

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/342223412>

Quadcopter: dynamics and control

Article · May 2020

DOI: 10.18698/2541-8009-2020-5-604

CITATIONS

29

READS

716

2 authors, including:



[Andrey L. Maslennikov](#)

Bauman Moscow State Technical University

14 PUBLICATIONS 30 CITATIONS

SEE PROFILE

КВАДРОКОПТЕР: ДИНАМИКА И УПРАВЛЕНИЕ**Г.В. Лысухо**

lyysukhogv@student.bmstu.ru

SPIN-код: 8276-4150

А.Л. Масленников

amas@bmstu.ru

SPIN-код: 7087-6303

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация**Аннотация**

Развитие многороторных беспилотных летательных аппаратов в общем и квадрокоптеров в частности позволяет использовать последние в различных сферах деятельности человека, а не только для эффективной фото- и видеосъемки. При решении более серьезных задач (например, при слежении за подвижной целью или полете по заданной траектории) к системе управления квадрокоптером предъявляются достаточно высокие требования по качеству и быстродействию. Для разработки системы управления необходимо четко понимать, как функционирует квадрокоптер, как осуществляется управление данным объектом, а для непосредственной отработки алгоритмов управления необходимо наличие наиболее адекватной математической модели. В данной статье описан принцип полета и управления квадрокоптером, построена полная нелинейная математическая модель квадрокоптера с учетом динамики двигателей.

Ключевые слова

Беспилотный летательный аппарат (БПЛА), многороторный летательный аппарат, квадрокоптер, математическая модель, управление, динамика двигателей, механика полета, двигатель

Поступила в редакцию 10.04.2020

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2020

Введение. На сегодняшний день квадрокоптеры из средств для развлечения превратились в летающие аппараты, помогающие человеку в различных видах деятельности. Так, квадрокоптеры активно используются для кадастровой аэрофотосъемки, позволяют осуществлять поиск людей и мониторинг пожаров в удаленных участках лесных зон, поиск и учет диких животных, доставку грузов на небольшие расстояния, а также применяются для любительской и профессиональной фото- и видеосъемки [1–5].

Квадрокоптер — это высокоманевренный летательный аппарат, который обладает слабой устойчивостью, поскольку его динамика сильно подвержена внешним ветровым возмущениям ввиду достаточно малой массы [6]. Система управления квадрокоптером принципиально должна решать задачи угловой и пространственной стабилизации, выхода квадрокоптера на заданную высоту (взлет), обеспечивать посадку, зависание и полет по заданной траектории [7, 8]. В общем случае к системе управления квадрокоптера предъявляются достаточно высокие требования по точности и быстродействию с учетом заданных ограничений.

Отработка законов управления осуществляется методами математического, имитационного и компьютерного моделирования. Для решения этой задачи необходимо понимание принципов работы квадрокоптера, механики полета и наличие математической модели, описывающей его динамику. Существует достаточно большое количество близких по структуре математических моделей квадрокоптеров [9, 10]. Ряд математических моделей линеаризуют или преобразуют [11] для удобства решения специализированных задач.

В статье описан квадрокоптер как объект управления, рассмотрена механика его полета и принцип управления, построена полная нелинейная математическая модель в виде системы дифференциальных уравнений с учетом динамики двигателей.

Принцип работы квадрокоптера. Многороторные летательные аппараты могут иметь различные конструктивные конфигурации — схемы. Квадрокоптер как частный случай многороторных летательных аппаратов может строиться по икс- и плюс-образной схеме (рис. 1). Отличительной особенностью данной схемы является то, что оси OX и OZ пересекают центры двигателей.

