БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.911.5

КАЧАН
Илья Вадимович

Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент,
Васьковский М. М.

Минск, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И (ИЛИ) УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ . 4
ВВЕДЕНИЕ 6
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ 16
ГЛАВА 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ 20
1.1 Теория меры 20
1.2 Теория линейных операторов и полугрупп 22
1.3 Теория случайных процессов 24
1.4 Интегралы по броуновскому движению 27
1.4.1 Потраекторный интеграл Янга 28
1.4.2 Стохастический интеграл Ито 29
1.4.3 Потраекторный интеграл Губинелли 33
ГЛАВА 2. УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРИТЯЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ 37
2.1 Стохастические дифференциальные уравнения в конечномерных гильбертовых пространствах 37
2.2 Стохастические дифференциально-функциональные уравнения в произвольных гильбертовых пространствах 44
2.2.1 Теорема о притяжении к нулю 51
ГЛАВА 3. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ, ИМЕЮЩИМИ РАЗЛИЧНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ХАРСТА, БОЛЬШИЕ 1/3 58
3.1 Формула Ито 61
3.2 Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями 64
3.2.1 Вспомогательные результаты 67
3.2.2 Теорема о непрерывной зависимости от начальных данных 76
3.3 Асимптотические разложения в окрестности нуля 81
3.4 Математические ожидания повторных интегралов от дробных броуновских движений 89

3.5 Коммутативный случай 98
ГЛАВА 4. МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА 101
4.1 Методы интегрирования одномерных уравнений смешанного типа 102
4.1.1 Приведение к простейшим уравнениям 102
4.1.2 Приведение к линейным неоднородным уравнениям . . 107
4.1.3 Переход к уравнению Стратоновича 109
4.2 Дифференциальные уравнения для математических ожиданий и плотностей распределений решений 112
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 120
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 122

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И (ИЛИ) УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$a \vee b$	большее из чисел a и b, т.е. $\max\{a,b\}$
$a \wedge b$	меньшее из чисел a и b, т.е. $\min\{a,b\}$
$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	множества натуральных, действительных и комплексных чисел соответственно
$\mathbb{R}^+$	множество действительных положительных чисел
$\mathbb{R}^d$	евклидово пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$, $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_d y_d$ и нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	пространство матриц $X = (x_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ размера $n \times m$ с вещественными элементами $x_{ij} \in \mathbb{R}$
$A^\top$	транспонированная матрица
$A^\star$	сопреженный оператор
$\mathrm{tr} A$	след оператора
I_d	единичная матрица в $\mathbb{R}^{d \times d}$
$\mathrm{col}(a_1, \ldots, a_n)$	матрица, состоящая из строк $a_1, \ldots, a_n$
$\otimes$	тензорное произведение в пространстве $\mathbb{R}^d$
$\| \cdot \|_W$	евклидова норма в конечномерном пространстве W
$\\| \cdot \\|_X$	норма в пространстве бесконечномерном пространстве X
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	скалярное произведение в пространстве H
$\mathcal{L}(U_1, U_2)$	пространство линейных ограниченных операторов, действующих из U_1 в U_2
$\mathfrak{L}_2(U_1, U_2)$	множество операторов Гильберта-Шмидта, действующих из U_1 в U_2
$C(U_1, U_2)$	пространство непрерывных функций $\varphi\colon U_1 \to U_2$ с нормой $\\|\varphi\\|_\infty = \max_{x \in U_1} \|\varphi(x)\|_{U_2}$
$C_b^k(U_1, U_2)$	пространство функций $\varphi\colon U_1 \to U_2$ имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка k включительно с нормой $\\|\varphi\\|_{C_b^k} = \sum_{j=0}^k \\|D^j \varphi\\|_\infty$
$L_p[a, b]$	пространство классов эквивалентности интегрируемых по Лебегу со степенью p функций $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$
$\mathcal{W}^{k,p}[a,b]$	пространство Соболева классов эквивалентности функций $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, имеющих обобщенные производные

	класса $L_p[a,b]$ до порядка k включительно, $k \in \mathbb{N}$.
$C_k[a,b]$	пространство функций $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, непрерывно диффернцируемых до порядка k включительно, $k \in \mathbb{N}$.
$\mathbf{1}_A$	функция-индикатор множества A
п.н.	почти наверное

ВВЕДЕНИЕ

Стохастические дифференциальные уравнения являются стремительно развивающейся областью исследований с множеством неразрешенных вопросов. Интерес к ним со стороны научного сообщества вызван, с одной стороны, многими плодотворными связями с другими математическими дисциплинами, а с другой — широким спектром приложений вне математики. В частности, стохастические дифференциальные уравнения находят свое применение в задачах фильтрации, детерминированных краевых задачах математической физики, финансовой и экономической областях, в задачах определения оптимального момента остановки, задачах оптимального размещения ценных бумаг, задачах расчета опционов и др. (см. [14, глава 1]).

Особое место в теории стохастических дифференциальных уравнений занимают проблемы асимптотического поведения решений, лежащие на стыке теории случайных процессов и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследованию асимптотических характеристик случайных процессов большое внимание уделяли И.И. Гихман и А.В. Скороход. Они — одни из создателей теории стохастических дифференциальных уравнений — вводили их для того, чтобы строго ставить и решать задачи асимптотического поведения случайных процессов (см. [5]).

Первая глава данной работы содержит предварительные сведения, известные результаты, необходимые для более глубокого понимания последующих глав работы.

Вторая глава данной работы посвящена исследованию устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. Несмотря на существенное усложнение объекта исследования, здесь определяющую роль по-прежнему играют методы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений: метод функционалов Ляпунова, метод интегральных неравенств, исследование устойчивости нелинейных уравнений по линейному приближению и др. Теория устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в конечномерных гильбертовых пространствах изучена наиболее полно. В монографии [36] рассматриваются уравнения относительно $X \in \mathbb{R}^d$ со стандартным d-мерным броуновским движением $W \in \mathbb{R}$ общего вида:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0 \tag{0.1}$$

с постоянными начальными условиями $X(0,\omega) \equiv x \in \mathbb{R}^n$. В ней доказаны аналоги теорем Ляпунова об устойчивости решений уравнения (0.1) с коэффициентами, удовлетворяющими по фазовой переменной глобальному условию Липшица:

$$|g(t,x) - g(y,t)| + |f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x-y|, \qquad x,y \in \mathbb{R}^n. \tag{0.2}$$

В монографии [16] излагается метод исследования устойчивости решений автономной системы с запаздыванием $X_t = \{X(t+\tau) | -h \leq \tau \leq 0\} \in \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$:

$$dX(t) = f(X_t)dt + g(X_t)dW(t), \quad t \geq 0 \tag{0.3}$$

с начальными условиями $X(0,\omega) = \xi(\omega)$ с помощью квадратичных функционалов Ляпунова. Отметим, что исследования в указанных монографиях проводятся с уравнениями (0.3), коэффициенты которых непрерывны. Для уравнений с разрывными коэффициентами существование решения в классическом смысле не гарантируется и для определения решений требуется привлечение дифференциальных включений [15]. Основная идея этой теории принадлежит А.Ф. Филиппову и состоит в том, что разрывные коэффициенты $f(t,x)$, $g(t,x)$ заменяются в каждой точке (t,x) на наименьшие выпуклые множества $F(t,x)$, $G(t,x)$, содержащие все предельные точки $f(t,x^*)$, $g(t,x^*)$ соответственно при $x^* \to x$. Исследованию устойчивости систем с разрывными коэффициентами посвящена статья [7]. В ней А.А. Леваков методом знакопостоянных функций Ляпунова доказал теоремы об устойчивости решений автономной системы

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), \quad t \geq 0 \tag{0.4}$$

без запаздывания с разрывными коэффициентами f,g. Тем не менее результаты работ [36, 16, 7] не применимы к исследованию устойчивости неавтономных систем с разрывными коэффициентами.

В настоящей работе с помощью метода знакопостоянных функций Ляпунова [36, 7] доказана теорема теорема об устойчивости решений системы

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t,X(t)))dt + g(t,X(t))dW(t), \quad t \geq 0 \tag{0.5}$$

в предположении, что линеаризованная система

$$dX(t) = A(t)X(t)dt \tag{0.6}$$

является равномерно экспоненциально устойчивой. Под решением системы (0.5) понимается решение стохастического дифференциального включения, построенного по уравнению в смысле А.Ф. Филиппова, см. также [2].

Также вторая глава данной работы посвящена исследованию устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений в произвольных сепарабельных гильбертовых пространствах. В свою очередь, стохастические дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах представляют большой интерес, поскольку они охватывают классы дифференциально-функциональных уравнений, уравнений в частных производных и тем самым позволяют получать более точные модели реальных физических явлений. Многие классические задачи математической физики могут быть истолкованы и обобщены с применением аппарата стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах.

К примеру, рассмотрим задачу распространения тепла в стрежне:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,u(t,x)), \quad t>0,\ 0<x<l\\ u(0,x)=\varphi(x), \quad 0<x<l,\\ u(t,0)=u(t,l)=0, \quad t>0,\end{gathered} \tag{0.7}$$

где l — длина стержня, a - коэффициент температуропроводности. Решение $u(t,x)$ этой задачи при фиксированных t,ω можно рассматривать как элемент гильбертова пространства $X(t) = u(t,\cdot) \in L_2[0,l]$. Вводя оператор 2-й производной $A = d^2/dx^2$, принимающий значения в $L_2[0,l]$ с областью определения $\mathcal{D}(A) = \{u(x) \in \ C_2[0,l] \ : \ u(0) = u(l) = 0\}$; мы приходим к задаче Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка в гильбертовом пространстве $H = L_2[0,l]$. Обобщая ее с учетом случайных флюктуаций, получим новую задачу:

$$\begin{gathered}dX(t,\omega) = (AX(t,\omega) + f(t,X(t,\omega)))dt + dW(t,\omega), \quad t>0, X\in\mathcal{D}(A),\\ X(0,\omega)=\varphi(\omega),\end{gathered} \tag{0.8}$$

где $\varphi(\omega) = \varphi(\omega,\cdot) \in H$, а $dW(t,\omega)$ описывает белый шум.

С другими примерами использования стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах (в нейрофизиологии, генетике популяций и т.д.) можно ознакомиться в монографии [49, введение].

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$dX(t,\omega) = (AX(t,\omega)+f(t,X(t,\omega))dt+g(t,X(t,\omega))dW(t),\ \ t>0, X\in H \tag{0.9}$$

в сепарабельном гильбертовом пространстве H с начальным условием $X(0,\omega) = \xi(\omega)$, коэффициенты f и g которого удовлетворяют локальному условию Липшица и имеют линейный порядок роста, а линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор $A\colon H \to H$ порождает C_0-полугруппу $S(t)$, $t \geq 0$ (см. [47]). Существуют несколько определений решений для уравнения (0.9) (см. [49, 23]). Как правило, рассматривают либо сильные решения $X(t,\omega)$ как процессы, удовлетворяющие интегральному уравнению

$$X(t,\omega) = \xi(\omega) + \int_0^t (AX(s,\omega) + f(s,X(s,\omega)))ds + \int_0^t g(s,X(s,\omega))dW(s), \quad (0.10)$$

или же слабые решения $X(t,\omega)$ как процессы, удовлетворяющие интегральному уравнению

$$X(t,\omega) = S(0)\xi(\omega) + \int_0^t S(t-s)f(s,X(s,\omega))ds + \int_0^t S(t-s)g(s,X(s,\omega))dW(s). \quad (0.11)$$

К настоящему времени получены глубокие результаты о количественных и качественных свойствах решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. Теоремы о существовании и асимптотических свойствах исходного уравнения с начальным условием доказаны в работах [53], [7–А]. В работах К. Лю [39, 40] были получены п.н. точные асимптотические оценки для решений исходного уравнения с начальным условием без запаздывания с коэффициентами, удовлетворяющими глобальному условию Липшица. В статье А. Ичикава [34] получены оценки для математического ожидания функционала Ляпунова от решения исходной задачи без запаздывания, в случае автономных коэффициентов $f(s, X(s)) = f(X(s))$, $g(s,X(s)) = g(X(s))$, удовлетворяющих глобальному условию Липшица. В статье Т. Танигучи [54] доказана экспоненциальная устойчивость p-го момента решения исходного уравнения $\mathbb{E}\,\|X(s,\omega)\|^p$, $p > 2$, в предположении, что коэффициенты f, g удовлетворяют локальному условию Липшица.

Настоящая работа призвана обобщить полученные результаты. Во второй главе рассматривается уравнение (0.9) с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица и имеющими линейный порядок роста. Для таких уравнений доказана теорема о притяжении слабых решений к нулю.

Третья и четвертая главы данной работы посвящены стохастическим дифференциальным уравнениям с дробными броуновскими движениями. В середине девяностых Т. Лайонс в фундаментальной работе [41] разработал теорию грубых траекторий (rough path). Данная теория нашла активное применение в контексте стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, что было показано Л. Кутэн [22], М. Хайрером и П. Фрицем [25], а также самим Т. Лайонсом. В данной работе был использован альтернативный поход М. Губинелли [30] к определению потраекторных интегралов, во многом схожий с подходом Т. Лайонса, но позволяющий получать более простым путем результаты в приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям с дробными броуновскими движениями, избегая обращения к сложным алгебраическим структурам, возникающим в [41].

Основным объектом изучения третьей главы станет следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = f(X_t)dB_t,\ t \in [0,T], \tag{0.12}$$

в котором $f = (f_0, \ldots, f_d),\ f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ i = 0\ldots,d,$ — достаточно гладкие функции с ограниченными производными, $B_t = (B_t^{(0)}, \ldots, B_t^{(d)})^T,\ B_t^{(0)} = t,$ $B_t^{(i)},\ i = 1, \ldots, d$ — независимые одномерные дробные броуновские движения с индексами Харста $H_i \in (1/3,1)$. Через X_t^x будем обозначать решение уравнения (0.12) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$.

Стоит отметить, что уравнение (0.12) охватывает важный частный случай, когда все индексы Харста $H_i = 1/2$ и, соответственно, дробные броуновские движения $B_t^{(i)}$ обращаются в стандартные винеровские процессы. Известно, что дробное броуновское движение $B_t^{(i)}$ является семимартингалом, если и только если его индекс Харста равен $1/2$. Таким образом, классический стохастический анализ Ито не применим к уравнению (0.12). Стохастические дифференциальные уравнения со сносом, дробными броуновскими движениями и винеровскими процессами принято называть стохастическими дифференциальными уравнениями смешанного типа. Д. Нюаларт и Дж. Гуэрра [32] доказали теорему существования и единственности для уравнений, содержащих винеровский процесс W_t и дробное броуновское движение B_t^H с индексом Харста $H > 1/2$, сочетая при этом теории интегрирования Ито и Янга. Ю.С. Мишура и Г.М. Шевченко [43] обобщили теорему существования для таких уравнений на случай, когда от процессов W_t и B_t^H не требуется их независимость. Некоторые другие обобщения теорем существования, а также свойства стохастических дифференциальных уравнений и включений смешанного типа приведены в статьях [3, 12, 13, 11, 8, 38].

Уравнение (0.12) находит множество приложений, главным образом в физике и финансовой математике. М. Клепцына, А. Ле Бретон и М.-К. Рубо [37] использовали модели с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, для описания сигнальных процессов в фильтрационных системах. П. Черидито [19] рассматривает модель Самуэльсона для движения цен на акции, используя дробные броуновские движения, имеющие различные индексы Харста. М. Зале [57] исследует стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа в контексте моделей облигаций и акций. Некоторые другие финансовые приложения уравнений (0.12) также можно найти в книге Ю.С. Мишуры [44, глава 5].

Цель третьей главы состоит в том, чтобы исследовать при малых значениях времени t семейство операторов

$$(\mathbf{P}_t g)(x) = \mathbb{E}(g(X_t^x)), \tag{0.13}$$

соответствующих решениям общих уравнений (0.12) в предположении, что функция g является достаточно гладкой, и ее производные ограничены. Стоит отметить, что асимптотические разложения семейства операторов (0.13) при малых значений времени t могут быть применены для получения дифференциальных уравнений в частных производных колмогоровского типа для математических ожиданий от решений уравнения (0.12) в некоторых частных случаях (например, когда все индексы Харста $H_i = 1/2$ или в так называемом коммутативном случае, описанном в разделе 3.5 третьей главы).

Известны несколько работ, посвященных исследованию семейства операторов (0.13). Ф. Бадуэн и Л. Кутэн [17] вывели асимптотическую формулу для операторов $\mathbf{P}_t$, используя теорию грубых траекторий (rough paths) Т. Лайонса [41] в случае, когда $H_1 = \ldots = H_d > 1/3$ для уравнения (0.12) без сноса. А. Нойенкирх, И. Нурдэн [45] рассматривали уравнение (0.12) со сносом в случае $H_1 = \ldots = H_d > 1/3$ и получили асимптотическую формулу для операторов $\mathbf{P}_t$, используя теорию интегрирования по грубым траекториям М. Губиннелли [30], [25, глава 4]. В третьей главе результаты статей [17, 45] будут обобщены на случай уравнения (0.12) со сносом и дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста. В данной главе уравнение (0.12) рассматривается с точки зрения теории грубых траекторий [41, 25], а все интегралы, в свою очередь, рассматриваются как интегралы типа Стратоновича. Уравнение (0.12) в рамках теории интегрирования по грубым траекториям, развитой М. Губинелли [31], может рассматриваться как уравнение типа

Ито. М. Хайрер и Д. Келли установили связь между стохастическими дифференциальными уравнениями с дробными броуновскими движениями типа Стратоновича и Ито, а также доказали аналог корректирующей формулы Ито-Стратоновича [33].

Третья глава состоит из 5 разделов. Основным результатом представленной главы является теорема об асимптотических разложениях семейства операторов (0.13) при малых значений времени t, обобщающая результаты работ [17, 45] на случай дробного броуновского движения, компоненты которого имеют различные индексы Харста. Кроме того, в представленной главе получена формула типа Ито (формула замены переменных) для уравнения (0.12), выведены формулы для вычисления коэффициентов выше упомянутых асимптотических разложений в случае, когда все индексы Харста $H_i > 1/2$, исследован так называемый коммутативный случай, в котором были получены дифференциальные уравнения в частных производных типа Колмогорова для функций $\varphi(x,t) = \mathbb{E}(g(X_t^x))$, а также исследована непрерывная зависимость решений на ограниченном отрезке от начальных данных.

В разделе, посвященном непрерывной зависимости, наряду с уравнением (0.12) рассматривается аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\widetilde{X}_t = \widetilde{f}(\widetilde{X}_t)dB_t, \quad t \in [0,T], \tag{0.14}$$

где $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_0, \ldots, \widetilde{f}_d)$, $\widetilde{f}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0,\ldots,d$ — также достаточно гладкие функции с ограниченными производными.

Первые результаты, касающиеся непрерывной зависимости от начальных данных решений уравнений (0.12), (0.14) общего вида, где в качестве $(B_t)_{t\in[0,T]}$ выступают функции, непрерывные по Гельдеру с показателем $\alpha > 1/3$, были получены в работе М. Губинелли [30, предложение 8]. В ней же впервые вводится понятие потраекторного интеграла для уравнений (0.12). В монографии [25, гл. 4, 8] выводятся оценки простого вида для потраекторных интегралов Губинелли и также имеется результат, связанный с интегральной непрерывностью решений уравнений (0.12), (0.14) общего вида, см. [25, теорема 8.5]. В приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям указанные результаты означают, что имеет место почти наверное потраекторная интегральная непрерывность решений уравнений вида (0.12), (0.14) с дробным броуновским движением B_t, компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H > 1/3$, в условиях существования указанных решений.

В работе [46] впервые исследуются уравнения смешанного типа, содержащие дробное броуновское движение B_t^H с индексом Харста $H > 1/2$ и стандартное броуновское движение W_t (являющееся частным случаем B_t^H при $H = 1/2$). Здесь интеграл по W_t рассматривается как стохастический интеграл Ито, а интеграл по B_t^H — как потраекторный интеграл Римана-Стилтьеса, введенный в работе [57]. Стоит отметить, что из выведенных в работе [46] оценок можно получить условия, обеспечивающие интегральную непрерывность решений уравнений смешанного типа. В работе [3] получены условия, гарантирующие (α, p)-асимптотическую устойчивость по вероятности и (α, p)-притяжение решений, [3, теорема 1, 2]. Нетрудно заметить, что уравнения смешанного типа являются частным случаем уравнений (0.12).

Исследованию устойчивости уравнений вида (0.12) также посвящена работа [29]. В ней получены условия, обеспечивающие локальную почти наверное экспоненциальную устойчивость нулевого решения уравнения (0.12) на конечном отрезке $[0,T]$ с дробным броуновским движением B_t, компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H > 1/2$.

Основным результатом данного раздела третьей главы являются теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий и правых частей решений уравнений (0.12), (0.14) в условиях существования указанных решений. Доказанная теорема обобщает результаты выше упомянутых работ на случай уравнений со сносом и дробным броуновским движением B_t, компоненты которого имеют различные индексы Харста $H_i > 1/3$, $i = 1, \dots, d$.

Четвертая глава настоящей работы посвящена некоторым методам интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа. Объектом ее изучения является стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \qquad (0.15)$$

где $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — детерминированные функции.

Стохастическое дифференциальное уравнение (0.15) называется уравнением смешанного типа, если в определении решения интеграл по стандартному броуновскому движению $W(t)$ понимается как интеграл Ито, а интеграл по дробному броуновскому движению $B(t)$ определяется как потраекторный интеграл Римана-Стилтьеса. Интерес к стохастическим дифференциальным уравнениям смешанного типа вызван тем, что, с одной стороны, они охватывают стохастические дифференциальные уравнения Ито, а с другой стороны, наличие слагаемого с дробным броуновским движением позволяет строить более точные математические модели, учитывающие эффект долговременной памяти процессов, что особенно важно при моделировании экономических и финансовых процессов [18, 19]. В работах [32, 44, 43, 52, 12, 13, 11, 8, 3] исследованы вопросы существования, единственности решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, а также общие и асимптотические свойства решений таких уравнений. Стоит отметить, что задача исследования асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений, содержащих дробные броуновские движения, существенно усложняется по сравнению с задачей исследования аналогичных уравнений Ито, а ряд основополагающих методов, таких как второй метод Ляпунова исследования устойчивости, неприменим вовсе [3]. В связи с этим проблема нахождения решений уравнений (0.15) в явном виде представляется актуальной и важной.

Целью четвертой главы является в нахождение методов построения решений (либо их вероятностных характеристик) в явном виде стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа. В частности, приводятся необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование замен переменных, сводящих уравнение (0.15) к простейшим и линейным неоднородным уравнениям смешанного типа, и обобщающие результаты из [24, 9]. Используя подход к интегрированию непрерывных процессов с конечной квадратической вариацией, разработанный в [51], получается соотношение между решениями уравнений (0.15) и решениями соответствующих уравнений Стратоновича. Аналогичная связь хорошо известна для процессов Ито [9] и в ряде случаев помогает строить решения стохастических дифференциальных уравнений в явном виде.

Для нахождения вероятностных характеристик (математических ожиданий, плотностей распределений) решений стохастических дифференциальных уравнений Ито, как правило, используют прямые и обратные уравнения Колмогорова [9]. При выводе этих уравнений ключевую роль играет марковское свойство решений автономных стохастических дифференциальных уравнений Ито [14]. Решения стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, вообще говоря, не являются семимартингалами (даже в простейшем случае $f = g = 0$, $\sigma = 1$) и, как следствие, не обладают марковским свойством. В настоящей работе для вывода аналогов уравнений Колмогорова для автономных уравнений вида (0.15) используется принципиально другой подход: используется явное представление решений уравнений (0.15) через детерминированные дифференциальные потоки, соответствующие коэффициентам уравнения (0.15), при этом ключевую роль играет условие коммутирования соответствующих дифференциальных потоков. Более того, показано, что без предположения о коммутировании дифференциальных потоков, соответствующих коэффициентам уравнения (0.15), аналоги уравнений Колмогорова для смешанных уравнений, вообще говоря, не имеют места. Представленный в настоящей работе подход к выводу аналогов уравнений Колмогорова близок к методам работ [17], [5–A], где аналогичные уравнения получены для уравнений Стратоновича, содержащих дробные броуновские движения с индексами Харста, большими $1/3$. Но в отличие от упомянутых работ в настоящей работе условия на гладкость коэффициентов рассматриваемого стохастического дифференциального уравнения существенно ослаблены за счет того, что показатель Харста соответствующих дробных броуновских движений больше $1/2$.

Основным результатом четвертой главы являются новые методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа, основанные на приведении данного уравнения к простейшему или линейному неоднородному, или к уравнению Стратоновича. Кроме того, в предположении, что коэффициенты стохастического дифференциального уравнения смешанного типа порождают коммутирующие дифференциальные потоки, получены аналоги дифференциальных уравнений Колмогорова для математических ожиданий и плотностей распределений решений.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Исследования проводились в рамках следующих госбюджетных тем:

— Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах (2014 – 2016 гг., номер госрегистрации 20142883)

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является доказательство теорем об устойчивости решений и получение асимптотических разложений для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми в теории стохастических дифференциальных уравнений.

Получены новые результаты в устойчивости нелинейных стохастических уравнений в гильбертовых пространствах. Для неавтономных нелинейных уравнений с разрывными коэффициентами в конечномерных пространствах доказана теорема об асимптотической устойчивости по вероятности слабого нулевого решения по линейному приближению. Для нелинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица, доказана теорема о притяжении слабых решений к нулю. Приведены примеры, иллюстрирующие применение доказанных теорем.

Получены обобщения теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями на случай, когда указанные броуновские движения имеют различных индексы Харста, большие $1/3$. Для нелинейных уравнений, со сносом и дробным броуновскими движениями с различными индексами Харста, большими $1/3$, получены следующие результаты:

– доказана формула Ито (формула замены переменных),

– доказана теорема о непрерывной зависимости в среднем от начальных условий и правых частей решений указанных уравнений,

– доказана теорема, в которой получены асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий от функционалов от решений указанных уравнений,

– получено уравнение, являющееся обобщением обратного уравнения Колмогорова для решения уравнения с указанным дробным броуновским движением в коммутативном случае.

Также в диссертации были исследованы некоторые методы интегрирования смешанных уравнений, содержащих стандартное и дробное броуновское движение с индексом Харста, большим 1/2. Были получены теоремы о приведении указанных уравнений к простейшим, а также к линейным неоднородным уравнениям, теорема о переходу к уравнению Стратоновича. Кроме того, были получены дифференциальные уравнения для математических ожиданий и плотностей распределений решений указанных уравнений.

Положения, выносимые на защиту

Теорема об асимптотической устойчивости системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений по линейному приближению.

Теорема о притяжении к нулю слабых решений нелинейного стохастического дифференциального уравнения в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями.

Теорема о непрерывной зависимости от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями.

Методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа, основанные на приведении данного уравнения к простейшему или линейному неоднородному, или к уравнению Стратоновича.

Личный вклад соискателя ученой степени

Работы [1–А, 2–А, 7–А, 10–А, 12–А] написаны в соавторстве с научным руководителем М.М. Васьковским, а работы [1–А, 7–А] — также в соавторстве с Я.Б. Задворным. Они посвящены исследованию устойчивости стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах методом функций Ляпунова. Идеи совместных исследований были развиты автором в работе [11–А], в которой получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости уравнений с разрывными коэффициентами в конечномерных гильбертовых пространствах. Работы [5–А, 6–А, 8–А, 9–А, 14–А], также написанные в соавторстве с научным руководителем М.М. Васьковским, посвящены исследованию асимптотического поведения решений и методов интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста. Идеи совместных исследований были развиты автором в работах [3–А, 13–А], посвященных существованию и непрерывной зависимости решений упомянутых уравнений.

Результаты, включенные в диссертацию и выносимые на защиту, получены лично автором диссертации. Научному руководителю принадлежат постановка задачи и выбор методов исследования.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты работы докладывались и обсуждались на 8-м международном научном семинаре (воркшопе) «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (АМАДЕ–2015) (Минск, 2015), на шестых Богдановских чтениях по обыкновенным дифференциальным уравнениям (Минск, 2015), на XII Белорусской математической конференции (Минск, 2016), на XII международной научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (Пенза, Россия, 2017), на XVII и XVIII международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2017» и «Еругинские чтения– 2018» (Минск, 2017 и Гродно, 2018), на международной научной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», посвященной 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина (Минск, 2018), на 74-й и 75-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 2017, 2018). Результаты, включенные в диссертацию, отмечены дипломами 1-й категории Республиканского конкурса научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь (2017, 2018).

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы при проведении исследований по теории устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах и общей теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями в научных коллективах, занимающихся исследованием дифференциальных уравнений, в институтах математики НАН РБ, Белорусском Государственном университете, а также при чтении спецкурсов.

Опубликование результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах: из них 4 статьи в научных журналах из перечня научных изданий ВАК, 2 статьи в зарубежных журналах, 1 депонированный отчет, 2 статьи в сборниках трудов международных научных конференций, 5 тезисов докладов международных научных конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, основной части, включающей 4 главы, заключения и библиографического списка.

Объем диссертации — 128 стр., библиографический список содержит 57 источник, включая собственные публикации автора, на 7 стр.

ГЛАВА 1
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В данном разделе диссертации приводятся некоторые сведения и известные результаты из функционального анализа, теории случайных процессов и стохастических дифференциальных уравнений, которые будут использоваться в последующих главах представленной работы.

1.1 Теория меры

Пусть T — некоторое множество. Семейство подмножеств $\mathcal{F}$ множества T называют σ-алгеброй, если для него выполнены следующие свойства: $\emptyset \in \mathcal{F}$; если $A \in \mathcal{F}$, то и $T \setminus A \in \mathcal{F}$; объединение не более чем счетного количества множеств $\cup A_n \in \mathcal{F}$, если $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$. Пару $(T, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подмножеств множества T, называют измеримым пространством.

Рассмотрим функции, определенные на измеримом пространстве $(T, \mathcal{F})$. Функцию $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$, заданную на множествах σ-алгебры $\mathcal{F}$ называют мерой, если выполнены следующие свойства: $\mu(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{F}$; $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ для любого не более чем счетного объединения попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathcal{F}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$, $n{,}m \in \mathbb{N}$. Меру μ называют конечной, если $\mu(T) < \infty$. Меру μ называют вероятностной, если она конечна и $\mu(T) = 1$.

Пусть далее T — метрическое пространство. Наименьшую σ-алгебру над открытыми множествами T называют борелевской σ-алгеброй пространства T и обозначают $\mathcal{B}(T)$. Пусть $(T_1, \mathcal{F}_1)$, $(T_2, \mathcal{F}_2)$ — измеримые пространства. Отображение $f\colon T_1 \to T_2$ называют $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$-измеримым, если для любого множества $M \in \mathcal{F}_2$ его прообраз $f^{-1}(M) \in \mathcal{F}_1$. Отображение $f\colon T_1 \to T_2$ называют измеримым по Борелю, если оно $(\mathcal{B}(T_1), \mathcal{B}(T_2))$-измеримо.

Пусть $(T, \mathcal{F}, \mu)$ — измеримое пространство с конечной мерой μ. Рассмотрим заданную на нем функцию $f\colon T \to \mathbb{R}^+$, являющуюся $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$-измеримой. Интегралом Лебега функции f по множеству $I \in \mathcal{F}$

называют предел интегральных сумм

$$\int_I f(t)d\mu = \lim_{n\to\infty}\Bigg(\sum_{i=0}^{n2^n-1}(i\cdot n2^{-n})\cdot\mu\{t\in I:\ i\cdot n2^{-n}<f(t)\le(i{+}1)\cdot n2^{-n}\}+ +n\mu\{t\in I:\ f(t)>n\}\Bigg)$$

Для измеримой функции $f\colon T\to\mathbb{R}$, принимающей произвольные действительные значения, введем в рассмотрение функции $f^+(t)=\max\{f(t),0\}$ и $f^-(t)=\min\{-f(t),0\}$; очевидно, $f(t)=f^+(t)-f^-(t)$, $|f(t)|=f^+(t)+f^-(t)$ и $f^+(t),f^-(t)\ge 0$ для любого $t\in T$. Интеграл Лебега определяют как $\int_I f(t)d\mu=\int_I f^+(t)d\mu-\int_I f^-(t)d\mu$ и считают, что функция f интегрируема по Лебегу, если $\int_I|f(t)|d\mu<+\infty$. Для функции $f\colon T\to\mathbb{R}^d$, $f=(f_1,\dots,f_d)$ под интегралом Лебега будем понимать вектор из интегралов Лебега от ее компонент: $\int_I f(t)d\mu=\big(\int_I f_1(t)d\mu,\dots,\int_I f_d(t)d\mu\big)$.

Теорема 1.1 о мажорируемой сходимости (Лебег). *Пусть* $(T,\mathcal{F},\mu)$ — *измеримое пространство с конечной мерой* μ. *Если последовательность* $(\mathcal{F},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$*-измеримых функций* $(f_n)_{n=1}^\infty$ *сходится почти всюду к функции* $f(t)$ *и при этом существует интегрируемая по Лебегу функция* φ *такая, что* $|f_n|\le\varphi$ *для всех* n*, то* f *— также интегрируемая по Лебегу функция, причем*

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(t)d\mu=\int_I\lim_{n\to\infty}f_n(t)d\mu=\int_I f(t)d\mu.$$

Пусть $(T,\mathcal{F})$ — измеримое пространство с конечной мерой μ, X — банахово пространство. Функция $f\colon T\to X$ называется простой, если существуют $x_1,\dots,x_n,\dots\in X$ и $E_1,\dots,E_n,\dots\in\mathcal{F}$, такие, что $E_i\cap E_j=\emptyset$, $i\ne j$, $\cup_{i=1}^\infty E_i=T$, $f=\sum_{i=1}^\infty x_i\mathbf{1}_{E_i}$. Функция $f\colon T\to X$ называется μ-измеримой, если существует последовательность простых функций (f_n), что $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n(t)-f(t)\|=0$ для μ-почти всех $t\in T$. Если последовательность (f_n) μ-измеримых функций почти всюду сходится к f, то f также μ-измерима. μ-измеримая функция $f\colon T\to X$ называется интегрируемой по Бохнеру, если существует последовательность (f_n) простых функций такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int_T\|f_n-f\|d\mu=0$. В этом случае интеграл Бохнера $\int_E fd\mu$ определяется для каждого $E\in\mathcal{F}$ с помощью соотношения $\int_E fd\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\int_E f_nd\mu$, где $\int_E f_nd\mu$ — интеграл, определенный обычным образом: $\sum_{i=1}^\infty x_i\mu(E_i\cap E)$. μ-измеримая функция $f\colon T\to X$ интегрируема по Бохнеру тогда и только тогда, когда функция $\|f\|\colon T\to\mathbb{R}^+$

является $(\mathcal{F},\mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$-измеримой и $\int_T \|f\| d\mu < \infty$. Если $p \in [1,\infty)$, то символом $L_p(T,X)$ обозначаем множество классов интегрируемых по Бохнеру функций $f\colon T \to X$, таких, что $\|f\|_{L_p} = (\int_T \|f\|^p d\mu)^{1/p} < \infty$.

1.2 Теория линейных операторов и полугрупп

Зафиксируем некоторые банаховы пространства X, Y, а также некоторый полный ортонормированный базис $\{h_i\}$ в банаховом пространстве X. Оператором Гильберта-Шмидта называют оператор $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ такой, что $\sum_i \|Bh_i\|_Y^2 < \infty$. В случае, когда X, Y являются сепарабельными гильбертовыми пространствами, множество операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{L}_2(X,Y)$ также образует сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle A, B\rangle_{\mathfrak{L}_2(X,Y)} = \sum_i \langle Ah_i, Bh_i\rangle_Y$. Будем считать далее, что X — сепарабельное гильбертово пространство. Если оператор $B \in \mathcal{L}(X)$ представим в виде $B = \sum_{i=1}^m A_i C_i$, где $A_1, \ldots, A_m, C_1, \ldots, C_m \in \mathfrak{L}_2(X, X)$, то такой оператор B называют ядерным. Множество всех ядерных операторов, действующих из X в X обозначают $L_1(X)$, оно является сепарабельным банаховым пространством с нормой $\|B\|_{L_1(X)} = \operatorname{tr} B := \sum_i \langle Bh_i, h_i\rangle_X$.

Пусть X — банахово пространство. Через $\mathcal{L}(X)$ обозначим множество линейных ограниченных операторов, действующих из X в X. Однопараметрическое семейство операторов $(S(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ называют полугруппой на X, если: 1) $S(0) = I$ (I — тождественный оператор); 2) $S(t+s) = S(t)S(s)$ для любых $s, t \geq 0$. Полугруппу операторов $(S(t))_{t\geq 0}$ называют сильно непрерывной (C_0-полугруппой), если $\|S(t)x - S(t_0)x\| \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$ для любого $x \in X$. Для сильно непрерывной полугруппы $(S(t))_{t\geq 0}$ на X оператор A, определенный на множестве $\mathcal{D}(A) = \left\{x \in X : \exists \lim\limits_{t\to +0} \frac{S(t)x - x}{t} \in X\right\}$ формулой $Ax = \lim\limits_{t\to +0} \frac{S(t)x - x}{t}$, $x \in \mathcal{D}(A)$, называют генератором полугруппы $(S(t))_{t\geq 0}$.

Предложение 1.1. [47, теорема 2.2]. *Пусть $(S(t))_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве X. Тогда существуют постоянные $M \geq 1$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}$ для всех $t \geq 0$.*

Теория полугрупп имеет тесные связи как с обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и с дифференциальными уравнениями в частных производных.

Пример 1.1. Рассмотрим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка d. В векторном виде она примет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$
$$x(0) = \xi,$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. Решение данной задачи выражается формулой Коши:

$$x(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t)S^{-1}(s)f(s)ds,$$

где $S(t)$ — базисная матрица системы, $S(0) = I$ — единичная матрица. Каноничесим выбором служит оператор $S(t) = e^{At}$. Нетрудно убедиться в том, что при таком выборе семейство операторов $(S(t))_{t\geq 0}$ является сильно непрерывной полугруппой в $\mathbb{R}^d$ с генератором $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Пример 1.2. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения в частных производных параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in (0,l), \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{1.2}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.3}$$

где функции φ, f таковы, что $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $f(t,0) = f(t,l) = 0$, $t \in \mathbb{R}^+$. Ее решение может быть выражено следующей формулой:

$$u(t,x) = \int_0^t G(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^t\int_0^l G(t-\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi d\tau, \tag{1.4}$$

$$G(t,x,y) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\pi n/l)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{l}\right). \tag{1.5}$$

Задача (1.1) — (1.3) может быть представлена в виде задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве. Пусть $H = \{z(\cdot) \in L_2[a,b] \,|\, z(0) = z(l) = 0\}$ — гильбертово пространство, $X(t) = u(t,\cdot) \in H$, $F(t) = f(t,\cdot) \in H$, $\psi = \varphi(\cdot) \in H$, $A = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор, действующий из H в H, с областью определения

$\mathcal{D}(A) = \{z(\cdot) \in \mathcal{W}^{2,2}[a,b] \,|\, z(0) = z(l) = 0\}$, всюду плотной в H. Задача (1.1) — (1.3) может быть интерпретирована следующим образом:

$$\frac{dX}{dt} = AX(t) + F(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{1.6}$$

$$X(0) = \psi. \tag{1.7}$$

Можно показать, что оператор A является генератором C_0-полугруппы $(S(t))_{t\geq 0}$ в H, определяемой соотношением

$$S(t)z(\cdot) = \int_0^l G(t,\cdot,\xi)z(\xi)d\xi, \quad t > 0.$$

При этом равенство (1.4) перепишется в виде соотношения, определяющего слабое решение задачи (1.6), (1.7): $X(t) = S(t)\psi + \int_0^t S(t-s)F(s)ds$.

1.3 Теория случайных процессов

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, т.е. измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с заданной на нем вероятностной мерой $\mathbb{P}$. Случайной величиной $\xi = \xi(\omega)$ называют любую функцию $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, являющуюся $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$-измеримой. Под случайным процессом $X(t,\omega) = X_t(\omega)$, $t \in \mathbb{R}$ понимают семейство заданных на Ω случайных величин $(X_t(\omega))_{t\in\mathbb{R}}$, зависящее от параметра $t \in \mathbb{R}$. Функцию $t \mapsto X(t,\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ называют траекторией процесса $X(t,\omega)$.

Математическим ожиданием случайной величины ξ называют интеграл Лебега $\int_\Omega \xi(\omega)d\,\mathbb{P}$. Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно σ-алгебры $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ называют измеримую относительно $\mathcal{G}$ случайную величину $\widetilde{\xi} = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})$ такую, что $\mathbb{E}\,\widetilde{\xi}\mathbf{1}_A = \mathbb{E}\,\xi\mathbf{1}_A$ для любого $A \in \mathcal{G}$.

Случайный процесс $X(t,\omega)$, $t \geq \tau$ называют центрированным, если $\mathbb{E}\,X(t,\omega) = 0$ для любого $t \geq \tau$. Случайный процесс $X(t,\omega)$, $t \geq 0$, принимающий значения в $\mathbb{R}^d$, называют гауссовским, если для любых $t_1, t_2, \ldots, t_n$ таких, что $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, случайная величина $Z = (X(t_1,\omega), X(t_2,\omega), \ldots, X(t_n,\omega)) \in \mathbb{R}^{dn}$ имеет (многомерное) нормальное распределение. Это означает, что существует вектор $M \in \mathbb{R}^{dn}$ и неотрицательно определенная матрица $C \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ такие, что

$$\mathbb{E}\, e^{i\langle u,Z\rangle} = \exp\left(-\frac{1}{2}u^\top Cu + i\langle u, M\rangle\right)$$

для любого вектора $u \in \mathbb{R}^{dn}$.

Рассмотрим возрастающее семейство под-σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$, $t \geq \tau$ из $\mathcal{F}$ ($\tau \in \mathbb{R}$), т.е. такие σ-алгебры $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$, что $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ для любых $t \geq s \geq \tau$. Семейство $(\mathcal{F}_t)$ называют непрерывным справа, если $\mathcal{F}_t = \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ для любого $t \geq \tau$. Непрерывное справа семейство σ-алгебр называют потоком σ-алгебр. Случайный процесс $X(t, \omega)$, заданный на $[\tau, +\infty) \times \Omega$ и принимающий значения в метрическом пространстве T, называют $\mathcal{F}_t$-согласованным, если для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(T)$ и любого $t \geq \tau$ множество $\{\omega \in \in \Omega :\ X(t,\omega) \in B\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}_t$. Заметим также, что для любого случайного процесса $X(t,\omega)$ существует поток σ-алгебр $(\mathcal{F}^{X_t})$, с которым данный процесс согласован. Такой поток можно построить следующим образом: обозначим через σ_t наименьшую σ-алгебру, относительно которой измеримы все случайные величины $X(s,\omega)$, $s \in [\tau, t]$, тогда $\mathcal{F}^{X_t} = \cap_{\varepsilon>0}\sigma_{t+\varepsilon}$. Далее для краткости будем опускать аргумент $\omega \in \Omega$ у случайных процессов. Пусть $\mathcal{J}$ — наименьшая σ-алгебра на $[\tau, +\infty) \times \Omega$, относительно которой измеримы все непрерывные слева $\mathcal{F}_t$-согласованные случайные процессы. Случайный процесс $X(t, \omega)$, заданный на $[\tau, +\infty) \times \Omega$ и принимающий значения в метрическом пространстве T, называют предсказуемым, если для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(T)$ множество $\{(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega :\ X(t,\omega) \in B\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{J}$. Процесс $X(t)$ называют $\mathcal{F}_t$-мартингалом, если он $\mathcal{F}_t$-согласован, $\mathbb{E}\,|X(t)| < +\infty$ для всех t и $\mathbb{E}(X(s)|\mathcal{F}_t) = X(t)$ для всех $s \geq t$.

Пусть U — сепарабельное гильбертово пространство. Зафиксируем некоторый ядерный симметрический положительно определенный оператор $Q \in \in \mathcal{L}(U)$, для которого существуют полный ортонормированный базис $\{e_k\} \subset \subset U$ и последовательность положительных действительных чисел (λ_k), таких, что $Qe_k = \lambda_k e_k$, $k \geq 1$, tr$Q = \sum_k \lambda_k < \infty$. $\mathcal{F}_t$-согласованным Q-броуновским движением (винеровским процессом) со значениями в U называют непрерывный случайный процесс $W(t)$, $t \geq 0$, принимающий значения в $\mathbb{R}^d$ и удовлетворяющий равенству

$$\mathbb{E}\left(e^{i\langle \xi, W(t)-W(s)\rangle_U}\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right) = e^{-(t-s)\langle Q\xi,\xi\rangle_U/2} \quad \text{п.н.}$$

для любого $\xi \in U$ и любых $t \geq s \geq 0$. Если $W(t)$ — $\mathcal{F}_t$-согласованное Q-броуновское движение, то существует последовательность независимых одномерных $\mathcal{F}_t$-броуновских движений $W_k(t)$, $k \geq 1$ таких, что $W(t) = \sum_k \sqrt{\lambda_k} W_k(t) e_k$, причем данный ряд сходится локально равномерно на $\mathbb{R}^+$ п.н. В случае $U = \mathbb{R}^d$ можно выбрать оператор $Q = I_d$, и в этом случае приходим к определению d-мерного $\mathcal{F}_t$-согласованного броуновского движения. Можно показать, что для одномерного броуновского движения справедливы следующие свойства [4, гл. 1, §7], [14, раздел 2.2]:

– процесс $W(t)$ имеет независимые приращения, т.е. для любых $t_0, t_1, \ldots, t_n$ таких, что $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ случайные величины $W(t_0), W(t_1) - W(t_0), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ независимы в совокупности;

– приращения $W(t) - W(s)$ для любых $t > s \geq 0$ распределены по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией $(t - s)$;

– процесс $W(t)$ имеет неограниченную вариацию на любом отрезке $[S, T] \subset \mathbb{R}^+$, т.е.

$$\sup_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^{n} |W(t_j) - W(t_{j-1})| = +\infty, \quad \text{п.н.}$$

где супремум берется по всем разбиениям $\mathcal{P} = \{S \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq T\}$;

– процесс $W(t)$ является $(\mathcal{F}_t)$-мартингалом.

Дробным броуновским движением с индексом Харста $H \in (0,1)$ называют центрированный непрерывный гауссовский процесс $B^{(H)}(t)$, $t \geq 0$ с ковариационной функцией

$$\mathbb{E}\, B^{(H)}(t) B^{(H)}(s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\right).$$

Существование дробного броуновского движения следует из теоремы существования центрированного гауссовского процесса с заданной ковариационной функцией [50, гл. I, раздел 24]. Процесс $B(t)$ впервые был рассмотрен Колмогоровым в статье [6] в 1940 г., где он назывался спиралью Винера. Название «дробное броуновское движение» процессу $B(t)$ было дано Б. Мандельбротом и Дж. Ван Нессом статье [42] в 1968 г.

Можно показать, что при $H = 1/2$ дробное броуновское движение $B^{(1/2)}(t)$ является винеровским процессом. Иными словами, одномерный процесс $W(t)$ является частным процессом из семейства $B^{(H)}(t)$ при $H = 1/2$. Кроме того, дробное броуновское движение обладает следующими свойствами [18, гл. 1]:

– процесс $B^{(H)}(t)$ имеет независимые приращения тогда и только тогда, когда $H = 1/2$; при $H > 1/2$ приращения положительно коррелированны (т.е.

$\mathbb{E}(B^{(H)}(t_3) - B^{(H)}(t_2))(B^{(H)}(t_2) - B^{(H)}(t_1)) > 0$ для любых $t_3 > t_2 > t_1 \geq 0$), а при $H < 1/2$ — отрицательно;

– почти все траектории процесса $B^{(H)}(t)$ непрерывны по Гельдеру с любым показателем, строго меньшим H, т.е. для любого $\varepsilon > 0$:

$$\|B^{(H)}\|_{H-\varepsilon} = \sup_{0 \leq s < t} \frac{|B^{(H)}(t) - B^{(H)}(s)|}{|t-s|^{H-\varepsilon}} < +\infty$$

– почти все траектории процесса $B^{(H)}(t)$ не дифференцируемы ни в одной точке для любого $H \in (0,1)$ (в том числе траектории винеровского процесса не дифференцируемы).

Под d-мерным дробным броуновским движением будем понимать процесс $B(t) = (B_1(t), \ldots, B_d(t))$, принимающий значения в $\mathbb{R}^d$, компоненты которого являются независимыми одномерными дробными броуновскими движениями.

1.4 Интегралы по броуновскому движению

Под стохастическим дифференциальным уравнением понимают формальное уравнение вида

$$dX(t,\omega) = f(t,\omega, X(t,\omega))dt + g(t,\omega, X(t,\omega))dB(t,\omega),$$

в котором $B(t,\omega)$ — стандартное или дробное броуновское движение. Формализм приведенной записи заключается в том, что ввиду недифференцируемости траекторий процесса $B(t)$, выражение $dB(t)$ лишено смысла, что, в свою очередь, делает невозможным понимание стохастических дифференциальных уравнений в русле классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому, не разрывая связи с классической теорией, опираясь на интегральный критерий, стохастическое дифференциальное уравнение понимают в интегральном смысле, как уравнение вида

$$X(t,\omega) = X(s,\omega) + \int_s^t f(\tau,\omega, X(\tau,\omega))d\tau + \int_s^t g(\tau,\omega, X(\tau,\omega))dB(\tau,\omega).$$

Здесь интеграл по $d\tau$ определяется как интеграл Лебега при каждом фиксированном ω. В свою очередь, определение интеграла по dB сильно зависит от свойств процесса B. Рассмотрим несколько способов определения интеграла $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$, которые будут использоваться в данной работе.

1.4.1 Потраекторный интеграл Янга

Обратимся сначала к случаю, когда $B(t)$ — дробное броуновское движение, принимающее значения в $\mathbb{R}^d$, все компоненты которого имеют индекс Харста $H > 1/2$. Тогда почти все траектории процесса $B(t)$ непрерывны по Гельдеру с любым показателем, меньшим H. Из результатов Янга [56] следует, что для любого процесса $\phi(t,\omega)$, почти все траектории которого непрерывны по Гельдеру с показателем $\gamma > 1 - H$, можно определить интеграл по $B(t)$ как потраекторный интеграл Римана-Стилтьеса (зачастую называемый интегралом Янга), т.е. как предел с вероятностью 1 интегральных сумм

$$\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^n \phi(\tau_k,\omega)(B(t_k,\omega) - B(t_{k-1},\omega)).$$

Здесь предел понимается не зависящим от последовательности разбиений $\mathcal{P} = \{S \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le T\}$ и промежуточных точек $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $|\mathcal{P}| = \max |t_k - t_{k-1}|$, $k = 1, \ldots, n$. В свою очередь, применительно к стохастическим дифференциальным уравнениям, показатель непрерывности по Гельдеру процесса $\phi(t,\omega) = \sigma(t, X(t,\omega))$ определяется показателем непрерывности решения $X(t,\omega)$ (совпадающим с показателем $B(t,\omega)$). Таким образом, с необходимостью возникает неравенство $H > 1 - H$, откуда $H > 1/2$.

Обозначим через $V_p(f,[S,T]) = \left(\sup\limits_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p\right)^{1/p}$, $p > 0$, p-вариацию функции $f(t)$ на отрезке $[S,T]$ (супремум берется по всем разбиениям $\mathcal{P} = \{S \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le T\}$). Для интеграла Янга справедливо следующее фундаментальное свойство.

Предложение 1.2 (неравенство Лав-Янга, [56]). *Пусть функции $f(t)$, $g(t)$ таковы, что $V_p(f,[S,T]), V_q(g,[S,T]) < +\infty$ для некоторых $p,q > 0$ таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. Если к тому же функции f и g не имеют общих точек разрыва, то интеграл Янга $\int_S^T f(t)dg(t)$ существует, и для него справедливо следующее неравенство:*

$$\left|\int_S^T f(t)dg(t) - f(\tau)(g(T) - g(S))\right| \le C_{p,q} V_p(f,[S,T]) V_q(g,[S,T])$$

для любого $\tau \in [S,T]$, где $C_{p,q} = \zeta(p^{-1} + q^{-1})$, где $\zeta(s) = \sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^s}$ — дзета-функция Римана.

1.4.2 Стохастический интеграл Ито

Рассмотрим случай, когда $B(t) = W(t)$ — стандартное броуновское движение ($H = 1/2$), принимающее значения в $\mathbb{R}^d$. Поскольку процесс $B(t)$ имеет неограниченную вариацию, то интегральные суммы Стилтьеса для интеграла $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$ п.н. не будут сходиться, т.е. данный интеграл невозможно определить в потраекторном смысле как интеграл Стилтьеса. Приведем простой пример, иллюстрирующий данный факт: рассмотрим интеграл $\int_0^T B(t,\omega)dB(t,\omega)$ по одномерному стандартному броуновскому движению $B(t)$ как потраекторный предел (для почти всех $\omega \in \Omega$) двух интегральных сумм:

$$I_{\mathcal{P}}^{(1)} = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} B(t_j)(B(t_{j+1}) - B(t_j)), \quad I_{\mathcal{P}}^{(2)} = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} B(t_{j+1})(B(t_{j+1}) - B(t_j))$$

на разбиении $\mathcal{P} = \{0 = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n = T\}$ отрезка $[0,T]$. Тогда с одной стороны ввиду независимости приращений $B(t)$:

$$\mathbb{E}\, I_{\mathcal{P}}^{(1)} = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}\, B(t_j)\,\mathbb{E}(B(t_{j+1}) - B(t_j)) = 0.$$

А с другой стороны, поскольку приращения $B(t) - B(s)$ распределены по нормальному закону с дисперсией $t - s$:

$$\mathbb{E}\, I_{\mathcal{P}}^{(2)} = \mathbb{E}(I_{\mathcal{P}}^{(2)} - I_{\mathcal{P}}^{(1)}) = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}(B(t_{j+1}) - B(t_j))^2 = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} (t_{j+1} - t_j) = T.$$

Таким образом, предел интегральных сумм Римана-Стилтьеса зависит от выбора промежуточных точек, что недопустимо. Поэтому для стандартного броуновского движения предел интегральных сумм понимается в смысле $\mathcal{L}_2$, а сами суммы строятся несколько иначе. Далее приведем краткое описание подхода Ито к построению таких интегралов.

Рассмотрим для начала одномерный процесс $B(t) \in \mathbb{R}$. Выделим класс случайных процессов $\phi(t,\omega)\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$, обозначаемый $\mathcal{L}_2(S,T)$, со следующими свойствами:

1. процесс $\phi(t,\omega)$ является $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-измеримым;
2. процесс $\phi(t,\omega)$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным;
3. $\|\phi\|^2_{\mathcal{L}_2(S,T)} = \mathbb{E}\int_S^T (\phi(t,\omega))^2 dt < +\infty$.

Будем говорить, что последовательность $\phi_n \in \mathcal{L}_2(S,T)$ сходится к $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$ в $\mathcal{L}_2(S,T)$, если $\|\phi - \phi_n\|^2_{\mathcal{L}_2(S,T)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Для каждой функции $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$ можно построить сходящуюся к ϕ в $\mathcal{L}_2(S,T)$ последовательность ограниченных непрерывных по t функций $\phi_n \in \in \mathcal{L}_2(S,T)$ следующим образом [14, гл. 3]:

$$\phi_n(t,\omega) = \int_0^t \psi_n(s-t)\bar{\phi}_n(t,\omega)ds,$$

$$\bar{\phi}_n(t,\omega) = \begin{cases} -n, & \text{если } \phi(t,\omega) < -n, \\ \phi(t,\omega) & \text{если } -n \leq \phi(t,\omega) \leq n, \\ n, & \text{если } \phi(t,\omega) > n \end{cases}$$

Здесь $\psi_n(t)$ — любые наперед заданные непрерывные функции такие, что $\psi(t) = 0$, $t \notin (1/n, 0)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t) = 1$. В свою очередь, для $\phi_n(t,\omega)$ можно построить последовательность ступенчатых функций $\phi_{nm}(t,\omega) \in \mathcal{L}_2(S,T)$, сходящуюся к ϕ_n в $\mathcal{L}_2(S,T)$, следующего вида [14, гл. 3]:

$$\phi_{nm}(t,\omega) = \sum_{j=0}^{m} \phi_n(t_j,\omega)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t),$$

где точки $t_j \in \mathcal{P}$ образуют разбиение отрезка $[S,T]$, $t_0 = S$, $t_{m+1} = T$. Таким образом, для любой функции $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$ можно построить сходящуюся к ней в $\mathcal{L}_2(S,T)$ последовательность ступенчатых функций $\phi_m \in \mathcal{L}_2(S,T)$.

Интегралом Ито $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$ функции $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$ называют элемент $\mathcal{I}(\phi) \in \mathcal{L}_2(S,T)$, являющийся пределом последовательности $\mathcal{I}(\phi_m)$ в $\mathcal{L}_2(S,T)$ интегралов Ито от ступенчатых функций ϕ_m следующего вида:

$$I(\phi_m) = \sum_{j=0}^{m} \phi_m(t_j,\omega)(B(t_{j+1},\omega) - B(t_j,\omega)).$$

Интеграл Ито от функции $\phi\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{n\times d}$ по d-мерному броуновскому движению $B(t)$ определяется аналогичным образом. Говорят, что функция $\phi(t,\omega) = (\phi_{jk}(t,\omega)) \in \mathcal{L}_2(S,T)$, если каждая ее компонента $\phi_{jk}(t,\omega) \in \in \mathcal{L}_2(S,T)$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,d}$. Интеграл Ито $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$ представляет собой вектор размера n, в которой элемент в позиции j есть сумма одномерных интегралов Ито, определенных выше:

$$\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega) = \left(\sum_{k=1}^{d} \int_S^T \phi_{jk}(t,\omega)dB^{(k)}(t,\omega)\right)_{j=1}^{n}.$$

Приведем некоторые свойства интеграла Ито [14, гл. 3], [4, с. 56–60]:

1. нулевое среднее: $\mathbb{E}\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega) = 0$;
2. изометрия: $\mathbb{E}\left(\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)\right)^2 = \mathbb{E}\int_S^T (\phi(t,\omega))^2 dt$;
3. интеграл Ито $\int_0^t \phi(\tau,\omega)dB(\tau,\omega)$ является $(\mathcal{F}_t)$-мартингалом.

Пусть заданы измеримые $\mathcal{F}_t$-согласованные процессы $a\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $b\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{n\times d}$ такие, что $\int_0^t |a(s,\omega)|^2 ds < +\infty$ и $\int_0^t |b(s,\omega)| ds < +\infty$ п.н. для любого $t \geq 0$, $X(0,\omega)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина и $X(t,\omega)$ — n-мерный случайный процесс, определяемый равенством

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t a(s,\omega)ds + \int_0^t b(s,\omega)dB(s).$$

Теорема 1.2. (Фомула Ито, [4, теорема 5.1]). *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — *функция, непрерывная вместе со своими частными производными* $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = 1,\ldots,n$. *Тогда для процесса* $X(t,\omega)$, *определенного выше, п.н. справедливо равенство*

$$f(t,X(t,\omega)) = f(0,X(0,\omega)) + \int_0^t \left(\frac{\partial f(\tau, X(\tau,\omega))}{\partial t} + \frac{\partial f(\tau, X(\tau,\omega))}{\partial x} a(\tau,\omega) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 f(\tau, X(\tau,\omega))}{\partial x^2} b(\tau,\omega)b(\tau,\omega)^\top\right)\right)d\tau + \int_0^t \frac{\partial f(\tau, X(\tau,\omega))}{\partial x} b(\tau,\omega)dB(\tau,\omega).$$

Далее будет дано определение интеграла Ито по $\mathcal{F}_t$-согласованному Q-броуновскому движению $W(t)$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве U, Q — симметрический положительно определенный ядерный оператор. Пусть H — также сепарабельное гильбертово пространство. Введем пространство измеримых $\mathcal{F}_t$-согласованных процессов $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathfrak{L}_2(U,H)$ (обозначаемое $\mathcal{L}_2$) таких, что для любого $T > 0$:

$$\|\Phi(t)\|_{2,T} = \left(\mathbb{E}\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{\mathfrak{L}_2(U,H)} ds\right)^{1/2} =$$
$$= \left(\mathbb{E}\int_0^T \mathrm{tr}\left((\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^\star\right) ds\right)^{1/2} < \infty.$$

Процессы Φ,Φ' отождествляются, если $\|\Phi - \Phi'\|_{2,T} = 0$ для любого $T > 0$. Выделим подмножество $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_2$ процессов $\Phi \in \mathcal{L}_0$, для которых существует последовательность вещественных чисел $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ \ldots$, $t_n \to \infty$, а также последовательность $\mathcal{F}_{t_i}$-измеримых случайных величин (Φ_i)

со значениями в $\mathfrak{L}_2(U,H)$ таких, что $\sup_i ess\sup_\omega \ \|f_i(\omega)\| < \infty$ и $\Phi(0,\omega) = \Phi_0(\omega)$, $\Phi(t,\omega) = \Phi_i(t,\omega)$ для $t \in (t_i,t_{i+1}]$, $i = 1,2,\ldots$ Для $\Phi \in \mathcal{L}_0$ положим $\int_0^t \Phi(s)dW(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \Phi_n(W(t) - W(t_n))$ для $t_n < t \leq t_{n+1}$, $n = 1,2,\ldots$ Можно показать, что множество $\mathcal{L}_0$ плотно в $\mathcal{L}_2$ по норме пространства $\mathcal{L}_2$, а посему для любого процесса $\Phi \in \mathcal{L}_2$ найдется последовательность процессов $(\Phi_n) \subset \mathcal{L}_0$, сходящаяся к Φ по норме $\mathcal{L}_2$. Предел сходящейся последовательности $\int_0^t \Phi_n(s)dW(s)$, являющийся H-значным непрерывным п.н. мартингалом, обозначаемым $\int_0^t \Phi(s)dW(s)$, называют интегралом Ито от процесса $\Phi(t)$ по Q-броуновскому движению $W(t)$.

Предложение 1.3. (Формула Ито для гильбертовых пространств [49, с. 105]). *Пусть $\Phi(t)$, $t \in [0,T]$, — квадратично интегрируемый случайный процесс со значениями в $\mathfrak{L}_2(U,H)$, $\varphi(t)$, $t \in [0,T]$, — предсказуемый случайный процесс со значениями в H такой, что функция $\|\varphi(t)\|_H$ является $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$-измеримой и $\int_\Omega \|\varphi(t)\|_H d\,\mathbb{P} < \infty$. Пусть также $X(0)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина со значениями в H, а процесс $X(t)$ определяется равенством*

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \varphi(s)ds + \int_0^t \Phi(s)dW(s),\ t \in [0,T].$$

Тогда для любой функции $F\colon [0,T]\times H \to \mathbb{R}$, равномерно непрерывной на каждом ограниченном подмножестве из $[0,T] \times H$ вместе со своими частными производными F'_t, F'_x, F''_{xx}, для любого $t \in [0,T]$ п.н. справедливо равенство

$$F(t,X(t)) = F(0,X(0)) + \int_0^t \Big(F'_t(s,X(s)) + \langle F'_x(s,X(s)), \varphi(s)\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(F''_{xx}(s,X(s))(\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^\star\right)\Big)ds + \int_0^t \langle F'_x(s,X(s)),\Phi(s)dW(s)\rangle.$$

Предложение 1.4. (Неравенство Буркхольдера [48]). *Пусть $p > 1$, $S(t)$ — C_0-полугруппа на H. Тогда для любого $\mathcal{F}_t$-согласованного процесса $\Phi\colon [0,T] \times \Omega \to \mathfrak{L}_2(U,H)$ такого, что $\mathbb{E}\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|^p ds\right) < +\infty$, выполнятся неравенство*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{\tau\in[0,t]} \left\|\int_0^\tau S(\tau - s)\Phi(s)dW(s)\right\|^p\right) \leq C_{p,T}\,\mathbb{E}\left(\int_0^t \|\Phi(s)\|^p ds\right),\ t \in [0,T]$$

где $C_{p,T} = \left(\frac{p^2-p}{2}\right)^{p/2} \left(\sup_{t\in[0,T]} \|S(t)\|\right)^p T^{p/2-1}$.

1.4.3 Потраекторный интеграл Губинелли

Наконец, рассмотрим случай, когда $B(t)$ — дробное броуновское движение, принимающее значения в $\mathbb{R}^d$, все компоненты которого имеют индекс Харста $H < 1/2$. Вновь, поскольку процесс $B(t)$ имеет неограниченную вариацию, то интегральные суммы Стилтьеса для интеграла $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$ п.н. не будут сходиться, однако, оказывается, что в интегральные суммы можно ввести дополнительные слагаемые, позволяющие им сходиться п.н. Данный метод возник в теории грубых траекторий [41], [25], [30], позволяющем определить интегралы $\int_0^T Y_t dZ_t$ для функций Y_t, Z_t, непрерывных по Гельдеру (не обязательно случайных процессов, зависящих также от ω). Приведем некоторые основные положения данной теории в соответствии с подходом Губинелли [30], [25, гл. 4].

Будем обозначать через V, W конечномерные банаховы пространства над полем $\mathbb{R}$. Пространство функций, непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha \in \in (0,1]$, будем обозначать следующим образом:

$$C^\alpha([0,T],W) = \left\{ Z\colon [0,T] \to W \;\middle|\; \|Z\|_\alpha = \sup_{s,t\in[0,T]:s\neq t} \frac{|Z_t - Z_s|_W}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\}.$$

Через $\|\cdot\|_{\alpha;I}$ обозначим норму Гельдера с показателем α на отрезке I, а через $\|\cdot\|_{\alpha;I,\delta}$ — норму Гельдера с показателем α, взятую по подотрезкам отрезка I длины не более δ, т.е.

$$\|Y\|_{\alpha;I} = \sup_{\substack{s,t\in I\\ s\neq t}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}, \quad \|Y\|_{\alpha;I,\delta} = \sup_{\substack{s,t\in I\\ 0<|t-s|\leq\delta}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$$

для функций $Y \in C^\alpha([0,T],U_1)$ или $Y \in C_2^\alpha([0,T]^2,U_2)$. Очевидно,

$$\|\cdot\|_{\alpha;I,\delta} \leq \|\cdot\|_{\alpha;I} \leq \|\cdot\|_{\alpha;[0,T],|I|} \leq \|\cdot\|_{\alpha;[0,T]}$$

для любых $I \subset [0,T]$, $\delta \in (0,|I|]$, где I — длина отрезка I.

В дальнейшем будут рассматриваться функции $R(s,t)$, отображающие $(s,t) \in [0,T]^2$ непрерывно в W, которые удовлетворяют некоторому аналогу свойства α-непрерывности по Гельдеру [25, глава 1]. Более точно, будем считать, что функция двух переменных $R(s,t) = R_{s,t} \in C_2^\alpha([0,T]^2,W)$, если существует константа C такая, что $|R_{s,t}| \leq C|t-s|^\alpha$ для всех $(s,t) \in [0,T]^2$. Наименьшую такую константу будем обозначать как

$$\|R\|_\alpha = \sup_{s,t\in[0,T]:s\neq t} \frac{|R_{s,t}|_W}{|t-s|^\alpha}.$$

Отметим также, что если $Z \in C^\alpha([0,T],W)$ — непрерывная по Гельдеру функция одной переменной, то ее приращения $(s,t) \mapsto Z_t - Z_s$ принадлежат пространству $C_2^\alpha([0,T]^2,W)$. Поэтому обозначение $Z_{s,t} = Z_t - Z_s$ будет также использоваться для приращений функции одной переменной Z, определенной на $[0,T]$.

Пусть $\alpha \in (1/3,1/2]$.

Говорят, что для функции $Z\colon [0,T] \to W$ функция $\mathbb{Z}\colon [0,T]^2 \to W \otimes W$ является процессом второго порядка над Z, если она удовлетворяет следующему тождеству Чена:

$$\mathbb{Z}_{s,t} - \mathbb{Z}_{s,u} - \mathbb{Z}_{u,t} = Z_{s,u} \otimes Z_{u,t}$$

для любой тройки $(s,u,t) \in [0,T]^3$.

Под множеством α-непрерывных по Гельдеру грубых траекторий над W (обозначаемым $\mathscr{C}^\alpha([0,T],W)$) понимают множество всех пар $(Z,\mathbb{Z})$ таких, что функция $Z \in C^\alpha([0,T],W)$ и $\mathbb{Z}$ является процессом второго порядка над Z, удовлетворяющим условию $\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha} < \infty$.

Под множеством α-непрерывных по Гельдеру геометрических грубых траекторий над W (обозначаемым $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T],W)$) понимают множество всех пар $(Z,\mathbb{Z}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T],W)$, для которых имеет место следующее соотношение:

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{Z}_{s,t}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{Z}_{s,t} + \mathbb{Z}_{s,t}^T\right) = \frac{1}{2} Z_{s,t} \otimes Z_{s,t}$$

для любой пары $(s,t) \in [0,T]^2$.

Говорят, что функция $Y \in C^\alpha([0,T],\mathcal{L}(W,V))$ управляется функцией $Z \in C^\alpha([0,T],W)$, если существует $Y' \in C^\alpha\big([0,T],\mathcal{L}(W,\mathcal{L}(W,V))\big)$ (называемое производной Губинелли Y), такое, что остаток $R_{s,t}^Y = Y_{s,t} - Y_s' Z_{s,t}$ удовлетворяет неравенству $\|R^Y\|_{2\alpha} < +\infty$. Множество всех (Y,Y') таких, что Y управляется Z, будем обозначать $\mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(W,V))$.

Замечание 1.1. Множество $\mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(W,V))$ является банаховым пространством с нормой $\|(Y,Y')\| = |Y_0| + |Y_0'| + \|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha}$.

Замечание 1.2. В общем случае Y' определено неоднозначно, и мы будем называть производной Губинелли любое Y', удовлетворяющее сформулированному выше определению.

Замечание 1.3. Далее для обозначения производной Губинелли будем использовать $'$, а обычную производную будем записывать с помощью дифференциального оператора D.

Пусть $(Z,\mathbb{Z}) \in \mathscr{C}^{\alpha}([0,T],W)$, а также $(Y,Y') \in \mathcal{D}_{Z}^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(W,V))$. Потраекторным интегралом Губинелли Y по Z называют предел интегральных сумм

$$\int_0^T YdZ = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\mathcal{P}} (Y_{t_i}Z_{t_i,t_{i+1}} + Y'_{t_i}\mathbb{Z}_{t_i,t_{i+1}}), \tag{1.8}$$

где $|\mathcal{P}| = \max|t_{i+1}-t_i|$ — диаметр разбиения $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = T\}$, а предел понимается не зависящим от последовательности разбиений $\mathcal{P}$. Если $Z \in C^{\beta}([0,T],W)$, $Y \in C^{\gamma}([0,T],\mathcal{L}(W,V))$, $\beta+\gamma > 1$, то потраекторный интеграл Губинелли совпадает с потраекторным интегралом Янга, определяемым как предел интегральных сумм

$$\int_0^T YdZ = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\mathcal{P}} Y_{t_i}Z_{t_i,t_{i+1}}.$$

Замечание 1.4. Слагаемое $Y'_{t_i}\mathbb{Z}_{t_i,t_{i+1}}$ записано корректно в том смысле, что $\mathcal{L}(W,L(W,V)) \cong \mathcal{L}(W\otimes W,V)$. Действительно, указанное произведение можно понимать как результат действия билинейной формы на тензорное произведение двух векторов. Более точно, если

$$\mathbb{Z} = z\otimes z = (z_j z_k)\,, \quad Y' = \left(y'_{ijk}\right),$$
$$i = 1,2,\ldots,\mathrm{dim}V, \quad j,k = 1,2,\ldots,\mathrm{dim}W,$$

то

$$Y'\mathbb{Z} = \left(\sum_{j,k=1}^{\mathrm{dim}W} y'_{ijk}z_j z_k\right)_{i=1}^{\mathrm{dim}V}.$$

Посему потраекторный интеграл, определенный выше, принимает значения в пространстве V.

Далее будет существенно использоваться следующее предложение [25, теорема 4.10], [30, предложение 1].

Предложение 1.5. *Пусть функция* $Z \in \mathscr{C}^\alpha(I,W)$ *и* $(Y,Y') \in \mathcal{D}_Z^{2\alpha}(I,\mathcal{L}(W,V))$, $I = [0,T]$. *Тогда существует константа* $C > 0$, *зависящая лишь от* α *и* $|I| = T$, *такая, что для любых* $s,t \in I$ *выполняется неравенство*

$$\left|\int_s^t Y_r dZ_r - Y_s Z_{s,t} - Y_s'\mathbb{Z}_{s,t}\right| \le C\left(\|Z\|_{\alpha;I}\|R^Y\|_{2\alpha;I} + \|\mathbb{Z}\|_{2\alpha;I}\|Y'\|_{\alpha;I}\right)|t-s|^{3\alpha}.$$

Причем константа $C = C(\alpha,|I|)$ *может быть выбрана не зависящей от* $|I| = T$, *если* $T \in (0,1]$.

Замечание 1.5. В предложении 1.5 несущественен тот факт, что отрезок I имеет вид $[0,T]$. Для произвольного отрезка $I = [a, a+T]$ предложение также справедливо ввиду замены переменных $\bar{s} = s - a$, $\bar{t} = t - a$ ($s,t \in [a,a+T]$, $\bar{s},\bar{t} \in [0,T]$) и замен функций $\bar{Y}_{\bar{s}} = Y_{a+\bar{s}}$, $\bar{Z}_{\bar{s}} = Z_{a+\bar{s}}$ (очевидно, указанные нормы и интегралы сохраняют свои значения).

Необходимость ограничения $\alpha > 1/3$ на интуитивном уровне можно пояснить следующим образом: в слагаемом вида $Y'\mathbb{Z}$ в интегральной сумме функция $Y' \in C^\alpha$, а $\mathbb{Z} \in C_2^{2\alpha}$. Из условия сходимости интегральных сумм потраекторного интеграла Янга можно заключить, что $\alpha + 2\alpha > 1$, т.е. $\alpha > 1/3$.

Вернемся к дробному броуновскому движению. При $H \in (1/3, 1/2)$ п.н. имеет место включение $B(t) \in C^{H^*}([0,T],\mathbb{R}^d)$ для любого $H^* < H$, $H^* > 1/3$. Поэтому для любого процесса $\phi(t,\omega)$ п.н. управляемого дробным броуновским движением $B(t)$ можно определить потраекторный интеграл Губинелли как предел п.н. интегральных сумм

$$\int_0^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{t_i,t_{i+1}\in\mathcal{P}}(\phi(t_i,\omega)B_{t_i,t_{i+1}}(\omega) + \phi'(t_i,\omega)\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}(\omega))$$

при некотором выборе процесса второго порядка $\mathbb{B}$ над B. В главе 3 будет приведено явное определение процесса второго порядка над B, удовлетворяющего указанным выше определениям.

ГЛАВА 2
УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРИТЯЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть заданы следующие объекты: вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$, два сепарабельных гильбертовых пространства H и U; ядерный симметрический положительно определенный оператор Q_w на пространстве U; $\mathcal{F}_t$-согласованное Q_w-броуновское движение $W(t,\omega)$ со значениями в U и ковариационным оператором Q_w.

2.1 Стохастические дифференциальные уравнения в конечномерных гильбертовых пространствах

Данный раздел посвящен исследованию устойчивости в конечномерных пространствах $H = U = \mathbb{R}^d$. В этом случае $Q_w = I_d$ и $W(t)$ — стандартное броуновское движение со значениями в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t), \tag{2.1}$$

где $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d}$ — измеримые по Борелю функции такие, что $f(t, 0) = 0$ и $g(t, 0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^d$ и выполнено условие линейного порядка роста по x, то есть существует постоянная C такая, что для любых $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$, выполняется неравенство $|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq C(1 + |x|)$.

Пусть $\sigma(t,x) = g(t,x)g(t,x)^\top$. Для каждого $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ построим наименьшие выпуклые замкнутые множества $A(t,x)$, $B(t,x)$, содержащими соответственно матрицу $\sigma(t, x)$ и вектор $f(t,x)$ и все предельные точки $\sigma(t,x')$ и $f(t, x')$ при $x' \to x$.

Определение 2.1. Если:

1) существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с потоком $\mathcal{F}_t$ и отображение $X : \Omega \to C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ такие, что функция $(t, \omega) \to X(t, \omega) \in \mathbb{R}^d$ — $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-измерима и $\mathcal{F}_t$-согласована;

2) существует $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$, $W(0) = 0$ п. н.;

3) существуют измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы $v\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ и $u\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$, удовлетворяющие для $(\mu \times \mathbb{P})$-почти всех $(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ включениям

$$v(t) \in B(t, X(t,\omega)), \quad u(t)u^\top(t) \in A(t, X(t,\omega)),$$

и такие, что для любого $T \in \mathbb{R}^+$ выполняется неравенство $\int_0^T (|v(s)| + |u(s)|^2)ds < \infty$ п. н.;

4) с вероятностью 1 для всех $t \in \mathbb{R}^+$ выполняется равенство

$$X(t) = X(0) + \int_0^t v(\tau)d\tau + \int_0^t u(\tau)dW(\tau),$$

то набор $(X, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, W(t), v(t), u(t))$ (или короче X) называем β-слабым решением уравнения (2.1).

Заметим, что условия $f(t,0) = 0$ и $g(t,0) = 0$ обеспечивают существование нулевого решения уравнения (2.1). Из теоремы 2.3 книги [10] следует, что если функции f и g измеримы по Борелю и имеют линейный порядок роста, то для любой вероятности ν на $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ с компактным носителем уравнение (2.1) имеет слабое решение $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, W(t), x(t), v(t), u(t))$ с начальным распределением ν.

О п р е д е л е н и е 2.2. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (2.1) устойчиво по вероятности, если для любых ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого слабого решения $x(t)$ уравнения (2.1), удовлетворяющего условию $|x_0| \le \delta$ п.н., выполняется неравенство (2.2):

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\ge 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2. \tag{2.2}$$

О п р е д е л е н и е 2.3. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (2.1) асимптотически устойчиво по вероятности, если нулевое решение уравнения (2.1) устойчиво по вероятности и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого слабого решения $x(t)$ уравнения (2.1), удовлетворяющего условию $|x_0| \le \delta$ п.н., выполняется неравенство (2.3):

$$\mathbb{P}\{\lim_{t\to\infty} x(t) = 0\} \ge 1 - \varepsilon. \tag{2.3}$$

Предположим, что определена функция $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$. Будем говорить, что функция $V(t,x)$ удовлетворяет **условию** L, если она непрерывно дифференцируема по t, дважды непрерывно дифференцируема по x и существует $\delta > 0$ такое, что для любого $t \in \mathbb{R}^+$ и любого $x \in \mathbb{R}^d$ такого, что $|x| \le \delta$, выполнено неравенство $BV(t,x) \le 0$, где

$$BV(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sup_{v \in F(t,x)} \left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} v \right) + \frac{1}{2} \sup_{u \in G(t,x)} \operatorname{tr} \left(\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} u u^\top \right). \quad (2.4)$$

Следующие две теоремы[1], дающие достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по вероятности нулевого решения уравнения (2.1), доказаны в статье 1–А.

Теорема 2.1. *Пусть функция $V(t,x)$ удовлетворяет условию L, причем $V(t,0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$, $V(t,x) \ge \alpha(|x|) > 0$ при $0 < |x| \le \delta$ и всех $t \in \mathbb{R}^+$, где $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – некоторая функция, δ – число из условия L. Кроме того, предположим, что $\lim\limits_{x \to 0} \sup\limits_{t > 0} V(t,x) = 0$. Тогда нулевое решение уравнения* (2.1) *устойчиво по вероятности.*

Теорема 2.2. *Пусть существуют число $\delta > 0$ и функция $V : \mathbb{R}^+ \times \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$, дифференцируемая по $t \in \mathbb{R}^+$, дважды дифференцируемая по x, удовлетворяющие условиям:*

1) $BV(t,x) < \beta(\varepsilon) < 0$ *при всех x таких, что $\varepsilon \le |x| \le \delta$, и при всех $t \in \mathbb{R}^+$, где $\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$ – некоторая функция;*

2) $\lim\limits_{x \to 0} \sup\limits_{t > 0} V(t,x) = 0$*;*

3) $V(t,0) = 0$ *при всех $t \in \mathbb{R}^+$;*

4) $V(t,x) \ge \alpha(|x|) > 0$ *при всех x таких, что $|x| \le \delta$, и всех $t \in \mathbb{R}^+$, где $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – некоторая функция.*

Тогда нулевое решение уравнения (2.1) *асимптотически устойчиво по вероятности.*

Исследуем устойчивость слабого нулевого решения стохастического дифференциального уравнения (2.1) с выделенной линейной частью вида

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t)))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \ge 0. \quad (2.5)$$

[1]Авторство указанных теорем принадлежит Я.Б. Задворному. Кроме того некоторые обобщения названных теорем для автономных уравнений можно найти в [10, раздел 3.2]

Здесь $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$ – кусочно непрерывная функция, $\sup_{t\geq 0}|A(t)| \leq M$, а функции f и g удовлетворяют условиям для уравнения (2.1).

Наряду с уравнением (2.5) рассмотрим линейное однородное детерминированное уравнение

$$dX(t) = A(t)X(t)dt, \quad t \geq 0, \tag{2.6}$$

Через $X^{(s,x)}(t)$ будем обозначать (единственное) решение уравнения (2.6), удовлетворяющее равенству $X^{(s,x)}(s) = x$ (существование, единственность и непрерывность по t такого решения в указанных предположениях имеет место, см., например, [2]).

Определение 2.4. Будем говорить, что уравнение (2.6) имеет *равномерно экспоненциально устойчивое* нулевое решение, если существуют константы $\Lambda, \lambda > 0$, не зависящие от s, x, такие, что для любых $s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$ и $t \geq s$ выполняется неравенство

$$|X^{(s,x)}(t)|^2 \leq \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)}. \tag{2.7}$$

Для систем (2.5) и (2.6) определим операторы B и B_0 по формулам (2.8) и (2.9):

$$BV(s,x) = \frac{\partial V(s,x)}{\partial s} + \sup_{v\in F(t,x)}\left(\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}(A(s)x+v)\right) + \frac{1}{2}\sup_{u\in G(t,x)} \operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}uu^\top\right), \tag{2.8}$$

$$B_0 V(s,x) = \frac{\partial V(s,x)}{\partial s} + \frac{\partial V(s,x)}{\partial x}A(s)x, \quad s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d, \varphi \in C_h. \tag{2.9}$$

Теорема 2.3. *Предположим, что функции $f(t,x)$ и $g(t,x)$ таковы, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что выполняются неравенства* (2.10)

$$|f(t,x)| \leq \varepsilon |x|, \qquad |g(t,x)| \leq \varepsilon |x|, \tag{2.10}$$

для любых x, $|x| \leq \delta_\varepsilon, t \in \mathbb{R}^+$, а система (2.6) *имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда система* (2.5) *имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.*

Доказательство. Зададим функцию $V(s,x)$ равенством (2.11):

$$V(s,x) = \int\limits_s^{s+T} |X^{(s,x)}(t)|^2 dt, \tag{2.11}$$

где T — положительный параметр, который будет определен ниже. В [36, следствие 5.3] показано, что функция $V(s,x)$ определена, непрерывно дифференцируема по $s \in \mathbb{R}^+$ и дважды непрерывно дифференцируема по $x \in \mathbb{R}^d$, причем справедливо равенство $B_0 V(s,x) = |X^{(s,x)}(s+T)|^2 - |x|^2$. Отсюда и из неравенства (2.7) следует, что можно подобрать достаточно большое $T_\lambda > s$ такое, что $|X^{(s,x)}(s+T)|^2 \le \frac{1}{2}|x|^2$ при всех $T \ge T_\lambda$, и значит, $B_0 V(s,x) \le -\frac{1}{2}|x|^2$ при всех $T \ge T_\lambda$. Зафиксируем одно из таких T и покажем, что введенная функция $V(s,x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.2.

Условие 3) следует из единственности решения: $X^{(s,0)}(t) \equiv 0$.

Покажем, что выполнено условие 2). Оценим сверху функцию $V(s,x)$, используя неравенство (2.7):

$$0 \le V(s,x) \le \int\limits_s^{s+T} \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)} dt = \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda} \Lambda |x|^2 = k_1 |x|^2, \tag{2.12}$$

где $k_1 = \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda}\Lambda > 0$. Взяв от обеих частей неравенства (2.12) супремум по $s > 0$ и перейдя к пределу, получим $\lim\limits_{x\to 0} \sup\limits_{s>0} V(s,x) = 0$, что и требовалось.

Покажем, что выполнено условие 4). Применив формулу Ито к процессу $|X^{(s,x)}(t)|^2$, получим (2.13):

$$|X^{(s,x)}(s+T)|^2 - |x|^2 = \int\limits_s^{s+T} B_0(|X^{(s,x)}(t)|^2)\, dt. \tag{2.13}$$

Оценим $B_0(|X^{(s,x)}(t)|^2) = 2\left(X^{(s,x)}(t)\right)^\top A(t) X^{(s,x)}(t)$ с помощью неравенства Коши-Буняковского:

$$\left|2(X^{(s,x)}(t))^\top A(t) X^{(s,x)}(t)\right| = 2\left|\langle A(t) X^{(s,x)}(t), X^{(s,x)}(t)\rangle\right| \le 2M |X^{(s,x)}(t)|^2,$$

т.е. $\left|B_0(|X^{(s,x)}(t)|^2)\right| \le 2M|X^{(s,x)}(t)|^2$. Вернемся теперь к формуле Ито:

$$-\frac{1}{2}|x|^2 \ge |X^{(s,x)}(s+T)|^2 - |x|^2 = \int\limits_s^{s+T} B_0(|X^{(s,x)}(t)|^2)\, dt \ge -2M \cdot V(s,t). \tag{2.14}$$

Обозначая $k_3 = \frac{1}{4M} > 0$, из (2.14) получим: $V(s,t) \ge k_3 |x|^2 > 0$ для $x \ne 0$, и следовательно, 4) выполнено.

Осталось показать, что выполнено условие 1). Оценим $BV(s,x)$, используя элементарное неравенство $|\mathrm{tr} A| \le \sqrt{d}|A|$ для $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$:

$$BV(s,x) = BV_0(s,x) + \sup_{v\in F(t,x)}\left(\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}v\right) + \frac{1}{2}\sup_{u\in G(t,x)} \mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}uu^\top\right) \le$$
$$\le -\frac{1}{2}|x|^2 + \sup_{v\in F(t,x)}|v|\left|\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}\right| + \frac{\sqrt{d}}{2}\sup_{u\in G(t,x)}\left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right||u|^2 \le$$
$$\le -\frac{1}{2}|x|^2 + \varepsilon|x|\left|\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right|\frac{\sqrt{d}}{2}\varepsilon^2|x|^2. \qquad (2.15)$$

для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ и соответствующей окрестности нуля $|x| \le \delta_\varepsilon$. Итак, остается оценить $\left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right|$ и $\left|\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}\right|$. Заметим, что $\frac{\partial}{\partial x}|X^{(s,x)}(t)|^2 = 2\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}X^{(s,x)}(t)$. Существование $\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}$ следует из [5, гл. VII, § 3]. Обозначим $\xi_x(t) = \frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}$. Тогда, как показано в [5, гл. VII, § 3], функция $\xi_x(t)$ удовлетворяет матричному уравнению (2.16):

$$\xi_x(t) = \frac{\partial}{\partial x}(\xi_x(s)) + \int_s^t \frac{\partial}{\partial x}(A(u)x)\Big|_{x=\xi_x(u)}\xi_x(u)\,du = I_d + \int_s^t A(t)\xi_x(t)\,du \quad \text{или}$$

$$\xi_i(t) = e_i + \int_s^t A(t)\xi_i(t)\,du, \quad i = 1,\ldots,d \qquad (2.16)$$

где $\xi_i(t) = \frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x_i}$, e_i — вектор, у которого i-я компонента равна 1, а остальные равны 0. К процессу $|\xi_i(t)|^2$ применим формулу Ито:

$$|\xi_i(t)|^2 = |e_i|^2 + \int_s^t B_0(|\xi_i(u)|^2)\,du \le 1 + \int_s^t 2M|\xi_i(u)|^2 du. \qquad (2.17)$$

Из (2.17), используя неравенство Гронуолла-Беллмана, получим неравенство $|\xi_i(t)|^2 = \left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x_i}\right|^2 \le e^{2M(t-s)}$. И значит, $\left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right|^2 = \sum_{i=1}^d \left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x_i}\right|^2 \le$ $\le d\,e^{2M(t-s)}$. Из (2.7) и последнего неравенства следует (2.18):

$$\left|\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}\right| \le \left|\int_s^{s+T}\frac{\partial}{\partial x}|X^{(s,x)}(t)|^2 dt\right| \le 2\int_s^{s+T}\left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right|\left|X^{(s,x)}(t)\right| dt \le$$
$$\le 2\sqrt{d\Lambda}|x|\int_s^{s+T} e^{\frac{2M-\lambda}{2}(t-s)}dt = \frac{4\sqrt{d\Lambda}\left(e^{\frac{2M-\lambda}{2}T}-1\right)}{2M-\lambda}|x| = K_1|x|. \qquad (2.18)$$

Без ограничения общности можно считать, что $2M-\lambda>0$ и $K_1>0$.

Для $\left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right|$ проводя те же рассуждения (но в роли $X^{(s,x)}$ уже выступает ξ_x), используя неравенство Гронулла-Беллмана, покажем, что $\left|\frac{\partial^2 X^{(s,x)}(t)}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2=0$, и значит, $\left|\frac{\partial^2 X^{(s,x)}(t)}{\partial x^2}\right|^2=0$. Тогда легко видеть, что $\frac{\partial^2}{\partial x^2}|X^{(s,x)}(t)|^2=2\left(\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right)^2$, и будем иметь оценку $\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}|X^{(s,x)}(t)|^2\right|\le 2\left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right|^2\le 2d\,e^{2M(t-s)}$, из которой выводим (2.19):

$$\left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right|\le\left|\int\limits_s^{s+T}\frac{\partial^2}{\partial x^2}|X^{(s,x)}(t)|^2dt\right|\le 2d\int\limits_s^{s+T}e^{2M(t-s)}dt=\frac{2d\left(e^{2MT}-1\right)}{2M}=K_2. \tag{2.19}$$

Из неравенств (2.15), (2.18), (2.19), следует оценка $BV(s,x)\le$ $\le\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon K_1+\frac{\sqrt{d}}{2}\varepsilon^2K_2\right)|x|^2$. За счет выбора достаточно малого ε добьемся того, чтобы константа при $|x|^2$ была отрицательной. Тогда условие 1) будет выполнено. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Некоторые достаточные условия равномерной экспоненциальной устойчивости системы (2.6) приведены в работе [35].

Пример 2.1. Приведем пример уравнения, имеющего асимптотически устойчивое по вероятности слабое нулевое решение на основании теоремы 2.3. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений (2.20)

$$\begin{gathered}dx(t)=((-20-0.1\sin t)x(t)+0.1\cos t\;y(t)+\sin^2 x(t))dt,\\ dy(t)=(-0.1\cos t\;x(t)-(20+0.1\sin t)y(t))dt+\sin^2 y(t)\mathrm{sgn}(x(t-1))dw(t),\end{gathered} \tag{2.20}$$

при $t\ge 0$ с начальными условиями $x(t)=\psi(t)$, $t\in[-1{,}0]$, $y(0)=y_0$, где $x,\ y\in\mathbb{R}$, $w(t)$ – одномерное броуновское движение. Нулевое решение линеаризованной системы

$$\begin{aligned}dx(t)&=((-20-0.1\sin t)x(t)+0.1\cos t\;y(t))dt,\\ dy(t)&=(-0.1\cos t\;x(t)-(20+0.1\sin t)y(t))dt,\end{aligned}$$

является равномерно экспоненциально устойчивым [35], и следовательно, нулевое решение системы (2.20) асимптотически устойчиво по вероятности.

2.2 Стохастические дифференциально-функциональные уравнения в произвольных гильбертовых пространствах

Вернемся к общему случаю сепарабельных гильбертовых пространств H и U. Рассмотрим стохастическое эволюционное функциональное уравнение

$$dX(t,\omega) = AX(t,\omega)dt + f(t, X(t,\omega))dt + g(t, X(t,\omega))dW(t,\omega), \quad (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{2.21}$$

относительно $X \in H$ с начальным условием

$$X(0,\omega) = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \tag{2.22}$$

где $f(t,X)\colon \mathbb{R}^+ \times H \to H$, $g(t,X)\colon \mathbb{R}^+ \times H \to \mathfrak{L}_2(U,H)$ — измеримые, непрерывные по X (при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$) функции, A — линейный оператор, определенный на всюду плотном в H множестве $\mathcal{D}(A)$ и порождающий C_0-полугруппу $S(t)$ на H, $\xi : \Omega \to \mathcal{D}(A)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина, имеющая конечный момент $\mathbb{E}\,\|\xi\|^p < \infty$ порядка $p > 2$. В дальнейшем для сокращения обозначений аргумент ω будем опускать. Все интегралы ниже записаны в предположении их существования и конечности.

Относительно функций $f(t,X)$ и $g(t,X)$ будем предполагать, что выполнены два условия:

1. *Локальное условие Липшица.* Для любого $a > 0$ существует постоянная q_a такая, что для всех $t \in [0,a]$ и любых $\varphi,\psi \in H$, таких, что $\|\varphi\| \le a$, $\|\psi\| \le a$, выполняются неравенства
$$\|f(t,\varphi) - f(t,\psi)\| \le q_a\|\varphi - \psi\|, \quad \|g(t,\varphi) - g(t,\psi)\| \le q_a\|\varphi - \psi\| \tag{2.23}$$
2. *Условие линейного порядка роста.* Существует непрерывная функция $k\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}^+$ и любого $\eta \in H$ выполняются неравенства
$$\|f(t,\eta)\| \le k(t)(1 + \|\eta\|), \quad \|g(t,\eta)\| \le k(t)(1 + \|\eta\|). \tag{2.24}$$

Стоит отметить, что всякая функция, удовлетворяющая глобальному условию Липшица, удовлетворяет и локальному условию, и в свою очередь, всякая функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица, непрерывна.

Определение 2.5. Случайный процесс $X(t), t \ge 0$ называют слабым решением уравнения (2.21) с начальным условием (2.22), если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Процесс $X(t), t \geq 0$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным.
2. Процесс $X(t), t \geq 0$ п.н. непрерывен по t.
3. $X(t) = S(t)\xi + \int\limits_0^t S(t-s)f(s,X(s))ds + \int\limits_0^t S(t-s)g(s,X(s))dW(s),\ t \in \mathbb{R}^+$.

Определение 2.6. Случайный процесс $X(t), t \geq 0$ называют сильным решением уравнения (2.21) с начальным условием (2.22), если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Процесс $X(t), t \geq 0$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным.
2. Процесс $X(t), t \geq 0$ п.н. непрерывен по t.
3. $X \in \mathcal{D}(A)$ для почти всех $(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$.
4. $X(t) = \xi + \int\limits_0^t AX(s)\,ds + \int\limits_0^t f(s,X(s))ds + \int\limits_0^t g(s,X(s))dW(s), \quad t \in \mathbb{R}^+$.

Определение 2.7. Будем говорить, что (слабое или сильное) решение $X(t)$ уравнения (2.21) с начальным условием (2.22) является единственным, если для любое другое решение $Y(t)$ уравнения (2.21) с начальным условием (2.22) п.н. совпадает с $X(t)$, т.е. $\mathbb{P}(X(t) = Y(t)\ \forall t \geq 0) = 1$.

Определение 2.8. Пусть положительная функция $\lambda(t)$ определена для достаточно больших $t > 0$, скажем, $t \geq T > 0$. Предположим, что

1. $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty$.
2. $\ln \lambda(t)$ равномерно непрерывна по $t \geq T$.
3. Существует константа $\tau \geq 0$ такая, что $\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\ln\ln t}{\ln \lambda(t)} \leq \tau$.

Будем говорить, что слабое решение задачи (2.21), (2.22) притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$, если найдется $\gamma > 0$ такое, что выполняется неравенство (2.25)

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\ln \|X(t)\|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma \qquad \text{п.н.} \tag{2.25}$$

Через $\rho(A)$ обозначим резольвентное множество оператора A, т.е. множество тех значений $l \in \mathbb{C}$ для которых определен оператор $R(l,A) = (lI - A)^{-1}$ (резольвента оператора A). Обозначим также $R(l) = lR(l,A)$, $\rho_{\mathbb{R}}(A) = \rho(A) \cap \mathbb{R}$.

Для задачи (2.21), (2.22) построим аппроксимирующую задачу Коши

$$\begin{gathered} dX^{(l)}(t,\omega) = AX^{(l)}(t,\omega) + R(l)f(t,X^{(l)}(t,\omega))dt + R(l)g(t,X^{(l)}(t,\omega))dW(t,\omega), \\ t \in \mathbb{R}^+, \\ X^{(l)}(0,\omega) = \xi(\omega), \end{gathered} \tag{2.26}$$

где $l \in \rho_{\mathbb{R}}(A)$.

Лемма 2.1. *Для любого достаточно большого $l \in \rho_{\mathbb{R}}(A)$ задача Коши* (2.26) *имеет единственное сильное решение $X^{(l)}$ и более того, существует подпоследовательность $X^{(l_n)}$ такая, что $X^{(l_n)}(t) \to X(t)$ при $n \to \infty$ п.н. равномерно по $t \in [0,T]$, где $X(t)$ — слабое решение задачи* (2.21)*,* (2.22)*, а $T > 0$ — произвольное число.*

Доказательство. В [47, теорема 3.1], отталкиваясь от определения генератора C_0-полугруппы и (как следствие, см. [47, следствие 2.5]) замкнутости оператора A, было доказано интегральное представление резольвенты (2.27)

$$R(l,A)x = \int_0^{+\infty} e^{-l\,t} S(t)x\,dt, \quad x \in H, \tag{2.27}$$

для всех $l \in \rho(A)$, для которых указанный интеграл существует и конечен. Воспользуемся оценкой операторов C_0-полугруппы (см. предложение 1.1): $\|S(t)\| \le Me^{\beta t}$ для всех $t \ge 0$. Будем иметь оценку (2.28):

$$\|R(l,A)\| = \sup_{\|x\|=1} \|R(l,A)x\| \le \int_0^{+\infty} e^{-l\,t} \sup_{\|x\|=1} \|S(t)x\|\,dt \le$$
$$\le M \int_0^{+\infty} e^{-(l-\beta)t} dt = \frac{M}{l-\beta}, \quad l > \beta \tag{2.28}$$

откуда следует, что $(\beta, +\infty] \subset \rho(A)$ и более того, $\|R(l)\| \le \frac{M\,l}{l-\beta} \le 2M$ для $l \ge 2\beta$. Далее будем рассматривать только $l \ge 2M$, говоря о них, как о «достаточно больших» l.

Докажем, что задача Коши (2.26) имеет единственное слабое решение при достаточно большом l. С этой целью заметим, что для любого $r > 1$ ввиду условий (2.23) и (2.24) получим оценки (2.29) – (2.32):

$$\mathbb{E}\,\|R(l)f(t,\varphi)-R(l)f(t,\psi)\|^r \le (2M)^r\,\mathbb{E}\,\|f(t,\varphi)-f(t,\psi)\|^r \le (2Mq_a)^r\,\mathbb{E}\,\|\varphi-\psi\|^r, \tag{2.29}$$

$$\mathbb{E}\,\|R(l)g(t,\varphi)-R(l)g(t,\psi)\|^r \le (2M)^r\,\mathbb{E}\,\|g(t,\varphi)-g(t,\psi)\|^r \le (2Mq_a)^r\,\mathbb{E}\,\|\varphi-\psi\|^r, \tag{2.30}$$

$$\mathbb{E}\,\|R(l)f(t,\eta)\|^r \le (2M)^r\,\mathbb{E}\big(k(t)(1+\|\eta\|)\big)^r \le$$
$$\le (2M)^r\,\mathbb{E}\big((k(t))^r 2^{r-1}(1+\|\eta\|^r)\big) = \frac{(4Mk(t))^r}{2}(1+\mathbb{E}\,\|\eta\|^r), \tag{2.31}$$

$$\mathbb{E}\,\|R(l)g(t,\eta)\|^r \le (2M)^r\,\mathbb{E}\big(k(t)(1+\|\eta\|)\big)^r \le$$
$$\le (2M)^r\,\mathbb{E}\big((k(t))^r 2^{r-1}(1+\|\eta\|^r)\big) = \frac{(4Mk(t))^r}{2}(1+\mathbb{E}\,\|\eta\|^r), \tag{2.32}$$

где $\varphi,\psi,\eta\colon \Omega \to H$ — произвольные $\mathcal{F}$-измеримые случайные величины с конечным p-м моментом, такие, что п.н. $\|\varphi\| \le\ a$ и $\|\zeta\| \le a$. Таким образом, задача Коши (2.26) удовлетворяет условиям [7–А, теорема 1.1] и следовательно имеет единственное слабое решение $X^{(l)}(t), t \ge 0$.

Докажем, что при наложенных ранее ограничениях найденное слабое решение $X^{(l)}(t), t \ge 0$ будет также являться и сильным решением задачи Коши (2.26). Для этого достаточно проверить условия из [34, предложение 2.3], предварительно зафиксировав произвольный отрезок времени $t \in [0,T]$. Воспользуемся утверждением (c) из [47, теорема 2.4], показывающим, что операторы A и $S(t)$ (а также $(l\,I - A)$ и $S(t)$) перестановочны. Для любых $r \in [0,t)$, $\varphi \in H$, $u \in U$ элементы (2.33), (2.34)

$$(l\,I - A)\big(S(t-r)R(l)f(r,\varphi)\big) = l\,S(t-r)f(r,\varphi) \in H, \tag{2.33}$$

$$(l\,I - A)\big(S(t-r)R(l)g(r,\varphi)u\big) = l\,S(t-r)g(r,\varphi)u \in H, \tag{2.34}$$

откуда следует, что $S(t-r)R(l)f(r,\varphi)$, $S(t-r)R(l)g(r,\varphi)u \in \mathcal{D}(l\,I - A) = \mathcal{D}(A)$. Кроме того, $\xi \in \mathcal{D}(A)$, т.е. условие (a) выполнено. Далее оценим интегралы (2.35) — (2.38) из условия (b):

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^t \|AS(t-r)R(l)f(r,X^{(l)}(r))\| dr dt \le$$

$$\le \int\limits_0^T \int\limits_0^t \|(A - lI)S(t-r)\, l(lI - A)^{-1} f(r,X^{(l)}(r))\| dr dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_0^t \|lS(t-r)\, l(l\,I - A)^{-1} f(r,X^{(l)}(r))\| dr dt = I_1 + I_2, \tag{2.35}$$

$$I_1 = \int\limits_0^T \int\limits_0^t \|(A - l\,I)S(t-r)\, l(l\,I - A)^{-1} f(r,X^{(l)}(r))\|\, dr\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^t \|S(t-r)(A - lI)\, l(lI - A)^{-1} f(r,X^{(l)}(r))\| dr dt =$$

$$= l \int\limits_0^T \int\limits_0^t \|S(t-r) f(r,X^{(l)}(r))\| dr dt. \tag{2.36}$$

Из перестановочности операторов $(l\,I - A)$ и $S(t)$ следует перестановочность операторов $R(l)$ и $S(t)$, так как $(l\,I - A)S(t) = S(t)(l\,I - A) \implies S(t) = (l\,I - A)^{-1}S(t)(l\,I - A) \implies S(t)(l\,I - A)^{-1} = (l\,I - A)^{-1}S(t)$. Поэтому

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^T \int_0^t \|lS(t-r)R(l)f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt \leq \\ \leq 2Ml \int_0^T \int_0^t \|S(t-r)f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt, \end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^t \|AS(t-r)R(l)f(r, X^{(l)}(r))\|\, dr\, dt \leq \\ \leq (2M+1)l \int_0^T \int_0^t \|S(t-r)\| \cdot \|f(r, X^{(l)}(r))\|\, dr\, dt \leq \\ = M(2M+1)l \int_0^T e^{\beta t} dt \int_0^t e^{-\beta r} k(r)(1 + \|X^{(l)}(r)\|)\, dr = I_3. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Поскольку $X^{(l)}(r)$ п.н непрерывен, то $M_T = \sup\limits_{0 \leq r \leq T} \|X^{(l)}(r)\| < \infty$. А поскольку функция $k(r)$ непрерывна на $[0,T]$, то интеграл I_3, очевидно, п.н. конечен, т.е. условие (b) выполнено. Условие (c) проверяется аналогично.

Таким образом, все условия [34, предложение 2.3] выполнены, а значит, задача Коши (2.26) имеет сильное решение. Это решение будет также и единственным ввиду того, что всякое сильное решение является слабым (см. [34, предложение 2.1]), а слабое решение (2.26) единственно.

Докажем теперь существование требуемой подпоследовательности $X^{(l_n)}$. Сперва покажем, что для любого $T \in \mathbb{R}^+$ существует постоянная $C(T) > 0$ такая, для слабого решения задачи (2.21), (2.22) выполняется оценка сверху (2.39)

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq T} \|X(s)\|^p\right) \leq C(T). \tag{2.39}$$

Действительно, используя интегральное неравенство Гельдера, условие (2.24) и неравенство типа Буркхольдера (см. предложение 1.4), можно получить (см. [2–A]) оценку вида

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq T} \|X(s)\|^p\right) \leq C_1(T) + C_2(T) \int_0^T \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq T} \|X(s)\|^p\right) ds. \tag{2.40}$$

Отсюда согласно неравенству Гронуолла получим неравенство (2.41):

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq T} \|X(s)\|^p\right) \leq C_1(T) e^{C_2(T)T} =: C(T), \tag{2.41}$$

как и утверждалось.

Поскольку $\|R(l)\| \leq 2M$ при достаточно больших l, то аналогично доказывается оценка для решения $X^{(l)}(t)$ задачи (2.26): существует постоянная $K(T)$ такая, что $\mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leq s\leq T}\|X^{(l)}(s)\|^p\right) \leq K(T)$. Обозначим $C_T = \max(C(T), K(T))$.

Для каждых $a, T > 0$ и достаточно большого l определим множество (2.42):

$$\Omega_l^{a,T} = \left\{\omega \in \Omega \,:\, \max\left(\sup_{0\leq s\leq T}\|X(s)\|, \sup_{0\leq s\leq T}\|X^{(l)}(s)\|\right) \leq a\right\} \tag{2.42}$$

и его характеристическую функцию $\zeta_l^{a,T} = 1_{\Omega_l^{a,T}}(\omega)$. Заметим, что

$$\begin{gathered}X(t) - X^{(l)}(t) = \int_0^t S(t-s)(I-R(l))f(s,X(s))ds+ \\ +\int_0^t S(t-s)(I-R(l))g(s,X(s))dW(s)+ \\ +\int_0^t S(t-s)R(l)\left(f(s,X(s)) - f(s,X^{(l)}(s))\right)ds+ \\ +\int_0^t S(t-s)R(l)\left(g(s,X(s)) - g(s,X^{(l)}(s))\right)dW(s), \quad t\geq 0\end{gathered} \tag{2.43}$$

Оценивая в равенстве (2.43) каждое слагаемое, используя неравенства Гельдера и Буркхольдера, условие линейного порядка роста и теорему Лебега о мажорируемой сходимости, можно показать (см. [2–А]), что существуют постоянные $\widetilde{C}(a,T)$ и $\varepsilon(l) > 0$ такие, что

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T} \leq \widetilde{C}(a,T)\int_0^T \mathbb{E}\sup_{0\leq r\leq s}\|X(r)-X^{(l)}(r)\|^p\zeta_l^{a,T}ds+\varepsilon(l), \tag{2.44}$$

где $\varepsilon(l) \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$. Применяя к (2.44) лемму Гроноулла, получим (2.45):

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|X(t) - X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T} \leq \varepsilon(l)e^{T\widetilde{C}(a,T)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0 \quad \forall\,(a,T) \in \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \tag{2.45}$$

Покажем, что отсюда следует сходимость по вероятности: $\sup\limits_{0\leq t\leq T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p \xrightarrow[l\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ для любого $T\in\mathbb{R}^+$. Неравенство Чебышева дает:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|>a\right)\le\frac{1}{a^p}\,\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|\right)^p=\frac{1}{a^p}\,\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|^p\le\frac{C_T}{a^p}, \tag{2.46}$$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X^{(l)}(t)\|>a\right)\le\frac{C_T}{a^p}. \tag{2.47}$$

Из (2.46), (2.47) следует, для любого $a>0$ и достаточно больших l справедливо неравенство (2.48)

$$\mathbb{P}\left(\zeta_l^{a,T}=0\right)\le\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|>a\right)+\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X^{(l)}(t)\|>a\right)\le\frac{2C_T}{a^p} \tag{2.48}$$

Возьмем произвольные $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ и положим $a=\left(\frac{4C_T}{\varepsilon_2}\right)^{1/p}$. Поскольку $\mathbb{E}\sup\limits_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T}\xrightarrow[l\to\infty]{}0$, то на основании неравенства Чебышева заключаем, что найдется l_{ε_2} такое, что для всех $l\ge l_{\varepsilon_2}$ выполняется неравенство $\mathbb{P}\left(\sup\limits_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T}>\varepsilon_1\right)\le\frac{\varepsilon_2}{2}$. Таким образом, для всех $l\ge l_{\varepsilon_2}$ справедливо, неравенство (2.8)

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p>\varepsilon_1\right)\le$$

$$\le\mathbb{P}\left(\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T}>\varepsilon_1\right)\bigcap\left(\zeta_l^{a,T}=1\right)\right)+\mathbb{P}\left(\zeta_l^{a,T}=0\right)\le\varepsilon_2,$$

что и означает сходимость $\sup\limits_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\xrightarrow[l\to\infty]{\mathbb{P}}0.$

А поскольку из всякой последовательности случайных величин, сходящейся по вероятности, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся п.н., то найдется подпоследовательность $X^{(l_n)}(t)$ такая, что $\sup\limits_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l_n)}(t)\|^p\xrightarrow[l\to\infty]{\text{п.н.}}0$, т.е. $X(t)\xrightarrow[l\to\infty]{\text{п.н.}}X^{(l_n)}(t)$ равномерно по $t\in[0,T]$. Это и есть требуемая подпоследовательность. Лемма доказана.

2.2.1 Теорема о притяжении к нулю

Введем операторы L, Q по формулам (2.49), (2.50): если положительный функционал $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$, то

$$LV(t,x) = V_t'(t,x) + \langle V_x'(t,x), Ax + f(t,x)\rangle_H +$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q_w^{1/2})(g(t,x)Q_w^{1/2})^\star], \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A), \tag{2.49}$$
$$QV(t,x) = \mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x) \otimes V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q_w^{1/2})(g(t,x)Q_w^{1/2})^\star],$$
$$(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times H. \tag{2.50}$$

Далее для краткости будем опускать индекс H у скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ в пространстве H.

Теорема 2.4. *Пусть задан функционал $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$ и две неотрицательные непрерывные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$. Предположим, что существуют положительные постоянные $r > 0$, $m \geq 0$, постоянные $\mu,\nu,\theta \in \mathbb{R}$ и невозрастающая положительная функция $\zeta(t)$ такие, что $\frac{m-(\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r} > 0$ и выполнены следующие условия:*

1. $\|x\|^r(\lambda(t))^m \leq V(t,x)$ *для всех* $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times H$.
2. $LV(t,x) + \zeta(t)QV(t,x) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t)V(t,x)$ *для всех* $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathcal{D}(A)$.
3. $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup \frac{\ln\left(\int_0^t \psi_1(s)\,ds\right)}{\ln\lambda(t)} \leq \nu$, $\quad \lim\limits_{t\to+\infty}\sup \frac{\int_0^t \psi_2(s)\,ds}{\ln\lambda(t)} \leq \theta$, $\quad \lim\limits_{t\to+\infty}\inf \frac{\ln\zeta(t)}{\ln\lambda(t)} \geq -\mu$.

Тогда слабое решение задачи (2.21), (2.22) *притягивается к нулю со скоростью* $\lambda(t)$.

Доказательство. Применим формулу Ито к функционалу $V(t,x)$ и решению (сильному) $X^l(t)$ задачи (2.26). Будем иметь:

$$V(t,X^{(l)}(t)) = V(0,\xi) + I_1(t,l) + \int_0^t LV(s,X^{(l)}(s))\,ds +$$
$$+I_2(t,l) + \int_0^t \langle V_x'(s,X(s)), g(s,X(s))dW(s)\rangle, \tag{2.51}$$

где I_1, I_2, L_l определяются формулами (2.52) — (2.54):

$$I_1(t,l) = \int_0^t L_l V(s, X^{(l)}(s))\, ds \,-\int_0^t LV(s, X^{(l)}(s))\, ds, \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} I_2(t,l) = \int_0^t \langle V_x'(s, X^{(l)}(s)), R(l) g(s,X^{(l)}(s)) dW(s)\rangle - \\ - \int_0^t \langle V_x'(s, X(s)), g(s,X(s)) dW(s)\rangle, \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned} L_l V(t,x) = V_t'(t,x) + \langle V_x'(t,x), Ax + R(l) f(t,x)\rangle + \\ + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\big[V_{xx}''(t,x)(R(l)g(t,x)) \circ Q_w \circ (R(l)g(t,x))^\star\big]. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Из равномерной непрерывности функции $\ln\lambda(t)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют натуральные числа $N = N(\varepsilon)$ и $k_1 = k_1(\varepsilon)$ для всех $k \geq k_1(\varepsilon):\quad \left|\ln\lambda\left(\frac{k}{2^N}\right) - \ln\lambda(t)\right| \leq \varepsilon, \quad t \in \left[\frac{k-1}{2^N}; \frac{k}{2^N}\right]$. С другой стороны, по экспоненциальному неравенству (2.55) для мартингалов [39, лемма 1.1]:

$$\mathbb{P}\Bigg(\omega : \sup_{0\leq t\leq w}\Bigg(\int\limits_0^t \langle V_x'(s,X(s)), g(s,X(s))dW(s)\rangle - \int\limits_0^t \frac{u}{2} QV(s,X(s))\, ds\Bigg) > v\Bigg) \leq e^{-uv} \tag{2.55}$$

для любых положительных постоянных u, v и w. Выбирая их по формуле (2.56)

$$u = 2\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right), \quad v = \ln\frac{k-1}{2^N}\Big/\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right), \quad w = \frac{k}{2^N}, \quad k = 2,3,\ldots, \tag{2.56}$$

и применяя затем лемму Бореля-Кантелли, получим что вне множества нулевой вероятностной меры $\widetilde{\Omega}$ ($\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 0$), т.е. для каждого $\omega \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$ существует натуральное число $k_0(\varepsilon,\omega)$ такое, что

$$\int_0^t \langle V_x'(s,X(s)), g(s,X(s))dW(s)\rangle \leq \frac{\ln\frac{k-1}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + \zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)\int_0^t QV(s,X(s))\, ds \tag{2.57}$$

для всех $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$, $k = k(\omega) \geq k_0(\varepsilon,\omega)$. Подставляя выражение (2.57) в (2.51) и используя 2-е условие теоремы, для всех $\omega \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$, $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 0$ будем иметь оценку (см. [2–A])

$$\begin{aligned} V(t, X^{(l)}) \leq \frac{\ln\frac{k-1}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + V(0,\xi) + \\ + \int_0^t \Big(\psi_1(s) + \psi_2(s) V(s,X^{(l)}(s))\Big) ds + I_1(t,l) + I_2(t,l) + I_3(t,l), \end{aligned} \tag{2.58}$$

для всех $t \in [0, \frac{k}{2^N}]$, $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon)\}$. Здесь I_3 определяется формулой (2.59)

$$I_3(t,l) = \zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)\int_0^t \Big(QV(s,X(s)) - QV(s,X^{(l)}(s))\Big)\,ds. \tag{2.59}$$

Следовательно, согласно лемме Гронуолла, п.н. выполнено неравенство

$$V(t,X^{(l)}(t)) \leq \Bigg(V(0,\xi) + \frac{\ln\frac{k-1}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} +$$

$$+ \sup_{t\in\left[0,\frac{k}{2^N}\right]}\left(|I_1(t,l)| + |I_2(t,l)| + |I_3(t,l)| + \int_0^t \psi_1(s)\,ds\right)\Bigg) \cdot \exp\left(\int_0^t \psi_2(s)\,ds\right)$$

для всех $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$, $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon)\}$.

Покажем теперь, что существует подпоследовательность $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ такая, что $I_1(t,l_n)$, $I_2(t,l_n)$ и $I_3(t,l_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ п.н. равномерно по $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$. Действительно, выберем подпоследовательность леммы 2.1: $X^{(l_n)}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(t)$ п.н. равномерно по $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$. Говоря точнее, существуют подмножества $\Omega_k \subset \Omega$ с $\mathbb{P}(\Omega_k) = 0$ такие, что для любого $\omega \in \Omega \setminus \Omega_k$: $X^{(l_n)}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(t)$ п.н. равномерно по $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$. Следовательно, для всех $\omega \in \Omega \setminus \left(\cup_{k\geq 2}\Omega_k \bigcup \widetilde{\Omega}\right)$, будем иметь оценку (2.60):

$$\sup_{t\in\left[0,\frac{k}{2^N}\right]} |I_1(t,l)| \leq \int_0^{k/2^N} \Big|L_{l_n}V(s,X^{(l_n)}(s)) - LV(s,X^{(l_n)}(s))\Big|\,ds \leq$$

$$\leq \int_0^{k/2^N} \Big|\langle V'_x(s,X^{(l_n)}(s)), (I - R(l_n))f(s,X^{(l_n)}(s))\rangle\Big|\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{k/2^N} \Big|\mathrm{tr}\big[V''_{xx}(s,X^{(l_n)}(s))\big\{(R(l_n)g(s,X^{(l_n)}(s)) \circ Q_w \circ (R(l_n)g(s,X^{(l_n)}(s)))^{\star} -$$

$$- g(s,X^{(l_n)}(s)) \circ Q_w \circ g(s,X^{(l_n)}(s)))^{\star}\big\}\big]\Big|\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{2.60}$$

для всех $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon)\}$. Аналогично доказывается, что $\sup_{t\in\left[0,\frac{k}{2^N}\right]} |I_2(t,l)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\sup_{t\in\left[0,\frac{k}{2^N}\right]} |I_3(t,l)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Следовательно, устремляя $n \to \infty$, получим, что п.н. верно (2.61):

$$V(t,X(t)) \leq \left(V(0,\xi) + \frac{\ln\frac{k}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + \frac{\ln\frac{k-1}{k}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + \int_0^{k/2^N}\psi_1(s)\,ds\right)\exp\left(\int_0^t \psi_2(s)\,ds\right) \tag{2.61}$$

для всех $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$, $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon)\}$.

Таким образом, используя 3-е условие теоремы и равномерную непрерывность $\ln\lambda(t)$, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется натуральное $k_2(\varepsilon,\omega)$ такое, что

$$\ln V(t,X(t)) \leq$$
$$\leq \ln\left(V(0,\xi) + \lambda\left(\frac{k}{2^N}\right)^{(\mu+\tau+2\varepsilon)} + \ \lambda\left(\frac{k}{2^N}\right)^{(\mu+\varepsilon)}\ln\frac{k-1}{k} + \lambda\left(\frac{k}{2^N}\right)^{(\nu+\varepsilon)}\right) +$$
$$+(\theta+\varepsilon)\ln\lambda(t) \leq$$
$$\leq \ln\left(V(0,\xi) + e^{\varepsilon(\mu+\tau+2\varepsilon)}\lambda(t)^{(\mu+\tau+2\varepsilon)} + e^{\varepsilon(\mu+\varepsilon)}\lambda(t)\ln\frac{k-1}{k} + e^{\varepsilon(\nu+\varepsilon)}\lambda(t)^{(\nu+\varepsilon)}\right) +$$
$$+(\theta+\varepsilon)\ln\lambda(t) \tag{2.62}$$

для всех $t \in \left[\frac{k-1}{2^N},\frac{k}{2^N}\right]$, $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon,\omega)\}$. Из (2.62) следует

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln V(t,X(t))}{\ln\lambda(t)} \leq \max\{\nu+\varepsilon, \mu+\tau+2\varepsilon\} + \theta + \varepsilon. \tag{2.63}$$

Устремляя в (2.63) $\varepsilon \to 0$, получим неравенство (2.64)

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln V(t,X(t))}{\ln\lambda(t)} \leq \max\{\nu,\mu+\tau\} + \theta. \tag{2.64}$$

Окончательно, используя 1-е условие теоремы, будем иметь (2.66):

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln\|X(t)\|}{\ln\lambda(t)} \leq \lim_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{r}\frac{\ln\left(\lambda(t)^{-m}V(t,X(t))\right)}{\ln\lambda(t)} \leq$$
$$\leq -\frac{m-(\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r} \qquad \text{п.н.} \tag{2.65}$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Пример 2.2. Рассмотрим следующую стохастическую дифференциальную систему (значение параметров $\alpha, m > 0$ будет уточнено ниже)

$$dX_t(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2}X_t(x) + \alpha\sin\left(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}}\cos X_t^1\right)\right)dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}}X_t(x)dW_t,$$
$$dX_t^1 = \left(\alpha X_t^1\sin X_t^1 + \left(\int_0^\pi X_t(x)^2dx\right)^{1/2}\right)dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}}\left(\int_0^\pi X_t(x)^2dx\right)^{1/2}dW_t,$$
$$t > 0,\ \ 0 < x < \pi$$

как уравнение относительно $\bar{X}_t = (X_t(\cdot), X_t^1)^\top$ в пространстве $H \times \mathbb{R}$ с начальным условием $\bar{X}_0 = (X_0(x), X_0^1)^\top = (x_0(x), x_0^1),\ x \in (0,\pi)$, $H = L_2[0,\pi]$, $U = \mathbb{R}$. В компактной форме это уравнение примет вид

$$d\bar{X}_t = (\bar{A}\bar{X}_t + f(t,\bar{X}_t))dt + g(t,\bar{X}_t)dW_t, \tag{2.66}$$

$$f(t,\bar{X}_t) = \alpha\left(\sin(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}}\cos X_t^1), X_t^1 \sin X_t^1 + \|X_t(x)\|_H\right)^\top,$$

$$g(t,\bar{X}_t) = \alpha e^{-\frac{mt}{2}}\left(X_t(x), \left(\int_0^\pi X_t(x)^2 dx\right)^{1/2}\right)^\top,\ \bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{d^2}{dx^2},\quad \mathcal{D}(A) = \{u \in C_2[0,\pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$$

Уравнение (2.66), записанное в интегральной форме, примет вид

$$\bar{X}_t = \int_0^\pi G(t,x,s)\bar{X}_0(s)ds + \int_0^t\int_0^\pi G(t-\tau,x,s)f(s,x_\tau^1)ds\,d\tau +$$
$$+ \int_0^t\int_0^\pi G(t-\tau,x,s)g(s,x_\tau^1)ds\,dW(\tau),$$

где функция $G(t,x,y)$ определяется по формуле (1.5) при $l = \pi$. Соответственно, оператор $S(t) : H \times \mathbb{R} \to H \times \mathbb{R}$ определяется формулой

$$S(t)\bar{u}(\cdot) = \left(\int_0^\pi G(t,\cdot,s)u(s)ds, u^1\right).$$

Положим $V(t,\bar{u}) = V(t,u) = e^{mt}\|u\|^2, u \in H$. Очевидно, $V_t'(t,\bar{u}) = = mV(t,u)$. По определению производной по Фреше V_u' в точке $u \in H$ есть линейный ограниченный функционал такой, что для достаточно малых $\|h\|$, $h \in H$ выполняется

$$V(t,u+h) - V(t,u) - V_u'(t,u)h = o(\|h\|),$$

$$e^{mt}\int_0^\pi (u(s)+h(s))^2\,ds - e^{mt}\int_0^\pi (u(s))^2\,ds = V_u'(t,u)h + o(\|h\|).$$

Последнее равносильно $2e^{mt}\langle u,h\rangle + e^{mt}\|h\|^2 = V_u'(t,u)h + o(\|h\|)$, откуда $V_u'(t,u)h = 2e^{mt}\langle u,h\rangle\ \forall\, h \in H$. Аналогично $V_{uu}''h = 2e^{mt}\langle h,\cdot\rangle$, $\forall\, h \in H$. Можно показать (см. [2–A]), что

$$\langle V_u'(t,u), Au\rangle = -2\frac{\|u'\|^2}{\|u\|^2}V(u),$$
$$\langle V_u'(t,u), f(t,\bar{u})\rangle \le 3\alpha V(t,u) + \alpha\pi.$$

Нетрудно видеть, что

$$\|V'_u(t,u)\| = \sup_{\|h\|=1} 2e^{mt}|\langle u,h\rangle| \leq 2e^{mt}\sup_{\|h\|=1}\|u\|\cdot\|h\| = 2e^{mt}\|u\|$$

и аналогично $\|V''_{uu}(t,u)\| = 2e^{mt}\sup_{\|h\|=1}\sup_{\|u\|=1}|\langle h,u\rangle| \leq 2e^{mt}$. Кроме того, для любого ограниченного линейного оператора B след $\text{tr}(BQ_w) = \sum\langle BQ_w u_k, u_k\rangle$ по модулю не превосходит $|\text{tr}(BQ_w)| \leq \|B\|\text{tr}Q_w$ (достаточно в качестве (u_k) взять базис из собственных векторов Q_w). В нашем случае $U = \mathbb{R}$, а значит, $Q_w = I$ и $\text{tr}Q_w = 1$. Таким образом,

$$\frac{1}{2}\text{tr}[V''_{uu}(t,\bar{u})(g(t,\bar{u})Q_w^{1/2})(g(t,\bar{u})Q_w^{1/2})^\star] \leq \frac{1}{2}\|V''_{uu}\|\cdot\|g(t,\bar{u})\|^2 \leq$$
$$\leq 2e^{mt}\alpha^2 e^{-mt}\|u\|^2 \leq 2\alpha^2 V(t,\bar{u}),$$
$$|QV(t,\bar{u})| = |\text{tr}[V''_{uu}(t,\bar{u})\otimes V''_{uu}(t,\bar{u})(g(t,\bar{u})Q_w^{1/2})(g(t,\bar{u})Q_w^{1/2})^\star]| \leq$$
$$\leq \|V''_{uu}\|^2\|g(t,\bar{u})\|^2 \leq 8e^{mt}\alpha^2\|u\|^2 = 8\alpha^2 V(t,\bar{u}).$$

Итак, выберем в качестве невозрастающей положительной функции $\zeta(t) \equiv 1$, положим $\lambda_0 = \inf_{u\in D(A)}\frac{\|u'\|^2}{\|u\|^2}$ и оценим

$$LV(t,\bar{u}) + \zeta(t)QV(t,\bar{u}) \leq \alpha\pi + (-2\lambda_0 + m + 3\alpha + 10\alpha^2)V(t,u).$$

Нетрудно показать (см. [2–A]), что $\lambda_0 \geq \frac{1}{\pi^2} > 0$. Поэтому за счет выбора достаточно малого $\alpha > 0$ и достаточно большого $m > 0$ добьемся того, чтобы постоянная $\beta = -2\lambda_0 + m + 3\alpha + 10\alpha^2 > 0$, но $-2\lambda_0 + 3\alpha + 10\alpha^2 < 0$.

Обратимся к условию теоремы. Исходя из первого условия, полагаем $r = 2$, из второго условия: $\psi_1(t) \equiv \alpha\pi$, $\psi_2(t) \equiv \beta$. В качестве λ выберем $\lambda(t) = e^t$. Поскольку $\frac{\log\log t}{\log\lambda(t)} = \frac{\log\log t}{t} \underset{t\to\infty}{\to} 0$, то $\tau = 0$. Далее, $\frac{\log\zeta(t)}{\log\lambda(t)} = 0$, т.е. $\mu = 0$; $\frac{\log\left(\int_0^t\psi_1(s)ds\right)}{\log\lambda(t)} = \frac{\log\alpha\pi t}{t} \underset{t\to\infty}{\to} 0$, т.е. $\nu = 0$ и следовательно, $\max\{\nu,\mu+\tau\} = 0$. И наконец, $\frac{\int_0^t\psi_2(s)\,ds}{\log\lambda(t)} = \frac{\beta t}{t} = \beta$, т.е. $\theta = \beta$. Таким образом, согласно теореме 2.4:

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log\|X(t)\|}{t} \leq -\frac{m - (\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r} = -\frac{2\lambda_0 - 3\alpha - 10\alpha^2}{2} < 0.$$

Отметим, что функция g удовлетворяет глобальному условию Липшица, а f удовлетворяет локальному, но не удовлетворяет глобальному условию Липшица. Действительно, для g:

$$\|g(t,\bar{x}) - g(t,\bar{y})\|^2 = e^{-mt}\alpha^2\int_0^\pi|x(s)-y(s)|^2ds + e^{-mt}\alpha^2(\|x\|-\|y\|)^2 \leq$$

$$\leq 2e^{-mt}\alpha^2\|x-y\|^2 \leq 2\alpha^2\|\bar{x}-\bar{y}\|^2.$$

Для f имеем:

$$\|f(t,\bar{x})-f(t,\bar{y})\|^2 = \int_0^\pi \left|\sin\left(x(s)+e^{-\frac{mt}{2}}\cos x^1\right) - \sin\left(y(s)+e^{-\frac{mt}{2}}\cos y^1\right)\right|^2 ds+$$
$$+\left|x^1\sin x^1 - y^1\sin y^1 + \|x\| - \|y\|\right|^2.$$

Так как $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$, $|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$ для любых $x,y\in\mathbb{R}$, то

$$\|f(t,\bar{x})-f(t,\bar{y})\|^2 \leq \int_0^\pi \left|x(s)-y(s)+e^{-\frac{mt}{2}}\cos x^1 - e^{-\frac{mt}{2}}\cos y^1\right|^2 ds+$$
$$+2\left|x^1\sin x^1 - y^1\sin y^1\right|^2 + 2\|x-y\|^2 \leq$$
$$\leq 4\|x-y\|^2 + 2\pi\left|x^1-y^1\right|^2 + 2\left|x^1\sin x^1 - y^1\sin y^1\right|^2.$$

Функция $h(x) = x\sin x$, $x\in\mathbb{R}$ удовлетворяет локальному условию Липшица (и не удовлетворяет глобальному), поэтому для любого $a>0$ найдется постоянная $q_a>0$ такая, что для всех $|x^1|,|y^1|<a$ выполняется $\left|x^1\sin x^1 - y^1\sin y^1\right| \leq q_a|x^1-y^1|$. Но если $\|\bar{x}\|^2 = \int_0^\pi (x(s))^2 ds + (x^1)^2 \leq a^2$, $\|\bar{y}\|^2 \leq a^2$ то и $\left|x^1\right| \leq a$, $|y^1| \leq a$. Поэтому при любом $a>0$ при условия $\|\bar{x}\|,\|\bar{y}\| \leq a$ выполняется неравенство

$$\|f(\bar{x})-f(\bar{y})\|^2 \leq \max\{4{,}2(\pi+q_a^2)\}\cdot\|\bar{x}-\bar{y}\|^2,$$

т.е. локальное условие Липшица выполнено.

ГЛАВА 3
СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ, ИМЕЮЩИМИ РАЗЛИЧНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ХАРСТА, БОЛЬШИЕ 1/3

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, на котором определены независимые одномерные дробные броуновские движения $B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)}$ с индексами Харста $H_1, \ldots, H_d \in (1/3,1)$. Введем обозначение $B_t = (B_t^{(0)}, \ldots, B_t^{(d)})^\top$ для $(d+1)$-мерного дробного броуновского движения, в котором $B_t^{(0)} = t$. Пусть также $H_0 = 1$. Пусть $H_{\min}$ — значение наименьшего из индексов Харста H_i, $i = 0, \ldots, d$. Выберем и зафиксируем некоторое $H \in (1/3, 1/2]$ такое, что $H < H_{\min}$.

Объектом изучения данной главы станет следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = f(X_t)dB_t,\ t \in [0,T], \tag{3.1}$$

в котором f — $(n \times (d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0 \ldots, d,$. Через X_t^x будем обозначать решение уравнения (3.1) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$.

Приведем конструктивное определение процесса второго порядка над дробным броуновским движением B.

Определение 3.1. Процессом второго порядка над дробным броуновским движением B будем называть процесс $\mathbb{B}\colon [0,T]^2 \times \Omega \to \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$, определенный следующими равенствами:

$$\mathbb{B}_{s,t} = \left(\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}\right)_{i,j=0}^{d},$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} \overset{L^2}{=} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \int_{\mathcal{P}} B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)}, \quad \int_{\mathcal{P}} B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)} = \sum_{t_k, t_{k+1} \in \mathcal{P}} B_{s,t_k}^{(i)} B_{t_k,t_{k+1}}^{(j)}, \quad 1 \le i < j \le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)} = \int_s^t B_{s,r}^{(j)} dr \overset{\text{п.н.}}{=} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_k, t_{k+1} \in \mathcal{P}} B_{s,t_k}^{(j)} (t_{k+1} - t_k), \quad 1 \le j \le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,i)} = \frac{1}{2}\left(B_{s,t}^{(i)}\right)^2, \quad 0 \le i \le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} = -\mathbb{B}_{s,t}^{(j,i)} + B_{s,t}^{(i)} B_{s,t}^{(j)}, \quad 0 \le j < i \le d$$

для любой пары $(s,t) \in [0,T]^2$, где $\mathcal{P} = \{s = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = t\}$ — произвольное разбиение отрезка $[s,t]$, $|\mathcal{P}| = \max|t_{k+1} - t_k|$, а все пределы понимаются не зависящими от последовательности разбиений $\mathcal{P}$. Здесь обозначения $\overset{L^2}{=}$, $\overset{\text{п.н.}}{=}$ применяются для того, чтобы показать, что соответствующие пределы понимаются в смысле $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и $\mathbb{P} = 1$ соответственно.

Замечание 3.1. Поясним корректность приведенного определения. Интегралы, определяющие $\mathbb{B}^{(0,j)}_{s,t}$, являются потраекторными интегралами Янга, соответствующие им интегральные суммы сходятся п.н., поскольку сумма показателей непрерывности по Гельдеру тождественной функции и $B^{(j)}_{s,\cdot}$ строго больше 1. Интегральные суммы в $\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t}$ имеют конечный предел в L_2 ввиду предложения 10.3 [25], поскольку обе ковариационные функции $R_{B^{(i)}}$, $R_{B^{(j)}}$ имеют конечную ρ-вариацию, $\rho = \frac{1}{2H} < 2$ (см. [26, с. 417, предл. 2.2]).

Предложение 3.1. *Для любого фиксированного* $H \in (1/3, 1/2]$ *такого, что* $H < H_{\min} = \min\limits_{i=0,\ldots,d} H_i$ *имеет место включение* $(B, \mathbb{B}) \in \mathscr{C}^H_g([0,T], \mathbb{R}^{d+1})$ *п.н., и более того,* $\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}\|^q_{2H} < \infty$ *для любого* $q \geq 1$.

Доказательство. Условие $\operatorname{Sym}(\mathbb{B}_{s,t}) = \frac{1}{2} B_{s,t} \otimes B_{s,t}$ очевидно выполнено по определению $\mathbb{B}$, поэтому достаточно доказать, что $(B, \mathbb{B}) \in \mathscr{C}^H([0,T], \mathbb{R}^{d+1})$. Обозначим через $\widetilde{\mathbb{B}}_{s,t} = \left(\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t}\right)^d_{i,j=1}$ процесс второго порядка над дробным броуновским движением $\widetilde{B}_t = (B_t)^d_{i=1}$ с индексами Харста $H_i \in (1/3,1)$, $i = 1, \ldots, d$. Покажем, что пара $(B, \mathbb{B})$ удовлетворяет условиям теоремы 10.4 из [25]. Как было показано [25, раздел 10.3] и [28, раздел 2.3], справедливы неравенства

$$\|R_{B^{(i)}}\|_{\frac{1}{2H_i}-\text{var};[s,t]^2} \leq M_i |t-s|^{2H_i}, \quad H_i \in (1/3, 1/2],$$
$$\|R_{B^{(i)}}\|_{1-\text{var};[s,t]^2} \leq M_i |t-s|, \quad H_i \in (1/2, 1)$$

для $i = 1, \ldots, d$ с некоторыми константами M_i, где $\|R_{B^{(i)}}\|_{\rho-\text{var};[s,t]^2}$ — ρ-вариация функции $R_{B^{(i)}}$ на прямоугольнике $[s,t]^2$ (см. определение в [25, раздел 10.2]). Следующее неравенство является простым следствием из определения ρ-вариации:

$$\|R_{B^{(i)}}\|_{\rho'-\text{var};[s,t]^2} \leq \left(\sup_{u,v,u',v' \in [s,t]} \left|\mathbb{E}(B^{(i)}_{u,v} B^{(i)}_{u',v'})\right|\right)^{\frac{\rho'-\rho}{\rho'}} \left(\|R_{B^{(i)}}\|_{\rho-\text{var};[s,t]^2}\right)^{\frac{\rho}{\rho'}}$$

для любого $\rho' > \rho$. Непосредственное вычисление показывает, что $\left|\mathbb{E}(B^{(i)}_{u,v} B^{(i)}_{u',v'})\right| \leq |t-s|^{2H_i} \leq T^{2H_i}$ для любых $u,v,u',v' \in [s,t] \subset [0,T]$.

Полагая $H_* = \min\{\frac{1}{2}, H_{min}\}$, из последних четырех неравенств можно вывести, что

$$\|R_{B^{(i)}}\|_{\frac{1}{2H_*}-\mathrm{var};[s,t]^2} \le M|t-s|^{2H_*}, \quad i=1,\dots,d,$$

где $M = \max\limits_{i=1,\dots,d} M_i^{H_*/H'_i} T^{2H'_i-2H_*}$, $H'_i = \min\{H_i, \frac{1}{2}\}$. Таким образом, пара $(\widetilde{B}, \widetilde{\mathbb{B}})$ удовлетворяет условиям теоремы 10.4 [25] со значением параметра $\rho = \frac{1}{2H_*} \in$ $\in [1,\frac{3}{2})$.

Применяя неравенство Лав-Янга (см. предложение 1.2) при $\tau = s$ к интегралам $\mathbb{B}^{(0,j)}_{s,t}$, $1 \le j \le d$, можем заключить, что для любой пары $(s,t) \in [0,T]^2$ п.н. справедливо неравенство

$$\left|\mathbb{B}^{(0,j)}_{s,t}\right| = \left|\int_s^t B^{(j)}_{s,r} dr\right| \le C_{1,H}|t-s| \|B^{(j)}\|_{\frac{1}{H}-var;[s,t]} \le C_0\|B^{(j)}\|_H |t-s|^{2H},$$

в котором $C_0 = C_{1,H}T^{1-H}$ — константа (зависящая только от H,T), а также была использована зависимость между $\frac{1}{H}$-вариацией и нормой Гельдера с показателем H [27, с. 170]. Очевидно, $\left|\mathbb{B}^{(0,0)}_{s,t}\right| \le \frac{1}{2}T^{2-2H}|t-s|^{2H}$. Также из теоремы 10.4 [25] следует, что $(\widetilde{B}, \widetilde{\mathbb{B}}) \in \mathscr{C}^H_g([0,T], \mathbb{R}^d)$, что в свою очередь влечет $\left|\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t}\right| \le \left|\widetilde{\mathbb{B}}_{s,t}\right| \le \|\widetilde{\mathbb{B}}\|_{2H}|t-s|^{2H}$, $\|\widetilde{\mathbb{B}}\|_{2H} < \infty$ п.н. для всех $1 \le i,j \le d$. Таким образом, ввиду эквивалентности норм в $\mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$, можем заключить, что

$$|\mathbb{B}_{s,t}| \le C_d \sum_{i,j=0}^d \left|\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t}\right| \le C_d C_{T,H}\left(1 + \|\widetilde{\mathbb{B}}\|_{2H} + \sum_{j=1}^d \|B^{(j)}\|_H\right)|t-s|^{2H},$$

для любой пары $(s,t) \in [0,T]^2$ п.н. с некоторыми константами C_d и $C_{T,H}$, зависящими только от d и T,H соответственно. Полученное неравенство устанавливает тот факт, что $\|\mathbb{B}\|_{2H} < \infty$ п.н. и, следовательно, $(B,\mathbb{B}) \in$ $\in \mathscr{C}^H_g([0,T], \mathbb{R}^{d+1})$ п.н. (нетрудно убедиться, что тождество Чена также выполняется для всех элементов на позициях $(0,j)$, $(j,0)$, $0 \le j \le d$ в матрицах $\mathbb{B}$, $B \otimes B$).

Применяя неравенство о среднем степенном и применяя оператор математического ожидания, из последнего неравенства можем заключить, что для любого $q \ge 1$ справедливо неравенство

$$\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}\|^q_{2H} \le C_{d,T,H,q}\left(1 + \mathbb{E}\,\|\widetilde{\mathbb{B}}\|^q_{2H} + \sum_{j=1}^d \mathbb{E}\,\|B^{(j)}\|^q_H\right),$$

в котором $C_{d,T,H,q} = (C_d C_{T,H})^q (d+2)^{1-\frac{1}{q}}$. Как известно из [25, теорема 4.10] и [46, Лемма 7.4], $\mathbb{E}\,\|\widetilde{\mathbb{B}}\|^q_{2H} < \infty$ и $\mathbb{E}\,\|B^{(j)}\|^q_H < \infty$ для всех $j = 1,\ldots,d$. Последнее завершает доказательство.

Определение 3.2. Случайный процесс X_t такой, что $(X, X') \in \in \mathcal{D}^{2H}_B([0,T],\mathbb{R}^n)$ п.н., будем называть решением уравнения (3.1), если он п.н. удовлетворяет равенству

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)dB_s, \quad t \in [0,T], \tag{3.2}$$

где интеграл понимается как потраекторный интеграл Губинелли. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Решение уравнения (3.1) с начальным условием $X_0 = x$ будем называть п.н. единственным, если для любого другого решения Y_t уравнения (3.1) с начальным условием $Y_0 = x$ выполняется равенство $\mathbb{P}(X_t = Y_t\ \forall t \in [0,T]) = 1$.

Следующая теорема дает достаточное условие существования и единственности решения уравнения (3.1).

Теорема 3.1. *Если $f \in C^2_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, то для любого $x \in \mathbb{R}^n$ уравнение* (3.1) *имеет единственное решение с начальным условием $X_0 = x$, причем $X' = f(X)$, $(f(X),(f(X))') \in \mathcal{D}^{2H}_B([0,T],\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$ п.н. Более того, если $H_i > H^* \geq 1/2$ для всех $i = 0,\ldots,d$, то справедливо включение $X \in C^{H^*}([0,T],\mathbb{R}^n)$ п.н. и интеграл в определении решения уравнения* (3.1) *является потраекторным интегралом Янга.*

Доказательство существования и единственности функции $X(t,\omega)$ следует из теоремы 3.13 в [45]. В свою очередь, измеримость и $\mathcal{F}_t$-согласованность $X(t,\omega)$ следует из непрерывности отображения Ито-Лайонса, установленной в утверждении 2 тероремы 3.13 в работе [45], и сходимости диадных аппроксимаций $B_t(m)$ к дробному броуновскому движению B_t, доказанной в теореме 2 в работе [22].

3.1 Формула Ито

Рассмотрим вопрос о том, какому стохастическому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция $g(X_t)$ от решения X_t исходного стохастического дифференциального уравнения (3.1).

Теорема 3.2. *Пусть* $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. *Тогда для любых* s, $t \in [0,T]$ *п.н. справедлива следующая формула типа Ито:*

$$g(X_t) = g(X_s) + \int_s^t Dg(X_r)f(X_r)dB_r, \qquad s,t \in [0,T], \tag{3.3}$$

где X_t — *решение уравнения* (3.1) *с начальным условием* $X_0 = x$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $s,t \in [0,T]$, $s \le t$ и рассмотрим разбиение отрезка $[s,t]$ точками $\mathcal{P}^{(N)} = \{s = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t\}$, $\left|\mathcal{P}^{(N)}\right| = \max\limits_{i=0,\ldots,N-1} |t_{i+1} - t_i|$. Будем обозначать $X^{\otimes m} = \underbrace{X \otimes \ldots \otimes X}_{m}$. Все равенства и неравенства ниже для случайных величин будем понимать выполненными почти наверное (п.н.). Используя формулу Тейлора, будем иметь:

$$g(X_t) - g(X_s) = \sum_{i=0}^{N-1} (g(X_{t_{i+1}}) - g(X_{t_i})) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} \left(Dg(X_{t_i})X_{t_i,t_{i+1}} + \frac{1}{2}D^2 g(X_{t_i})X_{t_i,t_{i+1}}^{\otimes 2} + \frac{1}{6}D^3 g(X_{t_i} + \theta_i X_{t_i,t_{i+1}})X_{t_i,t_{i+1}}^{\otimes 3} \right), \tag{3.4}$$

для некоторых $\theta_i \in (0,1)$. Здесь слагаемые вида $D^k g X^{\otimes k}$ следует понимать в смысле, указанном в замечании 1.4:

$$D^k g X^{\otimes k} = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k g}{\partial X_{i_1} \ldots \partial X_{i_k}} X_{i_1} \ldots X_{i_k}$$

Оценим последнее слагаемое в сумме (3.4). Следующее неравенство будет использоваться в дальнейшем (напомним, что $3H > 1$):

$$\sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i|^{3H} \le \sum_{i=0}^{N-1} \left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1} (t_{i+1} - t_i) = \left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1} (t - s).$$

Поскольку $X \in C^H([0,T], \mathbb{R}^n)$ и $3H > 1$, то

$$\left| \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{6} D^3 g(X_{t_i} + \theta_i X_{t_i,t_{i+1}}) X_{t_i,t_{i+1}}^{\otimes 3} \right| \le \frac{1}{6} \|D^3 g\|_\infty \|X\|_H^3 \sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i|^{3H} =$$

$$= \frac{1}{6} \|D^3 g\|_\infty \|X\|_H^3 (t - s) \left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1} = O\left(\left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1} \right). \tag{3.5}$$

Из теоремы 4.10 [25] следует, что

$$X_{t_i,t_{i+1}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X_r)dB_r = f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} + Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + O\left(|t_{i+1}-t_i|^{3H}\right), \tag{3.6}$$

причем константа в $O\left(|t_{i+1}-t_i|^{3H}\right)$ зависит только от f, B и X и не зависит от разбиения $\mathcal{P}^{(N)}$. Поскольку $|f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}}| \leq \|f\|_\infty \|B\|_H \times$ $\times |t_{i+1}-t_i|^H$, $|Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}| \leq \|f\|^2_{C_b^2}\|\mathbb{B}\|_{2H}|t_{i+1}-t_i|^{2H}$, то умножая соотношение (3.6) тензорно на себя, получим

$$\begin{gathered} X^{\otimes 2}_{t_i,t_{i+1}} = (f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} + (Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} + \\ + f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} \otimes Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} \otimes f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} + \\ + O\left(|t_{i+1}-t_i|^{4H}\right) = \\ = (f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} + O\left(|t_{i+1}-t_i|^{3H}\right). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\sum_{i=0}^{N-1} O\left(|t_{i+1}-t_i|^{3H}\right) \leq O(1)\sum_{i=0}^{N-1}|t_{i+1}-t_i|^{3H} = O\left(\left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1}\right).$$

Подставляя (3.5) — (3.7) в (3.4), и замечая, что

$$\begin{gathered} D^2g(X_{t_i})(f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} = \left(f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}}\right)^\top D^2g(X_{t_i})\left(f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}}\right) = \\ = (B_{t_i,t_{i+1}})^\top \left(f(X_{t_i})^\top D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})\right)B_{t_i,t_{i+1}} = \\ = \left(f(X_{t_i})^\top D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})\right)(B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} \end{gathered}$$

получим:

$$\begin{gathered} g(X_t)-g(X_s) = \sum_{i=0}^{N-1} Dg(X_{t_i})f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} + \\ + \sum_{i=0}^{N-1}\left(Dg(X_{t_i})Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + \frac{1}{2}D^2g(X_{t_i})(f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2}\right) + \\ + O\left(\left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1}\right) = \sum_{i=0}^{N-1} Dg(X_{t_i})f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} + \\ + \sum_{i=0}^{N-1}\left(Dg(X_{t_i})Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + f(X_{t_i})^\top D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}\right) + \\ + \sum_{i=0}^{N-1} f(X_{t_i})^\top D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})\left(\frac{1}{2}(B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} - \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}\right) + O\left(\left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1}\right) \end{gathered} \tag{3.8}$$

Поскольку пара $(B,\mathbb{B})$ принадлежит пространству геометрических грубых траекторий, то $\mathrm{Sym}(\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}) = \frac{1}{2}(B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2}$ и $\frac{1}{2}(B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} - \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} = -\mathrm{Anti}(\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}})$, где $\mathrm{Anti}(\mathbb{B}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{B} - \mathbb{B}^\top\right)$ — антисимметричная часть $\mathbb{B}$. Заметим, что $f(X_\cdot)^\top D^2 g(X_\cdot) f(X_\cdot)$ симметрично, в то время как $\mathrm{Anti}(\mathbb{B})$ антисимметрично, поэтому $f(X_{t_i})^\top D^2 g(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathrm{Anti}(\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}})$ зануляется для каждого $i = 0,\dots,N-1$. Учитывая это и то, что $(Dg(X_\cdot)\cdot f(X_\cdot))' = D(Dg\cdot f)(X_\cdot)\cdot X'_\cdot = f(X_\cdot)^\top D^2 g(X_\cdot) f(X_\cdot) + Dg(X_\cdot) Df(X_\cdot) f(X_\cdot)$, из равенства (3.8) получим

$$g(X_t) - g(X_s) = \sum_{i=0}^{2^N-1}\left(Dg(X_{t_i}) f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}} + \left(Dg(X_\cdot) f(X_\cdot)\right)'_{t_i} \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}\right) + \\ + O\left(\left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1}\right) \tag{3.9}$$

Переходя к пределу в (3.9) при $\left|\mathcal{P}^{(N)}\right| \to 0$, получим (3.3), что завершает доказательство формулы Ито.

3.2 Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями

Наряду с уравнением (3.1) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\widetilde{X}_t = \widetilde{f}(\widetilde{X}_t) dB_t, \quad t \in [0,T], \tag{3.10}$$

в котором $\widetilde{f}$ — $(n \times (d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $\widetilde{f}_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0,\dots,d$.

Определения решений уравнений (3.1), (3.10) и связанных с ними объектов были приведены ранее. Будем предполагать выполненными условия существования решений указанных уравнений с начальными условиями $X_0 = \xi$, $\widetilde{X}_0 = \widetilde{\xi}$, где ξ, $\widetilde{\xi}$ — случайные величины. В частности, для согласованности со случаем $\xi(\omega) \equiv x$, $\widetilde{\xi}(\omega) \equiv \widetilde{x}$ (см. теорему 3.1) будем предполагать, что $f, \widetilde{f} \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$. Причем функцию f будем считать фиксированной, а $\widetilde{f}$ — изменяющейся в малой окрестности f в пространстве $C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$.

Будем использовать символ I для обозначения отрезков вещественной прямой: $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ длины $|I| = b - a$. Для краткости будем опускать индекс $[0,T]$ для норм, связанных с исходным отрезком интегрирования, полагая $\|\cdot\|_\alpha := \|\cdot\|_{\alpha;[0,T]}$, $\|\cdot\|_{\alpha,\delta} := \|\cdot\|_{\alpha;[0,T],\delta}$.

Приведем ряд утверждений, которые будем использовать в дальнейшем для проведения оценок. Пусть $Y \in C^\alpha([0,T], U_1)$, $I \subset [0,T]$, где U_1 — конечномерное банахово пространство.

Предложение 3.2. *Если* $\|Y\|_{\alpha;I,\delta} \leq M$, $\delta \leq |I|$, *то* $\|Y\|_{\alpha;I} \leq \leq M\left(1 \vee 2\delta^{-(1-\alpha)}|I|^{1-\alpha}\right)$.

Доказательство приведено в [25], см. утверждение 4.24 на с. 77.

Предложение 3.3. *Пусть* X_t *— решение уравнения* (3.1). *Тогда для любого* $I \subset [0,T]$ *длины* $|I| \leq 1$ *п.н. справедливы неравенства*

$$\|X\|_{H;I} \leq K\left(C_B\|f\|_{C_b^2} \vee \left(C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^{1/H}\right), \tag{3.11}$$

$$\|R^X\|_{2H;I} \leq \hat{K}\left(\left(C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^2 \vee \left(C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^{1+\frac{1}{H}}\right), \tag{3.12}$$

где $C_B = C_B(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) = \|B\|_H + \sqrt{\|\mathbb{B}\|_{2H}}$, *а константы* $K, \hat{K}$ *зависят лишь от* H.

Доказательство. Равенство (3.11) является простым следствием [25, предложение 8.3]. Докажем равенство (3.12). Используя предложение 1.5 для $s,t \in I$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
&|R^X_{s,t}| = |X_{s,t} - f(X_s)B_{s,t}| \leq \\
&\leq \left|\int_s^t f(X_r)dB_r - f(X_s)B_{s,t} - Df(X_s)f(X_s)\mathbb{B}_{s,t}\right| + |Df(X_s)f(X_s)\mathbb{B}_{s,t}| \leq \\
&\leq C\Big(\|B\|_{H;I}\|R^{f(X)}\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}_{s,t}\|_{2H;I}\|f(X)'\|_{H;I}\Big)|t-s|^{3H} + \\
&+\|Df\|_\infty\|f\|_\infty\|\mathbb{B}\|_{2H;I}|t-s|^{2H}.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Рассмотрим последнее неравенство для всех подотрезков I длины не больше δ. Тогда, как следствие

$$\begin{aligned}
&\|R^X\|_{2H;\delta} \leq \|Df\|_\infty\|f\|_\infty\|\mathbb{B}\|_{2H;I} + \\
&+C\Big(\|B\|_{H;\delta}\|R^{f(X)}\|_{2H;\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H;\delta}\|f(X)'\|_{H;\delta}\Big)\delta^H
\end{aligned}$$

Ниже символами c_i будем обозначать константы, зависящие быть может, только от H. Заметим, что $R^{f(X)} = f(X)_{s,t} - Df(X_s)X'_sB_{s,t} = f(X)_{s,t} -$

$-Df(X_s)X_{s,t}+Df(X_s)R^X_{s,t}=\frac{1}{2}D^2f(X_s+\theta X_{s,t})X^{\otimes 2}_{s,t}+Df(X_s)R^X_{s,t}$ для некоторого $\theta\in(0,1)$. Поэтому

$$\|R^{f(X)}\|_{2H;\delta}\le\frac{1}{2}\|D^2f\|_\infty\|X\|^2_{H;\delta}+\|Df\|_\infty\|R^X\|_{2H;\delta}\le$$
$$\le\|f\|_{C^2_b}\Big(\|X\|^2_{H;\delta}+\|R^X\|_{2H;\delta}\Big).$$

Также поскольку $f(X)'=Df(X)X'=Df(X)f(X)$, то, как легко видеть, $(Df(X)f(X))_{s,t}=D(Df\cdot f)(X_s+\theta_1X_{s,t})X_{s,t}=\big(D^2f\cdot f+Df\cdot Df\big)(X_s+$ $+\theta_1X_{s,t})X_{s,t}$, поэтому $\|f(X)'\|_{H;\delta}\le\|f\|^2_{C^2_b}\|X\|_{H;\delta}$. Значит,

$$\|R^X\|_{2H;\delta}\le c_1\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta}+c_1\|f\|_{C^2_b}\|B\|_{H;\delta}\delta^H\Big(\|X\|^2_{H;\delta}+\|R^X\|_{2H;\delta}\Big)+$$
$$+c_1\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{H;\delta}\delta^H\|X\|_{H;\delta},$$

где $c_1=1\vee C$. Далее ограничимся достаточно малыми δ — такими, чтобы выполнялись неравенства

$$c_1\|f\|_{C^2_b}\|B\|_H\delta^H\le\frac{1}{2},\qquad c_1\|f\|_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|^{1/2}_{2H}\delta^H\le 1. \tag{3.14}$$

При таком выборе будем иметь:

$$\|R^X\|_{2H;\delta}\le c_1\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta}+\frac{1}{2}\Big(\|X\|^2_{H;\delta}+\|R^X\|_{2H;\delta}\Big)+\|f\|_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|^{1/2}_{2H}\|X\|_{H;\delta}. \tag{3.15}$$

Отсюда с учетом неравенства $2\sqrt{ab}\le a+b$, выводим:

$$\|R^X\|_{2H;\delta}\le 2c_1\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta}+\|X\|^2_{H;\delta}+2\|f\|_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|^{1/2}_{2H}\|X\|_{H;\delta}\le$$
$$\le c_3\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta}+2\|X\|^2_{H;\delta}, \tag{3.16}$$

где $c_3=2c_2+1$ при достаточно малых $\delta\le\Big(2c_1C_B\|f\|_{C^2_b}\Big)^{-1/H}$. Из [25, предложение 8.3] следует, что при тех же δ выполнено неравенство $\|X\|_{H;\delta}\le$ $\le c_0\|f\|_{C^2_b}C_B$. Комбинируя последние два неравенства, получим:

$$\|R^X\|_{2H;\delta}\le\|f\|^2_{C^2_b}\left(c_3+2c_0^2\right)C_B^2=c_4\left(C_B\|f\|_{C^2_b}\right)^2,$$

где $c_4=c_3+2c_0^2$. Применяя предложение 3.2, с учетом $|I|\le 1$, будем иметь:

$$\|R^X\|_{2H;I}\le c_4\left(C_B\|f\|_{C^2_b}\right)^2\left(1\vee 2\delta^{H-1}\right)\le c_5\left(\left(C_B\|f\|_{C^2_b}\right)^2\vee\left(C_B\|f\|_{C^2_b}\right)^{1+\frac{1}{H}}\right),$$

где $c_5=c_4(1\vee 2^{1/H}c_1^{(1-H)/H})$ зависит лишь от H. Предложение доказано.

Предложение 3.4. *Пусть* $t_j = (j \cdot \delta) \wedge T$, $I_j = [t_j, t_{j+1}] \subset [0,T]$, $j = 0,1,\ldots$ *Тогда* $\|Y\|_{H;\delta} \le 2^{1-H} \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $s,t \in [0,T]$ такие, что $0 < |t-s| < \delta$, $s < t$. Если $s,t \in I_j$ для некоторого j, то, очевидно, $|Y_{s,t}| \le \|Y\|_{H;I_j} |t-s|^H \le |t-s|^H \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j}$. Иначе $s \in I_{j-1}$, $t \in I_j$. В таком случае

$$
\begin{aligned}
|Y_{s,t}| \le |Y_{s,t_j}| + |Y_{t_j,t}| \le \|Y\|_{H;I_{j-1}} |t_j - s|^H + \|Y\|_{H;I_j} |t - t_j|^H \le \\
\le \left(|t-t_j|^H + |t_j - s|^H\right) \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j} \le 2^{1-H} |t-s|^H \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j},
\end{aligned}
$$

где в последнем переходе было применено неравенство Иенсена для вогнутой функции $\phi(t) = t^H$, $t > 0$, $H \in (0,1)$. Так как $1 - H > 0$, то $2^{1-H} > 1$ и в любом из рассмотренных случаев

$$
|Y_{s,t}| \le 2^{1-H} |t-s|^H \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j}
$$

для $|t-s| \le \delta$. Из последнего неравенства следует требуемое утверждение.

В технических выкладках будет полезно следующее элементарное предложение.

Предложение 3.5. *Пусть* $\mathrm{u},\widetilde{\mathrm{u}} \in \mathbf{U}$, $\mathrm{v},\widetilde{\mathrm{v}} \in \mathbf{V}$, $u,\widetilde{u} \in U \times V^{\otimes k}$, $v,\widetilde{v} \in V^{\otimes k}$ *— тензоры,* $\mathbf{U},\mathbf{V},U,V$ *— нормированные векторные пространства над полем* $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливы неравенства*

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{uv} - \widetilde{\mathrm{u}}\widetilde{\mathrm{v}}| \le |\mathrm{u}|\,|\mathrm{v} - \widetilde{\mathrm{v}}| + |\widetilde{\mathrm{v}}|\,|\mathrm{u} - \widetilde{\mathrm{u}}|\,, \\
|uv - \widetilde{u}\widetilde{v}| \le |u|\,|v - \widetilde{v}| + |\widetilde{v}|\,|u - \widetilde{u}|\,.
\end{aligned}
$$

3.2.1 Вспомогательные результаты

В данном разделе мы получим ряд вспомогательных лемм, на которых будут опираться доказательства результатов, связанных с непрерывной зависимостью решений уравнений (3.1), (3.10). Все неравенства в дальнейшем понимаются выполненными почти наверное.

Лемма 3.1. *Пусть* X_t *и* $\widetilde{X}_t$ *— решения уравнений* (3.1) *и* (3.10) *соответственно с правыми частями* f, $\widetilde{f}$ *из класса* $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, *причем функция* $\widetilde{f}$

такова, что $\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \le 1$. *Тогда для любого отрезка* $I = [u,v] \subset [0,T]$ *длины* $|I| \le 1$ *и любых* $s,t \in I$ *п.н. имеет место следующее неравенство:*

$$\left| \int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right| \le C_f \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} |t-s|^H,$$

где $C_f = C_f(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ — *случайная величина.*

Доказательство. Используя предложение 1.5, получим оценку

$$\left| \int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right| \le \left| f(\widetilde{X}_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s) \right| |B_{s,t}| + \left| f(\widetilde{X}_s)' - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)' \right| |\mathbb{B}_{s,t}| +$$
$$+ C \left(\|B\|_H \left\| R^{f(\widetilde{X}) - \widetilde{f}(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(\widetilde{X})' - \widetilde{f}(\widetilde{X})'\|_{H;I} \right) |t-s|^{3H}. \quad (3.17)$$

Следуя [25, лемма 7.3, теорема 8.4], имеют место следующие соотношения для производных Губинелли:

$$f(\widetilde{X}_\cdot)' = Df(\widetilde{X}_\cdot) \cdot \widetilde{X}_\cdot' = Df(\widetilde{X}_\cdot) \cdot \widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot) = (Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_\cdot), \quad (3.18)$$
$$\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)' = D\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot) \cdot \widetilde{X}_\cdot' = D\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot) \cdot \widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot) = (D\widetilde{f} \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_\cdot). \quad (3.19)$$

Из соотношений (3.18), (3.19) очевидным образом следуют оценки

$$\left| f(\widetilde{X}_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s) \right| |B_{s,t}| \le \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \|B\|_H |t-s|^H,$$
$$\left| f(\widetilde{X}_s)' - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)' \right| |\mathbb{B}_{s,t}| \le \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \|\widetilde{f}\|_{C_b^2} \|\mathbb{B}\|_{2H} |t-s|^H$$

для любых $s,t \in I$, $|I| \le 1$. Из неравенства треугольника следует, что $\|\widetilde{f}\|_{C_b^2} \le \le \|f\|_{C_b^2} + 1$ Таким образом,

$$\left| f(\widetilde{X}_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s) \right| |B_{s,t}| + \left| f(\widetilde{X}_s)' - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)' \right| |\mathbb{B}_{s,t}| \le c_0 \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} |t-s|^H, \quad (3.20)$$

где $c_0 = \|B\|_H + (1 + \|f\|_{C_b^3}) \|\mathbb{B}\|_{2H}$.

Далее оценим $\|f(\widetilde{X})' - \widetilde{f}(\widetilde{X})'\|_{H;I}$. Используя соотношения (3.18), (3.19) и формулу конечных приращений будем иметь:

$$\left| f(\widetilde{X}_\cdot)'_{s,t} - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)'_{s,t} \right| = \left| \left(Df \cdot \widetilde{f} - D\widetilde{f} \cdot \widetilde{f} \right) (\widetilde{X}_\cdot)_{s,t} \right| \le$$
$$\le \left\| D\big((Df - D\widetilde{f}) \cdot \widetilde{f} \big) \right\|_\infty \|\widetilde{X}\|_{H;I} |t-s|^H.$$

Поскольку $D\big((Df - D\widetilde{f}) \cdot \widetilde{f}\big) = (D^2 f - D^2 \widetilde{f}) \cdot \widetilde{f} + (Df - D\widetilde{f}) \cdot D\widetilde{f}$, то нетрудно видеть, что $\left\| D\big((Df - D\widetilde{f}) \cdot \widetilde{f}\big) \right\|_\infty \le 2 \|\widetilde{f}\|_{C_b^2} \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \le 2(1 + \|f\|_{C_b^3}) \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}$. Отсюда ввиду предложения 3.3 выводим неравенство

$$\|f(\widetilde{X})' - \widetilde{f}(\widetilde{X})'\|_{H;I} \le c_{f'} \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}, \quad (3.21)$$

где $c_{f'} = 2(1 + \|f\|_{C_b^3})K\left((1 + \|f\|_{C_b^3})C_B \vee \left((1 + \|f\|_{C_b^3})C_B\right)^{1/H}\right)$.

Осталось оценить $\left\|R^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I}$. Учитывая соотношения (3.18), (3.19) и формулу конечных приращений, для некоторого $\widetilde{\theta} \in (0,1)$ будем иметь:

$$\begin{gathered}
R_{s,t}^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})} = f(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t} - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}_s' B_{s,t} + D\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}_s' B_{s,t} = \\
= \left((f-\widetilde{f})(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t} - D\big(f-\widetilde{f}\big)(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}_{s,t}\right) + \left(Df(\widetilde{X}_s) - D\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right)R_{s,t}^{\widetilde{X}} = \\
= \frac{1}{2}D^2\left(f-\widetilde{f}\right)\left(\widetilde{X}_{s,t}(\widetilde{\theta})\right)\widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} + \left(Df(\widetilde{X}_s) - D\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right)R_{s,t}^{\widetilde{X}}.
\end{gathered}$$

Из последнего равенства, равенства (3.35) и формулы конечных приращений следует, что для любых $s,t \in I$ имеет место оценка

$$\left|R_{s,t}^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}\right| \le \left(\frac{1}{2}\|\widetilde{X}\|_{H;I}^2 + \|R^{\widetilde{X}}\|_{2H;I}\right)\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}|t-s|^{2H},$$

из которой с учетом предложения 3.3 устанавливаем неравенство

$$\left\|R_{s,t}^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} \le c_R\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} \tag{3.22}$$

где $c_R = \frac{1}{2}K^2\left(K_B^2 \vee K_B^{2/H}\right) + \hat{K}\left(K_B^2 \vee K_B^{1+\frac{1}{H}}\right)$, $K_B = (1 + \|f\|_{C_b^3})C_B$.

Применяя неравенства (3.20) — (3.22) к правой части (3.17), получим:

$$\left|\int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right| \le (c_0 + Cc_R\|B\|_H + Cc_{f'}\|\mathbb{B}\|_{2H})\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}|t-s|^H,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть* X_t *и* $\widetilde{X}_t$ *— решения уравнений* (3.1) *и* (3.10) *соответственно с правыми частями* f, $\widetilde{f}$ *из класса* $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, *причем функция* $\widetilde{f}$ *такова, что* $\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} \le 1$. *Тогда для любых функций* $g, \widetilde{g} \in C_b^1$, *любого отрезка* $I = [u,v] \subset [0,T]$ *длины* $|I| \le 1$ *и любого* $s \in I$ *п.н. справедливо неравенство*

$$\begin{gathered}
|g(X_s) - \widetilde{g}(\widetilde{X}_s)| \le \|g-\widetilde{g}\|_\infty + C_{0;g}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_{1;g}|X_u - \widetilde{X}_u| + \\
+ C_{2;g}\left(\|B\|_H\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H}\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;I}\right)|I|^{3H},
\end{gathered}$$

где $C_{0;g} = C_{0;g}(H, \|g\|_{C_b^1}, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $C_{1;g} = C_{1;g}(H, \|g\|_{C_b^1}, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ *— случайные величины,* $C_{2;g} = C_{2;g}(H, \|g\|_{C_b^1})$ *— константа.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы конечных приращений следует, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned}|g(X_s)-\widetilde{g}(\widetilde{X}_s)| &\le |g(X_s)-g(\widetilde{X}_s)|+|g(\widetilde{X}_s)-\widetilde{g}(\widetilde{X}_s)| \le \\ &\le \|Dg\|_\infty |X_s-\widetilde{X}_s|+\|g-\widetilde{g}\|_\infty \le \\ &\le \|g-\widetilde{g}\|_\infty+\|g\|_{C_b^1}\left(|X_u-\widetilde{X}_u|+|X_{u,s}-\widetilde{X}_{u,s}|\right). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Поэтому осталось оценить $|X_{u,s}-\widetilde{X}_{u,s}|$. Для этого воспользуемся определением решения и предложением 1.5. Будем иметь:

$$|X_{u,s}-\widetilde{X}_{u,s}| = \left|\int_u^s \left(f(X_\tau)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right) dB_\tau\right| \le M_1+M_2,$$

где $M_1 = \left|\int_u^s \left(f(X_\tau)-f(\widetilde{X}_\tau)\right) dB_\tau\right|$, $M_2 = \left|\int_u^s \left(f(\widetilde{X}_\tau)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right) dB_\tau\right|$. Оценку для второго выражения дает лемма 3.1: $M_2 \le C_f\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}|s-u|^H$.

Оценим M_1. С учетом соотношений, аналогичных (3.18), (3.19), и предложения 1.5, получим:

$$\begin{aligned} M_1 \le \left|f(X_u)-f(\widetilde{X}_u)\right| |B_{u,s}| + \left|(Df\cdot f)(X_u)-(Df\cdot\widetilde{f})(\widetilde{X}_u)\right| |\mathbb{B}_{u,s}| + \\ + C\left(\|B\|_{H;I}\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I}+\|\mathbb{B}\|_{2H;I}\|f(X)'-f(\widetilde{X})'\|_{H;I}\right)|s-u|^{3H}. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Осталось заметить, что ввиду формулы конечных приращений, примененной к функциям f и $Df\cdot f$, для любого $s\in I$, $|I|\le 1$ будем иметь:

$$\begin{aligned}\left|f(X_u)-f(\widetilde{X}_u)\right| |B_{u,s}| &\le \|Df\|_\infty |X_u-\widetilde{X}_u|\cdot\|B\|_{H;I}|s-u|^H \le \\ &\le \|f\|_{C_b^3}\|B\|_H|X_u-\widetilde{X}_u|, \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}\left|Df(X_u)f(X_u)-Df(\widetilde{X}_u)\widetilde{f}(\widetilde{X}_u)\right| |\mathbb{B}_{u,s}| &\le \\ \le \left(\|D(Df\cdot f)\|_\infty|X_u-\widetilde{X}_u|+\|Df\|_\infty\|f-\widetilde{f}\|_\infty\right)|\mathbb{B}_{u,s}| &\le \\ \le \|f\|^2_{C_b^3}\|\mathbb{B}\|_{2H}|X_u-\widetilde{X}_u|+\|f\|_{C_b^3}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\|\mathbb{B}\|_{2H}&. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Окончательно, из соотношений (3.23) — (3.26) и леммы 3.1 выводим:

$$\begin{aligned}|g(X_s)-g(\widetilde{X}_s)| \le \|g-\widetilde{g}\|_\infty + C_{0;g}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}+C_{1;g}|X_u-\widetilde{X}_u| + \\ + C_{2;g}\left(\|B\|_H\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I}+\|\mathbb{B}\|_{2H}\|f(X)'-f(\widetilde{X})'\|_{H;I}\right)|I|^{3H},\end{aligned}$$

где $C_{0;g} = \|g\|_{C_b^1}(\|f\|_{C_b^3}\|\mathbb{B}\|_{2H}+C_f)$, $C_{1;g} = \|g\|_{C_b^1}\left(1+\|f\|_{C_b^3}\|B\|_H+\|f\|_{C_b^3}^2\|\mathbb{B}\|_{2H}\right)$, $C_{2;g} = C\|g\|_{C_b^1}$. Последнее соотношение доказывает лемму.

Лемма 3.3. *Пусть X_t и $\widetilde{X}_t$ — решения уравнений* (3.1) *и* (3.10) *соответственно с правыми частями f, $\widetilde{f}$ из класса $C_b^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} \le 1$. Для любого отрезка $I = [u,v] \subset [0,T]$ длины $|I| \le 1$ п.н. имеет место следующее неравенство:*

$$\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;I} \le C_1|X_u - \widetilde{X}_u| + C_2\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_3\|X-\widetilde{X}\|_{H;I},$$

где $C_j = C_j(H,\|f\|_{C_b^3},\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j = 1,2,3$ — случайные величины.

Доказательство. Введем обозначения: $Y_{s,t}(\theta) = Y_s + \theta Y_{s,t}$, $\theta \in (0,1)$, $s,t \in I$, $\varphi = Df\cdot f$. С учетом соотношений, аналогичных (3.18), (3.19), следуя формуле конечных приращений, найдутся $\theta_1,\theta_2,\theta \in (0,1)$ такие, что

$$\begin{aligned}
&\left|\left(f(X_\cdot)' - f(\widetilde{X}_\cdot)'\right)_{s,t}\right| \le \\
&\le \left|(Df\cdot f)(X_\cdot)_{s,t} - (Df\cdot f)(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t}\right| + \left|\big(Df\cdot(f-\widetilde{f})\big)(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t}\right| = \\
&= \left|D\varphi(X_{s,t}(\theta_1))X_{s,t} - D\varphi(\widetilde{X}_{s,t}(\theta_2))\widetilde{X}_{s,t}\right| + \left|D\big(Df\cdot(f-\widetilde{f})\big)(\widetilde{X}_{s,t}(\theta))\widetilde{X}_{s,t}\right| \le \\
&\le |D\varphi(X_{s,t}(\theta_1))|\cdot|X_{s,t}-\widetilde{X}_{s,t}| + |\widetilde{X}_{s,t}|\cdot\left|D\varphi(X_{s,t}(\theta_1)) - D\varphi(\widetilde{X}_{s,t}(\theta_2))\right| + \\
&+ \left\|D^2f\cdot(f-\widetilde{f}) + Df\cdot(Df-D\widetilde{f})\right\|_\infty |\widetilde{X}_{s,t}|.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Легко видеть, что $\left\|D^2f\cdot(f-\widetilde{f}) + Df\cdot(Df-D\widetilde{f})\right\|_\infty \le 2\|f\|_{C_b^3}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}$. Оценим второе слагаемое (3.27). Из формулы конечных приращений следует:

$$\begin{aligned}
&\left|D\varphi(X_{s,t}(\theta_1)) - D\varphi(\widetilde{X}_{s,t}(\theta_2))\right| \le \|D^2\varphi\|_\infty\left(|X_s-\widetilde{X}_s| + |\theta_1-\theta_2|\cdot|X_{s,t}-\widetilde{X}_{s,t}|\right) \le \\
&\le \|f\|_{C_b^3}^2\left(|X_u-\widetilde{X}_u| + \|X-\widetilde{X}\|_{H;I}|u-s|^H + \|X-\widetilde{X}\|_{H;I}|t-s|^H\right).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

С учетом соотношений (3.27), (3.28), очевидных неравенств $|\widetilde{X}_{s,t}| \le \|\widetilde{X}\|_{H;I}|t-s|^H$, $\|\widetilde{f}\|_{C_b^2} \le 1 + \|f\|_{C_b^3}$ и предложения 3.3 для любых $s,t \in I$ будем иметь:

$$\left|\left(f(X_\cdot)' - f(\widetilde{X}_\cdot)'\right)_{s,t}\right| \le \left(C_1|X_u-\widetilde{X}_u| + C_2\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_3\|X-\widetilde{X}\|_{H;I}\right)|t-s|^H,$$

где $C_1 = \|f\|^2_{C^3_b} C_{\widetilde{X}}$, $C_2 = 2\|f\|_{C^3_b} C_{\widetilde{X}}$, $C_3 = \big(1+2C_{\widetilde{X}}\big)\|f\|^2_{C^3_b}$, $C_{\widetilde{X}} = K\Bigg((1+\|f\|_{C^3_b})C_B \vee \Big((1+\|f\|_{C^3_b})C_B\Big)^{\frac{1}{H}}\Bigg)$. Из последнего неравенства следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть* X_t *и* $\widetilde{X}_t$ *— решения уравнений* (3.1) *и* (3.10) *соответственно с правыми частями* f, $\widetilde{f}$ *из класса* $C^3_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, *причем функция* $\widetilde{f}$ *такова, что* $\|f-\widetilde{f}\|_{C^2_b} \leq 1$. *Для любого отрезка* $I = [u,v] \subset [0,T]$ *длины* $|I| \leq 1$ *п.н. имеет место следующее неравенство:*

$$\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} \leq C_4|X_u - \widetilde{X}_u| + C_5\|f - \widetilde{f}\|_{C^2_b} + C_6\|X - \widetilde{X}\|_{H;I},$$

где $C_j = C_j(H, \|f\|_{C^3_b}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j = 4,5,6$ *— случайные величины.*

Доказательство. По определению

$$R^{f(X)-f(\widetilde{X})}_{s,t} = \Big(f(X.) - f(\widetilde{X}.)\Big)_{s,t} - Df(X_s)X'_sB_{s,t} + Df(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}'_sB_{s,t} =$$
$$= \Big(f(X.) - f(\widetilde{X}.)\Big)_{s,t} - Df(X_s)X_{s,t} + Df(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}_{s,t} + Df(X_s)R^X_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)R^{\widetilde{X}}_{s,t}. \tag{3.29}$$

Рассмотрим функцию $g(x,\widetilde{x}) = f(x) - f(\widetilde{x})$. Она дифференцируема по обеим переменным до 3-го порядка включительно и ввиду формулы Тейлора для некоторого $\theta \in (0,1)$:

$$g(X_t,\widetilde{X}_t) = g(X_s,\widetilde{X}_s) + \left(X_{s,t}\frac{\partial g(\cdot)}{\partial x} + \widetilde{X}_{s,t}\frac{\partial g(\cdot)}{\partial \widetilde{x}}\right)\Bigg|_{(X_s,\widetilde{X}_s)} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial x^2}X^{\otimes 2}_{s,t} + 2\cdot\frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial x\partial\widetilde{x}}(X_{s,t}\otimes\widetilde{X}_{s,t}) + \frac{\partial g^2(\cdot)}{\partial\widetilde{x}^2}\widetilde{X}^{\otimes 2}_{s,t}\right)\Bigg|_{(X_{s,t}(\theta),\widetilde{X}_{s,t}(\theta))}. \tag{3.30}$$

Вернемся к исходным обозначениям:

$$\frac{\partial^i g(x,\widetilde{x})}{\partial x^i} = D^i f(x), \quad \frac{\partial^i g(x,\widetilde{x})}{\partial\widetilde{x}^i} = -D^i f(\widetilde{x}), \quad i = 1,2; \quad \frac{\partial^2 g(x,\widetilde{x})}{\partial x\partial\widetilde{x}} = 0. \tag{3.31}$$

Учитывая равенства (3.29) — (3.31), получим:

$$R^{f(X)-f(\widetilde{X})}_{s,t} = \frac{1}{2}\Big(D^2f(X_{s,t}(\theta))X^{\otimes 2}_{s,t} - D^2f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta))\widetilde{X}^{\otimes 2}_{s,t}\Big) +$$
$$+ \Big(Df(X_s)R^X_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)R^{\widetilde{X}}_{s,t}\Big). \tag{3.32}$$

Далее зафиксируем произвольные $s,t \in I$ такие, что $|t-s| \le \delta$ для некоторого $\delta \le |I|$ и получим оценку на $\left\| R^{f(X)-f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;\delta}$, оценивая слагаемые в равенстве (3.32). Выберем отрезок $I_\delta \subset I$ длины $|I_\delta| \le \delta$, содержащий точки $s,t \in I_\delta$.

Шаг 1. Оценим первое слагаемое в (3.32). Очевидно,

$$\left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) X_{s,t}^{\otimes 2} - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)) \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \le |D^2 f(X_{s,t}(\theta))| \left| X_{s,t}^{\otimes 2} - \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| + \\ + \left| \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)) \right|. \tag{3.33}$$

Ввиду формулы конечных приращений и неравенства $|I| \le 1$:

$$\left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)) \right| \le \|D^3 f\|_\infty \left(|X_s - \widetilde{X}_s| + |\theta| |X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}| \right) \le \\ \le \|f\|_{C_b^3} \left(|X_u - \widetilde{X}_u| + 2\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} \right). \tag{3.34}$$

Из определения евклидовой нормы нетрудно установить справедливость соотношений

$$\left| \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| = |\widetilde{X}_{s,t}|^2 \le \|\widetilde{X}_{s,t}\|_{H;I}^2 |t-s|^{2H}, \tag{3.35}$$

$$\left| X_{s,t}^{\otimes 2} - \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \le \sqrt{2 \left(\|X\|_{H;I}^2 + \|\widetilde{X}\|_{H;I}^2 \right)} \|X - \widetilde{X}\|_{H;I} |t-s|^{2H}, \tag{3.36}$$

Учитывая равенства (3.33) — (3.36) и предложение 3.3, получаем окончательно оценку:

$$\left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) X_{s,t}^{\otimes 2} - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)) \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \le \left(c_1 |X_u - \widetilde{X}_u| + c_2 \|X - \widetilde{X}\|_{H;I} \right) |t-s|^{2H}, \tag{3.37}$$

где $c_1 = \|f\|_{C_b^3} C_{\widetilde{X}}^2$, $c_2 = 2c_1 + \|f\|_{C_b^3} \sqrt{2 \left(C_X^2 + C_{\widetilde{X}}^2 \right)}$, $C_{\widetilde{X}} = K \Big(C_B (1 + \|f\|_{C_b^3}) \vee$ $\vee \left(C_B (1 + \|f\|_{C_b^3}) \right)^{\frac{1}{H}} \Big)$, $C_X = K \left(C_B \|f\|_{C_b^3} \vee \left(C_B \|f\|_{C_b^3} \right)^{\frac{1}{H}} \right)$.

Шаг 2. Оценим второе слагаемое в (3.32). Очевидно,

$$\left| Df(X_s) R_{s,t}^X - Df(\widetilde{X}_s) R_{s,t}^{\widetilde{X}} \right| \le |Df(X_s)| \left| R_{s,t}^X - R_{s,t}^{\widetilde{X}} \right| + \left| R_{s,t}^{\widetilde{X}} \right| \left| Df(X_s) - Df(\widetilde{X}_s) \right|. \tag{3.38}$$

Ввиду формулы конечных приращений:

$$\left| Df(X_s) - Df(\widetilde{X}_s) \right| \le \|D^2 f\|_\infty \left| X_s - \widetilde{X}_s \right| \le \|f\|_{C_b^3} \left(|X_u - \widetilde{X}_u| + \|X - \widetilde{X}\|_{H;I} \right). \tag{3.39}$$

Рассмотрим разность остатков:

$$\left|R^X_{s,t} - R^{\widetilde{X}}_{s,t}\right| = \left|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t} - (X'_s - \widetilde{X}'_s)B_{s,t}\right| =$$

$$= \left|\int_s^t \left(f(X_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right) dB_\tau - \left(f(X_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right) B_{s,t}\right| \leq M_1 + M_2, \tag{3.40}$$

$$M_1 = \left|\int_s^t \left(f(X_\tau) - f(\widetilde{X}_\tau)\right) dB_\tau - \left(f(X_s) - f(\widetilde{X}_s)\right) B_{s,t}\right|,$$

$$M_2 = \left|\int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right) dB_\tau - \left(f(\widetilde{X}_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right) B_{s,t}\right|.$$

Оценим M_1, применяя предложение 1.5:

$$M_1 \leq \left|(Df \cdot f)(X_s) - (Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\right| |\mathbb{B}_{s,t}| +$$
$$+ C\left(\|B\|_H \left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I_\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H}\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;I_\delta}\right)\delta^H |t-s|^{2H}, \tag{3.41}$$

где константа C зависит лишь от H. По аналогии с неравенством (3.26) можем записать

$$\left|(Df \cdot f)(X_s) - (Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\right| \leq \|D(Df \cdot f)\|_\infty |X_s - \widetilde{X}_s| + \|Df\|_\infty \|f - \widetilde{f}\|_\infty \leq$$
$$\leq \|f\|^2_{C^3_b}\left(|X_u - \widetilde{X}_u| + \|X - \widetilde{X}\|_{H;I}\right) + \|f\|_{C^3_b}\|f - \widetilde{f}\|_{C^2_b}. \tag{3.42}$$

Согласно лемме 3.3 найдутся случайные величины C_1, C_2, C_3 (зависящие только от H, $\|f\|_{C^3_b}$, $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$) такие, что

$$\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;I} \leq C_1|X_u - \widetilde{X}_u| + C_2\|f - \widetilde{f}\|_{C^2_b} + C_3\|X - \widetilde{X}\|_{H;I}. \tag{3.43}$$

Учитывая, что $\|\cdot\|_{H;I_\delta} \leq \|\cdot\|_{H;I}$, $\|\cdot\|_{2H;I_\delta} \leq \|\cdot\|_{2H;I,\delta}$, $\delta \leq 1$, подставляя (3.42), (3.43) в (3.41), получим оценку

$$M_1 \leq \Bigg(C_{M_1,1}|X_u - \widetilde{X}_u| + C_{M_1,2}\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} + C_{M_1,3}\|f - \widetilde{f}\|_{C^2_b} +$$
$$+ C\|B\|_H\delta^H \left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I,\delta}\Bigg)|t-s|^{2H}, \tag{3.44}$$

где $C_{M_1,1} = \|\mathbb{B}\|_{2H}\left(\|f\|^2_{C^3_b} + CC_1\right)$, $C_{M_1,2} = \|\mathbb{B}\|_{2H}\left(\|f\|^2_{C^3_b} + CC_3\right)$, $C_{M_1,3} = = \|\mathbb{B}\|_{2H}\left(\|f\|_{C^3_b} + CC_2\right)$.

Оценим M_2, также применяя предложение 1.5:

$$M_2 \le \left|(Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s) - (D\widetilde{f} \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\right| |\mathbb{B}_{s,t}| +$$
$$+C\left(\|B\|_H \left\|R^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I_\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H}\|f(\widetilde{X})' - \widetilde{f}(\widetilde{X})'\|_{H;I_\delta}\right)|t-s|^{2H}.$$

Используя неравенства (3.20) — (3.22), из последнего соотношения можно вывести неравенство

$$M_2 \le C_{M_2,3}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}|t-s|^{2H}, \tag{3.45}$$

где $C_{M_2,3} = (1+\|f\|_{C_b^3})\|\mathbb{B}\|_{2H} + Cc_R\|B\|_H + Cc_{f'}\|\mathbb{B}\|_{2H}$.

Учитывая равенства (3.38), (3.39), (3.44), (3.45) и предложение 3.3, получаем окончательно оценку:

$$\left|Df(X_s)R^X_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)R^{\widetilde{X}}_{s,t}\right| \le \left(c_3|X_u-\widetilde{X}_u| + c_4\|X-\widetilde{X}\|_{H;I} + c_5\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}+\right.$$
$$\left.+c_6\delta^H\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I,\delta}\right)|t-s|^{2H}, \tag{3.46}$$

где $c_i = c_i(H,\|f\|_{C_b^3},\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H}) = c_{3,4}(C_{M_1,i-2})$, $i = 3{,}4$, $c_5 = c_{3,4}(C_{M_1,3} + C_{M_2,3})$, $c_6 = C\|B\|_H$, а в свою очередь, $c_{3,4}(y) = \|f\|_{C_b^3}\left(\hat{K}\left((C_B(1+\|f\|_{C_b^3}))^2 \vee (C_B(1+\|f\|_{C_b^3}))^{1+\frac{1}{H}}\right)+y\right)\right)$.

Применяя оценки (3.37), (3.46) к равенству (3.32), получим, что для любых $s,t \in I$ таких, что $|t-s| \le \delta$, справедливо неравенство

$$\left|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}_{s,t}\right| \le \left(c_8|X_u-\widetilde{X}_u| + c_7\|X-\widetilde{X}\|_{H;I}+\right.$$
$$\left.+c_5\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} + c_6\delta^H\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I,\delta}\right)|t-s|^{2H},$$

где $c_8 = \frac{1}{2}c_1 + c_3$, $c_7 = \frac{1}{2}c_2 + c_4$. Отсюда заключаем, что

$$\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I,\delta} \le c_8|X_u-\widetilde{X}_u| + c_7\|X-\widetilde{X}\|_{H;I} + c_5\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}+$$
$$+c_6\delta^H\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I,\delta}$$

для произвольного $\delta \in (0,|I|]$. Теперь выберем и зафиксируем δ таким, чтобы

$$c_6\delta^H = C\|B\|_H\delta^H \le \frac{1}{2} \iff \delta \le (2C\|B\|_H)^{-1/H},$$

т.е. положим $\delta := |I| \wedge (2C\|B\|_H)^{-1/H}$. При таком выборе

$$\left\| R^{f(X)-f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I,\delta} \le 2c_8|X_u - \widetilde{X}_u| + 2c_7\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} + 2c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}.$$

Из последнего равенства, предложения 3.2 и неравенства $|I| \le 1$ вытекает

$$\left\| R^{f(X)-f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I} \le 2\left(1 \vee 2(2C\|B\|_H)^{\frac{1-H}{H}}\right) \times$$
$$\times \left(c_8|X_u - \widetilde{X}_u| + c_7\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} + c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\right),$$

откуда и следует требуемое неравенство. Лемма доказана.

3.2.2 Теорема о непрерывной зависимости от начальных данных

Перейдем к основным результатам, касающимся непрерывной зависимости от начальных условий и правых частей решений уравнений (3.1), (3.10) на отрезке $[0,T]$.

Пусть ξ, $\widetilde{\xi}$ — случайные величины, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Следующая теорема устанавливает непрерывную зависимость решений.

Теорема 3.3. *Пусть $f,\widetilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \le 1$. Обозначим через X_t, $\widetilde{X}_t$ решения уравнений* (3.1), (3.10) *с начальными условиями $X_0 = \xi$, $\widetilde{X}_0 = \widetilde{\xi}$ соответственно. Тогда:*

1) *почти наверное справедлива следующая оценка*

$$\|X - \widetilde{X}\|_H \le C\left(|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\right) \tag{3.47}$$

для некоторой случайной величины $C = C(H, T, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$. Причем C может быть выбрана не зависящей от T, если $T \in (0,1]$;

2) *имеет место следующее неравенство*

$$\mathbb{E}\big(\ln\|X - \widetilde{X}\|_H\big) \le C + \ln\big(\mathbb{E}|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\big), \tag{3.48}$$

где $C = C(H, H_1, \dots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}) \in \mathbb{R}$ — константа, вообще говоря, зависящая от H, $H_1, \dots, H_d$, T, $\|f\|_{C_b^3}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Зафиксируем произвольный отрезок $I = [u,v] \subset [0,T]$ достаточно малой длины $|I| \leq 1 \wedge T$ (точное значение длины $|I|$ будет указано ниже) и получим оценку на $\|X - \widetilde{X}\|_{H;I}$. Выберем произвольные $s,t \in$ $\in I$, очевидно справедливо неравенство

$$|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}| = \left|\int_s^t f(X_\tau)dB_\tau - \int_s^t \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)dB_\tau\right| \leq M_1 + M_2, \tag{3.49}$$

где $M_1 = \left|\int_s^t \Big(f(X_\tau) - f(\widetilde{X}_\tau)\Big)\, dB_\tau\right|$, $M_2 = \left|\int_s^t \Big(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\Big)\, dB_\tau\right|$.

Оценим M_1. Из предложения 1.5 следует, что

$$M_1 \leq \left|f(X_s) - f(\widetilde{X}_s)\right| \|B\|_H |t-s|^H +$$
$$+ \left|(Df\cdot f)(X_s) - (Df\cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\right| \|B\|_{2H}|t-s|^{2H} +$$
$$+ C\left(\|B\|_H \left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H}\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;I}\right)|t-s|^{3H}.$$

Введем обозначение: $c_{1,2}(K_1,K_2) = K_1\|B\|_H + K_2\|B\|_{2H}$. Применяя лемму 3.2 к функциям f и $\widetilde{f}$, $Df\cdot f$ и $Df\cdot\widetilde{f}$, учитывая, $|I|\leq 1$, из последнего неравенства легко вывести:

$$\frac{|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}|}{|t-s|^H} \leq c_0\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} + c_1|X_u - \widetilde{X}_u| +$$
$$+ \widetilde{C}\left(\|B\|_H \left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H}\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;I}\right)|I|^{2H},$$

где $c_0 = c_{1,2}(1, \|f\|_{C_b^3})$, $c_1 = c_{1,2}(C_{1;f}, C_{1;Df\cdot f})$, $\widetilde{C} = c_{1,2}(C_{2;f}, C_{2;Df\cdot f}) + C$. Причем c_1, c_2 — случайные величины, зависящие только от H, $\|f\|_{C_b^3}$, $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$, но не зависящие от s,t, I.

Далее, применяя леммы 3.3, 3.4 к правой части последнего неравенства, с учетом $|I|\leq 1$ получим:

$$\frac{M_1}{|t-s|^H} \leq c_2\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} + c_3|X_u - \widetilde{X}_u| + c_4|I|^H\|X-\widetilde{X}\|_{H;I},$$

где $c_2 = c_0 + \widetilde{C}\cdot c_{1,2}(C_5, C_3)$, $c_3 = c_1 + \widetilde{C}\cdot c_{1,2}(C_4, C_1)$, $c_4 = \widetilde{C}\cdot c_{1,2}(C_6, C_3)$. Причем c_3, c_4 — случайные величины, зависящие от $H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$, но не зависящие от s,t, I. Из леммы 3.1 следует, что $\frac{M_2}{|t-s|^H} \leq C_f\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}$, а посему

$$\frac{|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}|}{|t-s|^H} \leq c_3|X_u - \widetilde{X}_u| + c_4|I|^H\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} + c_5\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2},$$

где $c_5 = c_2 + C_f$. Последнее неравенство справедливо для любых $s,t \in I$, $s \neq t$, а значит,

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} \leq c_3|X_u - \widetilde{X}_u| + c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + c_4|I|^H\|X - \widetilde{X}\|_{H;I}$$

для произвольного $|I| \in (0,1]$. Теперь выберем $|I|$ таким, чтобы выполнялось соотношение

$$c_4|I|^H \leq \frac{1}{2} \iff |I| \leq (2c_4)^{-1/H} =: \delta_0,$$

Таким образом, для любого отрезка $I = [u,v] \subset [0,T]$ длины $|I| \leq 1 \wedge T \wedge \delta_0$ справедливо неравенство

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} \leq c|X_u - \widetilde{X}_u| + c_f\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}, \tag{3.50}$$

где $c = 2c_3$, $c_f = 2c_5$. Если $1 \wedge T \wedge \delta_0 = T$, то $I = [0,T]$, и неравенство (3.50) доказывает требуемое. Поэтому пусть далее $T > 1 \wedge \delta_0 =: \delta_1$.

Построим разбиение отрезка $[0,T]$ точками $t_j := (j \cdot \delta_1) \wedge T$, где $j = 0,1,\ldots$ Заметим, что $t_N = T$ при $N \geq \frac{T}{\delta_1}$, а также, что отрезки $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ имеют длины $|I_j| \leq \delta_1$, $j = 0,1,\ldots$ Поэтому из неравенства (3.50) следуют оценки

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;I_j} \leq c|X_{t_j} - \widetilde{X}_{t_j}| + c_f\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2},$$

для $j < \frac{T}{\delta_1}$. Заметим, что

$$\begin{aligned}|X_{t_j} - \widetilde{X}_{t_j}| &\leq |X_{t_{j-1}} - \widetilde{X}_{t_{j-1}}| + \delta_1^H\|X - \widetilde{X}\|_{H;I_{j-1}} \leq \\ &\leq (1 + c\delta_1^H)|X_{t_{j-1}} - \widetilde{X}_{t_{j-1}}| + c_f\delta_1^H\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}.\end{aligned}$$

Из полученного рекуррентного соотношения очевидной индукцией выводим неравенство:

$$\begin{aligned}|X_{t_j} - \widetilde{X}_{t_j}| &\leq (1 + c\delta_1^H)^j|X_0 - \widetilde{X}_0| + c_f\delta_1^H\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\sum_{k=0}^{j-1}(1 + c\delta_1^H)^k = \\ &= (1 + c\delta_1^H)^j|\xi - \widetilde{\xi}| + \frac{c_f}{c}\left((1 + c\delta_1^H)^j - 1\right)\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\end{aligned}$$

для $j < \frac{T}{\delta_1}$. Таким образом,

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;I_j} \leq (1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1}\left(c|\xi - \widetilde{\xi}| + c_f\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\right) \tag{3.51}$$

для любого $j = 0,1,\ldots,\lfloor\frac{T}{\delta_1}\rfloor$.

Применяя предложение 3.4 с учетом неравенства (3.51) получим:

$$\|X-\widetilde{X}\|_{H;\delta_1} \le 2^{1-H}(1+c\delta_1^H)^{T/\delta_1}\left(c|\xi-\widetilde{\xi}|+c_f\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\right).$$

Рассмотрим выражение $(1+c\delta_1^H)^{T/\delta_1}$, $\delta_1 = 1\wedge\delta_0$. Если $\delta_1 = 1$, то оно принимает значение $(1+c)^T$. В противном случае $\delta_1 = \delta_0$, $\delta_0 = (2c_4)^{-1/H} < 1$, $2c_4 > 1$ и

$$(1+c\delta_0^H)^{\frac{T}{\delta_0}} = \left(1+\frac{c}{2c_4}\right)^{(2c_4)^H T} \le \left(1+\frac{c}{2c_4}\right)^{2c_4 T} = \left(\left(1+\frac{c}{2c_4}\right)^{\frac{2c_4}{c}}\right)^{cT} \le e^{cT},$$

поскольку функция $\phi(x) = (1+\frac{1}{x})^x$, $x>0$ ограничена сверху числом e. Кроме того, $(1+c)^T = \phi(\frac{1}{c})^{cT} \le e^{cT}$. Поэтому $(1+c\delta_1^H)^{T/\delta_1} \le e^{cT}$ и

$$\|X-\widetilde{X}\|_{H;\delta_1} \le 2^{1-H}e^{cT}\left(c|\xi-\widetilde{\xi}|+c_f\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\right).$$

Теперь из предложения 3.2 и последнего неравенства получем оценку требуемого вида:

$$\|X-\widetilde{X}\|_H \le 2^{2-H}e^{2c_3T}\left(1\vee 2T^{1-H}\vee 2(2c_4)^{\frac{1-H}{H}}T^{1-H}\right)(c_3\vee c_5)\times \\ \times\left(|\xi-\widetilde{\xi}|+\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\right). \tag{3.52}$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. Рассмотрим зависимость случайных величин c_3, c_4, c_5, фигурирующих в неравенстве (3.52), от $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ при фиксированных T, H, $\|f\|_{C_b^3}$. Из доказательства первой части следует, что эта зависимость выражается в виде композиции конечного числа функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = \alpha u+\beta v+\gamma$, $\Pi(u,v) = u\cdot v$, $\vee(u,v) = u\vee v$, $\psi_s(u) = u^s$ ($\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $s\in\mathbb{R}^+$ — параметры) вещественных аргументов $u,v\in\mathbb{R}^+$.

Применим логарифм к обеим частям неравенства (3.52). Учитывая, что $x\vee y\le x+y$ для $x,y>0$, будем иметь:

$$\ln\|X-\widetilde{X}\|_H \le \mu+2c_3T+\ln(c_3+c_5)+\ln\left(1+2T^{1-H}+2(2c_4)^{\frac{1-H}{H}}T^{1-H}\right)+ \\ +\ln\big(|\xi-\widetilde{\xi}|+\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\big),$$

где $\mu = (2-H)\ln 2$. Возьмем математическое ожидание от обеих частей последнего неравенства. Ввиду вогнутости логарифма и неравенства Иенсена справедливо неравенство $\mathbb{E}(\ln\eta)\le\ln(\mathbb{E}\eta)$ для любой случайной величины η.

С учетом этого, выводим неравенство

$$\mathbb{E}\big(\ln\|X-\widetilde{X}\|_H\big)\le \mu+2T\mathbb{E}c_3+\ln(\mathbb{E}c_3+\mathbb{E}c_5)+$$
$$+\ln\left(1+2T^{1-H}+T^{1-H}2^{\frac{1}{H}}\mathbb{E}\left(c_4^{\frac{1-H}{H}}\right)\right)+\ln\big(\mathbb{E}|\xi-\widetilde{\xi}|+\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\big).$$

Таким образом, осталось доказать, что $\mathbb{E}c_3<\infty$, $\mathbb{E}c_5<\infty$, $\mathbb{E}\left(c_4^{\frac{1-H}{H}}\right)<\infty$. Однако, мы установим даже большее: для любого $r>0$ конечны моменты $\mathbb{E}c_j^r=\mathbb{E}c_j^r(\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j=3{,}4{,}5$.

Далее воспользуемся тем, что зависимость $c_j^r=c_j^r(\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j==3{,}4{,}5$ от норм $\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H}$ выражается в виде композиции конечного числа функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)$, $\Pi(u,v)$, $\vee(u,v)$, $\psi_s(u)$. Но очевидно, что $\vee(u,v)==u\vee v\le u+v=\Sigma_{1,1,0}(u,v)$ для $u,v\in\mathbb{R}^+$. Также понятно, что для $u=u(\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H})\in\mathbb{R}^+, v=v(\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H})\in\mathbb{R}^+$ справедливы соотношения

$$\mathbb{E}\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)=\alpha\mathbb{E}u+\beta\mathbb{E}v+\gamma,$$
$$\mathbb{E}(u\vee v)\le\mathbb{E}u+\mathbb{E}v,$$
$$\mathbb{E}\Pi(u,v)\le(\mathbb{E}u^2)^{1/2}(\mathbb{E}v^2)^{1/2}.$$

Значит, конечность указанных математических ожиданий от функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$, Π, $\vee$ будет обеспечена конечностью моментов их аргументов. Осталось рассмотреть функцию $\psi_s(u)=u^s$.

Если $s\in(0{,}1]$, то из неравенства Иенсена следует оценка $\mathbb{E}\psi_s(u)\le\le\psi_s(\mathbb{E}u)=(\mathbb{E}u)^s$. Если же $s\in(1{,}\infty)$, то справедливы соотношения:

$$\mathbb{E}\psi_s(\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v))=\mathbb{E}(\alpha u+\beta v+\gamma)^s\le 3^{s-1}(\alpha^s\mathbb{E}u^s+\beta^s\mathbb{E}v^s+\gamma^s),$$
$$\mathbb{E}\psi_s(u\vee v)\le\mathbb{E}(u+v)^s\le 2^{s-1}(\mathbb{E}u^s+\mathbb{E}v^s),$$
$$\mathbb{E}\psi_s(uv)=\mathbb{E}u^sv^s\le(\mathbb{E}u^{2s})^{1/2}(\mathbb{E}v^{2s})^{1/2}.$$

В то же время, как следует из [46, лемма 7.4], любой s-момент, $s\ge1$ случайной величины $\|B\|_H$ (а значит и любой s-момент, $s>0$ ввиду неравенства Иенсена) конечен, т.е. $\mathbb{E}\psi_s(\|B\|_H)=\mathbb{E}\|B\|_H^s<\infty$, $s>0$. То же самое справедливо для случайной величины $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ (см. предложение 3.1): $\mathbb{E}\psi_s(\|\mathbb{B}\|_{2H})=\mathbb{E}\|\mathbb{B}\|_{2H}^s<\infty$, $s>0$.

Из полученных соотношений следует, что композиция конечного числа указанных функций с нормами $\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H}$ в качестве аргументов будет иметь конечное математическое ожидание и, в частности, $\mathbb{E}c_j^r(\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H})<\infty$, $j=3{,}4{,}5$ для любого $r>0$. Теорема доказана.

Замечание 3.2. Нетрудно видеть, что в приведенном доказательстве первого утверждения теоремы не использовались никакие другие свойства дробного броуновского движения $(B_t)_{t\in[0,T]}$, кроме свойства непрерывности траекторий по Гельдеру с показателем H. Это означает, что утверждение 1 приведенной теоремы справедливо для произвольных гельдеровских функций $B \in C^H([0,T], \mathbb{R}^{d+1})$.

3.3 Асимптотические разложения в окрестности нуля

В данном разделе будем придерживаться следующих компактных записей:

$$\Delta^k[0,t] = \{(t_1, \dots, t_k) \in [0,1]^k : \ 0 \le t_1 < \dots < t_k \le t\} \tag{3.53}$$

$$\int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} = \int_0^t \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_2} dB^{(i_1)}_{t_1} \dots dB^{(i_{k-1})}_{t_{k-1}} dB^{(i_k)}_{t_k},$$

$$I_k = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_d^k := \{0, \dots, d\}^k, \tag{3.54}$$

$$D^{(i)}_f = \sum_{j=1}^n f_{ji}(x)\frac{\partial}{\partial x_j},\ i \in \{0, \dots, d\} \qquad D^{(I_k)}_f = D^{(i_1)}_f \dots D^{(i_k)}_f, \tag{3.55}$$

$$\mathbf{P}_t g(x) = \mathbb{E}\, g(X^x_t), \quad t \ge 0. \tag{3.56}$$

В дальнейшем для краткости будем опускать верхний индекс x и обозначать решение через X_t в доказательствах.

Теорема 3.4. *Пусть* $f \in C_b^{N+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g \in C_b^{N+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого фиксированного* $H \in (1/3, 1/2]$ *такого, что* $H < H_{min} = \min\limits_{i=0,\dots d} H_i$ *справедливо следующее асимптотическое разложение:*

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k\in\{0,\dots,d\}^k} t^{|H_{I_k}|}\cdot (D^{(I_k)}_f g)(x)\,\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)}\right) + O(t^{(N+1)H}), \tag{3.57}$$

при $t \to 0$, *где* $|H_{I_k}| = H_{i_1} + H_{i_2} + \dots + H_{i_k}$ — *сумма индексов Харста дробных броуновских движений* $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \dots, B^{(i_k)}$.

Доказательство. С учетом обозначений (3.55) формулу Ито (3.3) можно записать в следующей развернутой форме:

$$g(X_t^x) = g(x) + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t (D_f^{(i)} g)(X_r^x) dB_r^{(i)} \tag{3.58}$$

Применяя формулу (3.58) $(N+1)$ раз, с учетом обозначений (3.53) — (3.55) получим:

$$g(X_t) = g(x) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{I_k \in \mathbb{N}_d^k} (D_f^{(I_k)} g)(x) \int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} +$$

$$+ \sum_{I_{N+1} \in \mathbb{N}_d^{N+1}} \int_0^t \int_0^{t_{N+1}} \ldots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(X_{t_1})\, dB_{t_1}^{(i_1)} \ldots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})}. \tag{3.59}$$

Обозначим $\varphi_{I_{N+1}}(x) = (D_f^{(I_{N+1})} g)(x)$ и преобразуем последнее слагаемое в (3.59). Введем в рассмотрение процесс $\widehat{B}_u^{(c)} = (\widehat{B}_u^{(0;c)}, \widehat{B}_u^{(1;c)}, \ldots, \widehat{B}_u^{(d;c)})^\top$, зависящий от параметра $c > 0$, i-я компонента которого определяется равенством $\widehat{B}_u^{(i;c)} = c^{H_i} B_{u/c}^{(i)}$, $u \in [0,T]$. По свойству самоподобия дробного броуновского движения процесс $\widehat{B}_u^{(i;c)}$ также является дробным броуновским движением с индексом Харста H_i для любого $c > 0$, $i = \overline{1,d}$. Следовательно, при фиксированном $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^{t_{N+1}} \ldots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(X_{t_1})\, dB_{t_1}^{(i_1)} \ldots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} = \\
&= \int_0^1 dB_{t\cdot t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \int_0^{t_{N+1}} dB_{t\cdot t_N}^{(i_N)} \ldots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(X_{t\cdot t_1})\, dB_{t\cdot t_1}^{(i_1)} = \\
&\overset{\mathcal{L}}{=} \int_0^1 d\widehat{B}_{t\cdot t_{N+1}}^{(i_{N+1};t)} \int_0^{t_{N+1}} d\widehat{B}_{t\cdot t_N}^{(i_N;t)} \ldots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(\widehat{X}_{t\cdot t_1}^{(t)})\, d\widehat{B}_{t\cdot t_1}^{(i_1;t)} = \\
&= t^{H_{i_1}+\ldots+H_{i_{N+1}}} \int_0^1 dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \int_0^{t_{N+1}} dB_{t_N}^{(i_N)} \ldots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(\widehat{X}_{t\cdot t_1}^{(t)})\, dB_{t_1}^{(i_1)},
\end{aligned} \tag{3.60}$$

где знак $\overset{\mathcal{L}}{=}$ означает совпадение распределений, а $\widehat{X}_\tau^{(t)}$ — решение уравнения:

$$d\widehat{X}_\tau^{(t)} = f(\widehat{X}_\tau^{(t)}) d\widehat{B}_\tau^{(t)}, \quad \tau \in [0,T] \tag{3.61}$$

с начальным условием $\widehat{X}_0^{(t)} = x$. По тем же соображениям

$$\int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} \overset{\mathcal{L}}{=} t^{|H_{I_k}|} \int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)}, \tag{3.62}$$

а посему из (3.59) — (3.62) после взятия математического ожидания, получим:

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{I_k \in \mathbb{N}_d^k} t^{|H_{I_k}|} (D_f^{(I_k)} g)(x)\, \mathbb{E}\Big(\int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)}\Big) + \mathcal{R}_{N+1}(t), \quad (3.63)$$

где

$$\mathcal{R}_{N+1}(t) =$$

$$= \sum_{I_{N+1} \in \mathbb{N}_d^{N+1}} \left(t^{|H_{I_{N+1}}|}\, \mathbb{E} \int_0^1 \int_0^{t_{N+1}} \ldots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(\widehat{X}^{(t)}_{t\cdot t_1})\, dB^{(i_1)}_{t_1} \ldots dB^{(i_N)}_{t_N} dB^{(i_{N+1})}_{t_{N+1}} \right). \quad (3.64)$$

Поскольку $|H_{I_{N+1}}| \geq (N+1)H$ для любого I_{N+1}, то при $t < 1$:

$$|\mathcal{R}_{N+1}(t)| \leq (d+1)^{N+1} t^{(N+1)H} \times$$

$$\times \max_{I_{N+1} \in \mathbb{N}_d^{N+1}} \mathbb{E} \left| \int_0^1 \int_0^{t_{N+1}} \ldots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(\widehat{X}^{(t)}_{t\cdot t_1})\, dB^{(i_1)}_{t_1} \ldots dB^{(i_N)}_{t_N} dB^{(i_{N+1})}_{t_{N+1}} \right|. \quad (3.65)$$

Поэтому, учитывая (3.63) — (3.65), для завершения доказательства формулы (3.57) осталось показать, что

$$\mathbb{E} \left| \int_0^1 \int_0^{t_{N+1}} \ldots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(\widehat{X}^{(t)}_{t\cdot t_1})\, dB^{(i_1)}_{t_1} \ldots dB^{(i_N)}_{t_N} dB^{(i_{N+1})}_{t_{N+1}} \right| < +\infty \quad (3.66)$$

для любых $I_{N+1} = (i_1, \ldots, i_{N+1}) \in \mathbb{N}_d^{N+1}$.

Рассмотрим кратные интегралы чуть более общего вида, нежели (3.66). Для произвольного фиксированного $c \in (0,1]$ будем оценивать кратные интегралы вида

$$\mathcal{I}^{(k)}_t = \int_0^t \int_0^{t_{k-1}} \ldots \int_0^{t_1} \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cr}\big)\, dB^{(i_1)}_r \ldots dB^{(i_{k-2})}_{t_{k-2}} dB^{(i_{k-1})}_{t_{k-1}}, \quad t \in [0,1], \quad (3.67)$$

в которых $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — произвольная функция с непрерывными и ограниченными производными до второго порядка включительно. Для единообразия положим $\mathcal{I}^{(0)}_t = \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{ct}\big)$.

Лемма 3.5. *Пусть φ имеет непрерывные и ограниченные производные до второго порядка включительно. Тогда справедливы неравенства $|\mathcal{I}^{(k)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k-1)}_s B^{(i)}_{s,t}| \leq M_k |t-s|^{2H}$ для любого $i = \overline{0,d}$ и $|\mathcal{I}^{(k)}_{s,t}| \leq \widetilde{M}_k |t-s|^H$, где $M_k, \widetilde{M}_k$ — случайные величины* (*не зависящие от* s, t).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем индукцией по k.

Рассмотрим $k = 1$. Докажем, что $\big(\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\big)\big)' = c^{H_{i_1}} D\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\big)\big(\widehat{X}^{(c)}\big)'_{c\cdot}$. Введем обозначение $R^{\widehat{X}^{(c)};i_1}_{u,v} = \widehat{X}^{(c)}_{u,v} - \big(\widehat{X}^{(c)}\big)'_u \widehat{B}^{(i_1;c)}_{u,v}$ для i_1-й компоненты остатка $R^{\widehat{X}^{(c)}}$ по отношению к процессу $\widehat{X}^{(c)}$, управляемому процессом $\widehat{B}^{(i_1;c)}$.

Используя формулу Тейлора, будем иметь

$$\begin{aligned}
R^{\varphi(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot});i_1}_{s,t} &:= \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{ct}\big) - \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big) - c^{H_{i_1}} D\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big)\big(\widehat{X}^{(c)}\big)'_{cs} B^{(i_1)}_{s,t} = \\
&= \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{ct}\big) - \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big) - D\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big)\big(\widehat{X}^{(c)}\big)'_{cs} \widehat{B}^{(i_1;c)}_{cs,ct} = \\
&= \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{ct}\big) - \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big) - D\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big)\widehat{X}^{(c)}_{cs,ct} + D\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big) R^{\widehat{X}^{(c)};i_1}_{cs,ct} = \\
&= \frac{1}{2} D^2\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs} + \theta \widehat{X}^{(c)}_{cs,ct}\big)\widehat{X}^{(c)}_{cs,ct} \otimes \widehat{X}^{(c)}_{cs,ct} + D\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big) R^{\widehat{X}^{(c)};i_1}_{cs,ct}
\end{aligned} \tag{3.68}$$

для некоторого $\theta \in (0,1)$. Из теоремы существования 3.1 следует, что $\|R^{\widehat{X}^{(c)};i_1}\|_{2H} \le \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H} < \infty$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
\Big|R^{\varphi(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot});i_1}_{s,t}\Big| &\le \frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|^2_H |ct - cs|^{2H} + \|D\varphi\|_\infty \|R^{\widehat{X}^{(c)};i_1}\|_{2H} |ct - cs|^{2H} = \\
&= c^{2H}\left(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|^2_H + \|D\varphi\|_\infty \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}\right)|t - s|^{2H},
\end{aligned} \tag{3.69}$$

откуда следует, что $\|R^{\varphi(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot});i_1}_{s,t}\|_{2H} \le \frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|^2_H + \|D\varphi\|_\infty \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H} < \infty$ (так как $c \le 1$), что и требовалось.

Далее, поскольку $\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\big)' = c^{H_{i_1}} D\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\big)\big(\widehat{X}^{(c)}\big)'_{c\cdot} = c^{H_{i_1}} D\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\big) f\big(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\big)$, то

$$\begin{aligned}
\Big|\Big(\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\big)'\Big)_{s,t}\Big| &= c^{H_{i_1}}\big|(D\varphi \cdot f)\big(\widehat{X}^{(c)}_{ct}\big) - (D\varphi \cdot f)\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big)\big| = \\
&= c^{H_{i_1}}\Big|D(D\varphi \cdot f)\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs} + \theta \widehat{X}^{(c)}_{cs,ct}\big)\Big| \cdot \big|\widehat{X}^{(c)}_{cs,ct}\big| = \\
&= c^{H_{i_1}}\Big|(D^2\varphi \cdot f)\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs} + \theta \widehat{X}^{(c)}_{cs,ct}\big) + (D\varphi \cdot Df)\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs} + \theta \widehat{X}^{(c)}_{cs,ct}\big)\Big| \cdot \big|\widehat{X}^{(c)}_{cs,ct}\big| \le \\
&\le c^{H_{i_1}}\left(\|D^2\varphi\|_\infty \|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty \|Df\|_\infty\right)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H |ct - cs|^H = \\
&= c^{H_{i_1}+H}\left(\|D^2\varphi\|_\infty \|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty \|Df\|_\infty\right)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H |t - s|^H.
\end{aligned} \tag{3.70}$$

Отсюда следует, что $\big\|\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\big)'\big\|_H \le \left(\|D^2\varphi\|_\infty \|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty \|Df\|_\infty\right)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H < < \infty$. Таким образом, ввиду неравенства $\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$ и предложения 1.5, будем иметь:

$$\left|\int_s^t \varphi\big(\widehat{X}_{cr}^{(c)}\big)\, dB_r^{(i_1)} - \varphi\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)}\big) B_{s,t}^{(i_1)}\right| \le c^{H_{i_1}} \|D\varphi\|_\infty \|f\|_\infty \|\mathbb{B}^{(i_1)}\|_{2H} |t-s|^{2H} +$$

$$+C\left(\|B^{(i_1)}\|_H \big\|R^{\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)});i_1}\big\|_{2H} + \|\mathbb{B}^{(i_1)}\|_{2H} \big\|\varphi\big(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)}\big)'\big\|_H\right)|t-s|^{3H} \le$$

$$\le \|D\varphi\|_\infty \|f\|_\infty \|\mathbb{B}\|_{2H} |t-s|^{2H} +$$

$$+C\Bigg(\left(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|_H^2 + \|D\varphi\|_\infty \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}\right)\|B\|_H +$$

$$+\left(\|D^2\varphi\|_\infty \|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty \|Df\|_\infty\right)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H \|\mathbb{B}\|_{2H}\Bigg)|t-s|^{2H} \le$$

$$\le M_1 |t-s|^{2H}, \tag{3.71}$$

где $M_1 = \Big(C(\|D^2\varphi\|_\infty \|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty \|Df\|_\infty)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H + \|D\varphi\|_\infty \|f\|_\infty\Big)\|\mathbb{B}\|_{2H} + $ $+C\Big(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|_H^2 + \|D\varphi\|_\infty \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}\Big)\|B\|_H$.

Итак, получили $|\mathcal{I}_{s,t}^{(1)} - \mathcal{I}_s^{(0)} B_{s,t}^{(i_1)}| \le M_1 |t-s|^{2H}$, как и утверждалось. Из доказанного следует, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_{s,t}^{(1)}| &\le |\mathcal{I}_s^{(0)}||B_{s,t}^{(i_1)}| + M_1|t-s|^{2H} \le \\ &\le \big|\varphi\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)}\big)\big|\|B^{(i_1)}\|_H |t-s|^H + M_1|t-s|^H \le \\ &\le (\|\varphi\|_\infty \|B\|_H + M_1)|t-s|^H =: \widetilde{M}_1 |t-s|^H. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Легко видеть, что проведенные выше выкладки (3.68) — (3.72) не зависят от значения i_1, т.е. справедливы и дают одни и те же оценки для любого $i_1 = \overline{0,d}$.

Рассмотрим теперь $k = 2$. Используя доказанное выше, предложение 1.5 и рекуррентное соотношение $\mathcal{I}_t^{(k)} = \int_0^t \mathcal{I}_r^{(k-1)} dB_r^{(i_k)}$, получим:

$$\left|\mathcal{I}_{s,t}^{(2)} - \mathcal{I}_s^{(1)} B_{s,t}^{(i_2)}\right| \le \left|(\mathcal{I}^{(1)})_s' \mathbb{B}_{s,t}^{(i_2)}\right| +$$

$$+C\Big(\|B^{(i_2)}\|_H \cdot \|(\mathcal{I}^{(1)})_{s,t} - (\mathcal{I}^{(1)})_s' B_{s,t}^{(i_2)}\|_{2H} + \|\mathbb{B}^{(i_2)}\|_{2H} \cdot \|(\mathcal{I}^{(1)})'\|_H\Big)|t-s|^{3H} =$$

$$= |\mathcal{I}_s^{(0)} \mathbb{B}_{s,t}^{(i_2)}| + C\Big(\|B^{(i_2)}\|_H \|\mathcal{I}_{s,t}^{(1)} - \mathcal{I}_s^{(0)} B_{s,t}^{(i_2)}\|_{2H} + \|\mathbb{B}^{(i_2)}\|_{2H} \|\mathcal{I}^{(0)}\|_H\Big)|t-s|^{3H} \le$$

$$\le \|\varphi\|_\infty \|\mathbb{B}\|_{2H} |t-s|^{2H} + C\Big(M_1 \|B\|_H + \|\mathbb{B}\|_{2H} c^{H_{i_1}} \|D\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|_H\Big)|t-s|^{2H} \le$$

$$\le M_2 |t-s|^{2H}. \tag{3.73}$$

Здесь $M_2 = (\|\varphi\|_\infty + C\|D\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|_H)\|\mathbb{B}\|_{2H} + CM_1\|B\|_H$, а оценка на $\|\mathcal{I}^{(0)}\|_H$ была получена с помощью формулы конечных приращений:

$$\mathcal{I}_{s,t}^{(0)} = \varphi\big(\widehat{X}_{ct}^{(c)}\big) - \varphi\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)}\big) = D\varphi\Big(\widehat{X}_{cs}^{(c)} + \theta\big(\widehat{X}_{ct}^{(c)} - \widehat{X}_{cs}^{(c)}\big)\Big)\big(\widehat{X}_{ct}^{(c)} - \widehat{X}_{cs}^{(c)}\big). \tag{3.74}$$

Так, мы получили $|\mathcal{I}_{s,t}^{(2)} - \mathcal{I}_s^{(1)} B_{s,t}^{(i_2)}| \le M_2|t-s|^{2H}$. Как и в случае $k=1$, отсюда выводим, что $|\mathcal{I}_{s,t}^{(2)}| \le (\widetilde{M}_1\|B\|_H + M_2)|t-s|^H = \widetilde{M}_2|t-s|^H$, поскольку

$$|\mathcal{I}_{s,t}^{(2)} - \mathcal{I}_s^{(1)} B_{s,t}^{(i_2)}| \ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(2)}| - |\mathcal{I}_s^{(1)}| \cdot |B_{s,t}| \ge$$
$$\ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(2)}| - \|\mathcal{I}^{(1)}\|_\infty \|B\|_H |t-s|^H \ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(2)}| - \|\mathcal{I}^{(1)}\|_H \|B\|_H |t-s|^H. \tag{3.75}$$

Легко видеть, что проведенные выше выкладки (3.73) — (3.75) не зависят от значения i_2, т.е. справедливы и дают одни и те же оценки для любого $i_2 = \overline{0,d}$.

Переход доказывается аналогичным образом. Предположим, что утверждение выполнено для всех натуральных чисел, меньших k, и докажем его для $k+1$. По предположению индукции из предложения 1.5 будет следовать

$$|\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})} - \mathcal{I}_s^{(k-1)} \mathbb{B}_{s,t}^{(i_{k+1})}| \le$$
$$\le C\Big(\|B^{(i_{k+1})}\|_H \cdot \|\mathcal{I}_{s,t}^{(k)} - \mathcal{I}_s^{(k-1)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}\|_{2H} + \|\mathbb{B}^{(i_{k+1})}\|_{2H} \cdot \|\mathcal{I}^{(k-1)}\|_H\Big)|t-s|^{3H} \le$$
$$\le C(M_k\|B\|_H + \widetilde{M}_{k-1}\|\mathbb{B}\|_{2H})|t-s|^{2H}. \tag{3.76}$$

В то же время,

$$|\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})} - \mathcal{I}_s^{(k-1)} \mathbb{B}_{s,t}^{(i_{k+1})}| \ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| - |\mathcal{I}_s^{(k-1)}| \cdot |\mathbb{B}_{s,t}^{(i_{k+1})}| \ge$$
$$\ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| - \|\mathcal{I}^{(k-1)}\|_\infty \|\mathbb{B}^{(i_{k+1})}\|_{2H} |t-s|^{2H} \ge$$
$$\ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| - \widetilde{M}_{k-1}\|\mathbb{B}\|_{2H}|t-s|^{2H}. \tag{3.77}$$

Таким образом,

$$|\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| \le M_{k+1}|t-s|^{2H}, \tag{3.78}$$

где $M_{k+1} = (C+1)\|\mathbb{B}\|_{2H}\widetilde{M}_{k-1} + C\|B\|_H M_k$. Осталось заметить, что

$$M_{k+1}|t-s|^H \ge M_{k+1}|t-s|^{2H} \ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)} - \mathcal{I}_s^{(k)} B_{s,t}^{(i_{k+1})}| \ge$$
$$\ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)}| - |\mathcal{I}_s^{(k)}| \cdot |B_{s,t}^{(i_{k+1})}| \ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)}| - \|\mathcal{I}^{(k)}\|_\infty \|B^{(i_{k+1})}\|_H |t-s|^H \ge$$
$$\ge |\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)}| - \widetilde{M}_k\|B\|_H|t-s|^H. \tag{3.79}$$

Отсюда

$$|\mathcal{I}_{s,t}^{(k+1)}| \le (M_{k+1} + \widetilde{M}_k\|B\|_H)|t-s|^H =: \widetilde{M}_{k+1}|t-s|^H, \tag{3.80}$$

что и требовалось. Причем, как легко видеть, что проведенные выше выкладки (3.76) — (3.80) не зависят от значения i_{k+1}, т.е. справедливы и дают одни и те же оценки для любого $i_{k+1} = \overline{0,d}$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что

$$(\mathcal{I}^{(k)})' = \mathcal{I}^{(k-1)},\ R^{\mathcal{I}^{(k)}}_{s,t} = (\mathcal{I}^{(k)})_{s,t} - (\mathcal{I}^{(k)})'_s B^{(i)}_{s,t} = \mathcal{I}^{(k)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k-1)}_s B^{(i)}_{s,t},$$

$$\|R^{\mathcal{I}^{(k)}}_{s,t}\|_{2H} \le M_k,\ \|\mathcal{I}^{(k)}\|_H \le \widetilde{M}_k,$$

а также $\|\mathcal{I}^{(k)}\|_\infty \le \widetilde{M}_k$, поскольку $\max_{t\in[0,1]} |\mathcal{I}^{(k)}_t| = \max_{t\in[0,1]} |\mathcal{I}^{(k)}_{0,t}|$.

Полученные рекуррентные соотношения

$$M_{k+1} = (C+1)\|\mathbb{B}\|_{2H}\widetilde{M}_{k-1} + C\|B\|_H M_k, \quad \widetilde{M}_{k+1} = M_{k+1} + \widetilde{M}_k\|B\|_H \tag{3.81}$$

с начальными условиями

$$M_1 = \Big(C(\|D^2\varphi\|_\infty\|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty\|Df\|_\infty)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H + \|D\varphi\|_\infty\|f\|_\infty\Big)\|\mathbb{B}\|_{2H} +$$
$$+C\left(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|^2_H + \|D\varphi\|_\infty\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}\right)\|B\|_H, \tag{3.82}$$

$$\widetilde{M}_1 = \|\varphi\|_\infty\|B\|_H + M_1, \tag{3.83}$$

$$M_2 = (\|\varphi\|_\infty + C\|D\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|_H)\|\mathbb{B}\|_{2H} + CM_1\|B\|_H, \tag{3.84}$$

$$\widetilde{M}_2 = \widetilde{M}_1\|B\|_H + M_2 \tag{3.85}$$

позволяют последовательно вычислить константы $M_k, \widetilde{M}_k$. Очевидная индукция по k показывает, что $M_k = M_k(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}, \|\widehat{X}^{(c)}\|_H, \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H})$, $\widetilde{M}_k = \widetilde{M}_k(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}, \|\widehat{X}^{(c)}\|_H, \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H})$ являются многочленами с постоянными положительными коэффициентами, причем $\|B\|_H$ и $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ входят в одночлены в степени не выше k, $\|\widehat{X}^{(c)}\|_H$ — в степени не выше 2, а $\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}$ — в степени не выше 1. Пусть $\widetilde{\gamma}_k$ — максимальный коэффициент многочлена $\widetilde{M}_k(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}, \|\widehat{X}^{(c)}\|_H, \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H})$ и пусть

$$\mathbb{E}\Big(\|B\|^{i_1}_H\|\mathbb{B}\|^{i_2}_{2H}\|\widehat{X}^{(c)}\|^{j_1}_H\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|^{j_2}_{2H}\Big) = \max_{\substack{i,i'=\overline{0,k},\\ j=0,1,2,\\ j'=0,1}} \mathbb{E}\Big(\|B\|^{i}_H\|\mathbb{B}\|^{i'}_{2H}\|\widehat{X}^{(c)}\|^{j}_H\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|^{j'}_{2H}\Big). \tag{3.86}$$

Тогда взяв супремум и математическое ожидание от обеих частей неравенства $|\mathcal{I}^{(k)}_{s,t}| \le \widetilde{M}_k|t-s|^H$, получим:

$$\sup_{0\le s<t\le 1} \mathbb{E}\,|\mathcal{I}^{(k)}_{s,t}| \le \mathbb{E}\,\widetilde{M}_k \le 2k^2\cdot\widetilde{\gamma}_k\cdot\mathbb{E}\Big(\|B\|^{i_1}_H\|\mathbb{B}\|^{i_2}_{2H}\|\widehat{X}^{(c)}\|^{j_1}_H\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|^{j_2}_{2H}\Big). \tag{3.87}$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского

$$\mathbb{E}\Big(\|B\|_H^{i_1}\|\mathbb{B}\|_{2H}^{i_2}\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{j_1}\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{j_2}\Big) \le$$
$$\le \Big(\mathbb{E}\big(\|B\|_H^{2i_1}\|\mathbb{B}\|_{2H}^{2i_2}\big)\cdot\mathbb{E}\big(\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{2j_1}\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{2j_2}\big)\Big)^{1/2} \le$$
$$\le \Big(\mathbb{E}\,\|B\|_H^{4i_1}\cdot\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}\|_{2H}^{4i_2}\cdot\mathbb{E}\,\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{4j_1}\cdot\mathbb{E}\,\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{4j_2}\Big)^{1/4}. \qquad (3.88)$$

Таким образом,

$$\mathbb{E}\sup_{0\le s<t\le 1}\left|\int_s^t\int_0^{t_{k-1}}\ldots\int_0^{t_1}\varphi\big(\widehat{X}_{cr}^{(c)}\big)\,dB_r^{(i_1)}\ldots dB_{t_{k-2}}^{(i_{k-2})}dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})}\right| \le$$
$$\le 2k^2\cdot\widetilde{\gamma}_k\cdot\Big(\mathbb{E}\,\|B\|_H^{4i_1}\cdot\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}\|_{2H}^{4i_2}\cdot\mathbb{E}\,\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{4j_1}\cdot\mathbb{E}\,\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{4j_2}\Big)^{1/4}. \qquad (3.89)$$

Согласно [46, лемма 7.4] любой момент порядка $p \ge 1$ случайной величины $\|B\|_H$ конечен; в частности, $\mathbb{E}\,\|B\|_H^{4i_1} < \infty$. То же верно и для случайной величины $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ ввиду предложения 3.1, т.е., в частности, $\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}\|_{2H}^{4i_2} < \infty$. Из предложения 3.3 следует, что существуют универсальные константы c_1, c_2 такие, что

$$\|\widehat{X}^{(c)}\|_H \le c_1\left(\|\widehat{B}^{(c)}\|_H + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H}^{1/2} + \|\widehat{B}^{(c)}\|_H^{1/H} + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H}^{1/(2H)}\right), \qquad (3.90)$$
$$\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H} \le c_2\left(\|\widehat{B}^{(c)}\|_H^2 + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H} + \|\widehat{B}^{(c)}\|_H^{1+\frac{1}{H}} + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2H}}\right). \qquad (3.91)$$

Из неравенства Гельдера следует, что конечны любые моменты $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ порядка $q \in (0,1)$: $\mathbb{E}\,\|B^{(c)}\|_H^q \le \Big(\mathbb{E}\,\|B^{(c)}\|_H\Big)^q\Big(\mathbb{E}\,1^{1/(1-q)}\Big)^{1-q} < \infty$ (и аналогично $\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}^{(c)}\|_{2H}^q < \infty$). Поэтому из оценок (3.90) и (3.91) и неравенств о средних следует конечность моментов

$$\mathbb{E}\,\|X^{(c)}\|_H^{4j_1} < \infty, \qquad \mathbb{E}\,\|R^{X^{(c)}}\|_{2H}^{4j_2} < \infty. \qquad (3.92)$$

Это, в свою очередь, завершает доказательство того, что правая часть (3.89) конечна. Теорема 3.4 доказана.

Замечание 3.3. Рассмотрим случай, когда все показатели Харста H_i, $i = 1,\ldots,d$, равны $1/2$. В этом случае уравнение (3.1) можно рассматривать как уравнение Стратоновича. Учитывая связь уравнений Ито и Стратоновича [9, предложение 2.4], данное уравнение можно свести к уравнению Ито

$$dX_t = \tilde{f}_0(X_t)dt + \hat{f}(X_t)dW_t, \qquad (3.93)$$

где $\hat{f}$ – матрица, составленная из вектор-столбцов $f_1, \ldots, f_d$, W_t – d-мерное броуновское движение,

$$\tilde{f}_0(X) = f_0(X) - \text{col}(\rho_1(X), \ldots, \rho_n(X)),$$

$$\rho_j(X) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \hat{f}_{ji}(X)}{\partial x_k}\hat{f}_{ki}(X).$$

Так как решение уравнения (3.93) обладает марковским свойством [14, теорема 7.1.2], то, полагая $N = 2$ в соотношении (3.57), получим, что семейство операторов $\mathbf{P}_t$ является C_0-полугруппой с генератором

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^{n}\tilde{f}_{0,j}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{n} f_{k,j}(\cdot)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2.$$

Таким образом, для функции $u(x,t) = \mathbf{P}_t g(x)$ получаем обратное уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A}u.$$

Отметим, что даже для простейшего одномерного уравнения $dX_t = dB_t^\alpha$ при $\alpha \in (1/3, 1/2) \cup (1/2, 1)$ решение $X_t = B_t^\alpha$ не является семимартингалом, и следовательно, не обладает марковским свойством, которое является ключевым при выводе уравнений Колмогорова [14, теорема 8.1.1].

3.4 Математические ожидания повторных интегралов от дробных броуновских движений

В данном разделе мы вычислим математические ожидания повторных интегралов возникающих их разложений для $\mathbf{P}_t g(x)$ в теореме 3.4, предполагая, что $H_i \geq H^* > 1/2$ для всех $i = 0, \ldots, d$.

Теорема 3.5. *Пусть* $I_m = (i_1, \ldots, i_m) \in \{1, \ldots, d\}^m$, $m \in \mathbb{N}$.

1. Если $m = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, *то*

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})}\right) = 0.$$

2. Если $m=2k$, $k\in\mathbb{N}$, то справедливо равенство

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} dB^{(I_{2k})}\right)=$$
$$=\frac{1}{k!2^{2k}}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\left(\prod_{l=1}^{k}(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}})\times\right.$$
$$\left.\times\int\limits_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\delta_{i_{\sigma(2l)},i_{\sigma(2l-1)}}|t_{\sigma(2l)}-t_{\sigma(2l-1)}|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}dt_1\dots dt_{2k}\right),$$

где δ — символ Кронекера, S_{2k} — группа подстановок.

Доказательство. Первую часть легко доказать, используя свойство симметрии распределения дробного броуновского движения: если $B^{(i)}$ — дробное броуновское движение с индексом Харста H_i, то $-B^{(i)}$ — также дробное броуновское движение с тем же индексом Харста. Таким образом, получим

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})}\right)=\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} d\left(-B^{(I_{2k-1})}\right)\right)=$$
$$=(-1)^{2k-1}\,\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})}\right)=-\,\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})}\right),$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

Докажем вторую часть теоремы. Обозначим через $B^{(N)}$, $N\in\mathbb{N}$, последовательность приближений к B на диадных разбиениях $\mathcal{P}^{(N)}_{dyad}=\left\{t^{(N)}_k=\frac{k}{2^N},\,k=\overline{0,2^N}\right\}$ отрезка $[0,1]$, определяемых следующей формулой:

$$B^{(N)}_t=B_{t^{(N)}_{k-1}}+2^N\left(t-t^{(N)}_{k-1}\right)\left(B_{t^{(N)}_k}-B_{t^{(N)}_{k-1}}\right),\ t\in\left[t^{(N)}_{k-1},t^{(N)}_k\right),\,k=1,\dots,N.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости ввиду [22, следствие 20], получим:

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} dB^{(I_{2k})}\right)=\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}(dB^{(N)})^{(I_{2k})}\right).$$

Поскольку функции $B^{(N)}$ абсолютно непрерывны п.н., то справедливы соотношения

$$\int_{\Delta^{2k}[0,1]}(dB^{(N)})^{(I_{2k})}=$$

$$= \int_0^1 \int_0^{t_{2k}} \dots \int_0^{t_2} d\big(B_{t_1}^{(N)}\big)^{(i_1)} \dots d\big(B_{t_{2k-1}}^{(N)}\big)^{(i_{2k-1})} d\big(B_{t_{2k}}^{(N)}\big)^{(i_{2k})} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{t_{2k}} \dots \int_0^{t_2} \frac{d\big(B_{t_1}^{(N)}\big)^{(i_1)}}{dt_1}\, dt_1 \dots \frac{d\big(B_{t_{2k-1}}^{(N)}\big)^{(i_{2k-1})}}{dt_{2k-1}}\, dt_{2k-1} \frac{d\big(B_{t_{2k}}^{(N)}\big)^{(i_{2k})}}{dt_{2k}}\, dt_{2k} =$$

$$= \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \frac{d\big(B_{t_1}^{(N)}\big)^{(i_1)}}{dt_1} \dots \frac{d\big(B_{t_{2k}}^{(N)}\big)^{(i_{2k})}}{dt_{2k}}\, dt_1 \dots dt_{2k}. \tag{3.94}$$

Нам потребуется следующее утверждение, которое может быть доказано непосредственно путем разложения в ряд производящей функции моментов гауссовского случайного вектора.

Лемма 3.6 [17]. *Для центрированного гауссовского вектора* $G = (G_1, \dots, G_{2k})$ *справедливо равенство*

$$\mathbb{E}(G_1 \dots G_{2k}) = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \prod_{l=1}^{k} \mathbb{E}(G_{\sigma(2l)} G_{\sigma(2l-1)}).$$

Применяя лемму 3.6 к равенству (3.94), получим:

$$\mathbb{E}\bigg(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} (dB^{(N)})^{(I_{2k})}\bigg) =$$

$$= \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \mathbb{E}\bigg(\frac{d\big(B_{t_1}^{(N)}\big)^{(i_1)}}{dt_1} \dots \frac{d\big(B_{t_{2k}}^{(N)}\big)^{(i_{2k})}}{dt_{2k}}\bigg) dt_1 \dots dt_{2k} =$$

$$= \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \mathbb{E}\bigg(\frac{d\big(B_{t_{\sigma(2l)}}^{(N)}\big)^{(i_{\sigma(2l)})}}{dt_{\sigma(2l)}} \cdot \frac{d\big(B_{t_{\sigma(2l-1)}}^{(N)}\big)^{(i_{\sigma(2l-1)})}}{dt_{\sigma(2l-1)}}\bigg) dt_1 \dots dt_{2k}. \tag{3.95}$$

Рассмотрим отдельно каждый множитель в соотношении (3.95). Пусть $t_{\sigma(2l)} \in [t_u^{(N)}, t_{u+1}^{(N)})$ и $t_{\sigma(2l-1)} \in [t_v^{(N)}, t_{v+1}^{(N)})$ для некоторых $u,v \in \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ (для упрощения обозначений будем иногда опускать верхний индекс (N)). Используя представление $B^{(N)}$, можем записать:

$$\mathbb{E}\bigg(\frac{d\big(B_{t_{\sigma(2l)}}^{(N)}\big)^{(i_{\sigma(2l)})}}{dt_{\sigma(2l)}} \cdot \frac{d\big(B_{t_{\sigma(2l-1)}}^{(N)}\big)^{(i_{\sigma(2l-1)})}}{dt_{\sigma(2l-1)}}\bigg) =$$

$$= 2^{2N}\, \mathbb{E}\Big(B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})} - B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})}\Big)\Big(B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})} - B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})}\Big).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, однородность приращений дробного Броуновского движения, получим неравенство

$$\left|\mathbb{E}\Big(B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})}-B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})}\Big)\Big(B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})}-B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})}\Big)\right| \le$$
$$\le \sqrt{\left|t_{u+1}-t_u\right|^{2H_{i_{\sigma(2l)}}}\left|t_{v+1}-t_v\right|^{2H_{i_{\sigma(2l-1)}}}} \le 2^{-2NH^*}. \qquad (3.96)$$

Если $|u-v|>1$, то легко вывести следующее равенство:

$$\mathbb{E}\Big(B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})}-B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})}\Big)\Big(B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})}-B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})}\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\delta_{i_{\sigma(2l)},i_{\sigma(2l-1)}}(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}})\times$$
$$\times \iint_{[t_u^{(N)},t_{u+1}^{(N)})\times[t_v^{(N)},t_{v+1}^{(N)})} |x-y|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}dxdy. \qquad (3.97)$$

Введем следующее обозначение:

$$R_{u,v}^{(N)} = [t_u^{(N)},t_{u+1}^{(N)})\times[t_v^{(N)},t_{v+1}^{(N)}),$$

$$f_{u,v}^{(l)}(t) = \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)},t_{\sigma(2l-1)})\,\mathbb{E}\Big(B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})}-B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})}\Big)\Big(B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})}-B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})}\Big).$$

Используя соотношение (3.95), получим:

$$\mathbb{E}\Big(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}(dB^{(N)})^{(I_{2k})}\Big) =$$
$$= \frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\sum_{u,v=0}^{2^N-1}\mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)},t_{\sigma(2l-1)})\times$$
$$\times\,\mathbb{E}\Big(B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})}-B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})}\Big)\Big(B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})}-B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})}\Big)dt_1\dots dt_{2k} =$$
$$= \frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\left(\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1}f_{u,v}^{(l)}(t)+\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le1}}^{2^N-1}f_{u,v}^{(l)}(t)\right)dt_1\dots dt_{2k} =$$
$$= \frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1}f_{u,v}^{(l)}(t)\;dt_1\dots dt_{2k}+$$
$$+\frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\pi\in S_k}\Big(\prod_{l=1}^{\alpha}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1}f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\Big)\times$$

$$\times\Bigg(\prod_{l=\alpha+1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\Bigg)dt_1\dots dt_{2k} := I_1^{(N)}+I_2^{(N)}.$$

Сейчас утверждение теоремы является прямым следствием следующей леммы.

Лемма 3.7. *В предыдущих обозначениях пусть*

$$I_1^{(N)}=\frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(l)}(t)\,dt_1\dots dt_{2k},$$

$$I_2^{(N)}=\frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\pi\in S_k}\Bigg(\prod_{l=1}^{\alpha}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\Bigg)\times$$

$$\times\Bigg(\prod_{l=\alpha+1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\Bigg)dt_1\dots dt_{2k}.$$

Тогда $\lim\limits_{N\to\infty} I_2^{(N)}=0$ *и*

$$\lim_{N\to\infty} I_1^{(N)}=\frac{1}{k!2^{2k}}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\Bigg(\prod_{l=1}^{k}(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}})\Bigg)\times$$

$$\times\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\delta_{i_{\sigma(2l)},i_{\sigma(2l-1)}}|t_{\sigma(2l)}-t_{\sigma(2l-1)}|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}dt_1\dots dt_{2k}.$$

Доказательство. По теореме о среднем существует точка $(t_u^*,t_v^*)\in R_{u,v}^{(N)}$ такая, что

$$\iint_{R_{u,v}^{(N)}}|x-y|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}dxdy=|t_u^*-t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}\cdot\mathrm{mes}(R_{u,v}^{(N)})=$$

$$=2^{-2N}\cdot|t_u^*-t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}.$$

Когда N стремится к ∞, прямоугольник $R_{u,v}^{(N)}$ стягивается в точку $(t_{\sigma(2l)},t_{\sigma(2l-1)})$ и таким образом,

$$I_1^{(N)}=\frac{2^{2Nk}}{k!2^{2k}}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\Bigg(\prod_{l=1}^{k}(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}})\Bigg)\times$$

$$\times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)}) \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} \times$$

$$\times \iint_{R_{u,v}^{(N)}} |x-y|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2} dx dy dt_1 \ldots dt_{2k} =$$

$$= \frac{1}{k!2^{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \left(\prod_{l=1}^{k} (H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}) \right) \times$$

$$\times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)}) \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} \times$$

$$\times |t_u^* - t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2} dt_1 \ldots dt_{2k} \xrightarrow[N\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{k!2^{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \left(\prod_{l=1}^{k} (H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}) \right) \times$$

$$\times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} |t_{\sigma(2l)} - t_{\sigma(2l-1)}|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2} dt_1 \ldots dt_{2k}. \qquad (3.98)$$

Осталось доказать, что $I_2^{(N)} \to 0$ as $N \to \infty$. Выберем число $q > 1$ такое, что $2 - \frac{1}{q} < 2H^*$, и пусть $p = \frac{q}{q-1}$. Воспользуемся неравенством Гельдера, чтобы получить верхнюю оценку для $I_2^{(N)}$:

$$|I_2^{(N)}| \le \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\pi \in S_k} 2^{2Nk} \times$$

$$\times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \left(\prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right) \left(\prod_{l=\alpha+1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right) \right| dt_1 \ldots dt_{2k} \le$$

$$\le \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\pi \in S_k} 2^{2Nk} \times$$

$$\times \left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right|^p dt_1 \ldots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\left|\prod_{l=\alpha+1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\right|^q dt_1\dots dt_{2k}\right)^{\frac{1}{q}}. \qquad (3.99)$$

Достаточно показать, что каждое слагаемое в (3.99) порядка $O(2^{(2-\frac{1}{q}-2H^*)N(k-\alpha)})$. Для первого интеграла в слагаемом (3.99) воспользуемся соображениями из соотношений (3.97), (3.98):

$$2^{2N\alpha}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\left|\prod_{l=1}^{\alpha}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\right|^p dt_1\dots dt_{2k}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2^{2N\alpha}\cdot\frac{1}{2^k}\left(\prod_{l=1}^{\alpha}(H_{i_{\sigma(2\pi(l))}}+H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2\pi(l))}}+H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}})\right)\times$$

$$\times\Bigg(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\Bigg|\prod_{l=1}^{\alpha}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1}\mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2\pi(l))},t_{\sigma(2\pi(l)-1)})\cdot\delta_{i_{\sigma(2\pi(l))},i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}\times$$

$$\times 2^{-2N}\cdot|t_u^*-t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2\pi(l))}}+H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}-2}\Bigg|^p dt_1\dots dt_{2k}\Bigg)^{\frac{1}{p}}\xrightarrow[N\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{}\frac{1}{2^k}\left(\prod_{l=1}^{\alpha}(H_{i_{\sigma(2\pi(l))}}+H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2\pi(l))}}+H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}})\right)\times$$

$$\times\Bigg(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\Bigg|\prod_{l=1}^{\alpha}\delta_{i_{\sigma(2\pi(l))},i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}\times$$

$$\times|(t_{\sigma(2\pi(l))}-t_{\sigma(2\pi(l)-1)}|^{H_{i_{\sigma(2\pi(l))}}+H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}-2}\Bigg|^p dt_1\dots dt_{2k}\Bigg)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

поэтому первый множитель ограничен. Для второго интеграла в (3.99) воспользуемся оценкой (3.96) и получим:

$$2^{2N(k-\alpha)}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\left|\prod_{l=\alpha+1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\right|^q dt_1\dots dt_{2k}\right)^{\frac{1}{q}}\le 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)}\times$$

$$
\times\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\Bigg(\prod_{l=\alpha+1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1}\mathbf{1}_{R^{(N)}_{u,v}}\big(t_{\sigma(2\pi(l))},t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big)\Bigg)^q dt_1\dots dt_{2k}\right)^{\frac{1}{q}}
$$

Во внутренней сумме только одно слагаемое равно 1: то, для которого $\big(t_{\sigma(2\pi(l))},t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big)\in R^{(N)}_{u,u}$ или $\big(t_{\sigma(2\pi(l))},t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big)\in R^{(N)}_{u,u\pm1}$; остальные слагаемые занулятся. Произведение отлично от нуля только если все его множители отличны от нуля, поэтому

$$
\begin{gathered}
2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\Bigg(\prod_{l=\alpha+1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1}\mathbf{1}_{R^{(N)}_{u,v}}\big(t_{\sigma(2\pi(l))},t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big)\Bigg)^q dt_1\dots dt_{2k}\right)^{\frac{1}{q}}\le\\
\le 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)}\times\Big(\mathrm{mes}\big\{(t_1,\dots,t_{2k})\in\Delta^{2k}[0,1]:\\
|t_{\sigma(2\pi(l))}-t_{\sigma(2\pi(l)-1)}|\le 2\cdot 2^{-N}\ \ \forall\, l=\overline{\alpha+1,k}\big\}\Big)^{\frac{1}{q}}\le\\
\le 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)}\times\Big(\mathrm{mes}\big\{(t_1,\dots,t_{2k})\in[0,1]^{2k}:\\
|t_{\sigma(2\pi(l))}-t_{\sigma(2\pi(l)-1)}|\le 2\cdot 2^{-N}\ \ \forall\, l=\overline{\alpha+1,k}\big\}\Big)^{\frac{1}{q}}\le\\
\le 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)}\left(1^{\alpha}\cdot\Big(2\sqrt{2}\cdot 2\cdot 2^{-N}\Big)^{k-\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}=\\
=2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)}\cdot 2^{\frac{5(k-\alpha)}{2q}}\cdot 2^{-\frac{N(k-\alpha)}{q}}=O\big(2^{(2-\frac{1}{q}-2H^*)N(k-\alpha)}\big),
\end{gathered}
$$

что завершает доказательство сходимости $I_2^{(N)}\to 0$ при $N\to\infty$.

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Замечание 3.4. Рассмотрим математические ожидания повторных интегралов следующего вида

$$
J(I^{(m)},t):=\mathbb{E}\bigg(\int_{\Delta^m[0,t]}dB^{(I_m)}\bigg)
$$

для произвольных индексов $I_m=(i_1,\dots,i_m)\in\mathbb{N}_d^m$. Без ограничения общности будем считать, что $i_1,\dots,i_k>0$, а $i_j=0$ для всех $j>k$. Тогда следующее равенство может быть получено изменением порядка интегрирования:

$$
J(I^{(m)},t)=\int_0^t J(\widetilde{I^{(k)}},\tau)\frac{(t-\tau)^{m-k-1}}{(m-k-1)!}d\tau,
$$

где $\widetilde{I^{(k)}} = (i_1, \ldots, i_k)$ и $J(\widetilde{I^{(k)}}, \tau)$ могут быть вычислены, используя равенство (3.62) и теорему 3.5.

Пример 3.1. Рассмотрим следующее одномерное уравнение:

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/2,1)$, $b, \sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции класса C_b^4. Обозначим $f(x) = (b(x), \sigma(x))$, $B_t = (t, B_t^H)$. Пусть также задано начальное условие $X_0 = x$. Выпишем несколько первых членов асимптотических разложений (3.57) (ограничимся $N = 2$) для решений данного уравнения.

Используя теорему 3.5 и замечание 3.4 можем вычислить повторные интегралы:

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^1[0,1]} dB^{(0)}\right) = \int_0^1 dt = 1, \quad \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^1[0,1]} dB^{(1)}\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 dB_t^H\right) = 0,$$

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(0,0)}\right) = \int_0^1 dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 = \int_0^1 t_2 dt_2 = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(0,1)}\right) = \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(1,0)}\right) = \int_0^1 \mathbb{E}\left(\int_0^{t_2} dB_{t_1}^H\right) dt_2 = 0,$$

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(1,1)}\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 dB_{t_2}^H \int_0^{t_2} dB_{t_1}^H\right) = \frac{1}{1!2^2} \cdot 2 \cdot 2H(2H-1)\times$$

$$\times \int_{\Delta^2[0,1]} |t_2 - t_1|^{2H-2} dt_1 dt_2 = H(2H-1) \int_0^1 dt_2 \int_0^{t_2} (t_2 - t_1)^{2H-2} dt_1 =$$

$$= H \int_0^1 t_2^{2H-1} dt_2 = \frac{1}{2}.$$

Для данного уравнения имеем операторы $D_f^{(0)} = b(x)\,\frac{\partial}{\partial x}$ и $D_f^{(1)} = \sigma(x)\,\frac{\partial}{\partial x}$. Нетрудно вычислить, что

$$D_f^{(0,0)} = b(x) Db(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + b^2(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D_f^{(1,1)} = \sigma(x) D\sigma(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + \sigma^2(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Таким образом, согласно теореме 3.4, для $\mathbf{P}_t g(x)$, $g \in C_b^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ справедливо асимптотическое разложение следующего вида:

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + t\, b(x) Dg(x) + \frac{1}{2} t^2 \left(b(x) Db(x) Dg(x) + b^2(x) D^2 g(x)\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} t^{2H} \left(\sigma(x) D\sigma(x) Dg(x) + \sigma^2(x) D^2 g(x)\right) + O\left(t^{3H}\right).$$

3.5 Коммутативный случай

В данном разделе будем предполагать, что компоненты $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ правой части уравнения (3.1) являются векторными полями из класса $C_b^{d+2}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ такими, что справедливо равенство $D_f^{(i)} \circ D_f^{(j)} = D_f^{(j)} \circ D_f^{(i)}$, для любых $0 \le i,j \le d$.

Для каждого $i = \overline{0,d}$ обозначим через $(e^{tD_f^{(i)}})_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ семейство операторов, определяемое соотношением $e^{tD_f^{(i)}}(x) = X_t^x$ для любых $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, в котором X_t^x — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dX_t}{dt} = f_i(X_t)$$

с начальным условием $X_0 = x$.

Предложение 3.6. *Для решения X_t^x уравнения* (3.1) *с начальным условием $X_0 = x$ п. н. справедлива следующая формула:*

$$X_t^x = F(x, B_t), \quad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n,$$

в которой $F(x,y) = e^{y_0 D_f^{(0)}} \circ \ldots \circ e^{y_d D_f^{(d)}}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d+1}$.

Доказательство. Поскольку операторы $D_f^{(i)}$ коммутируют, потоки $(e^{tD_f^{(i)}})_{t\ge 0}$ также коммутируют. Для пары $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d+1}$ обозначим

$$F(x,y) = \left(e^{y_0 D_f^{(0)}} \circ \ldots \circ e^{y_d D_f^{(d)}}\right)(x).$$

Применяя формулу Ито, легко видеть, что процесс $\left(e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x\right)_{t\ge 0}$ является решением уравнения $dX_t = f_d(X_t)dB_t^{(d)}$. Применяя формулу Ито еще раз и учитывая коммутативность операторов $D_f^{(d)}$, $D_f^{(d-1)}$, получим:

$$\begin{aligned} d\left(e^{B_t^{(d-1)} D_f^{(d)-1}}(e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x)\right) &= f_{d-1}\left(e^{B_t^{(d-1)} D_f^{(d-1)}}(e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x)\right) dB_t^{(d-1)} \\ &+ f_d\left(e^{B_t^{(d-1)} D_f^{(d-1)}}(e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x)\right) dB_t^{(d)}. \end{aligned}$$

И так далее. Путем последовательного применения формулы Ито, заключаем, что процесс $(F(x,B_t))_{t\ge 0}$ удовлетворяет уравнению (3.1) с начальным условием $X_0 = x$. Таким образом, согласно теореме 3.1, можем сделать вывод, что

$$X_t^x = F(x, B_t), \quad t \in [0,T],$$

п.н. Предложение доказано.

Теорема 3.6. *Для любой функции* $g \in C_b^{d+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ *справедливо равенство*

$$\mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right) = \left(\exp\left(tD_f^{(0)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} t^{2H_i}(D_f^{(i)})^2\right) g\right)(x).$$

Другими словами, функция

$$\varphi(t,x) = \mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right),$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_f^{(0)}\varphi + \sum_{i=1}^{d} H_i t^{2H_i-1}(D_f^{(i)})^2\varphi, \tag{3.100}$$

с начальным условием

$$\varphi(0,x) = g(x).$$

Доказательство. Применяя формулу Ито для дробного броуновского движения из [20], получим для $i > 0$:

$$\mathbb{E}\left(g(e^{B_t^{(i)}D_f^{(i)}}(x))\right) = g(x) + H_i\int_0^t s^{2H_i-1}\,\mathbb{E}\left((D_f^{(i)})^2 g(e^{B_s^{(i)}D_f^{(i)}}(x))\right)ds.$$

Если $i = 0$, то для $B_t^{(0)} = t$ будем иметь следующее равенство

$$g(e^{B_t^{(0)}D_f^{(0)}}(x)) = g(x) + \int_0^t D_f^{(0)} g(e^{B_s^{(0)}D_f^{(0)}}(x))ds.$$

Последние два равенства означают, что функции $u_i(t,x) = \mathbb{E}\left(g(e^{B_t^{(i)}D_f^{(i)}}(x))\right)$ являются решениями следующих уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = H_i t^{2H_i-1}(D_f^{(i)})^2 u_i, \quad i > 0,$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = D_f^{(0)} u_0,$$

следовательно,

$$\mathbb{E}\left(g(e^{B_t^{(i)}D_f^{(i)}}(x))\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{2}t^{2H_i}(D_f^{(i)})^2\right)g\right)(x), \quad i > 0,$$
$$g(e^{B_t^{(0)}D_f^{(0)}}(x)) = \left(\exp\left(tD_f^{(0)}\right)g\right)(x).$$

Согласно предложению 3.6, п.н. верно равенство

$$X_t^x = (e^{B_t^{(0)} D_f^{(0)}} \circ \ldots \circ e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}})(x).$$

Используя коммутативность операторов $D_f^{(i)}$ и $D_f^{(j)}$, можем записать, что

$$\mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right) = \left(\exp\left(tD_f^{(0)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} t^{2H_i}(D_f^{(i)})^2\right) g\right)(x),$$

что, в свою очередь, доказывает теорему.

Замечание 3.5. Если компоненты правой части $f_i \in \mathbb{C}^{d+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ автономны, а операторы $D_f^{(i)}$ и $D_j^{(j)}$ коммутируют, то функция $\mathbb{E}(g(X_t^x))$ удовлетворяет уравнению (3.100), которое является обобщением обратного уравнения Колмогорова [14, теорема 8.1.1] на случай дробного броуновского движения с различными индексами Харста, вообще говоря отличными от $1/2$.

Пример 3.2. Рассмотрим следующее одномерное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = \sin X_t \, dt + 2H^{-1} \sin X_t \, dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/3,1)$. Пусть также задано начальное условие $X_0 = x \in \mathbb{R}$.

Для данного уравнения имеем операторы $D_f^{(0)} = \sin x \frac{\partial}{\partial x}$ и $D_f^{(1)} = 2H^{-1} \sin x \frac{\partial}{\partial x}$. Нетрудно видеть, что указанное уравнение удовлетворяет коммутативному случаю, поскольку

$$D_f^{(0)} \circ D_f^{(1)} = 2H^{-1} \sin x \cos x \frac{\partial}{\partial x} + 2H^{-1} \sin^2 x \frac{\partial^2}{\partial x^2} = D_f^{(1)} \circ D_f^{(0)}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $(D_f^{(1)})^2 = H^{-1} \sin 2x \frac{\partial}{\partial x} + 4H^{-2} \sin^2 x \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Поэтому, согласно теореме 3.6, функция $\varphi(t,x) = \mathbb{E}\, g(X_t^x)$ будет являться решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\sin x + t^{2H-1} \sin 2x\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4t^{2H-1}}{H} \sin^2 x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

с начальным условием $\varphi(0,x) = g(x)$.

ГЛАВА 4
МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ заданы d-мерное стандартное броуновское движение $W(t)$ и d-мерное дробное броуновское движение $B(t)$ с показателем Харста $H \in (1/2,1)$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{4.1}$$

где $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — детерминированные функции.

Определение 4.1. Под решением уравнения (4.1) понимаем процесс $x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$, согласованный с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, порожденным процессами $W(t)$ и $B(t)$, такой, что выполняются условия:

1) существует $\alpha > 1 - H$ такое, что процесс $x(t)$ имеет п.н. непрерывные по Гельдеру с показателем α траектории;

2) для любого $t \in \mathbb{R}^+$ почти наверное выполняется равенство

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s,x(s))ds + \int_0^t g(s,x(s))dW(s) + \int_0^t \sigma(s,x(s))dB(s),$$

где интеграл по процессу $W(t)$ – стохастический интеграл Ито, а интеграл по процессу $B(t)$ – потраекторный интеграл Римана-Стилтьеса [32].

Замечание 4.1. Иногда рассматривают решения, допускающие взрывы за конечное время. В этом случае решение $x(t)$ определяется для $t < \tau$, где τ – так называемый момент взрыва ($\mathcal{F}_t$-момент остановки, такой что $\lim_{t\to\tau-0} \|x(t)\| = \infty$ при $\tau < \infty$), а непрерывность траекторий по Гельдеру предполагается до момента τ.

Пусть функция $F(t,x)$ непрерывна вместе со своими производными $F'_t(t,x)$, $F'_x(t,x)$, $F''_{x^2}(t,x)$. Если функции f, g измеримы по Борелю, функция σ удовлетворяет (δ,ρ)-условию Гельдера по (t,x) при некоторых $\delta > 1 - H$, $\rho > 2 - 2H$, а решение $x(t)$ имеет непрерывные по Гельдеру порядка α

траектории п.н. при $\alpha\rho > 1$, то имеет место аналог формулы Ито [44, P. 184]:

$$
\begin{gathered}
F(t,x(t)) = F(0,x(0)) + \\
+\int_0^t \Big(F'_t(\tau,x(\tau)) + F'_x(\tau,x(\tau)) f(\tau,x(\tau)) + \\
+\frac{1}{2}\mathrm{tr}(F''_{x^2}(\tau,x(\tau)) g(\tau,x(\tau)) g^T(\tau,x(\tau))) \Big) d\tau + \\
+\int_0^t F'_x(\tau,x(\tau)) g(\tau,x(\tau)) dW(\tau) + \int F'_x(\tau,x(\tau)) \sigma(\tau,x(\tau)) dB(\tau). \qquad (4.2)
\end{gathered}
$$

4.1 Методы интегрирования одномерных уравнений смешанного типа

В данном параграфе будем рассматривать одномерное уравнение (4.1), т.е. $d = 1$. В рамках настоящего параграфа будем предполагать, что коэффициенты рассматриваемых уравнений являются достаточно гладкими функциями, обеспечивающими возможность достаточного числа дифференцирований и применений формулы замены переменных (4.2).

4.1.1 Приведение к простейшим уравнениям

Рассмотрим простейшее уравнение

$$
dy(t) = u(t)dt + v(t)dW(t) + b(t)dB(t), \quad t \geq 0. \qquad (4.3)
$$

Решение уравнения (4.3) выражается следующей формулой:

$$
y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)dW(\tau) + \int_0^t b(\tau)dB(\tau), \quad t \geq 0.
$$

Найдем класс уравнений (4.1), приводимых к (4.3) с помощью дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно x преобразования $y = F(t,x)$ посредством формулы Ито (4.2) в предположении, что что функции f, g, σ обладают производными требуемых порядков для последующих вычислений. В соответствии с формулой Ито, должны быть справедливы соотношения:

$$u(t) = F'_t(t,x) + F'_x(t,x)f(t,x) + \frac{1}{2}F''_{x^2}(t,x)g^2(t,x), \tag{4.4}$$

$$v(t) = F'_x(t,x)g(t,x), \tag{4.5}$$

$$b(t) = F'_x(t,x)\sigma(t,x). \tag{4.6}$$

Из соотношений (4.5), (4.6) следует, что $\frac{v(t)}{g(t,x)} = \frac{b(t)}{\sigma(t,x)}$, или $\frac{\sigma(t,x)}{g(t,x)} = \frac{b(t)}{v(t)} := q(t)$. Также из соотношения (4.5) очевидным образом можно выразить следующие производные функции F:

$$F'_x = \frac{v}{g}, \quad F''_{x^2} = -\frac{vg'_x}{g^2}, \quad F''_{tx} = \frac{v'g - vg'_t}{g^2}. \tag{4.7}$$

Дифференцируя соотношение (4.4) по x и используя полученные формулы для $F'_x, F''_{x^2}, F''_{tx}$, получим:

$$F''_{tx} + F''_{x^2}f + F'_xf'_x + \frac{1}{2}F'''_{x^3}g^2 + F''_{x^2}g'_xg = 0,$$

$$\frac{v'g - vg'_t}{g^2} - \frac{vg'_xf}{g^2} + \frac{vf'_x}{g} - \frac{vg''_{x^2}g^2 - 2vg(g'_x)^2}{2g^2} - \frac{v(g'_x)^2}{g} = 0,$$

$$\frac{v'}{v} = g\left(\frac{g'_t}{g^2} + \frac{g'_xf}{g^2} - \frac{f'_x}{g} + \frac{1}{2}g''_{x^2}\right) = g\left(\frac{g'_t}{g^2} + \left(\frac{f}{g}\right)'_x + \frac{1}{2}g''_{x^2}\right). \tag{4.8}$$

Левая часть последнего соотношения зависит лишь от t, поэтому на функции f, g, σ накладываются следующие ограничения:

$$g(t,x)\left(\frac{g'_t(t,x)}{g^2(t,x)} + \left(\frac{f(t,x)}{g(t,x)}\right)'_x + \frac{1}{2}g''_{x^2}(t,x)\right) = r(t), \tag{4.9}$$

$$\frac{\sigma(t,x)}{g(t,x)} = q(t) \tag{4.10}$$

для некоторых функций $r(t), q(t)$.

Обратно, пусть заданные функции f,g,σ удовлетворяют условиям (4.9), (4.10). Тогда из соотношения (4.8) находим функцию $v(t) = \exp\left(\int_0^t r(\tau)d\tau\right)$ (как любое нетривиальное решение линейного однородного уравнения). Из соотношения (4.7) найдем $F(t,x) = v(t)\int_0^x \frac{ds}{g(t,s)}$, причем ввиду того, что $v \neq 0$, $F'_x = \frac{v}{g} \neq 0$, т.е. функция F будет обратима по x. Зная функцию F, из соотношений (4.4), (4.6) однозначно определяем функции $u(t)$ и $b(t)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Уравнение* (4.1) *с* $g(t,x) \neq 0$ *приводимо к уравнению* (4.3) *с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно* x *преобразования* $y = F(t,x)$ *тогда и только тогда, когда найдутся функции* $q(t), r(t)$ *такие, что оказываются выполненными соотношения* (4.9)*,* (4.10) .

Предложение 4.1. *Пусть заданы скалярные функции* $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$*, при этом* $\beta(t) \neq 0$*. Тогда решение линейного однородного уравнения*

$$dx(t) = \alpha(t)x(t)dt + \beta(t)x(t)dW(t) + \gamma(t)x(t)dB(t), \quad t \geq 0, \tag{4.11}$$

с начальным условием $x(0) = x_0 > 0$ *выражается формулой*

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t \Big(\alpha(\tau) - \frac{1}{2}\beta^2(\tau)\Big)d\tau + \int_0^t \beta(\tau)dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau)dB(\tau)\right)$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что функции $f(t,x) = \alpha(t)x$, $g(t,x) = \beta(t)x$, $\sigma(t,x) = \gamma(t)x$ удовлетворяют условиям (4.9), (4.10), причем $\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}$, т.е. $\ln\left(\frac{v(t)}{\beta(t)}\right)' = 0$. Можно выбрать функцию $v(t) = \beta(t)$. Тогда $F'_x = \frac{1}{x}$, и, в свою очередь, можно выбрать преобразование $F = \ln x$. Из соотношений (4.4), (4.5) находим, что $u(t) = \alpha(t) - \frac{1}{2}\beta(t)$, $b(t) = \gamma(t)$. Так как $y(t) = \ln x(t)$, то $x(t) = e^{y(t)}$ и следовательно, имеет место формула

$$x(t) = C \exp\left(\int_0^t \Big(\alpha(\tau) - \frac{1}{2}\beta^2(\tau)\Big)d\tau + \int_0^t \beta(\tau)dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau)dB(\tau)\right),$$

где $C = e^{y(0)}$. Подставляя в формулу $t = 0$, находим величину $C = x(0)$, что и требовалось.

Замечание 4.2. Непосредственной подстановкой найденной формулы для решения в уравнение (4.11) можно убедиться, что данная формула сохраняет силу, в том числе, если опустить условия $\beta(t) \neq 0$ и $x_0 > 0$. Нетрудно видеть, что почти все траектории решения уравнения (4.11) непрерывны по Гельдеру с любым показателем $\kappa < 1/2$.

Предложение 4.2. *Решение линейного неоднородного уравнения*

$$dx(t) = \big(\alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)\big)dt + \big(\beta_1(t)x(t) + \beta_2(t)\big)dW(t) + \\ + \big(\gamma_1(t)x(t) + \gamma_2(t)\big)dB(t), \quad t \geq 0,$$

выражается по формуле

$$x(t) = x_0(t)\bigg(x(0) + \int_0^t \frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} d\tau + \\ + \int_0^t \frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} dW(\tau) + \int_0^t \frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)} dB(\tau)\bigg),$$

в которой $x_0(t) = \exp\left(\int_0^t \big(\alpha_1(\tau) - \frac{1}{2}\beta_1^2(\tau)\big) d\tau + \int_0^t \beta_1(\tau) dW(\tau) + \int_0^t \gamma_1(\tau) dB(\tau)\right)$ *есть решение соответствующего линейного однородного уравнения с начальным условием* $x_0(0) = 1$.

Доказательство. Положим $x(t) = x_0(t)y(t)$. Определим уравнение

$$dy(t) = u(t,y(t))dt + v(t,y(t))dW(t) + b(t, y(t))dB(t), \quad t \geq 0,$$

которому удовлетворяет процесс $y(t)$. Применим формулу Ито к процессу $y = \frac{x}{x_0} = F(x, x_0)$, рассматривая пару $\bar{x} = (x,x_0)$ как решение двумерного уравнения

$$d\bar{x}(t) = \big(\bar{\alpha}_1(t)\bar{x}(t) + \bar{\alpha}_2(t)\big)dt + p(t,\bar{x}(t))d\bar{W}(t) + \big(\bar{\gamma}_1(t)\bar{x}(t) + \bar{\gamma}_2(t)\big)dB(t),$$

с начальным условием $\bar{x}(0) = (x(0), 1)^T$, где $\bar{\alpha}_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_1)$, $\bar{\gamma}_1 = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_1)$, $\bar{\alpha}_2 = (\alpha_2, 0)^T$, $\bar{\gamma}_2 = (\gamma_2, 0)^T$, $p = \mathrm{diag}(\beta_1 x + \beta_2, \beta_1 x_0)$, $\bar{W} = (W, W)^T$. Ввиду того, что справедливы соотношения

$$F'_t = 0, \quad F'_{\bar{x}} = \left(\frac{1}{x_0}, -\frac{x}{x_0^2}\right), \quad F''_{\bar{x}^2} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x_0^2} \\ -\frac{1}{x_0^2} & \frac{2x}{x_0^3} \end{pmatrix},$$

будем иметь:

$$dy = \left(\frac{\alpha_2}{x_0} - \frac{\beta_1\beta_2}{x_0}\right)dt + \frac{\gamma_2}{x_0}dB + \frac{\beta_2}{x_0}dW.$$

Итак, получили простейшее уравнение для $y(t)$, причем $y(0) = \frac{x(0)}{x_0(0)} = x(0)$. Таким, образом, решение исходного уравнения выражается формулой

$$x(t) = x_0(t)y(t) = x_0(t)\bigg(x(0) + \int_0^t \frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} d\tau + \\ + \int_0^t \frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} dW(\tau) + \int_0^t \frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)} dB(\tau)\bigg),$$

что и требовалось.

Пример 4.1. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$dx(t) = -2t \cdot x(t)dt + t^{1-H}x(t)dB(t), \quad t \geq 0,$$

С учетом предложения 4.1 и замечания 4.2 его решение может быть выражено формулой

$$x(t) = x(0) \exp\left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau)\right).$$

Докажем, что нулевое решение рассматриваемого уравнения устойчиво по вероятности, то есть для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ найдется $\delta > 0$ такая, что для любого решения с начальным значением $x(0)$ таким, что $|x(0)| < \delta$ п.н., выполнено неравенство $\mathbb{P}\{\sup_{t\geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$.

Используя явную фомулу для решения, получим:

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} = \mathbb{P}\left\{\sup_{t\geq 0}\left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau)\right) > \ln\frac{\varepsilon_1}{|x(0)|}\right\}.$$

Применим неравенство Чебышева:

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t\geq 0}\left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau)\right) > \ln\frac{\varepsilon_1}{|x(0)|}\right\} \leq \frac{\mathbb{E}\sup_{t\geq 0}\left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau)\right)}{\ln\varepsilon_1 - \ln|x(0)|}$$

Оценим интеграл, используя неравенство Лав-Янга (см. предложение 1.2):

$$\int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau) \leq C \cdot V_1\left(\tau^{1-H}, [0,t]\right) \cdot V_{1/H}(B(\tau), [0,t]) \leq C t^{1-H} \|B\|_H t^H = Ct\|B\|_H.$$

Здесь $C = \zeta(1 + 1/H)$, ζ — дзета-функция Римана, а в последнем переходе использовалась монотонность функции τ^{1-H} и связь $1/H$-вариации с нормой Гельдера с показателем H [27, с. 170]. Таким образом,

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} \leq \frac{\mathbb{E}\sup_{t\geq 0} t(C\|B\|_H - t)}{\ln\varepsilon_1 - \ln|x(0)|} \leq \frac{\frac{1}{4}C^2\,\mathbb{E}\,\|B\|_H^2}{\ln\varepsilon_1 - \ln|x(0)|}.$$

Потребовав, чтобы правая часть последнего неравенства была меньше ε_2, получим значение δ:

$$|x(0)| < \varepsilon_1 \exp\left(-\frac{C^2\,\mathbb{E}\,\|B\|_H^2}{4\varepsilon_2}\right) =: \delta.$$

4.1.2 Приведение к линейным неоднородным уравнениям

Ограничимся рассмотрением автономных уравнений

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{4.12}$$

а также поиском автономной замены $y = F(x)$, приводящей указанное уравнение к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (\alpha_1 y(t) + \alpha_2)dt + (\beta_1 y(t) + \beta_2)dW(t) + (\gamma_1 y(t) + \gamma_2)dB(t), \quad t \geq 0 \tag{4.13}$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$. Согласно формуле Ито должны выполняться соотношения

$$\alpha_1 F(x) + \alpha_2 = F'(x)f(x) + \frac{1}{2}F''(x)g^2(x), \tag{4.14}$$

$$\beta_1 F(x) + \beta_2 = F'(x)g(x), \tag{4.15}$$

$$\gamma_1 F(x) + \gamma_2 = F'(x)\sigma(x). \tag{4.16}$$

Решая линейные неоднородные по F уравнения (4.15), (4.16), находим функцию F:

$$F(x) = C_\beta \exp\left(\beta_1 \int_0^x \frac{ds}{g(s)}\right) - \frac{\beta_2}{\beta_1} = C_\gamma \exp\left(\gamma_1 \int_0^x \frac{ds}{\sigma(s)}\right) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Подставляя в последнюю формулу значение $x = 0$, легко найти константы $C_\beta = F(0) + \frac{\beta_2}{\beta_1}$ и $C_\gamma = F(0) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$. Далее ограничимся случаем $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$. Тогда на выбор функций g,σ накладывается ограничение

$$\beta_1 \int_0^x \frac{ds}{g(s)} = \gamma_1 \int_0^x \frac{ds}{\sigma(s)},$$

дифференцируя которое, выводим соотношение

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = \frac{\gamma_1}{\beta_1} = \text{const}.$$

Обозначим $G(x) = \int_0^x \frac{ds}{g(s)}$. Подставим выражение для функции $F(x) = C_\beta e^{\beta_1 G(x)} - \frac{\beta_2}{\beta_1}$ в формулу (4.14):

$$\alpha_1 C_\beta e^{\beta_1 G(x)} + \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\beta_1} = C_\beta e^{\beta_1 G(x)} \frac{\beta_1}{g} f +$$
$$+ \left(C_\beta e^{\beta_1 G(x)} \frac{\beta_1^2}{2g^2} - C_\beta e^{\beta_1 G(x)} \frac{\beta_1 g'}{2g^2}\right) g^2,$$

$$e^{\beta_1 G(x)} \left(\beta_1 \left(\frac{f}{g} - \frac{g'}{2}\right) + \frac{\beta_1^2}{2} - \alpha_1\right) = \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\beta_1 C_\beta} \tag{4.17}$$

Обозначим $A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}$ и продифференцируем последнее соотношение. Получим:

$$\beta_1 e^{\beta_1 G(x)} \left(A'(x) + \beta_1 \frac{A(x)}{g(x)} + \left(\frac{\beta_1^2}{2} - \alpha_1 \right) \frac{1}{g(x)} \right) = 0. \tag{4.18}$$

Умножим последнее равенство на $\frac{g(x)}{\beta_1} e^{\beta_1 G(x)}$ и полученное равенство вновь продифференцируем. Будем иметь:

$$(g(x)A'(x))' + \beta_1 A'(x) = 0.$$

Если, к тому же, $A'(x) \neq 0$, то

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = -\beta_1 = \text{const}.$$

Таким образом, необходимо выполнение следующих условий:

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}, \tag{4.19}$$

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = c_1, \tag{4.20}$$

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = c_2, \tag{4.21}$$

для некоторых постоянных $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Обратно, пусть заданные функции $f(x), g(x), \sigma(x)$ удовлетворяют соотношениям (4.19), (4.20), (4.21). Тогда положим $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$, $\beta_1 = -c_1$, $\gamma_1 = c_2\beta_1$ и выберем преобразование $F(x) = e^{\beta_1 G(x)}$. Тогда легко проверить, что соотношения (4.15) и (4.16) выполнены. Осталось подобрать α_1, α_2 так чтобы выполнялось соотношение (4.14). Поскольку $(g(x)A'(x))' + \beta_1 A'(x) = 0$, то величина $g(x)A'(x) + \beta_1 A(x) = c_3$, $c_3 \in \mathbb{R}$ – константа. Значит, $A'(x) + \beta_1 \frac{A(x)}{g(x)} = \frac{c_3}{g(x)}$ и соотношение (4.18) диктует выбор константы $\alpha_1 = \frac{\beta_1^2}{2} + c_3$. Теперь интергрируя соотношение (4.18), получим соотношение (4.17). Согласно (4.18) выражение в левой части (полностью определяемое заданными функциями f, g) будет константой. При указанном выборе эта константа совпадает с α_2. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Уравнение (4.12) с $g(x) \neq 0$, $A'(x) \neq 0$ приводимо к уравнению (4.13) тогда и только тогда, когда найдутся постоянные c_1, c_2 такие, что оказываются выполненными соотношения (4.19), (4.20), (4.21).*

Предложение 4.3. *Уравнение бернуллиевского типа*

$$dx(t) = (\alpha x^n(t) + \beta x(t))dt + \gamma x(t)dW(t) + \delta x(t)dB(t)$$

приводится к линейному неоднородному уравнению.

Доказательство. В данном случае $G(x) = \int_1^x \frac{ds}{\gamma s} = \frac{1}{\gamma}\ln x$, $A(x) = \frac{\alpha}{\gamma}x^{n-1} + \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{2}$, $A'(x) = \frac{\alpha(n-1)}{\gamma}x^{n-2}(t)$, $(g(x)A'(x))' = \alpha(n-1)^2x^{n-2}(t)$, $\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = \gamma(n-1) = c_1$. Выберем преобразование $F(x) = C_\beta e^{-c_1G(x)} = C_\beta x^{1-n}$. Подставляя функцию $F(x)$ в (4.15), найдем значение константы $C_\beta = \frac{1}{1-n}$. Итак, $y = F(x) = \frac{1}{1-n}x^{1-n}$, $x = ((1-n)y)^{1/(1-n)}$.

Уже найдены значения $\beta_1 = -c_1 = \gamma(1-n)$, $\gamma_1 = \delta(1-n)$. Далее имеем:

$$c_3 = \gamma x A'(x) + \beta_1 A(x) = -\beta(n-1) + \frac{\gamma^2(n-1)}{2},$$
$$\alpha_1 = (n-1)\left(-\beta + \frac{\gamma^2 n}{2}\right),$$
$$\alpha_2 = C_\beta e^{\beta_1 G(x)}\left(\beta_1 A(x) + \frac{\beta_1^2}{2} - \alpha_1\right) = \frac{1}{1-n} = -F(x)\gamma x A'(x) = \alpha.$$

Таким образом, исходное уравнение сводится к следующему линейному неоднородному уравнению:

$$dy(t) = \left(\alpha + (n-1)\left(-\beta + \frac{\gamma^2 n}{2}\right)y(t)\right)dt+$$
$$+\gamma(1-n)y(t)dW(t) + \delta(1-n)y(t)dB(t),$$

что и требовалось доказать.

4.1.3 Переход к уравнению Стратоновича

Наряду с уравнением (4.1) рассмотрим соответствующее уравнение Стратоновича

$$dx(t) = (f(t,x(t)) - c(t,x(t)))dt + g(t,x(t)) \circ dW(t) + \sigma(t,x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{4.22}$$

где $c(t,x) = \frac{1}{2}g'_x(t,x)g(t,x)$.

Поскольку, решения смешанных уравнений, вообще говоря, не являются семимартингалами, то понятие интеграла Стратоновича требует дополнительных разъяснений.

Во-первых, отметим, что решения смешанных уравнений (4.1) имеют конечную квадратическую вариацию $[x](t)$ в силу того, что процесс

$$\int_0^t f(s,x(s))ds,\ t \geq 0,$$

абсолютно непрерывен, а процесс

$$\int_0^t \sigma(s,x(s))dB(s),\ t \geq 0,$$

имеет непрерывные по Гельдеру траектории порядка $\kappa > 1/2$. Более того,

$$[x](t) = \int_0^t g^2(s,x(s))ds.$$

Следуя [51], для непрерывных процессов $X(t)$, $Y(t)$ с конечной квадратической вариацией определим прямой, обратный и симметрический стохастические интегралы:

$$\int_0^t Y(s)d^- X(s) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^t Y(s) \frac{X(s+\varepsilon) - X(s)}{\varepsilon} ds,$$

$$\int_0^t Y(s)d^+ X(s) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^t Y(s) \frac{X(s) - X((s-\varepsilon) \vee 0)}{\varepsilon} ds,$$

$$\int_0^t Y(s)d^\circ X(s) = \frac{1}{2}\int_0^t Y(s)d^- X(s) + \frac{1}{2}\int_0^t Y(s)d^+ X(s).$$

Квадратической ковариацией процессов X, Y называется процесс

$$[X,Y](t) = \int_0^t Y(s)d^+ X(s) - \int_0^t Y(s)d^- X(s).$$

Прямой и симметрический стохастические интегралы $\int\limits_0^t Y(s)d^- X(s)$, $\int\limits_0^t Y(s)d^\circ X(s)$ являются расширением интегралов Ито и Стратоновича соответственно на класс непрерывных процессов с конечной квадратической вариацией.

Пусть функция $F(t,x)$ имеет непрерывные частные производные F'_t, F'_x, F''_{x^2}. Тогда процесс $y(t) = F(t,x(t))$ является непрерывным, имеет конечную квадратическую вариацию. Так как стохастические дифференциалы процессов $y(t)$, $W(t)$ имеют вид

$$dy(t) = \left(F'_t(t,x(t)) + F'_x(t,x(t))f(t,x(t)) + \frac{1}{2}F''_{x^2}(t,x(t))g^2(t,x(t))\right)dt+$$

$$+F'_x(t,x(t))g(t,x(t))dW(t) + F'_x(t,x(t))\sigma(t,x(t))dB(t),$$

$$dW(t) = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW(t) + 0 \cdot dB(t),$$

то квадратическая ковариация процессов $y(t)$ и $W(t)$ равна

$$[y, W](t) = \int_0^t F'_x(s, x(s))g(s,x(s))ds.$$

С другой стороны, в силу определения прямого и симметрического стохастических интегралов имеем

$$\int_0^t F(s,x(s)) \circ dW(s) = \int_0^t F(s,x(s))dW(s) + \frac{1}{2}[F(\cdot, x(\cdot)), W(\cdot)](t) =$$

$$= \int_0^t F(s,x(s))dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t F'_x(s, x(s))g(s,x(s))ds.$$

Полагая $F(t,x) = g(t,x)$, заключаем, что процесс $x(t)$ является решением уравнения (4.1) тогда и только тогда, когда процесс $x(t)$ является решением уравнения Стратоновича (4.22).

Замечание 4.3. Легко видеть, что проведенные рассуждения также сохраняют силу в случае многомерного уравнения (4.1) и соответствующего уравнения Стратоновича.

Пример 4.2. Для уравнения

$$dx(t) = x^3(t)dt + x^2(t)dW(t) + x^2(t)dB(t),\ x(0) = x_0,$$

соответствующее уравнение Стратоновича имеет вид

$$dx(t) = x^2(t) \circ dW(t) + x^2(t)dB(t).$$

Последнее уравнение имеет решение

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(W(t) + B(t))},$$

которое является решением и исходного уравнения.

4.2 Дифференциальные уравнения для математических ожиданий и плотностей распределений решений

В этом параграфе рассматриваем автономное уравнение (4.1), т.е.

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0.$$

Будем предполагать, что выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность решений автономного уравнения (4.1).

Через $C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ обозначим множество всех непрерывно дифференцируемых функций $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, имеющих линейный порядок роста. В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты $\tilde{f} = f - \frac{1}{2}g'_x g$, g_j, σ_j $(j = 1,\ldots,d)$ принадлежат множеству $C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$.

Рассмотрим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dz(t) = h(z(t))dt,\ t \in \mathbb{R},$$

где $h = \mathrm{col}(h^1,\ldots,h^d) \in C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, и обозначим через

$$z^y(t) = \alpha_h(y,t) = \mathrm{col}(\alpha^1_h(y,t),\ldots,\alpha^d_h(y,t))$$

решение (единственное) данного уравнения с начальным условием $\alpha_h(y,0)=y$.

Предложение 4.4. *Функция $\alpha_h(y,t)$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^d h^i(y)\frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial y_i},\ j = 1,\ldots,d,\ t \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^d,$$

и начальному условию $\alpha_h(y,0) = y$.

Доказательство. Возьмем произвольные $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \{1,\ldots,d\}$. Тогда

$$\frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial t} = \lim_{r\to 0}\frac{\alpha^j_h(y,t+r) - \alpha^j_h(y,t)}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{\alpha^j_h(\alpha_h(y,r),t) - \alpha^j_h(y,t)}{r} =$$

$$= \sum_{i=1}^d \frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial y_i}\lim_{r\to 0}\frac{\alpha^i_h(y,r) - x_i}{r} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial y_i}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_0^r h^i(\alpha_h(y,s))ds =$$

$$= \sum_{i=1}^d h^i(y)\frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial y_i},$$

что и требовалось доказать.

Из предложения 4.4 вытекает, что $z^y(t) = T_h(t)y$, где $T_h(t){:=}e^{tM_h}$ – C_0-полугруппа на $C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, порожденная дифференциальным оператором $M_h : C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \to C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ действующим по правилу

$$(M_h w)(y) = \mathrm{col}\left(\sum_{i=1}^{d} h^i(y)\frac{\partial w^1}{\partial y_i}, \ldots, \sum_{i=1}^{d} h^i(y)\frac{\partial w^d}{\partial y_i}\right),$$

где $w = \mathrm{col}(w^1, \ldots ,w^d) \in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d),\ y \in \mathbb{R}^d$.

Определение 4.2. