеет кратных корней. Для выходной переменной можно записать:

$$Y(s) = W(s)U(s) + \frac{X(0)}{A(s)},$$

Где $X(0)$ – линейная комбинация начальных условий, $Y(s)$ и $U(s)$ – преобразование Лапласа выходной и входной переменной.

Передаточная функция может быть разложена на простейшие дроби, т.е. можно записать:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{n} h_i x_i(s),$$

$$x_i(s) = \frac{1}{s-\lambda_i} U(s) + \frac{x_i(0)}{s-\lambda_i}.$$

Каждая компонента x_i описывает реакцию системы с ПФ равной

$$s_i(s) = \frac{1}{s-\lambda_i},$$

на входной сигнал $U(s)$, а это означает, что $x_i(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i(t)\dot{x}_i(t) + U(t).$$

Таким образом, уравнения состояния системы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = FX(t) + gu(t), \\ Y(t) = HX(t) \end{cases}$$

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad H = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Пример. Получить диагональную каноническую форму для объекта, заданного ПФ:

$$W(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3},$$

Характеристическое уравнение имеет два корня: -1 и -3, поэтому можно записать:

$$W(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+3} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}.$$

Откуда следует

$$s + 2 = A(s+3) + B(s+1) = As + Bs + 3A + B.$$

Приравнивая значения при одинаковых степенях s, получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 3A + B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0{,}5 \\ B = 0{,}5 \end{cases}.$$

Таким образом

$$W(s) = \frac{0{,}5}{s+1} + \frac{0{,}5}{s+3}.$$

2. МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

2.1. Собственные значения и собственные векторы

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$\dot{U}(t) = AU(t).$$

Решение можно представить в виде

$$U(t) = e^{\lambda t} X.$$

Тогда

$$\lambda e^{\lambda t} X = A e^{\lambda t} X,$$
$$\lambda X = AX,$$
$$(A - \lambda I) X = 0.$$

Для построения решения, кроме тривиального $X = 0$, необходимо, чтобы матрица $A - \lambda I$ была вырожденной, т.е.

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Иными словами требуется узнать: если A сдвигается на различные кратные единичные матрицы, то какой сдвиг делает ее вырожденной?

Значения параметра λ, для которого существуют нетривиальные решения $AX = \lambda X$, называются собственными значениями (числами) матрицы A. Соответствующие им векторные решения называют собственными векторами матрицы A.

Рассмотрим определитель

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Разложение этого определителя дает характеристическое уравнение системы:

$$(-\lambda)^n + b_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + ... + b_1(-\lambda) + b_0 = 0,$$

из которого могут быть найдены все собственные значения λ_i. Затем для каждого собственного значения может быть найден собственный вектор.

Пример 2.1. Дана матрица *A*, требуется найти ее собственные значения и векторы.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-3-\lambda)+10 =$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Таким образом, имеются два собственных значения матрицы $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 2$.

Первый собственный вектор:

$$\left(A-\lambda_1 I\right)X = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} X = 0.$$

Решением является любой вектор, кратный $X_1 = [1\ 1]^{\mathrm{T}}$.

Аналогично для 2-го собственного числа

$$\left(A-\lambda_2 I\right)X = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} X = 0.$$

Решением является любой вектор, кратный $X_2 = [5\ 2]^T$.

Для устранения неоднозначности значения собственных векторов можно нормализовать.

Линейное и однородное уравнение допускает суперпозицию решений

$$U(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} X_2,$$

Где константы c_1 и c_2 определяются начальными условиями. Допустим, что заданы начальные условия:

$$U_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix},$$

Тогда при $t = 0$

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 = U_0,$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$c_1 = 3; \qquad c_2 = 1.$$

Таким образом, свободное движение системы, динамика которой описывается матрицей A при начальных условиях U_0 имеет решение

$$U(t) = 3e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{2t} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ или}$$

$$u_1(t) = 3e^{-t} + 5e^{2t},$$

$$u_2(t) = 3e^{-t} + 2e^{2t}.$$

После отыскания собственных векторов система уравнений распадается на «гармоники», которыми являются независимые друг от друга собственные векторы. Можно наблюдать за поведением каждого из собственных векторов в отдельности, а затем комбинировать эти гармоники для отыскания решения.

Пример 2.2. Дана матрица коэффициентов системы A и известны ее собственные вектора X_1, X_2 , а а также начальное условие X_0.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}, \quad X_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Требуется определить свободное движение системы.

Решение. Характеристическое уравнение

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -10 & -7-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(-7-\lambda) + 10 =$$

$$= \lambda^2 + 7\lambda + 10 = (\lambda + 5)(\lambda + 2).$$

Имеет два собственных значения: –5 и –2.

Будем искать решение в виде:

$$U(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} X_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} X_2.$$

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 = X_0,$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$c_1 = \frac{2}{3}; \qquad c_2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, свободное движение системы описывается уравнением

$$X(t) = \frac{2}{3}e^{-5t}\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}e^{-2t}\begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Совокупность собственных значений α_i и собственных векторов X_i представляет собой *модальные характеристики системы*. Модой называется каждое произведение вида

$$u_i(t) = e^{\alpha_i t} X_i.$$

Модальные характеристики соответствуют свободной составляющей движения системы

$$\dot{x}(t) = Ax(t).$$

Рассмотрим диагональную форму матрицы (жорданову форму). Пусть дана матрица *A*, имеющая полный ранг *n*, и матрица собственных значений

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

И матрица, составленная из собственных вектор-столбцов матрицы A:

$$S = \left[X_1; \quad X_2; \quad \dots \quad X_n\right].$$

Тогда справедливо

$$S^{-1}AS = \Lambda.$$

Доказательство:

$$AS = A\left[X_1; \quad X_2; \quad \dots \quad X_n\right] = [\lambda_1 X_1; \quad \lambda_2 X_2; \quad \dots \quad \lambda_n X_n] = S\Lambda.$$

Матрица S обратима, поскольку имеет полный ранг.
Пример 2.3. Диагонализировать матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

Решение

$$\Lambda = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -0.67 & 1.67 \\ 0.33 & -0.33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Пример 2.4. Обратная задача:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} -0.67 & 1.67 \\ 0.33 & -0.33 \end{bmatrix}.$$

Требуется найти матрицу A.

$$A = S\Lambda S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.67 & 1.67 \\ 0.33 & -0.33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Пример 2.5. Приведение многомерного объекта к диагональной канонической форме.

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 3 \\ -0.25 & -2.5 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad C = [3 \quad 2].$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0.5-\lambda & 3 \\ -0.25 & -2.5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получаем характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_1 = -1; \qquad \lambda_2 = -2.$$

Первый собственный вектор:

$$(A-\lambda_1 I)X_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 3 \\ -0.25 & -1.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x_1 & 3x_2 \\ -0.25x_1 & -1.5x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично

$$(A-\lambda_2 I)X_2 = \begin{bmatrix} 1.5 & 3 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.5x_1 & 3x_2 \\ -0.25x_1 & -0.5x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица преобразования координат:

$$T = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} -2.5 & -0.5 \\ 0.25 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

$$z = TX; \qquad A_z = T^{-1}AT; \qquad B_z = T^{-1}B; \qquad C_z = CT^{-1}.$$

$$A_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \qquad B_z = \begin{bmatrix} -0.25 & -1 \\ 0.25 & 3 \end{bmatrix}; \qquad C_z = [-0.25 \quad 1.5].$$

2.2. Модальный синтез

Модальный синтез предполагает формирование таких обратных связей по состоянию, при которых обеспечивается заданное расположение полюсов замкнутой системы.

Рассмотрим уравнения состояния замкнутой системы

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + B\big(-KX(t) + g(t)\big) \\ y(t) = CX(t) \end{cases}.$$

На рис. 2.1 приведена структура, соответствующая этим уравнениям.

