

Метод динамического расширения и смешивания регрессора

Ведяков Алексей Алексеевич¹

Ноябрь, 2022

¹Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники, Санкт-Петербург, Россия

- Задача оценивания параметров
- Метод градиентного спуска
- Метод динамического расширения и смешивания регрессора
- Задача оценивания частоты мультисинусоидального сигнала
- Техники обеспечения сходимости
- Заключение

Задача оценивания параметров

Рассмотрим линейную регрессию

$$y(t) = m_1(t)\theta_1 + m_2(t)\theta_2 + \cdots + m_n(t)\theta_n, \quad (1)$$

которую можно представить в матричной форме

$$y(t) = m^\top(t)\theta, \quad (2)$$

$$m(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ \vdots \\ m_n(t) \end{bmatrix}, \quad \theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$ — зависимая переменная, $m(t) \in \mathbb{R}^n$ — регрессор, $\theta \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных постоянных параметров. Сигналы $y(t)$ и $m(t)$ измеряемы.

Задача оценивания параметров

Рассмотрим линейную регрессию

$$y(t) = m_1(t)\theta_1 + m_2(t)\theta_2 + \cdots + m_n(t)\theta_n, \quad (1)$$

которую можно представить в матричной форме

$$y(t) = m^\top(t)\theta, \quad (2)$$

$$m(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) \\ m_2(t) \\ \vdots \\ m_n(t) \end{bmatrix}, \quad \theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$ — зависимая переменная, $m(t) \in \mathbb{R}^n$ — регрессор, $\theta \in \mathbb{R}^n$ — вектор неизвестных постоянных параметров. Сигналы $y(t)$ и $m(t)$ измеряемы.

Целью является построение оценки $\hat{\theta}(t)$, такой что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\theta - \hat{\theta}(t)\| = 0 \quad \text{или} \quad \|\theta - \hat{\theta}(t)\| \leq C_0 e^{-\rho_0 t} \quad \text{или} \quad \|\theta - \hat{\theta}(t)\| = 0 \quad \text{для } t \geq t_1. \quad (4)$$

Метод градиентного спуска

Для получения оценок параметров линейной регрессии (1) $\hat{\theta}$ может быть использован метод стандартного градиентного спуска:

$$\dot{\hat{\theta}} = Km(y - m^\top \hat{\theta}), \quad (5)$$

где $K \in \mathbb{R} > 0$ или $K \in \mathbb{R}^{n \times n} \succ 0$.

Метод градиентного спуска

Для получения оценок параметров линейной регрессии (1) $\hat{\theta}$ может быть использован метод стандартного градиентного спуска:

$$\dot{\hat{\theta}} = Km(y - m^\top \hat{\theta}), \quad (5)$$

где $K \in \mathbb{R} > 0$ или $K \in \mathbb{R}^{n \times n} \succ 0$.

Тогда для ошибки $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ справедливо

$$\dot{\tilde{\theta}} = -Km(t)m^\top(t)\tilde{\theta}. \quad (6)$$

Метод градиентного спуска

Для получения оценок параметров линейной регрессии (1) $\hat{\theta}$ может быть использован метод стандартного градиентного спуска:

$$\dot{\hat{\theta}} = Km(y - m^\top \hat{\theta}), \quad (5)$$

где $K \in \mathbb{R} > 0$ или $K \in \mathbb{R}^{n \times n} \succ 0$.

Тогда для ошибки $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ справедливо

$$\dot{\tilde{\theta}} = -Km(t)m^\top(t)\tilde{\theta}. \quad (6)$$

Известно, что положение равновесия $\theta_0 = 0_{n \times 1}$ модели (6) глобально экспоненциально устойчиво, тогда и только тогда, когда $m(t)$ удовлетворяет условию неисчезающего возбуждения (Persistent Excitation, PE), т.е. $\exists T, \delta > 0$, такие что

$$\int_t^{t+T} m(s)m^\top(s)ds \geq \delta I, \quad (7)$$

для всех $t \geq 0$.

Метод динамического расширения и смешивания регрессора (англ. Dynamic Regressor Extension и Mixing, DREM) — метод онлайн оценивания параметров линейной регрессионной модели, состоящий из следующих шагов

Метод динамического расширения и смешивания регрессора (англ. Dynamic Regressor Extension и Mixing, DREM) — метод онлайн оценивания параметров линейной регрессионной модели, состоящий из следующих шагов

- **расширение** (англ. extension) — получение дополнительных $n - 1$ регрессионных уравнений на основе исходного

Метод динамического расширения и смешивания регрессора (англ. Dynamic Regressor Extension и Mixing, DREM) — метод онлайн оценивания параметров линейной регрессионной модели, состоящий из следующих шагов

- **расширение** (англ. extension) — получение дополнительных $n - 1$ регрессионных уравнений на основе исходного
- **смешивание** (англ. mixing) — получение из n регрессионных уравнений с n параметрами n новых скалярных регрессий

Метод динамического расширения и смешивания регрессора (англ. Dynamic Regressor Extension и Mixing, DREM) — метод онлайн оценивания параметров линейной регрессионной модели, состоящий из следующих шагов

- **расширение** (англ. extension) — получение дополнительных $n - 1$ регрессионных уравнений на основе исходного
- **смешивание** (англ. mixing) — получение из n регрессионных уравнений с n параметрами n новых скалярных регрессий
- **оценивание** — оценивание неизвестных параметров из полученных скалярных регрессий

Метод динамического расширения и смешивания регрессора (англ. Dynamic Regressor Extension and Mixing, DREM) — метод онлайн оценивания параметров линейной регрессионной модели, состоящий из следующих шагов

- **расширение** (англ. extension) — получение дополнительных $n - 1$ регрессионных уравнений на основе исходного
- **смешивание** (англ. mixing) — получение из n регрессионных уравнений с n параметрами n новых скалярных регрессий
- **оценивание** — оценивание неизвестных параметров из полученных скалярных регрессий

S. Aranovskiy, A. Bobtsov, R. Ortega and A. Pyrkin, Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing, IEEE Transactions on Automatic Control, 2017