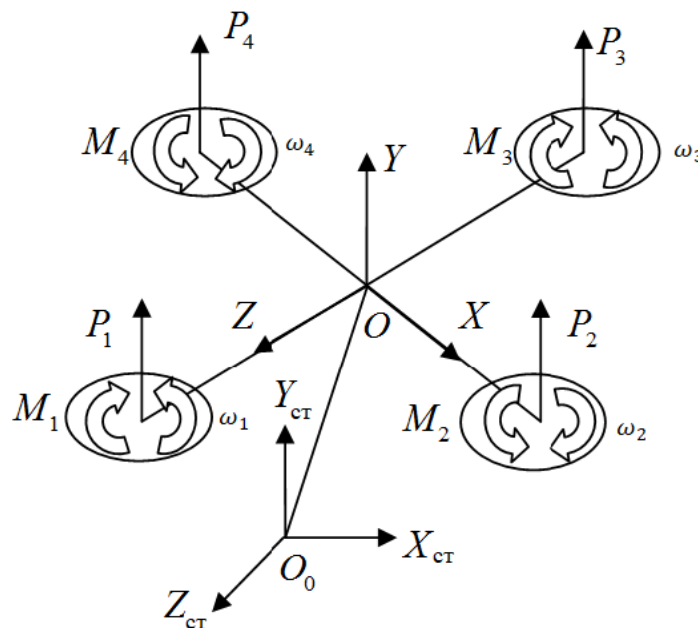


Рис. 1. Кинематическая схема квадрокоптера

На кинематической схеме оси $OXYZ$ образуют связанную систему координат, которая жестко связана с квадрокоптером, оси $O_0X_0Y_0Z_0$ формируют стартовую систему координат, в которой находится наблюдатель; P_1, P_2, P_3, P_4 — подъемные силы, возникающие за счет вращения соответствующих винтов со скоростями $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$; M_1, M_2, M_3, M_4 — реактивные моменты. Ориентация квадрокоптера в пространстве определяется тремя углами: углом рыс-

кания ψ — углом между осью OZ и плоскостью $O_0Y_{ct}Z_{ct}$, углом тангажа ϑ — углом между осью OX и плоскостью $O_0X_{ct}Z_{ct}$, и углом крена φ — углом между осью OX и плоскостью $O_0X_{ct}Y_{ct}$.

Управление движением квадрокоптера осуществляется подачей управляющих напряжений на двигатели, которые приводят во вращение винты, в результате чего появляются угловые скорости $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, вследствие чего формируются подъемные силы P_1, P_2, P_3, P_4 и, как следствие, возникает результирующая подъемная сила и соответствующие моменты, которые обусловлены реактивным явлением, возникающим от вращения винтов [12].

Движение в вертикальной плоскости обеспечивается проекцией суммарного вектора подъемной силы P на вертикальную ось, а поворот по углу рыскания — разностью значений угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, причем для поворота в положительном направлении необходимо, чтобы угловые скорости ω_2 и ω_4 были больше, чем ω_1 и ω_3 , а для поворота в отрицательном направлении — наоборот. Другими словами, поворот по рысканию осуществляется за счет разницы реактивных моментов, которые возникают при вращении двигателей. Изменение углов ориентации обеспечивается из-за разницы в парах подъемных сил: P_2, P_4 для угла тангажа и P_1, P_3 для угла крена.

Преобразование систем координат. Соотношение между стартовой и связанной системами координат можно записать в виде матрицы направляющих косинусов:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c(\psi)c(\vartheta) & s(\vartheta) & -s(\psi)c(\vartheta) \\ s(\psi)s(\varphi) - c(\psi)s(\vartheta)c(\varphi) & c(\vartheta)c(\varphi) & s(\vartheta)s(\psi)c(\varphi) + c(\psi)s(\varphi) \\ c(\varphi)s(\psi) + c(\psi)s(\vartheta)s(\varphi) & -c(\vartheta)s(\varphi) & c(\varphi)c(\psi) - s(\varphi)s(\vartheta)s(\psi) \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее для упрощения формы записи введены обозначения: $c(.)$ — $\cos(.)$, $s(.)$ — $\sin(.)$.