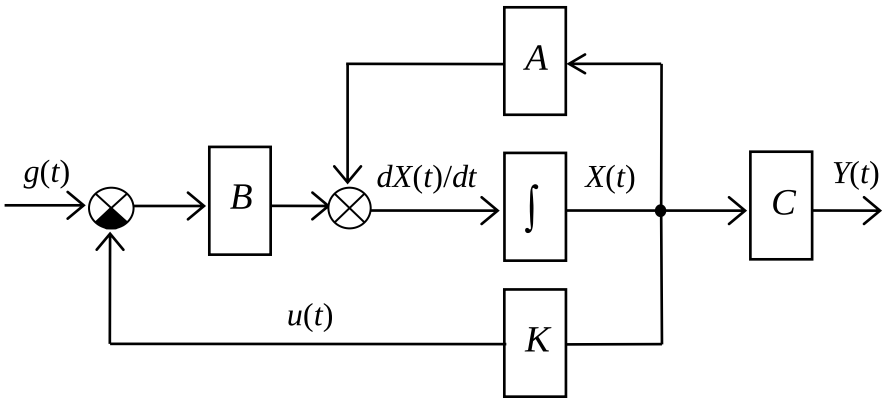


Рис. 2.1. Система с обратной связью по состоянию

Свободное движение системы (при $g(t) = 0$) описывается выражением:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \\ u(t) = -KX(t). \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{X}(t) = (A - BK)X(t).$$

где K – вектор коэффициентов обратной связи.

Основная теорема модального управления гласит, что если линейная динамическая система является управляемой, то линейная обратная связь может быть выбрана таким образом, что матрица (A – BK) будет иметь желаемый спектр (желаемое расположение полюсов замкнутой системы).

При доказательстве этой теоремы используется каноническая форма управляемости. Рассмотрим одномерную систему с вектором обратной связи

$$K = [k_1 \quad k_2, \quad ..., \quad k_n].$$

Заданному спектру соответствует характеристический полином замкнутой системы

$$|\lambda I - (A - BK)| = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \beta_1\lambda + \beta_0.$$

Этому полиному можно поставить в соответствие каноническую форму матрицы замкнутой системы

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & ... & -\beta_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Рассматривая канонические формы матриц A и B исходной системы, можно записать:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & ... & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad ,..., \quad k_n] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & ... & -\beta_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Откуда следует:

$$-\alpha_i - k_{i+1} = -\beta_i, \qquad \forall i = \overline{0, n-1}.$$

$$k_{i+1} = \beta_i - \alpha_i.$$

Последняя формула справедлива при любых параметрах, поэтому теорему можно считать доказанной.

Пример 2.6. Модальный синтез для системы со скалярным входом.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости

$$W = [B; \quad AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \qquad |W| = 2. \qquad .$$

Определитель не равен нулю, следовательно, система является полностью управляемой.

Характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0$$

Коэффициенты уравнения $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = -3$.

Оба полюса положительные (λ_1=2, λ_2=1), следовательно, система является неустойчивой.

Зададим желаемые полюса замкнутой системы:

$$\lambda_1^* = -1, \lambda_2^* = -3.$$

Характеристическое уравнение желаемой замкнутой системы имеет вид:

$$(\lambda + 1)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

Коэффициенты уравнения $\beta_0 = 3$, $\beta_1 = 4$.

Таким образом, коэффициенты обратной связи:

$$k_1 = \beta_0 - \alpha_0 = 3 - 2 = 1,$$

$$k_2 = \beta_1 - \alpha_1 = 4 - (-3) = 7.$$

Уравнения состояния:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Этим уравнениям соответствует структурная схема, показанная на рис. 2.2.

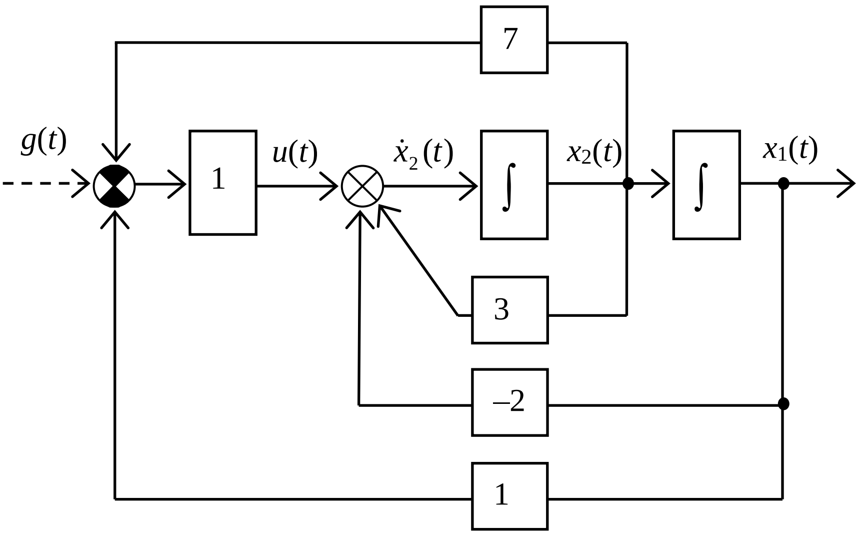


Рис. 2.2. Пример регулятора по состоянию

2.3. Формула Аккермана

Таким образом, для решения задачи модального управления можно перевести модель произвольной структуры в каноническую форму управляемости, после чего с помощью уравнения получить коэффициенты обратной связи. Однако в реальной системе желательно использовать переменные состояния, отражающие физическую сторону протекающих процессов, а не абстрактные переменные состояния канонической формы, которые могут быть недоступны для измерения. Аккерманом была предложена формула, позволяющая с помощью преобразования подобия перевести модель произвольной структуры в каноническую форму управляемости, определить искомые коэффициенты *K*, а затем пересчитать полученное решение применительно к исходной структуре.

Если задан желаемый характеристический полином замкнутой системы

$$q(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n,$$

то формула Аккермана имеет вид:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \ldots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} \cdot$$
$$\cdot \begin{bmatrix} A^n & + a_1 A^{n-1} & \ldots & + a_{n-1} A & + a_n I \end{bmatrix}.$$

Пример 2.7. Пусть система описывается матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Желаемые полюса заданы вектором

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Требуется найти коэффициенты обратной связи.

Характеристический полином желаемой замкнутой системы имеет вид:

$$q(s) = (s+1)(s+3) = s^2 + 4s + 3,$$

т. е. a_2=3; a_1=4.

Формула Аккермана:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^2 + 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Этот результат совпадает с полученным ранее.

Пример 2.8. Дана передаточная функция объекта:

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{10}{16s^2 + 1}.$$

Найти коэффициенты обратной связи, обеспечивающие заданные значения корней характеристического полинома замкнутой системы:

$$\lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2.$$

Запишем уравнения в канонической форме управляемости

$$y(s)(16s^2 + 1) = 10g(s).$$

Здесь, очевидно,

$$b_2=0, \quad b_1=0, \quad b_0=10.$$
$$a_2=16, a_1=0, \quad a_0=1.$$

Тогда

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{16} & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{16} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение желаемой замкнутой системы имеет вид:

$$\left(\lambda+1\right)\left(\lambda+2\right)=\lambda^2+3\lambda+2=0$$

Коэффициенты уравнения $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = 3$.

Записываем формулу Аккермана

$$K=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 16\\ 16 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}-\dfrac{1}{16} & 0\\ 0 & -\dfrac{1}{16}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3\\ -\dfrac{3}{16} & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}31 & 48\end{bmatrix}.$$

2.4. Устранение статической ошибки

Следует заметить, что при модальном синтезе ставится задача обеспечения заданной формы переходного процесса, но при этом не обеспечивается автоматически желаемый уровень выходного сигнала. Эта проблема решается путем введения масштабирующего коэффициента для входного воздействия.