Шаги метода

1. Введем $n - 1$ линейных, \mathcal{L}_∞ -устойчивых операторов $H_i : \mathcal{L}_\infty \rightarrow \mathcal{L}_\infty$, чей выход, для любого ограниченного входа, может быть представлен как

$$(\cdot)_{f_i}(t) := [H_i(\cdot)](t) + \epsilon_t, \quad (8)$$

где ϵ_t — экспоненциально затухающий сигнал

Примеры:

- устойчивый линейный стационарный (LTI) фильтр

$$H_i(p) = \frac{\alpha_i}{p + \beta_i}$$

- оператор запаздывания

$$[H_i(\cdot)](t) := (\cdot)(t - d_i)$$

Шаги метода

1. Введем $n - 1$ линейных, \mathcal{L}_∞ -устойчивых операторов H_i
2. Применим фильтры к левой и правой части исходной регрессионной модели (1) для получения $n - 1$ новых регрессий:

$$y_{f_i} = m_{f_i}^\top \theta, \quad i = \overline{1, n-1}, \quad (9)$$

которые могут быть представлены в матричном виде

$$Y_e(t) = M_e(t)\theta, \quad (10)$$

$$Y_e := \begin{bmatrix} y \\ y_{f_1} \\ \vdots \\ y_{f_{n-1}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad M_e := \begin{bmatrix} m^\top \\ m_{f_1}^\top \\ \vdots \\ m_{f_{n-1}}^\top \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (11)$$

Шаги метода

1. Введем $n - 1$ линейных, \mathcal{L}_∞ -устойчивых операторов H_i
2. Применим фильтры к левой и правой части исходной регрессионной модели (1) для получения $n - 1$ новых регрессий и представим их в матричном виде $Y_e(t) = M_e(t)\theta$
3. Домножим слева на союзную (англ. *adjugate matrix*) матрицу для M_e и воспользуемся тем, что $\text{adj}\{M_e(t)\}M_e(t) = \det\{M_e(t)\}I_{n \times n}$, для получения n скалярных уравнений:

$$\bar{y}_i(t) = \phi(t)\theta_i, \quad (12)$$

где \bar{y}_i — i -я компонента вектора

$$\bar{Y}(t) := \text{adj}\{M_e(t)\}Y_e(t), \quad (13)$$

и $\phi(t) := \det\{M_e(t)\}$ — определитель матрицы M_e .

1. Введем $n - 1$ линейных, \mathcal{L}_∞ -устойчивых операторов H_i
2. Применим фильтры к левой и правой части исходной регрессионной модели (1) для получения $n - 1$ новых регрессий и представим их в матричном виде $Y_e(t) = M_e(t)\theta$
3. Домножим слева на союзную матрицу M_e и получим n скалярных уравнений $\bar{y}_i(t) = \phi(t)\theta_i$, где $\phi(t) := \det\{M_e(t)\}$
4. Применим градиентный метод для оценивания параметров

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma_i \phi(\bar{y}_i - \phi \hat{\theta}_i) \quad (14)$$

где для $\gamma_i > 0$ обеспечивается $\ddot{\tilde{\theta}}_i = -\gamma_i \phi^2 \tilde{\theta}_i$. Таким образом,

$$\boxed{\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_i(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(t) \notin \mathcal{L}_2} \quad (15)$$

С помощью оператора запаздывания

$$y(t) = m^\top(t)\theta, \quad (16)$$

$$y(t - \tau_1) = m^\top(t - \tau_1)\theta, \quad (17)$$

$$\vdots \quad (18)$$

$$y(t - \tau_{n-1}) = m^\top(t - \tau_{n-1})\theta, \quad (19)$$

$$(20)$$

«Расширение» с помощью линейного фильтра

С помощью линейного фильтра (линейной стационарной устойчивой системы) $W(p)$. Так как фильтр линейный и стационарный, то для него выполняется два свойства

$$W(p)[\alpha x] = \alpha W(p)[x], \quad W(p)[x + y] = W(p)[x] + W(p)[y]. \quad (21)$$

«Расширение» с помощью линейного фильтра

С помощью линейного фильтра (линейной стационарной устойчивой системы) $W(p)$. Так как фильтр линейный и стационарный, то для него выполняется два свойства

$$W(p)[\alpha x] = \alpha W(p)[x], \quad W(p)[x + y] = W(p)[x] + W(p)[y]. \quad (21)$$

Тогда применив фильтр к левой и правой части линейной регрессии, получим

$$W(p)y(t) = W(p) [\phi_1(t)\theta_1 + \phi_2(t)\theta_2 + \dots + \phi_n(t)\theta_n], \quad (22)$$

$$W(p)y(t) = \theta_1 W(p)[\phi_1(t)] + \theta_2 W(p)[\phi_2(t)] + \dots + \theta_n W(p)[\phi_n(t)], \quad (23)$$

$$y_f(t) = \phi_{1f}(t)\theta_1 + \phi_{2f}(t)\theta_2 + \dots + \phi_{nf}(t)\theta_n, \quad (24)$$

где

$$y_f(t) = \frac{\alpha}{p + \alpha} y(t), \quad \phi_{if}(t) = \frac{\alpha}{p + \alpha} \phi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

Метод DREM

1. Введем $n - 1$ линейных, \mathcal{L}_∞ -устойчивых операторов H_i
2. Получим $n - 1$ новых регрессий и представим их в матричном виде
 $Y_e(t) = M_e(t)\theta$
3. Домножим слева на союзную матрицу M_e и получим n скалярных уравнений $\bar{y}_i(t) = \phi(t)\theta_i$, где $\phi(t) := \det\{M_e(t)\}$
4. Применим градиентный метод для оценивания параметров

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma_i \phi(\bar{y}_i - \phi \hat{\theta}_i), \quad (26)$$

где для $\gamma_i > 0$

Метод DREM

1. Введем $n - 1$ линейных, \mathcal{L}_∞ -устойчивых операторов H_i
2. Получим $n - 1$ новых регрессий и представим их в матричном виде
 $Y_e(t) = M_e(t)\theta$
3. Домножим слева на союзную матрицу M_e и получим n скалярных уравнений $\bar{y}_i(t) = \phi(t)\theta_i$, где $\phi(t) := \det\{M_e(t)\}$
4. Применим градиентный метод для оценивания параметров