Соответственно, перерасчет некоторого вектора $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ значений из стартовой в связанную систему координат осуществляется следующим образом:

$$\mathbf{r}_{cb} = \mathbf{R}\mathbf{r}_{ct},$$

а для обратного перехода с учетом ортогональности двух систем координат:

$$\mathbf{r}_{ct} = \mathbf{R}^T \mathbf{r}_{cb},$$

где матрица направляющих косинусов для обратного перехода имеет следующий вид:

$$\mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} c(\psi)c(\vartheta) & s(\psi)s(\varphi) - c(\psi)s(\vartheta)c(\varphi) & c(\varphi)s(\psi) + c(\psi)s(\vartheta)s(\varphi) \\ s(\vartheta) & c(\vartheta)c(\varphi) & -c(\vartheta)s(\varphi) \\ -s(\psi)c(\vartheta) & s(\vartheta)s(\psi)c(\varphi) + c(\psi)s(\varphi) & c(\varphi)c(\psi) - s(\varphi)s(\vartheta)s(\psi) \end{pmatrix}.$$

Математическая модель динамики квадрокоптера. В общем случае движение квадрокоптера как твердого тела состоит из движения центра масс и вращательного движения относительно центра масс. Для получения уравнений движения центра масс квадрокоптера запишем выражения для силы тяги следующим образом:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \sum_{i=1}^4 c_{pi} \omega_i^2; \quad (1)$$

$$c_{pi} = \frac{1}{2} \rho C_Y S_i r_i^2,$$

где \mathbf{P} — вектор силы тяги в связанной системе координат; P — суммарная тяга — получаемая в результате действия четырех двигателей в связанной системе координат; c_{pi} — коэффициент силы тяги; ρ — плотность воздуха ($1,225 \text{ кг/м}^3$), которая соответствует плотности сухого воздуха при 15°C и давлении 101330 Па ; C_Y — коэффициент подъемной силы — определяется эмпирически, для квадрокоптеров находится обычно в пределах от $0,2$ до $1,3$; S_i — площадь, окружности, которую описывает крутящий i -й винт радиусом r_i .

Проекция силы тяги в стартовой системе координат определяется следующим образом:

$$\mathbf{P}_{\text{ст}} = \mathbf{R}^T \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P(s(\psi)s(\varphi) - c(\psi)s(\vartheta)c(\varphi)) \\ P(c(\vartheta)c(\varphi)) \\ P(s(\vartheta)s(\psi)c(\varphi) + c(\psi)s(\varphi)) \end{bmatrix}.$$

Сила сопротивления воздуху \mathbf{f} и сила тяжести \mathbf{G} определяются следующим образом:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix},$$

а каждая проекция силы сопротивления воздуха на оси связанной системы координат определяется исходя из следующего соотношения:

$$f_i = C_{x0} \frac{\rho V_i^2}{2} S,$$

где V_i — проекция линейной скорости на соответствующую ось; S — характерная площадь поверхности квадрокоптера; C_{x0} — безразмерный коэффициент лобового (аэродинамического) сопротивления, учитывающий обтекаемость, который находится в диапазоне от 0,2 до 1,2. Максимальная скорость движения квадрокоптера составляет 263 км/ч, или 73 м/с [13], однако для серийных моделей максимальное значение скорости не превышает 40 м/с, следовательно, максимальную силу сопротивления воздуха при характерной площади равной 0,01 м² можно определить как

$$f_{\max} = 0,4 \frac{1,225 \cdot 40^2}{2} 0,01 = 3,92 \text{ Н.}$$

Учитывая, что максимальная сила сопротивления воздуха на порядок меньше величины подъемной силы, а также большую вычислительную и пространственную сложность компьютерного моделирования атмосферной обстановки и ветровых возмущений для исследования динамики квадрокоптера можно принять $f_i = 0$. Однако исключать f_i из последующих уравнений не будем для сохранения адекватности получаемой математической модели.

Таким образом, уравнение движения центра масс в векторном виде можно записать следующим образом:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{R}^T \mathbf{P}_{\text{ст}} - \mathbf{f} - \mathbf{G}.$$

В поэлементном виде получим следующую систему из трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{P(s(\psi)s(\varphi) - c(\psi)s(\vartheta)c(\varphi)) - f_x}{m}; \\ \ddot{y} = \frac{P(c(\vartheta)c(\varphi)) - f_y - mg}{m}; \\ \ddot{z} = \frac{P(s(\vartheta)s(\psi)c(\varphi) + c(\psi)s(\varphi)) - f_z}{m}. \end{cases}$$