Рассмотрим разомкнутую систему (рис. 1.3). При подаче на вход единичного скачка

$$\begin{cases}\dot{X}_{ss}=AX_{ss}+B,\\ y_{ss}=CX_{ss}.\end{cases}$$

где X_{ss} – установившееся состояние; y_{ss} – установившееся значение выхода.

По окончании переходного процесса выполняется условие:

$$\dot{X}_{ss}=0,$$

Таким образом

$$0=AX_{ss}+B\ \Rightarrow\ X_{ss}=-A^{-1}B.$$

Следовательно, установившаяся ошибка равна

$$e_{ss}=1-y_{ss}=1-CX_{ss}=1+CA^{-1}B.$$

Аналогично для системы, замкнутой обратной связью по состоянию при единичном скачке:

$$\begin{cases} 0 = (A - BK)X_{ss} + B, \\ y_{ss} = CX_{ss}. \end{cases}$$

$$y_{ss} = -C(A - BK)^{-1} B.$$

Для устранения статической ошибки надо умножить входной сигнал на масштабирующий коэффициент:

$$k_m = \frac{1}{y_{ss}}.$$

Пример 2.9. Рассмотрим систему, заданную матрицами (пример 2.6)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Для этой системы

$$y_{ss} = -C(A - BK)^{-1} B = 0{,}3333.$$

$$k_m = \frac{1}{y_{ss}} = 3.$$

В общем случае для устранения статической ошибки в структуру регулятора может быть введена *внутренняя модель эталонного сигнала*. Это позволяет асимптотически отслеживать изменение входного сигнала с нулевой установившейся ошибкой.

В качестве эталонного входного сигнала могут выступать ступенчатый, линейный или синусоидальный сигнал.

Рассмотрим объект типа *SISO* (*Single Input Single Output*)

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + Bu(t), \\ y(t) = CX(t). \end{cases}$$

Эталонный входной сигнал генерируется линейной системой, описываемой такого же вида системой уравнений при нулевых начальных условиях:

$$\begin{cases} \dot{X}_r(t) = A_r X_r(t), \\ r(t) = d_r X_r(t). \end{cases}$$

Эта система соответствует полиному

$$r^n = a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} + ... + a_1 \dot{r} + a_0 r.$$

Рассмотрим ступенчатый входной сигнал. Для этого сигнала dr/dt=0, и ошибка воспроизведения

$$e(t) = y(t) - r,$$
$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) = C\dot{X}(t).$$

Также можно записать

$$\ddot{X} = A\dot{X} + B\dot{u}.$$

Введем вспомогательные переменные

$$Z = \dot{X}(t),$$
$$w = \dot{u}(t).$$

Тогда можно записать

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} w$$

Если эта система является управляемой, то можно сформулировать такой сигнал обратной связи по состоянию

$$w = -k_1 e - K_2 Z,$$

чтобы ошибка асимптотически стремилась к нулю.

$$u(t) = \int_0^t w dt = \int_0^t \left(-k_1 e(t) - K_2 Z(t)\right) dt = -k_1 \int_0^t e(\tau) d\tau - K_2 X(t).$$

Структура системы управления будет иметь вид, показанный на рис. 2.3.

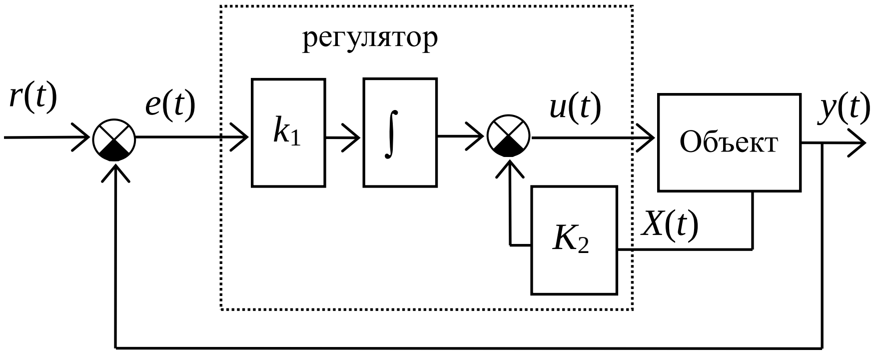


Рис. 2.3. Использование внутренней модели для единичного скачка

Интегратор здесь является внутренней моделью ступенчатого входного сигнала.

Пример 2.10. Пусть объект управления описывается уравнениями

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(t).$$

Требуется обеспечить воспроизведение системой ступенчатого входного сигнала с нулевой установившейся ошибкой.

Введем новые переменные, расширяющие вектор состояния системы:

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix} w \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \dot{e} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w.$$

Эта система управляема, поэтому можно выбрать желаемое положение корней замкнутой системы, и гарантировать, что при любой начальной ошибке $e \to 0$ при $t \to \infty$.

Рассмотрим далее линейный входной сигнал

$$r(t) = mt.$$

Для этого сигнала $d^2r/dt^2 = 0$, и ошибка воспроизведения

$$e(t) = y(t) - r,$$

$$\ddot{e}(t) = \ddot{y}(t) = C\ddot{X}(t).$$

Введем вспомогательные переменные

$$Z = \ddot{X}(t),$$

$$w = \ddot{u}(t).$$

Составляется система

$$\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} w.$$

Если эта система управляема, то можно найти вектор коэффициентов обратной связи, при которых система будет асимптотически устойчива.

$$w = -\begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ z \end{bmatrix}.$$

Так как $w = d^2u/dt^2$,

$$u(t) = \int_0^t \int_0^t w dt = \int_0^t \int_0^t \left(-k_1 e(\tau) - k_2 \dot{e}(\tau) - K_3 \ddot{X}(t) \right) d\tau d\tau =$$

$$= -k_1 \int_0^t \int_0^t e(\tau) d\tau d\tau - k_2 \int_0^t e(\tau) d\tau - K_3 X(t).$$

Этому выражению соответствует структура, показанная на рис. 2.3.

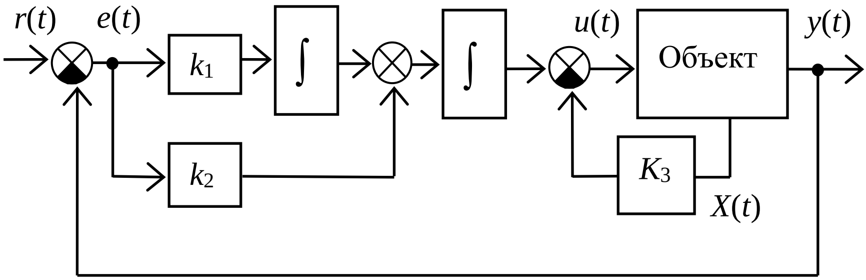


Рис. 2.4. Использование внутренней модели для линейного входного сигнала

Таким образом, здесь два интегратора представляют собой внутреннюю модель эталонного линейного входного сигнала.

Метод внутренней модели может быть использован и для других эталонных сигналов, процедура синтеза остается такой же.

2.5. Выбор полюсов желаемой замкнутой системы

На первом этапе синтеза модального регулятора необходимо задать расположение полюсов замкнутой системы.

Выбирать положение полюсов можно, опираясь на корневые оценки качества системы. Один из возможных подходов заключается в обеспечении одинаковости всех корней характеристического уравнения. Каждый корень λ должен быть отрицательным, а величина его модуля λ_0 определяется требованиями к быстродействию. Левая часть характеристического уравнения обращается в бином Ньютона $(s + \lambda_0)^n$, разворачивая который, можно получить стандартные значения коэффициентов характеристического уравнения. Биномиальные стандартные формы для систем до четвертого порядка имеют вид:

$$s + \lambda_0,$$
$$s^2 + 2\lambda_0 s + \lambda_0^2,$$
$$s^3 + 3\lambda_0 s^2 + 3\lambda_0^2 s + \lambda_0^3,$$
$$s^4 + 4\lambda_0 s^3 + 6\lambda_0^2 s^2 + 4\lambda_0^3 s + \lambda_0^4.$$

При таком подходе обеспечивается апериодичность переходного процесса. Чем больше λ_0, тем меньше время переходного процесса.

Существуют и другие стандартные формы, например форма Баттерворта, в соответствии с которой корни должны располагаться в левой полуплоскости на окружности радиуса λ_0 на одинаковых угловых расстояниях друг от друга (рис. 2.5).

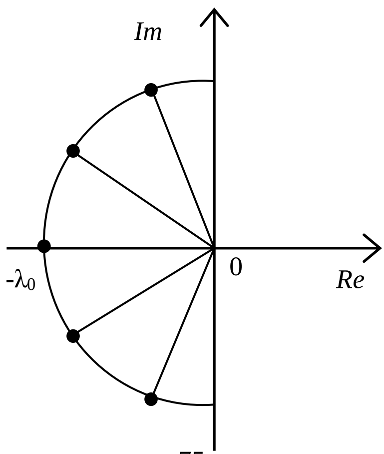


Рис. 2.5. Распределение Баттерворта для системы 4-го порядка

Стандартные формы Баттерворта для систем до четвертого порядка имеют вид:

$$s+\lambda_0,$$
$$s^2+1.4\lambda_0 s+\lambda_0^2,$$
$$s^3+2\lambda_0 s^2+2\lambda_0^2 s+\lambda_0^3,$$
$$s^4+2.6\lambda_0 s^3+3.4\lambda_0^2 s^2+2.6\lambda_0^3 s+\lambda_0^4.$$

Полином Баттерворта обеспечивает заданное время переходного процесса и перерегулирование в пределах 15%.

Пример 2.11. Рассмотрим задачу модального управления двигателем постоянного тока (ДПТ), упрощенная схема которого приведена на рис. 2.6.

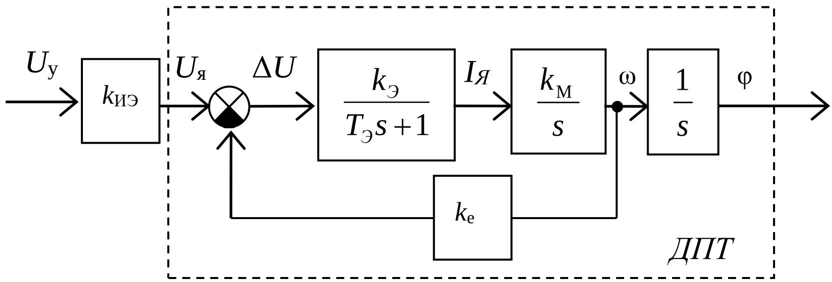


Рис. 2.6. Блок-схема двигателя постоянного тока

На рис. 2.6 использованы обозначения: $U_у$ – управляющее напряжение; $U_я$ – входное напряжение ДПТ; $k_{ИЭ}$ – коэффициент передачи исполнительного элемента (транзисторного преобразователя); $k_Э$ – коэффициент передачи электрической части двигателя; $T_Э$ – постоянная времени электрической части двигателя; $k_М$ – коэффициент передачи механической части двигателя; $k_е$ – конструктивный коэффициент ДПТ; ω – частота вращения ротора; φ – угол поворота ротора.

Примем следующие параметры ДПТ: $k_{ИЭ}$ = 20; $k_{Э}$ = 5; $T_{Э}$ = 0,2; $k_{М}$ = 1,2; k_{e} = 0,5.

Тогда передаточная функция системы приобретает вид:

$$W(s) = \frac{\frac{5}{0{,}2s+1}\cdot\frac{1{,}2}{s}}{1+\frac{5}{0{,}2s+1}\cdot\frac{1{,}2}{s}\cdot 0.5}\cdot 20 = \frac{600}{s^3+5s^2+15s}.$$

Далее для описания желаемой системы выберем стандартный биномиальный полином

$$s^3+3\lambda_0 s^2+3\lambda_0^2 s+\lambda_0^3.$$

Поскольку все полюса располагаются в одной точке, здесь легко оценить время переходного процесса в системе

$$t_p \approx \frac{3}{\lambda_0}.$$

Выбирая, например $t_р$ = 0.5, получаем λ_0 = 6. Стандартный полином приобретает вид

$$s^3+18s^2+108s+216.$$

Приравнивая нулю, получаем характеристическое уравнение желаемой замкнутой системы.

Запишем далее уравнения состояния

$$W(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{600}{s^3+5s^2+15s},$$

$$y(s)(s^3+5s^2+15s) = 600u(s).$$

Таким образом,

$$b_0 = 600,\ a_3 = 1,\ a_2 = 5,\ a_1 = 15,\ a_0 = 0.$$

Каноническая форма управляемости приобретает вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -15 & -5 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad C = \begin{bmatrix} 600 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Каноническая форма матрицы желаемой замкнутой системы

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -216 & -108 & -18 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, коэффициенты обратной связи:

$$k_1 = 216,$$

$$k_2 = 108 – 15 = 93,$$

$$k_3 = 18 – 5 = 13.$$

Рассчитаем масштабирующий коэффициент для этой системы

$$y_{ss} = -C(A - BK)^{-1} B = 2{,}77.$$

$$k_m = \frac{1}{y_{ss}} = 0{,}36.$$

Следует заметить, что теоретически может быть рассчитана любая обратная связь, помещающая полюса замкнутой системы в любое желаемое положение. Однако на практике существуют естественные ограничения на значения сигнала управления и возможные состояния объекта. Поэтому полюса желаемой системы (с обратной связью) следует располагать на комплексной плоскости как можно ближе к полюсам исходной системы.

2.6. Наблюдающие устройства

Метод модального управления предполагает, что все компоненты вектора состояния X могут быть измерены, но на практике некоторые компоненты могут быть неизвестны по одной из двух причин:

– измерительных приборов может быть недостаточно;

– некоторые компоненты вектора X могут не иметь физического смысла.

Однако если система является наблюдаемой, то все компоненты вектора X могут быть восстановлены по наблюдениям вектора Y.

Иначе говоря, если система наблюдаемая, то все компоненты вектора состояния вносят свой вклад в выходной сигнал системы.

В настоящее время известны два подхода косвенного определения компонент вектора состояния управляемого объекта, недоступных прямому измерению. Это фильтр Калмана и наблюдающее устройство Люинбергера.

При использовании фильтров Калмана детерминированный подход к рассмотрению анализируемой системы автоматического управления заменяется стохастическим. Областью применения таких наблюдающих устройств являются в основном системы управления сложными электромеханическими устройствами.

При анализе детерминированных механических систем задача оценки всех переменных состояния управляемого объекта может быть решена с помощью более простого устройства, называемого наблюдающим устройством Люинбергера. Входными сигналами для этого устройства служат доступные измерению выходные координаты объекта, а также поступающие на него входные воздействия.

Наблюдающие устройства Люинбергера представляют собой динамическую систему, которая является моделью объекта:

$$\begin{cases} \dot{\widehat{X}} = A\widehat{X} + BU, \\ \widehat{Y} = C\widehat{X}. \end{cases}.$$

где $\widehat{X}(t)$ – оценка состояния объекта, $\widehat{Y}(t)$ – оценка выхода.

Рассмотрим ошибку состояния и выхода:

$$\begin{cases} \widehat{X} - \dot{\widehat{X}} = A(X - \widehat{X}), \\ Y - \widehat{Y} = C(X - \widehat{X}). \end{cases}.$$

Если начальное состояние объекта и модели совпадают, и модель адекватна объекту, то можно полагать в любой момент времени, что

$$\widehat{X}(t) = X(t).$$

Общая структура системы управления с наблюдателем показана на рис. 2.7.