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma_i \phi(\bar{y}_i - \phi \hat{\theta}_i), \quad (26)$$

где для $\gamma_i > 0$

Тогда

$$\cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_i(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(t) \notin \mathcal{L}_2$$

Метод DREM

1. Введем $n - 1$ линейных, \mathcal{L}_∞ -устойчивых операторов H_i
2. Получим $n - 1$ новых регрессий и представим их в матричном виде
 $Y_e(t) = M_e(t)\theta$
3. Домножим слева на союзную матрицу M_e и получим n скалярных уравнений $\bar{y}_i(t) = \phi(t)\theta_i$, где $\phi(t) := \det\{M_e(t)\}$
4. Применим градиентный метод для оценивания параметров

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma_i \phi(\bar{y}_i - \phi \hat{\theta}_i), \quad (26)$$

где для $\gamma_i > 0$

Тогда

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_i(t) = 0 \Leftrightarrow \phi(t) \notin \mathcal{L}_2$
- Более того, если $\phi(t) \in PE$, тогда $\tilde{\theta}_i(t) \rightarrow 0$ экспоненциально быстро

Метод DREM

1. Введем $n - 1$ линейных, \mathcal{L}_∞ -устойчивых операторов H_i
2. Получим $n - 1$ новых регрессий и представим их в матричном виде
 $Y_e(t) = M_e(t)\theta$
3. Домножим слева на союзную матрицу M_e и получим n скалярных уравнений $\bar{y}_i(t) = \phi(t)\theta_i$, где $\phi(t) := \det\{M_e(t)\}$
4. Применим градиентный метод для оценивания параметров

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma_i \phi(\bar{y}_i - \phi \hat{\theta}_i), \quad (26)$$

где для $\gamma_i > 0$

Тогда

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\theta}_i(t) = 0 \Leftrightarrow \phi(t) \notin \mathcal{L}_2$
- Более того, если $\phi(t) \in PE$, тогда $\tilde{\theta}_i(t) \rightarrow 0$ экспоненциально быстро
- Во время переходного процесса $|\tilde{\theta}_i(t)|$ монотонно уменьшается (с поправкой на влияние ϵ_t).

Мы рассмотрели два условия: $m(t) \in PE$ и $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$, где

$$\phi(t) = \det \begin{bmatrix} m^\top \\ m_{f_1}^\top \\ \vdots \\ m_{f_{q-1}}^\top \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Вопрос: эти условия эквивалентны или нет?

Мы рассмотрели два условия: $m(t) \in PE$ и $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$, где

$$\phi(t) = \det \begin{bmatrix} m^\top \\ m_{f_1}^\top \\ \vdots \\ m_{f_{q-1}}^\top \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Вопрос: эти условия эквивалентны или нет? Ответ – НЕТ.

Мы рассмотрели два условия: $m(t) \in PE$ и $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$, где

$$\phi(t) = \det \begin{bmatrix} m^\top \\ m_{f_1}^\top \\ \vdots \\ m_{f_{q-1}}^\top \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Вопрос: эти условия эквивалентны или нет? Ответ – НЕТ.

Существуют случаи, когда

- $m(t) \in PE$ и $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$
- $m(t) \notin PE$ и $\phi(t) \in \mathcal{L}_2$

Мы рассмотрели два условия: $m(t) \in PE$ и $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$, где

$$\phi(t) = \det \begin{bmatrix} m^\top \\ m_{f_1}^\top \\ \vdots \\ m_{f_{q-1}}^\top \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Вопрос: эти условия эквивалентны или нет? Ответ – НЕТ.

Существуют случаи, когда

- $m(t) \in PE$ и $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$
- $m(t) \notin PE$ и $\phi(t) \in \mathcal{L}_2$

Более того, можно найти примеры, когда

- $m(t) \in PE$ и $\phi(t) \in \mathcal{L}_2$
- $m(t) \notin PE$ и $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$

Пример 1

Рассмотрим функцию $g(t) = \sin(t)(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ и выберем $H(p) = \frac{1}{p+1}$.

Пример 1

Рассмотрим функцию $g(t) = \sin(t)(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ и выберем $H(p) = \frac{1}{p+1}$.

Обратим внимание, что

$$\dot{g}(t) \notin \mathcal{L}_2 \text{ и } \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{g}(t) = 0.$$

Пример 1

Рассмотрим функцию $g(t) = \sin(t)(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ и выберем $H(p) = \frac{1}{p+1}$.

Обратим внимание, что

$$\dot{g}(t) \notin \mathcal{L}_2 \text{ и } \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{g}(t) = 0.$$

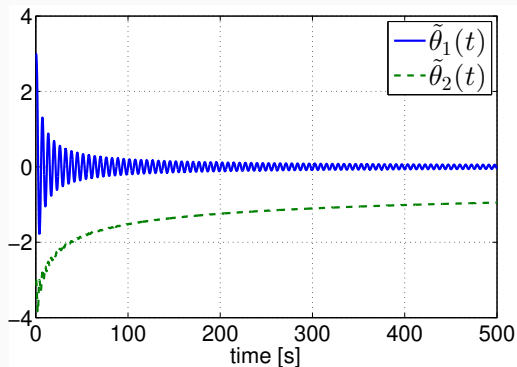
Рассмотрим регрессор

$$m(t) = [1, g + \dot{g}]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\sin t + \cos t}{(1+t)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\sin t}{2(1+t)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

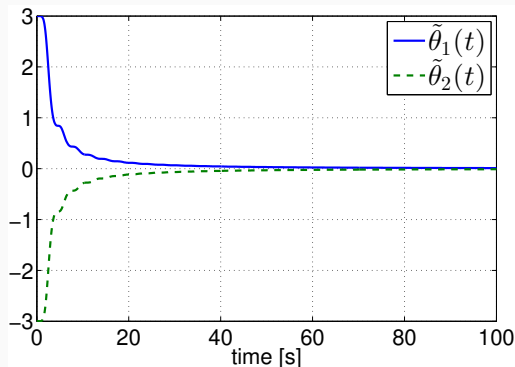
В этом случае $m(t) \notin PE$, однако $\phi(t) \notin \mathcal{L}_2$.