Угловое движение квадрокоптера в связанной системе координат описывается системой из трех уравнений — динамических уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} I_x \dot{\omega}_x + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z = M_x; \\ I_y \dot{\omega}_y + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x = M_y; \\ I_z \dot{\omega}_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x = M_z, \end{cases}$$

где I_x, I_y, I_z — моменты инерции относительно соответствующих осей OX , OY и OZ ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции угловой скорости; M_x, M_y, M_z — проекции суммарного момента, действующего на квадрокоптер, которые можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_x &= M_{qx} + M_{mx} + M_{px}; \\ M_y &= M_{qy}; \\ M_z &= M_{qz} + M_{mz} + M_{pz}, \end{aligned}$$

где M_{qx}, M_{qy}, M_{qz} — моменты, создаваемые разницей сил тяги, формируемых соответствующими парами винтов, с помощью которых происходит управлением углами крена, рыскания и тангажа; M_{mi} и M_{pi} — гироскопические моменты двигателей и винтов. Все эти моменты могут быть вычислены следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{qx} &= (P_3 - P_1)l; \\ M_{qy} &= M_2 + M_4 - M_1 - M_3; \\ M_{qz} &= (P_2 - P_4)l; \\ M_i &= m_{pi} \omega_i^2; \\ m_{pi} &= \frac{1}{2} \rho C_Y S_i r_i^3; \\ M_{mx} &= I_m \omega_z (\omega_1 + \omega_3 - \omega_2 - \omega_4); \\ M_{mz} &= I_m \omega_x (\omega_2 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_3); \\ M_{px} &= I_p \omega_z (\omega_1 + \omega_3 - \omega_2 - \omega_4); \\ M_{pz} &= I_p \omega_x (\omega_2 + \omega_4 - \omega_1 - \omega_3), \end{aligned}$$

где m_{pi} — коэффициент момента; l — расстояние от оси вращения вала двигателя до центра масс квадрокоптера; I_m — осевой момент инерции вала ротора двигателя; I_p — осевой момент инерции винта. Величины $I_m \omega_z$ и $I_p \omega_z$ являются кинетическими моментами двигателей и винтов соответственно. Если раскрыть скобки в уравнениях гироскопических моментов $M_{mx}, M_{mz}, M_{px}, M_{pz}$, то становится видно, что суммарные гироскопические моменты пред-

ставляют собой сумму гироскопических моментов от валов роторов двигателей (M_{mx}, M_{mz}) и вращающихся винтов (M_{px}, M_{pz}).

Несмотря на то что динамические уравнения Эйлера описывают динамику вращательного движения квадрокоптера, их недостаточно для определения углов тангажа, крена и рыскания, которые определяются относительно стартовой или некоторой навигационной системы координат. Динамика углов описывается системой из трех дифференциальных уравнений — кинематических уравнений Эйлера, имеющих следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \omega_x - \operatorname{tg}(\vartheta)(\omega_y c(\varphi) - \omega_z s(\varphi)); \\ \dot{\psi} = \frac{\omega_y c(\varphi) - \omega_z s(\varphi)}{c(\vartheta)}; \\ \dot{\vartheta} = \omega_z s(\varphi) + \omega_y s(\varphi). \end{cases}$$

Таким образом, полная математическая модель, описывающая пространственную и угловую динамику квадрокоптера, состоит из девяти дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{P(s(\psi)s(\varphi) - c(\psi)s(\vartheta)c(\varphi)) - f_x}{m}; \\ \ddot{y} = \frac{P(c(\vartheta)c(\varphi)) - f_y - mg}{m}; \\ \ddot{z} = \frac{P(s(\vartheta)s(\psi)c(\varphi) + c(\psi)s(\varphi)) - f_z}{m}; \\ \dot{\omega}_x = \frac{(I_y - I_z)\omega_y\omega_z + M_x}{I_x}; \\ \dot{\omega}_y = \frac{(I_z - I_x)\omega_x\omega_z + M_y}{I_y}; \\ \dot{\omega}_z = \frac{(I_x - I_y)\omega_y\omega_x + M_z}{I_z}; \\ \dot{\varphi} = \omega_x - \operatorname{tg}(\vartheta)(\omega_y c(\varphi) - \omega_z s(\varphi)); \\ \dot{\psi} = \frac{\omega_y c(\varphi) - \omega_z s(\varphi)}{c(\vartheta)}; \\ \dot{\vartheta} = \omega_z c(\varphi) + \omega_y s(\varphi). \end{cases} \quad (2)$$