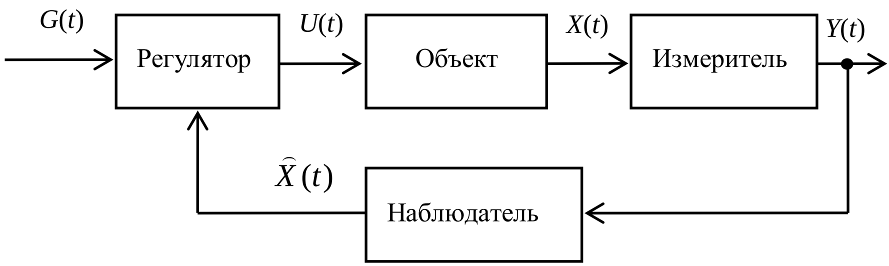


Рис. 2.7. Система управления с наблюдателем

Однако практически добиться полной адекватности объекта и модели невозможно, трудно добиться и полного равенства начальных условий. Поэтому на практике можно рассчитывать лишь на выполнение условия

$$\lim_{t\to\infty} \widehat{X}(t) = X(t).$$

Подобным свойством обладают так называемые асимптотические наблюдающие устройства.

Асимптотическое наблюдающее устройство использует обратную связь по ошибке восстановления вектора состояния, так что работа наблюдающего устройства описывается уравнением

$$\begin{cases} \dot{\widehat{X}}(t) = A\widehat{X}(t) + BU(t) + N(Y - \widehat{Y}), \\ \widehat{Y} = C\widehat{X}(t). \end{cases}$$

где N – матрица параметров наблюдающего устройства.

Можно записать

$$\begin{cases} \dot{X} - \dot{\widehat{X}} = (A - NC)(X - \widehat{X}), \\ Y - \widehat{Y} = C(X - \widehat{X}). \end{cases}.$$

Если ввести обозначение для ошибки по состоянию

$$E_X = X - \widehat{X},$$

то получаем

$$\dot{E}_X = (A - NC)E_X.$$

Таким образом, если собственные числа матрицы $A - NC$ имеют отрицательную вещественную часть, то с течением времени ошибка состояния уменьшиться до нуля. Соответственно, при синтезе наблюдателя нужно выбрать положение корней характеристического уравнения:

$$\left|\lambda I - (A - NC)\right| = 0.$$

Рассмотрим влияние наблюдателя на динамику системы с обратной связью. Система с наблюдателем описывается уравнениями

$$
\begin{cases}
\dot{X} = AX + BU, \\
Y = CX, \\
U = K\widehat{X}, \\
\dot{\widehat{X}} = A\widehat{X} + BU + N(Y - C\widehat{X}).
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
\dot{X} = AX + BK\widehat{X}, \\
\dot{\widehat{X}} = A\widehat{X} + BK\widehat{X} + NC(X - \widehat{X}).
\end{cases}
$$

Структурная схема системы с наблюдающим устройством показана на рис. 2.9.

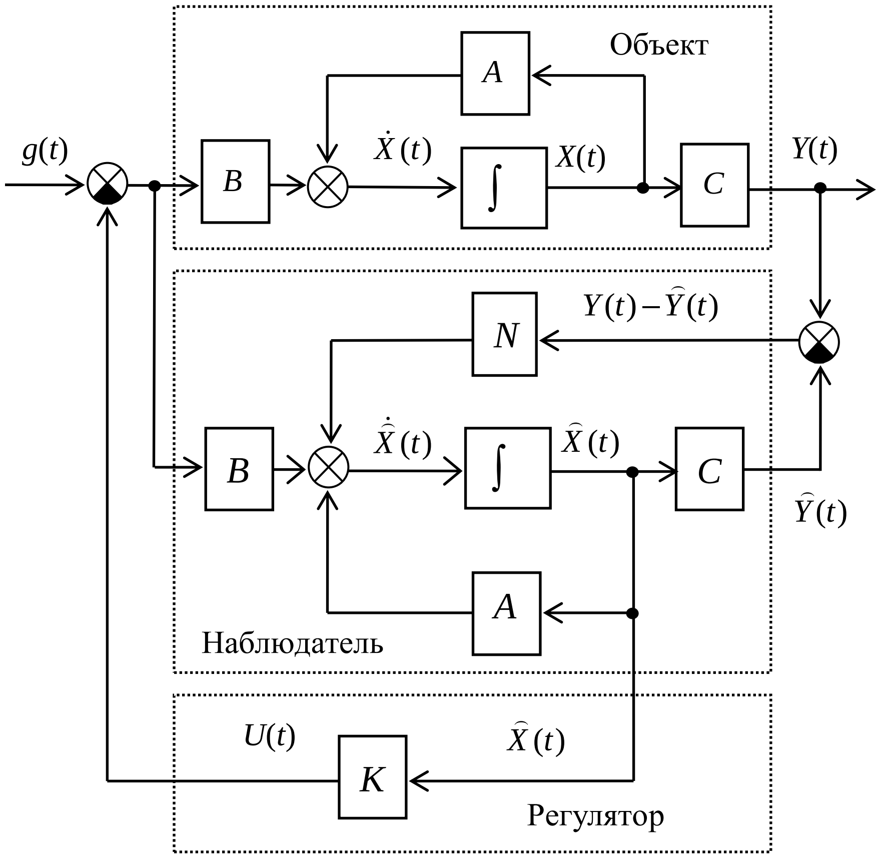


Рис. 2.9. Система с наблюдающим устройством

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{X} = (AX + BKX) - BKE = (A + BK)X - BKE, \\ \dot{E} = AE - NCE = (A - NC)E. \end{cases}$$

Таким образом, уравнения динамики системы с наблюдающим устройством можно записать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A + BK) & -BK \\ 0 & (A - NC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ E \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет вид:

$$\begin{vmatrix} (A + BK) & -BK \\ 0 & (A - NC) \end{vmatrix} = 0.$$

Собственные значения блочной треугольной матрицы совпадают с собственными значениями диагональных блоков

$$|A + BK - sI||A - NC - sI| = 0.$$

Это уравнение имеет $2n$ корней, из которых n корней заданы условиями модального синтеза и еще n являются корнями наблюдателя. Таким образом, оказывается, что параметры наблюдателя и параметры регулятора могут рассчитываться независимо.

Понятно, что процессы в наблюдателе должны протекать более быстро, чем переходный процесс в системе. Эмпирически установлено, что наблюдатель должен обладать быстродействием, в 2 – 4 раза превышающим быстродействие системы.

При синтезе наблюдателя удобно использовать каноническую форму наблюдаемости.

Пример Рассмотрим объект 3-го порядка

$$A - NC = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(a_2 + n_1) & 1 & 0 \\ -(a_1 + n_2) & 0 & 1 \\ -(a_0 + n_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение принимает вид:

$$|sI - (A - NC)| = \begin{vmatrix} s + (a_2 + n_1) & 1 & 0 \\ (a_1 + n_2) & s & 1 \\ (a_0 + n_3) & 0 & s \end{vmatrix} =$$

$$= s^3 + (a_2 + n_1)s^2 + (a_1 + n_2)s + (a_0 + n_3) = 0.$$

Далее надо рассмотреть характеристический полином желаемой замкнутой системы

$$s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0 = 0,$$

и, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях s, найти параметры наблюдателя:

$$n_1 = d_2 - a_2,$$
$$n_2 = d_1 - a_1,$$
$$n_3 = d_0 - a_0.$$

Пример 2.12. Объект управления задан матрицами в канонической форме наблюдаемости

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -17 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Требуется построить наблюдающее устройство.

$$A-NC=\begin{bmatrix} -(8+n_1) & 1 & 0 \\ -(17+n_2) & 0 & 1 \\ -(10+n_3) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left|sI-(A-NC)\right| = s^3+(8+n_1)s^2+(17+n_2)s+(10+n_3)=0.$$

Допустим, что выбран следующий желаемый характеристический полином

$$s^3+6s^2+13s+20=0.$$

Тогда параметры наблюдателя равны:

$$n_1=-2, \quad n_2=-4, \quad n_3=10.$$

В рассмотренном примере синтез наблюдателя выполнен методом модального управления.

Второй способ синтеза наблюдателя – это собственно синтез наблюдателя Люенбергера.

Введём n-мерный вектор состояния наблюдателя V, связанный с X соотношением

$$V=T\widehat{X},$$

где T – не особая матрица размерности $n\times n$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} V=T\widehat{X}, \\ \dot{\widehat{X}}=A\widehat{X}+N(Y-C\widehat{X})+BU. \end{cases} \Rightarrow \quad \dot{V}=T(A-NC)T^{-1}V+TCY+TBU.$$

Введем обозначение

$$G=T(A-NC)T^{-1}, \qquad F=TN,$$

где N – неизвестная матрица.

$$N = T^{-1}F \quad \Rightarrow \quad G = T(A - T^{-1}FC)T^{-1}, \qquad ,$$

откуда следует

$$TA - GT = FC.$$

Таким образом, наблюдатель Люенбергера описывается системой уравнений

$$\begin{cases} \widehat{X} = T^{-1}V, \\ \dot{V} = GV + FY + TBU, \\ TA - TG = FC. \end{cases}$$

Пример.

Пример 2.22. Объект управления задан уравнениями в пространстве состояний:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u,$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X.$$

Требуется построить наблюдатель Люинбергера.

На первом шаге проверяется наблюдаемость объекта:

$$W = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad |W| \neq 0.$$

Допустим, что при модальном синтезе выбраλно положение полюсов замкнутой системы: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Матрица G описывает динамику наблюдателя, она должна иметь собственные числа, находящиеся левее на комплексной плоскости. Например

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Матрица F выбирается из условий управляемости наблюдателя. Например:

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Затем необходимо решить уравнение:

$$TA - TG = FC,$$

$$T\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - T\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$T = \begin{bmatrix} 0.21 & -0.07 \\ 0.21 & -0.07 \end{bmatrix}.$$

2.7. Редуцированные наблюдающие устройства

Рассмотренное выше структура наблюдающего устройства обладает некоторой избыточностью. Избыточность выражается в том, что наблюдающее устройство оценивает весь вектор переменных состояния $X(t)$, хотя часть координат вектора состояния могут быть непосредственно измерены. Эту избыточность можно устранить путем синтеза редуцированного наблюдающего устройства, порядок которого меньше, чем порядок заданного динамического объекта.

Пусть измерению доступны первые m координат вектора состояния $X(t)$. Тогда вектор переменных состояния можно представить следующим образом

$$X(t) = \begin{bmatrix} Y(t) \\ W(t) \end{bmatrix},$$

где $Y(t)$ – вектор размерности m (измеряемые координаты), $W(t)$ – вектор размерности $n - m$ (не измеряемые координаты вектора состояния).

Тогда уравнение выхода для объекта управления можно представить следующим образом

$$Y(t) = C^T X(t), \qquad C = \begin{bmatrix} I_m \\ 0 \end{bmatrix},$$

где I_m – единичная матрица размера $m\times m$, 0 – нулевая матрица.

В уравнении

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t).$$

Матрицу A и вектор B представим в блочной форме:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

где A_{11} – матрица размера $m\times m$, A_{12} – матрица размера $m\times (n -$

m), A_{21} – матрица размера ($n – m$) × m, A_{22} – матрица размера ($n – m$) × ($n – m$), вектора B_1 и B_2 имеют размер m и $n – m$.

Тогда уравнение состояния можно переписать следующим образом

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) = A_{11}Y(t) + A_{12}W(t) + B_1U(t), \\ \dot{W}(t) = A_{21}Y(t) + A_{22}W(t) + B_2U(t). \end{cases}$$

Этим уравнениям соответствует структурная схема, приведенная на рис. 2.10

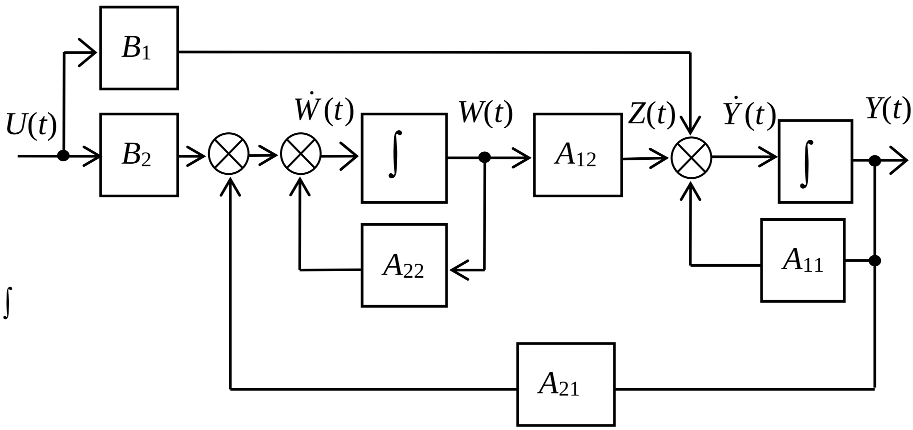


Рис. 2.10. Блочное представление уравнения состояния.

Идея синтеза редуцированного наблюдающего устройства заключается в следующем. Так как вектор $Y(t)$ доступен непосредственному измерению, то полагаем, что можно каким-либо способом вычислить и его производную по времени. Ввиду того, что управляющая функция также доступна измерению, то согласно уравнению можно вычислить вектор

$$Z(t) = A_{12}W(t) = \dot{Y}(t) - A_{11}Y(t) - B_1U(t).$$

Рассмотрим затем уравнение

$$\dot{W}(t) = A_{21}Y(t) + A_{22}W(t) + B_2U(t).$$

Это уравнение можно рассматривать как модель объекта с вектором состояния $W(t)$.

$$\dot{W}(t) = A_{22}W(t) + (A_{21}Y(t) + B_2U(t)).$$

Слагаемое в скобке будем рассматривать в качестве внешнего воздействия.

Основной теоретической базой для синтеза редуцированного наблюдателя является утверждение: «Если система A, C обладает свойством наблюдаемости, то свойствами наблюдаемости обладает и подсистема A_{22}, A_{12}».

Рассмотрим динамический объект, описываемый системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = A_{22}W(t) + A_{21}Y(t) + B_2U(t), \\ Z(t) = A_{12}W(t) = \dot{Y}(t) - A_{11}Y(t) - B_1U(t). \end{cases}$$

Первое из этих уравнений описывает динамику объекта (рис. 2.11), а второе является уравнением выхода.