Пример 1. Результаты моделирования

Рассмотрим регрессию, где $m(t) = [1, g + \dot{g}]^T$ и $g(t) = \sin(t)(1+t)^{-\frac{1}{2}}$. Обратим внимание, что $m(t) \notin PE$.



(a) Градиентный метод с $\Gamma = 3I_2$



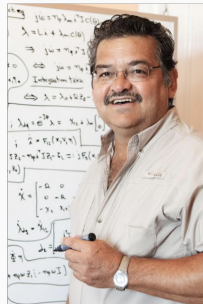
(b) DREM с $\gamma_{1,2} = 3$

Рис. 1: Переходные процессы ошибок оценивания $\tilde{\theta}(t)$, полученных с помощью градиентного метода и DREM



Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing*

Stanislav Aranovskiy, *Member, IEEE*, Alexey Bobtsov, *Senior Member, IEEE*,
Romeo Ortega, *Fellow, IEEE*, and Anton Pyrkin, *Member, IEEE*



Постановка задачи оценивания частоты сигнала

Рассмотрим измеряемый скалярный сигнал

$$u(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (29)$$

где $A_i > 0$, $\varphi_i \in [0, 2\pi)$, и $\omega_i > 0$ — неизвестные постоянные амплитуды, фазы и частоты соответственно, $i \in \bar{N} := \{1, 2, \dots, N\}$, N — количество гармоник в сигнале.

Постановка задачи оценивания частоты сигнала

Рассмотрим измеряемый скалярный сигнал

$$u(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (29)$$

где $A_i > 0$, $\varphi_i \in [0, 2\pi)$, и $\omega_i > 0$ — неизвестные постоянные амплитуды, фазы и частоты соответственно, $i \in \bar{N} := \{1, 2, \dots, N\}$, N — количество гармоник в сигнале.

Допущение. Все частоты ω_i , $i \in \bar{N}$, различны, т.е.

$$\omega_i \neq \omega_j \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \bar{N}. \quad (30)$$

Постановка задачи оценивания частоты сигнала

Рассмотрим измеряемый скалярный сигнал

$$u(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (29)$$

где $A_i > 0$, $\varphi_i \in [0, 2\pi)$, и $\omega_i > 0$ — неизвестные постоянные амплитуды, фазы и частоты соответственно, $i \in \bar{N} := \{1, 2, \dots, N\}$, N — количество гармоник в сигнале.

Допущение. Все частоты ω_i , $i \in \bar{N}$, различны, т.е.

$$\omega_i \neq \omega_j \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \bar{N}. \quad (30)$$

Целью является построение оценки $\hat{\omega}(t)$, такой что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\omega - \hat{\omega}(t)| = 0$$

Параметризация

Сигнал $u(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ можно представить, как выход генератора

$$\dot{z}(t) = \Gamma z(t), \quad z(0) = z_0 \in \mathbb{R}^{2N}, \quad (31)$$

$$u(t) = Hz, \quad (32)$$

где Γ имеет следующий характеристический полином:

$$P_\theta(s) := \prod_{i=1}^N (s^2 + \omega_i^2) = s^{2N} + \theta_1 s^{2N-2} + \dots + \theta_{N-1} s^2 + \theta_N, \quad (33)$$

здесь

$$\begin{cases} \theta_1 = \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 + \dots + \bar{\theta}_k, \\ \theta_2 = -\bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 - \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_3 - \dots - \bar{\theta}_{k-1} \bar{\theta}_k, \\ \vdots \\ \theta_k = (-1)^{k+1} \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 \dots \bar{\theta}_k, \end{cases} \quad (34)$$

$$\bar{\theta}_i = -\omega_i^2$$

Эквивалентная задача

Измеряемый сигнал

$$u(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i),$$

представляет собой выход конечномерного линейного генератора, матрица состояний которого имеет характеристический полином

$$P_{\theta}(s) = \prod_{i=1}^N (s^2 + \omega_i^2) = s^{2N} + \theta_1 s^{2N-2} + \dots \theta_{N-1} s^2 + \theta_N.$$

Эквивалентная задача

Измеряемый сигнал

$$u(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i),$$

представляет собой выход конечномерного линейного генератора, матрица состояний которого имеет характеристический полином

$$P_{\theta}(s) = \prod_{i=1}^N (s^2 + \omega_i^2) = s^{2N} + \theta_1 s^{2N-2} + \dots \theta_{N-1} s^2 + \theta_N.$$

Допущение:

$$\theta_i \neq \theta_j \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \bar{N}.$$

Эквивалентная задача

Измеряемый сигнал

$$u(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i),$$

представляет собой выход конечномерного линейного генератора, матрица состояний которого имеет характеристический полином

$$P_{\theta}(s) = \prod_{i=1}^N (s^2 + \omega_i^2) = s^{2N} + \theta_1 s^{2N-2} + \dots \theta_{N-1} s^2 + \theta_N.$$

Допущение:

$$\theta_i \neq \theta_j \quad \forall i \neq j, \quad i, j \in \bar{N}.$$

Целью является построение оценки $\hat{\theta}(t)$, такой что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\theta - \hat{\theta}(t)| = 0.$$

Методы оценивания частоты

Методы онлайн оценивания частоты строятся на основе

Метод Фазовой Автоподстройки Частоты (ФАПЧ, Phase Locked Loop, PLL)

Фильтр переменных состояния (State Variable Filter, SVF)

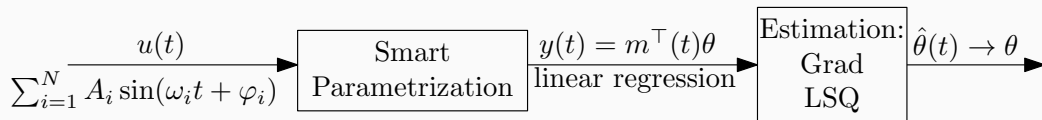
Адаптивный режекторный фильтр (Adaptive Notch Filter, ANF)

Обобщенный интегратор второго порядка (Second-Order Generalized Integrator, SOGI)

Адаптивные наблюдатели (Adaptive Observers)

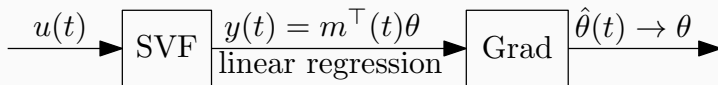
...