Математическая модель двигателей. Управление скоростью вращения винтов квадрокоптера осуществляется изменением уровня управляющих напряжений (или скважностью, если управляющий сигнал широтно-импульсный). Как

правило, двигатели квадрокоптера — это двигатели постоянного тока, обладающие своей динамикой. Поэтому в математической модели квадрокоптера необходимо учесть также динамику двигателей.

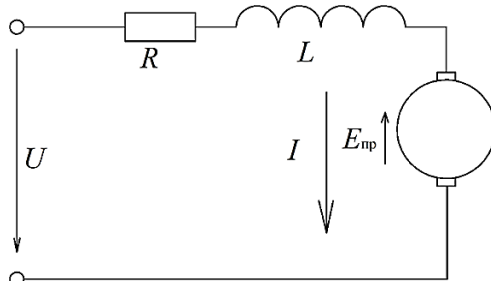


Рис. 2. Принципиальная схема двигателя постоянного тока

Наиболее часто в квадрокоптерах применяют бесколлекторные двигатели, якорь которых представляет собой набор неодимовых магнитов, а статор состоит из обмотки возбуждения, на который подается управляющее напряжение. В отличие от коллекторных двигателей, где якорь вращается внутри статора, у бесколлекторных якорь вращается вокруг статора, который находится

внутри [14]. В таком случае необходимо описать динамику цепи статора, а не якоря. Электрическая схема двигателя представлена на рис. 2.

Электрическая составляющая двигателя описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$U = RI + L \frac{dI}{dt} + E_{\text{пр}}. \quad (3)$$

Здесь U — управляющее напряжение, поступающее на вход двигателя; R — активное сопротивление обмотки статора; L — индуктивная составляющая обмотки статора; $E_{\text{пр}}$ — противоЭДС, наводимое магнитным полем Φ якоря в обмотке статора, которое рассчитывается следующим образом:

$$E_{\text{пр}} = 30C_e \Phi,$$

где C_e — электрическая постоянная.

Для двигателей малой и средней мощности индуктивная составляющая $E_{\text{пр}}$ на несколько порядков меньше остальных составляющих в уравнении (3), а следовательно, ей можно пренебречь. Механическая составляющая описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$C_m \Phi I = J \frac{d\omega}{dt} + \mu \omega \quad (4)$$

где C_m — электромеханическая постоянная; J — суммарный момент инерции ротора двигателя и винта; μ — коэффициент трения подшипника ротора; I — ток в обмотке статора; ω — угловая скорость вращения винта.

Объединяя уравнения (3) и (4) для электрической и механической частей двигателя, можно записать математическую модель каждого двигателя квадрокоптера в виде системы из двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dI}{dt} = \frac{U - RI}{L}; \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{C_m \Phi I - \mu \omega}{J}. \end{cases}$$

Величины R , C_m , Φ , L , μ будем считать равными для каждого двигателя ввиду достаточно высокого качества технологических процессов производства, а также с учетом того, что даже влияние небольших девиаций этих параметров на динамику системы могут быть легко скомпенсированы системой управления. Для всех четырех двигателей можно записать следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dI_1}{dt} = \frac{U_1 - RI_1}{L}; & \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{C_m \Phi I_1 - \mu \omega_1}{J}; \\ \frac{dI_2}{dt} = \frac{U_2 - RI_2}{L}; & \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{C_m \Phi I_2 - \mu \omega_2}{J}; \\ \frac{dI_3}{dt} = \frac{U_3 - RI_3}{L}; & \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{C_m \Phi I_3 - \mu \omega_3}{J}; \\ \frac{dI_4}{dt} = \frac{U_4 - RI_4}{L}; & \frac{d\omega_4}{dt} = \frac{C_m \Phi I_4 - \mu \omega_4}{J}; \end{cases} \quad (5)$$

Полная математическая модель квадрокоптера в форме Коши. Для исследования динамики квадрокоптера методами численного моделирования, т. е. численного решения задачи Коши, описание системы должно быть приведено к нормальной форме Коши, т. е. к системе дифференциальных уравнений первого порядка. Для этого для систем уравнений (2) и (5) сформируем следующие вектора (вектора состояния) для замены переменных:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ z \\ \dot{z} \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ \varphi \\ \psi \\ \vartheta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ \omega_1 \\ I_2 \\ \omega_2 \\ I_3 \\ \omega_3 \\ I_4 \\ \omega_4 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Тогда полная математическая модель квадрокоптера, описывающая динамику самого квадрокоптера и динамику двигателей с учетом замены переменных из уравнения (6), в нормальной форме Коши будет иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} = \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = \frac{P(s(x_{11})s(x_{10}) - c(x_{11})s(x_{12})c(x_{10})) - f_x}{m}; \\ \dot{x}_3 = x_4; \\ \dot{x}_4 = \frac{P(c(x_{12})c(x_{10})) - f_y - mg}{m}; \\ \dot{x}_5 = x_6; \\ \dot{x}_6 = \frac{P(s(x_{12})s(x_{11})c(x_{10}) + c(x_{11})s(x_{10})) - f_z}{m}; \\ \dot{x}_7 = \frac{(I_y - I_z)x_9x_8 + M_x}{I_x}; \\ \dot{x}_8 = \frac{(I_z - I_x)x_7x_9 + M_y}{I_y}; \\ \dot{x}_9 = \frac{(I_x - I_y)x_8x_7 + M_z}{I_z}; \\ \dot{x}_{10} = x_7 - tg(x_{12})(x_8c(x_{10}) - x_9s(x_{10})); \\ \dot{x}_{11} = \frac{x_8c(x_{10}) - x_9s(x_{10})}{c(x_{12})}; \\ \dot{x}_{12} = x_9c(x_{10}) + x_8s(x_{10}); \\ \dot{y}_1 = \frac{U_1 - Ry_1}{L}; \\ \dot{y}_2 = \frac{C_m\Phi y_1 - \rho y_2}{J}; \\ \dot{y}_3 = \frac{U_2 - Ry_3}{L}; \\ \dot{y}_4 = \frac{C_m\Phi y_3 - \rho y_4}{J}; \\ \dot{y}_5 = \frac{U_3 - Ry_5}{L}; \\ \dot{y}_6 = \frac{C_m\Phi y_5 - \rho y_6}{J}; \\ \dot{y}_7 = \frac{U_4 - Ry_7}{L}; \\ \dot{y}_8 = \frac{C_m\Phi y_7 - \rho y_8}{J}, \end{cases}$$

где величина P определяется на основании уравнения (1), которое с учетом принятой замены переменных примет вид

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = c_p \omega_i^2 + c_p \omega_i^2 + c_p \omega_i^2 + c_p \omega_i^2 = c_p y_2^2 + c_p y_4^2 + c_p y_6^2 + c_p y_8^2.$$

Выводы. В работе рассмотрен квадрокоптер как объект управления, описан принцип его работы и управления, получена полная математическая модель, описывающая его угловую и пространственную динамику с учетом динамики двигателей, как в виде системы дифференциальных уравнений, так и в нормальной форме Коши.

Литература

- [1] Цокурова И.Г., Денисов А.Н., Самойленко С.А. и др. Применение беспилотных летательных аппаратов типа квадрокоптер “DJI INSPIRE 1V 2.0” при поиске людей на местности. *Наука, техника и образование*, 2018, № 11, с. 43–46.
- [2] Зверев А.П., Гомонай М.В. Использование беспилотных воздушных средств – один из способов поиска людей в лесу. *Сб. мат. XIII Межд. науч.-практ. конф., посвященной Году культуры безопасности*, 2018, с. 366–368.
- [3] Ламков И.М., Чермошенцев А.Ю., Арбузов С.А. и др. Исследование возможностей применения квадрокоптера для съемки береговой линии обводненного карьера с целью государственного кадастрового учета. *Вестник СГУГиТ*, 2016, № 4, с. 200–209.
- [4] Черкасов Р.А., Ильина Т.А. Возможности использования квадрокоптеров для транспортировки грузов в логистике. *Вестник Дмитровградского инженерно-технологического института*, 2019, № 1, с. 100–107.
- [5] Минин И.В. Противопожарный мониторинг объектов нефтехимической промышленности малыми автономными беспилотными летательными аппаратами. *Фундаментальные исследования*, 2015, № 10-3, с. 503–506.
- [6] Биард Р., МакЛэйн Т. Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика. М., Техносфера, 2015.
- [7] Красовский А.Н., Суслова О.А. О математической модели управляемого движения дрона-квадрокоптера. *Аграрный вестник Урала*, 2016, № 4, с. 55–59.
- [8] Шилов К.Е. Разработка системы автоматического управления беспилотным летательным аппаратом мультироторного типа. *Труды московского физико-технического института*, 2014, № 4, с. 139–152.
- [9] Канатников А.Н. Управление плоским движением квадрокоптера. *Математика и математическое моделирование*, 2015, № 2, с. 23–36.
- [10] Гэн К.К., Чулин Н.А. Алгоритмы стабилизации для автоматического управления траекторным движением квадрокоптера. *Наука и образование: научное издание*, 2015, № 5, с. 218–235. URL: <http://engineering-science.ru/doc/771076.html>
- [11] Karpunin A.A., Titkov I.P. Evaluation of the influence of cross-connections accounting in the simplified mathematical model of the quadrotor motion in three-dimensional space. *Procedia Comput. Sci.*, 2019, vol. 150, pp. 663–670. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2019.02.040>
- [12] Erman B.J. A review of quadrotor: an underactuated mechanical system. *Annu. Rev. Control*, 2018, vol. 46, pp. 165–178. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2018.10.009>
- [13] Самый быстрый квадрокоптер в мире: мировой рекорд скорости. *popmech.ru: веб-сайт*. URL: <https://www.popmech.ru/technologies/news-377042-samy-bystryy-kvadrokopter-v-mire-mirovoy-rekord-skorosti/> (дата обращения: 02.03.2020).
- [14] Солодовников В.В., ред. Устройства и элементы систем автоматического регулирования. Техническая кибернетика. Кн. 3. Исполнительные устройства и сервомеханизмы. М., Машиностроение, 1976.

Лысухо Григорий Викторович — студент кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Масленников Андрей Леонидович — старший преподаватель кафедры «Системы автоматического управления», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Российская Федерация.

Ссылку на эту статью просим оформлять следующим образом:

Лысухо Г.В., Масленников А.Л. Квадрокоптер: динамика и управление. *Политехнический молодежный журнал*, 2020, № 05(46). [http://dx.doi.org/ 10.18698/2541-8009-2020-05-000](http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2020-05-000)

QUADCOPTER: DYNAMICS AND CONTROL

G.V. Lysukho

lyysukhogv@student.bmstu.ru

SPIN-code: 8276-4150

A.L. Maslennikov

amas@bmstu.ru

SPIN-code: 7087-6303

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation

Abstract

Development of multirotor UAVs and quadcopters as a special case make it possible to use in different areas of human life, not only for effective photo and video. In more serious tasks, for instance, in target tracking or in trajectory tracking by UAV, the control system should obey to high requirements, especially in accuracy and response rate. Design of such control demand the knowledge of quadcopter flight and control dynamics and also the adequate mathematical model for testing and debugging. In this paper flight and control dynamics of the quadcopter is discussed, and full nonlinear dynamical model including motors dynamics is presented.

Keywords

UAV, multirotor UAV, quadcopter, mathematical model, control, dynamics, flight dynamics, motors

Received 10.04.2020

© Bauman Moscow State Technical University, 2020

References

- [1] Tsokurova I.G., Denisov A.N., Samoylenko S.A., et al. Application of unmanned aircraft like DJI INSPIRE 1V 2.0 quadcopter at people search on site. *Nauka, tekhnika i obrazovanie*, 2018, no. 11, pp. 43–46 (in Russ.).
- [2] Zverev A.P., Gomonay M.V. [Application of unmanned aircraft – one of the ways to search people in the woods]. *Sb. mat. XIII Mezhd. nauch.-prakt. konf., posvyashchennoy Godu kul'tury bezopasnosti* [Proc. XIII Int. Sci.-Pract. Conf., dedicated to Year of Culture safety], 2018, pp. 366–368 (in Russ.).
- [3] Lamkov I.M., Chermoshentsev A.Yu., Arbuzov S.A., et al. The study of the possible application of quadrocopter for shooting the coastline of the flooded quarry with the purpose of state cadastral registration. *Vestnik SGUGiT* [Vestnik of SSUGT], 2016, no. 4, pp. 200–209 (in Russ.).
- [4] Cherkasov R.A., Il'ina T.A. Possibilities of using quadrocopters for transportation of cargo in logistics. *Vestnik Dmitrovgradskogo inzhenerno-tekhnologicheskogo instituta*, 2019, no. 1, pp. 100–107 (in Russ.).
- [5] Minin I.V. Fire-prevention monitoring of petrochemical industry objects using small autonomous aerial vehicles. *Fundamental'nye issledovaniya* [Fundamental research], 2015, no. 10-3, pp. 503–506 (in Russ.).
- [6] Beard R.W., McLain T.W. Small unmanned aircraft: theory and practice. Princeton University Press, 2012. (Russ. ed.: *Malye bespilotnye letatel'nye apparaty: teoriya i praktika*. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2015.)
- [7] Krasovskiy A.N., Suslova O.A. On a mathematical model of the controlled motion of a drone-quadrocopter. *Agrarnyy vestnik Urala* [Agrarian Bulletin of the Urals], 2016, no. 4, pp. 55–59 (in Russ.).

- [8] Shilov K.E. Development of automated control system for multirotor unmanned aircraft. *Trudy moskovskogo fiziko-tekhnicheskogo instituta*, 2014, no. 4, pp. 139–152 (in Russ.).
- [9] Kanatnikov A.N. The plane motion control of the quadrocopter. *Matematika i matematicheskoe modelirovanie* [Mathematics and Mathematical Modelling], 2015, no. 2, pp. 23–36 (in Russ.).
- [10] Gen K.K., Chulin N.A. Stabilization algorithms for automatic control of the trajectory movement of quadcopter. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie* [Science and Education: Scientific Publication], 2015, no. 5, pp. 218–235. URL: <http://engineering-science.ru/doc/771076.html> (in Russ.).
- [11] Karpunin A.A., Titkov I.P. Evaluation of the influence of cross-connections accounting in the simplified mathematical model of the quadrotor motion in three-dimensional space. *Procedia Comput. Sci.*, 2019, vol. 150, pp. 663–670. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2019.02.040>
- [12] Erman B.J. A review of quadrotor: an underactuated mechanical system. *Annu. Rev. Control*, 2018, vol. 46, pp. 165–178. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2018.10.009>
- [13] Samyy bystryy kvadrokopter v mire: mirovoy rekord skorosti [The fastest quadcopter in the world: world speed record]. *popmech.ru: website* (in Russ.). URL: <https://www.popmech.ru/technologies/news-377042-samyy-bystryy-kvadrokopter-v-mire-mirovoy-rekord-skorosti/> (accessed: 02.03.2020).
- [14] Solodovnikov V.V., ed. *Ustroystva i elementy sistem avtomaticheskogo regulirovaniya. Tekhnicheskaya kibernetika. Kn. 3. Iсполnitel'nye ustroystva i servomekhanizmy* [Devices and elements of automated regulation. Vol. 3. Actuators and servo units]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976 (in Russ.).

Lysukho G.V. — student, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Maslennikov A.L. — Senior Lecturer, Department of Automatic Control Systems, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation.

Please cite this article in English as:

Lysukho G.V., Maslennikov A.L. Quadcopter: Dynamics and Control. *Politekhnikheskiy molodezhnyy zhurnal* [Politechnical student journal], 2020, no. 05(46). <http://dx.doi.org/10.18698/2541-8009-2020-05-604.html> (in Russ.).