

# **БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

На правах рукописи

УДК 517.911.5

**КАЧАН**

**Илья Вадимович**

## **Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста**

Диссертация на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения,  
динамические системы и оптимальное управление»

Научный руководитель

кандидат физико-математических наук,

доцент,

Васьковский М. М.

Минск, 2019

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И (ИЛИ) УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ . . . . .	4
ВВЕДЕНИЕ . . . . .	6
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ . . . . .	16
ГЛАВА 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ . . . . .	20
1.1 Теория меры . . . . .	20
1.2 Теория линейных операторов и полугрупп . . . . .	22
1.3 Теория случайных процессов . . . . .	23
1.4 Интегралы по броуновскому движению . . . . .	26
1.4.1 Потраекторный интеграл Янга . . . . .	27
1.4.2 Стохастический интеграл Ито . . . . .	28
1.4.3 Потраекторный интеграл Губинелли . . . . .	32
ГЛАВА 2. УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРИТЯЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ . . . . .	36
2.1 Стохастические дифференциальные уравнения в конечномерных гильбертовых пространствах . . . . .	36
2.2 Стохастические дифференциально-функциональные уравнения в произвольных гильбертовых пространствах . . . . .	43
2.2.1 Теорема о притяжении к нулю . . . . .	50
ГЛАВА 3. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ, ИМЕЮЩИМИ РАЗЛИЧНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ХАРСТА, БОЛЬШИЕ $1/3$ . . . . .	57
3.1 Формула Ито . . . . .	60
3.2 Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями . . . . .	63
3.2.1 Вспомогательные результаты . . . . .	66
3.2.2 Теорема о непрерывной зависимости от начальных данных . . . . .	75
3.3 Асимптотические разложения в окрестности нуля . . . . .	80
3.4 Математические ожидания повторных интегралов от дробных броуновских движений . . . . .	88

3.5 Коммутативный случай . . . . .	97
ГЛАВА 4. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВ- СКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА . . . . .	100
4.1 Методы интегрирования одномерных уравнений смешанного типа . . . . .	101
4.1.1 Приведение к простейшим уравнениям . . . . .	101
4.1.2 Приведение к линейным неоднородным уравнениям . .	106
4.1.3 Переход к уравнению Стратоновича . . . . .	108
4.2 Дифференциальные уравнения для математических ожиданий и плотностей распределений решений . . . . .	111
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	119
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК . . . . .	121

# ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И (ИЛИ) УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$a \vee b$	большее из чисел $a$ и $b$ , т.е. $\max\{a, b\}$
$a \wedge b$	меньшее из чисел $a$ и $b$ , т.е. $\min\{a, b\}$
$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	множества натуральных, действительных и комплексных чисел соответственно
$\mathbb{R}^+$	множество действительных положительных чисел
$\mathbb{R}^d$	евклидово пространство векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ , $x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_d y_d$ и нормой $ x  = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	пространство матриц $X = (x_{ij})$ , $i = 1, \dots, n$ , $j = 1, \dots, m$ размера $n \times m$ с вещественными элементами $x_{ij} \in \mathbb{R}$
$A^\top$	транспонированная матрица
$A^*$	сопряженный оператор
$\text{tr} A$	след оператора
$I_d$	единичная матрица в $\mathbb{R}^{d \times d}$
$\text{col}(a_1, \dots, a_n)$	матрица, состоящая из строк $a_1, \dots, a_n$
$\otimes$	тензорное произведение в пространстве $\mathbb{R}^d$
$ \cdot _W$	евклидова норма в конечномерном пространстве $W$
$\ \cdot\ _X$	норма в пространстве бесконечномерном пространстве $X$
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	скалярное произведение в пространстве $H$
$\mathcal{L}(U_1, U_2)$	пространство линейных ограниченных операторов, действующих из $U_1$ в $U_2$
$L_2(U_1, U_2)$	множество операторов Гильберта-Шмидта, действующих из $U_1$ в $U_2$
$C(U_1, U_2)$	пространство непрерывных функций $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ с нормой $\ \varphi\ _\infty = \max_{x \in U_1}  \varphi(x) _{U_2}$
$C_b^k(U_1, U_2)$	пространство функций $\varphi: U_1 \rightarrow U_2$ имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка $k$ включительно с нормой $\ \varphi\ _{C_b^k} = \sum_{j=0}^k \ D^j \varphi\ _\infty$
$\overline{\text{co}} X$	замыкание выпуклой оболочки множества $X$
$[X]_\varepsilon$	множество $\{x \in T : \rho(x, X) \leq \varepsilon\}$ , называемое $\varepsilon$ -окрестностью множества $X$ в метрическом пространстве $T$ с расстоянием $\rho$

$\mathbf{1}_A$     функция-индикатор множества  $A$   
п.н.    почти наверное

## ВВЕДЕНИЕ

Стохастические дифференциальные уравнения являются стремительно развивающейся областью исследований с множеством неразрешенных вопросов. Интерес к ним со стороны научного сообщества вызван, с одной стороны, многими плодотворными связями с другими математическими дисциплинами, а с другой — широким спектром приложений вне математики. В частности, стохастические дифференциальные уравнения находят свое применение в задачах фильтрации, детерминированных краевых задачах математической физики, финансовой и экономической областях, в задачах определения оптимального момента остановки, задачах оптимального размещения ценных бумаг, задачах расчета опционов и др. (см. [14, глава 1]).

Особое место в теории стохастических дифференциальных уравнений занимают проблемы асимптотического поведения решений, лежащие на стыке теории случайных процессов и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследованию асимптотических характеристик случайных процессов большое внимание уделяли И.И. Гихман и А.В. Скороход. Они — одни из создателей теории стохастических дифференциальных уравнений — вводили их для того, чтобы строго ставить и решать задачи асимптотического поведения случайных процессов (см. [5]).

Первая глава данной работы содержит предварительные сведения, известные результаты, необходимые для более глубокого понимания последующих глав работы.

Вторая глава данной работы посвящена исследованию устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. Несмотря на существенное усложнение объекта исследования, здесь определяющую роль по-прежнему играют методы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений: метод функционалов Ляпунова, метод интегральных неравенств, исследование устойчивости нелинейных уравнений по линейному приближению и др. Теория устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в конечномерных гильбертовых пространствах изучена наиболее полно. В монографии [36] рассматриваются уравнения относительно  $X \in \mathbb{R}^d$  со стандартным  $d$ -мерным броуновским движением  $W \in \mathbb{R}$  общего вида:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0 \quad (0.1)$$

с постоянными начальными условиями  $X(0, \omega) \equiv x \in \mathbb{R}^n$ . В ней доказаны аналоги теорем Ляпунова об устойчивости решений уравнения (0.1) с коэффициентами, удовлетворяющими по фазовой переменной глобальному условию Липшица:

$$|g(t, x) - g(y, t)| + |f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (0.2)$$

В монографии [16] излагается метод исследования устойчивости решений автономной системы с запаздыванием  $X_t = \{X(t + \tau) \mid -h \leq \tau \leq 0\} \in C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ :

$$dX(t) = f(X_t)dt + g(X_t)dW(t), \quad t \geq 0 \quad (0.3)$$

с начальными условиями  $X(0, \omega) = \xi(\omega)$  с помощью квадратичных функционалов Ляпунова. Отметим, что исследования в указанных монографиях проводятся с уравнениями (0.3), коэффициенты которых непрерывны. Для уравнений с разрывными коэффициентами существование решения в классическом смысле не гарантируется и для определения решений требуется привлечение дифференциальных включений [15]. Основная идея этой теории принадлежит А.Ф. Филиппову и состоит в том, что разрывные коэффициенты  $f(t, x)$ ,  $g(t, x)$  заменяются в каждой точке  $(t, x)$  на наименьшие выпуклые множества  $F(t, x)$ ,  $G(t, x)$ , содержащие все предельные точки  $f(t, x^*)$ ,  $g(t, x^*)$  соответственно при  $x^* \rightarrow x$ . Исследованию устойчивости систем с разрывными коэффициентами посвящена статья [7]. В ней А.А. Леваков методом знакопостоянных функций Ляпунова доказал теоремы об устойчивости решений автономной системы

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), \quad t \geq 0 \quad (0.4)$$

без запаздывания с разрывными коэффициентами  $f, g$ . Тем не менее результаты работ [36, 16, 7] не применимы к исследованию устойчивости неавтономных систем с разрывными коэффициентами.

В настоящей работе с помощью метода знакопостоянных функций Ляпунова [36, 7] доказана теорема об устойчивости решений системы

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t)))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0 \quad (0.5)$$

в предположении, что линеаризованная система

$$dX(t) = A(t)X(t)dt \quad (0.6)$$

является равномерно экспоненциально устойчивой. Под решением системы (0.5) понимается решение стохастического дифференциального включения, построенного по уравнению в смысле А.Ф. Филиппова, см. также [2].

Также вторая глава данной работы посвящена исследованию устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений в произвольных сепарабельных гильбертовых пространствах. В свою очередь, стохастические дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах представляют большой интерес, поскольку они охватывают классы дифференциально-функциональных уравнений, уравнений в частных производных и тем самым позволяют получать более точные модели реальных физических явлений. Многие классические задачи математической физики могут быть истолкованы и обобщены с применением аппарата стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах.

К примеру, рассмотрим задачу распространения тепла в стержне:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + f(t, u(t, x)), \quad t > 0, \quad 0 < x < l \\ u(0, x) &= \varphi(x), \quad 0 < x < l, \\ u(t, 0) &= u(t, l) = 0, \quad t > 0,\end{aligned}\tag{0.7}$$

где  $l$  — длина стержня,  $a$  — коэффициент температуропроводности. Решение  $u(t, x)$  этой задачи при фиксированных  $t, \omega$  можно рассматривать как элемент гильбертова пространства  $X(t) = u(t, \cdot) \in L_2[0, l]$ . Вводя оператор 2-й производной  $A = d^2/dx^2$ , принимающий значения в  $L_2[0, l]$  с областью определения  $\mathcal{D}(A) = \{u(x) \in C_2[0, l] : u(0) = u(l) = 0\}$ ; мы приходим к задаче Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка в гильбертовом пространстве  $H = L_2[0, l]$ . Обобщая ее с учетом случайных флуктуаций, получим новую задачу:

$$\begin{aligned}dX(t, \omega) &= (AX(t, \omega) + f(t, X(t, \omega)))dt + dW(t, \omega), \quad t > 0, X \in \mathcal{D}(A), \\ X(0, \omega) &= \varphi(\omega),\end{aligned}\tag{0.8}$$

где  $\varphi(\omega) = \varphi(\omega, \cdot) \in H$ , а  $dW(t, \omega)$  описывает белый шум.

С другими примерами использования стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах (в нейрофизиологии, генетике популяций и т.д.) можно ознакомиться в монографии [49, введение].

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$dX(t, \omega) = (AX(t, \omega) + f(t, X(t, \omega)))dt + g(t, X(t, \omega))dW(t), \quad t > 0, X \in H \tag{0.9}$$



в сепарабельном гильбертовом пространстве  $H$  с начальным условием  $X(0, \omega) = \xi(\omega)$ , коэффициенты  $f$  и  $g$  которого удовлетворяют локальному условию Липшица и имеют линейный порядок роста, а линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор  $A: H \rightarrow H$  порождает  $C_0$ -полугруппу  $S(t)$ ,  $t \geq 0$  (см. [47]). Существуют несколько определений решений для уравнения (0.9) (см. [49, 23]). Как правило, рассматривают либо сильные решения  $X(t, \omega)$  как процессы, удовлетворяющие интегральному уравнению

$$X(t, \omega) = \xi(\omega) + \int_0^t (AX(s, \omega) + f(s, X(s, \omega))) ds + \int_0^t g(s, X(s, \omega)) dW(s), \quad (0.10)$$

или же слабые решения  $X(t, \omega)$  как процессы, удовлетворяющие интегральному уравнению

$$X(t, \omega) = S(0)\xi(\omega) + \int_0^t S(t-s)f(s, X(s, \omega))ds + \int_0^t S(t-s)g(s, X(s, \omega))dW(s). \quad (0.11)$$

К настоящему времени получены глубокие результаты о количественных и качественных свойствах решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. Теоремы о существовании и асимптотических свойствах исходного уравнения с начальным условием доказаны в работах [53], [7–А]. В работах К. Лю [39, 40] были получены п.н. точные асимптотические оценки для решений исходного уравнения с начальным условием без запаздывания с коэффициентами, удовлетворяющими глобальному условию Липшица. В статье А. Ичикава [34] получены оценки для математического ожидания функционала Ляпунова от решения исходной задачи без запаздывания, в случае автономных коэффициентов  $f(s, X(s)) = f(X(s))$ ,  $g(s, X(s)) = g(X(s))$ , удовлетворяющих глобальному условию Липшица. В статье Т. Танигучи [54] доказана экспоненциальная устойчивость  $p$ -го момента решения исходного уравнения  $\mathbb{E} \|X(s, \omega)\|^p$ ,  $p > 2$ , в предположении, что коэффициенты  $f, g$  удовлетворяют локальному условию Липшица.

Настоящая работа призвана обобщить полученные результаты. Во второй главе рассматривается уравнение (0.9) с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица и имеющими линейный порядок роста. Для таких уравнений доказана теорема о притяжении слабых решений к нулю.

Третья и четвертая главы данной работы посвящены стохастическим дифференциальным уравнениям с дробными броуновскими движениями. В середине девяностых Т. Лайонс в фундаментальной работе [41] разработал теорию

грубых траекторий (rough path). Данная теория нашла активное применение в контексте стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, что было показано Л. Кутэн [22], М. Хайрером и П. Фрицем [25], а также самим Т. Лайонсом. В данной работе был использован альтернативный подход М. Губинелли [30] к определению потраекторных интегралов, во многом схожий с подходом Т. Лайонса, но позволяющий получать более простым путем результаты в приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям с дробными броуновскими движениями, избегая обращения к сложным алгебраическим структурам, возникающим в [41].

Основным объектом изучения третьей главы станет следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = f(X_t)dB_t, \quad t \in [0, T], \quad (0.12)$$

в котором  $f = (f_0, \dots, f_d)$ ,  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0 \dots, d$ , — достаточно гладкие функции с ограниченными производными,  $B_t = (B_t^{(0)}, \dots, B_t^{(d)})^T$ ,  $B_t^{(0)} = t$ ,  $B_t^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, d$  — независимые одномерные дробные броуновские движения с индексами Харста  $H_i \in (1/3, 1)$ . Через  $X_t^x$  будем обозначать решение уравнения (0.12) с начальным условием  $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$ .

Стоит отметить, что уравнение (0.12) охватывает важный частный случай, когда все индексы Харста  $H_i = 1/2$  и, соответственно, дробные броуновские движения  $B_t^{(i)}$  обращаются в стандартные винеровские процессы. Известно, что дробное броуновское движение  $B_t^{(i)}$  является семимартингалом, если и только если его индекс Харста равен  $1/2$ . Таким образом, классический стохастический анализ Ито не применим к уравнению (0.12). Стохастические дифференциальные уравнения со сносом, дробными броуновскими движениями и винеровскими процессами принято называть стохастическими дифференциальными уравнениями смешанного типа. Д. Ньюаларт и Дж. Гуэрра [32] доказали теорему существования и единственности для уравнений, содержащих винеровский процесс  $W_t$  и дробное броуновское движение  $B_t^H$  с индексом Харста  $H > 1/2$ , сочетая при этом теории интегрирования Ито и Янга. Ю.С. Мишура и Г.М. Шевченко [43] обобщили теорему существования для таких уравнений на случай, когда от процессов  $W_t$  и  $B_t^H$  не требуется их независимость. Некоторые другие обобщения теорем существования, а также свойства стохастических дифференциальных уравнений и включений смешанного типа приведены в статьях [3, 12, 13, 11, 8, 38].

Уравнение (0.12) находит множество приложений, главным образом в физике и финансовой математике. М. Клепцына, А. Ле Бретон и М.-К. Рубо [37] использовали модели с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, для описания сигнальных процессов в фильтрационных системах. П. Черидито [19] рассматривает модель Самуэльсона для движения цен на акции, используя дробные броуновские движения, имеющие различные индексы Харста. М. Зале [57] исследует стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа в контексте моделей облигаций и акций. Некоторые другие финансовые приложения уравнений (0.12) также можно найти в книге Ю.С. Мишуры [44, глава 5].

Цель третьей главы состоит в том, чтобы исследовать при малых значениях времени  $t$  семейство операторов

$$(\mathbf{P}_t g)(x) = \mathbb{E}(g(X_t^x)), \quad (0.13)$$

соответствующих решениям общих уравнений (0.12) в предположении, что функция  $g$  является достаточно гладкой, и ее производные ограничены. Стоит отметить, что асимптотические разложения семейства операторов (0.13) при малых значениях времени  $t$  могут быть применены для получения дифференциальных уравнений в частных производных колмогоровского типа для математических ожиданий от решений уравнения (0.12) в некоторых частных случаях (например, когда все индексы Харста  $H_i = 1/2$  или в так называемом коммутативном случае, описанном в разделе 3.5 третьей главы).

Известны несколько работ, посвященных исследованию семейства операторов (0.13). Ф. Бадуэн и Л. Кутэн [17] вывели асимптотическую формулу для операторов  $\mathbf{P}_t$ , используя теорию грубых траекторий (rough paths) Т. Лайонса [41] в случае, когда  $H_1 = \dots = H_d > 1/3$  для уравнения (0.12) без сноса. А. Нойенкирх, И. Нурдэн [45] рассматривали уравнение (0.12) со сносом в случае  $H_1 = \dots = H_d > 1/3$  и получили асимптотическую формулу для операторов  $\mathbf{P}_t$ , используя теорию интегрирования по грубым траекториям М. Губинелли [30], [25, глава 4]. В третьей главе результаты статей [17, 45] будут обобщены на случай уравнения (0.12) со сносом и дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста. В данной главе уравнение (0.12) рассматривается с точки зрения теории грубых траекторий [41, 25], а все интегралы, в свою очередь, рассматриваются как интегралы типа Стратоновича. Уравнение (0.12) в рамках теории интегрирования по грубым траекториям, развитой М. Губинелли [31], может рассматриваться как уравнение типа

Ито. М. Хайрер и Д. Келли установили связь между стохастическими дифференциальными уравнениями с дробными броуновскими движениями типа Стратоновича и Ито, а также доказали аналог корректирующей формулы Ито-Стратоновича [33].

Третья глава состоит из 5 разделов. Основным результатом представленной главы является теорема об асимптотических разложениях семейства операторов (0.13) при малых значениях времени  $t$ , обобщающая результаты работ [17, 45] на случай дробного броуновского движения, компоненты которого имеют различные индексы Харста. Кроме того, в представленной главе получена формула типа Ито (формула замены переменных) для уравнения (0.12), выведены формулы для вычисления коэффициентов выше упомянутых асимптотических разложений в случае, когда все индексы Харста  $H_i > 1/2$ , исследован так называемый коммутативный случай, в котором были получены дифференциальные уравнения в частных производных типа Колмогорова для функций  $\varphi(x, t) = \mathbb{E}(g(X_t^x))$ , а также исследована непрерывная зависимость решений на ограниченном отрезке от начальных данных.

В разделе, посвященном непрерывной зависимости, наряду с уравнением (0.12) рассматривается аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\tilde{X}_t = \tilde{f}(\tilde{X}_t)dB_t, \quad t \in [0, T], \quad (0.14)$$

где  $\tilde{f} = (\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_d)$ ,  $\tilde{f}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, \dots, d$  — также достаточно гладкие функции с ограниченными производными.

Первые результаты, касающиеся непрерывной зависимости от начальных данных решений уравнений (0.12), (0.14) общего вида, где в качестве  $(B_t)_{t \in [0, T]}$  выступают функции, непрерывные по Гельдеру с показателем  $\alpha > 1/3$ , были получены в работе М. Губинелли [30, предложение 8]. В ней же впервые вводится понятие потраекторного интеграла для уравнений (0.12). В монографии [25, гл. 4, 8] выводятся оценки простого вида для потраекторных интегралов Губинелли и также имеется результат, связанный с интегральной непрерывностью решений уравнений (0.12), (0.14) общего вида, см. [25, теорема 8.5]. В приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям указанные результаты означают, что имеет место почти наверное потраекторная интегральная непрерывность решений уравнений вида (0.12), (0.14) с дробным броуновским движением  $B_t$ , компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста  $H > 1/3$ , в условиях существования указанных решений.

В работе [46] впервые исследуются уравнения смешанного типа, содержащие дробное броуновское движение  $B_t^H$  с индексом Харста  $H > 1/2$  и стандартное броуновское движение  $W_t$  (являющееся частным случаем  $B_t^H$  при  $H = 1/2$ ). Здесь интеграл по  $W_t$  рассматривается как стохастический интеграл Ито, а интеграл по  $B_t^H$  — как потраекторный интеграл Римана-Стилтьеса, введенный в работе [57]. Стоит отметить, что из выведенных в работе [46] оценок можно получить условия, обеспечивающие интегральную непрерывность решений уравнений смешанного типа. В работе [3] получены условия, гарантирующие  $(\alpha, p)$ -асимптотическую устойчивость по вероятности и  $(\alpha, p)$ -притяжение решений, [3, теорема 1, 2]. Нетрудно заметить, что уравнения смешанного типа являются частным случаем уравнений (0.12).

Исследованию устойчивости уравнений вида (0.12) также посвящена работа [29]. В ней получены условия, обеспечивающие локальную почти наврное экспоненциальную устойчивость нулевого решения уравнения (0.12) на конечном отрезке  $[0, T]$  с дробным броуновским движением  $B_t$ , компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста  $H > 1/2$ .

Основным результатом данного раздела третьей главы являются теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий и правых частей решений уравнений (0.12), (0.14) в условиях существования указанных решений. Доказанная теорема обобщает результаты выше упомянутых работ на случай уравнений со сносом и дробным броуновским движением  $B_t$ , компоненты которого имеют различные индексы Харста  $H_i > 1/3$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

Четвертая глава настоящей работы посвящена некоторым методам интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа. Объектом ее изучения является стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (0.15)$$

где  $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $\sigma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  — детерминированные функции.

Стохастическое дифференциальное уравнение (0.15) называется уравнением смешанного типа, если в определении решения интеграл по стандартному броуновскому движению  $W(t)$  понимается как интеграл Ито, а интеграл по дробному броуновскому движению  $B(t)$  определяется как потраекторный интеграл Римана-Стилтьеса. Интерес к стохастическим дифференциальным уравнениям смешанного типа вызван тем, что, с одной стороны, они охваты-

вают стохастические дифференциальные уравнения Ито, а с другой стороны, наличие слагаемого с дробным броуновским движением позволяет строить более точные математические модели, учитывающие эффект долговременной памяти процессов, что особенно важно при моделировании экономических и финансовых процессов [18, 19]. В работах [32, 44, 43, 52, 12, 13, 11, 8, 3] исследованы вопросы существования, единственности решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, а также общие и асимптотические свойства решений таких уравнений. Стоит отметить, что задача исследования асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений, содержащих дробные броуновские движения, существенно усложняется по сравнению с задачей исследования аналогичных уравнений Ито, а ряд основополагающих методов, таких как второй метод Ляпунова исследования устойчивости, неприменим вовсе [3]. В связи с этим проблема нахождения решений уравнений (0.15) в явном виде представляется актуальной и важной.

Целью четвертой главы является в нахождение методов построения решений (либо их вероятностных характеристик) в явном виде стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа. В частности, приводятся необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование замен переменных, сводящих уравнение (0.15) к простейшим и линейным неоднородным уравнениям смешанного типа, и обобщающие результаты из [24, 9]. Используя подход к интегрированию непрерывных процессов с конечной квадратической вариацией, разработанный в [51], получается соотношение между решениями уравнений (0.15) и решениями соответствующих уравнений Стратоновича. Аналогичная связь хорошо известна для процессов Ито [9] и в ряде случаев помогает строить решения стохастических дифференциальных уравнений в явном виде.

Для нахождения вероятностных характеристик (математических ожиданий, плотностей распределений) решений стохастических дифференциальных уравнений Ито, как правило, используют прямые и обратные уравнения Колмогорова [9]. При выводе этих уравнений ключевую роль играет марковское свойство решений автономных стохастических дифференциальных уравнений Ито [14]. Решения стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, вообще говоря, не являются семимартингалами (даже в простейшем случае  $f = g = 0$ ,  $\sigma = 1$ ) и, как следствие, не обладают марковским свойством. В настоящей работе для вывода аналогов уравнений Колмогорова для

автономных уравнений вида (0.15) используется принципиально другой подход: используется явное представление решений уравнений (0.15) через детерминированные дифференциальные потоки, соответствующие коэффициентам уравнения (0.15), при этом ключевую роль играет условие коммутирования соответствующих дифференциальных потоков. Более того, показано, что без предположения о коммутировании дифференциальных потоков, соответствующих коэффициентам уравнения (0.15), аналоги уравнений Колмогорова для смешанных уравнений, вообще говоря, не имеют места. Представленный в настоящей работе подход к выводу аналогов уравнений Колмогорова близок к методам работ [17], [5–А], где аналогичные уравнения получены для уравнений Стратоновича, содержащих дробные броуновские движения с индексами Харста, большими  $1/3$ . Но в отличие от упомянутых работ в настоящей работе условия на гладкость коэффициентов рассматриваемого стохастического дифференциального уравнения существенно ослаблены за счет того, что показатель Харста соответствующих дробных броуновских движений больше  $1/2$ .

Основным результатом четвертой главы являются новые методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа, основанные на приведении данного уравнения к простейшему или линейному неоднородному, или к уравнению Стратоновича. Кроме того, в предположении, что коэффициенты стохастического дифференциального уравнения смешанного типа порождают коммутирующие дифференциальные потоки, получены аналоги дифференциальных уравнений Колмогорова для математических ожиданий и плотностей распределений решений.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Связь работы с научными программами (проектами), темами**

Исследования проводились в рамках следующих госбюджетных тем:

— Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах (2014 – 2016 гг., номер госрегистрации 20142883)

### **Цель и задачи исследования**

Целью диссертации является доказательство теорем об устойчивости решений и получение асимптотических разложений для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями.

### **Научная новизна**

Полученные в диссертации результаты являются новыми в теории стохастических дифференциальных уравнений.

Получены новые результаты в устойчивости нелинейных стохастических уравнений в гильбертовых пространствах. Для неавтономных нелинейных уравнений с разрывными коэффициентами в конечномерных пространствах доказана теорема об асимптотической устойчивости по вероятности слабого нулевого решения по линейному приближению. Для нелинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица, доказана теорема о притяжении слабых решений к нулю. Приведены примеры, иллюстрирующие применение доказанных теорем.

Получены обобщения теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями на случай, когда указанные броуновские движения имеют различных индексы Харста, большие  $1/3$ . Для нелинейных уравнений, со сносом и дробным броуновскими движениями с различными индексами Харста, большими  $1/3$ , получены следующие результаты:

- доказана формула Ито (формула замены переменных),
- доказана теорема о непрерывной зависимости в среднем от начальных условий и правых частей решений указанных уравнений,



– доказана теорема, в которой получены асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий от функционалов от решений указанных уравнений,

– получено уравнение, являющееся обобщением обратного уравнения Колмогорова для решения уравнения с указанным дробным броуновским движением в коммутативном случае.

Также в диссертации были исследованы некоторые методы интегрирования смешанных уравнений, содержащих стандартное и дробное броуновское движение с индексом Харста, большим  $1/2$ . Были получены теоремы о приведении указанных уравнений к простейшим, а также к линейным неоднородным уравнениям, теорема о переходе к уравнению Стратоновича. Кроме того, были получены дифференциальные уравнения для математических ожиданий и плотностей распределений решений указанных уравнений.

### **Положения, выносимые на защиту**

Теорема об асимптотической устойчивости системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений по линейному приближению.

Теорема о притяжении к нулю слабых решений нелинейного стохастического дифференциального уравнения в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями.

Теорема о непрерывной зависимости от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями.

Методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа, основанные на приведении данного уравнения к простейшему или линейному неоднородному, или к уравнению Стратоновича.

### **Личный вклад соискателя ученой степени**

Работы [1–А, 2–А, 7–А, 10–А, 12–А] написаны в соавторстве с научным руководителем М.М. Васьковским, а работы [1–А, 7–А] — также в соавторстве с Я.Б. Задворным. Они посвящены исследованию устойчивости стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах методом функций Ляпунова. Идеи совместных исследований

были развиты автором в работе [11–А], в которой получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости уравнений с разрывными коэффициентами в конечномерных гильбертовых пространствах. Работы [5–А, 6–А, 8–А, 9–А, 14–А], также написанные в соавторстве с научным руководителем М.М. Васьковским, посвящены исследованию асимптотического поведения решений и методов интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста. Идеи совместных исследований были развиты автором в работах [3–А, 13–А], посвященных существованию и непрерывной зависимости решений упомянутых уравнений.

Результаты, включенные в диссертацию и выносимые на защиту, получены лично автором диссертации. Научному руководителю принадлежат постановка задачи и выбор методов исследования.

#### **Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов**

Результаты работы докладывались и обсуждались на 8-м международном научном семинаре (воркшопе) «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (АМАДЕ–2015) (Минск, 2015), на шестых Богдановских чтениях по обыкновенным дифференциальным уравнениям (Минск, 2015), на XII Белорусской математической конференции (Минск, 2016), на XII международной научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (Пенза, Россия, 2017), на XVII и XVIII международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2017» и «Еругинские чтения–2018» (Минск, 2017 и Гродно, 2018), на международной научной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», посвященной 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина (Минск, 2018), на 74-й и 75-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 2017, 2018). Результаты, включенные в диссертацию, отмечены дипломами 1-й категории Республиканского конкурса научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь (2017, 2018).

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы при проведении исследований по теории устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах и общей теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными

броуновскими движениями в научных коллективах, занимающихся исследованием дифференциальных уравнений, в институтах математики НАН РБ, Белорусском Государственном университете, а также при чтении спецкурсов.

### **Опубликование результатов диссертации**

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах: из них 4 статьи в научных журналах из перечня научных изданий ВАК, 2 статьи в зарубежных журналах, 1 депонированный отчет, 2 статьи в сборниках трудов международных научных конференций, 5 тезисов докладов международных научных конференций.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, основной части, включающей 4 главы, заключения и библиографического списка.

Объем диссертации — 127 стр., библиографический список содержит 57 источник, включая собственные публикации автора, на 7 стр.

# ГЛАВА 1

## ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В данном разделе диссертации приводятся некоторые сведения и известные результаты из функционального анализа, теории случайных процессов и стохастических дифференциальных уравнений, которые будут использоваться в последующих главах представленной работы.

### 1.1 Теория меры

Пусть  $T$  — некоторое множество. Семейство подмножеств  $\mathcal{F}$  множества  $T$  называют  $\sigma$ -алгеброй, если для него выполнены следующие свойства:  $\emptyset \in \mathcal{F}$ ; если  $A \in \mathcal{F}$ , то и  $T \setminus A \in \mathcal{F}$ ; объединение не более чем счетного количества множеств  $\cup A_n \in \mathcal{F}$ , если  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Пару  $(T, \mathcal{F})$ , где  $\mathcal{F}$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств множества  $T$ , называют измеримым пространством.

Рассмотрим функции, определенные на измеримом пространстве  $(T, \mathcal{F})$ . Функцию  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , заданную на множествах  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}$  называют мерой, если выполнены следующие свойства:  $\mu(A) \geq 0$  для любого  $A \in \mathcal{F}$ ;  $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$  для любого не более чем счетного объединения попарно непересекающихся множеств  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $A_n \cap A_m = \emptyset$ ,  $n \neq m$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ . Меру  $\mu$  называют конечной, если  $\mu(T) < \infty$ . Меру  $\mu$  называют вероятностной, если она конечна и  $\mu(T) = 1$ .

Пусть далее  $T$  — метрическое пространство. Наименьшую  $\sigma$ -алгебру над открытыми множествами  $T$  называют борелевской  $\sigma$ -алгеброй пространства  $T$  и обозначают  $\mathcal{B}(T)$ . Пусть  $(T_1, \mathcal{F}_1)$ ,  $(T_2, \mathcal{F}_2)$  — измеримые пространства. Отображение  $f: T_1 \rightarrow T_2$  называют  $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ -измеримым, если для любого множества  $M \in \mathcal{F}_2$  его прообраз  $f^{-1}(M) \in \mathcal{F}_1$ . Отображение  $f: T_1 \rightarrow T_2$  называют измеримым по Борелю, если оно  $(\mathcal{B}(T_1), \mathcal{B}(T_2))$ -измеримо.

Пусть  $(T, \mathcal{F}, \mu)$  — измеримое пространство с конечной мерой  $\mu$ . Рассмотрим заданную на нем функцию  $f: T \rightarrow \mathbb{R}^+$ , являющуюся  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ -измеримой. Интегралом Лебега функции  $f$  по множеству  $I \in \mathcal{F}$

называют предел интегральных сумм

$$\int_I f(t) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^{n2^n-1} (i \cdot n2^{-n}) \cdot \mu\{t \in I : i \cdot n2^{-n} < f(t) \leq (i+1) \cdot n2^{-n}\} + n\mu\{t \in I : f(t) > n\} \right)$$

Для измеримой функции  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ , принимающей произвольные действительные значения, введем в рассмотрение функции  $f^+(t) = \max\{f(t), 0\}$  и  $f^-(t) = \min\{-f(t), 0\}$ ; очевидно,  $f(t) = f^+(t) - f^-(t)$ ,  $|f(t)| = f^+(t) + f^-(t)$  и  $f^+(t), f^-(t) \geq 0$  для любого  $t \in T$ . Интеграл Лебега определяют как  $\int_I f(t) d\mu = \int_I f^+(t) d\mu - \int_I f^-(t) d\mu$  и считают, что функция  $f$  интегрируема по Лебегу, если  $\int_I |f(t)| d\mu < +\infty$ . Для функции  $f: T \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $f = (f_1, \dots, f_d)$  под интегралом Лебега будем понимать вектор из интегралов Лебега от ее компонент:  $\int_I f(t) d\mu = (\int_I f_1(t) d\mu, \dots, \int_I f_d(t) d\mu)$ .

**Теорема 1.1 о мажорируемой сходимости (Лебег).** Пусть  $(T, \mathcal{F}, \mu)$  — измеримое пространство с конечной мерой  $\mu$ . Если последовательность  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -измеримых функций  $(f_n)_{n=1}^\infty$  сходится почти всюду к функции  $f(t)$  и при этом существует интегрируемая по Лебегу функция  $\varphi$  такая, что  $|f_n| \leq \varphi$  для всех  $n$ , то  $f$  — также интегрируемая по Лебегу функция, причем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(t) d\mu = \int_I \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) d\mu = \int_I f(t) d\mu.$$

Пусть  $(T, \mathcal{F})$  — измеримое пространство с конечной мерой  $\mu$ ,  $X$  — банахово пространство. Функция  $f: T \rightarrow X$  называется простой, если существуют  $x_1, \dots, x_n, \dots \in X$  и  $E_1, \dots, E_n, \dots \in \mathcal{F}$ , такие, что  $E_i \cap E_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ,  $\cup_{i=1}^\infty E_i = T$ ,  $f = \sum_{i=1}^\infty x_i \mathbf{1}_{E_i}$ . Функция  $f: T \rightarrow X$  называется  $\mu$ -измеримой, если существует последовательность простых функций  $(f_n)$ , что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(t) - f(t)\| = 0$  для  $\mu$ -почти всех  $t \in T$ . Если последовательность  $(f_n)$   $\mu$ -измеримых функций почти всюду сходится к  $f$ , то  $f$  также  $\mu$ -измерима.  $\mu$ -измеримая функция  $f: T \rightarrow X$  называется интегрируемой по Бохнеру, если существует последовательность  $(f_n)$  простых функций такая, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_T \|f_n - f\| d\mu = 0$ . В этом случае интеграл Бохнера  $\int_E f d\mu$  определяется для каждого  $E \in \mathcal{F}$  с помощью соотношения  $\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$ , где  $\int_E f_n d\mu$  — интеграл, определенный обычным образом:  $\sum_{i=1}^\infty x_i \mu(E_i \cap E)$ .  $\mu$ -измеримая функция  $f: T \rightarrow X$  интегрируема по Бохнеру тогда и только тогда, когда функция  $\|f\|: T \rightarrow \mathbb{R}^+$

является  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ -измеримой и  $\int_T \|f\| d\mu < \infty$ . Если  $p \in [1, \infty)$ , то символом  $L_p(T, X)$  обозначаем множество классов интегрируемых по Бохнеру функций  $f: T \rightarrow X$ , таких, что  $\|f\|_{L_p} = (\int_T \|f\|^p d\mu)^{1/p} < \infty$ .

## 1.2 Теория линейных операторов и полугрупп

Пусть  $X$  — банахово пространство. Через  $\mathcal{L}(X)$  обозначим множество линейных ограниченных операторов, действующих из  $X$  в  $X$ . Однопараметрическое семейство операторов  $(S(t))_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$  называют полугруппой на  $X$ , если: 1)  $S(0) = I$  ( $I$  — тождественный оператор); 2)  $S(t+s) = S(t)S(s)$  для любых  $s, t \geq 0$ . Полугруппу операторов  $(S(t))_{t \geq 0}$  называют сильно непрерывной ( $C_0$ -полугруппой), если  $\|S(t)x - S(t_0)x\| \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0$  для любого  $x \in X$ . Для сильно непрерывной полугруппы  $(S(t))_{t \geq 0}$  на  $X$  оператор  $A$ , определенный на множестве  $\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \exists \lim_{t \rightarrow +0} \frac{S(t)x - x}{t} \in X \right\}$  формулой  $Ax = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{S(t)x - x}{t}$ ,  $x \in \mathcal{D}(A)$ , называют генератором полугруппы  $(S(t))_{t \geq 0}$ .

**Предложение 1.1.** [47, теорема 2.2]. Пусть  $(S(t))_{t \geq 0}$  — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве  $X$ . Тогда существуют постоянные  $M \geq 1$ , и  $\beta \in \mathbb{R}$  такие, что  $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}$  для всех  $t \geq 0$ .

Теория полугрупп имеет тесные связи как с обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и с дифференциальными уравнениями в частных производных.

**Пример 1.1.** Рассмотрим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка  $d$ . В векторном виде она примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + f(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \\ x(0) &= \xi, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . Решение данной задачи выражается формулой Коши:

$$x(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t)S^{-1}(s)f(s)ds,$$

где  $S(t)$  — базисная матрица системы,  $S(0) = I$  — единичная матрица. Каноническим выбором является  $S(t) = e^{At}$ . Нетрудно убедиться в том, что при таком выборе  $(S(t))_{t \geq 0}$  является сильно непрерывной полугруппой в  $\mathbb{R}^d$  с генератором  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ .

Зафиксируем некоторые банаховы пространства  $X, Y$ , а также некоторый полный ортонормированный базис  $\{h_i\}$  в банаховом пространстве  $X$ . Оператором Гильберта-Шмидта называют оператор  $B \in \mathcal{L}(X, Y)$  такой, что  $\sum_i \|Bh_i\|_Y^2 < \infty$ . В случае, когда  $X, Y$  являются сепарабельными гильбертовыми пространствами, множество  $L_2(X, Y)$  также образует сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением  $\langle A, B \rangle_{L_2(X, Y)} = \sum_i \langle Ah_i, Bh_i \rangle_Y$ . Будем считать далее, что  $X$  — сепарабельное гильбертово пространство. Если оператор  $B \in \mathcal{L}(X)$  представим в виде  $B = \sum_{i=1}^m A_i C_i$ , где  $A_1, \dots, A_m, C_1, \dots, C_m \in L_2(X, X)$ , то такой оператор  $B$  называют ядерным. Множество всех ядерных операторов, действующих из  $X$  в  $X$  обозначают  $L_1(X)$ , оно является сепарабельным банаховым пространством с нормой  $\|B\|_{L_1(X)} = \text{tr } B := \sum_i \langle Bh_i, h_i \rangle_X$ .

### 1.3 Теория случайных процессов

Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , т.е. измеримое пространство  $(\Omega, \mathcal{F})$  с заданной на нем вероятностной мерой  $\mathbb{P}$ . Случайной величиной  $\xi = \xi(\omega)$  называют любую функцию  $\xi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , являющуюся  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ -измеримой. Под случайным процессом  $X(t, \omega) = X_t(\omega)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  понимают семейство заданных на  $\Omega$  случайных величин  $(X_t(\omega))_{t \in \mathbb{R}}$ , зависящее от параметра  $t \in \mathbb{R}$ . Функцию  $t \mapsto X(t, \omega)$  при фиксированном  $\omega \in \Omega$  называют траекторией процесса  $X(t, \omega)$ .

Математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  называют интеграл Лебега  $\int_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P}$ . Условным математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  называют измеримую относительно  $\mathcal{G}$  случайную величину  $\tilde{\xi} = \mathbb{E}(\xi | \mathcal{G})$  такую, что  $\mathbb{E} \tilde{\xi} \mathbf{1}_A = \mathbb{E} \xi \mathbf{1}_A$  для любого  $A \in \mathcal{G}$ .

Случайный процесс  $X(t, \omega)$ ,  $t \geq \tau$  называют центрированным, если  $\mathbb{E} X(t, \omega) = 0$  для любого  $t \geq \tau$ . Случайный процесс  $X(t, \omega)$ ,  $t \geq 0$ , принимающий значения в  $\mathbb{R}^d$ , называют гауссовским, если для любых  $t_1, t_2, \dots, t_n$  таких, что  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ , случайная ве-

личина  $Z = (X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_n, \omega)) \in \mathbb{R}^{dn}$  имеет (многомерное) нормальное распределение. Это означает, что существует вектор  $M \in \mathbb{R}^{dn}$  и неотрицательно определенная матрица  $C \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$  такие, что

$$\mathbb{E} e^{i\langle u, Z \rangle} = \exp \left( -\frac{1}{2} u^\top C u + i\langle u, M \rangle \right)$$

для любого вектора  $u \in \mathbb{R}^{dn}$ .

Рассмотрим возрастающее семейство под- $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_t)$ ,  $t \geq \tau$  из  $\mathcal{F}$  ( $\tau \in \mathbb{R}$ ), т.е. такие  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$ , что  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$  для любых  $t \geq s \geq \tau$ . Семейство  $(\mathcal{F}_t)$  называют непрерывным справа, если  $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$  для любого  $t \geq \tau$ . Непрерывное справа семейство  $\sigma$ -алгебр называют потоком  $\sigma$ -алгебр. Случайный процесс  $X(t, \omega)$ , заданный на  $[\tau, +\infty) \times \Omega$  и принимающий значения в метрическом пространстве  $T$ , называют  $\mathcal{F}_t$ -согласованным, если для любого борелевского множества  $B \in \mathcal{B}(T)$  и любого  $t \geq \tau$  множество  $\{\omega \in \Omega : X(t, \omega) \in B\}$  принадлежит  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{F}_t$ . Заметим также, что для любого случайного процесса  $X(t, \omega)$  существует поток  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}^{X_t})$ , с которым данный процесс согласован. Такой поток можно построить следующим образом: обозначим через  $\sigma_t$  наименьшую  $\sigma$ -алгебру, относительно которой измеримы все случайные величины  $X(s, \omega)$ ,  $s \in [\tau, t]$ , тогда  $\mathcal{F}^{X_t} = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma_{t+\varepsilon}$ . Далее для краткости будем опускать аргумент  $\omega \in \Omega$  у случайных процессов. Пусть  $\mathcal{J}$  — наименьшая  $\sigma$ -алгебра на  $[\tau, +\infty) \times \Omega$ , относительно которой измеримы все непрерывные слева  $\mathcal{F}_t$ -согласованные случайные процессы. Случайный процесс  $X(t, \omega)$ , заданный на  $[\tau, +\infty) \times \Omega$  и принимающий значения в метрическом пространстве  $T$ , называют предсказуемым, если для любого борелевского множества  $B \in \mathcal{B}(T)$  множество  $\{(t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega : X(t, \omega) \in B\}$  принадлежит  $\sigma$ -алгебре  $\mathcal{J}$ . Процесс  $X(t)$  называют  $\mathcal{F}_t$ -мартингалом, если он  $\mathcal{F}_t$ -согласован,  $\mathbb{E} |X(t)| < +\infty$  для всех  $t$  и  $\mathbb{E}(X(s) | \mathcal{F}_t) = X(t)$  для всех  $s \geq t$ .

Пусть  $U$  — сепарабельное гильбертово пространство. Зафиксируем некоторый ядерный симметрический положительно определенный оператор  $Q \in \mathcal{L}(U)$ , для которого существуют полный ортонормированный базис  $\{e_k\} \subset U$  и последовательность положительных действительных чисел  $(\lambda_k)$ , таких, что  $Qe_k = \lambda_k e_k$ ,  $k \geq 1$ ,  $\text{tr} Q = \sum_k \lambda_k < \infty$ .  $\mathcal{F}_t$ -согласованным  $Q$ -броуновским движением (винеровским процессом) со значениями в  $U$  называют непрерывный случайный процесс  $W(t)$ ,  $t \geq 0$ , принимающий значения в  $\mathbb{R}^d$  и удовлетворяющий равенству

$$\mathbb{E} \left( e^{i\langle \xi, W(t) - W(s) \rangle_U} \middle| \mathcal{F}_s \right) = e^{-(t-s)\langle Q\xi, \xi \rangle_U / 2} \quad \text{п.н.}$$



для любого  $\xi \in U$  и любых  $t \geq s \geq 0$ . Если  $W(t)$  —  $\mathcal{F}_t$ -согласованное  $Q$ -броуновское движение, то существует последовательность независимых одномерных  $\mathcal{F}_t$ -броуновских движений  $W_k(t)$ ,  $k \geq 1$  таких, что  $W(t) = \sum_k \sqrt{\lambda_k} W_k(t) e_k$ , причем данный ряд сходится локально равномерно на  $\mathbb{R}^+$  п.н. В случае  $U = \mathbb{R}^d$  можно выбрать оператор  $Q = I_d$ , и в этом случае приходим к определению  $d$ -мерного  $\mathcal{F}_t$ -согласованного броуновского движения. Можно показать, что для одномерного броуновского движения справедливы следующие свойства [4, гл. 1, §7], [14, раздел 2.2]:

- процесс  $W(t)$  имеет независимые приращения, т.е. для любых  $t_0, t_1, \dots, t_n$  таких, что  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$  случайные величины  $W(t_0), W(t_1) - W(t_0), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  независимы в совокупности;
- приращения  $W(t) - W(s)$  для любых  $t > s \geq 0$  распределены по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией  $(t - s)$ ;
- процесс  $W(t)$  имеет неограниченную вариацию на любом отрезке  $[S, T] \subset \mathbb{R}^+$ , т.е.

$$\sup_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^n |W(t_j) - W(t_{j-1})| = +\infty, \quad \text{п.н.}$$

где супремум берется по всем разбиениям  $\mathcal{P} = \{S \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T\}$ ;

- процесс  $W(t)$  является  $(\mathcal{F}_t)$ -мартингалом.

Дробным броуновским движением с индексом Харста  $H \in (0, 1)$  называют центрированный непрерывный гауссовский процесс  $B^{(H)}(t)$ ,  $t \geq 0$  с ковариационной функцией

$$\mathbb{E} B^{(H)}(t) B^{(H)}(s) = \frac{1}{2} (t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}).$$

Существование дробного броуновского движения следует из теоремы существования центрированного гауссовского процесса с заданной ковариационной функцией [50, гл. I, раздел 24]. Процесс  $B(t)$  впервые был рассмотрен Колмогоровым в статье [6] в 1940 г., где он назывался спиралью Винера. Название «дробное броуновское движение» процессу  $B(t)$  было дано Б. Мандельбротом и Дж. Ван Нессом статье [42] в 1968 г.

Можно показать, что при  $H = 1/2$  дробное броуновское движение  $B^{(1/2)}(t)$  является винеровским процессом. Иными словами, одномерный процесс  $W(t)$  является частным процессом из семейства  $B^{(H)}(t)$  при  $H = 1/2$ . Кроме того, дробное броуновское движение обладает следующими свойствами [18, гл. 1]:

– процесс  $B^{(H)}(t)$  имеет независимые приращения тогда и только тогда, когда  $H = 1/2$ ; при  $H > 1/2$  приращения положительно коррелированы (т.е.  $\mathbb{E}(B^{(H)}(t_3) - B^{(H)}(t_2))(B^{(H)}(t_2) - B^{(H)}(t_1)) > 0$  для любых  $t_3 > t_2 > t_1 \geq 0$ ), а при  $H < 1/2$  — отрицательно;

– почти все траектории процесса  $B^{(H)}(t)$  непрерывны по Гельдеру с любым показателем, строго меньшим  $H$ , т.е. для любого  $\varepsilon > 0$ :

$$\|B^{(H)}\|_{H-\varepsilon} = \sup_{0 \leq s < t} \frac{|B^{(H)}(t) - B^{(H)}(s)|}{|t - s|^{H-\varepsilon}} < +\infty$$

– почти все траектории процесса  $B^{(H)}(t)$  не дифференцируемы ни в одной точке для любого  $H \in (0,1)$  (в том числе траектории винеровского процесса не дифференцируемы).

Под  $d$ -мерным дробным броуновским движением будем понимать процесс  $B(t) = (B_1(t), \dots, B_d(t))$ , принимающий значения в  $\mathbb{R}^d$ , компоненты которого являются независимыми одномерными дробными броуновскими движениями.

## 1.4 Интегралы по броуновскому движению

Под стохастическим дифференциальным уравнением понимают формальное уравнение вида

$$dX(t, \omega) = f(t, \omega, X(t, \omega))dt + g(t, \omega, X(t, \omega))dB(t, \omega),$$

в котором  $B(t, \omega)$  — стандартное или дробное броуновское движение. Формализм приведенной записи заключается в том, что ввиду недифференцируемости траекторий процесса  $B(t)$ , выражение  $dB(t)$  лишено смысла, что, в свою очередь, делает невозможным понимание стохастических дифференциальных уравнений в русле классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому, не разрывая связи с классической теорией, опираясь на интегральный критерий, стохастическое дифференциальное уравнение понимают в интегральном смысле, как уравнение вида

$$X(t, \omega) = X(s, \omega) + \int_s^t f(\tau, \omega, X(\tau, \omega))d\tau + \int_s^t g(\tau, \omega, X(\tau, \omega))dB(\tau, \omega).$$

Здесь интеграл по  $d\tau$  определяется как интеграл Лебега при каждом фиксированном  $\omega$ . В свою очередь, определение интеграла по  $dB$  сильно зависит от

свойств процесса  $B$ . Рассмотрим несколько способов определения интеграла  $\int_S^T \phi(t, \omega) dB(t, \omega)$ , которые будут использоваться в данной работе.

#### 1.4.1 Потраекторный интеграл Янга

Обратимся сначала к случаю, когда  $B(t)$  — дробное броуновское движение, принимающее значения в  $\mathbb{R}^d$ , все компоненты которого имеют индекс Харста  $H > 1/2$ . Тогда почти все траектории процесса  $B(t)$  непрерывны по Гельдеру с любым показателем, меньшим  $H$ . Из результатов Янга [56] следует, что для любого процесса  $\phi(t, \omega)$ , почти все траектории которого непрерывны по Гельдеру с показателем  $\gamma > 1 - H$ , можно определить интеграл по  $B(t)$  как потраекторный интеграл Римана-Стилтьеса (зачастую называемый интегралом Янга), т.е. как предел с вероятностью 1 интегральных сумм

$$\int_S^T \phi(t, \omega) dB(t, \omega) = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \phi(\tau_k, \omega) (B(t_k, \omega) - B(t_{k-1}, \omega)).$$

Здесь предел понимается не зависящим от последовательности разбиений  $\mathcal{P} = \{S \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T\}$  и промежуточных точек  $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ ,  $|\mathcal{P}| = \max |t_k - t_{k-1}|$ ,  $k = 1, \dots, n$ . В свою очередь, применительно к стохастическим дифференциальным уравнениям, показатель непрерывности по Гельдеру процесса  $\phi(t, \omega) = \sigma(t, X(t, \omega))$  определяется показателем непрерывности решения  $X(t, \omega)$  (совпадающим с показателем  $B(t, \omega)$ ). Таким образом, с необходимостью возникает неравенство  $H > 1 - H$ , откуда  $H > 1/2$ .

Обозначим через  $V_p(f, [S, T]) = \left( \sup_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p \right)^{1/p}$ ,  $p > 0$ ,  $p$ -вариацию функции  $f(t)$  на отрезке  $[S, T]$  (супремум берется по всем разбиениям  $\mathcal{P} = \{S \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T\}$ ). Для интеграла Янга справедливо следующее фундаментальное свойство.

**Предложение 1.2 (неравенство Лав-Янга, [56]).** Пусть функции  $f(t)$ ,  $g(t)$  таковы, что  $V_p(f, [S, T]), V_q(g, [S, T]) < +\infty$  для некоторых  $p, q > 0$  таких, что  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ . Если к тому же функции  $f$  и  $g$  не имеют общих точек разрыва, то интеграл Янга  $\int_S^T f(t) dg(t)$  существует, и для него справедливо следующее неравенство:

$$\left| \int_S^T f(t) dg(t) - f(\tau)(g(T) - g(S)) \right| \leq C_{p,q} V_p(f, [S, T]) V_q(g, [S, T])$$

для любого  $\tau \in [S, T]$ , где  $C_{p,q} = \zeta(p^{-1} + q^{-1})$ , где  $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$  — дзета-функция Римана.

#### 1.4.2 Стохастический интеграл Ито

Рассмотрим случай, когда  $B(t) = W(t)$  — стандартное броуновское движение ( $H = 1/2$ ), принимающее значения в  $\mathbb{R}^d$ . Поскольку процесс  $B(t)$  имеет неограниченную вариацию, то интегральные суммы Стильеса для интеграла  $\int_S^T \phi(t, \omega) dB(t, \omega)$  п.н. не будут сходиться, т.е. данный интеграл невозможно определить в потраекторном смысле как интеграл Стильеса. Приведем простой пример, иллюстрирующий данный факт: рассмотрим интеграл  $\int_0^T B(t, \omega) dB(t, \omega)$  по одномерному стандартному броуновскому движению  $B(t)$  как потраекторный предел (для почти всех  $\omega \in \Omega$ ) двух интегральных сумм:

$$I_{\mathcal{P}}^{(1)} = \sum_{t_j, t_{j+1} \in \mathcal{P}} B(t_j)(B(t_{j+1}) - B(t_j)), \quad I_{\mathcal{P}}^{(2)} = \sum_{t_j, t_{j+1} \in \mathcal{P}} B(t_{j+1})(B(t_{j+1}) - B(t_j))$$

на разбиении  $\mathcal{P} = \{0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = T\}$  отрезка  $[0, T]$ . Тогда с одной стороны ввиду независимости приращений  $B(t)$ :

$$\mathbb{E} I_{\mathcal{P}}^{(1)} = \sum_{t_j, t_{j+1} \in \mathcal{P}} \mathbb{E} B(t_j) \mathbb{E}(B(t_{j+1}) - B(t_j)) = 0.$$

А с другой стороны, поскольку приращения  $B(t) - B(s)$  распределены по нормальному закону с дисперсией  $t - s$ :

$$\mathbb{E} I_{\mathcal{P}}^{(2)} = \mathbb{E}(I_{\mathcal{P}}^{(2)} - I_{\mathcal{P}}^{(1)}) = \sum_{t_j, t_{j+1} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}(B(t_{j+1}) - B(t_j))^2 = \sum_{t_j, t_{j+1} \in \mathcal{P}} (t_{j+1} - t_j) = T.$$

Таким образом, предел интегральных сумм Римана-Стилтьеса зависит от выбора промежуточных точек, что недопустимо. Поэтому для стандартного броуновского движения предел интегральных сумм понимается в смысле  $\mathcal{L}_2$ , а сами суммы строятся несколько иначе. Далее приведем краткое описание подхода Ито к построению таких интегралов.

Рассмотрим для начала одномерный процесс  $B(t) \in \mathbb{R}$ . Выделим класс случайных процессов  $\phi(t, \omega): \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , обозначаемый  $\mathcal{L}_2(S, T)$ , со следующими свойствами:

1. процесс  $\phi(t, \omega)$  является  $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -измеримым;
2. процесс  $\phi(t, \omega)$  является  $\mathcal{F}_t$ -согласованным;

$$3. \|\phi\|_{\mathcal{L}_2(S,T)}^2 = \mathbb{E} \int_S^T (\phi(t,\omega))^2 dt < +\infty.$$

Будем говорить, что последовательность  $\phi_n \in \mathcal{L}_2(S,T)$  сходится к  $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$  в  $\mathcal{L}_2(S,T)$ , если  $\|\phi - \phi_n\|_{\mathcal{L}_2(S,T)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Для каждой функции  $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$  можно построить сходящуюся к  $\phi$  в  $\mathcal{L}_2(S,T)$  последовательность ограниченных непрерывных по  $t$  функций  $\phi_n \in \mathcal{L}_2(S,T)$  следующим образом [14, гл. 3]:

$$\phi_n(t,\omega) = \int_0^t \psi_n(s-t) \bar{\phi}_n(t,\omega) ds,$$

$$\bar{\phi}_n(t,\omega) = \begin{cases} -n, & \text{если } \phi(t,\omega) < -n, \\ \phi(t,\omega) & \text{если } -n \leq \phi(t,\omega) \leq n, \\ n, & \text{если } \phi(t,\omega) > n \end{cases}$$

Здесь  $\psi_n(t)$  — любые наперед заданные непрерывные функции такие, что  $\psi(t) = 0$ ,  $t \notin (1/n, 0)$  и  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t) = 1$ . В свою очередь, для  $\phi_n(t,\omega)$  можно построить последовательность ступенчатых функций  $\phi_{nm}(t,\omega) \in \mathcal{L}_2(S,T)$ , сходящуюся к  $\phi_n$  в  $\mathcal{L}_2(S,T)$ , следующего вида [14, гл. 3]:

$$\phi_{nm}(t,\omega) = \sum_{j=0}^m \phi_n(t_j, \omega) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

где точки  $t_j \in \mathcal{P}$  образуют разбиение отрезка  $[S, T]$ ,  $t_0 = S$ ,  $t_{m+1} = T$ . Таким образом, для любой функции  $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$  можно построить сходящуюся к ней в  $\mathcal{L}_2(S,T)$  последовательность ступенчатых функций  $\phi_m \in \mathcal{L}_2(S,T)$ .

Интегралом Ито  $\int_S^T \phi(t,\omega) dB(t,\omega)$  функции  $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$  называют элемент  $\mathcal{I}(\phi) \in \mathcal{L}_2(S,T)$ , являющийся пределом последовательности  $\mathcal{I}(\phi_m)$  в  $\mathcal{L}_2(S,T)$  интегралов Ито от ступенчатых функций  $\phi_m$  следующего вида:

$$\mathcal{I}(\phi_m) = \sum_{j=0}^m \phi_m(t_j, \omega) (B(t_{j+1}, \omega) - B(t_j, \omega)).$$

Интеграл Ито от функции  $\phi: \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$  по  $d$ -мерному броуновскому движению  $B(t)$  определяется аналогичным образом. Говорят, что функция  $\phi(t,\omega) = (\phi_{jk}(t,\omega)) \in \mathcal{L}_2(S,T)$ , если каждая ее компонента  $\phi_{jk}(t,\omega) \in \mathcal{L}_2(S,T)$ ,  $j = \overline{1, n}$ ,  $k = \overline{1, d}$ . Интеграл Ито  $\int_S^T \phi(t,\omega) dB(t,\omega)$  представляет собой вектор размера  $n$ , в которой элемент в позиции  $j$  есть сумма одномерных интегралов Ито, определенных выше:

$$\int_S^T \phi(t,\omega) dB(t,\omega) = \left( \sum_{k=1}^d \int_S^T \phi_{jk}(t,\omega) dB^{(k)}(t,\omega) \right)_{j=1}^n.$$

Приведем некоторые свойства интеграла Ито [14, гл. 3], [4, с. 56–60]:

1. нулевое среднее:  $\mathbb{E} \int_S^T \phi(t, \omega) dB(t, \omega) = 0$ ;
2. изометрия:  $\mathbb{E} \left( \int_S^T \phi(t, \omega) dB(t, \omega) \right)^2 = \mathbb{E} \int_S^T (\phi(t, \omega))^2 dt$ ;
3. интеграл Ито  $\int_0^t \phi(\tau, \omega) dB(\tau, \omega)$  является  $(\mathcal{F}_t)$ -мартингалом.

Пусть заданы измеримые  $\mathcal{F}_t$ -согласованные процессы  $a: \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $b: \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$  такие, что  $\int_0^t |a(s, \omega)|^2 ds < +\infty$  и  $\int_0^t |b(s, \omega)|^2 ds < +\infty$  п.н. для любого  $t \geq 0$ ,  $X(0, \omega)$  —  $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина и  $X(t, \omega)$  —  $n$ -мерный случайный процесс, определяемый равенством

$$X(t, \omega) = X(0, \omega) + \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t b(s, \omega) dB(s).$$

**Теорема 1.2. (Формула Ито, [4, теорема 5.1]).** Пусть  $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, непрерывная вместе со своими частными производными  $\frac{\partial f}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ . Тогда для процесса  $X(t, \omega)$ , определенного выше, п.н. справедливо равенство

$$\begin{aligned} f(t, X(t, \omega)) &= f(0, X(0, \omega)) + \int_0^t \left( \frac{\partial f(\tau, X(\tau, \omega))}{\partial t} + \frac{\partial f(\tau, X(\tau, \omega))}{\partial x} a(\tau, \omega) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \text{tr} \left( \frac{\partial^2 f(\tau, X(\tau, \omega))}{\partial x^2} b(\tau, \omega) b(\tau, \omega)^\top \right) \right) d\tau + \int_0^t \frac{\partial f(\tau, X(\tau, \omega))}{\partial x} b(\tau, \omega) dB(\tau, \omega). \end{aligned}$$

Далее будет дано определение интеграла Ито по  $\mathcal{F}_t$ -согласованному  $Q$ -броуновскому движению  $W(t)$  со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве  $U$ ,  $Q$  — симметрический положительно определенный ядерный оператор. Пусть  $H$  — также сепарабельное гильбертово пространство. Введем пространство измеримых  $\mathcal{F}_t$ -согласованных процессов  $\Phi: \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow L_2(U, H)$  (обозначаемое  $\mathcal{L}_2$ ) таких, что для любого  $T > 0$ :

$$\begin{aligned} \|\Phi(t)\|_{2,T} &= \left( \mathbb{E} \int_0^T \|\Phi(s)\|_{L_2(U, H)}^2 ds \right)^{1/2} = \\ &= \left( \mathbb{E} \int_0^T \text{tr} \left( (\Phi(s) Q^{1/2}) (\Phi(s) Q^{1/2})^* \right) ds \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

Процессы  $\Phi, \Phi'$  отождествляются, если  $\|\Phi - \Phi'\|_{2,T} = 0$  для любого  $T > 0$ . Выделим подмножество  $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_2$  процессов  $\Phi \in \mathcal{L}_0$ , для которых существует последовательность вещественных чисел  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$ ,

$t_n \rightarrow \infty$ , а также последовательность  $\mathcal{F}_{t_i}$ -измеримых случайных величин  $(\Phi_i)$  со значениями в  $L_2(U, H)$  таких, что  $\sup_i \operatorname{ess\,sup}_\omega \|f_i(\omega)\| < \infty$  и  $\Phi(0, \omega) = \Phi_0(\omega)$ ,  $\Phi(t, \omega) = \Phi_i(t, \omega)$  для  $t \in (t_i, t_{i+1}]$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Для  $\Phi \in \mathcal{L}_0$  положим  $\int_0^t \Phi(s) dW(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \Phi_n(W(t) - W(t_n))$  для  $t_n < t \leq t_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Можно показать, что множество  $\mathcal{L}_0$  плотно в  $\mathcal{L}_2$  по норме пространства  $\mathcal{L}_2$ , а посему для любого процесса  $\Phi \in \mathcal{L}_2$  найдется последовательность процессов  $(\Phi_n) \subset \mathcal{L}_0$ , сходящаяся к  $\Phi$  по норме  $\mathcal{L}_2$ . Предел сходящейся последовательности  $\int_0^t \Phi_n(s) dW(s)$ , являющийся  $H$ -значным непрерывным п.н. мартингалом, обозначаемым  $\int_0^t \Phi(s) dW(s)$ , называют интегралом Ито от процесса  $\Phi(t)$  по  $Q$ -броуновскому движению  $W(t)$ .

**Предложение 1.3. (Формула Ито для гильбертовых пространств [49, с. 105]).** Пусть  $\Phi(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — квадратично интегрируемый случайный процесс со значениями в  $L_2(U, H)$ ,  $\varphi(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — предсказуемый случайный процесс со значениями в  $H$  такой, что функция  $\|\varphi(t)\|_H$  является  $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ -измеримой и  $\int_0^T \|\varphi(t)\|_H^2 dt < \infty$ . Пусть также  $X(0)$  —  $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина со значениями в  $H$ , а процесс  $X(t)$  определяется равенством

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \varphi(s) ds + \int_0^t \Phi(s) dW(s), \quad t \in [0, T].$$

Тогда для любой функции  $F: [0, T] \times H \rightarrow \mathbb{R}$ , равномерно непрерывной на каждом ограниченном подмножестве из  $[0, T] \times H$  вместе со своими частными производными  $F'_t, F'_x, F''_{xx}$ , для любого  $t \in [0, T]$  п.н. справедливо равенство

$$\begin{aligned} F(t, X(t)) &= F(0, X(0)) + \int_0^t \left( F'_t(s, X(s)) + \langle F'_x(s, X(s)), \varphi(s) \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left( F''_{xx}(s, X(s)) (\Phi(s) Q^{1/2}) (\Phi(s) Q^{1/2})^* \right) \right) ds + \int_0^t \langle F'_x(s, X(s)), \Phi(s) dW(s) \rangle. \end{aligned}$$

**Предложение 1.4. (Неравенство Буркхольдера [48]).** Пусть  $p > 1$ ,  $S(t)$  —  $C_0$ -полугруппа на  $H$ . Тогда для любого  $\mathcal{F}_t$ -согласованного процесса  $\Phi: [0, T] \times \Omega \rightarrow L_2(U, H)$  такого, что  $\mathbb{E} \left( \int_0^T \|\Phi(s)\|^p ds \right) < +\infty$ ,

выполняются неравенство

$$\mathbb{E} \left( \sup_{\tau \in [0, t]} \left\| \int_0^\tau S(\tau - s) \Phi(s) dW(s) \right\|^p \right) \leq C_{p, T} \mathbb{E} \left( \int_0^t \|\Phi(s)\|^p ds \right), \quad t \in [0, T]$$

$$\text{где } C_{p, T} = \left( \frac{p^2 - p}{2} \right)^{p/2} \left( \sup_{t \in [0, T]} \|S(t)\| \right)^p T^{p/2 - 1}.$$

### 1.4.3 Потраекторный интеграл Губинелли

Наконец, рассмотрим случай, когда  $B(t)$  — дробное броуновское движение, принимающее значения в  $\mathbb{R}^d$ , все компоненты которого имеют индекс Харста  $H < 1/2$ . Вновь, поскольку процесс  $B(t)$  имеет неограниченную вариацию, то интегральные суммы Стильеса для интеграла  $\int_S^T \phi(t, \omega) dB(t, \omega)$  п.н. не будут сходиться, однако, оказывается, что в интегральные суммы можно ввести дополнительные слагаемые, позволяющие им сходиться п.н. Данный метод возник в теории грубых траекторий [41], [25], [30], позволяющем определить интегралы  $\int_0^T Y_t dZ_t$  для функций  $Y_t, Z_t$ , непрерывных по Гельдеру (не обязательно случайных процессов, зависящих также от  $\omega$ ). Приведем некоторые основные положения данной теории в соответствии с подходом Губинелли [30], [25, гл. 4].

Будем обозначать через  $V, W$  конечномерные банаховы пространства над полем  $\mathbb{R}$ . Пространство функций, непрерывных по Гельдеру с показателем  $\alpha \in (0, 1]$ , будем обозначать следующим образом:

$$C^\alpha([0, T], W) = \left\{ Z: [0, T] \rightarrow W \mid \|Z\|_\alpha = \sup_{s, t \in [0, T]: s \neq t} \frac{|Z_t - Z_s|_W}{|t - s|^\alpha} < \infty \right\}.$$

Через  $\|\cdot\|_{\alpha; I}$  обозначим норму Гельдера с показателем  $\alpha$  на отрезке  $I$ , а через  $\|\cdot\|_{\alpha; I, \delta}$  — норму Гельдера с показателем  $\alpha$ , взятую по подотрезкам отрезка  $I$  длины не более  $\delta$ , т.е.

$$\|Y\|_{\alpha; I} = \sup_{\substack{s, t \in I \\ s \neq t}} \frac{|Y_{s, t}|}{|t - s|^\alpha}, \quad \|Y\|_{\alpha; I, \delta} = \sup_{\substack{s, t \in I \\ 0 < |t - s| \leq \delta}} \frac{|Y_{s, t}|}{|t - s|^\alpha}$$

для функций  $Y \in C^\alpha([0, T], U_1)$  или  $Y \in C_2^\alpha([0, T]^2, U_2)$ . Очевидно,

$$\|\cdot\|_{\alpha; I, \delta} \leq \|\cdot\|_{\alpha; I} \leq \|\cdot\|_{\alpha; [0, T], |I|} \leq \|\cdot\|_{\alpha; [0, T]}$$

для любых  $I \subset [0, T]$ ,  $\delta \in (0, |I|]$ , где  $I$  — длина отрезка  $I$ .



В дальнейшем будут рассматриваться функции  $R(s, t)$ , отображающие  $(s, t) \in [0, T]^2$  непрерывно в  $W$ , которые удовлетворяют некоторому аналогу свойства  $\alpha$ -непрерывности по Гельдеру [25, глава 1]. Более точно, будем считать, что функция двух переменных  $R(s, t) = R_{s, t} \in C_2^\alpha([0, T]^2, W)$ , если существует константа  $C$  такая, что  $|R_{s, t}| \leq C|t - s|^\alpha$  для всех  $(s, t) \in [0, T]^2$ . Наименьшую такую константу будем обозначать как

$$\|R\|_\alpha = \sup_{s, t \in [0, T]: s \neq t} \frac{|R_{s, t}|_W}{|t - s|^\alpha}.$$

Отметим также, что если  $Z \in C^\alpha([0, T], W)$  — непрерывная по Гельдеру функция одной переменной, то ее приращения  $(s, t) \mapsto Z_t - Z_s$  принадлежат пространству  $C_2^\alpha([0, T]^2, W)$ . Поэтому обозначение  $Z_{s, t} = Z_t - Z_s$  будет также использоваться для приращений функции одной переменной  $Z$ , определенной на  $[0, T]$ .

Пусть  $\alpha \in (1/3, 1/2]$ .

Говорят, что для функции  $Z: [0, T] \rightarrow W$  функция  $\mathbb{Z}: [0, T]^2 \rightarrow W \otimes W$  является процессом второго порядка над  $Z$ , если она удовлетворяет следующему тождеству Чена:

$$\mathbb{Z}_{s, t} - \mathbb{Z}_{s, u} - \mathbb{Z}_{u, t} = Z_{s, u} \otimes Z_{u, t}$$

для любой тройки  $(s, u, t) \in [0, T]^3$ .

Под множеством  $\alpha$ -непрерывных по Гельдеру грубых траекторий над  $W$  (обозначаемым  $\mathcal{C}^\alpha([0, T], W)$ ) понимают множество всех пар  $(Z, \mathbb{Z})$  таких, что функция  $Z \in C^\alpha([0, T], W)$  и  $\mathbb{Z}$  является процессом второго порядка над  $Z$ , удовлетворяющим условию  $\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha} < \infty$ .

Под множеством  $\alpha$ -непрерывных по Гельдеру геометрических грубых траекторий над  $W$  (обозначаемым  $\mathcal{C}_g^\alpha([0, T], W)$ ) понимают множество всех пар  $(Z, \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], W)$ , для которых имеет место следующее соотношение:

$$\text{Sym}(\mathbb{Z}_{s, t}) = \frac{1}{2} (\mathbb{Z}_{s, t} + \mathbb{Z}_{s, t}^T) = \frac{1}{2} Z_{s, t} \otimes Z_{s, t}$$

для любой пары  $(s, t) \in [0, T]^2$ .

Говорят, что функция  $Y \in C^\alpha([0, T], \mathcal{L}(W, V))$  управляется функцией  $Z \in C^\alpha([0, T], W)$ , если существует  $Y' \in C^\alpha([0, T], \mathcal{L}(W, \mathcal{L}(W, V)))$  (называемое производной Губинелли  $Y$ ), такое, что остаток  $R_{s, t}^Y = Y_{s, t} - Y'_s Z_{s, t}$  удовлетворяет неравенству  $\|R^Y\|_{2\alpha} < +\infty$ . Множество всех  $(Y, Y')$  таких, что  $Y$  управляется  $Z$ , будем обозначать  $\mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0, T], \mathcal{L}(W, V))$ .

*Замечание 1.1.* Множество  $\mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0, T], \mathcal{L}(W, V))$  является банаховым пространством с нормой  $\|(Y, Y')\| = |Y_0| + |Y'_0| + \|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha}$ .

*Замечание 1.2.* В общем случае  $Y'$  определено неоднозначно, и мы будем называть производной Губинелли любое  $Y'$ , удовлетворяющее сформулированному выше определению.

*Замечание 1.3.* Далее для обозначения производной Губинелли будем использовать  $'$ , а обычную производную будем записывать с помощью дифференциального оператора  $D$ .

Пусть  $(Z, \mathbb{Z}) \in \mathcal{C}^\alpha([0, T], W)$ , а также  $(Y, Y') \in \mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0, T], \mathcal{L}(W, V))$ . Потраекторным интегралом Губинелли  $Y$  по  $Z$  называют предел интегральных сумм

$$\int_0^T Y dZ = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} (Y_{t_i} Z_{t_i, t_{i+1}} + Y'_{t_i} \mathbb{Z}_{t_i, t_{i+1}}), \quad (1.1)$$

где  $|\mathcal{P}| = \max |t_{i+1} - t_i|$  — диаметр разбиения  $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l = T\}$ , а предел понимается не зависящим от последовательности разбиений  $\mathcal{P}$ . Если  $Z \in C^\beta([0, T], W)$ ,  $Y \in C^\gamma([0, T], \mathcal{L}(W, V))$ ,  $\beta + \gamma > 1$ , то потраекторный интеграл Губинелли совпадает с потраекторным интегралом Янга, определяемым как предел интегральных сумм

$$\int_0^T Y dZ = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} Y_{t_i} Z_{t_i, t_{i+1}}.$$

*Замечание 1.4.* Слагаемое  $Y'_{t_i} \mathbb{Z}_{t_i, t_{i+1}}$  записано корректно в том смысле, что  $\mathcal{L}(W, L(W, V)) \cong \mathcal{L}(W \otimes W, V)$ . Действительно, указанное произведение можно понимать как результат действия билинейной формы на тензорное произведение двух векторов. Более точно, если

$$\mathbb{Z} = z \otimes z = (z_j z_k), \quad Y' = (y'_{ijk}), \\ i = 1, 2, \dots, \dim V, \quad j, k = 1, 2, \dots, \dim W,$$

то

$$Y' \mathbb{Z} = \left( \sum_{j, k=1}^{\dim W} y'_{ijk} z_j z_k \right)_{i=1}^{\dim V}.$$

Посему потраекторный интеграл, определенный выше, принимает значения в пространстве  $V$ .

Далее будет существенно использоваться следующее предложение [25, теорема 4.10], [30, предложение 1].

**Предложение 1.5.** Пусть функция  $Z \in \mathcal{C}^\alpha(I, W)$  и  $(Y, Y') \in \mathcal{D}_Z^{2\alpha}(I, \mathcal{L}(W, V))$ ,  $I = [0, T]$ . Тогда существует константа  $C > 0$ , зависящая лишь от  $\alpha$  и  $|I| = T$ , такая, что для любых  $s, t \in I$  выполняется неравенство

$$\left| \int_s^t Y_r dZ_r - Y_s Z_{s,t} - Y'_s \mathbb{Z}_{s,t} \right| \leq C (\|Z\|_{\alpha; I} \|R^Y\|_{2\alpha; I} + \|\mathbb{Z}\|_{2\alpha; I} \|Y'\|_{\alpha; I}) |t - s|^{3\alpha}.$$

Причем константа  $C = C(\alpha, |I|)$  может быть выбрана не зависящей от  $|I| = T$ , если  $T \in (0, 1]$ .

*Замечание 1.5.* В предложении 1.5 несущественен тот факт, что отрезок  $I$  имеет вид  $[0, T]$ . Для произвольного отрезка  $I = [a, a + T]$  предложение также справедливо ввиду замены переменных  $\bar{s} = s - a$ ,  $\bar{t} = t - a$  ( $s, t \in [a, a + T]$ ,  $\bar{s}, \bar{t} \in [0, T]$ ) и замен функций  $\bar{Y}_{\bar{s}} = Y_{a+\bar{s}}$ ,  $\bar{\mathbb{Z}}_{\bar{s}} = \mathbb{Z}_{a+\bar{s}}$  (очевидно, указанные нормы и интегралы сохраняют свои значения).

Необходимость ограничения  $\alpha > 1/3$  на интуитивном уровне можно пояснить следующим образом: в слагаемом вида  $Y' \mathbb{Z}$  в интегральной сумме функция  $Y' \in C^\alpha$ , а  $\mathbb{Z} \in C_2^{2\alpha}$ . Из условия сходимости интегральных сумм потраекторного интеграла Янга можно заключить, что  $\alpha + 2\alpha > 1$ , т.е.  $\alpha > 1/3$ .

Вернемся к дробному броуновскому движению. При  $H \in (1/3, 1/2)$  п.н. имеет место включение  $B(t) \in C^{H^*}([0, T], \mathbb{R}^d)$  для любого  $H^* < H$ ,  $H^* > 1/3$ . Поэтому для любого процесса  $\phi(t, \omega)$  п.н. управляемого дробным броуновским движением  $B(t)$  можно определить потраекторный интеграл Губинелли как предел п.н. интегральных сумм

$$\int_0^T \phi(t, \omega) dB(t, \omega) = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} (\phi(t_i, \omega) B_{t_i, t_{i+1}}(\omega) + \phi'(t_i, \omega) \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}}(\omega))$$

при некотором выборе процесса второго порядка  $\mathbb{B}$  над  $B$ . В главе 3 будет приведено явное определение процесса второго порядка над  $B$ , удовлетворяющего указанным выше определениям.

## ГЛАВА 2

### УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРИТЯЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть заданы следующие объекты: вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  с потоком  $\sigma$ -алгебр  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , два сепарабельных гильбертовых пространства  $H$  и  $U$ ; ядерный симметрический положительно определенный оператор  $Q_w$  на пространстве  $U$ ;  $\mathcal{F}_t$ -согласованное  $Q_w$ -броуновское движение  $W(t, \omega)$  со значениями в  $U$  и ковариационным оператором  $Q_w$ .

#### 2.1 Стохастические дифференциальные уравнения в конечномерных гильбертовых пространствах

Данный раздел посвящен исследованию устойчивости в конечномерных пространствах  $H = U = \mathbb{R}^d$ . В этом случае  $Q_w = I_d$  и  $W(t)$  — стандартное броуновское движение со значениями в  $\mathbb{R}^d$ . Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t), \quad (2.1)$$

где  $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  — измеримые по Борелю функции такие, что  $f(t, 0) = 0$  и  $g(t, 0) = 0$  при всех  $t \in \mathbb{R}^+$  и выполнено условие линейного порядка роста по  $x$ , то есть существует постоянная  $C$  такая, что для любых  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , выполняется неравенство  $|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq C(1 + |x|)$ .

Пусть  $\sigma(t, x) = g(t, x)g(t, x)^\top$ . Для каждого  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$  построим наименьшие выпуклые замкнутые множества  $A(t, x)$ ,  $B(t, x)$ , содержащими соответственно матрицу  $\sigma(t, x)$  и вектор  $f(t, x)$  и все предельные точки  $\sigma(t, x')$  и  $f(t, x')$  при  $x' \rightarrow x$ .

**Определение 2.1.** Если:

1) существуют вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  с потоком  $\mathcal{F}_t$  и отображение  $X: \Omega \rightarrow C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$  такие, что функция  $(t, \omega) \rightarrow X(t, \omega) \in \mathbb{R}^d$  —  $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ -измерима и  $\mathcal{F}_t$ -согласована;

- 2) существует  $(\mathcal{F}_t)$ -броуновское движение  $W(t)$ ,  $W(0) = 0$  п. н.;
- 3) существуют измеримые  $(\mathcal{F}_t)$ -согласованные процессы  $v: \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  и  $u: \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ , удовлетворяющие для  $(\mu \times \mathbb{P})$ -почти всех  $(t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$  включениям

$$v(t) \in B(t, X(t, \omega)), \quad u(t)u^\top(t) \in A(t, X(t, \omega)),$$

и такие, что для любого  $T \in \mathbb{R}^+$  выполняется неравенство  $\int_0^T (|v(s)| + |u(s)|^2) ds < \infty$  п. н.;

- 4) с вероятностью 1 для всех  $t \in \mathbb{R}^+$  выполняется равенство

$$X(t) = X(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau + \int_0^t u(\tau) dW(\tau),$$

то набор  $(X, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, W(t), v(t), u(t))$  (или короче  $X$ ) называем  $\beta$ -слабым решением уравнения (2.1).

Заметим, что условия  $f(t, 0) = 0$  и  $g(t, 0) = 0$  обеспечивают существование нулевого решения уравнения (2.1). Из теоремы 2.3 книги [10] следует, что если функции  $f$  и  $g$  измеримы по Борелю и имеют линейный порядок роста, то для любой вероятности  $\nu$  на  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  с компактным носителем уравнение (2.1) имеет слабое решение  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, W(t), x(t), v(t), u(t))$  с начальным распределением  $\nu$ .

**Определение 2.2.** Будем говорить, что нулевое решение уравнения (2.1) устойчиво по вероятности, если для любых  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для каждого слабого решения  $x(t)$  уравнения (2.1), удовлетворяющего условию  $|x_0| \leq \delta$  п.н., выполняется неравенство (2.2):

$$\mathbb{P}\{\sup_{t \geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2. \quad (2.2)$$

**Определение 2.3.** Будем говорить, что нулевое решение уравнения (2.1) асимптотически устойчиво по вероятности, если нулевое решение уравнения (2.1) устойчиво по вероятности и для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для каждого слабого решения  $x(t)$  уравнения (2.1), удовлетворяющего условию  $|x_0| \leq \delta$  п.н., выполняется неравенство (2.3):

$$\mathbb{P}\{\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0\} \geq 1 - \varepsilon. \quad (2.3)$$

Предположим, что определена функция  $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Будем говорить, что функция  $V(t, x)$  удовлетворяет **условию  $L$** , если она непрерывно дифференцируема по  $t$ , дважды непрерывно дифференцируема по  $x$  и существует  $\delta > 0$  такое, что для любого  $t \in \mathbb{R}^+$  и любого  $x \in \mathbb{R}^d$  такого, что  $|x| \leq \delta$ , выполнено неравенство  $BV(t, x) \leq 0$ , где

$$BV(t, x) = \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \sup_{v \in F(t, x)} \left( \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} v \right) + \frac{1}{2} \sup_{u \in G(t, x)} \text{tr} \left( \frac{\partial^2 V(t, x)}{\partial x^2} uu^\top \right). \quad (2.4)$$

Следующие две теоремы<sup>1</sup>, дающие достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по вероятности нулевого решения уравнения (2.1), доказаны в статье 1–А.

**Теорема 2.1.** Пусть функция  $V(t, x)$  удовлетворяет условию  $L$ , причем  $V(t, 0) = 0$  при всех  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $V(t, x) \geq \alpha(|x|) > 0$  при  $0 < |x| \leq \delta$  и всех  $t \in \mathbb{R}^+$ , где  $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  – некоторая функция,  $\delta$  – число из условия  $L$ . Кроме того, предположим, что  $\limsup_{x \rightarrow 0, t > 0} V(t, x) = 0$ . Тогда нулевое решение уравнения (2.1) устойчиво по вероятности.