Классическая структура решения задачи



Асимптотическая или экспоненциальная сходимость

Одно из простых решений задачи



Рассмотрим фильтр

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bu(t),$$

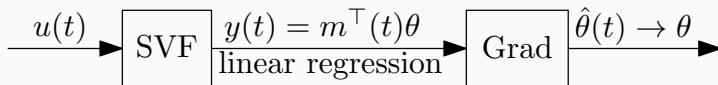
где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{2N-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

причем матрица A имеет гурвицев характеристический полином

$$a(s) = s^{2N} + a_{2N-1}s^{2N-1} + \dots a_1s + a_0. \quad (36) \quad 17$$

Одно из простых решений задачи



Рассмотрим фильтр

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bu(t),$$

$$\begin{aligned} y &= \sin \omega t \\ dy/dt &= \omega \cos \omega t \\ d^2y/dt^2 &= -\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

Определим выход, как

$$y(t) := \sum_{i=1}^{2N} a_{i-1} \xi_i(t) - a_0 u(t), \quad (37)$$

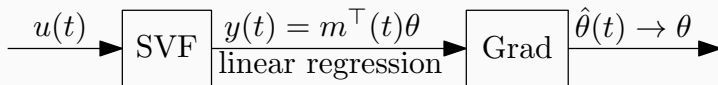
тогда



$$y(t) = m^T(t)\theta + \varepsilon(t), \quad (38)$$

где $m(t) := [\xi_{2N-1}(t), \xi_{2N-3}(t), \dots, \xi_3(t), \xi_1(t)]^T$, а $\varepsilon(t)$ — экспоненциально затухающая составляющая.

Одно из простых решений задачи



Рассмотрим фильтр

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^{2N} a_{i-1}\xi_i(t) - a_0u(t) = m^\top(t)\theta + \varepsilon(t) \quad (39)$$

Применим градиентный метод оценивания:

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = Km(t) \left(y(t) - m^\top(t)\hat{\theta}(t) \right), \quad (40)$$

где $K > 0$, обеспечивающий экспоненциальную сходимость $\hat{\theta}(t) \rightarrow \theta$

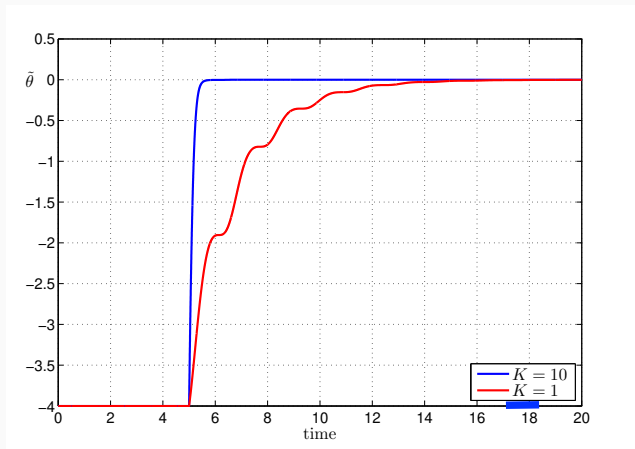


Рис. 2: График ошибок оценивания частоты для $u(t) = 1.2 \sin(2t + \frac{\pi}{3})$, $a(s) = (s + 2)^2$, $\theta = 4$, $\hat{\theta}(0) = 0$.

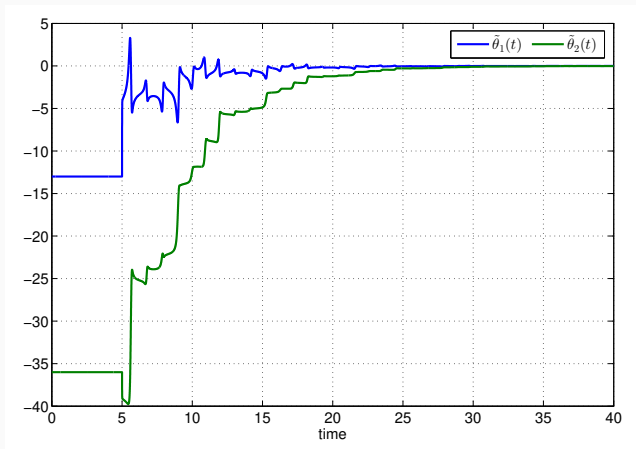


Рис. 3: График ошибок оценивания частоты для $u(t) = 1.2 \sin(2t + \frac{\pi}{3}) + 2 \sin(3t + \frac{\pi}{4})$,

$$K = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

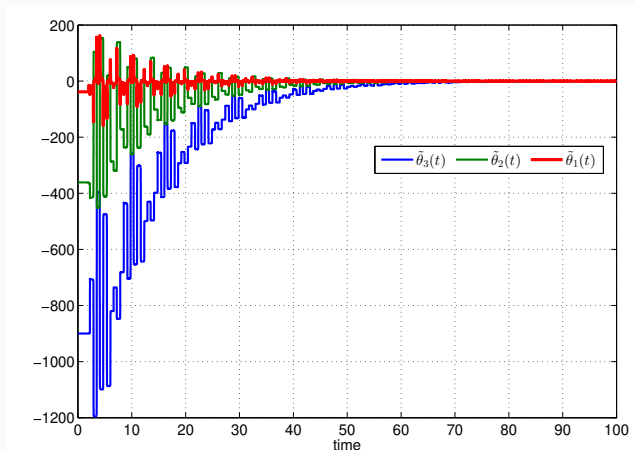
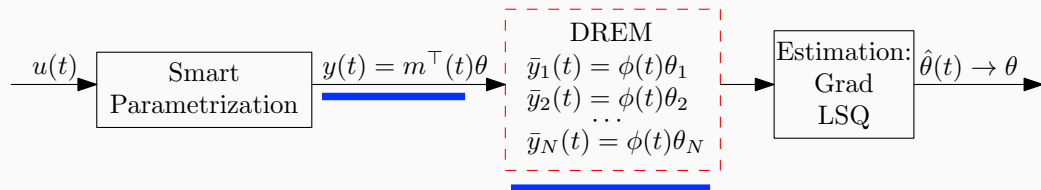