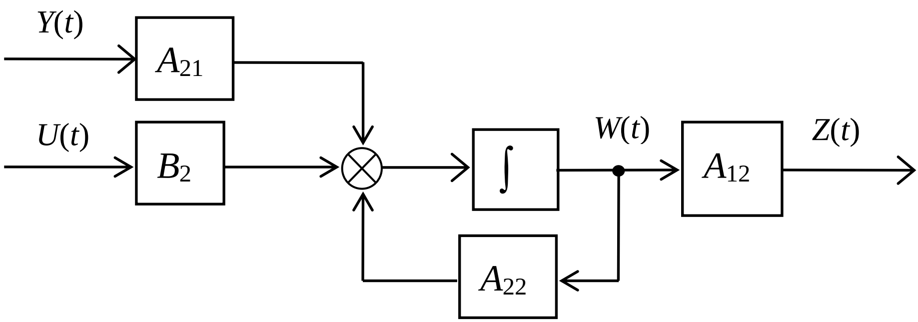


Рис. 2.11. Структура динамического объекта

Для того, чтобы получить математическую модель редуцированного наблюдающего устройства воспользуемся общим уравнением наблюдающего устройства полного порядка

$$\dot{\hat{X}}(t) = A\hat{X}(t) + BU(t) + N(Y(t) - C\hat{X}(t)),$$

$$\dot{\hat{X}}(t) = (A - NC)\hat{X}(t) + NY(t) + BU(t).$$

Для редуцированного наблюдающего устройства матрице A будет соответствовать A_{22}, матрице C – A_{12}, и матрице N – матрица L, которой соответствуют коэффициенты обратных связей редуцированного наблюдающего устройства.

Таким образом, получаем оценку вектора состояния динамического объекта

$$\dot{\hat{W}}(t) = (A_{22} - LA_{12})\hat{W}(t) + L\dot{Y}(t) + (A_{21} - LA_{11})Y(t) + (B_2 - LB_1)U(t).$$

Структурная схема редуцированного наблюдающего устройства показана на рис. 2.12.

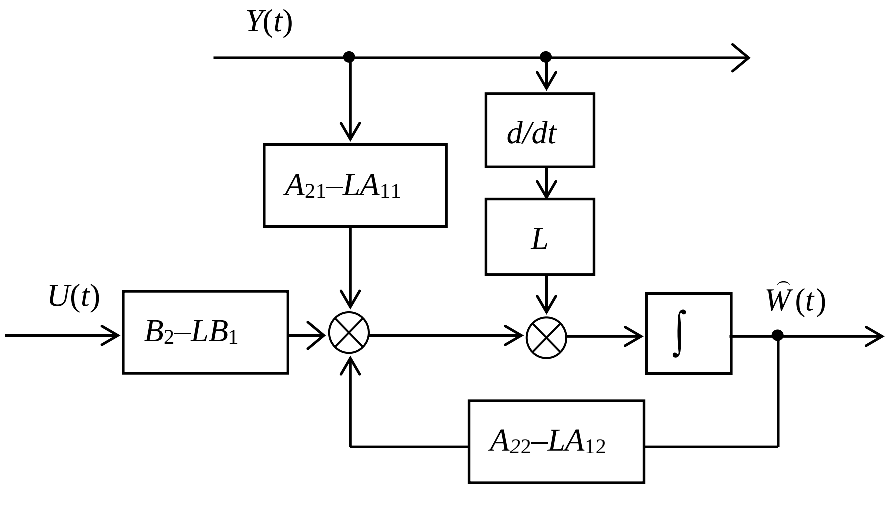


Рис. 2.12. Редуцированное наблюдающее устройство

Для того, чтобы избавиться от операции дифференцирования, можно ввести в рассмотрение вектор состояния наблюдающего устройства размером ($n-m$):

$$V(t)=\widehat{W}(t)-LY(t),$$
$$\dot{V}(t)=\dot{\widehat{W}}(t)-L\dot{Y}(t)$$

Тогда можно записать (подставляем $\widehat{W}(t)$)):

$$\dot{V}(t)=\left(A_{22}-LA_{12}\right)\left(V(t)+LY(t)\right)+(A_{21}-LA_{11})Y(t)+\left(B_2-LB_1\right)U(t).$$

Получается следующая структурная схема (рис. 2.13).

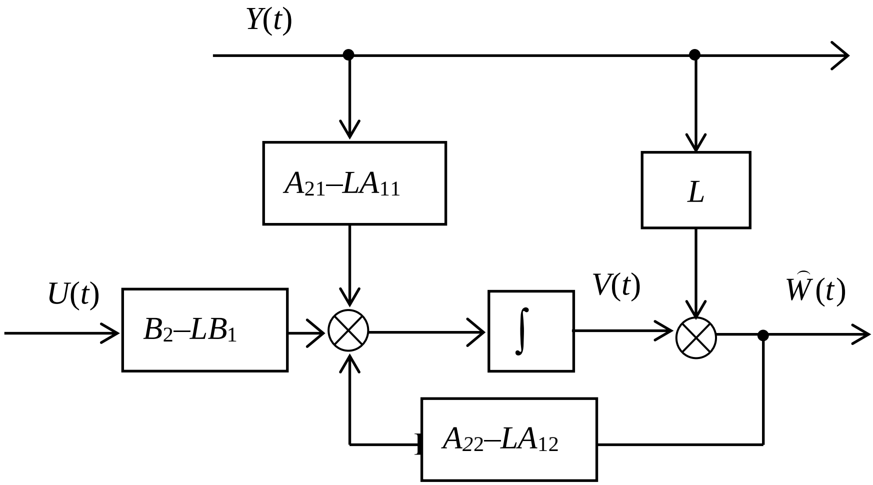


Рис. 2.13. Вариант редуцированного наблюдающего устройства

Последнее уравнение можно перегруппировать:

$$\dot{V}(t)=\left(A_{22}-LA_{12}\right)V(t)+\left(B_2-LB_1\right)U(t)+$$
$$+(A_{21}+A_{22}L-LA_{12}L-LA_{11})Y(t).$$

Затем можно найти оценку состояния:

$$\widehat{W}(t) = V(t) + LY(t).$$

Дискретные модели в пространстве состояния

1. Переход от разностного уравнения к уравнениям состояния

Рассмотрим дискретную ПФ:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4}}.$$

где оператор z^{-1} означает задержку на один такт.

Этой ПФ соответствует разностное уравнение

$$Y(k) = b_0 U(k) + b_1 U(k-1) + b_2 U(k-2) + b_3 U(k-4) -$$
$$- a_1 Y(k-1) - a_2 Y(k-2) - a_3 Y(k-3) - a_4 Y(k-4).$$

и граф, показанный на рис. 4.

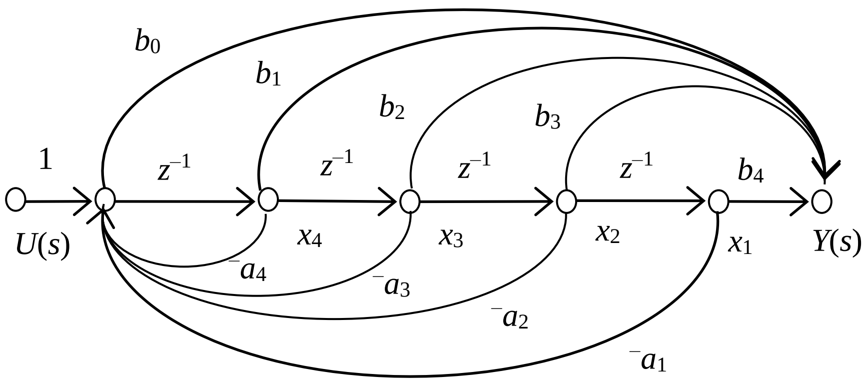


Рис. 4. Сигнальный граф для дискретной ПФ

Выбирая в качестве переменных состояния выходы элементов задержки, можно записать

$$\begin{cases} x_1(k) = x_2(k-1), \\ x_2(k) = x_3(k-1), \\ x_3(k) = x_4(k-1), \\ x_4(k) = -a_4 x_4(k-1) - a_3 x_3(k-1) - a_2 x_2(k-1) - a_1 x_1(k-1) + u(t). \end{cases}$$

$$y(k) = b_0 u(k) + b_1 x_4(k) + b_2 x_3(k) + b_3 x_2(k) + b_4 x_1(k).$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \\ x_4(k-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_4 & b_3 & b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k).$$

Пример. Пусть имеется дискретная ПФ

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0.36z^{-1} + 0.26z^{-2}}{1 - 1.3z^{-1} + 0.3z^{-2}},$$

И соответствующее разностное уравнение

$$Y(k) = 0.36U(k-1) + 0.26U(k-2) + 1.3Y(k-1) - 0.3Y(k-2).$$

Сигнальный граф этой системы показан на рис. 2. Применяя к нему формулу Мейсона, можно получить исходную дискретную ПФ.