**Теорема 2.2.** Пусть существуют число  $\delta > 0$  и функция  $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$ , дифференцируемая по  $t \in \mathbb{R}^+$ , дважды дифференцируемая по  $x$ , удовлетворяющие условиям:

- 1)  $BV(t, x) < \beta(\varepsilon) < 0$  при всех  $x$  таких, что  $\varepsilon \leq |x| \leq \delta$ , и при всех  $t \in \mathbb{R}^+$ , где  $\beta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^-$  – некоторая функция;
- 2)  $\limsup_{x \rightarrow 0, t > 0} V(t, x) = 0$ ;
- 3)  $V(t, 0) = 0$  при всех  $t \in \mathbb{R}^+$ ;
- 4)  $V(t, x) \geq \alpha(|x|) > 0$  при всех  $x$  таких, что  $|x| \leq \delta$ , и всех  $t \in \mathbb{R}^+$ , где  $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  – некоторая функция.

Тогда нулевое решение уравнения (2.1) асимптотически устойчиво по вероятности.

Исследуем устойчивость слабого нулевого решения стохастического дифференциального уравнения (2.1) с выделенной линейной частью вида

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t)))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

---

<sup>1</sup>Авторство указанных теорем принадлежит Я.Б. Задворному. Кроме того некоторые обобщения названных теорем для автономных уравнений можно найти в [10, раздел 3.2]

Здесь  $A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  — кусочно непрерывная функция,  $\sup_{t \geq 0} |A(t)| \leq M$ , а функции  $f$  и  $g$  удовлетворяют условиям для уравнения (2.1).

Наряду с уравнением (2.5) рассмотрим линейное однородное детерминированное уравнение

$$dX(t) = A(t)X(t)dt, \quad t \geq 0, \quad (2.6)$$

Через  $X^{(s,x)}(t)$  будем обозначать (единственное) решение уравнения (2.6), удовлетворяющее равенству  $X^{(s,x)}(s) = x$  (существование, единственность и непрерывность по  $t$  такого решения в указанных предположениях имеет место, см., например, [2]).

**Определение 2.4.** Будем говорить, что уравнение (2.6) имеет *равномерно экспоненциально устойчивое* нулевое решение, если существуют константы  $\Lambda, \lambda > 0$ , не зависящие от  $s, x$ , такие, что для любых  $s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d$  и  $t \geq s$  выполняется неравенство

$$|X^{(s,x)}(t)|^2 \leq \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)}. \quad (2.7)$$

Для систем (2.5) и (2.6) определим операторы  $B$  и  $B_0$  по формулам (2.8) и (2.9):

$$BV(s,x) = \frac{\partial V(s,x)}{\partial s} + \sup_{v \in F(t,x)} \left( \frac{\partial V(s,x)}{\partial x} (A(s)x + v) \right) + \frac{1}{2} \sup_{u \in G(t,x)} \text{tr} \left( \frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2} uu^\top \right), \quad (2.8)$$

$$B_0V(s,x) = \frac{\partial V(s,x)}{\partial s} + \frac{\partial V(s,x)}{\partial x} A(s)x, \quad s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d, \varphi \in C_h. \quad (2.9)$$

**Теорема 2.3.** Предположим, что функции  $f(t, x)$  и  $g(t, x)$  таковы, что при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta_\varepsilon > 0$  такое, что выполняются неравенства (2.10)

$$|f(t, x)| \leq \varepsilon |x|, \quad |g(t, x)| \leq \varepsilon |x|, \quad (2.10)$$

для любых  $x, |x| \leq \delta_\varepsilon, t \in \mathbb{R}^+$ , а система (2.6) имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда система (2.5) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.

**Доказательство.** Зададим функцию  $V(s, x)$  равенством (2.11):

$$V(s, x) = \int_s^{s+T} |X^{(s,x)}(t)|^2 dt, \quad (2.11)$$

где  $T$  — положительный параметр, который будет определен ниже. В [36, следствие 5.3] показано, что функция  $V(s, x)$  определена, непрерывно дифференцируема по  $s \in \mathbb{R}^+$  и дважды непрерывно дифференцируема по  $x \in \mathbb{R}^d$ , причем справедливо равенство  $B_0 V(s, x) = |X^{(s, x)}(s + T)|^2 - |x|^2$ . Отсюда и из неравенства (2.7) следует, что можно подобрать достаточно большое  $T_\lambda > s$  такое, что  $|X^{(s, x)}(s + T)|^2 \leq \frac{1}{2}|x|^2$  при всех  $T \geq T_\lambda$ , и значит,  $B_0 V(s, x) \leq -\frac{1}{2}|x|^2$  при всех  $T \geq T_\lambda$ . Зафиксируем одно из таких  $T$  и покажем, что введенная функция  $V(s, x)$  удовлетворяет всем условиям теоремы 2.2.

Условие 3) следует из единственности решения:  $X^{(s, 0)}(t) \equiv 0$ .

Покажем, что выполнено условие 2). Оценим сверху функцию  $V(s, x)$ , используя неравенство (2.7):

$$0 \leq V(s, x) \leq \int_s^{s+T} \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)} dt = \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \Lambda |x|^2 = k_1 |x|^2, \quad (2.12)$$

где  $k_1 = \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \Lambda > 0$ . Взяв от обеих частей неравенства (2.12) супремум по  $s > 0$  и перейдя к пределу, получим  $\lim_{x \rightarrow 0} \sup_{s > 0} V(s, x) = 0$ , что и требовалось.

Покажем, что выполнено условие 4). Применив формулу Ито к процессу  $|X^{(s, x)}(t)|^2$ , получим (2.13):

$$|X^{(s, x)}(s + T)|^2 - |x|^2 = \int_s^{s+T} B_0(|X^{(s, x)}(t)|^2) dt. \quad (2.13)$$

Оценим  $B_0(|X^{(s, x)}(t)|^2) = 2 (X^{(s, x)}(t))^\top A(t) X^{(s, x)}(t)$  с помощью неравенства Коши-Буняковского:

$$\left| 2 (X^{(s, x)}(t))^\top A(t) X^{(s, x)}(t) \right| = 2 \left| \langle A(t) X^{(s, x)}(t), X^{(s, x)}(t) \rangle \right| \leq 2M |X^{(s, x)}(t)|^2,$$

т.е.  $|B_0(|X^{(s, x)}(t)|^2)| \leq 2M |X^{(s, x)}(t)|^2$ . Вернемся теперь к формуле Ито:

$$-\frac{1}{2}|x|^2 \geq |X^{(s, x)}(s + T)|^2 - |x|^2 = \int_s^{s+T} B_0(|X^{(s, x)}(t)|^2) dt \geq -2M \cdot V(s, t). \quad (2.14)$$

Обозначая  $k_3 = \frac{1}{4M} > 0$ , из (2.14) получим:  $V(s, t) \geq k_3 |x|^2 > 0$  для  $x \neq 0$ , и следовательно, 4) выполнено.



Осталось показать, что выполнено условие 1). Оценим  $BV(s, x)$ , используя элементарное неравенство  $|\operatorname{tr} A| \leq \sqrt{d}|A|$  для  $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ :

$$\begin{aligned} BV(s, x) &= BV_0(s, x) + \sup_{v \in F(t, x)} \left( \frac{\partial V(s, x)}{\partial x} v \right) + \frac{1}{2} \sup_{u \in G(t, x)} \operatorname{tr} \left( \frac{\partial^2 V(s, x)}{\partial x^2} uu^\top \right) \leq \\ &\leq -\frac{1}{2}|x|^2 + \sup_{v \in F(t, x)} |v| \left| \frac{\partial V(s, x)}{\partial x} \right| + \frac{\sqrt{d}}{2} \sup_{u \in G(t, x)} \left| \frac{\partial^2 V(s, x)}{\partial x^2} \right| |u|^2 \leq \\ &\leq -\frac{1}{2}|x|^2 + \varepsilon |x| \left| \frac{\partial V(s, x)}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial^2 V(s, x)}{\partial x^2} \right| \frac{\sqrt{d}}{2} \varepsilon^2 |x|^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

для любого наперед заданного  $\varepsilon > 0$  и соответствующей окрестности нуля  $|x| \leq \delta_\varepsilon$ . Итак, остается оценить  $\left| \frac{\partial^2 V(s, x)}{\partial x^2} \right|$  и  $\left| \frac{\partial V(s, x)}{\partial x} \right|$ . Заметим, что  $\frac{\partial}{\partial x} |X^{(s, x)}(t)|^2 = 2 \frac{\partial X^{(s, x)}(t)}{\partial x} X^{(s, x)}(t)$ . Существование  $\frac{\partial X^{(s, x)}(t)}{\partial x}$  следует из [5, гл. VII, § 3]. Обозначим  $\xi_x(t) = \frac{\partial X^{(s, x)}(t)}{\partial x}$ . Тогда, как показано в [5, гл. VII, § 3], функция  $\xi_x(t)$  удовлетворяет матричному уравнению (2.16):

$$\begin{aligned} \xi_x(t) &= \frac{\partial}{\partial x} (\xi_x(s)) + \int_s^t \frac{\partial}{\partial x} (A(u)x) \Big|_{x=\xi_x(u)} \xi_x(u) du = I_d + \int_s^t A(t) \xi_x(t) du \quad \text{или} \\ \xi_i(t) &= e_i + \int_s^t A(t) \xi_i(t) du, \quad i = 1, \dots, d \end{aligned} \quad (2.16)$$

где  $\xi_i(t) = \frac{\partial X^{(s, x)}(t)}{\partial x_i}$ ,  $e_i$  — вектор, у которого  $i$ -я компонента равна 1, а остальные равны 0. К процессу  $|\xi_i(t)|^2$  применим формулу Ито:

$$|\xi_i(t)|^2 = |e_i|^2 + \int_s^t B_0(|\xi_i(u)|^2) du \leq 1 + \int_s^t 2M |\xi_i(u)|^2 du. \quad (2.17)$$

Из (2.17), используя неравенство Гронуолла-Беллмана, получим неравенство  $|\xi_i(t)|^2 = \left| \frac{\partial X^{(s, x)}(t)}{\partial x_i} \right|^2 \leq e^{2M(t-s)}$ . И значит,  $\left| \frac{\partial X^{(s, x)}(t)}{\partial x} \right|^2 = \sum_{i=1}^d \left| \frac{\partial X^{(s, x)}(t)}{\partial x_i} \right|^2 \leq \leq d e^{2M(t-s)}$ . Из (2.7) и последнего неравенства следует (2.18):

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial V(s, x)}{\partial x} \right| &\leq \left| \int_s^{s+T} \frac{\partial}{\partial x} |X^{(s, x)}(t)|^2 dt \right| \leq 2 \int_s^{s+T} \left| \frac{\partial X^{(s, x)}(t)}{\partial x} \right| |X^{(s, x)}(t)| dt \leq \\ &\leq 2\sqrt{d\Lambda} |x| \int_s^{s+T} e^{\frac{2M-\lambda}{2}(t-s)} dt = \frac{4\sqrt{d\Lambda} \left( e^{\frac{2M-\lambda}{2}T} - 1 \right)}{2M - \lambda} |x| = K_1 |x|. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Без ограничения общности можно считать, что  $2M - \lambda > 0$  и  $K_1 > 0$ .

Для  $\left| \frac{\partial^2 V(s, x)}{\partial x^2} \right|$  проводя те же рассуждения (но в роли  $X^{(s, x)}$  уже выступает  $\xi_x$ ), используя неравенство Гронулла-Беллмана, покажем, что  $\left| \frac{\partial^2 X^{(s, x)}(t)}{\partial x_i \partial x_j} \right|^2 = 0$ , и значит,  $\left| \frac{\partial^2 X^{(s, x)}(t)}{\partial x^2} \right|^2 = 0$ . Тогда легко видеть, что  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} |X^{(s, x)}(t)|^2 = 2 \left( \frac{\partial X^{(s, x)}(t)}{\partial x} \right)^2$ , и будем иметь оценку  $\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} |X^{(s, x)}(t)|^2 \right| \leq 2 \left| \frac{\partial X^{(s, x)}(t)}{\partial x} \right|^2 \leq 2d e^{2M(t-s)}$ , из которой выводим (2.19):

$$\left| \frac{\partial^2 V(s, x)}{\partial x^2} \right| \leq \left| \int_s^{s+T} \frac{\partial^2}{\partial x^2} |X^{(s, x)}(t)|^2 dt \right| \leq 2d \int_s^{s+T} e^{2M(t-s)} dt = \frac{2d (e^{2MT} - 1)}{2M} = K_2. \quad (2.19)$$

Из неравенств (2.15), (2.18), (2.19), следует оценка  $BV(s, x) \leq \left( -\frac{1}{2} + \varepsilon K_1 + \frac{\sqrt{d}}{2} \varepsilon^2 K_2 \right) |x|^2$ . За счет выбора достаточно малого  $\varepsilon$  добьемся того, чтобы константа при  $|x|^2$  была отрицательной. Тогда условие 1) будет выполнено. Теорема доказана.

*Замечание 2.1.* Некоторые достаточные условия равномерной экспоненциальной устойчивости системы (2.6) приведены в работе [35].

**Пример 2.1.** Приведем пример уравнения, имеющего асимптотически устойчивое по вероятности слабое нулевое решение на основании теоремы 2.3. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений (2.20)

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((-20 - 0.1 \sin t)x(t) + 0.1 \cos t y(t) + \sin^2 x(t))dt, \\ dy(t) &= (-0.1 \cos t x(t) - (20 + 0.1 \sin t)y(t))dt + \sin^2 y(t) \operatorname{sgn}(x(t-1))dw(t), \end{aligned} \quad (2.20)$$

при  $t \geq 0$  с начальными условиями  $x(t) = \psi(t)$ ,  $t \in [-1, 0]$ ,  $y(0) = y_0$ , где  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $w(t)$  – одномерное броуновское движение. Нулевое решение линеаризованной системы

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((-20 - 0.1 \sin t)x(t) + 0.1 \cos t y(t))dt, \\ dy(t) &= (-0.1 \cos t x(t) - (20 + 0.1 \sin t)y(t))dt, \end{aligned}$$

является равномерно экспоненциально устойчивым [35], и следовательно, нулевое решение системы (2.20) асимптотически устойчиво по вероятности.

## 2.2 Стохастические дифференциально-функциональные уравнения в произвольных гильбертовых пространствах

Вернемся к общему случаю сепарабельных гильбертовых пространств  $H$  и  $U$ . Рассмотрим стохастическое эволюционное функциональное уравнение

$$dX(t, \omega) = AX(t, \omega)dt + f(t, X(t, \omega))dt + g(t, X(t, \omega))dW(t, \omega), \quad (t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \quad (2.21)$$

относительно  $X \in H$  с начальным условием

$$X(0, \omega) = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (2.22)$$

где  $f(t, X): \mathbb{R}^+ \times H \rightarrow H$ ,  $g(t, X): \mathbb{R}^+ \times H \rightarrow L_2(U, H)$  — измеримые, непрерывные по  $X$  (при любом фиксированном  $t \in \mathbb{R}^+$ ) функции,  $A$  — линейный оператор, определенный на всюду плотном в  $H$  множестве  $\mathcal{D}(A)$  и порождающий  $C_0$ -полугруппу  $S(t)$  на  $H$ ,  $\xi: \Omega \rightarrow \mathcal{D}(A)$  —  $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина, имеющая конечный момент  $\mathbb{E} \|\xi\|^p < \infty$  порядка  $p > 2$ . В дальнейшем для сокращения обозначений аргумент  $\omega$  будем опускать. Все интегралы ниже записаны в предположении их существования и конечности.

Относительно функций  $f(t, X)$  и  $g(t, X)$  будем предполагать, что выполнены два условия:

1. *Локальное условие Липшица.* Для любого  $a > 0$  существует постоянная  $q_a$  такая, что для всех  $t \in [0, a]$  и любых  $\varphi, \psi \in H$ , таких, что  $\|\varphi\| \leq a$ ,  $\|\psi\| \leq a$ , выполняются неравенства

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\| \leq q_a \|\varphi - \psi\|, \quad \|g(t, \varphi) - g(t, \psi)\| \leq q_a \|\varphi - \psi\| \quad (2.23)$$

2. *Условие линейного порядка роста.* Существует непрерывная функция  $k: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  такая, что для всех  $t \in \mathbb{R}^+$  и любого  $\eta \in H$  выполняются неравенства

$$\|f(t, \eta)\| \leq k(t)(1 + \|\eta\|), \quad \|g(t, \eta)\| \leq k(t)(1 + \|\eta\|). \quad (2.24)$$

Стоит отметить, что всякая функция, удовлетворяющая глобальному условию Липшица, удовлетворяет и локальному условию, и в свою очередь, всякая функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица, непрерывна.

**Определение 2.5.** Случайный процесс  $X(t), t \geq 0$  называют слабым решением уравнения (2.21) с начальным условием (2.22), если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Процесс  $X(t), t \geq 0$  является  $\mathcal{F}_t$ -согласованным.
2. Процесс  $X(t), t \geq 0$  п.н. непрерывен по  $t$ .
3.  $X(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)f(s, X(s))ds + \int_0^t S(t-s)g(s, X(s))dW(s), t \in \mathbb{R}^+$ .

**Определение 2.6.** Случайный процесс  $X(t), t \geq 0$  называют сильным решением уравнения (2.21) с начальным условием (2.22), если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Процесс  $X(t), t \geq 0$  является  $\mathcal{F}_t$ -согласованным.
2. Процесс  $X(t), t \geq 0$  п.н. непрерывен по  $t$ .
3.  $X \in \mathcal{D}(A)$  для почти всех  $(t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ .
4.  $X(t) = \xi + \int_0^t AX(s)ds + \int_0^t f(s, X(s))ds + \int_0^t g(s, X(s))dW(s), t \in \mathbb{R}^+$ .

**Определение 2.7.** Будем говорить, что (слабое или сильное) решение  $X(t)$  уравнения (2.21) с начальным условием (2.22) является единственным, если для любое другое решение  $Y(t)$  уравнения (2.21) с начальным условием (2.22) п.н. совпадает с  $X(t)$ , т.е.  $\mathbb{P}(X(t) = Y(t) \forall t \geq 0) = 1$ .

**Определение 2.8.** Пусть положительная функция  $\lambda(t)$  определена для достаточно больших  $t > 0$ , скажем,  $t \geq T > 0$ . Предположим, что

1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty$ .
2.  $\ln \lambda(t)$  равномерно непрерывна по  $t \geq T$ .
3. Существует константа  $\tau \geq 0$  такая, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln \ln t}{\ln \lambda(t)} \leq \tau$ .

Будем говорить, что слабое решение задачи (2.21), (2.22) притягивается к нулю со скоростью  $\lambda(t)$ , если найдется  $\gamma > 0$  такое, что выполняется неравенство (2.25)

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|X(t)\|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma \quad \text{п.н.} \quad (2.25)$$

Через  $\rho(A)$  обозначим резольвентное множество оператора  $A$ , т.е. множество тех значений  $l \in \mathbb{C}$  для которых определен оператор  $R(l, A) = (lI - A)^{-1}$  (резольвента оператора  $A$ ). Обозначим также  $R(l) = lR(l, A)$ ,  $\rho_{\mathbb{R}}(A) = \rho(A) \cap \mathbb{R}$ .

Для задачи (2.21), (2.22) построим аппроксимирующую задачу Коши

$$\begin{aligned} dX^{(l)}(t, \omega) &= AX^{(l)}(t, \omega) + R(l)f(t, X^{(l)}(t, \omega))dt + R(l)g(t, X^{(l)}(t, \omega))dW(t, \omega), \\ &\quad t \in \mathbb{R}^+, \\ X^{(l)}(0, \omega) &= \xi(\omega), \end{aligned} \quad (2.26)$$

где  $l \in \rho_{\mathbb{R}}(A)$ .

**Лемма 2.1.** Для любого достаточно большого  $l \in \rho_{\mathbb{R}}(A)$  задача Коши (2.26) имеет единственное сильное решение  $X^{(l)}$  и более того, существует подпоследовательность  $X^{(l_n)}$  такая, что  $X^{(l_n)}(t) \rightarrow X(t)$  при  $n \rightarrow \infty$  п.н. равномерно по  $t \in [0, T]$ , где  $X(t)$  — слабое решение задачи (2.21), (2.22), а  $T > 0$  — произвольное число.

**Доказательство.** В [47, теорема 3.1], отталкиваясь от определения генератора  $C_0$ -полугруппы и (как следствие, см. [47, следствие 2.5]) замкнутости оператора  $A$ , было доказано интегральное представление резольвенты (2.27)

$$R(l, A)x = \int_0^{+\infty} e^{-lt} S(t)x dt, \quad x \in H, \quad (2.27)$$

для всех  $l \in \rho(A)$ , для которых указанный интеграл существует и конечен. Воспользуемся оценкой операторов  $C_0$ -полугруппы (см. предложение 1.1):  $\|S(t)\| \leq Me^{\beta t}$  для всех  $t \geq 0$ . Будем иметь оценку (2.28):

$$\begin{aligned} \|R(l, A)\| &= \sup_{\|x\|=1} \|R(l, A)x\| \leq \int_0^{+\infty} e^{-lt} \sup_{\|x\|=1} \|S(t)x\| dt \leq \\ &\leq M \int_0^{+\infty} e^{-(l-\beta)t} dt = \frac{M}{l-\beta}, \quad l > \beta \end{aligned} \quad (2.28)$$

откуда следует, что  $(\beta, +\infty] \subset \rho(A)$  и более того,  $\|R(l)\| \leq \frac{Ml}{l-\beta} \leq 2M$  для  $l \geq 2\beta$ . Далее будем рассматривать только  $l \geq 2M$ , говоря о них, как о «достаточно больших»  $l$ .

Докажем, что задача Коши (2.26) имеет единственное слабое решение при достаточно большом  $l$ . С этой целью заметим, что для любого  $r > 1$  ввиду условий (2.23) и (2.24) получим оценки (2.29) – (2.32):

$$\mathbb{E} \|R(l)f(t, \varphi) - R(l)f(t, \psi)\|^r \leq (2M)^r \mathbb{E} \|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\|^r \leq (2Mq_a)^r \mathbb{E} \|\varphi - \psi\|^r, \quad (2.29)$$

$$\mathbb{E} \|R(l)g(t, \varphi) - R(l)g(t, \psi)\|^r \leq (2M)^r \mathbb{E} \|g(t, \varphi) - g(t, \psi)\|^r \leq (2Mq_a)^r \mathbb{E} \|\varphi - \psi\|^r, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|R(l)f(t, \eta)\|^r &\leq (2M)^r \mathbb{E} (k(t)(1 + \|\eta\|))^r \leq \\ &\leq (2M)^r \mathbb{E} ((k(t))^r 2^{r-1} (1 + \|\eta\|^r)) = \frac{(4Mk(t))^r}{2} (1 + \mathbb{E} \|\eta\|^r), \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|R(l)g(t, \eta)\|^r &\leq (2M)^r \mathbb{E} (k(t)(1 + \|\eta\|))^r \leq \\ &\leq (2M)^r \mathbb{E} ((k(t))^r 2^{r-1} (1 + \|\eta\|^r)) = \frac{(4Mk(t))^r}{2} (1 + \mathbb{E} \|\eta\|^r), \end{aligned} \quad (2.32)$$

где  $\varphi, \psi, \eta: \Omega \rightarrow H$  — произвольные  $\mathcal{F}$ -измеримые случайные величины с конечным  $p$ -м моментом, такие, что п.н.  $\|\varphi\| \leq a$  и  $\|\zeta\| \leq a$ . Таким образом, задача Коши (2.26) удовлетворяет условиям [7–А, теорема 1.1] и следовательно имеет единственное слабое решение  $X^{(l)}(t), t \geq 0$ .

Докажем, что при наложенных ранее ограничениях найденное слабое решение  $X^{(l)}(t), t \geq 0$  будет также являться и сильным решением задачи Коши (2.26). Для этого достаточно проверить условия из [34, предложение 2.3], предварительно зафиксировав произвольный отрезок времени  $t \in [0, T]$ . Воспользуемся утверждением (с) из [47, теорема 2.4], показывающим, что операторы  $A$  и  $S(t)$  (а также  $(lI - A)$  и  $S(t)$ ) перестановочны. Для любых  $r \in [0, t)$ ,  $\varphi \in H$ ,  $u \in U$  элементы (2.33), (2.34)

$$(lI - A)(S(t-r)R(l)f(r, \varphi)) = lS(t-r)f(r, \varphi) \in H, \quad (2.33)$$

$$(lI - A)(S(t-r)R(l)g(r, \varphi)u) = lS(t-r)g(r, \varphi)u \in H, \quad (2.34)$$

откуда следует, что  $S(t-r)R(l)f(r, \varphi), S(t-r)R(l)g(r, \varphi)u \in \mathcal{D}(lI - A) = \mathcal{D}(A)$ . Кроме того,  $\xi \in \mathcal{D}(A)$ , т.е. условие (а) выполнено. Далее оценим интегралы (2.35) — (2.38) из условия (b):

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^t \|AS(t-r)R(l)f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt \leq \\ & \leq \int_0^T \int_0^t \|(A - lI)S(t-r)l(lI - A)^{-1}f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt + \\ & + \int_0^T \int_0^t \|lS(t-r)l(lI - A)^{-1}f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt = I_1 + I_2, \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^T \int_0^t \|(A - lI)S(t-r)l(lI - A)^{-1}f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt = \\ &= \int_0^T \int_0^t \|S(t-r)(A - lI)l(lI - A)^{-1}f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt = \\ &= l \int_0^T \int_0^t \|S(t-r)f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Из перестановочности операторов  $(lI - A)$  и  $S(t)$  следует перестановочность операторов  $R(l)$  и  $S(t)$ , так как  $(lI - A)S(t) = S(t)(lI - A) \implies S(t) = (lI - A)^{-1}S(t)(lI - A) \implies S(t)(lI - A)^{-1} = (lI - A)^{-1}S(t)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^T \int_0^t \|lS(t-r)R(l)f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt \leq \\ &\leq 2Ml \int_0^T \int_0^t \|S(t-r)f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_0^t \|AS(t-r)R(l)f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt \leq \\ &\leq (2M+1)l \int_0^T \int_0^t \|S(t-r)\| \cdot \|f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt \leq \\ &= M(2M+1)l \int_0^T e^{\beta t} dt \int_0^t e^{-\beta r} k(r)(1 + \|X^{(l)}(r)\|) dr = I_3. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Поскольку  $X^{(l)}(r)$  п.н непрерывен, то  $M_T = \sup_{0 \leq r \leq T} \|X^{(l)}(r)\| < \infty$ . А поскольку функция  $k(r)$  непрерывна на  $[0, T]$ , то интеграл  $I_3$ , очевидно, п.н. конечен, т.е. условие (b) выполнено. Условие (c) проверяется аналогично.

Таким образом, все условия [34, предложение 2.3] выполнены, а значит, задача Коши (2.26) имеет сильное решение. Это решение будет также и единственным ввиду того, что всякое сильное решение является слабым (см. [34, предложение 2.1]), а слабое решение (2.26) единственно.

Докажем теперь существование требуемой подпоследовательности  $X^{(l_n)}$ . Сперва покажем, что для любого  $T \in \mathbb{R}^+$  существует постоянная  $C(T) > 0$  такая, для слабого решения задачи (2.21), (2.22) выполняется оценка сверху (2.39)

$$\mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} \|X(s)\|^p \right) \leq C(T). \quad (2.39)$$

Действительно, используя интегральное неравенство Гельдера, условие (2.24) и неравенство типа Буркхольдера (см. предложение 1.4), можно получить (см. [2–A]) оценку вида

$$\mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} \|X(s)\|^p \right) \leq C_1(T) + C_2(T) \int_0^T \mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} \|X(s)\|^p \right) ds. \quad (2.40)$$

Отсюда согласно неравенству Гронуолла получим неравенство (2.41):

$$\mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} \|X(s)\|^p \right) \leq C_1(T)e^{C_2(T)T} =: C(T), \quad (2.41)$$

как и утверждалось.

Поскольку  $\|R(l)\| \leq 2M$  при достаточно больших  $l$ , то аналогично доказывается оценка для решения  $X^{(l)}(t)$  задачи (2.26): существует постоянная  $K(T)$  такая, что  $\mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} \|X^{(l)}(s)\|^p \right) \leq K(T)$ . Обозначим  $C_T = \max(C(T), K(T))$ .

Для каждого  $a, T > 0$  и достаточно большого  $l$  определим множество (2.42):

$$\Omega_l^{a,T} = \left\{ \omega \in \Omega : \max \left( \sup_{0 \leq s \leq T} \|X(s)\|, \sup_{0 \leq s \leq T} \|X^{(l)}(s)\| \right) \leq a \right\} \quad (2.42)$$

и его характеристическую функцию  $\zeta_l^{a,T} = 1_{\Omega_l^{a,T}}(\omega)$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} X(t) - X^{(l)}(t) &= \int_0^t S(t-s)(I - R(l))f(s, X(s))ds + \\ &+ \int_0^t S(t-s)(I - R(l))g(s, X(s))dW(s) + \\ &+ \int_0^t S(t-s)R(l) \left( f(s, X(s)) - f(s, X^{(l)}(s)) \right) ds + \\ &+ \int_0^t S(t-s)R(l) \left( g(s, X(s)) - g(s, X^{(l)}(s)) \right) dW(s), \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Оценивая в равенстве (2.43) каждое слагаемое, используя неравенства Гельдера и Буркхольдера, условие линейного порядка роста и теорему Лебега о мажорируемой сходимости, можно показать (см. [2–A]), что существуют постоянные  $\tilde{C}(a, T)$  и  $\varepsilon(l) > 0$  такие, что

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t) - X^{(l)}(t)\|^p \zeta_l^{a,T} \leq \tilde{C}(a, T) \int_0^T \mathbb{E} \sup_{0 \leq r \leq s} \|X(r) - X^{(l)}(r)\|^p \zeta_l^{a,T} ds + \varepsilon(l), \quad (2.44)$$

где  $\varepsilon(l) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$ . Применяя к (2.44) лемму Гронуолла, получим (2.45):

$$\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t) - X^{(l)}(t)\|^p \zeta_l^{a,T} \leq \varepsilon(l) e^{T\tilde{C}(a,T)} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0 \quad \forall (a, T) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \quad (2.45)$$

Покажем, что отсюда следует сходимость по вероятности:  $\sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t) - X^{(l)}(t)\|^p \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$  для любого  $T \in \mathbb{R}^+$ . Неравенство Чебышева дает:



$$\mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t)\| > a \right) \leq \frac{1}{a^p} \mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t)\| \right)^p = \frac{1}{a^p} \mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t)\|^p \leq \frac{C_T}{a^p}, \quad (2.46)$$

$$\mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^{(l)}(t)\| > a \right) \leq \frac{C_T}{a^p}. \quad (2.47)$$

Из (2.46), (2.47) следует, для любого  $a > 0$  и достаточно больших  $l$  справедливо неравенство (2.48)

$$\mathbb{P} \left( \zeta_l^{a,T} = 0 \right) \leq \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t)\| > a \right) + \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \|X^{(l)}(t)\| > a \right) \leq \frac{2C_T}{a^p} \quad (2.48)$$

Возьмем произвольные  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  и положим  $a = \left( \frac{4C_T}{\varepsilon_2} \right)^{1/p}$ . Поскольку  $\mathbb{E} \sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t) - X^{(l)}(t)\|^p \zeta_l^{a,T} \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0$ , то на основании неравенства Чебышева заключаем, что найдется  $l_{\varepsilon_2}$  такое, что для всех  $l \geq l_{\varepsilon_2}$  выполняется неравенство  $\mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t) - X^{(l)}(t)\|^p \zeta_l^{a,T} > \varepsilon_1 \right) \leq \frac{\varepsilon_2}{2}$ . Таким образом, для всех  $l \geq l_{\varepsilon_2}$  справедливо, неравенство (2.8)

$$\begin{aligned} & \mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t) - X^{(l)}(t)\|^p > \varepsilon_1 \right) \leq \\ & \leq \mathbb{P} \left( \left( \sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t) - X^{(l)}(t)\|^p \zeta_l^{a,T} > \varepsilon_1 \right) \cap \left( \zeta_l^{a,T} = 1 \right) \right) + \mathbb{P} \left( \zeta_l^{a,T} = 0 \right) \leq \varepsilon_2, \end{aligned}$$

что и означает сходимость  $\sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t) - X^{(l)}(t)\|^p \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$ .

А поскольку из всякой последовательности случайных величин, сходящейся по вероятности, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся п.н., то найдется подпоследовательность  $X^{(l_n)}(t)$  такая, что  $\sup_{0 \leq t \leq T} \|X(t) - X^{(l_n)}(t)\|^p \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$ , т.е.  $X(t) \xrightarrow[l \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} X^{(l_n)}(t)$  равномерно по  $t \in [0, T]$ . Это и есть требуемая подпоследовательность. Лемма доказана.

### 2.2.1 Теорема о притяжении к нулю

Введем операторы  $L, Q$  по формулам (2.49), (2.50): если положительный функционал  $V(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$ , то

$$LV(t, x) = V'_t(t, x) + \langle V'_x(t, x), Ax + f(t, x) \rangle_H + \frac{1}{2} \text{tr}[V''_{xx}(t, x)(g(t, x)Q_w^{1/2})(g(t, x)Q_w^{1/2})^*], \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A), \quad (2.49)$$

$$QV(t, x) = \text{tr}[V''_{xx}(t, x) \otimes V''_{xx}(t, x)(g(t, x)Q_w^{1/2})(g(t, x)Q_w^{1/2})^*], \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times H. \quad (2.50)$$

Далее для краткости будем опускать индекс  $H$  у скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  в пространстве  $H$ .

**Теорема 2.4.** Пусть задан функционал  $V(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$  и две неотрицательные непрерывные функции  $\psi_1(t), \psi_2(t)$ . Предположим, что существуют положительные постоянные  $r > 0, m \geq 0$ , постоянные  $\mu, \nu, \theta \in \mathbb{R}$  и невозрастающая положительная функция  $\zeta(t)$  такие, что  $\frac{m - (\max\{\nu, \mu + \tau\} + \theta)}{r} > 0$  и выполнены следующие условия:

1.  $\|x\|^r (\lambda(t))^m \leq V(t, x)$  для всех  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times H$ .
2.  $LV(t, x) + \zeta(t)QV(t, x) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t)V(t, x)$  для всех  $t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathcal{D}(A)$ .
3.  $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\int_0^t \psi_1(s) ds)}{\ln \lambda(t)} \leq \nu, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^t \psi_2(s) ds}{\ln \lambda(t)} \leq \theta, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \zeta(t)}{\ln \lambda(t)} \geq -\mu.$

Тогда слабое решение задачи (2.21), (2.22) притягивается к нулю со скоростью  $\lambda(t)$ .

**Доказательство.** Применим формулу Ито к функционалу  $V(t, x)$  и решению (сильному)  $X^l(t)$  задачи (2.26). Будем иметь:

$$V(t, X^{(l)}(t)) = V(0, \xi) + I_1(t, l) + \int_0^t LV(s, X^{(l)}(s)) ds + I_2(t, l) + \int_0^t \langle V'_x(s, X(s)), g(s, X(s)) dW(s) \rangle, \quad (2.51)$$

где  $I_1, I_2, L_l$  определяются формулами (2.52) – (2.54):

$$I_1(t, l) = \int_0^t L_l V(s, X^{(l)}(s)) ds - \int_0^t LV(s, X^{(l)}(s)) ds, \quad (2.52)$$

$$I_2(t, l) = \int_0^t \langle V'_x(s, X^{(l)}(s)), R(l)g(s, X^{(l)}(s))dW(s) \rangle - \\ - \int_0^t \langle V'_x(s, X(s)), g(s, X(s))dW(s) \rangle, \quad (2.53)$$

$$L_l V(t, x) = V'_t(t, x) + \langle V'_x(t, x), Ax + R(l)f(t, x) \rangle + \\ + \frac{1}{2} \text{tr} [V''_{xx}(t, x)(R(l)g(t, x)) \circ Q_w \circ (R(l)g(t, x))^*]. \quad (2.54)$$

Из равномерной непрерывности функции  $\ln \lambda(t)$  следует, что для любого  $\varepsilon > 0$  существуют натуральные числа  $N = N(\varepsilon)$  и  $k_1 = k_1(\varepsilon)$  для всех  $k \geq k_1(\varepsilon)$ :  $|\ln \lambda(\frac{k}{2^N}) - \ln \lambda(t)| \leq \varepsilon$ ,  $t \in [\frac{k-1}{2^N}; \frac{k}{2^N}]$ . С другой стороны, по экспоненциальному неравенству (2.55) для мартингалов [39, лемма 1.1]:

$$\mathbb{P}\left(\omega : \sup_{0 \leq t \leq w} \left( \int_0^t \langle V'_x(s, X(s)), g(s, X(s))dW(s) \rangle - \int_0^t \frac{u}{2} QV(s, X(s)) ds \right) > v \right) \leq e^{-uv} \quad (2.55)$$

для любых положительных постоянных  $u, v$  и  $w$ . Выбирая их по формуле (2.56)

$$u = 2\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right), \quad v = \ln \frac{k-1}{2^N} / \zeta\left(\frac{k}{2^N}\right), \quad w = \frac{k}{2^N}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad (2.56)$$

и применяя затем лемму Бореля-Кантелли, получим что вне множества нулевой вероятностной меры  $\tilde{\Omega}$  ( $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 0$ ), т.е. для каждого  $\omega \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}$  существует натуральное число  $k_0(\varepsilon, \omega)$  такое, что

$$\int_0^t \langle V'_x(s, X(s)), g(s, X(s))dW(s) \rangle \leq \frac{\ln \frac{k-1}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + \zeta\left(\frac{k}{2^N}\right) \int_0^t QV(s, X(s)) ds \quad (2.57)$$

для всех  $t \in [0, \frac{k}{2^N}]$ ,  $k = k(\omega) \geq k_0(\varepsilon, \omega)$ . Подставляя выражение (2.57) в (2.51) и используя 2-е условие теоремы, для всех  $\omega \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}$ ,  $\mathbb{P}(\tilde{\Omega}) = 0$  будем иметь оценку (см. [2-A])

$$V(t, X^{(l)}) \leq \frac{\ln \frac{k-1}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + V(0, \xi) + \\ + \int_0^t \left( \psi_1(s) + \psi_2(s)V(s, X^{(l)}(s)) \right) ds + I_1(t, l) + I_2(t, l) + I_3(t, l), \quad (2.58)$$

для всех  $t \in [0, \frac{k}{2^N}]$ ,  $k \geq \max\{k_0(\varepsilon, \omega), k_1(\varepsilon)\}$ . Здесь  $I_3$  определяется формулой (2.59)

$$I_3(t, l) = \zeta \left( \frac{k}{2^N} \right) \int_0^t \left( QV(s, X(s)) - QV(s, X^{(l)}(s)) \right) ds. \quad (2.59)$$

Следовательно, согласно лемме Гронуолла, п.н. выполнено неравенство

$$V(t, X^{(l)}(t)) \leq \left( V(0, \xi) + \frac{\ln \frac{k-1}{2^N}}{\zeta \left( \frac{k}{2^N} \right)} + \sup_{t \in [0, \frac{k}{2^N}]} \left( |I_1(t, l)| + |I_2(t, l)| + |I_3(t, l)| + \int_0^t \psi_1(s) ds \right) \right) \cdot \exp \left( \int_0^t \psi_2(s) ds \right)$$

для всех  $t \in [0, \frac{k}{2^N}]$ ,  $k \geq \max\{k_0(\varepsilon, \omega), k_1(\varepsilon)\}$ .

Покажем теперь, что существует подпоследовательность  $(l_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^+$  такая, что  $I_1(t, l_n)$ ,  $I_2(t, l_n)$  и  $I_3(t, l_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  п.н. равномерно по  $t \in [0, \frac{k}{2^N}]$ . Действительно, выберем подпоследовательность леммы 2.1:  $X^{(l_n)}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(t)$  п.н. равномерно по  $t \in [0, \frac{k}{2^N}]$ . Говоря точнее, существуют подмножества  $\Omega_k \subset \Omega$  с  $\mathbb{P}(\Omega_k) = 0$  такие, что для любого  $\omega \in \Omega \setminus \Omega_k$ :  $X^{(l_n)}(t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(t)$  п.н. равномерно по  $t \in [0, \frac{k}{2^N}]$ . Следовательно, для всех  $\omega \in \Omega \setminus \left( \bigcup_{k \geq 2} \Omega_k \cup \tilde{\Omega} \right)$ , будем иметь оценку (2.60):

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \frac{k}{2^N}]} |I_1(t, l)| &\leq \int_0^{k/2^N} \left| L_{l_n} V(s, X^{(l_n)}(s)) - LV(s, X^{(l_n)}(s)) \right| ds \leq \\ &\leq \int_0^{k/2^N} \left| \langle V'_x(s, X^{(l_n)}(s)), (I - R(l_n))f(s, X^{(l_n)}(s)) \rangle \right| ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{k/2^N} \left| \text{tr} [V''_{xx}(s, X^{(l_n)}(s)) \{ (R(l_n)g(s, X^{(l_n)}(s)) \circ Q_w \circ (R(l_n)g(s, X^{(l_n)}(s)))^* - \right. \\ &\quad \left. - g(s, X^{(l_n)}(s)) \circ Q_w \circ g(s, X^{(l_n)}(s)) \} ] \right| ds \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

для всех  $k \geq \max\{k_0(\varepsilon, \omega), k_1(\varepsilon)\}$ . Аналогично доказывается, что  $\sup_{t \in [0, \frac{k}{2^N}]} |I_2(t, l)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  и  $\sup_{t \in [0, \frac{k}{2^N}]} |I_3(t, l)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

Следовательно, устремляя  $n \rightarrow \infty$ , получим, что п.н. верно (2.61):

$$V(t, X(t)) \leq \left( V(0, \xi) + \frac{\ln \frac{k}{2^N}}{\zeta \left( \frac{k}{2^N} \right)} + \frac{\ln \frac{k-1}{k}}{\zeta \left( \frac{k}{2^N} \right)} + \int_0^{k/2^N} \psi_1(s) ds \right) \exp \left( \int_0^t \psi_2(s) ds \right) \quad (2.61)$$

для всех  $t \in [0, \frac{k}{2^N}]$ ,  $k \geq \max\{k_0(\varepsilon, \omega), k_1(\varepsilon)\}$ .

Таким образом, используя 3-е условие теоремы и равномерную непрерывность  $\ln \lambda(t)$ , для заданного  $\varepsilon > 0$  найдется натуральное  $k_2(\varepsilon, \omega)$  такое, что

$$\begin{aligned}
& \ln V(t, X(t)) \leq \\
& \leq \ln \left( V(0, \xi) + \lambda \left( \frac{k}{2^N} \right)^{(\mu+\tau+2\varepsilon)} + \lambda \left( \frac{k}{2^N} \right)^{(\mu+\varepsilon)} \ln \frac{k-1}{k} + \lambda \left( \frac{k}{2^N} \right)^{(\nu+\varepsilon)} \right) + \\
& \quad + (\theta + \varepsilon) \ln \lambda(t) \leq \\
& \leq \ln \left( V(0, \xi) + e^{\varepsilon(\mu+\tau+2\varepsilon)} \lambda(t)^{(\mu+\tau+2\varepsilon)} + e^{\varepsilon(\mu+\varepsilon)} \lambda(t) \ln \frac{k-1}{k} + e^{\varepsilon(\nu+\varepsilon)} \lambda(t)^{(\nu+\varepsilon)} \right) + \\
& \quad + (\theta + \varepsilon) \ln \lambda(t) \tag{2.62}
\end{aligned}$$

для всех  $t \in [\frac{k-1}{2^N}, \frac{k}{2^N}]$ ,  $k \geq \max\{k_0(\varepsilon, \omega), k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon, \omega)\}$ . Из (2.62) следует

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln V(t, X(t))}{\ln \lambda(t)} \leq \max\{\nu + \varepsilon, \mu + \tau + 2\varepsilon\} + \theta + \varepsilon. \tag{2.63}$$

Устремляя в (2.63)  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим неравенство (2.64)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln V(t, X(t))}{\ln \lambda(t)} \leq \max\{\nu, \mu + \tau\} + \theta. \tag{2.64}$$

Окончательно, используя 1-е условие теоремы, будем иметь (2.66):

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln \|X(t)\|}{\ln \lambda(t)} & \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{r} \frac{\ln (\lambda(t)^{-m} V(t, X(t)))}{\ln \lambda(t)} \leq \\
& \leq -\frac{m - (\max\{\nu, \mu + \tau\} + \theta)}{r} \quad \text{п.н.} \tag{2.65}
\end{aligned}$$

что и требовалось. Теорема доказана.

**Пример 2.2.** Рассмотрим следующую стохастическую дифференциальную систему (значение параметров  $\alpha, m > 0$  будет уточнено ниже)

$$\begin{aligned}
dX_t(x) &= \left( \frac{d^2}{dx^2} X_t(x) + \alpha \sin \left( X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos X_t^1 \right) \right) dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}} X_t(x) dW_t, \\
dX_t^1 &= \left( \alpha X_t^1 \sin X_t^1 + \left( \int_0^\pi X_t(x)^2 dx \right)^{1/2} \right) dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}} \left( \int_0^\pi X_t(x)^2 dx \right)^{1/2} dW_t, \\
& \quad t > 0, \quad 0 < x < \pi
\end{aligned}$$

как уравнение относительно  $\bar{X}_t = (X_t(\cdot), X_t^1)^\top$  в пространстве  $H \times \mathbb{R}$  с начальным условием  $\bar{X}_0 = (X_0(x), X_0^1)^\top = (x_0(x), x_0^1)$ ,  $x \in (0, \pi)$ . Здесь  $H = L_2[0, \pi]$  — пространство функций, квадратично интегрируемых по Лебегу на отрезке  $[0, \pi]$ ,  $U = \mathbb{R}$ . В компактной форме это уравнение примет вид

$$\begin{aligned} d\bar{X}_t &= (\bar{A}\bar{X}_t + f(t, \bar{X}_t))dt + g(t, \bar{X}_t)dW_t, \\ f(t, \bar{X}_t) &= \alpha \left( \sin(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos X_t^1), X_t^1 \sin X_t^1 + \|X_t(x)\|_H \right)^\top, \\ g(t, \bar{X}_t) &= \alpha e^{-\frac{mt}{2}} \left( X_t(x), \left( \int_0^\pi X_t(x)^2 dx \right)^{1/2} \right)^\top, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

$A = \frac{d^2}{dx^2}$ ,  $\mathcal{D}(A) = \{u \in C_2[0, \pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$ ,  $C_2[0, \pi]$  — пространство дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке  $[0, \pi]$  функций.

Уравнение (2.66), записанное в интегральной форме, примет вид

$$\begin{aligned} \bar{X}_t &= \int_0^\pi G(t, x, s) \bar{X}_0(s) ds + \int_0^t \int_0^\pi G(t - \tau, x, s) f(s, x_\tau^1) ds d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_0^\pi G(t - \tau, x, s) g(s, x_\tau^1) ds dW(\tau), \end{aligned}$$

где  $G(t, x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^\infty e^{-n^2 t} \sin nx \sin ny$ . Соответственно, оператор  $S(t) : H \times \mathbb{R} \rightarrow H \times \mathbb{R}$  определяется формулой

$$S(t)\bar{u}(\cdot) = \left( \int_0^\pi G(t, \cdot, s) u(s) ds, u^1 \right).$$

Положим  $V(t, \bar{u}) = V(t, u) = e^{mt} \|u\|^2$ ,  $u \in H$ . Очевидно,  $V'_t(t, \bar{u}) = mV(t, u)$ . По определению производной по Фреше  $V'_u$  в точке  $u \in H$  есть линейный ограниченный функционал такой, что для достаточно малых  $\|h\|$ ,  $h \in H$  выполняется

$$\begin{aligned} V(t, u + h) - V(t, u) - V'_u(t, u)h &= o(\|h\|), \\ e^{mt} \int_0^\pi (u(s) + h(s))^2 ds - e^{mt} \int_0^\pi (u(s))^2 ds &= V'_u(t, u)h + o(\|h\|). \end{aligned}$$

Последнее равносильно  $2e^{mt} \langle u, h \rangle + e^{mt} \|h\|^2 = V'_u(t, u)h + o(\|h\|)$ , откуда  $V'_u(t, u)h = 2e^{mt} \langle u, h \rangle \forall h \in H$ . Аналогично  $V''_{uu}h = 2e^{mt} \langle h, \cdot \rangle, \forall h \in H$ . Можно показать (см. [2–А]), что

$$\begin{aligned} \langle V'_u(t, u), Au \rangle &= -2 \frac{\|u'\|^2}{\|u\|^2} V(u), \\ \langle V'_u(t, u), f(t, \bar{u}) \rangle &\leq 3\alpha V(t, u) + \alpha\pi. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\|V'_u(t, u)\| = \sup_{\|h\|=1} 2e^{mt} |\langle u, h \rangle| \leq 2e^{mt} \sup_{\|h\|=1} \|u\| \cdot \|h\| = 2e^{mt} \|u\|$$

и аналогично  $\|V''_{uu}(t, u)\| = 2e^{mt} \sup_{\|h\|=1} \sup_{\|u\|=1} |\langle h, u \rangle| \leq 2e^{mt}$ . Кроме того, для любого ограниченного линейного оператора  $B$  след  $\text{tr}(BQ_w) = \sum \langle BQ_w u_k, u_k \rangle$  по модулю не превосходит  $|\text{tr}(BQ_w)| \leq \|B\| \text{tr} Q_w$  (достаточно в качестве  $(u_k)$  взять базис из собственных векторов  $Q_w$ ). В нашем случае  $U = \mathbb{R}$ , а значит,  $Q_w = I$  и  $\text{tr} Q_w = 1$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{tr}[V''_{uu}(t, \bar{u})(g(t, \bar{u})Q_w^{1/2})(g(t, \bar{u})Q_w^{1/2})^*] &\leq \frac{1}{2} \|V''_{uu}\| \cdot \|g(t, \bar{u})\|^2 \leq \\ &\leq 2e^{mt} \alpha^2 e^{-mt} \|u\|^2 \leq 2\alpha^2 V(t, \bar{u}), \\ |QV(t, \bar{u})| &= |\text{tr}[V''_{uu}(t, \bar{u}) \otimes V''_{uu}(t, \bar{u})(g(t, \bar{u})Q_w^{1/2})(g(t, \bar{u})Q_w^{1/2})^*]| \leq \\ &\leq \|V''_{uu}\|^2 \|g(t, \bar{u})\|^2 \leq 8e^{mt} \alpha^2 \|u\|^2 = 8\alpha^2 V(t, \bar{u}). \end{aligned}$$

Итак, выберем в качестве невозрастающей положительной функции  $\zeta(t) \equiv 1$ , положим  $\lambda_0 = \inf_{u \in D(A)} \frac{\|u'\|^2}{\|u\|^2}$  и оценим

$$LV(t, \bar{u}) + \zeta(t)QV(t, \bar{u}) \leq \alpha\pi + (-2\lambda_0 + m + 3\alpha + 10\alpha^2)V(t, u).$$

Нетрудно показать (см. [2–A]), что  $\lambda_0 \geq \frac{1}{\pi^2} > 0$ . Поэтому за счет выбора достаточно малого  $\alpha > 0$  и достаточно большого  $m > 0$  добьемся того, чтобы постоянная  $\beta = -2\lambda_0 + m + 3\alpha + 10\alpha^2 > 0$ , но  $-2\lambda_0 + 3\alpha + 10\alpha^2 < 0$ .

Обратимся к условию теоремы. Исходя из первого условия, полагаем  $r = 2$ , из второго условия:  $\psi_1(t) \equiv \alpha\pi$ ,  $\psi_2(t) \equiv \beta$ . В качестве  $\lambda$  выберем  $\lambda(t) = e^t$ . Поскольку  $\frac{\log \log t}{\log \lambda(t)} = \frac{\log \log t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , то  $\tau = 0$ . Далее,  $\frac{\log \zeta(t)}{\log \lambda(t)} = 0$ , т.е.

$\mu = 0$ ;  $\frac{\log(\int_0^t \psi_1(s) ds)}{\log \lambda(t)} = \frac{\log \alpha\pi t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ , т.е.  $\nu = 0$  и следовательно,  $\max\{\nu, \mu + \tau\} = 0$ .

И наконец,  $\frac{\int_0^t \psi_2(s) ds}{\log \lambda(t)} = \frac{\beta t}{t} = \beta$ , т.е.  $\theta = \beta$ . Таким образом, согласно теореме 2.4:

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log \|X(t)\|}{t} \leq -\frac{m - (\max\{\nu, \mu + \tau\} + \theta)}{r} = -\frac{2\lambda_0 - 3\alpha - 10\alpha^2}{2} < 0.$$

Отметим, что функция  $g$  удовлетворяет глобальному условию Липшица, а  $f$  удовлетворяет локальному, но не удовлетворяет глобальному условию Липшица. Действительно, для  $g$ :

$$\|g(t, \bar{x}) - g(t, \bar{y})\|^2 = e^{-mt} \alpha^2 \int_0^\pi |x(s) - y(s)|^2 ds + e^{-mt} \alpha^2 (\|x\| - \|y\|)^2 \leq$$

$$\leq 2e^{-mt}\alpha^2\|x - y\|^2 \leq 2\alpha^2\|\bar{x} - \bar{y}\|^2.$$

Для  $f$  имеем:

$$\begin{aligned}\|f(t, \bar{x}) - f(t, \bar{y})\|^2 &= \int_0^\pi \left| \sin \left( x(s) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos x^1 \right) - \sin \left( y(s) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos y^1 \right) \right|^2 ds + \\ &+ \left| x^1 \sin x^1 - y^1 \sin y^1 + \|x\| - \|y\| \right|^2.\end{aligned}$$

Так как  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$ ,  $|\cos x - \cos y| \leq |x - y|$  для любых  $x, y \in \mathbb{R}$ , то

$$\begin{aligned}\|f(t, \bar{x}) - f(t, \bar{y})\|^2 &\leq \int_0^\pi \left| x(s) - y(s) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos x^1 - e^{-\frac{mt}{2}} \cos y^1 \right|^2 ds + \\ &+ 2 \left| x^1 \sin x^1 - y^1 \sin y^1 \right|^2 + 2\|x - y\|^2 \leq \\ &\leq 4\|x - y\|^2 + 2\pi \left| x^1 - y^1 \right|^2 + 2 \left| x^1 \sin x^1 - y^1 \sin y^1 \right|^2.\end{aligned}$$

Функция  $h(x) = x \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  удовлетворяет локальному условию Липшица (и не удовлетворяет глобальному), поэтому для любого  $a > 0$  найдется постоянная  $q_a > 0$  такая, что для всех  $|x^1|, |y^1| < a$  выполняется  $|x^1 \sin x^1 - y^1 \sin y^1| \leq q_a |x^1 - y^1|$ . Но если  $\|\bar{x}\|^2 = \int_0^\pi (x(s))^2 ds + (x^1)^2 \leq a^2$ ,  $\|\bar{y}\|^2 \leq a^2$  то и  $|x^1| \leq a$ ,  $|y^1| \leq a$ . Поэтому при любом  $a > 0$  при условии  $\|\bar{x}\|, \|\bar{y}\| \leq a$  выполняется неравенство

$$\|f(\bar{x}) - f(\bar{y})\|^2 \leq \max\{4, 2(\pi + q_a^2)\} \cdot \|\bar{x} - \bar{y}\|^2,$$

т.е. локальное условие Липшица выполнено.



# ГЛАВА 3

## СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ, ИМЕЮЩИМИ РАЗЛИЧНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ХАРСТА, БОЛЬШИЕ 1/3

Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , на котором определены независимые одномерные дробные броуновские движения  $B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)}$  с индексами Харста  $H_1, \dots, H_d \in (1/3, 1)$ . Введем обозначение  $B_t = (B_t^{(0)}, \dots, B_t^{(d)})^\top$  для  $(d+1)$ -мерного дробного броуновского движения, в котором  $B_t^{(0)} = t$ . Пусть также  $H_0 = 1$ . Пусть  $H_{\min}$  — значение наименьшего из индексов Харста  $H_i$ ,  $i = 0, \dots, d$ . Выберем и зафиксируем некоторое  $H \in (1/3, 1/2]$  такое, что  $H < H_{\min}$ .

Объектом изучения данной главы станет следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = f(X_t)dB_t, \quad t \in [0, T], \quad (3.1)$$

в котором  $f$  —  $(n \times (d+1))$ -матрица, столбцами которой являются векторы  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, \dots, d$ . Через  $X_t^x$  будем обозначать решение уравнения (3.1) с начальным условием  $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$ .

Приведем конструктивное определение процесса второго порядка над дробным броуновским движением  $B$ .

**Определение 3.1.** Процессом второго порядка над дробным броуновским движением  $B$  будем называть процесс  $\mathbb{B} : [0, T]^2 \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$ , определенный следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \mathbb{B}_{s,t} &= \left( \mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} \right)_{i,j=0}^d, \\ \mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} &\stackrel{L^2}{=} \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \int_{\mathcal{P}} B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)}, \quad \int_{\mathcal{P}} B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)} = \sum_{t_k, t_{k+1} \in \mathcal{P}} B_{s,t_k}^{(i)} B_{t_k, t_{k+1}}^{(j)}, \quad 1 \leq i < j \leq d, \\ \mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)} &= \int_s^t B_{s,r}^{(j)} dr \stackrel{\text{п.н.}}{=} \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_{t_k, t_{k+1} \in \mathcal{P}} B_{s,t_k}^{(j)} (t_{k+1} - t_k), \quad 1 \leq j \leq d, \\ \mathbb{B}_{s,t}^{(i,i)} &= \frac{1}{2} \left( B_{s,t}^{(i)} \right)^2, \quad 0 \leq i \leq d, \\ \mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} &= -\mathbb{B}_{s,t}^{(j,i)} + B_{s,t}^{(i)} B_{s,t}^{(j)}, \quad 0 \leq j < i \leq d \end{aligned}$$

для любой пары  $(s, t) \in [0, T]^2$ , где  $\mathcal{P} = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_l = t\}$  — произвольное разбиение отрезка  $[s, t]$ ,  $|\mathcal{P}| = \max |t_{k+1} - t_k|$ , а все пределы понимаются не зависящими от последовательности разбиений  $\mathcal{P}$ . Здесь обозначения  $\stackrel{L^2}{=}$ ,  $\stackrel{\text{п.н.}}{=}$  применяются для того, чтобы показать, что соответствующие пределы понимаются в смысле  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и  $\mathbb{P} = 1$  соответственно.

**Замечание 3.1.** Поясним корректность приведенного определения. Интегралы, определяющие  $\mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)}$ , являются потраекторными интегралами Янга, соответствующие им интегральные суммы сходятся п.н., поскольку сумма показателей непрерывности по Гельдеру тождественной функции и  $B_{s,\cdot}^{(j)}$  строго больше 1. Интегральные суммы в  $\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}$  имеют конечный предел в  $L_2$  ввиду предложения 10.3 [25], поскольку обе ковариационные функции  $R_{B^{(i)}}$ ,  $R_{B^{(j)}}$  имеют конечную  $\rho$ -вариацию,  $\rho = \frac{1}{2H} < 2$  (см. [26, с. 417, предл. 2.2]).

**Предложение 3.1.** Для любого фиксированного  $H \in (1/3, 1/2]$  такого, что  $H < H_{\min} = \min_{i=0,\dots,d} H_i$  имеет место включение  $(B, \mathbb{B}) \in \mathcal{C}_g^H([0, T], \mathbb{R}^{d+1})$  п.н., и более того,  $\mathbb{E} \|\mathbb{B}\|_{2H}^q < \infty$  для любого  $q \geq 1$ .

**Доказательство.** Условие  $\text{Sym}(\mathbb{B}_{s,t}) = \frac{1}{2} B_{s,t} \otimes B_{s,t}$  очевидно выполнено по определению  $\mathbb{B}$ , поэтому достаточно доказать, что  $(B, \mathbb{B}) \in \mathcal{C}^H([0, T], \mathbb{R}^{d+1})$ . Обозначим через  $\tilde{\mathbb{B}}_{s,t} = \left( \mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} \right)_{i,j=1}^d$  процесс второго порядка над дробным броуновским движением  $\tilde{B}_t = (B_t)_{i=1}^d$  с индексами Харста  $H_i \in (1/3, 1)$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Покажем, что пара  $(B, \mathbb{B})$  удовлетворяет условиям теоремы 10.4 из [25]. Как было показано [25, раздел 10.3] и [28, раздел 2.3], справедливы неравенства

$$\|R_{B^{(i)}}\|_{\frac{1}{2H_i}\text{-var};[s,t]^2} \leq M_i |t - s|^{2H_i}, \quad H_i \in (1/3, 1/2],$$

$$\|R_{B^{(i)}}\|_{1\text{-var};[s,t]^2} \leq M_i |t - s|, \quad H_i \in (1/2, 1)$$

для  $i = 1, \dots, d$  с некоторыми константами  $M_i$ , где  $\|R_{B^{(i)}}\|_{\rho\text{-var};[s,t]^2}$  —  $\rho$ -вариация функции  $R_{B^{(i)}}$  на прямоугольнике  $[s, t]^2$  (см. определение в [25, раздел 10.2]). Следующее неравенство является простым следствием из определения  $\rho$ -вариации:

$$\|R_{B^{(i)}}\|_{\rho'\text{-var};[s,t]^2} \leq \left( \sup_{u,v,u',v' \in [s,t]} |\mathbb{E}(B_{u,v}^{(i)} B_{u',v'}^{(i)})| \right)^{\frac{\rho' - \rho}{\rho'}} \left( \|R_{B^{(i)}}\|_{\rho\text{-var};[s,t]^2} \right)^{\frac{\rho}{\rho'}}$$

для любого  $\rho' > \rho$ . Непосредственное вычисление показывает, что  $|\mathbb{E}(B_{u,v}^{(i)} B_{u',v'}^{(i)})| \leq |t - s|^{2H_i} \leq T^{2H_i}$  для любых  $u, v, u', v' \in [s, t] \subset [0, T]$ .

Полагая  $H_* = \min\{\frac{1}{2}, H_{\min}\}$ , из последних четырех неравенств можно вывести, что

$$\|R_{B^{(i)}}\|_{\frac{1}{2H_*}-\text{var};[s,t]^2} \leq M|t-s|^{2H_*}, \quad i = 1, \dots, d,$$

где  $M = \max_{i=1,\dots,d} M_i^{H_*/H'_i} T^{2H'_i-2H_*}$ ,  $H'_i = \min\{H_i, \frac{1}{2}\}$ . Таким образом, пара  $(\tilde{B}, \tilde{\mathbb{B}})$  удовлетворяет условиям теоремы 10.4 [25] со значением параметра  $\rho = \frac{1}{2H_*} \in [1, \frac{3}{2})$ .

Применяя неравенство Лав-Янга (см. предложение 1.2) при  $\tau = s$  к интегралам  $\mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)}$ ,  $1 \leq j \leq d$ , можем заключить, что для любой пары  $(s, t) \in [0, T]^2$  п.н. справедливо неравенство

$$\left| \mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)} \right| = \left| \int_s^t B_{s,r}^{(j)} dr \right| \leq C_{1,H} |t-s| \|B^{(j)}\|_{\frac{1}{H}-\text{var};[s,t]} \leq C_0 \|B^{(j)}\|_H |t-s|^{2H},$$

в котором  $C_0 = C_{1,H} T^{1-H}$  — константа (зависящая только от  $H, T$ ), а также была использована зависимость между  $\frac{1}{H}$ -вариацией и нормой Гельдера с показателем  $H$  [27, с. 170]. Очевидно,  $\left| \mathbb{B}_{s,t}^{(0,0)} \right| \leq \frac{1}{2} T^{2-2H} |t-s|^{2H}$ . Также из теоремы 10.4 [25] следует, что  $(\tilde{B}, \tilde{\mathbb{B}}) \in \mathcal{C}_g^H([0, T], \mathbb{R}^d)$ , что в свою очередь влечет  $\left| \mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} \right| \leq \left| \tilde{\mathbb{B}}_{s,t} \right| \leq \|\tilde{\mathbb{B}}\|_{2H} |t-s|^{2H}$ ,  $\|\tilde{\mathbb{B}}\|_{2H} < \infty$  п.н. для всех  $1 \leq i, j \leq d$ . Таким образом, ввиду эквивалентности норм в  $\mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$ , можем заключить, что

$$|\mathbb{B}_{s,t}| \leq C_d \sum_{i,j=0}^d \left| \mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} \right| \leq C_d C_{T,H} \left( 1 + \|\tilde{\mathbb{B}}\|_{2H} + \sum_{j=1}^d \|B^{(j)}\|_H \right) |t-s|^{2H},$$

для любой пары  $(s, t) \in [0, T]^2$  п.н. с некоторыми константами  $C_d$  и  $C_{T,H}$ , зависящими только от  $d$  и  $T, H$  соответственно. Полученное неравенство устанавливает тот факт, что  $\|\mathbb{B}\|_{2H} < \infty$  п.н. и, следовательно,  $(B, \mathbb{B}) \in \mathcal{C}_g^H([0, T], \mathbb{R}^{d+1})$  п.н. (нетрудно убедиться, что тождество Чена также выполняется для всех элементов на позициях  $(0, j)$ ,  $(j, 0)$ ,  $0 \leq j \leq d$  в матрицах  $\mathbb{B}$ ,  $B \otimes B$ ).

Применяя неравенство о среднем степенном и применяя оператор математического ожидания, из последнего неравенства можем заключить, что для любого  $q \geq 1$  справедливо неравенство

$$\mathbb{E} \|\mathbb{B}\|_{2H}^q \leq C_{d,T,H,q} \left( 1 + \mathbb{E} \|\tilde{\mathbb{B}}\|_{2H}^q + \sum_{j=1}^d \mathbb{E} \|B^{(j)}\|_H^q \right),$$

в котором  $C_{d,T,H,q} = (C_d C_{T,H})^q (d+2)^{1-\frac{1}{q}}$ . Как известно из [25, теорема 4.10] и [46, Лемма 7.4],  $\mathbb{E} \|\tilde{\mathbb{B}}\|_{2H}^q < \infty$  и  $\mathbb{E} \|B^{(j)}\|_H^q < \infty$  для всех  $j = 1, \dots, d$ . Последнее завершает доказательство.

**Определение 3.2.** Случайный процесс  $X_t$  такой, что  $(X, X') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0, T], \mathbb{R}^n)$  п.н., будем называть решением уравнения (3.1), если он п.н. удовлетворяет равенству

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s) dB_s, \quad t \in [0, T], \quad (3.2)$$

где интеграл понимается как потраекторный интеграл Губинелли. Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ . Решение уравнения (3.1) с начальным условием  $X_0 = x$  будем называть п.н. единственным, если для любого другого решения  $Y_t$  уравнения (3.1) с начальным условием  $Y_0 = x$  выполняется равенство  $\mathbb{P}(X_t = Y_t \forall t \in [0, T]) = 1$ .

Следующая теорема дает достаточное условие существования и единственности решения уравнения (3.1).

**Теорема 3.1.** Если  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ , то для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  уравнение (3.1) имеет единственное решение с начальным условием  $X_0 = x$ , причем  $X' = f(X)$ ,  $(f(X), (f(X))') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0, T], \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$  п.н. Более того, если  $H_i > H^* \geq 1/2$  для всех  $i = 0, \dots, d$ , то справедливо включение  $X \in C^{H^*}([0, T], \mathbb{R}^n)$  п.н. и интеграл в определении решения уравнения (3.1) является потраекторным интегралом Янга.

Доказательство существования и единственности функции  $X(t, \omega)$  следует из теоремы 3.13 в [45]. В свою очередь, измеримость и  $\mathcal{F}_t$ -согласованность  $X(t, \omega)$  следует из непрерывности отображения Ито-Лайонса, установленной в утверждении 2 теоремы 3.13 в работе [45], и сходимости диадных аппроксимаций  $B_t(m)$  к дробному броуновскому движению  $B_t$ , доказанной в теореме 2 в работе [22].

### 3.1 Формула Ито

Рассмотрим вопрос о том, какому стохастическому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция  $g(X_t)$  от решения  $X_t$  исходного стохастического дифференциального уравнения (3.1).

**Теорема 3.2.** Пусть  $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ ,  $g \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Тогда для любых  $s, t \in [0, T]$  п.н. справедлива следующая формула типа Ито:

$$g(X_t) = g(X_s) + \int_s^t Dg(X_r) f(X_r) dB_r, \quad s, t \in [0, T], \quad (3.3)$$

где  $X_t$  — решение уравнения (3.1) с начальным условием  $X_0 = x$ .

**Доказательство.** Зафиксируем произвольные  $s, t \in [0, T]$ ,  $s \leq t$  и рассмотрим разбиение отрезка  $[s, t]$  точками  $\mathcal{P}^{(N)} = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_N = t\}$ ,  $|\mathcal{P}^{(N)}| = \max_{i=0, \dots, N-1} |t_{i+1} - t_i|$ . Будем обозначать  $X^{\otimes m} = \underbrace{X \otimes \dots \otimes X}_m$ . Все равенства и неравенства ниже для случайных величин будем понимать выполненными почти наверное (п.н.). Используя формулу Тейлора, будем иметь:

$$\begin{aligned} g(X_t) - g(X_s) &= \sum_{i=0}^{N-1} (g(X_{t_{i+1}}) - g(X_{t_i})) = \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} \left( Dg(X_{t_i}) X_{t_i, t_{i+1}} + \frac{1}{2} D^2 g(X_{t_i}) X_{t_i, t_{i+1}}^{\otimes 2} + \frac{1}{6} D^3 g(X_{t_i} + \theta_i X_{t_i, t_{i+1}}) X_{t_i, t_{i+1}}^{\otimes 3} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

для некоторых  $\theta_i \in (0, 1)$ . Здесь слагаемые вида  $D^k g X^{\otimes k}$  следует понимать в смысле, указанном в замечании 1.4:

$$D^k g X^{\otimes k} = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{\partial^k g}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_k}} X_{i_1} \dots X_{i_k}$$

Оценим последнее слагаемое в сумме (3.4). Следующее неравенство будет использоваться в дальнейшем (напомним, что  $3H > 1$ ):

$$\sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i|^{3H} \leq \sum_{i=0}^{N-1} |\mathcal{P}^{(N)}|^{3H-1} (t_{i+1} - t_i) = |\mathcal{P}^{(N)}|^{3H-1} (t - s).$$

Поскольку  $X \in C^H([0, T], \mathbb{R}^n)$  и  $3H > 1$ , то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{6} D^3 g(X_{t_i} + \theta_i X_{t_i, t_{i+1}}) X_{t_i, t_{i+1}}^{\otimes 3} \right| &\leq \frac{1}{6} \|D^3 g\|_{\infty} \|X\|_H^3 \sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i|^{3H} = \\ &= \frac{1}{6} \|D^3 g\|_{\infty} \|X\|_H^3 (t - s) |\mathcal{P}^{(N)}|^{3H-1} = O\left(|\mathcal{P}^{(N)}|^{3H-1}\right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из теоремы 4.10 [25] следует, что

$$X_{t_i, t_{i+1}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X_r) dB_r = f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}} + Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}} + O(|t_{i+1} - t_i|^{3H}), \quad (3.6)$$

причем константа в  $O(|t_{i+1} - t_i|^{3H})$  зависит только от  $f$ ,  $B$  и  $X$  и не зависит от разбиения  $\mathcal{P}^{(N)}$ . Поскольку  $|f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}}| \leq \|f\|_\infty \|B\|_H \times |t_{i+1} - t_i|^H$ ,  $|Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}}| \leq \|f\|_{C_b^2}^2 \|\mathbb{B}\|_{2H} |t_{i+1} - t_i|^{2H}$ , то умножая соотношение (3.6) тензорно на себя, получим

$$\begin{aligned} X_{t_i, t_{i+1}}^{\otimes 2} &= (f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}})^{\otimes 2} + (Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}})^{\otimes 2} + \\ &+ f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}} \otimes Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}} + Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}} \otimes f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}} + \\ &+ O(|t_{i+1} - t_i|^{4H}) = \\ &= (f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}})^{\otimes 2} + O(|t_{i+1} - t_i|^{3H}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\sum_{i=0}^{N-1} O(|t_{i+1} - t_i|^{3H}) \leq O(1) \sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i|^{3H} = O(|\mathcal{P}^{(N)}|^{3H-1}).$$

Подставляя (3.5) – (3.7) в (3.4), и замечая, что

$$\begin{aligned} D^2 g(X_{t_i}) (f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}})^{\otimes 2} &= (f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}})^\top D^2 g(X_{t_i}) (f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}}) = \\ &= (B_{t_i, t_{i+1}})^\top (f(X_{t_i})^\top D^2 g(X_{t_i}) f(X_{t_i})) B_{t_i, t_{i+1}} = \\ &= (f(X_{t_i})^\top D^2 g(X_{t_i}) f(X_{t_i})) (B_{t_i, t_{i+1}})^{\otimes 2} \end{aligned}$$

получим:

$$\begin{aligned} g(X_t) - g(X_s) &= \sum_{i=0}^{N-1} Dg(X_{t_i}) f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}} + \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \left( Dg(X_{t_i}) Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}} + \frac{1}{2} D^2 g(X_{t_i}) (f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}})^{\otimes 2} \right) + \\ &+ O(|\mathcal{P}^{(N)}|^{3H-1}) = \sum_{i=0}^{N-1} Dg(X_{t_i}) f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}} + \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} \left( Dg(X_{t_i}) Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}} + f(X_{t_i})^\top D^2 g(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}} \right) + \\ &+ \sum_{i=0}^{N-1} f(X_{t_i})^\top D^2 g(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \left( \frac{1}{2} (B_{t_i, t_{i+1}})^{\otimes 2} - \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}} \right) + O(|\mathcal{P}^{(N)}|^{3H-1}) \quad (3.8) \end{aligned}$$

Поскольку пара  $(B, \mathbb{B})$  принадлежит пространству геометрических грубых траекторий, то  $\text{Sym}(\mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}}) = \frac{1}{2}(\mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}})^{\otimes 2}$  и  $\frac{1}{2}(\mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}})^{\otimes 2} - \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}} = -\text{Anti}(\mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}})$ , где  $\text{Anti}(\mathbb{B}) = \frac{1}{2}(\mathbb{B} - \mathbb{B}^\top)$  — антисимметричная часть  $\mathbb{B}$ . Заметим, что  $f(X.)^\top D^2 g(X.) f(X.)$  симметрично, в то время как  $\text{Anti}(\mathbb{B})$  антисимметрично, поэтому  $f(X_{t_i})^\top D^2 g(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \text{Anti}(\mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}})$  зануляется для каждого  $i = 0, \dots, N-1$ . Учитывая это и то, что  $(Dg(X.) \cdot f(X.))' = D(Dg \cdot f)(X.) \cdot X' = f(X.)^\top D^2 g(X.) f(X.) + Dg(X.) Df(X.) f(X.)$ , из равенства (3.8) получим

$$g(X_t) - g(X_s) = \sum_{i=0}^{2^N-1} \left( Dg(X_{t_i}) f(X_{t_i}) B_{t_i, t_{i+1}} + (Dg(X.) f(X.))'_{t_i} \mathbb{B}_{t_i, t_{i+1}} \right) + O\left(|\mathcal{P}^{(N)}|^{3H-1}\right) \quad (3.9)$$

Переходя к пределу в (3.9) при  $|\mathcal{P}^{(N)}| \rightarrow 0$ , получим (3.3), что завершает доказательство формулы Ито.

### 3.2 Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями

Наряду с уравнением (3.1) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\tilde{X}_t = \tilde{f}(\tilde{X}_t) dB_t, \quad t \in [0, T], \quad (3.10)$$

в котором  $\tilde{f} = (n \times (d+1))$ -матрица, столбцами которой являются векторы  $\tilde{f}_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, \dots, d$ .

Определения решений уравнений (3.1), (3.10) и связанных с ними объектов были приведены ранее. Будем предполагать выполненными условия существования решений указанных уравнений с начальными условиями  $X_0 = \xi$ ,  $\tilde{X}_0 = \tilde{\xi}$ , где  $\xi, \tilde{\xi}$  — случайные величины. В частности, для согласованности со случаем  $\xi(\omega) \equiv x$ ,  $\tilde{\xi}(\omega) \equiv \tilde{x}$  (см. теорему 3.1) будем предполагать, что  $f, \tilde{f} \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ . Причем функцию  $f$  будем считать фиксированной, а  $\tilde{f}$  — изменяющейся в малой окрестности  $f$  в пространстве  $C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ .

Будем использовать символ  $I$  для обозначения отрезков вещественной прямой:  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  длины  $|I| = b - a$ . Для краткости будем опускать ин-

декс  $[0, T]$  для норм, связанных с исходным отрезком интегрирования, полагая  $\|\cdot\|_\alpha := \|\cdot\|_{\alpha;[0,T]}$ ,  $\|\cdot\|_{\alpha,\delta} := \|\cdot\|_{\alpha;[0,T],\delta}$ .

Приведем ряд утверждений, которые будем использовать в дальнейшем для проведения оценок. Пусть  $Y \in C^\alpha([0, T], U_1)$ ,  $I \subset [0, T]$ , где  $U_1$  — конечномерное банахово пространство.

**Предложение 3.2.** Если  $\|Y\|_{\alpha;I,\delta} \leq M$ ,  $\delta \leq |I|$ , то  $\|Y\|_{\alpha;I} \leq M (1 \vee 2\delta^{-(1-\alpha)}|I|^{1-\alpha})$ .

Доказательство приведено в [25], см. утверждение 4.24 на с. 77.

**Предложение 3.3.** Пусть  $X_t$  — решение уравнения (3.1). Тогда для любого  $I \subset [0, T]$  длины  $|I| \leq 1$  п.н. справедливы неравенства

$$\|X\|_{H;I} \leq K \left( C_B \|f\|_{C_b^2} \vee \left( C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^{1/H} \right), \quad (3.11)$$

$$\|R^X\|_{2H;I} \leq \hat{K} \left( \left( C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^2 \vee \left( C_B \|f\|_{C_b^2} \right)^{1+\frac{1}{H}} \right), \quad (3.12)$$

где  $C_B = C_B(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) = \|B\|_H + \sqrt{\|\mathbb{B}\|_{2H}}$ , а константы  $K, \hat{K}$  зависят лишь от  $H$ .

**Доказательство.** Равенство (3.11) является простым следствием [25, предложение 8.3]. Докажем равенство (3.12). Используя предложение 1.5 для  $s, t \in I$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} |R_{s,t}^X| &= |X_{s,t} - f(X_s)B_{s,t}| \leq \\ &\leq \left| \int_s^t f(X_r)dB_r - f(X_s)B_{s,t} - Df(X_s)f(X_s)\mathbb{B}_{s,t} \right| + |Df(X_s)f(X_s)\mathbb{B}_{s,t}| \leq \\ &\leq C \left( \|B\|_{H;I} \|R^{f(X)}\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}_{s,t}\|_{2H;I} \|f(X)'\|_{H;I} \right) |t-s|^{3H} + \\ &\quad + \|Df\|_\infty \|f\|_\infty \|\mathbb{B}\|_{2H;I} |t-s|^{2H}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Рассмотрим последнее неравенство для всех подотрезков  $I$  длины не больше  $\delta$ . Тогда, как следствие

$$\begin{aligned} \|R^X\|_{2H;\delta} &\leq \|Df\|_\infty \|f\|_\infty \|\mathbb{B}\|_{2H;I} + \\ &+ C \left( \|B\|_{H;\delta} \|R^{f(X)}\|_{2H;\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H;\delta} \|f(X)'\|_{H;\delta} \right) \delta^H \end{aligned}$$

Ниже символами  $c_i$  будем обозначать константы, зависящие быть может, только от  $H$ . Заметим, что  $R^{f(X)} = f(X)_{s,t} - Df(X_s)X'_s B_{s,t} = f(X)_{s,t} -$



$-Df(X_s)X_{s,t} + Df(X_s)R_{s,t}^X = \frac{1}{2}D^2f(X_s + \theta X_{s,t})X_{s,t}^{\otimes 2} + Df(X_s)R_{s,t}^X$  для некоторого  $\theta \in (0,1)$ . Поэтому

$$\begin{aligned}\|R^{f(X)}\|_{2H;\delta} &\leq \frac{1}{2}\|D^2f\|_{\infty}\|X\|_{H;\delta}^2 + \|Df\|_{\infty}\|R^X\|_{2H;\delta} \leq \\ &\leq \|f\|_{C_b^2}\left(\|X\|_{H;\delta}^2 + \|R^X\|_{2H;\delta}\right).\end{aligned}$$

Также поскольку  $f(X)' = Df(X)X' = Df(X)f(X)$ , то, как легко видеть,  $(Df(X)f(X))_{s,t} = D(Df \cdot f)(X_s + \theta_1 X_{s,t})X_{s,t} = (D^2f \cdot f + Df \cdot Df)(X_s + \theta_1 X_{s,t})X_{s,t}$ , поэтому  $\|f(X)'\|_{H;\delta} \leq \|f\|_{C_b^2}^2\|X\|_{H;\delta}$ . Значит,

$$\begin{aligned}\|R^X\|_{2H;\delta} &\leq c_1\|f\|_{C_b^2}^2\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta} + c_1\|f\|_{C_b^2}\|B\|_{H;\delta}\delta^H\left(\|X\|_{H;\delta}^2 + \|R^X\|_{2H;\delta}\right) + \\ &+ c_1\|f\|_{C_b^2}^2\|\mathbb{B}\|_{H;\delta}\delta^H\|X\|_{H;\delta},\end{aligned}$$

где  $c_1 = 1 \vee C$ . Далее ограничимся достаточно малыми  $\delta$  — такими, чтобы выполнялись неравенства

$$c_1\|f\|_{C_b^2}\|B\|_H\delta^H \leq \frac{1}{2}, \quad c_1\|f\|_{C_b^2}\|\mathbb{B}\|_{2H}^{1/2}\delta^H \leq 1. \quad (3.14)$$

При таком выборе будем иметь:

$$\|R^X\|_{2H;\delta} \leq c_1\|f\|_{C_b^2}^2\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta} + \frac{1}{2}\left(\|X\|_{H;\delta}^2 + \|R^X\|_{2H;\delta}\right) + \|f\|_{C_b^2}\|\mathbb{B}\|_{2H}^{1/2}\|X\|_{H;\delta}. \quad (3.15)$$

Отсюда с учетом неравенства  $2\sqrt{ab} \leq a + b$ , выводим:

$$\begin{aligned}\|R^X\|_{2H;\delta} &\leq 2c_1\|f\|_{C_b^2}^2\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta} + \|X\|_{H;\delta}^2 + 2\|f\|_{C_b^2}\|\mathbb{B}\|_{2H}^{1/2}\|X\|_{H;\delta} \leq \\ &\leq c_3\|f\|_{C_b^2}^2\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta} + 2\|X\|_{H;\delta}^2,\end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $c_3 = 2c_2 + 1$  при достаточно малых  $\delta \leq \left(2c_1C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^{-1/H}$ . Из [25, предложение 8.3] следует, что при тех же  $\delta$  выполнено неравенство  $\|X\|_{H;\delta} \leq c_0\|f\|_{C_b^2}C_B$ . Комбинируя последние два неравенства, получим:

$$\|R^X\|_{2H;\delta} \leq \|f\|_{C_b^2}^2(c_3 + 2c_0^2)C_B^2 = c_4\left(C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^2,$$

где  $c_4 = c_3 + 2c_0^2$ . Применяя предложение 3.2, с учетом  $|I| \leq 1$ , будем иметь:

$$\|R^X\|_{2H;I} \leq c_4\left(C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^2(1 \vee 2\delta^{H-1}) \leq c_5\left(\left(C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^2 \vee \left(C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^{1+\frac{1}{H}}\right),$$

где  $c_5 = c_4(1 \vee 2^{1/H}c_1^{(1-H)/H})$  зависит лишь от  $H$ . Предложение доказано.

**Предложение 3.4.** Пусть  $t_j = (j \cdot \delta) \wedge T$ ,  $I_j = [t_j, t_{j+1}] \subset [0, T]$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Тогда  $\|Y\|_{H;\delta} \leq 2^{1-H} \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j}$ .

**Доказательство.** Зафиксируем произвольные  $s, t \in [0, T]$  такие, что  $0 < |t - s| < \delta$ ,  $s < t$ . Если  $s, t \in I_j$  для некоторого  $j$ , то, очевидно,  $|Y_{s,t}| \leq \|Y\|_{H;I_j} |t - s|^H \leq |t - s|^H \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j}$ . Иначе  $s \in I_{j-1}$ ,  $t \in I_j$ . В таком случае

$$\begin{aligned} |Y_{s,t}| &\leq |Y_{s,t_j}| + |Y_{t_j,t}| \leq \|Y\|_{H;I_{j-1}} |t_j - s|^H + \|Y\|_{H;I_j} |t - t_j|^H \leq \\ &\leq (|t - t_j|^H + |t_j - s|^H) \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j} \leq 2^{1-H} |t - s|^H \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j}, \end{aligned}$$

где в последнем переходе было применено неравенство Йенсена для вогнутой функции  $\phi(t) = t^H$ ,  $t > 0$ ,  $H \in (0, 1)$ . Так как  $1 - H > 0$ , то  $2^{1-H} > 1$  и в любом из рассмотренных случаев

$$|Y_{s,t}| \leq 2^{1-H} |t - s|^H \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j}$$

для  $|t - s| \leq \delta$ . Из последнего неравенства следует требуемое утверждение.

В технических выкладках будет полезно следующее элементарное предложение.

**Предложение 3.5.** Пусть  $u, \tilde{u} \in \mathbf{U}$ ,  $v, \tilde{v} \in \mathbf{V}$ ,  $u, \tilde{u} \in U \times V^{\otimes k}$ ,  $v, \tilde{v} \in V^{\otimes k}$  — тензоры,  $\mathbf{U}, \mathbf{V}, U, V$  — нормированные векторные пространства над полем  $\mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |uv - \tilde{u}\tilde{v}| &\leq |u| |v - \tilde{v}| + |\tilde{v}| |u - \tilde{u}|, \\ |uv - \tilde{u}\tilde{v}| &\leq |u| |v - \tilde{v}| + |\tilde{v}| |u - \tilde{u}|. \end{aligned}$$

### 3.2.1 Вспомогательные результаты

В данном разделе мы получим ряд вспомогательных лемм, на которых будут опираться доказательства результатов, связанных с непрерывной зависимостью решений уравнений (3.1), (3.10). Все неравенства в дальнейшем понимаются выполненными почти наверное.

**Лемма 3.1.** Пусть  $X_t$  и  $\tilde{X}_t$  — решения уравнений (3.1) и (3.10) соответственно с правыми частями  $f, \tilde{f}$  из класса  $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ , причем функция  $\tilde{f}$

такова, что  $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$ . Тогда для любого отрезка  $I = [u, v] \subset [0, T]$  длины  $|I| \leq 1$  и любых  $s, t \in I$  п.н. имеет место следующее неравенство:

$$\left| \int_s^t \left( f(\tilde{X}_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right| \leq C_f \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} |t - s|^H,$$

где  $C_f = C_f(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$  — случайная величина.

**Доказательство.** Используя предложение 1.5, получим оценку

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t \left( f(\tilde{X}_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right| &\leq \left| f(\tilde{X}_s) - \tilde{f}(\tilde{X}_s) \right| |B_{s,t}| + \left| f(\tilde{X}_s)' - \tilde{f}(\tilde{X}_s)' \right| |\mathbb{B}_{s,t}| + \\ &+ C \left( \|B\|_H \left\| R^{f(\tilde{X}) - \tilde{f}(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(\tilde{X})' - \tilde{f}(\tilde{X})'\|_{H;I} \right) |t - s|^{3H}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Следуя [25, лемма 7.3, теорема 8.4], имеют место следующие соотношения для производных Губинелли:

$$f(\tilde{X}.)' = Df(\tilde{X}.) \cdot \tilde{X}' = Df(\tilde{X}.) \cdot \tilde{f}(\tilde{X}.) = (Df \cdot \tilde{f})(\tilde{X}.), \quad (3.18)$$

$$\tilde{f}(\tilde{X}.)' = D\tilde{f}(\tilde{X}.) \cdot \tilde{X}' = D\tilde{f}(\tilde{X}.) \cdot \tilde{f}(\tilde{X}.) = (D\tilde{f} \cdot \tilde{f})(\tilde{X}.). \quad (3.19)$$

Из соотношений (3.18), (3.19) очевидным образом следуют оценки

$$\begin{aligned} \left| f(\tilde{X}_s) - \tilde{f}(\tilde{X}_s) \right| |B_{s,t}| &\leq \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \|B\|_H |t - s|^H, \\ \left| f(\tilde{X}_s)' - \tilde{f}(\tilde{X}_s)' \right| |\mathbb{B}_{s,t}| &\leq \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \|\tilde{f}\|_{C_b^2} \|\mathbb{B}\|_{2H} |t - s|^H \end{aligned}$$

для любых  $s, t \in I$ ,  $|I| \leq 1$ . Из неравенства треугольника следует, что  $\|\tilde{f}\|_{C_b^2} \leq \|f\|_{C_b^2} + 1$ . Таким образом,

$$\left| f(\tilde{X}_s) - \tilde{f}(\tilde{X}_s) \right| |B_{s,t}| + \left| f(\tilde{X}_s)' - \tilde{f}(\tilde{X}_s)' \right| |\mathbb{B}_{s,t}| \leq c_0 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} |t - s|^H, \quad (3.20)$$

где  $c_0 = \|B\|_H + (1 + \|f\|_{C_b^3}) \|\mathbb{B}\|_{2H}$ .

Далее оценим  $\|f(\tilde{X})' - \tilde{f}(\tilde{X})'\|_{H;I}$ . Используя соотношения (3.18), (3.19) и формулу конечных приращений будем иметь:

$$\begin{aligned} \left| f(\tilde{X}.)'_{s,t} - \tilde{f}(\tilde{X}.)'_{s,t} \right| &= \left| (Df \cdot \tilde{f} - D\tilde{f} \cdot \tilde{f})(\tilde{X}.)_{s,t} \right| \leq \\ &\leq \|D((Df - D\tilde{f}) \cdot \tilde{f})\|_\infty \|\tilde{X}\|_{H;I} |t - s|^H. \end{aligned}$$

Поскольку  $D((Df - D\tilde{f}) \cdot \tilde{f}) = (D^2f - D^2\tilde{f}) \cdot \tilde{f} + (Df - D\tilde{f}) \cdot D\tilde{f}$ , то нетрудно видеть, что  $\|D((Df - D\tilde{f}) \cdot \tilde{f})\|_\infty \leq 2\|\tilde{f}\|_{C_b^2} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 2(1 + \|f\|_{C_b^3}) \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}$ .

Отсюда ввиду предложения 3.3 выводим неравенство

$$\|f(\tilde{X})' - \tilde{f}(\tilde{X})'\|_{H;I} \leq c_f \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}, \quad (3.21)$$

где  $c_{f'} = 2(1 + \|f\|_{C_b^3})K \left( (1 + \|f\|_{C_b^3})C_B \vee \left( (1 + \|f\|_{C_b^3})C_B \right)^{1/H} \right)$ .

Осталось оценить  $\left\| R^{f(\tilde{X})-\tilde{f}(\tilde{X})} \right\|_{2H;I}$ . Учитывая соотношения (3.18), (3.19) и формулу конечных приращений, для некоторого  $\tilde{\theta} \in (0,1)$  будем иметь:

$$\begin{aligned} R_{s,t}^{f(\tilde{X})-\tilde{f}(\tilde{X})} &= f(\tilde{X}_{\cdot})_{s,t} - \tilde{f}(\tilde{X}_{\cdot})_{s,t} - Df(\tilde{X}_s)\tilde{X}'_s B_{s,t} + D\tilde{f}(\tilde{X}_s)\tilde{X}'_s B_{s,t} = \\ &= \left( (f - \tilde{f})(\tilde{X}_{\cdot})_{s,t} - D(f - \tilde{f})(\tilde{X}_s)\tilde{X}_{s,t} \right) + \left( Df(\tilde{X}_s) - D\tilde{f}(\tilde{X}_s) \right) R_{s,t}^{\tilde{X}} = \\ &= \frac{1}{2}D^2 \left( f - \tilde{f} \right) (\tilde{X}_{s,t}(\tilde{\theta}))\tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} + \left( Df(\tilde{X}_s) - D\tilde{f}(\tilde{X}_s) \right) R_{s,t}^{\tilde{X}}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства, равенства (3.35) и формулы конечных приращений следует, что для любых  $s, t \in I$  имеет место оценка

$$\left| R_{s,t}^{f(\tilde{X})-\tilde{f}(\tilde{X})} \right| \leq \left( \frac{1}{2}\|\tilde{X}\|_{H;I}^2 + \|R^{\tilde{X}}\|_{2H;I} \right) \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} |t - s|^{2H},$$

из которой с учетом предложения 3.3 устанавливаем неравенство

$$\left\| R_{s,t}^{f(\tilde{X})-\tilde{f}(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} \leq c_R \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \quad (3.22)$$

где  $c_R = \frac{1}{2}K^2 \left( K_B^2 \vee K_B^{2/H} \right) + \hat{K} \left( K_B^2 \vee K_B^{1+\frac{1}{H}} \right)$ ,  $K_B = (1 + \|f\|_{C_b^3})C_B$ .

Применяя неравенства (3.20) – (3.22) к правой части (3.17), получим:

$$\left| \int_s^t \left( f(\tilde{X}_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right| \leq (c_0 + Cc_R\|B\|_H + Cc_{f'}\|\mathbb{B}\|_{2H}) \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} |t - s|^H,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** Пусть  $X_t$  и  $\tilde{X}_t$  — решения уравнений (3.1) и (3.10) соответственно с правыми частями  $f, \tilde{f}$  из класса  $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ , причем функция  $\tilde{f}$  такова, что  $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$ . Тогда для любых функций  $g, \tilde{g} \in C_b^1$ , любого отрезка  $I = [u, v] \subset [0, T]$  длины  $|I| \leq 1$  и любого  $s \in I$  п.н. справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |g(X_s) - \tilde{g}(\tilde{X}_s)| &\leq \|g - \tilde{g}\|_\infty + C_{0;g}\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + C_{1;g}|X_u - \tilde{X}_u| + \\ &+ C_{2;g} \left( \|B\|_H \left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H}\|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I} \right) |I|^{3H}, \end{aligned}$$

где  $C_{0;g} = C_{0;g}(H, \|g\|_{C_b^1}, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ ,  $C_{1;g} = C_{1;g}(H, \|g\|_{C_b^1}, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$  — случайные величины,  $C_{2;g} = C_{2;g}(H, \|g\|_{C_b^1})$  — константа.

Доказательство. Из формулы конечных приращений следует, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |g(X_s) - \tilde{g}(\tilde{X}_s)| &\leq |g(X_s) - g(\tilde{X}_s)| + |g(\tilde{X}_s) - \tilde{g}(\tilde{X}_s)| \leq \\ &\leq \|Dg\|_\infty |X_s - \tilde{X}_s| + \|g - \tilde{g}\|_\infty \leq \\ &\leq \|g - \tilde{g}\|_\infty + \|g\|_{C_b^1} \left( |X_u - \tilde{X}_u| + |X_{u,s} - \tilde{X}_{u,s}| \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Поэтому осталось оценить  $|X_{u,s} - \tilde{X}_{u,s}|$ . Для этого воспользуемся определением решения и предложением 1.5. Будем иметь:

$$|X_{u,s} - \tilde{X}_{u,s}| = \left| \int_u^s \left( f(X_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right| \leq M_1 + M_2,$$

где  $M_1 = \left| \int_u^s \left( f(X_\tau) - f(\tilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right|$ ,  $M_2 = \left| \int_u^s \left( f(\tilde{X}_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right|$ . Оценку для второго выражения дает лемма 3.1:  $M_2 \leq C_f \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} |s - u|^H$ .

Оценим  $M_1$ . С учетом соотношений, аналогичных (3.18), (3.19), и предложения 1.5, получим:

$$\begin{aligned} M_1 &\leq \left| f(X_u) - f(\tilde{X}_u) \right| |B_{u,s}| + \left| (Df \cdot f)(X_u) - (Df \cdot \tilde{f})(\tilde{X}_u) \right| |\mathbb{B}_{u,s}| + \\ &+ C \left( \|B\|_{H;I} \left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H;I} \|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I} \right) |s - u|^{3H}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Осталось заметить, что ввиду формулы конечных приращений, примененной к функциям  $f$  и  $Df \cdot f$ , для любого  $s \in I$ ,  $|I| \leq 1$  будем иметь:

$$\begin{aligned} \left| f(X_u) - f(\tilde{X}_u) \right| |B_{u,s}| &\leq \|Df\|_\infty |X_u - \tilde{X}_u| \cdot \|B\|_{H;I} |s - u|^H \leq \\ &\leq \|f\|_{C_b^3} \|B\|_H |X_u - \tilde{X}_u|, \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} &\left| Df(X_u)f(X_u) - Df(\tilde{X}_u)\tilde{f}(\tilde{X}_u) \right| |\mathbb{B}_{u,s}| \leq \\ &\leq \left( \|D(Df \cdot f)\|_\infty |X_u - \tilde{X}_u| + \|Df\|_\infty \|f - \tilde{f}\|_\infty \right) |\mathbb{B}_{u,s}| \leq \\ &\leq \|f\|_{C_b^3}^2 \|\mathbb{B}\|_{2H} |X_u - \tilde{X}_u| + \|f\|_{C_b^3} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \|\mathbb{B}\|_{2H}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Окончательно, из соотношений (3.23) – (3.26) и леммы 3.1 выводим:

$$\begin{aligned} |g(X_s) - g(\tilde{X}_s)| &\leq \|g - \tilde{g}\|_\infty + C_{0;g} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + C_{1;g} |X_u - \tilde{X}_u| + \\ &+ C_{2;g} \left( \|B\|_H \left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I} \right) |I|^{3H}, \end{aligned}$$

где  $C_{0;g} = \|g\|_{C_b^1}(\|f\|_{C_b^3}\|\mathbb{B}\|_{2H} + C_f)$ ,  $C_{1;g} = \|g\|_{C_b^1} \left(1 + \|f\|_{C_b^3}\|B\|_H + \|f\|_{C_b^3}^2\|\mathbb{B}\|_{2H}\right)$ ,  $C_{2;g} = C\|g\|_{C_b^1}$ . Последнее соотношение доказывает лемму.

**Лемма 3.3.** Пусть  $X_t$  и  $\tilde{X}_t$  — решения уравнений (3.1) и (3.10) соответственно с правыми частями  $f, \tilde{f}$  из класса  $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ , причем функция  $\tilde{f}$  такова, что  $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$ . Для любого отрезка  $I = [u, v] \subset [0, T]$  длины  $|I| \leq 1$  п.н. имеет место следующее неравенство:

$$\|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I} \leq C_1|X_u - \tilde{X}_u| + C_2\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + C_3\|X - \tilde{X}\|_{H;I},$$

где  $C_j = C_j(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ ,  $j = 1, 2, 3$  — случайные величины.

**Доказательство.** Введем обозначения:  $Y_{s,t}(\theta) = Y_s + \theta Y_{s,t}$ ,  $\theta \in (0, 1)$ ,  $s, t \in I$ ,  $\varphi = Df \cdot f$ . С учетом соотношений, аналогичных (3.18), (3.19), следуя формуле конечных приращений, найдутся  $\theta_1, \theta_2, \theta \in (0, 1)$  такие, что

$$\begin{aligned} & \left| \left( f(X.)' - f(\tilde{X}.)' \right)_{s,t} \right| \leq \\ & \leq \left| (Df \cdot f)(X.)_{s,t} - (Df \cdot f)(\tilde{X}.)_{s,t} \right| + \left| (Df \cdot (f - \tilde{f}))(\tilde{X}.)_{s,t} \right| = \\ & = \left| D\varphi(X_{s,t}(\theta_1))X_{s,t} - D\varphi(\tilde{X}_{s,t}(\theta_2))\tilde{X}_{s,t} \right| + \left| D(Df \cdot (f - \tilde{f}))(\tilde{X}_{s,t}(\theta))\tilde{X}_{s,t} \right| \leq \\ & \leq |D\varphi(X_{s,t}(\theta_1))| \cdot |X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}| + |\tilde{X}_{s,t}| \cdot \left| D\varphi(X_{s,t}(\theta_1)) - D\varphi(\tilde{X}_{s,t}(\theta_2)) \right| + \\ & + \left\| D^2f \cdot (f - \tilde{f}) + Df \cdot (Df - D\tilde{f}) \right\|_{\infty} |\tilde{X}_{s,t}|. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Легко видеть, что  $\left\| D^2f \cdot (f - \tilde{f}) + Df \cdot (Df - D\tilde{f}) \right\|_{\infty} \leq 2\|f\|_{C_b^3}\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}$ . Оценим второе слагаемое (3.27). Из формулы конечных приращений следует:

$$\begin{aligned} & \left| D\varphi(X_{s,t}(\theta_1)) - D\varphi(\tilde{X}_{s,t}(\theta_2)) \right| \leq \|D^2\varphi\|_{\infty} \left( |X_s - \tilde{X}_s| + |\theta_1 - \theta_2| \cdot |X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}| \right) \leq \\ & \leq \|f\|_{C_b^3}^2 \left( |X_u - \tilde{X}_u| + \|X - \tilde{X}\|_{H;I}|u - s|^H + \|X - \tilde{X}\|_{H;I}|t - s|^H \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

С учетом соотношений (3.27), (3.28), очевидных неравенств  $|\tilde{X}_{s,t}| \leq \|\tilde{X}\|_{H;I}|t - s|^H$ ,  $\|\tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1 + \|f\|_{C_b^3}$  и предложения 3.3 для любых  $s, t \in I$  будем иметь:

$$\left| \left( f(X.)' - f(\tilde{X}.)' \right)_{s,t} \right| \leq \left( C_1|X_u - \tilde{X}_u| + C_2\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + C_3\|X - \tilde{X}\|_{H;I} \right) |t - s|^H,$$

где  $C_1 = \|f\|_{C_b^3}^2 C_{\tilde{X}}$ ,  $C_2 = 2\|f\|_{C_b^3} C_{\tilde{X}}$ ,  $C_3 = (1+2C_{\tilde{X}})\|f\|_{C_b^3}^2$ ,  $C_{\tilde{X}} = K \left( (1+\|f\|_{C_b^3}) C_B \vee \left( (1+\|f\|_{C_b^3}) C_B \right)^{\frac{1}{H}} \right)$ . Из последнего неравенства следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

**Лемма 3.4.** Пусть  $X_t$  и  $\tilde{X}_t$  — решения уравнений (3.1) и (3.10) соответственно с правыми частями  $f, \tilde{f}$  из класса  $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ , причем функция  $\tilde{f}$  такова, что  $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$ . Для любого отрезка  $I = [u, v] \subset [0, T]$  длины  $|I| \leq 1$  п.н. имеет место следующее неравенство:

$$\left\| R^{f(X) - f(\tilde{X})} \right\|_{2H; I} \leq C_4 |X_u - \tilde{X}_u| + C_5 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + C_6 \|X - \tilde{X}\|_{H; I},$$

где  $C_j = C_j(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ ,  $j = 4, 5, 6$  — случайные величины.

**Доказательство.** По определению

$$\begin{aligned} R_{s,t}^{f(X) - f(\tilde{X})} &= \left( f(X_\cdot) - f(\tilde{X}_\cdot) \right)_{s,t} - Df(X_s) X'_s B_{s,t} + Df(\tilde{X}_s) \tilde{X}'_s B_{s,t} = \\ &= \left( f(X_\cdot) - f(\tilde{X}_\cdot) \right)_{s,t} - Df(X_s) X_{s,t} + Df(\tilde{X}_s) \tilde{X}_{s,t} + Df(X_s) R_{s,t}^X - Df(\tilde{X}_s) R_{s,t}^{\tilde{X}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Рассмотрим функцию  $g(x, \tilde{x}) = f(x) - f(\tilde{x})$ . Она дифференцируема по обоим переменным до 3-го порядка включительно и ввиду формулы Тейлора для некоторого  $\theta \in (0, 1)$ :

$$\begin{aligned} g(X_t, \tilde{X}_t) &= g(X_s, \tilde{X}_s) + \left( X_{s,t} \frac{\partial g(\cdot)}{\partial x} + \tilde{X}_{s,t} \frac{\partial g(\cdot)}{\partial \tilde{x}} \right) \Big|_{(X_s, \tilde{X}_s)} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial x^2} X_{s,t}^{\otimes 2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial x \partial \tilde{x}} (X_{s,t} \otimes \tilde{X}_{s,t}) + \frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial \tilde{x}^2} \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right) \Big|_{(X_{s,t}(\theta), \tilde{X}_{s,t}(\theta))}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Вернемся к исходным обозначениям:

$$\frac{\partial^i g(x, \tilde{x})}{\partial x^i} = D^i f(x), \quad \frac{\partial^i g(x, \tilde{x})}{\partial \tilde{x}^i} = -D^i f(\tilde{x}), \quad i = 1, 2; \quad \frac{\partial^2 g(x, \tilde{x})}{\partial x \partial \tilde{x}} = 0. \quad (3.31)$$

Учитывая равенства (3.29) — (3.31), получим:

$$\begin{aligned} R_{s,t}^{f(X) - f(\tilde{X})} &= \frac{1}{2} \left( D^2 f(X_{s,t}(\theta)) X_{s,t}^{\otimes 2} - D^2 f(\tilde{X}_{s,t}(\theta)) \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right) + \\ &+ \left( Df(X_s) R_{s,t}^X - Df(\tilde{X}_s) R_{s,t}^{\tilde{X}} \right). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Далее зафиксируем произвольные  $s, t \in I$  такие, что  $|t - s| \leq \delta$  для некоторого  $\delta \leq |I|$  и получим оценку на  $\left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;\delta}$ , оценивая слагаемые в равенстве (3.32). Выберем отрезок  $I_\delta \subset I$  длины  $|I_\delta| \leq \delta$ , содержащий точки  $s, t \in I_\delta$ .

ШАГ 1. Оценим первое слагаемое в (3.32). Очевидно,

$$\begin{aligned} \left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) X_{s,t}^{\otimes 2} - D^2 f(\tilde{X}_{s,t}(\theta)) \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| &\leq |D^2 f(X_{s,t}(\theta))| \left| X_{s,t}^{\otimes 2} - \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| + \\ &+ \left| \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) - D^2 f(\tilde{X}_{s,t}(\theta)) \right|. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Ввиду формулы конечных приращений и неравенства  $|I| \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) - D^2 f(\tilde{X}_{s,t}(\theta)) \right| &\leq \|D^3 f\|_\infty \left( |X_s - \tilde{X}_s| + |\theta| |X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}| \right) \leq \\ &\leq \|f\|_{C_b^3} \left( |X_u - \tilde{X}_u| + 2\|X - \tilde{X}\|_{H;I} \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Из определения евклидовой нормы нетрудно установить справедливость соотношений

$$\left| \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| = |\tilde{X}_{s,t}|^2 \leq \|\tilde{X}_{s,t}\|_{H;I}^2 |t - s|^{2H}, \quad (3.35)$$

$$\left| X_{s,t}^{\otimes 2} - \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \leq \sqrt{2 \left( \|X\|_{H;I}^2 + \|\tilde{X}\|_{H;I}^2 \right)} \|X - \tilde{X}\|_{H;I} |t - s|^{2H}, \quad (3.36)$$

Учитывая равенства (3.33) – (3.36) и предложение 3.3, получаем окончательно оценку:

$$\left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) X_{s,t}^{\otimes 2} - D^2 f(\tilde{X}_{s,t}(\theta)) \tilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \leq \left( c_1 |X_u - \tilde{X}_u| + c_2 \|X - \tilde{X}\|_{H;I} \right) |t - s|^{2H}, \quad (3.37)$$

где  $c_1 = \|f\|_{C_b^3} C_{\tilde{X}}^2$ ,  $c_2 = 2c_1 + \|f\|_{C_b^3} \sqrt{2 \left( C_X^2 + C_{\tilde{X}}^2 \right)}$ ,  $C_{\tilde{X}} = K \left( C_B (1 + \|f\|_{C_b^3}) \vee \left( C_B (1 + \|f\|_{C_b^3}) \right)^{\frac{1}{H}} \right)$ ,  $C_X = K \left( C_B \|f\|_{C_b^3} \vee \left( C_B \|f\|_{C_b^3} \right)^{\frac{1}{H}} \right)$ .

ШАГ 2. Оценим второе слагаемое в (3.32). Очевидно,

$$\left| Df(X_s) R_{s,t}^X - Df(\tilde{X}_s) R_{s,t}^{\tilde{X}} \right| \leq |Df(X_s)| \left| R_{s,t}^X - R_{s,t}^{\tilde{X}} \right| + \left| R_{s,t}^{\tilde{X}} \right| \left| Df(X_s) - Df(\tilde{X}_s) \right|. \quad (3.38)$$

Ввиду формулы конечных приращений:

$$\left| Df(X_s) - Df(\tilde{X}_s) \right| \leq \|D^2 f\|_\infty \left| X_s - \tilde{X}_s \right| \leq \|f\|_{C_b^3} \left( |X_u - \tilde{X}_u| + \|X - \tilde{X}\|_{H;I} \right). \quad (3.39)$$



Рассмотрим разность остатков:

$$\begin{aligned}
& \left| R_{s,t}^X - R_{s,t}^{\tilde{X}} \right| = \left| X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t} - (X'_s - \tilde{X}'_s) B_{s,t} \right| = \\
& = \left| \int_s^t \left( f(X_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau) \right) dB_\tau - \left( f(X_s) - \tilde{f}(\tilde{X}_s) \right) B_{s,t} \right| \leq M_1 + M_2, \quad (3.40) \\
& M_1 = \left| \int_s^t \left( f(X_\tau) - f(\tilde{X}_\tau) \right) dB_\tau - \left( f(X_s) - f(\tilde{X}_s) \right) B_{s,t} \right|, \\
& M_2 = \left| \int_s^t \left( f(\tilde{X}_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau) \right) dB_\tau - \left( f(\tilde{X}_s) - \tilde{f}(\tilde{X}_s) \right) B_{s,t} \right|.
\end{aligned}$$

Оценим  $M_1$ , применяя предложение 1.5:

$$\begin{aligned}
M_1 & \leq \left| (Df \cdot f)(X_s) - (Df \cdot \tilde{f})(\tilde{X}_s) \right| |\mathbb{B}_{s,t}| + \\
& + C \left( \|B\|_H \left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I_\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I_\delta} \right) \delta^H |t - s|^{2H}, \quad (3.41)
\end{aligned}$$

где константа  $C$  зависит лишь от  $H$ . По аналогии с неравенством (3.26) можем записать

$$\begin{aligned}
& \left| (Df \cdot f)(X_s) - (Df \cdot \tilde{f})(\tilde{X}_s) \right| \leq \|D(Df \cdot f)\|_\infty |X_s - \tilde{X}_s| + \|Df\|_\infty \|f - \tilde{f}\|_\infty \leq \\
& \leq \|f\|_{C_b^3}^2 \left( |X_u - \tilde{X}_u| + \|X - \tilde{X}\|_{H;I} \right) + \|f\|_{C_b^3} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Согласно лемме 3.3 найдутся случайные величины  $C_1, C_2, C_3$  (зависящие только от  $H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$ ) такие, что

$$\|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I} \leq C_1 |X_u - \tilde{X}_u| + C_2 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + C_3 \|X - \tilde{X}\|_{H;I}. \quad (3.43)$$

Учитывая, что  $\|\cdot\|_{H;I_\delta} \leq \|\cdot\|_{H;I}$ ,  $\|\cdot\|_{2H;I_\delta} \leq \|\cdot\|_{2H;I,\delta}$ ,  $\delta \leq 1$ , подставляя (3.42), (3.43) в (3.41), получим оценку

$$\begin{aligned}
M_1 & \leq \left( C_{M_1,1} |X_u - \tilde{X}_u| + C_{M_1,2} \|X - \tilde{X}\|_{H;I} + C_{M_1,3} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + \right. \\
& \left. + C \|B\|_H \delta^H \left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I,\delta} \right) |t - s|^{2H}, \quad (3.44)
\end{aligned}$$

где  $C_{M_1,1} = \|\mathbb{B}\|_{2H} \left( \|f\|_{C_b^3}^2 + CC_1 \right)$ ,  $C_{M_1,2} = \|\mathbb{B}\|_{2H} \left( \|f\|_{C_b^3}^2 + CC_3 \right)$ ,  $C_{M_1,3} = \|\mathbb{B}\|_{2H} \left( \|f\|_{C_b^3} + CC_2 \right)$ .

Оценим  $M_2$ , также применяя предложение 1.5:

$$M_2 \leq \left| (Df \cdot \tilde{f})(\tilde{X}_s) - (D\tilde{f} \cdot \tilde{f})(\tilde{X}_s) \right| |\mathbb{B}_{s,t}| + \\ + C \left( \|B\|_H \left\| R^{f(\tilde{X}) - \tilde{f}(\tilde{X})} \right\|_{2H; I_\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(\tilde{X})' - \tilde{f}(\tilde{X})'\|_{H; I_\delta} \right) |t - s|^{2H}.$$

Используя неравенства (3.20) — (3.22), из последнего соотношения можно вывести неравенство

$$M_2 \leq C_{M_2,3} \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} |t - s|^{2H}, \quad (3.45)$$

где  $C_{M_2,3} = (1 + \|f\|_{C_b^3}) \|\mathbb{B}\|_{2H} + C_{CR} \|B\|_H + C_{cf'} \|\mathbb{B}\|_{2H}$ .

Учитывая равенства (3.38), (3.39), (3.44), (3.45) и предложение 3.3, получаем окончательно оценку:

$$\left| Df(X_s) R_{s,t}^X - Df(\tilde{X}_s) R_{s,t}^{\tilde{X}} \right| \leq \left( c_3 |X_u - \tilde{X}_u| + c_4 \|X - \tilde{X}\|_{H; I} + c_5 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + \right. \\ \left. + c_6 \delta^H \left\| R^{f(X) - f(\tilde{X})} \right\|_{2H; I, \delta} \right) |t - s|^{2H}, \quad (3.46)$$

где  $c_i = c_i(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) = c_{3,4}(C_{M_1, i-2})$ ,  $i = 3, 4$ ,  $c_5 = c_{3,4}(C_{M_1, 3} + C_{M_2, 3})$ ,  $c_6 = C \|B\|_H$ , а в свою очередь,  $c_{3,4}(y) = \|f\|_{C_b^3} \left( \hat{K} \left( (C_B(1 + \|f\|_{C_b^3}))^2 \vee (C_B(1 + \|f\|_{C_b^3}))^{1+\frac{1}{H}} \right) + y \right)$ .

Применяя оценки (3.37), (3.46) к равенству (3.32), получим, что для любых  $s, t \in I$  таких, что  $|t - s| \leq \delta$ , справедливо неравенство

$$\left| R_{s,t}^{f(X) - f(\tilde{X})} \right| \leq \left( c_8 |X_u - \tilde{X}_u| + c_7 \|X - \tilde{X}\|_{H; I} + \right. \\ \left. + c_5 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + c_6 \delta^H \left\| R^{f(X) - f(\tilde{X})} \right\|_{2H; I, \delta} \right) |t - s|^{2H},$$

где  $c_8 = \frac{1}{2}c_1 + c_3$ ,  $c_7 = \frac{1}{2}c_2 + c_4$ . Отсюда заключаем, что

$$\left\| R^{f(X) - f(\tilde{X})} \right\|_{2H; I, \delta} \leq c_8 |X_u - \tilde{X}_u| + c_7 \|X - \tilde{X}\|_{H; I} + c_5 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + \\ + c_6 \delta^H \left\| R^{f(X) - f(\tilde{X})} \right\|_{2H; I, \delta}$$

для произвольного  $\delta \in (0, |I|]$ . Теперь выберем и зафиксируем  $\delta$  таким, чтобы

$$c_6 \delta^H = C \|B\|_H \delta^H \leq \frac{1}{2} \iff \delta \leq (2C \|B\|_H)^{-1/H},$$

т.е. положим  $\delta := |I| \wedge (2C\|B\|_H)^{-1/H}$ . При таком выборе

$$\left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I,\delta} \leq 2c_8|X_u - \tilde{X}_u| + 2c_7\|X - \tilde{X}\|_{H;I} + 2c_5\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}.$$

Из последнего равенства, предложения 3.2 и неравенства  $|I| \leq 1$  вытекает

$$\begin{aligned} \left\| R^{f(X)-f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} &\leq 2 \left( 1 \vee 2(2C\|B\|_H)^{\frac{1-H}{H}} \right) \times \\ &\times \left( c_8|X_u - \tilde{X}_u| + c_7\|X - \tilde{X}\|_{H;I} + c_5\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right), \end{aligned}$$

откуда и следует требуемое неравенство. Лемма доказана.

### 3.2.2 Теорема о непрерывной зависимости от начальных данных

Перейдем к основным результатам, касающимся непрерывной зависимости от начальных условий и правых частей решений уравнений (3.1), (3.10) на отрезке  $[0, T]$ .

Пусть  $\xi, \tilde{\xi}$  — случайные величины, заданные на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  со значениями в  $\mathbb{R}^n$ . Следующая теорема устанавливает непрерывную зависимость решений.

**Теорема 3.3.** Пусть  $f, \tilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ , причем функция  $\tilde{f}$  такова, что  $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$ . Обозначим через  $X_t, \tilde{X}_t$  решения уравнений (3.1), (3.10) с начальными условиями  $X_0 = \xi, \tilde{X}_0 = \tilde{\xi}$  соответственно. Тогда:

1) почти наверное справедлива следующая оценка

$$\|X - \tilde{X}\|_H \leq C \left( |\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right) \quad (3.47)$$

для некоторой случайной величины  $C = C(H, T, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ . Причем  $C$  может быть выбрана не зависящей от  $T$ , если  $T \in (0, 1]$ ;

2) имеет место следующее неравенство

$$\mathbb{E}(\ln \|X - \tilde{X}\|_H) \leq C + \ln(\mathbb{E}|\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}), \quad (3.48)$$

где  $C = C(H, H_1, \dots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}) \in \mathbb{R}$  — константа, вообще говоря, зависящая от  $H, H_1, \dots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}$ .

**Доказательство.** Докажем первое утверждение теоремы. Зафиксируем произвольный отрезок  $I = [u, v] \subset [0, T]$  достаточно малой

длины  $|I| \leq 1 \wedge T$  (точное значение длины  $|I|$  будет указано ниже) и получим оценку на  $\|X - \tilde{X}\|_{H;I}$ . Выберем произвольные  $s, t \in I$ , очевидно справедливо неравенство

$$|X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}| = \left| \int_s^t f(X_\tau) dB_\tau - \int_s^t \tilde{f}(\tilde{X}_\tau) dB_\tau \right| \leq M_1 + M_2, \quad (3.49)$$

где  $M_1 = \left| \int_s^t (f(X_\tau) - f(\tilde{X}_\tau)) dB_\tau \right|$ ,  $M_2 = \left| \int_s^t (f(\tilde{X}_\tau) - \tilde{f}(\tilde{X}_\tau)) dB_\tau \right|$ .

Оценим  $M_1$ . Из предложения 1.5 следует, что

$$\begin{aligned} M_1 &\leq \left| f(X_s) - f(\tilde{X}_s) \right| \|B\|_H |t - s|^H + \\ &+ \left| (Df \cdot f)(X_s) - (Df \cdot \tilde{f})(\tilde{X}_s) \right| \|B\|_{2H} |t - s|^{2H} + \\ &+ C \left( \|B\|_H \left\| R^{f(X) - f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I} \right) |t - s|^{3H}. \end{aligned}$$

Введем обозначение:  $c_{1,2}(K_1, K_2) = K_1 \|B\|_H + K_2 \|B\|_{2H}$ . Применяя лемму 3.2 к функциям  $f$  и  $\tilde{f}$ ,  $Df \cdot f$  и  $Df \cdot \tilde{f}$ , учитывая,  $|I| \leq 1$ , из последнего неравенства легко вывести:

$$\begin{aligned} \frac{|X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}|}{|t - s|^H} &\leq c_0 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + c_1 |X_u - \tilde{X}_u| + \\ &+ \tilde{C} \left( \|B\|_H \left\| R^{f(X) - f(\tilde{X})} \right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(X)' - f(\tilde{X})'\|_{H;I} \right) |I|^{2H}, \end{aligned}$$

где  $c_0 = c_{1,2}(1, \|f\|_{C_b^3})$ ,  $c_1 = c_{1,2}(C_{1,f}, C_{1,Df \cdot f})$ ,  $\tilde{C} = c_{1,2}(C_{2,f}, C_{2,Df \cdot f}) + C$ . Причем  $c_1, c_2$  — случайные величины, зависящие только от  $H$ ,  $\|f\|_{C_b^3}$ ,  $\|B\|_H$ ,  $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ , но не зависящие от  $s, t, I$ .

Далее, применяя леммы 3.3, 3.4 к правой части последнего неравенства, с учетом  $|I| \leq 1$  получим:

$$\frac{M_1}{|t - s|^H} \leq c_2 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + c_3 |X_u - \tilde{X}_u| + c_4 |I|^H \|X - \tilde{X}\|_{H;I},$$

где  $c_2 = c_0 + \tilde{C} \cdot c_{1,2}(C_5, C_3)$ ,  $c_3 = c_1 + \tilde{C} \cdot c_{1,2}(C_4, C_1)$ ,  $c_4 = \tilde{C} \cdot c_{1,2}(C_6, C_3)$ . Причем  $c_3, c_4$  — случайные величины, зависящие от  $H$ ,  $\|f\|_{C_b^3}$ ,  $\|B\|_H$ ,  $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ , но не зависящие от  $s, t, I$ . Из леммы 3.1 следует, что  $\frac{M_2}{|t - s|^H} \leq C_f \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}$ , а посему

$$\frac{|X_{s,t} - \tilde{X}_{s,t}|}{|t - s|^H} \leq c_3 |X_u - \tilde{X}_u| + c_4 |I|^H \|X - \tilde{X}\|_{H;I} + c_5 \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2},$$

где  $c_5 = c_2 + C_f$ . Последнее неравенство справедливо для любых  $s, t \in I$ ,  $s \neq t$ , а значит,

$$\|X - \tilde{X}\|_{H;I} \leq c_3|X_u - \tilde{X}_u| + c_5\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} + c_4|I|^H\|X - \tilde{X}\|_{H;I}$$

для произвольного  $|I| \in (0, 1]$ . Теперь выберем  $|I|$  таким, чтобы выполнялось соотношение

$$c_4|I|^H \leq \frac{1}{2} \iff |I| \leq (2c_4)^{-1/H} =: \delta_0,$$

Таким образом, для любого отрезка  $I = [u, v] \subset [0, T]$  длины  $|I| \leq 1 \wedge T \wedge \delta_0$  справедливо неравенство

$$\|X - \tilde{X}\|_{H;I} \leq c|X_u - \tilde{X}_u| + c_f\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}, \quad (3.50)$$

где  $c = 2c_3$ ,  $c_f = 2c_5$ . Если  $1 \wedge T \wedge \delta_0 = T$ , то  $I = [0, T]$ , и неравенство (3.50) доказывает требуемое. Поэтому пусть далее  $T > 1 \wedge \delta_0 =: \delta_1$ .

Построим разбиение отрезка  $[0, T]$  точками  $t_j := (j \cdot \delta_1) \wedge T$ , где  $j = 0, 1, \dots$ . Заметим, что  $t_N = T$  при  $N \geq \frac{T}{\delta_1}$ , а также, что отрезки  $I_j = [t_j, t_{j+1}]$  имеют длины  $|I_j| \leq \delta_1$ ,  $j = 0, 1, \dots$ . Поэтому из неравенства (3.50) следуют оценки

$$\|X - \tilde{X}\|_{H;I_j} \leq c|X_{t_j} - \tilde{X}_{t_j}| + c_f\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2},$$

для  $j < \frac{T}{\delta_1}$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} |X_{t_j} - \tilde{X}_{t_j}| &\leq |X_{t_{j-1}} - \tilde{X}_{t_{j-1}}| + \delta_1^H \|X - \tilde{X}\|_{H;I_{j-1}} \leq \\ &\leq (1 + c\delta_1^H)|X_{t_{j-1}} - \tilde{X}_{t_{j-1}}| + c_f\delta_1^H\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}. \end{aligned}$$

Из полученного рекуррентного соотношения очевидной индукцией выводим неравенство:

$$\begin{aligned} |X_{t_j} - \tilde{X}_{t_j}| &\leq (1 + c\delta_1^H)^j |X_0 - \tilde{X}_0| + c_f\delta_1^H\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \sum_{k=0}^{j-1} (1 + c\delta_1^H)^k = \\ &= (1 + c\delta_1^H)^j |\xi - \tilde{\xi}| + \frac{c_f}{c} ((1 + c\delta_1^H)^j - 1) \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \end{aligned}$$

для  $j < \frac{T}{\delta_1}$ . Таким образом,

$$\|X - \tilde{X}\|_{H;I_j} \leq (1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1} \left( c|\xi - \tilde{\xi}| + c_f\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right) \quad (3.51)$$

для любого  $j = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{T}{\delta_1} \rfloor$ .

Применяя предложение 3.4 с учетом неравенства (3.51) получим:

$$\|X - \tilde{X}\|_{H;\delta_1} \leq 2^{1-H}(1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1} \left( c|\xi - \tilde{\xi}| + c_f\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right).$$

Рассмотрим выражение  $(1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1}$ ,  $\delta_1 = 1 \wedge \delta_0$ . Если  $\delta_1 = 1$ , то оно принимает значение  $(1 + c)^T$ . В противном случае  $\delta_1 = \delta_0$ ,  $\delta_0 = (2c_4)^{-1/H} < 1$ ,  $2c_4 > 1$  и

$$(1 + c\delta_0^H)^{\frac{T}{\delta_0}} = \left(1 + \frac{c}{2c_4}\right)^{(2c_4)^HT} \leq \left(1 + \frac{c}{2c_4}\right)^{2c_4T} = \left(\left(1 + \frac{c}{2c_4}\right)^{\frac{2c_4}{c}}\right)^{cT} \leq e^{cT},$$

поскольку функция  $\phi(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ ,  $x > 0$  ограничена сверху числом  $e$ . Кроме того,  $(1 + c)^T = \phi(\frac{1}{c})^{cT} \leq e^{cT}$ . Поэтому  $(1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1} \leq e^{cT}$  и

$$\|X - \tilde{X}\|_{H;\delta_1} \leq 2^{1-H}e^{cT} \left( c|\xi - \tilde{\xi}| + c_f\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right).$$

Теперь из предложения 3.2 и последнего неравенства получем оценку требуемого вида:

$$\begin{aligned} \|X - \tilde{X}\|_H &\leq 2^{2-H}e^{2c_3T} \left( 1 \vee 2T^{1-H} \vee 2(2c_4)^{\frac{1-H}{H}}T^{1-H} \right) (c_3 \vee c_5) \times \\ &\times \left( |\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. Рассмотрим зависимость случайных величин  $c_3, c_4, c_5$ , фигурирующих в неравенстве (3.52), от  $\|B\|_H$ ,  $\|\mathbb{B}\|_{2H}$  при фиксированных  $T, H, \|f\|_{C_b^3}$ . Из доказательства первой части следует, что эта зависимость выражается в виде композиции конечного числа функций  $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = \alpha u + \beta v + \gamma$ ,  $\Pi(u,v) = u \cdot v$ ,  $\vee(u,v) = u \vee v$ ,  $\psi_s(u) = u^s$  ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ,  $s \in \mathbb{R}^+$  — параметры) вещественных аргументов  $u, v \in \mathbb{R}^+$ .

Применим логарифм к обеим частям неравенства (3.52). Учитывая, что  $x \vee y \leq x + y$  для  $x, y > 0$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \ln \|X - \tilde{X}\|_H &\leq \mu + 2c_3T + \ln(c_3 + c_5) + \ln \left( 1 + 2T^{1-H} + 2(2c_4)^{\frac{1-H}{H}}T^{1-H} \right) + \\ &+ \ln(|\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}), \end{aligned}$$

где  $\mu = (2 - H) \ln 2$ . Возьмем математическое ожидание от обеих частей последнего неравенства. Ввиду вогнутости логарифма и неравенства Йенсена справедливо неравенство  $\mathbb{E}(\ln \eta) \leq \ln(\mathbb{E}\eta)$  для любой случайной величины  $\eta$ .

С учетом этого, выводим неравенство

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\ln \|X - \tilde{X}\|_H) &\leq \mu + 2T\mathbb{E}c_3 + \ln(\mathbb{E}c_3 + \mathbb{E}c_5) + \\ &+ \ln\left(1 + 2T^{1-H} + T^{1-H}2^{\frac{1}{H}}\mathbb{E}\left(c_4^{\frac{1-H}{H}}\right)\right) + \ln(\mathbb{E}|\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}). \end{aligned}$$

Таким образом, осталось доказать, что  $\mathbb{E}c_3 < \infty$ ,  $\mathbb{E}c_5 < \infty$ ,  $\mathbb{E}\left(c_4^{\frac{1-H}{H}}\right) < \infty$ . Однако, мы установим даже большее: для любого  $r > 0$  конечны моменты  $\mathbb{E}c_j^r = \mathbb{E}c_j^r(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ ,  $j = 3, 4, 5$ .

Далее воспользуемся тем, что зависимость  $c_j^r = c_j^r(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ ,  $j = 3, 4, 5$  от норм  $\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$  выражается в виде композиции конечного числа функций  $\Sigma_{\alpha, \beta, \gamma}(u, v)$ ,  $\Pi(u, v)$ ,  $\vee(u, v)$ ,  $\psi_s(u)$ . Но очевидно, что  $\vee(u, v) = u \vee v \leq u + v = \Sigma_{1, 1, 0}(u, v)$  для  $u, v \in \mathbb{R}^+$ . Также понятно, что для  $u = u(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) \in \mathbb{R}^+, v = v(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) \in \mathbb{R}^+$  справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\Sigma_{\alpha, \beta, \gamma}(u, v) &= \alpha\mathbb{E}u + \beta\mathbb{E}v + \gamma, \\ \mathbb{E}(u \vee v) &\leq \mathbb{E}u + \mathbb{E}v, \\ \mathbb{E}\Pi(u, v) &\leq (\mathbb{E}u^2)^{1/2}(\mathbb{E}v^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Значит, конечность указанных математических ожиданий от функций  $\Sigma_{\alpha, \beta, \gamma}$ ,  $\Pi$ ,  $\vee$  будет обеспечена конечностью моментов их аргументов. Осталось рассмотреть функцию  $\psi_s(u) = u^s$ .

Если  $s \in (0, 1]$ , то из неравенства Иенсена следует оценка  $\mathbb{E}\psi_s(u) \leq \psi_s(\mathbb{E}u) = (\mathbb{E}u)^s$ . Если же  $s \in (1, \infty)$ , то справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\psi_s(\Sigma_{\alpha, \beta, \gamma}(u, v)) &= \mathbb{E}(\alpha u + \beta v + \gamma)^s \leq 3^{s-1}(\alpha^s \mathbb{E}u^s + \beta^s \mathbb{E}v^s + \gamma^s), \\ \mathbb{E}\psi_s(u \vee v) &\leq \mathbb{E}(u + v)^s \leq 2^{s-1}(\mathbb{E}u^s + \mathbb{E}v^s), \\ \mathbb{E}\psi_s(uv) &= \mathbb{E}u^s v^s \leq (\mathbb{E}u^{2s})^{1/2}(\mathbb{E}v^{2s})^{1/2}. \end{aligned}$$

В то же время, как следует из [46, лемма 7.4], любой  $s$ -момент,  $s \geq 1$  случайной величины  $\|B\|_H$  (а значит и любой  $s$ -момент,  $s > 0$  ввиду неравенства Иенсена) конечен, т.е.  $\mathbb{E}\psi_s(\|B\|_H) = \mathbb{E}\|B\|_H^s < \infty$ ,  $s > 0$ . То же самое справедливо для случайной величины  $\|\mathbb{B}\|_{2H}$  (см. предложение 3.1):  $\mathbb{E}\psi_s(\|\mathbb{B}\|_{2H}) = \mathbb{E}\|\mathbb{B}\|_{2H}^s < \infty$ ,  $s > 0$ .

Из полученных соотношений следует, что композиция конечного числа указанных функций с нормами  $\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$  в качестве аргументов будет иметь конечное математическое ожидание и, в частности,  $\mathbb{E}c_j^r(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) < \infty$ ,  $j = 3, 4, 5$  для любого  $r > 0$ . Теорема доказана.

**Замечание 3.2.** Нетрудно видеть, что в приведенном доказательстве первого утверждения теоремы не использовались никакие другие свойства дробного броуновского движения  $(B_t)_{t \in [0, T]}$ , кроме свойства непрерывности траекторий по Гельдеру с показателем  $H$ . Это означает, что утверждение 1 приведенной теоремы справедливо для произвольных гельдеровских функций  $B \in C^H([0, T], \mathbb{R}^{d+1})$ .

### 3.3 Асимптотические разложения в окрестности нуля

В данном разделе будем придерживаться следующих компактных записей:

$$\Delta^k[0, t] = \{(t_1, \dots, t_k) \in [0, 1]^k : 0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq t\} \quad (3.53)$$

$$\int_{\Delta^k[0, t]} dB^{(I_k)} = \int_0^t \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_2} dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} dB_{t_k}^{(i_k)},$$

$$I_k = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_d^k := \{0, \dots, d\}^k, \quad (3.54)$$

$$D_f^{(i)} = \sum_{j=1}^n f_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i \in \{0, \dots, d\} \quad D_f^{(I_k)} = D_f^{(i_1)} \dots D_f^{(i_k)}, \quad (3.55)$$

$$\mathbf{P}_t g(x) = \mathbb{E} g(X_t^x), \quad t \geq 0. \quad (3.56)$$

В дальнейшем для краткости будем опускать верхний индекс  $x$  и обозначать решение через  $X_t$  в доказательствах.

**Теорема 3.4.** Пусть  $f \in C_b^{N+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ ,  $g \in C_b^{N+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого фиксированного  $H \in (1/3, 1/2]$  такого, что  $H < H_{\min} = \min_{i=0, \dots, d} H_i$  справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \{0, \dots, d\}^k} t^{|H_{I_k}|} \cdot (D_f^{(I_k)} g)(x) \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^k[0, 1]} dB^{(I_k)} \right) + O(t^{(N+1)H}), \quad (3.57)$$

при  $t \rightarrow 0$ , где  $|H_{I_k}| = H_{i_1} + H_{i_2} + \dots + H_{i_k}$  — сумма индексов Харста дробных броуновских движений  $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \dots, B^{(i_k)}$ .



Доказательство. С учетом обозначений (3.55) формулу Ито (3.3) можно записать в следующей развернутой форме:

$$g(X_t^x) = g(x) + \sum_{i=0}^d \int_0^t (D_f^{(i)} g)(X_r^x) dB_r^{(i)} \quad (3.58)$$

Применяя формулу (3.58)  $(N+1)$  раз, с учетом обозначений (3.53) — (3.55) получим:

$$\begin{aligned} g(X_t) = & g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \mathbb{N}_d^k} (D_f^{(I_k)} g)(x) \int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} + \\ & + \sum_{I_{N+1} \in \mathbb{N}_d^{N+1}} \int_0^t \int_0^{t_{N+1}} \dots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(X_{t_1}) dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Обозначим  $\varphi_{I_{N+1}}(x) = (D_f^{(I_{N+1})} g)(x)$  и преобразуем последнее слагаемое в (3.59). Введем в рассмотрение процесс  $\widehat{B}_u^{(c)} = (\widehat{B}_u^{(0;c)}, \widehat{B}_u^{(1;c)}, \dots, \widehat{B}_u^{(d;c)})^\top$ , зависящий от параметра  $c > 0$ ,  $i$ -я компонента которого определяется равенством  $\widehat{B}_u^{(i;c)} = c^{H_i} B_{u/c}^{(i)}$ ,  $u \in [0, T]$ . По свойству самоподобия дробного броуновского движения процесс  $\widehat{B}_u^{(i;c)}$  также является дробным броуновским движением с индексом Харста  $H_i$  для любого  $c > 0$ ,  $i = \overline{1, d}$ . Следовательно, при фиксированном  $t \in [0, T]$ :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_0^{t_{N+1}} \dots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(X_{t_1}) dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} = \\ & = \int_0^1 dB_{t \cdot t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \int_0^{t_{N+1}} dB_{t \cdot t_N}^{(i_N)} \dots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(X_{t \cdot t_1}) dB_{t \cdot t_1}^{(i_1)} = \\ & \stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_0^1 d\widehat{B}_{t \cdot t_{N+1}}^{(i_{N+1};t)} \int_0^{t_{N+1}} d\widehat{B}_{t \cdot t_N}^{(i_N;t)} \dots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(\widehat{X}_{t \cdot t_1}^{(t)}) d\widehat{B}_{t \cdot t_1}^{(i_1;t)} = \\ & = t^{H_{i_1} + \dots + H_{i_{N+1}}} \int_0^1 dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \int_0^{t_{N+1}} dB_{t_N}^{(i_N)} \dots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(\widehat{X}_{t \cdot t_1}^{(t)}) dB_{t_1}^{(i_1)}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

где знак  $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$  означает совпадение распределений, а  $\widehat{X}_\tau^{(t)}$  — решение уравнения:

$$d\widehat{X}_\tau^{(t)} = f(\widehat{X}_\tau^{(t)}) d\widehat{B}_\tau^{(t)}, \quad \tau \in [0, T] \quad (3.61)$$

с начальным условием  $\widehat{X}_0^{(t)} = x$ . По тем же соображениям

$$\int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} t^{|H_{I_k}|} \int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)}, \quad (3.62)$$

а посему из (3.59) — (3.62) после взятия математического ожидания, получим:

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \mathbb{N}_d^k} t^{|H_{I_k}|} (D_f^{(I_k)} g)(x) \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)} \right) + \mathcal{R}_{N+1}(t), \quad (3.63)$$

где

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{N+1}(t) = \\ &= \sum_{I_{N+1} \in \mathbb{N}_d^{N+1}} \left( t^{|H_{I_{N+1}}|} \mathbb{E} \int_0^1 \int_0^{t_{N+1}} \dots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(\widehat{X}_{t,t_1}^{(t)}) dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Поскольку  $|H_{I_{N+1}}| \geq (N+1)H$  для любого  $I_{N+1}$ , то при  $t < 1$ :

$$\begin{aligned} & |\mathcal{R}_{N+1}(t)| \leq (d+1)^{N+1} t^{(N+1)H} \times \\ & \times \max_{I_{N+1} \in \mathbb{N}_d^{N+1}} \mathbb{E} \left| \int_0^1 \int_0^{t_{N+1}} \dots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(\widehat{X}_{t,t_1}^{(t)}) dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \right|. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Поэтому, учитывая (3.63) — (3.65), для завершения доказательства формулы (3.57) осталось показать, что

$$\mathbb{E} \left| \int_0^1 \int_0^{t_{N+1}} \dots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(\widehat{X}_{t,t_1}^{(t)}) dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \right| < +\infty \quad (3.66)$$

для любых  $I_{N+1} = (i_1, \dots, i_{N+1}) \in \mathbb{N}_d^{N+1}$ .

Рассмотрим кратные интегралы чуть более общего вида, нежели (3.66). Для произвольного фиксированного  $c \in (0, 1]$  будем оценивать кратные интегралы вида

$$\mathcal{I}_t^{(k)} = \int_0^t \int_0^{t_{k-1}} \dots \int_0^{t_1} \varphi(\widehat{X}_{ct}^{(c)}) dB_r^{(i_1)} \dots dB_{t_{k-2}}^{(i_{k-2})} dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})}, \quad t \in [0, 1], \quad (3.67)$$

в которых  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — произвольная функция с непрерывными и ограниченными производными до второго порядка включительно. Для единообразия положим  $\mathcal{I}_t^{(0)} = \varphi(\widehat{X}_{ct}^{(c)})$ .

**Лемма 3.5.** Пусть  $\varphi$  имеет непрерывные и ограниченные производные до второго порядка включительно. Тогда справедливы неравенства  $|\mathcal{I}_{s,t}^{(k)} - \mathcal{I}_s^{(k-1)} B_{s,t}^{(i)}| \leq M_k |t - s|^{2H}$  для любого  $i = \overline{0, d}$  и  $|\mathcal{I}_{s,t}^{(k)}| \leq \widetilde{M}_k |t - s|^H$ , где  $M_k, \widetilde{M}_k$  — случайные величины (не зависящие от  $s, t$ ).

Доказательство. Проведем индукцией по  $k$ .

Рассмотрим  $k = 1$ . Докажем, что  $(\varphi(\hat{X}_c^{(c)}))' = c^{H_{i_1}} D\varphi(\hat{X}_c^{(c)})(\hat{X}^{(c)})'_c$ . Введем обозначение  $R_{u,v}^{\hat{X}^{(c)};i_1} = \hat{X}_{u,v}^{(c)} - (\hat{X}^{(c)})'_u \hat{B}_{u,v}^{(i_1;c)}$  для  $i_1$ -й компоненты остатка  $R^{\hat{X}^{(c)}}$  по отношению к процессу  $\hat{X}^{(c)}$ , управляемому процессом  $\hat{B}^{(i_1;c)}$ .

Используя формулу Тейлора, будем иметь

$$\begin{aligned} R_{s,t}^{\varphi(\hat{X}_c^{(c)});i_1} &:= \varphi(\hat{X}_{ct}^{(c)}) - \varphi(\hat{X}_{cs}^{(c)}) - c^{H_{i_1}} D\varphi(\hat{X}_{cs}^{(c)})(\hat{X}^{(c)})'_{cs} B_{s,t}^{(i_1)} = \\ &= \varphi(\hat{X}_{ct}^{(c)}) - \varphi(\hat{X}_{cs}^{(c)}) - D\varphi(\hat{X}_{cs}^{(c)})(\hat{X}^{(c)})'_{cs} \hat{B}_{cs,ct}^{(i_1;c)} = \\ &= \varphi(\hat{X}_{ct}^{(c)}) - \varphi(\hat{X}_{cs}^{(c)}) - D\varphi(\hat{X}_{cs}^{(c)})\hat{X}_{cs,ct}^{(c)} + D\varphi(\hat{X}_{cs}^{(c)})R_{cs,ct}^{\hat{X}^{(c)};i_1} = \\ &= \frac{1}{2}D^2\varphi(\hat{X}_{cs}^{(c)} + \theta\hat{X}_{cs,ct}^{(c)})\hat{X}_{cs,ct}^{(c)} \otimes \hat{X}_{cs,ct}^{(c)} + D\varphi(\hat{X}_{cs}^{(c)})R_{cs,ct}^{\hat{X}^{(c)};i_1} \end{aligned} \quad (3.68)$$

для некоторого  $\theta \in (0,1)$ . Из теоремы существования 3.1 следует, что  $\|R^{\hat{X}^{(c)};i_1}\|_{2H} \leq \|R^{\hat{X}^{(c)}}\|_{2H} < \infty$ . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \left| R_{s,t}^{\varphi(\hat{X}_c^{(c)});i_1} \right| &\leq \frac{1}{2} \|D^2\varphi\|_{\infty} \|\hat{X}^{(c)}\|_H^2 |ct - cs|^{2H} + \|D\varphi\|_{\infty} \|R^{\hat{X}^{(c)};i_1}\|_{2H} |ct - cs|^{2H} = \\ &= c^{2H} \left( \frac{1}{2} \|D^2\varphi\|_{\infty} \|\hat{X}^{(c)}\|_H^2 + \|D\varphi\|_{\infty} \|R^{\hat{X}^{(c)}}\|_{2H} \right) |t - s|^{2H}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

откуда следует, что  $\|R_{s,t}^{\varphi(\hat{X}_c^{(c)});i_1}\|_{2H} \leq \frac{1}{2} \|D^2\varphi\|_{\infty} \|\hat{X}^{(c)}\|_H^2 + \|D\varphi\|_{\infty} \|R^{\hat{X}^{(c)}}\|_{2H} < \infty$  (так как  $c \leq 1$ ), что и требовалось.

Далее, поскольку  $\varphi(\hat{X}_c^{(c)})' = c^{H_{i_1}} D\varphi(\hat{X}_c^{(c)})(\hat{X}^{(c)})'_c = c^{H_{i_1}} D\varphi(\hat{X}_c^{(c)})f(\hat{X}_c^{(c)})$ , то

$$\begin{aligned} \left| \left( \varphi(\hat{X}_c^{(c)})' \right)_{s,t} \right| &= c^{H_{i_1}} |(D\varphi \cdot f)(\hat{X}_{ct}^{(c)}) - (D\varphi \cdot f)(\hat{X}_{cs}^{(c)})| = \\ &= c^{H_{i_1}} \left| D(D\varphi \cdot f)(\hat{X}_{cs}^{(c)} + \theta\hat{X}_{cs,ct}^{(c)}) \right| \cdot |\hat{X}_{cs,ct}^{(c)}| = \\ &= c^{H_{i_1}} \left| (D^2\varphi \cdot f)(\hat{X}_{cs}^{(c)} + \theta\hat{X}_{cs,ct}^{(c)}) + (D\varphi \cdot Df)(\hat{X}_{cs}^{(c)} + \theta\hat{X}_{cs,ct}^{(c)}) \right| \cdot |\hat{X}_{cs,ct}^{(c)}| \leq \\ &\leq c^{H_{i_1}} (\|D^2\varphi\|_{\infty} \|f\|_{\infty} + \|D\varphi\|_{\infty} \|Df\|_{\infty}) \|\hat{X}^{(c)}\|_H |ct - cs|^H = \\ &= c^{H_{i_1}+H} (\|D^2\varphi\|_{\infty} \|f\|_{\infty} + \|D\varphi\|_{\infty} \|Df\|_{\infty}) \|\hat{X}^{(c)}\|_H |t - s|^H. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Отсюда следует, что  $\|\varphi(\hat{X}_c^{(c)})'\|_H \leq (\|D^2\varphi\|_{\infty} \|f\|_{\infty} + \|D\varphi\|_{\infty} \|Df\|_{\infty}) \|\hat{X}^{(c)}\|_H < \infty$ . Таким образом, ввиду неравенства  $||a| - |b|| \leq |a - b|$  и предложения 1.5,

будем иметь:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_s^t \varphi(\widehat{X}_{cr}^{(c)}) dB_r^{(i_1)} - \varphi(\widehat{X}_{cs}^{(c)}) B_{s,t}^{(i_1)} \right| \leq c^{H_{i_1}} \|D\varphi\|_\infty \|f\|_\infty \|\mathbb{B}^{(i_1)}\|_{2H} |t-s|^{2H} + \\
& + C \left( \|B^{(i_1)}\|_H \|R^{\varphi(\widehat{X}_c^{(c)})}; i_1\|_{2H} + \|\mathbb{B}^{(i_1)}\|_{2H} \|\varphi(\widehat{X}_c^{(c)})'\|_H \right) |t-s|^{3H} \leq \\
& \leq \|D\varphi\|_\infty \|f\|_\infty \|\mathbb{B}\|_{2H} |t-s|^{2H} + \\
& + C \left( \left( \frac{1}{2} \|D^2\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|_H^2 + \|D\varphi\|_\infty \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H} \right) \|B\|_H + \right. \\
& \left. + (\|D^2\varphi\|_\infty \|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty \|Df\|_\infty) \|\widehat{X}^{(c)}\|_H \|\mathbb{B}\|_{2H} \right) |t-s|^{2H} \leq \\
& \leq M_1 |t-s|^{2H}, \tag{3.71}
\end{aligned}$$

где  $M_1 = \left( C(\|D^2\varphi\|_\infty \|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty \|Df\|_\infty) \|\widehat{X}^{(c)}\|_H + \|D\varphi\|_\infty \|f\|_\infty \right) \|\mathbb{B}\|_{2H} +$   
 $+ C \left( \frac{1}{2} \|D^2\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|_H^2 + \|D\varphi\|_\infty \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H} \right) \|B\|_H.$

Итак, получили  $|\mathcal{I}_{s,t}^{(1)} - \mathcal{I}_s^{(0)} B_{s,t}^{(i_1)}| \leq M_1 |t-s|^{2H}$ , как и утверждалось. Из доказанного следует, что

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{I}_{s,t}^{(1)}| \leq |\mathcal{I}_s^{(0)}| |B_{s,t}^{(i_1)}| + M_1 |t-s|^{2H} \leq \\
& \leq |\varphi(\widehat{X}_{cs}^{(c)})| \|B^{(i_1)}\|_H |t-s|^H + M_1 |t-s|^H \leq \\
& \leq (\|\varphi\|_\infty \|B\|_H + M_1) |t-s|^H =: \widetilde{M}_1 |t-s|^H. \tag{3.72}
\end{aligned}$$

Легко видеть, что проведенные выше выкладки (3.68) – (3.72) не зависят от значения  $i_1$ , т.е. справедливы и дают одни и те же оценки для любого  $i_1 = \overline{0, d}$ .

Рассмотрим теперь  $k = 2$ . Используя доказанное выше, предложение 1.5 и рекуррентное соотношение  $\mathcal{I}_t^{(k)} = \int_0^t \mathcal{I}_r^{(k-1)} dB_r^{(i_k)}$ , получим:

$$\begin{aligned}
& \left| \mathcal{I}_{s,t}^{(2)} - \mathcal{I}_s^{(1)} B_{s,t}^{(i_2)} \right| \leq \left| (\mathcal{I}^{(1)})'_s \mathbb{B}_{s,t}^{(i_2)} \right| + \\
& + C \left( \|B^{(i_2)}\|_H \cdot \|(\mathcal{I}^{(1)})_{s,t} - (\mathcal{I}^{(1)})'_s B_{s,t}^{(i_2)}\|_{2H} + \|\mathbb{B}^{(i_2)}\|_{2H} \cdot \|(\mathcal{I}^{(1)})'\|_H \right) |t-s|^{3H} = \\
& = |\mathcal{I}_s^{(0)} \mathbb{B}_{s,t}^{(i_2)}| + C \left( \|B^{(i_2)}\|_H \|\mathcal{I}_{s,t}^{(1)} - \mathcal{I}_s^{(0)} B_{s,t}^{(i_2)}\|_{2H} + \|\mathbb{B}^{(i_2)}\|_{2H} \|\mathcal{I}^{(0)}\|_H \right) |t-s|^{3H} \leq \\
& \leq \|\varphi\|_\infty \|\mathbb{B}\|_{2H} |t-s|^{2H} + C \left( M_1 \|B\|_H + \|\mathbb{B}\|_{2H} c^{H_{i_1}} \|D\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|_H \right) |t-s|^{2H} \leq \\
& \leq M_2 |t-s|^{2H}. \tag{3.73}
\end{aligned}$$

Здесь  $M_2 = (\|\varphi\|_\infty + C\|D\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|_H) \|\mathbb{B}\|_{2H} + CM_1 \|B\|_H$ , а оценка на  $\|\mathcal{I}^{(0)}\|_H$  была получена с помощью формулы конечных приращений:

$$\mathcal{I}_{s,t}^{(0)} = \varphi(\widehat{X}_{ct}^{(c)}) - \varphi(\widehat{X}_{cs}^{(c)}) = D\varphi \left( \widehat{X}_{cs}^{(c)} + \theta(\widehat{X}_{ct}^{(c)} - \widehat{X}_{cs}^{(c)}) \right) (\widehat{X}_{ct}^{(c)} - \widehat{X}_{cs}^{(c)}). \tag{3.74}$$

Так, мы получили  $|\mathcal{I}_{s,t}^{(2)} - \mathcal{I}_s^{(1)} B_{s,t}^{(i_2)}| \leq M_2 |t - s|^{2H}$ . Как и в случае  $k = 1$ , отсюда выводим, что  $|\mathcal{I}_{s,t}^{(2)}| \leq (\widetilde{M}_1 \|B\|_H + M_2) |t - s|^H = \widetilde{M}_2 |t - s|^H$ , поскольку

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_{s,t}^{(2)} - \mathcal{I}_s^{(1)} B_{s,t}^{(i_2)}| &\geq |\mathcal{I}_{s,t}^{(2)}| - |\mathcal{I}_s^{(1)}| \cdot |B_{s,t}| \geq \\ &\geq |\mathcal{I}_{s,t}^{(2)}| - \|\mathcal{I}^{(1)}\|_\infty \|B\|_H |t - s|^H \geq |\mathcal{I}_{s,t}^{(2)}| - \|\mathcal{I}^{(1)}\|_H \|B\|_H |t - s|^H. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Легко видеть, что проведенные выше выкладки (3.73) — (3.75) не зависят от значения  $i_2$ , т.е. справедливы и дают одни и те же оценки для любого  $i_2 = \overline{0, d}$ .

Переход доказывається аналогічним образом. Предположим, что утверждение выполнено для всех натуральных чисел, меньших  $k$ , и докажем его для  $k + 1$ . По предположению индукции из предложения 1.5 будет следовать

$$\begin{aligned} &|\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})} - \mathcal{I}_s^{(k-1)} \mathbb{B}_{s,t}^{(i_{k+1})}| \leq \\ &\leq C \left( \|B^{(i_{k+1})}\|_H \cdot \|\mathcal{I}_{s,t}^{(k)} - \mathcal{I}_s^{(k-1)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}\|_{2H} + \|\mathbb{B}^{(i_{k+1})}\|_{2H} \cdot \|\mathcal{I}^{(k-1)}\|_H \right) |t - s|^{3H} \leq \\ &\leq C(M_k \|B\|_H + \widetilde{M}_{k-1} \|\mathbb{B}\|_{2H}) |t - s|^{2H}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

В то же время,

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})} - \mathcal{I}_s^{(k-1)} \mathbb{B}_{s,t}^{(i_{k+1})}| &\geq |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| - |\mathcal{I}_s^{(k-1)}| \cdot |\mathbb{B}_{s,t}^{(i_{k+1})}| \geq \\ &\geq |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| - \|\mathcal{I}^{(k-1)}\|_\infty \|\mathbb{B}^{(i_{k+1})}\|_{2H} |t - s|^{2H} \geq \\ &\geq |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| - \widetilde{M}_{k-1} \|\mathbb{B}\|_{2H} |t - s|^{2H}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Таким образом,

$$|\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| \leq M_{k+1} |t - s|^{2H}, \quad (3.78)$$

где  $M_{k+1} = (C + 1) \|\mathbb{B}\|_{2H} \widetilde{M}_{k-1} + C \|B\|_H M_k$ . Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} M_{k+1} |t - s|^H &\geq M_{k+1} |t - s|^{2H} \geq |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| \geq \\ &\geq |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)}| - |\mathcal{I}_s^{(k)}| \cdot |B_{s,t}^{(i_{k+1})}| \geq |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)}| - \|\mathcal{I}^{(k)}\|_\infty \|B^{(i_{k+1})}\|_H |t - s|^H \geq \\ &\geq |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)}| - \widetilde{M}_k \|B\|_H |t - s|^H. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Отсюда

$$|\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)}| \leq (M_{k+1} + \widetilde{M}_k \|B\|_H) |t - s|^H =: \widetilde{M}_{k+1} |t - s|^H, \quad (3.80)$$

что и требовалось. Причем, как легко видеть, что проведенные выше выкладки (3.76) — (3.80) не зависят от значения  $i_{k+1}$ , т.е. справедливы и дают одни и те же оценки для любого  $i_{k+1} = \overline{0, d}$ . Лемма доказана.

Из леммы следует, что

$$(\mathcal{I}^{(k)})' = \mathcal{I}^{(k-1)}, \quad R_{s,t}^{\mathcal{I}^{(k)}} = (\mathcal{I}^{(k)})_{s,t} - (\mathcal{I}^{(k)})'_s B_{s,t}^{(i)} = \mathcal{I}_{s,t}^{(k)} - \mathcal{I}_s^{(k-1)} B_{s,t}^{(i)},$$

$$\|R_{s,t}^{\mathcal{I}^{(k)}}\|_{2H} \leq M_k, \quad \|\mathcal{I}^{(k)}\|_H \leq \widetilde{M}_k,$$

а также  $\|\mathcal{I}^{(k)}\|_\infty \leq \widetilde{M}_k$ , поскольку  $\max_{t \in [0,1]} |\mathcal{I}_t^{(k)}| = \max_{t \in [0,1]} |\mathcal{I}_{0,t}^{(k)}|$ .

Полученные рекуррентные соотношения

$$M_{k+1} = (C + 1)\|\mathbb{B}\|_{2H}\widetilde{M}_{k-1} + C\|B\|_H M_k, \quad \widetilde{M}_{k+1} = M_{k+1} + \widetilde{M}_k\|B\|_H \quad (3.81)$$

с начальными условиями

$$M_1 = \left( C(\|D^2\varphi\|_\infty\|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty\|Df\|_\infty)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H + \|D\varphi\|_\infty\|f\|_\infty \right)\|\mathbb{B}\|_{2H} + \\ + C\left( \frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^2 + \|D\varphi\|_\infty\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H} \right)\|B\|_H, \quad (3.82)$$

$$\widetilde{M}_1 = \|\varphi\|_\infty\|B\|_H + M_1, \quad (3.83)$$

$$M_2 = (\|\varphi\|_\infty + C\|D\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|_H)\|\mathbb{B}\|_{2H} + CM_1\|B\|_H, \quad (3.84)$$

$$\widetilde{M}_2 = \widetilde{M}_1\|B\|_H + M_2 \quad (3.85)$$

позволяют последовательно вычислить константы  $M_k, \widetilde{M}_k$ . Очевидная индукция по  $k$  показывает, что  $M_k = M_k(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}, \|\widehat{X}^{(c)}\|_H, \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H})$ ,  $\widetilde{M}_k = \widetilde{M}_k(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}, \|\widehat{X}^{(c)}\|_H, \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H})$  являются многочленами с постоянными положительными коэффициентами, причем  $\|B\|_H$  и  $\|\mathbb{B}\|_{2H}$  входят в одночлены в степени не выше  $k$ ,  $\|\widehat{X}^{(c)}\|_H$  — в степени не выше 2, а  $\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}$  — в степени не выше 1. Пусть  $\widetilde{\gamma}_k$  — максимальный коэффициент многочлена  $\widetilde{M}_k(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}, \|\widehat{X}^{(c)}\|_H, \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H})$  и пусть

$$\mathbb{E}\left(\|B\|_H^{i_1}\|\mathbb{B}\|_{2H}^{i_2}\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{j_1}\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{j_2}\right) = \max_{\substack{i,i'=0,k, \\ j=0,1,2, \\ j'=0,1}} \mathbb{E}\left(\|B\|_H^i\|\mathbb{B}\|_{2H}^{i'}\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^j\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{j'}\right). \quad (3.86)$$

Тогда взяв супремум и математическое ожидание от обеих частей неравенства  $|\mathcal{I}_{s,t}^{(k)}| \leq \widetilde{M}_k|t - s|^H$ , получим:

$$\sup_{0 \leq s < t \leq 1} \mathbb{E}|\mathcal{I}_{s,t}^{(k)}| \leq \mathbb{E}\widetilde{M}_k \leq 2k^2 \cdot \widetilde{\gamma}_k \cdot \mathbb{E}\left(\|B\|_H^{i_1}\|\mathbb{B}\|_{2H}^{i_2}\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{j_1}\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{j_2}\right). \quad (3.87)$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left( \|B\|_H^{i_1} \|\mathbb{B}\|_{2H}^{i_2} \|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{j_1} \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{j_2} \right) \leq \\
& \leq \left( \mathbb{E}(\|B\|_H^{2i_1} \|\mathbb{B}\|_{2H}^{2i_2}) \cdot \mathbb{E}(\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{2j_1} \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{2j_2}) \right)^{1/2} \leq \\
& \leq \left( \mathbb{E} \|B\|_H^{4i_1} \cdot \mathbb{E} \|\mathbb{B}\|_{2H}^{4i_2} \cdot \mathbb{E} \|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{4j_1} \cdot \mathbb{E} \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{4j_2} \right)^{1/4}. \quad (3.88)
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_{0 \leq s < t \leq 1} \left| \int_s^t \int_0^{t_{k-1}} \dots \int_0^{t_1} \varphi(\widehat{X}_{cr}^{(c)}) dB_r^{(i_1)} \dots dB_{t_{k-2}}^{(i_{k-2})} dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} \right| \leq \\
& \leq 2k^2 \cdot \tilde{\gamma}_k \cdot \left( \mathbb{E} \|B\|_H^{4i_1} \cdot \mathbb{E} \|\mathbb{B}\|_{2H}^{4i_2} \cdot \mathbb{E} \|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{4j_1} \cdot \mathbb{E} \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{4j_2} \right)^{1/4}. \quad (3.89)
\end{aligned}$$

Согласно [46, лемма 7.4] любой момент порядка  $p \geq 1$  случайной величины  $\|B\|_H$  конечен; в частности,  $\mathbb{E} \|B\|_H^{4i_1} < \infty$ . То же верно и для случайной величины  $\|\mathbb{B}\|_{2H}$  ввиду предложения 3.1, т.е., в частности,  $\mathbb{E} \|\mathbb{B}\|_{2H}^{4i_2} < \infty$ . Из предложения 3.3 следует, что существуют универсальные константы  $c_1, c_2$  такие, что

$$\|\widehat{X}^{(c)}\|_H \leq c_1 \left( \|\widehat{B}^{(c)}\|_H + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H}^{1/2} + \|\widehat{B}^{(c)}\|_H^{1/H} + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H}^{1/(2H)} \right), \quad (3.90)$$

$$\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H} \leq c_2 \left( \|\widehat{B}^{(c)}\|_H^2 + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H} + \|\widehat{B}^{(c)}\|_H^{1+\frac{1}{H}} + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2H}} \right). \quad (3.91)$$

Из неравенства Гельдера следует, что конечны любые моменты  $\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$  порядка  $q \in (0,1)$ :  $\mathbb{E} \|B^{(c)}\|_H^q \leq \left( \mathbb{E} \|B^{(c)}\|_H \right)^q \left( \mathbb{E} 1^{1/(1-q)} \right)^{1-q} < \infty$  (и аналогично  $\mathbb{E} \|\mathbb{B}^{(c)}\|_{2H}^q < \infty$ ). Поэтому из оценок (3.90) и (3.91) и неравенств о средних следует конечность моментов

$$\mathbb{E} \|X^{(c)}\|_H^{4j_1} < \infty, \quad \mathbb{E} \|R^{X^{(c)}}\|_{2H}^{4j_2} < \infty. \quad (3.92)$$

Это, в свою очередь, завершает доказательство того, что правая часть (3.89) конечна. Теорема 3.4 доказана.

*Замечание 3.3.* Рассмотрим случай, когда все показатели Харста  $H_i, i = 1, \dots, d$ , равны  $1/2$ . В этом случае уравнение (3.1) можно рассматривать как уравнение Стратоновича. Учитывая связь уравнений Ито и Стратоновича [9, предложение 2.4], данное уравнение можно свести к уравнению Ито

$$dX_t = \tilde{f}_0(X_t)dt + \hat{f}(X_t)dW_t, \quad (3.93)$$

где  $\hat{f}$  – матрица, составленная из вектор-столбцов  $f_1, \dots, f_d$ ,  $W_t$  –  $d$ -мерное броуновское движение,

$$\tilde{f}_0(X) = f_0(X) - \text{col}(\rho_1(X), \dots, \rho_n(X)),$$

$$\rho_j(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial \hat{f}_{ji}(X)}{\partial x_k} \hat{f}_{ki}(X).$$

Так как решение уравнения (3.93) обладает марковским свойством [14, теорема 7.1.2], то, полагая  $N = 2$  в соотношении (3.57), получим, что семейство операторов  $\mathbf{P}_t$  является  $C_0$ -полугруппой с генератором

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^n \tilde{f}_{0,j}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d \left( \sum_{j=1}^n f_{k,j}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2.$$

Таким образом, для функции  $u(x, t) = \mathbf{P}_t g(x)$  получаем обратное уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u.$$

Отметим, что даже для простейшего одномерного уравнения  $dX_t = dB_t^\alpha$  при  $\alpha \in (1/3, 1/2) \cup (1/2, 1)$  решение  $X_t = B_t^\alpha$  не является семимартингалом, и следовательно, не обладает марковским свойством, которое является ключевым при выводе уравнений Колмогорова [14, теорема 8.1.1].

### 3.4 Математические ожидания повторных интегралов от дробных броуновских движений

В данном разделе мы вычислим математические ожидания повторных интегралов возникающих их разложений для  $\mathbf{P}_t g(x)$  в теореме 3.4, предполагая, что  $H_i \geq H^* > 1/2$  для всех  $i = 0, \dots, d$ .

**Теорема 3.5.** Пусть  $I_m = (i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, d\}^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

1. Если  $m = 2k - 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то

$$\mathbb{E} \left( \int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})} \right) = 0.$$



2. Если  $m = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , то справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^{2k}[0,1]} dB^{(I_{2k})} \right) = \\ &= \frac{1}{k!2^{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \left( \prod_{l=1}^k (H_{i_{\sigma(2l)} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 1) (H_{i_{\sigma(2l)} + H_{i_{\sigma(2l-1)}}) \times \right. \\ & \times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^k \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} |t_{\sigma(2l)} - t_{\sigma(2l-1)}|^{H_{i_{\sigma(2l)} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 2} dt_1 \dots dt_{2k} \Big), \end{aligned}$$

где  $\delta$  — символ Кронекера,  $S_{2k}$  — группа подстановок.

**Доказательство.** Первую часть легко доказать, используя свойство симметрии распределения дробного броуновского движения: если  $B^{(i)}$  — дробное броуновское движение с индексом Харста  $H_i$ , то  $-B^{(i)}$  — также дробное броуновское движение с тем же индексом Харста. Таким образом, получим

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})} \right) = \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} d \left( -B^{(I_{2k-1})} \right) \right) = \\ &= (-1)^{2k-1} \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})} \right) = - \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})} \right), \end{aligned}$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

Докажем вторую часть теоремы. Обозначим через  $B^{(N)}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , последовательность приближений к  $B$  на диадных разбиениях  $\mathcal{P}_{dyad}^{(N)} = \left\{ t_k^{(N)} = \frac{k}{2^N}, k = \overline{0, 2^N} \right\}$  отрезка  $[0,1]$ , определяемых следующей формулой:

$$B_t^{(N)} = B_{t_{k-1}^{(N)}} + 2^N \left( t - t_{k-1}^{(N)} \right) \left( B_{t_k^{(N)}} - B_{t_{k-1}^{(N)}} \right), \quad t \in \left[ t_{k-1}^{(N)}, t_k^{(N)} \right), \quad k = 1, \dots, N.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости ввиду [22, следствие 20], получим:

$$\mathbb{E} \left( \int_{\Delta^{2k}[0,1]} dB^{(I_{2k})} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^{2k}[0,1]} (dB^{(N)})^{(I_{2k})} \right).$$

Поскольку функции  $B^{(N)}$  абсолютно непрерывны п.н., то справедливы соотношения

$$\int_{\Delta^{2k}[0,1]} (dB^{(N)})^{(I_{2k})} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{t_{2k}} \dots \int_0^{t_2} d(B_{t_1}^{(N)})^{(i_1)} \dots d(B_{t_{2k-1}}^{(N)})^{(i_{2k-1})} d(B_{t_{2k}}^{(N)})^{(i_{2k})} = \\
&= \int_0^1 \int_0^{t_{2k}} \dots \int_0^{t_2} \frac{d(B_{t_1}^{(N)})^{(i_1)}}{dt_1} dt_1 \dots \frac{d(B_{t_{2k-1}}^{(N)})^{(i_{2k-1})}}{dt_{2k-1}} dt_{2k-1} \frac{d(B_{t_{2k}}^{(N)})^{(i_{2k})}}{dt_{2k}} dt_{2k} = \\
&= \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \frac{d(B_{t_1}^{(N)})^{(i_1)}}{dt_1} \dots \frac{d(B_{t_{2k}}^{(N)})^{(i_{2k})}}{dt_{2k}} dt_1 \dots dt_{2k}. \tag{3.94}
\end{aligned}$$

Нам потребуется следующее утверждение, которое может быть доказано непосредственно путем разложения в ряд производящей функции моментов гауссовского случайного вектора.

**Лемма 3.6 [17].** Для центрированного гауссовского вектора  $G = (G_1, \dots, G_{2k})$  справедливо равенство

$$\mathbb{E}(G_1 \dots G_{2k}) = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \prod_{l=1}^k \mathbb{E}(G_{\sigma(2l)} G_{\sigma(2l-1)}).$$

Применяя лемму 3.6 к равенству (3.94), получим:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left( \int_{\Delta^{2k}[0,1]} (dB^{(N)})^{(I_{2k})} \right) = \\
&= \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \mathbb{E} \left( \frac{d(B_{t_1}^{(N)})^{(i_1)}}{dt_1} \dots \frac{d(B_{t_{2k}}^{(N)})^{(i_{2k})}}{dt_{2k}} \right) dt_1 \dots dt_{2k} = \\
&= \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^k \mathbb{E} \left( \frac{d(B_{t_{\sigma(2l)}}^{(N)})^{(i_{\sigma(2l)})}}{dt_{\sigma(2l)}} \cdot \frac{d(B_{t_{\sigma(2l-1)}}^{(N)})^{(i_{\sigma(2l-1)})}}{dt_{\sigma(2l-1)}} \right) dt_1 \dots dt_{2k}. \tag{3.95}
\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно каждый множитель в соотношении (3.95). Пусть  $t_{\sigma(2l)} \in [t_u^{(N)}, t_{u+1}^{(N)})$  и  $t_{\sigma(2l-1)} \in [t_v^{(N)}, t_{v+1}^{(N)})$  для некоторых  $u, v \in \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$  (для упрощения обозначений будем иногда опускать верхний индекс  $(N)$ ). Используя представление  $B^{(N)}$ , можем записать:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left( \frac{d(B_{t_{\sigma(2l)}}^{(N)})^{(i_{\sigma(2l)})}}{dt_{\sigma(2l)}} \cdot \frac{d(B_{t_{\sigma(2l-1)}}^{(N)})^{(i_{\sigma(2l-1)})}}{dt_{\sigma(2l-1)}} \right) = \\
&= 2^{2N} \mathbb{E} \left( B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})} - B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})} \right) \left( B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})} - B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})} \right).
\end{aligned}$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, однородность приращений дробного Броуновского движения, получим неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E} \left( B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})} - B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})} \right) \left( B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})} - B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})} \right) \right| \leq \\ & \leq \sqrt{|t_{u+1} - t_u|^{2H_{i_{\sigma(2l)}}} |t_{v+1} - t_v|^{2H_{i_{\sigma(2l-1)}}}} \leq 2^{-2NH^*}. \end{aligned} \quad (3.96)$$

Если  $|u - v| > 1$ , то легко вывести следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})} - B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})} \right) \left( B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})} - B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})} \right) = \\ & = \frac{1}{2} \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} (H_{i_{\sigma(2l)}} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 1) (H_{i_{\sigma(2l)}} + H_{i_{\sigma(2l-1)}}) \times \\ & \times \iint_{[t_u^{(N)}, t_{u+1}^{(N)}] \times [t_v^{(N)}, t_{v+1}^{(N)}]} |x - y|^{H_{i_{\sigma(2l)}} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 2} dx dy. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Введем следующее обозначение:

$$R_{u,v}^{(N)} = [t_u^{(N)}, t_{u+1}^{(N)}] \times [t_v^{(N)}, t_{v+1}^{(N)}],$$

$$f_{u,v}^{(l)}(t) = \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)}) \mathbb{E} \left( B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})} - B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})} \right) \left( B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})} - B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})} \right).$$

Используя соотношение (3.95), получим:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^{2k}[0,1]} (dB^{(N)})^{(I_{2k})} \right) = \\ & = \frac{2^{2Nk}}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^k \sum_{u,v=0}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)}) \times \\ & \times \mathbb{E} \left( B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})} - B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})} \right) \left( B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})} - B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})} \right) dt_1 \dots dt_{2k} = \\ & = \frac{2^{2Nk}}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^k \left( \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(l)}(t) + \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|\leq 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(l)}(t) \right) dt_1 \dots dt_{2k} = \\ & = \frac{2^{2Nk}}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^k \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(l)}(t) dt_1 \dots dt_{2k} + \\ & + \frac{2^{2Nk}}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\pi \in S_k} \left( \prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \left( \prod_{l=\alpha+1}^k \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v| \leq 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right) dt_1 \dots dt_{2k} := I_1^{(N)} + I_2^{(N)}.$$

Сейчас утверждение теоремы является прямым следствием следующей леммы.

**Лемма 3.7.** *В предыдущих обозначениях пусть*

$$\begin{aligned} I_1^{(N)} &= \frac{2^{2Nk}}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^k \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v| > 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(l)}(t) dt_1 \dots dt_{2k}, \\ I_2^{(N)} &= \frac{2^{2Nk}}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\pi \in S_k} \left( \prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v| > 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right) \times \\ &\quad \times \left( \prod_{l=\alpha+1}^k \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v| \leq 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right) dt_1 \dots dt_{2k}. \end{aligned}$$

Тогда  $\lim_{N \rightarrow \infty} I_2^{(N)} = 0$  и

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} I_1^{(N)} &= \frac{1}{k!2^{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \left( \prod_{l=1}^k (H_{i_{\sigma(2l)} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 1)(H_{i_{\sigma(2l)} + H_{i_{\sigma(2l-1)}}}) \right) \times \\ &\quad \times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^k \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} |t_{\sigma(2l)} - t_{\sigma(2l-1)}|^{H_{i_{\sigma(2l)} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 2} dt_1 \dots dt_{2k}. \end{aligned}$$

**Доказательство.** По теореме о среднем существует точка  $(t_u^*, t_v^*) \in R_{u,v}^{(N)}$  такая, что

$$\begin{aligned} \iint_{R_{u,v}^{(N)}} |x - y|^{H_{i_{\sigma(2l)} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 2} dx dy &= |t_u^* - t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2l)} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 2} \cdot \text{mes}(R_{u,v}^{(N)}) = \\ &= 2^{-2N} \cdot |t_u^* - t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2l)} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 2}. \end{aligned}$$

Когда  $N$  стремится к  $\infty$ , прямоугольник  $R_{u,v}^{(N)}$  стягивается в точку  $(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)})$  и таким образом,

$$I_1^{(N)} = \frac{2^{2Nk}}{k!2^{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \left( \prod_{l=1}^k (H_{i_{\sigma(2l)} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 1)(H_{i_{\sigma(2l)} + H_{i_{\sigma(2l-1)}}}) \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^k \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|>1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)}) \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} \times \\
& \times \iint_{R_{u,v}^{(N)}} |x-y|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2} dx dy dt_1 \dots dt_{2k} = \\
& = \frac{1}{k!2^{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \left( \prod_{l=1}^k (H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}) \right) \times \\
& \times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^k \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|>1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)}) \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} \times \\
& \times |t_u^* - t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2} dt_1 \dots dt_{2k} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \\
& \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{k!2^{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \left( \prod_{l=1}^k (H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}) \right) \times \\
& \times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^k \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} |t_{\sigma(2l)} - t_{\sigma(2l-1)}|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2} dt_1 \dots dt_{2k}. \quad (3.98)
\end{aligned}$$

Осталось доказать, что  $I_2^{(N)} \rightarrow 0$  as  $N \rightarrow \infty$ . Выберем число  $q > 1$  такое, что  $2 - \frac{1}{q} < 2H^*$ , и пусть  $p = \frac{q}{q-1}$ . Воспользуемся неравенством Гельдера, чтобы получить верхнюю оценку для  $I_2^{(N)}$ :

$$\begin{aligned}
|I_2^{(N)}| & \leq \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\pi \in S_k} 2^{2Nk} \times \\
& \times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \left( \prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right) \left( \prod_{l=\alpha+1}^k \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|\leq 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right) \right| dt_1 \dots dt_{2k} \leq \\
& \leq \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\pi \in S_k} 2^{2Nk} \times \\
& \times \left( \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right|^p dt_1 \dots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{p}} \times
\end{aligned}$$

$$\times \left( \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \prod_{l=\alpha+1}^k \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|\leq 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right|^q dt_1 \dots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.99)$$

Достаточно показать, что каждое слагаемое в (3.99) порядка  $O(2^{(2-\frac{1}{q}-2H^*)N(k-\alpha)})$ . Для первого интеграла в слагаемом (3.99) воспользуемся соображениями из соотношений (3.97), (3.98):

$$\begin{aligned} & 2^{2N\alpha} \left( \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right|^p dt_1 \dots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{p}} = \\ & = 2^{2N\alpha} \cdot \frac{1}{2^k} \left( \prod_{l=1}^{\alpha} (H_{i_{\sigma(2\pi(l))}} + H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}} - 1) (H_{i_{\sigma(2\pi(l))}} + H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}) \right) \times \\ & \times \left( \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|>1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}) \cdot \delta_{i_{\sigma(2\pi(l))}, i_{\sigma(2\pi(l)-1)}} \times \right. \right. \\ & \quad \left. \times 2^{-2N} \cdot |t_u^* - t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2\pi(l))}} + H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}} - 2} \right|^p dt_1 \dots dt_{2k} \Big)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \\ & \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2^k} \left( \prod_{l=1}^{\alpha} (H_{i_{\sigma(2\pi(l))}} + H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}} - 1) (H_{i_{\sigma(2\pi(l))}} + H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}) \right) \times \\ & \quad \times \left( \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \prod_{l=1}^{\alpha} \delta_{i_{\sigma(2\pi(l))}, i_{\sigma(2\pi(l)-1)}} \times \right. \right. \\ & \quad \left. \times |(t_{\sigma(2\pi(l))} - t_{\sigma(2\pi(l)-1)})|^{H_{i_{\sigma(2\pi(l))}} + H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}} - 2} \right|^p dt_1 \dots dt_{2k} \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty, \end{aligned}$$

поэтому первый множитель ограничен. Для второго интеграла в (3.99) воспользуемся оценкой (3.96) и получим:

$$2^{2N(k-\alpha)} \left( \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \prod_{l=\alpha+1}^k \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|\leq 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right|^q dt_1 \dots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \times$$

$$\times \left( \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left( \prod_{l=\alpha+1}^k \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|\leq 1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}) \right)^q dt_1 \dots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Во внутренней сумме только одно слагаемое равно 1: то, для которого  $(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}) \in R_{u,u}^{(N)}$  или  $(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}) \in R_{u,u\pm 1}^{(N)}$ ; остальные слагаемые занулятся. Произведение отлично от нуля только если все его множители отличны от нуля, поэтому

$$\begin{aligned} 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} & \left( \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left( \prod_{l=\alpha+1}^k \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|\leq 1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}) \right)^q dt_1 \dots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ & \leq 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \times \left( \text{mes} \{ (t_1, \dots, t_{2k}) \in \Delta^{2k}[0,1] : \right. \\ & \quad \left. |t_{\sigma(2\pi(l))} - t_{\sigma(2\pi(l)-1)}| \leq 2 \cdot 2^{-N} \quad \forall l = \overline{\alpha+1, k} \} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ & \leq 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \times \left( \text{mes} \{ (t_1, \dots, t_{2k}) \in [0,1]^{2k} : \right. \\ & \quad \left. |t_{\sigma(2\pi(l))} - t_{\sigma(2\pi(l)-1)}| \leq 2 \cdot 2^{-N} \quad \forall l = \overline{\alpha+1, k} \} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ & \leq 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \left( 1^\alpha \cdot \left( 2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 2^{-N} \right)^{k-\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} = \\ & = 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \cdot 2^{\frac{5(k-\alpha)}{2q}} \cdot 2^{-\frac{N(k-\alpha)}{q}} = O(2^{(2-\frac{1}{q}-2H^*)N(k-\alpha)}), \end{aligned}$$

что завершает доказательство сходимости  $I_2^{(N)} \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

**Замечание 3.4.** Рассмотрим математические ожидания повторных интегралов следующего вида

$$J(I^{(m)}, t) := \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^m[0,t]} dB^{(I_m)} \right)$$

для произвольных индексов  $I_m = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}_d^m$ . Без ограничения общности будем считать, что  $i_1, \dots, i_k > 0$ , а  $i_j = 0$  для всех  $j > k$ . Тогда следующее равенство может быть получено изменением порядка интегрирования:

$$J(I^{(m)}, t) = \int_0^t J(\widetilde{I^{(k)}}, \tau) \frac{(t-\tau)^{m-k-1}}{(m-k-1)!} d\tau,$$

где  $\widetilde{I^{(k)}} = (i_1, \dots, i_k)$  и  $J(\widetilde{I^{(k)}}), \tau)$  могут быть вычислены, используя равенство (3.62) и теорему 3.5.

**Пример 3.1.** Рассмотрим следующее одномерное уравнение:

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t^H,$$

в котором  $B_t^H$  — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста  $H \in (1/2, 1)$ ,  $b, \sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — функции класса  $C_b^4$ . Обозначим  $f(x) = (b(x), \sigma(x))$ ,  $B_t = (t, B_t^H)$ . Пусть также задано начальное условие  $X_0 = x$ . Выпишем несколько первых членов асимптотических разложений (3.57) (ограничимся  $N = 2$ ) для решений данного уравнения.

Используя теорему 3.5 и замечание 3.4 можем вычислить повторные интегралы:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^1[0,1]} dB^{(0)} \right) &= \int_0^1 dt = 1, \quad \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^1[0,1]} dB^{(1)} \right) = \mathbb{E} \left( \int_0^1 dB_t^H \right) = 0, \\ \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(0,0)} \right) &= \int_0^1 dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 = \int_0^1 t_2 dt_2 = \frac{1}{2}, \\ \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(0,1)} \right) &= \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(1,0)} \right) = \int_0^1 \mathbb{E} \left( \int_0^{t_2} dB_{t_1}^H \right) dt_2 = 0, \\ \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(1,1)} \right) &= \mathbb{E} \left( \int_0^1 dB_{t_2}^H \int_0^{t_2} dB_{t_1}^H \right) = \frac{1}{1!2^2} \cdot 2 \cdot 2H(2H-1) \times \\ &\times \int_{\Delta^2[0,1]} |t_2 - t_1|^{2H-2} dt_1 dt_2 = H(2H-1) \int_0^1 dt_2 \int_0^{t_2} (t_2 - t_1)^{2H-2} dt_1 = \\ &= H \int_0^1 t_2^{2H-1} dt_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Для данного уравнения имеем операторы  $D_f^{(0)} = b(x) \frac{\partial}{\partial x}$  и  $D_f^{(1)} = \sigma(x) \frac{\partial}{\partial x}$ . Нетрудно вычислить, что

$$D_f^{(0,0)} = b(x) D b(x) \frac{\partial}{\partial x} + b^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D_f^{(1,1)} = \sigma(x) D \sigma(x) \frac{\partial}{\partial x} + \sigma^2(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Таким образом, согласно теореме 3.4, для  $\mathbf{P}_t g(x)$ ,  $g \in C_b^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  справедливо асимптотическое разложение следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t g(x) &= g(x) + t b(x) D g(x) + \frac{1}{2} t^2 (b(x) D b(x) D g(x) + b^2(x) D^2 g(x)) + \\ &+ \frac{1}{2} t^{2H} (\sigma(x) D \sigma(x) D g(x) + \sigma^2(x) D^2 g(x)) + O(t^{3H}). \end{aligned}$$



### 3.5 Коммутативный случай

В данном разделе будем предполагать, что компоненты  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  правой части уравнения (3.1) являются векторными полями из класса  $C_b^{d+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  такими, что справедливо равенство  $D_f^{(i)} \circ D_f^{(j)} = D_f^{(j)} \circ D_f^{(i)}$ , для любых  $0 \leq i, j \leq d$ .

Для каждого  $i = \overline{0, d}$  обозначим через  $(e^{tD_f^{(i)}})_{t \in \mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  семейство операторов, определяемое соотношением  $e^{tD_f^{(i)}}(x) = X_t^x$  для любых  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , в котором  $X_t^x$  — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dX_t}{dt} = f_i(X_t)$$

с начальным условием  $X_0 = x$ .

**Предложение 3.6.** Для решения  $X_t^x$  уравнения (3.1) с начальным условием  $X_0 = x$  п. н. справедлива следующая формула:

$$X_t^x = F(x, B_t), \quad t \in [0, T], \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

в которой  $F(x, y) = e^{y_0 D_f^{(0)}} \circ \dots \circ e^{y_d D_f^{(d)}}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d+1}$ .

**Доказательство.** Поскольку операторы  $D_f^{(i)}$  коммутируют, потоки  $(e^{tD_f^{(i)}})_{t \geq 0}$  также коммутируют. Для пары  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d+1}$  обозначим

$$F(x, y) = \left( e^{y_0 D_f^{(0)}} \circ \dots \circ e^{y_d D_f^{(d)}} \right) (x).$$

Применяя формулу Ито, легко видеть, что процесс  $\left( e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x \right)_{t \geq 0}$  является решением уравнения  $dX_t = f_d(X_t) dB_t^{(d)}$ . Применяя формулу Ито еще раз и учитывая коммутативность операторов  $D_f^{(d)}$ ,  $D_f^{(d-1)}$ , получим:

$$\begin{aligned} d \left( e^{B_t^{(d-1)} D_f^{(d-1)}} (e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x) \right) &= f_{d-1} \left( e^{B_t^{(d-1)} D_f^{(d-1)}} (e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x) \right) dB_t^{(d-1)} \\ &+ f_d \left( e^{B_t^{(d-1)} D_f^{(d-1)}} (e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x) \right) dB_t^{(d)}. \end{aligned}$$

И так далее. Путем последовательного применения формулы Ито, заключаем, что процесс  $(F(x, B_t))_{t \geq 0}$  удовлетворяет уравнению (3.1) с начальным условием  $X_0 = x$ . Таким образом, согласно теореме 3.1, можем сделать вывод, что

$$X_t^x = F(x, B_t), \quad t \in [0, T],$$

п.н. Предложение доказано.

**Теорема 3.6.** Для любой функции  $g \in C_b^{d+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  справедливо равенство

$$\mathbb{E}(g(X_t^x)) = \left( \exp \left( tD_f^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d t^{2H_i} (D_f^{(i)})^2 \right) g \right) (x).$$

Другими словами, функция

$$\varphi(t, x) = \mathbb{E}(g(X_t^x)),$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_f^{(0)} \varphi + \sum_{i=1}^d H_i t^{2H_i-1} (D_f^{(i)})^2 \varphi, \quad (3.100)$$

с начальным условием

$$\varphi(0, x) = g(x).$$

**Доказательство.** Применяя формулу Ито для дробного броуновского движения из [20], получим для  $i > 0$ :

$$\mathbb{E} \left( g(e^{B_t^{(i)} D_f^{(i)}}(x)) \right) = g(x) + H_i \int_0^t s^{2H_i-1} \mathbb{E} \left( (D_f^{(i)})^2 g(e^{B_s^{(i)} D_f^{(i)}}(x)) \right) ds.$$

Если  $i = 0$ , то для  $B_t^{(0)} = t$  будем иметь следующее равенство

$$g(e^{B_t^{(0)} D_f^{(0)}}(x)) = g(x) + \int_0^t D_f^{(0)} g(e^{B_s^{(0)} D_f^{(0)}}(x)) ds.$$

Последние два равенства означают, что функции  $u_i(t, x) = \mathbb{E} \left( g(e^{B_t^{(i)} D_f^{(i)}}(x)) \right)$  являются решениями следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} &= H_i t^{2H_i-1} (D_f^{(i)})^2 u_i, \quad i > 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} &= D_f^{(0)} u_0, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left( g(e^{B_t^{(i)} D_f^{(i)}}(x)) \right) &= \left( \exp \left( \frac{1}{2} t^{2H_i} (D_f^{(i)})^2 \right) g \right) (x), \quad i > 0, \\ g(e^{B_t^{(0)} D_f^{(0)}}(x)) &= \left( \exp \left( t D_f^{(0)} \right) g \right) (x). \end{aligned}$$

Согласно предложению 3.6, п.н. верно равенство

$$X_t^x = (e^{B_t^{(0)} D_f^{(0)}} \circ \dots \circ e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}})(x).$$

Используя коммутативность операторов  $D_f^{(i)}$  и  $D_f^{(j)}$ , можем записать, что

$$\mathbb{E}(g(X_t^x)) = \left( \exp \left( t D_f^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d t^{2H_i} (D_f^{(i)})^2 \right) g \right)(x),$$

что, в свою очередь, доказывает теорему.

**Замечание 3.5.** Если компоненты правой части  $f_i \in \mathbb{C}^{d+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  автономны, а операторы  $D_f^{(i)}$  и  $D_f^{(j)}$  коммутируют, то функция  $\mathbb{E}(g(X_t^x))$  удовлетворяет уравнению (3.100), которое является обобщением обратного уравнения Колмогорова [14, теорема 8.1.1] на случай дробного броуновского движения с различными индексами Харста, вообще говоря отличными от  $1/2$ .

**Пример 3.2.** Рассмотрим следующее одномерное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = \sin X_t dt + 2H^{-1} \sin X_t dB_t^H,$$

в котором  $B_t^H$  — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста  $H \in (1/3, 1)$ . Пусть также задано начальное условие  $X_0 = x \in \mathbb{R}$ .

Для данного уравнения имеем операторы  $D_f^{(0)} = \sin x \frac{\partial}{\partial x}$  и  $D_f^{(1)} = 2H^{-1} \sin x \frac{\partial}{\partial x}$ . Нетрудно видеть, что указанное уравнение удовлетворяет коммутативному случаю, поскольку

$$D_f^{(0)} \circ D_f^{(1)} = 2H^{-1} \sin x \cos x \frac{\partial}{\partial x} + 2H^{-1} \sin^2 x \frac{\partial^2}{\partial x^2} = D_f^{(1)} \circ D_f^{(0)}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что  $(D_f^{(1)})^2 = H^{-1} \sin 2x \frac{\partial}{\partial x} + 4H^{-2} \sin^2 x \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Поэтому, согласно теореме 3.6, функция  $\varphi(t, x) = \mathbb{E} g(X_t^x)$  будет являться решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (\sin x + t^{2H-1} \sin 2x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4t^{2H-1}}{H} \sin^2 x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

с начальным условием  $\varphi(0, x) = g(x)$ .

# ГЛАВА 4

## МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  заданы  $d$ -мерное стандартное броуновское движение  $W(t)$  и  $d$ -мерное дробное броуновское движение  $B(t)$  с показателем Харста  $H \in (1/2, 1)$ .

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (4.1)$$

где  $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $\sigma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  — детерминированные функции.

**Определение 4.1.** Под решением уравнения (4.1) понимаем процесс  $x(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , заданный на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , согласованный с потоком  $\sigma$ -алгебр  $\mathcal{F}_t$ , порожденным процессами  $W(t)$  и  $B(t)$ , такой, что выполняются условия:

- 1) существует  $\alpha > 1 - H$  такое, что процесс  $x(t)$  имеет п.н. непрерывные по Гельдеру с показателем  $\alpha$  траектории;
- 2) для любого  $t \in \mathbb{R}^+$  почти наверное выполняется равенство

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s))ds + \int_0^t g(s, x(s))dW(s) + \int_0^t \sigma(s, x(s))dB(s),$$

где интеграл по процессу  $W(t)$  — стохастический интеграл Ито, а интеграл по процессу  $B(t)$  — потраекторный интеграл Римана-Стилтьеса [32].

*Замечание 4.1.* Иногда рассматривают решения, допускающие взрывы за конечное время. В этом случае решение  $x(t)$  определяется для  $t < \tau$ , где  $\tau$  — так называемый момент взрыва ( $\mathcal{F}_t$ -момент остановки, такой что  $\lim_{t \rightarrow \tau-0} \|x(t)\| = \infty$  при  $\tau < \infty$ ), а непрерывность траекторий по Гельдеру предполагается до момента  $\tau$ .

Пусть функция  $F(t, x)$  непрерывна вместе со своими производными  $F'_t(t, x)$ ,  $F'_x(t, x)$ ,  $F''_{x^2}(t, x)$ . Если функции  $f$ ,  $g$  измеримы по Борелю, функция  $\sigma$  удовлетворяет  $(\delta, \rho)$ -условию Гельдера по  $(t, x)$  при некоторых  $\delta > 1 - H$ ,  $\rho > 2 - 2H$ , а решение  $x(t)$  имеет непрерывные по Гельдеру порядка  $\alpha$

траектории п.н. при  $\alpha\rho > 1$ , то имеет место аналог формулы Ито [44, Р. 184]:

$$\begin{aligned}
F(t, x(t)) = & F(0, x(0)) + \\
& + \int_0^t \left( F'_t(\tau, x(\tau)) + F'_x(\tau, x(\tau))f(\tau, x(\tau)) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \text{tr}(F''_{xx}(\tau, x(\tau))g(\tau, x(\tau))g^T(\tau, x(\tau))) \right) d\tau + \\
& + \int_0^t F'_x(\tau, x(\tau))g(\tau, x(\tau))dW(\tau) + \int_0^t F'_x(\tau, x(\tau))\sigma(\tau, x(\tau))dB(\tau). \quad (4.2)
\end{aligned}$$

## 4.1 Методы интегрирования одномерных уравнений смешанного типа

В данном параграфе будем рассматривать одномерное уравнение (4.1), т.е.  $d = 1$ . В рамках настоящего параграфа будем предполагать, что коэффициенты рассматриваемых уравнений являются достаточно гладкими функциями, обеспечивающими возможность достаточного числа дифференцирований и применений формулы замены переменных (4.2).

### 4.1.1 Приведение к простейшим уравнениям

Рассмотрим простейшее уравнение

$$dy(t) = u(t)dt + v(t)dW(t) + b(t)dB(t), \quad t \geq 0. \quad (4.3)$$

Решение уравнения (4.3) выражается следующей формулой:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)dW(\tau) + \int_0^t b(\tau)dB(\tau), \quad t \geq 0.$$

Найдем класс уравнений (4.1), приводимых к (4.3) с помощью дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно  $x$  преобразования  $y = F(t, x)$  посредством формулы Ито (4.2) в предположении, что функции  $f$ ,  $g$ ,  $\sigma$  обладают производными требуемых порядков для последующих вычислений. В соответствии с формулой Ито, должны быть справедливы

соотношения:

$$u(t) = F'_t(t, x) + F'_x(t, x)f(t, x) + \frac{1}{2}F''_{x^2}(t, x)g^2(t, x), \quad (4.4)$$

$$v(t) = F'_x(t, x)g(t, x), \quad (4.5)$$

$$b(t) = F'_x(t, x)\sigma(t, x). \quad (4.6)$$

Из соотношений (4.5), (4.6) следует, что  $\frac{v(t)}{g(t, x)} = \frac{b(t)}{\sigma(t, x)}$ , или  $\frac{\sigma(t, x)}{g(t, x)} = \frac{b(t)}{v(t)} := q(t)$ . Также из соотношения (4.5) очевидным образом можно выразить следующие производные функции  $F$ :

$$F'_x = \frac{v}{g}, \quad F''_{x^2} = -\frac{vg'_x}{g^2}, \quad F''_{tx} = \frac{v'g - vg'_t}{g^2}. \quad (4.7)$$

Дифференцируя соотношение (4.4) по  $x$  и используя полученные формулы для  $F'_x, F''_{x^2}, F''_{tx}$ , получим:

$$\begin{aligned} F''_{tx} + F''_{x^2}f + F'_xf'_x + \frac{1}{2}F'''_{x^3}g^2 + F''_{x^2}g'_xg &= 0, \\ \frac{v'g - vg'_t}{g^2} - \frac{vg'_xf}{g^2} + \frac{vf'_x}{g} - \frac{vg''_{x^2}g^2 - 2vg(g'_x)^2}{2g^2} - \frac{v(g'_x)^2}{g} &= 0, \\ \frac{v'}{v} = g \left( \frac{g'_t}{g^2} + \frac{g'_xf}{g^2} - \frac{f'_x}{g} + \frac{1}{2}g''_{x^2} \right) &= g \left( \frac{g'_t}{g^2} + \left( \frac{f}{g} \right)'_x + \frac{1}{2}g''_{x^2} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Левая часть последнего соотношения зависит лишь от  $t$ , поэтому на функции  $f, g, \sigma$  накладываются следующие ограничения:

$$g(t, x) \left( \frac{g'_t(t, x)}{g^2(t, x)} + \left( \frac{f(t, x)}{g(t, x)} \right)'_x + \frac{1}{2}g''_{x^2}(t, x) \right) = r(t), \quad (4.9)$$

$$\frac{\sigma(t, x)}{g(t, x)} = q(t) \quad (4.10)$$

для некоторых функций  $r(t), q(t)$ .

Обратно, пусть заданные функции  $f, g, \sigma$  удовлетворяют условиям (4.9), (4.10). Тогда из соотношения (4.8) находим функцию  $v(t) = \exp \left( \int_0^t r(\tau) d\tau \right)$  (как любое нетривиальное решение линейного однородного уравнения). Из соотношения (4.7) найдем  $F(t, x) = v(t) \int_0^x \frac{ds}{g(t, s)}$ , причем ввиду того, что  $v \neq 0$ ,  $F'_x = \frac{v}{g} \neq 0$ , т.е. функция  $F$  будет обратима по  $x$ . Зная функцию  $F$ , из соотношений (4.4), (4.6) однозначно определяем функции  $u(t)$  и  $b(t)$ . Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.1.** Уравнение (4.1) с  $g(t, x) \neq 0$  приводимо к уравнению (4.3) с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно  $x$  преобразования  $y = F(t, x)$  тогда и только тогда, когда найдутся функции  $q(t), r(t)$  такие, что оказываются выполненными соотношения (4.9), (4.10).

**Предложение 4.1.** Пусть заданы скалярные функции  $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ , при этом  $\beta(t) \neq 0$ . Тогда решение линейного однородного уравнения

$$dx(t) = \alpha(t)x(t)dt + \beta(t)x(t)dW(t) + \gamma(t)x(t)dB(t), \quad t \geq 0, \quad (4.11)$$

с начальным условием  $x(0) = x_0 > 0$  выражается формулой

$$x(t) = x_0 \exp \left( \int_0^t \left( \alpha(\tau) - \frac{1}{2}\beta^2(\tau) \right) d\tau + \int_0^t \beta(\tau)dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau)dB(\tau) \right)$$

**Доказательство.** Нетрудно проверить, что функции  $f(t, x) = \alpha(t)x$ ,  $g(t, x) = \beta(t)x$ ,  $\sigma(t, x) = \gamma(t)x$  удовлетворяют условиям (4.9), (4.10), причем  $\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}$ , т.е.  $\ln \left( \frac{v(t)}{\beta(t)} \right)' = 0$ . Можно выбрать функцию  $v(t) = \beta(t)$ . Тогда  $F'_x = \frac{1}{x}$ , и, в свою очередь, можно выбрать преобразование  $F = \ln x$ . Из соотношений (4.4), (4.5) находим, что  $u(t) = \alpha(t) - \frac{1}{2}\beta(t)$ ,  $b(t) = \gamma(t)$ . Так как  $y(t) = \ln x(t)$ , то  $x(t) = e^{y(t)}$  и следовательно, имеет место формула

$$x(t) = C \exp \left( \int_0^t \left( \alpha(\tau) - \frac{1}{2}\beta^2(\tau) \right) d\tau + \int_0^t \beta(\tau)dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau)dB(\tau) \right),$$

где  $C = e^{y(0)}$ . Подставляя в формулу  $t = 0$ , находим величину  $C = x(0)$ , что и требовалось.

**Замечание 4.2.** Непосредственной подстановкой найденной формулы для решения в уравнение (4.11) можно убедиться, что данная формула сохраняет силу, в том числе, если опустить условия  $\beta(t) \neq 0$  и  $x_0 > 0$ . Нетрудно видеть, что почти все траектории решения уравнения (4.11) непрерывны по Гельдеру с любым показателем  $\kappa < 1/2$ .

**Предложение 4.2.** Решение линейного неоднородного уравнения

$$dx(t) = (\alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t))dt + (\beta_1(t)x(t) + \beta_2(t))dW(t) + (\gamma_1(t)x(t) + \gamma_2(t))dB(t), \quad t \geq 0,$$

выражается по формуле

$$x(t) = x_0(t) \left( x(0) + \int_0^t \frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} dW(\tau) + \int_0^t \frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)} dB(\tau) \right),$$

в которой  $x_0(t) = \exp \left( \int_0^t (\alpha_1(\tau) - \frac{1}{2}\beta_1^2(\tau)) d\tau + \int_0^t \beta_1(\tau) dW(\tau) + \int_0^t \gamma_1(\tau) dB(\tau) \right)$  есть решение соответствующего линейного однородного уравнения с начальным условием  $x_0(0) = 1$ .

**Доказательство.** Положим  $x(t) = x_0(t)y(t)$ . Определим уравнение

$$dy(t) = u(t, y(t))dt + v(t, y(t))dW(t) + b(t, y(t))dB(t), \quad t \geq 0,$$

которому удовлетворяет процесс  $y(t)$ . Применим формулу Ито к процессу  $y = \frac{x}{x_0} = F(x, x_0)$ , рассматривая пару  $\bar{x} = (x, x_0)$  как решение двумерного уравнения

$$d\bar{x}(t) = (\bar{\alpha}_1(t)\bar{x}(t) + \bar{\alpha}_2(t))dt + p(t, \bar{x}(t))d\bar{W}(t) + (\bar{\gamma}_1(t)\bar{x}(t) + \bar{\gamma}_2(t))dB(t),$$

с начальным условием  $\bar{x}(0) = (x(0), 1)^T$ , где  $\bar{\alpha}_1 = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_1)$ ,  $\bar{\gamma}_1 = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_1)$ ,  $\bar{\alpha}_2 = (\alpha_2, 0)^T$ ,  $\bar{\gamma}_2 = (\gamma_2, 0)^T$ ,  $p = \text{diag}(\beta_1 x + \beta_2, \beta_1 x_0)$ ,  $\bar{W} = (W, W)^T$ . Ввиду того, что справедливы соотношения

$$F'_t = 0, \quad F'_{\bar{x}} = \left( \frac{1}{x_0}, -\frac{x}{x_0^2} \right), \quad F''_{\bar{x}^2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x_0^2} \\ -\frac{1}{x_0^2} & \frac{2x}{x_0^3} \end{pmatrix},$$

будем иметь:

$$dy = \left( \frac{\alpha_2}{x_0} - \frac{\beta_1\beta_2}{x_0} \right) dt + \frac{\gamma_2}{x_0} dB + \frac{\beta_2}{x_0} dW.$$

Итак, получили простейшее уравнение для  $y(t)$ , причем  $y(0) = \frac{x(0)}{x_0(0)} = x(0)$ . Таким, образом, решение исходного уравнения выражается формулой

$$x(t) = x_0(t)y(t) = x_0(t) \left( x(0) + \int_0^t \frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} dW(\tau) + \int_0^t \frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)} dB(\tau) \right),$$

что и требовалось.



**Пример 4.1.** Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$dx(t) = -2t \cdot x(t)dt + t^{1-H}x(t)dB(t), \quad t \geq 0,$$

С учетом предложения 4.1 и замечания 4.2 его решение может быть выражено формулой

$$x(t) = x(0) \exp \left( -t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau) \right).$$

Докажем, что нулевое решение рассматриваемого уравнения устойчиво по вероятности, то есть для любых  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  найдется  $\delta > 0$  такая, что для любого решения с начальным значением  $x(0)$  таким, что  $|x(0)| < \delta$  п.н., выполнено неравенство  $\mathbb{P}\{\sup_{t \geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$ .

Используя явную формулу для решения, получим:

$$\mathbb{P}\{\sup_{t \geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} = \mathbb{P}\left\{\sup_{t \geq 0} \left( -t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau) \right) > \ln \frac{\varepsilon_1}{|x(0)|} \right\}.$$

Применим неравенство Чебышева:

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t \geq 0} \left( -t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau) \right) > \ln \frac{\varepsilon_1}{|x(0)|} \right\} \leq \frac{\mathbb{E} \sup_{t \geq 0} \left( -t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau) \right)}{\ln \varepsilon_1 - \ln |x(0)|}$$

Оценим интеграл, используя неравенство Лав-Янга (см. предложение 1.2):

$$\int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau) \leq C \cdot V_1(\tau^{1-H}, [0, t]) \cdot V_{1/H}(B(\tau), [0, t]) \leq Ct^{1-H} \|B\|_H t^H = Ct \|B\|_H.$$

Здесь  $C = \zeta(1 + 1/H)$ ,  $\zeta$  — дзета-функция Римана, а в последнем переходе использовалась монотонность функции  $\tau^{1-H}$  и связь  $1/H$ -вариации с нормой Гельдера с показателем  $H$  [27, с. 170]. Таким образом,

$$\mathbb{P}\{\sup_{t \geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} \leq \frac{\mathbb{E} \sup_{t \geq 0} t(C\|B\|_H - t)}{\ln \varepsilon_1 - \ln |x(0)|} \leq \frac{\frac{1}{4}C^2 \mathbb{E} \|B\|_H^2}{\ln \varepsilon_1 - \ln |x(0)|}.$$

Потребовав, чтобы правая часть последнего неравенства была меньше  $\varepsilon_2$ , получим значение  $\delta$ :

$$|x(0)| < \varepsilon_1 \exp \left( -\frac{C^2 \mathbb{E} \|B\|_H^2}{4\varepsilon_2} \right) =: \delta.$$

#### 4.1.2 Приведение к линейным неоднородным уравнениям

Ограничимся рассмотрением автономных уравнений

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (4.12)$$

а также поиском автономной замены  $y = F(x)$ , приводящей указанное уравнение к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (\alpha_1 y(t) + \alpha_2)dt + (\beta_1 y(t) + \beta_2)dW(t) + (\gamma_1 y(t) + \gamma_2)dB(t), \quad t \geq 0 \quad (4.13)$$

с постоянными коэффициентами  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ . Согласно формуле Ито должны выполняться соотношения

$$\alpha_1 F(x) + \alpha_2 = F'(x)f(x) + \frac{1}{2}F''(x)g^2(x), \quad (4.14)$$

$$\beta_1 F(x) + \beta_2 = F'(x)g(x), \quad (4.15)$$

$$\gamma_1 F(x) + \gamma_2 = F'(x)\sigma(x). \quad (4.16)$$

Решая линейные неоднородные по  $F$  уравнения (4.15), (4.16), находим функцию  $F$ :

$$F(x) = C_\beta \exp\left(\beta_1 \int_0^x \frac{ds}{g(s)}\right) - \frac{\beta_2}{\beta_1} = C_\gamma \exp\left(\gamma_1 \int_0^x \frac{ds}{\sigma(s)}\right) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Подставляя в последнюю формулу значение  $x = 0$ , легко найти константы  $C_\beta = F(0) + \frac{\beta_2}{\beta_1}$  и  $C_\gamma = F(0) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ . Далее ограничимся случаем  $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ . Тогда на выбор функций  $g, \sigma$  накладывается ограничение

$$\beta_1 \int_0^x \frac{ds}{g(s)} = \gamma_1 \int_0^x \frac{ds}{\sigma(s)},$$

дифференцируя которое, выводим соотношение

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = \frac{\gamma_1}{\beta_1} = \text{const.}$$

Обозначим  $G(x) = \int_0^x \frac{ds}{g(s)}$ . Подставим выражение для функции  $F(x) = C_\beta e^{\beta_1 G(x)} - \frac{\beta_2}{\beta_1}$  в формулу (4.14):

$$\begin{aligned} \alpha_1 C_\beta e^{\beta_1 G(x)} + \frac{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}{\beta_1} &= C_\beta e^{\beta_1 G(x)} \frac{\beta_1}{g} f + \\ &+ \left( C_\beta e^{\beta_1 G(x)} \frac{\beta_1^2}{2g^2} - C_\beta e^{\beta_1 G(x)} \frac{\beta_1 g'}{2g^2} \right) g^2, \\ e^{\beta_1 G(x)} \left( \beta_1 \left( \frac{f}{g} - \frac{g'}{2} \right) + \frac{\beta_1^2}{2} - \alpha_1 \right) &= \frac{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}{\beta_1 C_\beta} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Обозначим  $A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}$  и продифференцируем последнее соотношение. Получим:

$$\beta_1 e^{\beta_1 G(x)} \left( A'(x) + \beta_1 \frac{A(x)}{g(x)} + \left( \frac{\beta_1^2}{2} - \alpha_1 \right) \frac{1}{g(x)} \right) = 0. \quad (4.18)$$

Умножим последнее равенство на  $\frac{g(x)}{\beta_1} e^{\beta_1 G(x)}$  и полученное равенство вновь продифференцируем. Будем иметь:

$$(g(x)A'(x))' + \beta_1 A'(x) = 0.$$

Если, к тому же,  $A'(x) \neq 0$ , то

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = -\beta_1 = \text{const.}$$

Таким образом, необходимо выполнение следующих условий:

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}, \quad (4.19)$$

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = c_1, \quad (4.20)$$

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = c_2, \quad (4.21)$$

для некоторых постоянных  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Обратно, пусть заданные функции  $f(x), g(x), \sigma(x)$  удовлетворяют соотношениям (4.19), (4.20), (4.21). Тогда положим  $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$ ,  $\beta_1 = -c_1$ ,  $\gamma_1 = c_2 \beta_1$  и выберем преобразование  $F(x) = e^{\beta_1 G(x)}$ . Тогда легко проверить, что соотношения (4.15) и (4.16) выполнены. Осталось подобрать  $\alpha_1, \alpha_2$  так чтобы выполнялось соотношение (4.14). Поскольку  $(g(x)A'(x))' + \beta_1 A'(x) = 0$ , то величина  $g(x)A'(x) + \beta_1 A(x) = c_3$ ,  $c_3 \in \mathbb{R}$  — константа. Значит,  $A'(x) + \beta_1 \frac{A(x)}{g(x)} = \frac{c_3}{g(x)}$  и соотношение (4.18) диктует выбор константы  $\alpha_1 = \frac{\beta_1^2}{2} + c_3$ . Теперь интегрируя соотношение (4.18), получим соотношение (4.17). Согласно (4.18) выражение в левой части (полностью определяемое заданными функциями  $f, g$ ) будет константой. При указанном выборе эта константа совпадает с  $\alpha_2$ . Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.2.** Уравнение (4.12) с  $g(x) \neq 0$ ,  $A'(x) \neq 0$  приводимо к уравнению (4.13) тогда и только тогда, когда найдутся постоянные  $c_1, c_2$  такие, что оказываются выполненными соотношения (4.19), (4.20), (4.21).

**Предложение 4.3.** Уравнение бернуллиевского типа

$$dx(t) = (\alpha x^n(t) + \beta x(t))dt + \gamma x(t)dW(t) + \delta x(t)dB(t)$$

приводится к линейному неоднородному уравнению.

**Доказательство.** В данном случае  $G(x) = \int_1^x \frac{ds}{\gamma s} = \frac{1}{\gamma} \ln x$ ,  $A(x) = \frac{\alpha}{\gamma} x^{n-1} + \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{2}$ ,  $A'(x) = \frac{\alpha(n-1)}{\gamma} x^{n-2}(t)$ ,  $(g(x)A'(x))' = \alpha(n-1)^2 x^{n-2}(t)$ ,  $\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = \gamma(n-1) = c_1$ . Выберем преобразование  $F(x) = C_\beta e^{-c_1 G(x)} = C_\beta x^{1-n}$ . Подставляя функцию  $F(x)$  в (4.15), найдем значение константы  $C_\beta = \frac{1}{1-n}$ . Итак,  $y = F(x) = \frac{1}{1-n} x^{1-n}$ ,  $x = ((1-n)y)^{1/(1-n)}$ .

Уже найдены значения  $\beta_1 = -c_1 = \gamma(1-n)$ ,  $\gamma_1 = \delta(1-n)$ . Далее имеем:

$$\begin{aligned} c_3 &= \gamma x A'(x) + \beta_1 A(x) = -\beta(n-1) + \frac{\gamma^2(n-1)}{2}, \\ \alpha_1 &= (n-1) \left( -\beta + \frac{\gamma^2 n}{2} \right), \\ \alpha_2 &= C_\beta e^{\beta_1 G(x)} \left( \beta_1 A(x) + \frac{\beta_1^2}{2} - \alpha_1 \right) = \frac{1}{1-n} = -F(x) \gamma x A'(x) = \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, исходное уравнение сводится к следующему линейному неоднородному уравнению:

$$\begin{aligned} dy(t) &= \left( \alpha + (n-1) \left( -\beta + \frac{\gamma^2 n}{2} \right) y(t) \right) dt + \\ &+ \gamma(1-n)y(t)dW(t) + \delta(1-n)y(t)dB(t), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

### 4.1.3 Переход к уравнению Стратоновича

Наряду с уравнением (4.1) рассмотрим соответствующее уравнение Стратоновича

$$dx(t) = (f(t, x(t)) - c(t, x(t)))dt + g(t, x(t)) \circ dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (4.22)$$

где  $c(t, x) = \frac{1}{2} g'_x(t, x) g(t, x)$ .

Поскольку, решения смешанных уравнений, вообще говоря, не являются семимартингалами, то понятие интеграла Стратоновича требует дополнительных разъяснений.

Во-первых, отметим, что решения смешанных уравнений (4.1) имеют конечную квадратическую вариацию  $[x](t)$  в силу того, что процесс

$$\int_0^t f(s, x(s)) ds, \quad t \geq 0,$$

абсолютно непрерывен, а процесс

$$\int_0^t \sigma(s, x(s)) dB(s), \quad t \geq 0,$$

имеет непрерывные по Гельдеру траектории порядка  $\kappa > 1/2$ . Более того,

$$[x](t) = \int_0^t g^2(s, x(s)) ds.$$

Следуя [51], для непрерывных процессов  $X(t)$ ,  $Y(t)$  с конечной квадратической вариацией определим прямой, обратный и симметрический стохастические интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^t Y(s) d^- X(s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^t Y(s) \frac{X(s + \varepsilon) - X(s)}{\varepsilon} ds, \\ \int_0^t Y(s) d^+ X(s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^t Y(s) \frac{X(s) - X((s - \varepsilon) \vee 0)}{\varepsilon} ds, \\ \int_0^t Y(s) d^\circ X(s) &= \frac{1}{2} \int_0^t Y(s) d^- X(s) + \frac{1}{2} \int_0^t Y(s) d^+ X(s). \end{aligned}$$

Квадратической ковариацией процессов  $X$ ,  $Y$  называется процесс

$$[X, Y](t) = \int_0^t Y(s) d^+ X(s) - \int_0^t Y(s) d^- X(s).$$

Прямой и симметрический стохастические интегралы  $\int_0^t Y(s) d^- X(s)$ ,  $\int_0^t Y(s) d^\circ X(s)$  являются расширением интегралов Ито и Стратоновича соответственно на класс непрерывных процессов с конечной квадратической вариацией.

Пусть функция  $F(t, x)$  имеет непрерывные частные производные  $F'_t$ ,  $F'_x$ ,  $F''_{x^2}$ . Тогда процесс  $y(t) = F(t, x(t))$  является непрерывным, имеет конечную

квадратическую вариацию. Так как стохастические дифференциалы процессов  $y(t)$ ,  $W(t)$  имеют вид

$$\begin{aligned} dy(t) &= \left( F'_t(t, x(t)) + F'_x(t, x(t))f(t, x(t)) + \frac{1}{2}F''_{xx}(t, x(t))g^2(t, x(t)) \right) dt + \\ &+ F'_x(t, x(t))g(t, x(t))dW(t) + F'_x(t, x(t))\sigma(t, x(t))dB(t), \\ dW(t) &= 0 \cdot dt + 1 \cdot dW(t) + 0 \cdot dB(t), \end{aligned}$$

то квадратическая ковариация процессов  $y(t)$  и  $W(t)$  равна

$$[y, W](t) = \int_0^t F'_x(s, x(s))g(s, x(s))ds.$$

С другой стороны, в силу определения прямого и симметрического стохастических интегралов имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t F(s, x(s)) \circ dW(s) &= \int_0^t F(s, x(s))dW(s) + \frac{1}{2}[F(\cdot, x(\cdot)), W(\cdot)](t) = \\ &= \int_0^t F(s, x(s))dW(s) + \frac{1}{2} \int_0^t F'_x(s, x(s))g(s, x(s))ds. \end{aligned}$$

Полагая  $F(t, x) = g(t, x)$ , заключаем, что процесс  $x(t)$  является решением уравнения (4.1) тогда и только тогда, когда процесс  $x(t)$  является решением уравнения Стратоновича (4.22).

*Замечание 4.3.* Легко видеть, что проведенные рассуждения также сохраняют силу в случае многомерного уравнения (4.1) и соответствующего уравнения Стратоновича.

**Пример 4.2.** Для уравнения

$$dx(t) = x^3(t)dt + x^2(t)dW(t) + x^2(t)dB(t), \quad x(0) = x_0,$$

соответствующее уравнение Стратоновича имеет вид

$$dx(t) = x^2(t) \circ dW(t) + x^2(t)dB(t).$$

Последнее уравнение имеет решение

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(W(t) + B(t))},$$

которое является решением и исходного уравнения.

## 4.2 Дифференциальные уравнения для математических ожиданий и плотностей распределений решений

В этом параграфе рассматриваем автономное уравнение (4.1), т.е.

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0.$$

Будем предполагать, что выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность решений автономного уравнения (4.1).

Через  $C_{\text{Lin}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  обозначим множество всех непрерывно дифференцируемых функций  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ , имеющих линейный порядок роста. В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты  $\tilde{f} = f - \frac{1}{2}g'_x g$ ,  $g_j$ ,  $\sigma_j$  ( $j = 1, \dots, d$ ) принадлежат множеству  $C_{\text{Lin}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ .

Рассмотрим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dz(t) = h(z(t))dt, \quad t \in \mathbb{R},$$

где  $h = \text{col}(h^1, \dots, h^d) \in C_{\text{Lin}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , и обозначим через

$$z^y(t) = \alpha_h(y, t) = \text{col}(\alpha_h^1(y, t), \dots, \alpha_h^d(y, t))$$

решение (единственное) данного уравнения с начальным условием  $\alpha_h(y, 0) = y$ .

**Предложение 4.4.** *Функция  $\alpha_h(y, t)$  удовлетворяет системе уравнений*

$$\frac{\partial \alpha_h^j(y, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^d h^i(y) \frac{\partial \alpha_h^j(y, t)}{\partial y_i}, \quad j = 1, \dots, d, \quad t \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

*и начальному условию  $\alpha_h(y, 0) = y$ .*

**Доказательство.** Возьмем произвольные  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_h^j(y, t)}{\partial t} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha_h^j(y, t+r) - \alpha_h^j(y, t)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha_h^j(\alpha_h(y, r), t) - \alpha_h^j(y, t)}{r} = \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{\partial \alpha_h^j(y, t)}{\partial y_i} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha_h^i(y, r) - x_i}{r} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial \alpha_h^j(y, t)}{\partial y_i} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \int_0^r h^i(\alpha_h(y, s)) ds = \\ &= \sum_{i=1}^d h^i(y) \frac{\partial \alpha_h^j(y, t)}{\partial y_i}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из предложения 4.4 вытекает, что  $z^y(t) = T_h(t)y$ , где  $T_h(t) := e^{tM_h}$  —  $C_0$ -полугруппа на  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , порожденная дифференциальным оператором  $M_h : C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \rightarrow C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  действующим по правилу

$$(M_h w)(y) = \text{col} \left( \sum_{i=1}^d h^i(y) \frac{\partial w^1}{\partial y_i}, \dots, \sum_{i=1}^d h^i(y) \frac{\partial w^d}{\partial y_i} \right),$$

где  $w = \text{col}(w^1, \dots, w^d) \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$ .

**Определение 4.2.** Будем говорить, что семейство отображений  $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq C_{\text{Lin}}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  порождает коммутирующие потоки, если для любых  $\alpha, \beta \in A$  операторы  $T_{h_\alpha}(t_1)$ ,  $T_{h_\beta}(t_2)$  перестановочные для любых  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ .

*Замечание 4.4.* Если  $d = 1$ , то легко видеть, что семейство  $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq C_{\text{Lin}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  порождает коммутирующие потоки тогда и только тогда, когда для любого  $\alpha \in A$  найдется постоянная  $\gamma_\alpha$  такая, что  $h_\alpha(x) = \gamma_\alpha \varphi(x)$ , где  $\varphi \in C_{\text{Lin}}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Обозначим  $\Gamma = \{\tilde{f}\} \cup \{g_j | j = 1, \dots, d\} \cup \{b_j | j = 1, \dots, d\}$ . Через  $x^y(t)$  будем обозначать решение автономного уравнения (4.1) с начальным условием  $x(0) = y \in \mathbb{R}^d$ .

Определим функцию  $F : \mathbb{R}^{3d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  следующим образом:

$$F(y, t, s_1, \dots, s_d, \tau_1, \dots, \tau_d) = (T_{\tilde{f}}(t) T_{g_1}(s_1) \dots T_{g_d}(s_d) T_{\sigma_1}(\tau_1) \dots T_{\sigma_d}(\tau_d))(y),$$

где  $y \in \mathbb{R}^d$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $s_j, \tau_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 1, \dots, d$ ).

**Предложение 4.5.** Если семейство  $\Gamma$  порождает коммутирующие потоки, то

$$x^y(t) = F(y, t, W^1(t), \dots, W^d(t), B^1(t), \dots, B^d(t))$$

п.н. для любого  $t \in \mathbb{R}^+$ .

**Доказательство.** Выберем произвольные  $y \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$  и зафиксируем их. Применяя формулу Ито к процессу  $x^y(t)$ , используя при этом условие коммутирования операторов  $T_\alpha(t_1)$ ,  $T_\beta(t_2)$ ,  $\alpha, \beta \in \Gamma$ ,  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , получим соотношения

$$F(y, t, W^1(t), \dots, W^d(t), B^1(t), \dots, B^d(t)) =$$



$$\begin{aligned}
&= F(y, 0, \dots, 0) + \int_0^t \left( \frac{\partial F(y, u, W(u), B(u))}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 F(y, u, W(u), B(u))}{\partial s_j^2} \right) du + \\
&+ \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial F(y, u, W(u), B(u))}{\partial s_j} dW^j(u) + \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial F(y, u, W(u), B(u))}{\partial \tau_j} dB^j(u) = \\
&= y + \int_0^t f(F(y, u, W(u), B(u))) du + \sum_{j=1}^d \int_0^t g_j(F(y, u, W(u), B(u))) dW^j(u) + \\
&+ \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(F(y, u, W(u), B(u))) dB^j(u).
\end{aligned}$$

Непрерывность по Гельдеру траекторий процесса  $x^y(t)$  вытекает из непрерывной дифференцируемости функции  $F$  и непрерывности по Гельдеру с любым показателем  $\alpha < H$  траекторий процесса  $B(t)$ , а также непрерывности по Гельдеру с любым показателем  $\alpha < 1/2$  траекторий процесса  $W(t)$ . Предложение доказано.

**Теорема 4.3.** Пусть семейство  $\Gamma$  порождает коммутирующие потоки, функция  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  вместе со своими частными производными до второго порядка включительно непрерывна и имеет полиномиальный порядок роста. Тогда функция  $u_h(y, t) = E(h(x^y(t)))$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_h(y, t)}{\partial t} &= \sum_{j=1}^d f_j(y) \frac{\partial u_h(y, t)}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^d g_{ik}(y) g_{jk}(y) \frac{\partial^2 u_h(y, t)}{\partial y_i \partial y_j} + \\
&+ \sum_{i,j,k=1}^d H t^{2H-1} \sigma_{ik}(y) \left( \sigma_{jk}(y) \frac{\partial^2 u_h(y, t)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial \sigma_{jk}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial u_h(y, t)}{\partial y_j} \right), \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R}^d,
\end{aligned}$$

и начальному условию  $u_h(y, 0) = h(y)$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$ .

**Доказательство.** Определим функцию  $G_d : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$  следующим образом:

$$G_d(y, \tau_d) = h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)), \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad \tau_d \in \mathbb{R}.$$

Применяя формулу Ито к процессу  $G_d(y, B^d(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ , получим соотношение

$$G_d(y, B^d(t)) = G_d(y, 0) + \int_0^t \frac{\partial G_d(y, B^d(s))}{\partial \tau_d} \diamond dB^d(s) + \int_0^t H s^{2H-1} \frac{\partial^2 G_d(y, B^d(s))}{\partial \tau_d^2} ds, \quad (4.23)$$

где стохастический интеграл в правой части соотношения (4.23) – интеграл Вика-Ито-Скоророда [18].

Используя предложение 4.4, выразим частную производную  $\frac{\partial^2 G_d(y, \tau_d)}{\partial \tau_d^2}$  через частные производные  $\frac{\partial^2 G_d(y, \tau_d)}{\partial y_i \partial y_j}$ ,  $\frac{\partial G_d(y, \tau_d)}{\partial y_i}$ . Получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_d(y, \tau_d)}{\partial \tau_d} &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \frac{\partial \alpha_{\sigma_d}^j(y, \tau_d)}{\partial \tau_d} = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \sigma_d^i(y) \frac{\partial \alpha_{\sigma_d}^j(y, \tau_d)}{\partial y_i}, \\ \frac{\partial^2 G_d(y, \tau_d)}{\partial \tau_d^2} &= \sum_{i,j,k,l=1}^d \frac{\partial^2 h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j \partial y_k} \sigma_d^i(y) \sigma_d^l(y) \frac{\partial \alpha_{\sigma_d}^j(y, \tau_d)}{\partial y_i} \frac{\partial \alpha_{\sigma_d}^k(y, \tau_d)}{\partial y_l} + \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^d \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \sigma_d^i(y) \left( \frac{\partial \sigma_d^k(y)}{\partial y_i} \frac{\partial \alpha_{\sigma_d}^j(y, \tau_d)}{\partial y_k} + \sigma_d^k(y) \frac{\partial^2 \alpha_{\sigma_d}^j(y, \tau_d)}{\partial y_k \partial y_i} \right), \\ \frac{\partial G_d(y, \tau_d)}{\partial y_i} &= \sum_{j=1}^d \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \frac{\partial \alpha_{\sigma_d}^j(y, \tau_d)}{\partial y_i}, \\ \frac{\partial^2 G_d(y, \tau_d)}{\partial y_i \partial y_l} &= \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial^2 h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\partial \alpha_{\sigma_d}^j(y, \tau_d)}{\partial y_i} \frac{\partial \alpha_{\sigma_d}^k(y, \tau_d)}{\partial y_l} + \\ &+ \sum_{j=1}^d \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \frac{\partial^2 \alpha_{\sigma_d}^j(y, \tau_d)}{\partial y_i \partial y_l}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G_d(y, \tau_d)}{\partial \tau_d^2} &= \sum_{i,l=1}^d \frac{\partial^2 G_d(y, \tau_d)}{\partial y_i \partial y_l} \sigma_d^i(y) \sigma_d^l(y) + \sum_{i,k=1}^d \frac{\partial G_d(y, \tau_d)}{\partial y_k} \sigma_d^i(y) \frac{\partial \sigma_d^k(y)}{\partial y_i} = \\ &= (M_{\sigma_d}^2 G_d(\cdot, \tau_d))(y). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Обозначим  $\psi_d(y, t) = EG_d(y, B^d(t))$ . Тогда из соотношений (4.23), (4.24), теоремы Фубини и правила Лейбница вытекает равенство

$$\psi_d(y, t) = \psi_d(y, 0) + \int_0^t H s^{2H-1} (M_{\sigma_d}^2 \psi_d(\cdot, s))(y) ds. \quad (4.25)$$

Из соотношения (4.25) вытекает справедливость соотношения

$$\frac{\partial \psi_d(\cdot, t)}{\partial t} = H t^{2H-1} M_{\sigma_d}^2 \psi_d(\cdot, t). \quad (4.26)$$

Определим функцию  $G_{d-1} : \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  равенством

$$G_{d-1}(y, \tau_{d-1}, t) = \psi_d(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y), t), \quad y \in \mathbb{R}^d, \quad \tau_{d-1} \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

Применяя формулу Ито к процессу  $G_{d-1}(y, B^{d-1}(t), t)$ , получим соотношение

$$\begin{aligned} G_{d-1}(y, B^{d-1}(t), t) &= G_{d-1}(y, 0, 0) + \int_0^t \frac{\partial G_{d-1}(y, B^{d-1}(s), s)}{\partial \tau_{d-1}} \diamond dB^{d-1}(s) + \\ &+ \int_0^t \left( \frac{\partial G_{d-1}(y, B^{d-1}(s), s)}{\partial \tau_d} + Hs^{2H-1} \frac{\partial^2 G_{d-1}(y, B^{d-1}(s), s)}{\partial \tau_{d-1}^2} \right) ds. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Отметим, что для каждого  $y \in \mathbb{R}^d$ ,  $\tau_{d-1} \in \mathbb{R}$ ,  $s \in \mathbb{R}^+$  справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 G_{d-1}(y, \tau_{d-1}, s)}{\partial \tau_{d-1}^2} = (M_{\sigma_{d-1}}^2 G_{d-1}(\cdot, \tau_{d-1}, s))(y). \quad (4.28)$$

Действительно, в силу правила Лейбница достаточно проверить, что для любых  $y \in \mathbb{R}^d$ ,  $\tau_{d-1} \in \mathbb{R}$ ,  $\tau_d \in \mathbb{R}$  справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau_{d-1}^2} h(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})T_{\sigma_d}(\tau_d)(x)) = (M_{\sigma_{d-1}}^2 h(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})T_{\sigma_d}(\tau_d)(\cdot)))(y). \quad (4.29)$$

Для каждого фиксированного  $\tau_d \in \mathbb{R}$  определим функцию  $\omega_{\tau_d} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  такую, что

$$\omega_{\tau_d}(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y)) = h(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)).$$

Теперь применяя рассуждения, которыми была доказана формула (4.24), заменяя при этом функцию  $G_d(y, \tau_d)$  функцией  $\omega_{\tau_d}(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y))$ , устанавливаем справедливость соотношения (4.29), а вместе с ним и равенства (4.28).

Обозначим  $\psi_{d-1}(y, t) = EG_{d-1}(y, B^{d-1}(t), t)$ , тогда с помощью соотношений (4.26), (4.27), (4.28), теоремы Фубини и правила Лейбница, получаем равенство

$$\psi_{d-1}(y, t) = \psi_{d-1}(y, 0) + \int_0^t ((Hs^{2H-1}M_{\sigma_d}^2 + Hs^{2H-1}M_{\sigma_{d-1}}^2)\psi_{d-1})(\cdot, s)(y)ds. \quad (4.30)$$

Из соотношения (4.30) получаем, что

$$\frac{\partial \psi_{d-1}(\cdot, t)}{\partial t} = (Ht^{2H-1}M_{\sigma_d}^2 + Ht^{2H-1}M_{\sigma_{d-1}}^2)\psi_{d-1}(\cdot, t). \quad (4.31)$$

Далее рассматриваем функцию  $G_{d-2}(y, \tau_{d-2}, t) = \psi_{d-1}(T_{b_{d-2}}(\tau_{d-2})(y), t)$ , применяем формулу Ито к процессу  $G_{d-2}(y, B^{d-2}(t), t)$ , получим уравнение,

аналогичное уравнению (4.31) для функции  $\psi_{d-2}(y, t) = EG_{d-2}(y, \tau_{d-2}, t)$ , и так далее. Тем самым придем к следующему уравнению для функции  $u_h(y, t) = Eh(F(y, t, W^1(t), \dots, W^d(t), B^1(t), \dots, B^d(t)))$  :

$$\frac{\partial u_h(\cdot, t)}{\partial t} = \left( M_{\tilde{f}} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^d M_{g_j}^2 + \sum_{j=1}^d H t^{2H-1} M_{\sigma_j}^2 \right) u_h(\cdot, t).$$

Теорема доказана.

**Пример 4.3.** Покажем существенность условия коммутирования потоков, порожденных функциями из семейства  $\Gamma$ , в теореме 4.3. Рассмотрим линейное стохастическое уравнение

$$dx(t) = x(t)dt + dB(t) \quad (4.32)$$

с начальным условием

$$x(0) = y \in \mathbb{R}, \quad (4.33)$$

где  $B(t)$  – одномерное дробное броуновское движение с показателем Харста  $H \in (1/2, 1)$ . Решение  $x^y(t)$  задачи Коши (4.32), (4.33) задается формулой [55]

$$x^y(t) = ye^t + \int_0^t e^{t-s} dB(s).$$

Положим  $h(y) = y^2$ , тогда

$$\begin{aligned} u_h(y, t) &= y^2 e^{2t} + e^{2t} 2H(2H-1) \int_0^t e^{-s} \int_0^s e^{-v} (s-v)^{2H-2} dv ds = \\ &= y^2 e^{2t} + e^{2t} H(2H-1) \int_0^t e^{-u} u^{2H-2} du - H(2H-1) \int_0^t e^u u^{2H-2} du = \\ &= y^2 e^{2t} + H \int_0^t (e^{2t-s} + e^s) s^{2H-1} ds. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_h(y, t)}{\partial t} &= 2y^2 e^{2t} + 2H e^t t^{2H-1} + 2H e^{2t} \int_0^t e^{-s} s^{2H-1} ds, \\ y \frac{\partial u_h(y, t)}{\partial y} + H t^{2H-1} \frac{\partial^2 u_h(y, t)}{\partial y^2} &= 2y^2 e^{2t} + 2e^{2t} H t^{2H-1}. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_0^t e^{-s} s^{2H-1} ds = -e^{-t} t^{2H-1} + (2H-1) \int_0^t e^{-s} s^{2H-2} ds < -e^{-t} t^{2H-1} + t^{2H-1}$$

для любых  $t > 0$ , то функция  $u_h(y, t)$  не удовлетворяет уравнению из теоремы 4.3 ни при каких  $t > 0$ ,  $y \in \mathbb{R}$ . Отметим, что операторы  $T_f(t_1)(y) = e^{t_1} y$ ,  $T_\sigma(t_2)(y) = t_2 + y$  не являются перестановочными.

**Пример 4.4.** Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$dx(t) = ax(t)dt + bx(t)dB(t) + cx(t)dW(t), \quad (4.34)$$

с начальным условием

$$x(0) = y \in \mathbb{R}. \quad (4.35)$$

Пусть  $h(y) = y^r$ ,  $r \geq 2$ ,  $u_h(y, t) = Eh(x^y(t))$ , где  $x^y(t)$  – решение задачи Коши (4.34), (4.35). Легко видеть, что условия теоремы 4.3 выполняются, и функция  $u_h(y, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_h(y, t)}{\partial t} = \frac{\partial u_h(y, t)}{\partial y} y(a + b^2 H t^{2H-1}) + \frac{\partial^2 u_h(y, t)}{\partial y^2} y^2 (c^2/2 + b^2 H t^{2H-1}), \quad t > 0, \quad y \in \mathbb{R},$$

с начальным условием

$$u_h(y, 0) = y^r.$$

**Теорема 4.4.** Пусть семейство  $\Gamma$  порождает коммутирующие потоки, решение  $x^y(t)$  автономного уравнения (4.1) с начальным условием  $x(0) = y$  имеет плотность распределения  $p(t, y, z)$ , функции  $f(z)$ ,  $g(z)$ ,  $\sigma(z)$ ,  $p(t, y, z)$  являются достаточно гладкими и ограниченными. Тогда функция  $p(t, y, z)$  удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(t, y, z)}{\partial t} = & - \sum_{j=1}^d \frac{\partial (f_j(z) p(t, y, z))}{\partial z_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^d \frac{\partial^2 (g_{ik}(z) g_{jk}(z) p(t, y, z))}{\partial z_i \partial z_j} + \\ & + \sum_{i,j,k=1}^d H t^{2H-1} \left( \frac{\partial^2 (\sigma_{ik}(z) \sigma_{jk}(z) p(t, y, z))}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\partial (\sigma_{ik}(z) \frac{\partial \sigma_{jk}(z)}{\partial z_i} p(t, y, z))}{\partial z_j} \right), \\ & t > 0, \quad y, z \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Доказательство. Возьмем произвольную функцию  $h(z)$  с компактным носителем, имеющую ограниченные и непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Обозначим через  $A_t$  оператор, действующий по правилу

$$(A_t h)(z) = \sum_{j=1}^d f_j(z) \frac{\partial h(z)}{\partial z_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^d g_{ik}(z) g_{jk}(z) \frac{\partial^2 h(z)}{\partial z_i \partial z_j} + \\ + \sum_{i,j,k=1}^d H t^{2H-1} \sigma_{ik}(z) \left( \sigma_{jk}(z) \frac{\partial^2 h(z)}{\partial z_i \partial z_j} + \frac{\partial \sigma_{jk}(z)}{\partial z_i} \frac{\partial h(z)}{\partial z_j} \right), \quad t > 0, \quad z \in \mathbb{R}^d.$$

Используя соотношение

$$u_h(y, t) = \int_{\mathbb{R}^d} h(z) p(t, y, z) dz,$$

теорему 4.3 и правило Лейбница, получаем равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left( h(z) \frac{\partial p(t, y, z)}{\partial t} - p(t, y, z) (A_t h)(z) \right) dz = 0. \quad (4.36)$$

Из соотношения (4.36) вытекает равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left( h(z) \frac{\partial p(t, y, z)}{\partial t} - h(z) (A_t^* p(t, y, \cdot))(z) \right) dz = 0, \quad (4.37)$$

где  $A_t^*$  – сопряженный оператор к оператору  $A_t$ . Применяя формулу интегрирования по частям, легко видеть, что

$$(A_t^* \varphi)(z) = - \sum_{j=1}^d \frac{\partial (f_j(z) \varphi(z))}{\partial z_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^d \frac{\partial^2 (g_{ik}(z) g_{jk}(z) \varphi(z))}{\partial y_i \partial y_j} + \\ + \sum_{i,j,k=1}^d H t^{2H-1} \left( \frac{\partial^2 (\sigma_{ik}(z) \sigma_{jk}(z) \varphi(z))}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\partial (\sigma_{ik}(z) \frac{\partial \sigma_{jk}(z)}{\partial z_i} \varphi(z))}{\partial z_j} \right). \quad (4.38)$$

Теперь из соотношений (4.37), (4.38) и плотности множества функций с компактным носителем, имеющих непрерывные органиченные производные всех порядков, в  $L_1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведено исследование асимптотического поведения решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновским движениями в конечномерных, а также сепарабельных гильбертовых пространствах и получены следующие основные результаты:

1. Доказана теорема 2.3, дающая достаточное условие асимптотической устойчивости по вероятности слабого нулевого решения неавтономной системы (2.5) с разрывными коэффициентами, исходя из равномерной экспоненциальной устойчивости слабого нулевого решения соответствующей однородной системы (2.6). Приведен пример, иллюстрирующий применение доказанной теоремы. Указанный результат был получен в работе 1–А и изложен в главе 2.
2. Доказана теорема 2.4 о притяжении к нулю слабых решений нелинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений (2.21) в гильбертовых пространствах с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица. Приведен пример, иллюстрирующий применение доказанной теоремы. Данный результат был получен в работе 2–А и изложен в главе 2.
3. Доказана теорема 3.3 о логарифмической непрерывной зависимости в среднем от начальных условий и правых частей решений стохастических дифференциальных уравнений (3.1), (3.10) со сносом и дробным броуновским движением с различными индексами Харста, большими  $1/3$ . Указанный результат был получен в работе 3–А и изложен в главе 3.
4. Доказана теорема 3.4, в которой получено асимптотическое разложение (3.57) в окрестности нуля для математического ожидания от функционала от решения уравнения (3.1) со сносом и дробным броуновским движением с различными индексами Харста, большими  $1/3$ . Получено уравнение (3.100), являющееся обобщением обратного уравнения Колмогорова для решения уравнения (3.1) с указанным дробным броуновским движением в коммутативном случае. Приведенные результаты, а также другие связанные с ними результаты, изложенные в главе 3, были получены в работах 4–А, 5–А.

5. Получены методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа (4.1), основанные на приведении данного уравнения к простейшему или линейному неоднородному (теорема 4.2), или к уравнению Стратоновича (раздел 4.1.3). Указанные результаты были получены в работе [6–А] и изложены в главе 4.



## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Васьковский, М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием со стандартным и дробным броуновскими движениями / М.М. Васьковский // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер фіз.-мат. навук. — 2015. — №. 1. — С. 22–34.
2. *Васьковский, М.М.* Существование слабых решений стохастических эволюционных функциональных уравнений параболического типа с измеримыми локально ограниченными коэффициентами / М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 8. — С. 1080–1095.
3. *Васьковский, М.М.* Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 2. — С. 160–173.
4. *Ватанабэ, С.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. — М. : Наука, 1986. — 448 с.
5. *Гихман, И.И.* Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — М. : Наука, 1977. — 568 с.
6. *Колмогоров, А.Н.* Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. — 1940. — Т. 26, № 2. — С. 115–118.
7. *Леваков, А.А.* Исследование устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений с помощью знакопостоянных функций Ляпунова / А.А. Леваков // Дифф. уравн. — 2011. — Т. 47, № 9. — С. 1258–1267.
8. *Леваков, А.А.* Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1011–1019.
9. *Леваков, А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения / А.А. Леваков. — Минск : БГУ, 2009. — 231 с.
10. *Леваков, А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения / А.А. Леваков, М.М. Васьковский. — Минск : БГУ, 2019. — 495 с.
11. *Леваков, А.А.* Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. —

2015. — Т. 51, № 8. — С. 997–1003.
12. *Леваков, А.А.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 2. — С. 187–200.
  13. *Леваков, А.А.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 8. — С. 1060–1076.
  14. *Оксендаль, Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. — М. : Мир, 000 «Издательство АСТ», 2003. — 408 с.
  15. *Филиппов, А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М. : Наука, 1985. — 223 с.
  16. *Царьков, Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений/ Е.Ф. Царьков. — Рига : Зинатне, 1989. — 421 с.
  17. *Baudoin, F.* Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions / F. Baudoin, L. Coutin // Stochastic Processes and their Applications — 2007. — Vol. 117, № 5. — P. 550–574.
  18. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications / F. Biagini [et al.]. — London : Springer-Verlag, 2008. — 330 p.
  19. *Cheridito, P.* Regularizing fractional Brownian motion with a view towards stock price modeling : a dissertation ... doctor of mathematics / P. Cheridito. — Zürich, 2001. — 121 p.
  20. *Cheridito, P.* Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter  $h$  in  $(0, 1/2)$  / P. Cheridito, D. Nualart // Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2005. — Vol. 41, № 6. — P. 1049–1081.
  21. *Coppel, W.A.* Dichotomies in Stability Theory / W.A. Coppel. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1978. — 102 p. — (Lecture Notes in Mathematics ; № 629).
  22. *Coutin, L.* Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions / L. Coutin, Z. Qian // Probability Theory Related Fields. — 2002. — Vol. 122, № 1. — P. 108–140.
  23. *Filipovic, D.* Consistency problems for Heath-Jarrow-Morton interest rate

- models / D. Filipovic. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2001. — 138 p.
24. *Gard, T.C.* Introduction to stochastic differential equations / T.C. Gard. — New York ; Basel : Marcel Dekker Inc., 1988. — 234 p.
  25. *Friz, P.* A Course on Rough Paths with an introduction to regularity structures / P. Friz, M. Hairer. — Cham : Springer International Publishing AG, 2014. — 262 p.
  26. Large deviations and asymptotic methods in finance / P. Friz [et al.]. — Cham : Springer International Publishing AG, 2015. — 590 p.
  27. *Friz, P.* Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications / P. Friz, N. Victoir. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 670 p.
  28. The Jain-Monrad criterion for rough paths and applications to random Fourier series and non-Markovian Hörmander theory / P. Friz [et al.] // The Annals of Probability. — 2016. — Vol. 44, № 1. — P. 684–738.
  29. *Garrido-Atienza, M.J.* Asymptotical stability of differential equations driven by Hölder-continuous paths / M.J. Garrido-Atienza, A. Neuenkirch, B. Schmalfuss // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 2017. — Vol. 30, № 1. — P. 359–377.
  30. *Gubinelli, M.* Controlling rough paths / M. Gubinelli // Journal of Functional Analysis. — 2004. — Vol. 216, № 1. — P. 86–140.
  31. *Gubinelli, M.* Ramification of rough paths / M. Gubinelli // Journal of Differential Equations. — 2010. — Vol. 248, № 4. — P. 693–721.
  32. *Guerra, J.* Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion / J. Guerra, D. Nualart // Stochastic Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 26, № 5. — P. 1053–1075.
  33. *Hairer, M.* Geometric versus non-geometric rough paths / M. Hairer, D. Kelly // Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2015. — Vol. 51, № 1. — P. 207–251.
  34. *Ichikawa, A.* Stability of Semilinear Stochastic Evolution Equations / A. Ichikawa // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1982. — Vol. 90, № 1. — P. 12–44.
  35. *Ilchmann, A.* Sufficient conditions for stability of linear time-varying systems / A. Ilchmann, D.H. Owens, D. Prätzel-Wolters // Systems & Control Letters. — 1987. — Vol. 9, № 2. — P. 157–163.
  36. *Khasminskii, R.* Stochastic stability of differential equations / R. Khasminskii. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2012. — 342 p.

37. *Kleptsyna, M.L.* General approach to filtering with fractional Brownian noises application to linear systems / M. Kleptsyna, A. Le Breton, M.-C. Roubaud // *Stochastics and Stochastic Reports*. — 2000. — Vol. 71, № 1–2. — P. 119–140.
38. *Kubilius, K.* The existence and uniqueness of the solution of an integral equation driven by a p-semimartingale of special type / K. Kubilius // *Stochastic Processes and their Appl.* — 2002. — Vol. 98, № 2. — P. 289–315.
39. *Liu, K.* On stability for a class of semilinear stochastic evolution equations / K. Liu // *Stochastic Processes and their Appl.* — 1997. — Vol. 70, № 2. — P. 219–241.
40. *Liu, K.* Stability of infinite dimensional stochastic differential equations with applications / K. Liu. — New York : Chapman and Hall/CRC, 2005. — 312 p.
41. *Lyons, T.* Differential equations driven by rough signals / T. Lyons // *Revista Matemática Iberoamericana*. — 1998. — Vol. 14, № 2. — P. 215–310.
42. *Mandelbrot, B.B.* Fractional Brownian Motions, fractional noises and applications / B.B. Mandelbrot, J.W. van Ness // *SIAM Review*. — 1968. — Vol. 10, № 4. — P. 422–437.
43. *Mishura, Y.S.* Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index  $H > 1/2$  / Y.S. Mishura, G.M. Shevchenko // *Communications in Statistics – Theory and Methods*. — 2011. — Vol. 40, № 19–20. — P. 3492–3508.
44. *Mishura, Y.S.* Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes / Y.S. Mishura. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. — 398 p.
45. Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations / A. Neuenkirch [et al.] // *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*. — 2009. — Vol. 45, № 1. — P. 157–174.
46. *Nualart, D.* Differential equations driven by fractal Brownian motion / D. Nualart, A. Răşcanu // *Collectanea Mathematica*. — 2002. — Vol. 53, № 1. — P. 55–81.
47. *Pazy, A.* Semigroups of linear operators and applications to Partial Differential Equations / A. Pazy. — New York : Springer-Verlag, 1983. — 282 p.
48. *Prato, G.D.* A note on stochastic convolution / G. Da Prato, J. Zabczyk // *Stochastic Analysis and Appl.* — 1992. — Vol. 10, № 2. — P. 143–153.
49. *Prato, G.D.* Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. — Cambridge : Cambridge university press, 1992. — 449 p.

50. *Rogers, L.C.G.* Diffusions, Markov Processes, and Martingales: Volume 1, Foundations / L.C.G. Rogers, D. Williams. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000. — 410 p.
51. *Russo F.* Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes / F. Russo, P. Vallois // Stochastics and Stochastic Reports. — 2000. — Vol. 70, № 1-2. — P. 1–40.
52. *Shevchenko, G.M.* Mixed stochastic delay differential equations / G.M. Shevchenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2014. — № 89. — P. 181–195.
53. *Taniguchi, T.* Almost sure exponential stability for stochastic partial functional differential equations / T. Taniguchi // Stochastic Analysis and Appl. — 1998. — Vol. 16, № 5. — P. 965–975.
54. *Taniguchi, T.* Existence, uniqueness, and asymptotic behavior of mild solutions to stochastic functional differential equations in Hilbert spaces / T. Taniguchi, K. Liu, A. Truman // Journal of Differential Equations. — 2002. — Vol. 181, № 1. — P. 72–91.
55. *Vyoral, M.* Kolmogorov equation and large-time behaviour for fractional Brownian motion driven linear SDE's / M. Vyoral. // Applications of Mathematics. — 2005. — Vol. 50, № 1. — P. 63–81.
56. *Young, L.C.* An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration / L.C. Young // Acta Math. — 1936. — Vol. 67, № 1. — P. 251–282.
57. *Zähle, M.* Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I / M. Zähle // Probability Theory and Related Fields. — 1998. — Vol. 111, № 3. — P. 333–374.

### **Список публикаций автора работы**

#### **Статьи в научных журналах (зарубежных и из перечня ВАК)**

- 1–А. *Васьковский, М.М.* Исследование устойчивости решений неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами с помощью метода функций Ляпунова / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный, И.В. Качан // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1 : физ., мат., информ. — 2015. — №3. — С. 117–125.

- 2–А. *Васьковский, М.М.* Устойчивость решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с локально липшицевыми коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 866–880.
- 3–А. *Качан, И.В.* Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 193–209.
- 4–А. *Васьковский, М.М.* Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Доклады Нац. акад. наук Беларусі. — 2018. — Т. 62, № 4. — С. 398–405.
- 5–А. *Vaskouski, M.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than  $1/3$  / M. Vaskouski, I. Kachan // Stochastic Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 36, № 6. — P. 909–931.
- 6–А. *Васьковский, М.М.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа / Васьковский М.М., Качан И.В. // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 135–149.

#### **Депонированные отчеты**

- 7–А. Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах : отчет о НИР (заключительный) / БГУ ; руководитель М.М.Васьковский, исполнители : Я.Б. Задворный, И.В. Качан. — Минск, 2016. — 122 с. — № ГР 20142883.

#### **Статьи в сборниках трудов международных научных конференций**

- 8–А. *Васьковский, М.М.* Аналог формулы Ито для стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие  $1/3$  / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф., г. Пенза, Россия, 4–6 декабря 2017 г. / Пензенский гос. ун-т. ; под ред. И. В. Бойкова. — Пенза, 2017. — С. 12–16.

- 9–А. Качан, И.В. Непрерывная зависимость от начальных условий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан, М.М. Васьковский // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация : материалы Междунар. научн. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения академ. Е.А. Барбашина, Минск, 24-29 сентября 2018 г. / БГУ. — Минск, 2018. — С. 117–118.

### **Тезисы докладов международных научных конференций**

- 10–А. Васьковский, М.М. Теорема об устойчивости по линейному приближению решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ-2015) : тез. докл. 8-го междунар. научн. семинара (воркшопа), ОСК «Стайки», 14-19 сент. 2015. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2015. — С. 24.
- 11–А. Качан, И.В. Экспоненциальная устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / И.В. Качан // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : тез. докл. междунар. матем. конф., Минск, 7-10 дек., 2015. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2015. — С. 34.
- 12–А. Васьковский, М.М. Устойчивость стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах / М.М. Васьковский, И.В. Качан // XII Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. конф., Минск, 5-10 сент. 2016 г. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2016. — С. 14–15.
- 13–А. Качан, И.В. Существование решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные показатели Харста, большие  $1/3$  / И.В. Качан // Еругинские чтения–2017 : тез. докл. XVII междунар. научн. конф. по дифф. уравнениям, Минск, 16-20 мая 2017 г. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2017. — С. 48–49.
- 14–А. Васьковский, М.М. Аналог уравнений Колмогорова для математических ожиданий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Еругинские чтения–2018 : тез. докл. XVIII междунар. научн. конф. по дифф. уравнениям, Гродно, 15-18 мая 2018 г. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2018. — С. 85–86.