Рис. 4: График ошибок оценивания частоты для $N = 3$



Метод динамического расширения и смешивания регрессора (DREM)

Применяя DREM, мы можем обеспечить нестрогую монотонность переходных процессов: отсутствие пиков и колебаний

DREM в задаче оценивания частоты



Входной сигнал:

$$u(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i). \quad (41)$$

Регрессионная модель:

$$\underline{y(t) = m^T(t)\theta + \varepsilon(t).}$$

DREM:

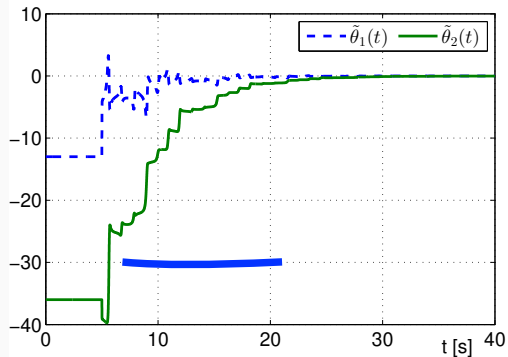
$$[H_1(\cdot)](t) := (\cdot)(t - d_1), \quad (42)$$

$$\underline{\bar{y}_i(t) = \phi(t)\theta_i} \quad (43)$$

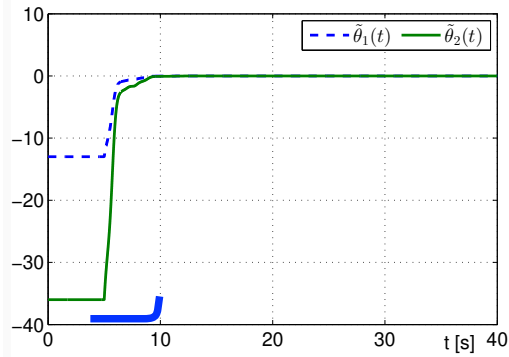
Алгоритм оценивания:

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \gamma_i \phi(\bar{y}_i - \phi \hat{\theta}_i). \quad (44) \quad 22$$

Результаты моделирования, $N = 2$



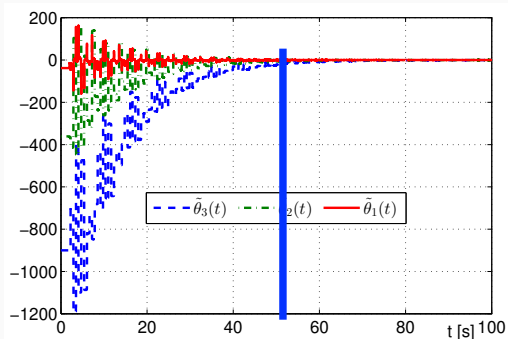
(a)



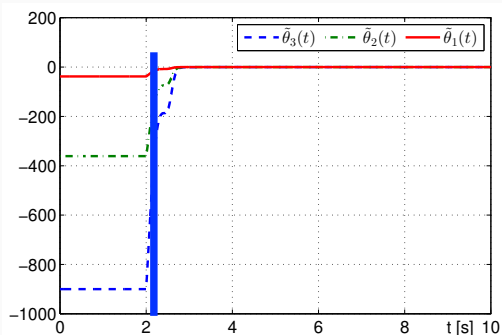
(b)

Рис. 5: Графики ошибок оценивания для алгоритма на основе стандартного градиентного спуска (слева) и DREM (справа)

Результаты моделирования, $N = 3$



(a)

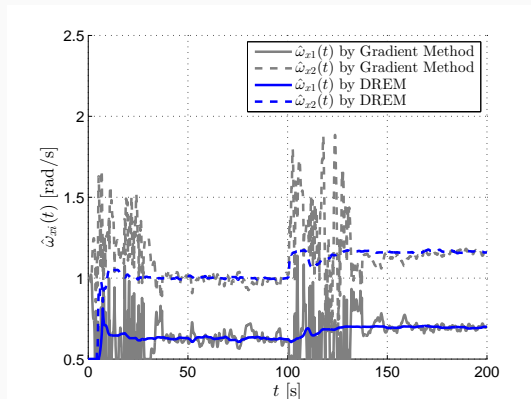


(b)

Рис. 6: Графики ошибок оценивания для алгоритма на основе стандартного градиентного спуска (слева) и DREM (справа)

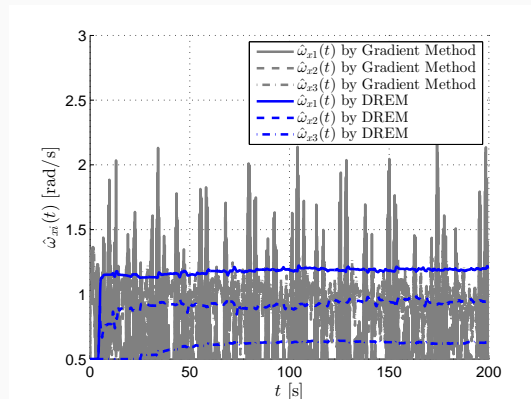
Обратите внимание на ось времени!

Экспериментальные результаты



$$g(t) = 14 \sin(t) + 11 \sin(0.63t), t < 100$$

$$g(t) = 14 \sin(0.70t) + 11 \sin(1.16t), t \geq 100.$$



$$g(t) = 12 \sin(1.16t) + 8 \sin(0.90t)$$

$$+ 7 \sin(0.63t)$$

Техники обеспечения сходимости

Метод DREM позволяет получить набор скалярных регрессионных моделей вида

$$\underline{y(t) = \phi(t)\theta}, \quad (45)$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$, $\phi(t) \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Описание проблемы

Метод DREM позволяет получить набор скалярных регрессионных моделей вида

$$y(t) = \phi(t)\theta, \quad (45)$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$, $\phi(t) \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Если регрессор является квадратично-интегрируемой функцией, т.е. $\phi \in \mathcal{L}_2$ или

$$\int_0^\infty \phi(\tau)^2 d\tau = \text{const}, \quad (46)$$

то градиентный алгоритм оценивания не обеспечивает сходимость ошибки оценивания к нулю.

Описание проблемы

Метод DREM позволяет получить набор скалярных регрессионных моделей вида

$$y(t) = \phi(t)\theta, \quad (45)$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$, $\phi(t) \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Если регрессор является квадратично-интегрируемой функцией, т.е. $\phi \in \mathcal{L}_2$ или

$$\int_0^\infty \phi(\tau)^2 d\tau = \text{const}, \quad (46)$$

то градиентный алгоритм оценивания не обеспечивает сходимость ошибки оценивания к нулю.

Примером такой модели является, например,

$$y(t) = \underline{e^{-t}}\theta \quad (47)$$

Домножим модель

$$y(t) = \phi(t)\theta, \quad (48)$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$, $\phi(t) \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$, слева и справа на $\phi(t)$ и получим

$$\underline{\phi(t)}y(t) = \underline{\phi^2(t)}\theta. \quad (49)$$

Техники обеспечения сходимости: на основе интегрирования

Домножим модель

$$y(t) = \phi(t)\theta, \quad (48)$$

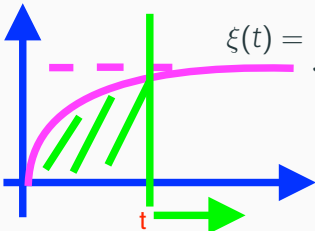
где $y(t) \in \mathbb{R}$, $\phi(t) \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$, слева и справа на $\phi(t)$ и получим

$$\phi(t)y(t) = \phi^2(t)\theta. \quad (49)$$

После чего проинтегрируем левую и правую часть и получим

$$\xi(t) = \zeta(t)\theta, \quad (50)$$

где


$$\xi(t) = \int_0^t \phi(\tau)y(\tau)d\tau, \quad \zeta(t) = \int_0^t \phi(\tau)^2 d\tau. \quad (51)$$

Техники обеспечения сходимости: на основе интегрирования

Домножим модель

$$\underline{y(t) = \phi(t)\theta}, \quad (48)$$

где $y(t) \in \mathbb{R}$, $\phi(t) \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$, слева и справа на $\phi(t)$ и получим

$$\phi(t)y(t) = \phi^2(t)\theta. \quad (49)$$

После чего проинтегрируем левую и правую часть и получим

$$\underline{\xi(t) = \zeta(t)\theta}, \quad (50)$$

где

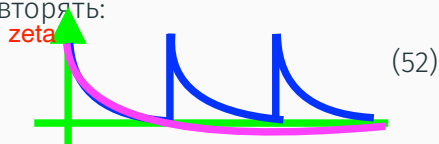
$$\xi(t) = \int_0^t \phi(\tau)y(\tau)d\tau, \quad \zeta(t) = \int_0^t \phi(\tau)^2d\tau. \quad (51)$$

Для модели (50) справедливо $\underline{\zeta(t) \notin \mathcal{L}_2}$, если существует хотя бы один момент времени t_1 такой, что значение ϕ в его окрестности отлично от нуля.

Техники обеспечения сходимости: на основе блока запаздывания

Сохраним ненулевые значения и будем их повторять:

$$\xi(t) = \zeta(t)\theta,$$



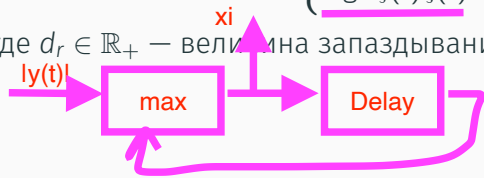
где

$$\xi(t) = \begin{cases} s \cdot \max \{ |y(t)|, |\xi(t - d_r)| \} & \text{если } t \geq d_r, \\ \xi(t) = y(t) & \text{иначе,} \end{cases} \quad (53)$$

$$\zeta(t) = \begin{cases} \max \{ |\phi(t)|, |\zeta(t - d_r)| \} & \text{если } t \geq d_r, \\ \zeta(t) = \phi(t) & \text{иначе,} \end{cases} \quad (54)$$

$$s = \begin{cases} \text{sign} \phi(t) y(t) & \text{если } \phi(t) y(t) \neq 0, \\ \text{sign} \zeta(t) \xi(t) & \text{иначе,} \end{cases} \quad (55)$$

где $d_r \in \mathbb{R}_+$ — величина запаздывания, $|\cdot|$ — абсолютное значение.



Техники обеспечения сходимости: на основе блока запаздывания

Сохраним ненулевые значения и будем их повторять:

$$\underline{\xi(t) = \zeta(t)\theta}, \quad (52)$$

где

$$\xi(t) = \begin{cases} s \cdot \max \{|y(t)|, |\xi(t - d_r)|\} & \text{если } t \geq d_r, \\ \xi(t) = y(t) & \text{иначе,} \end{cases} \quad (53)$$

$$\zeta(t) = \begin{cases} \max \{|\phi(t)|, |\zeta(t - d_r)|\} & \text{если } t \geq d_r, \\ \zeta(t) = \zeta(t) & \text{иначе,} \end{cases} \quad (54)$$

$$s = \begin{cases} \text{sign} \phi(t)y(t) & \text{если } \phi(t)y(t) \neq 0, \\ \text{sign} \zeta(t)\xi(t) & \text{иначе,} \end{cases} \quad (55)$$

где $d_r \in \mathbb{R}_+$ — величина запаздывания, $|\cdot|$ — абсолютное значение.

Для модели (52) справедливо $\underline{\zeta(t) \notin \mathcal{L}_2}$, если существует хотя бы один момент времени t_1 такой, что значение ϕ в его окрестности отлично от нуля.

Техники обеспечения сходимости: оценивание за конечное время

Пусть $\hat{\theta}$ — оценка полученная с помощью градиентного метода, тогда оценка за конечное время может быть вычислена, как

$$\hat{\theta}_{FT}(t) = \frac{\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)w_c(t)}{1 - w_c(t)}, \quad (56)$$

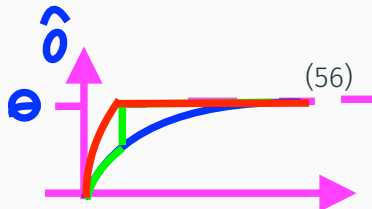
где

$$w_c(t) = \begin{cases} \mu & \text{если } w(t) \geq \mu, \\ w(t) & \text{иначе,} \end{cases} \quad (57)$$

где $\mu \in (0, 1)$,

$$\dot{w}(t) = -\gamma\phi^2(t)w(t), \quad w(0) = 1, \quad (58)$$

где γ — коэффициент адаптации из градиентного алгоритма (значения должны быть одинаковы)



Рассмотрим ошибку оценивания $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma \phi^2(t) \tilde{\theta}(t) \quad (59)$$

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0) e^{-\gamma \int_0^t \phi^2(\tau) d\tau} \quad (60)$$

$$\theta - \hat{\theta}(t) = (\theta - \hat{\theta}(0)) e^{-\gamma \int_0^t \phi^2(\tau) d\tau} \quad (61)$$

Рассмотрим ошибку оценивания $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma \phi^2(t) \tilde{\theta}(t) \quad (59)$$

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0) e^{-\gamma \int_0^t \phi^2(\tau) d\tau} \quad (60)$$

$$\theta - \hat{\theta}(t) = (\theta - \hat{\theta}(0)) e^{-\gamma \int_0^t \phi^2(\tau) d\tau} \quad (61)$$

Введем переменную $w_1 = \underline{e^{-\gamma \int_0^t \phi^2(\tau) d\tau}}$, тогда

$$\theta - \hat{\theta}(t) = (\theta - \hat{\theta}(0)) w_1(t) \quad (62)$$

$$\theta - \hat{\theta}(t) = \theta w_1(t) - \hat{\theta}(0) w_1(t) \quad (63)$$

$$\theta - \theta w_1(t) = \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0) w_1(t) \quad (64)$$

$$\theta(1 - w_1(t)) = \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0) w_1(t) \quad (65)$$

Рассмотрим ошибку оценивания $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$

$$\dot{\tilde{\theta}}(t) = -\gamma \phi^2(t) \tilde{\theta}(t) \quad (59)$$

$$\tilde{\theta}(t) = \tilde{\theta}(0) e^{-\gamma \int_0^t \phi^2(\tau) d\tau} \quad (60)$$

$$\theta - \hat{\theta}(t) = (\theta - \hat{\theta}(0)) e^{-\gamma \int_0^t \phi^2(\tau) d\tau} \quad (61)$$

Введем переменную $w_1 = e^{-\gamma \int_0^t \phi^2(\tau) d\tau}$, тогда

$$\theta - \hat{\theta}(t) = (\theta - \hat{\theta}(0)) w_1(t) \quad (62)$$

$$\theta - \hat{\theta}(t) = \theta w_1(t) - \hat{\theta}(0) w_1(t) \quad (63)$$

$$\theta - \theta w_1(t) = \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0) w_1(t) \quad (64)$$

$$\theta(1 - w_1(t)) = \hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0) w_1(t) \quad (65)$$

Если $1 - w_1(t) \neq 0$, тогда

$$\hat{\theta}^{FT}(t) = \frac{1}{1 - w_1(t)} \left(\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0) w_1(t) \right) \quad (66)$$

Однако, при $t = 0$ значение $1 - w_1(t)$ равно 0.

Однако, при $t = 0$ значение $1 - w_1(t)$ равно 0.

1. Можно задать время срабатывания. Если для $t \geq t_f$ известно, что $w_1 < 1$:

- При $t < t_f$

$$\hat{\theta}^{FT}(t) = \left(\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)w_1(t) \right) \quad (67)$$

- При $t \geq t_f$

$$\hat{\theta}^{FT}(t) = \frac{1}{1 - w_1(t)} \left(\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)w_1(t) \right) \quad (68)$$

Однако, при $t = 0$ значение $1 - w_1(t)$ равно 0.

1. Можно задать время срабатывания. Если для $t \geq t_f$ известно, что $w_1 < 1$:

- При $t < t_f$

$$\hat{\theta}^{FT}(t) = \left(\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)w_1(t) \right) \quad (67)$$

- При $t \geq t_f$

$$\hat{\theta}^{FT}(t) = \frac{1}{1 - w_1(t)} \left(\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)w_1(t) \right) \quad (68)$$

2. Можно задать порог срабатывания $w_1 \leq \rho$, $\rho \in (0, 1)$

- При $w_1 > \rho$

$$\hat{\theta}^{FT}(t) = \frac{1}{1 - \rho} \left(\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)w_1(t) \right) \quad (69)$$

- При $w_1 \leq \rho$

WC

$$\hat{\theta}^{FT}(t) = \frac{1}{1 - w_1(t)} \left(\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)w_1(t) \right) \quad (70)$$

- DREM позволяет получить набор независимых скалярных регрессионных моделей
- DREM позволяет улучшить качество переходных процессов
- DREM может обеспечить сходимость, даже если исходных регрессор не удовлетворяет условию незатухающего возбуждения
- Сходимость может быть проверена во время работы
- DREM обеспечивает (нестрогую) монотонность переходных процессов: отсутствие пиков и колебаний
- DREM позволяет оценивать параметры независимо, в том числе оценивать только часть параметров, что полезно в случае перепараметризации
- DREM позволяет использовать специальные техники обеспечения сходимости, применимые к скалярным моделям