Примем выход каждого элемента задержки за переменную состояния $x_1(k)$ и $x_2(k)$, тогда входы элементов задержки равны $x_1(k+1)$ и $x_2(k+1)$

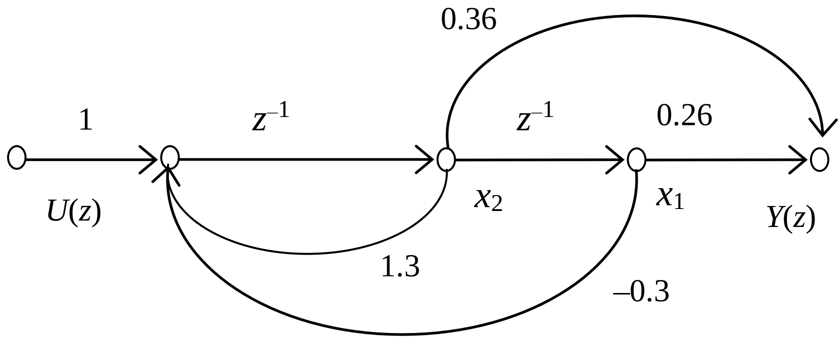


Рис. 2

Модель в переменных состояния приобретает вид:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k), \\ x_2(k+1) = -0.3x_1(k) + 1.3x_2(k) + u(k). \end{cases}$$

$$y(k) = 0.26x_1(k) + 0.36x_2(k).$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.3 & 1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0.26 & 0.36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, модель дискретной системы в пространстве состояний можно получить, используя либо разностное уравнение, либо дискретную ПФ.

Переход от уравнений состояния к передаточной функции.

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k).$$

Применяя z-преобразование, имеем

$$\begin{aligned} &z\big(X(z) - x(0)\big) = AX(z) + BU(z), \\ &(zI - A)X(z) = zx(0) + BU(z), \\ &X(z) = z(zI - A)^{-1}x(0) + (zI - A)^{-1}BU(z). \end{aligned}$$

2. Получение дискретного представления из непрерывного

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu,$$

Где a и b – числа, x и u – скалярные переменные.

Рассмотрим преобразование этого уравнения по Лапласу:

$$sX(s) - x(0) = aX(s) + bU(s),$$

$$X(s) = \frac{x(0)}{s-a} + \frac{b}{s-a}U(s).$$

Обратное преобразование Лапласа этого уравнения дает

$$x(t)=e^{at}x(0)+\int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau.$$

Это формула обобщается для системы произвольного вида

$$X(t)=e^{At}X(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}BU(\tau)d\tau.$$

Рассмотрим движение объекта на интервале квантования T, используя непрерывное описание:

$$X(kT+T)=e^{At}X(kT)+\int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)}BU(\tau)d\tau.$$

Поскольку на интервале квантования T управление не изменяется: $U(t) = U(kT)$, можно записать:

$$A_{\mathrm{d}}=e^{AT},$$

$$B_{\mathrm{d}}=\left(\int_0^T e^{A(T-\tau)}d\tau\right)B.$$

(При записи последней формулы можно считать $kT = 0$).

Таким образом

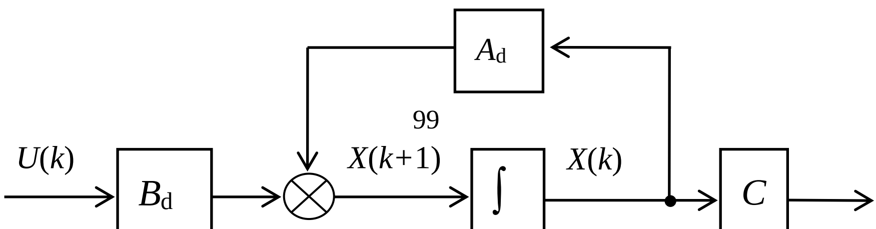
$$X(k+1)=A_dX(k)+B_dU(k).$$

Выход цифровой системы можно рассчитывать по формуле:

$$Y(k)=CX(k).$$

Поскольку время срабатывания АЦП и ЦАП намного меньше периода квантования, и его можно не учитывать.

Дискретная система в пространстве состояний описывается структурой, приведенной на рис. 4:



$Y(k)$

Рис. 4. Дискретная форма уравнений состояния

Методика синтеза цифровых модальных регуляторов принципиально не отличается от методики синтеза непрерывных модальных регуляторов.

Рассматривая уравнения состояния в дискретной форме, можно обосновать критерий управляемости.

Пусть задано описание стационарной дискретной системы:

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k),$$

где A - матрица размером $(n\times n)$, B - матрица размером $(n\times 1)$.

Можно записать выражение:

$$\begin{aligned} &X(k+2) = AX(k+1) + BU(k+1) = \\ &A\big(AX(k) + BU(k)\big) + BU(k+1) = \\ &A^2X(k) + ABU(k) + BU(k+1). \end{aligned}$$

Аналогично:

$$\begin{aligned} &X(k+3) = AX(k+2) + BU(k+2) = \\ &A\big(A^2X(k) + ABU(k) + BU(k+1)\big) + BU(k+2) = \\ &A^3X(k) + A^2BU(k) + ABU(k+1) + BU(k+2). \end{aligned}$$

Окончательно:

$$\begin{aligned} &X(k+n) = A^nX(k) + A^{n-1}BU(k) + \ldots \\ &+ ABU(k+n-2) + BU(k+n-1) = A^nX(k) + WU, \end{aligned}$$

где

$$W = [A^{n-1}B;\ A^{n-2}B;\ \dots\ A^2B;\ AB;\ B],$$

$$U = [U(k)\ U(k+1)\ \dots\ U(k+n-2)\ U(k+n-1)]^{\mathrm{T}}$$

Если матрица управляемости W невырожденная (несингулярная), то из выражения

$$X(k+n) = A^n X(k) + WU$$

следует

$$U = W^{-1}\big(X(k+n) - A^n X(k)\big) = \varphi\big(X(k), X(k+n))\big)$$

Таким образом, для полностью управляемого объекта можно рассчитать управление, рассматривая инверсную динамику объекта.

Пример. Объект управления задан матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости

$$W = \begin{bmatrix} A^2B & AB & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 \\ -27 & 9 & 0 \\ 63 & -27 & 9 \end{bmatrix}; \qquad \det(W) \neq 0.$$

Сигнал управления

$$U=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 0\\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9}\end{bmatrix}\left(X(k+3)-\begin{bmatrix}-5 & -2 & -3\\ 15 & 1 & 7\\ -35 & 1 & -20\end{bmatrix}X(k)\right)=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{9} & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 0\\ \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9}\end{bmatrix}X(k+3)-\begin{bmatrix}-\frac{5}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{3}\\ 0 & -\frac{5}{9} & -\frac{2}{9}\\ 0 & 0 & -\frac{5}{9}\end{bmatrix}X(k)=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{9}x_1(k+3)+\frac{5}{9}x_1(k)+\frac{2}{9}x_2(k)+\frac{1}{3}x_3(k)\\ \frac{1}{3}x_1(k+3)+\frac{1}{9}x_2(k+3)+\frac{5}{9}x_2(k)+\frac{2}{9}x_3(k)\\ \frac{2}{9}x_1(k+3)+\frac{1}{3}x_2(k+3)+\frac{1}{9}x_3(k+3)+\frac{5}{9}x_3(k)\end{bmatrix}.$$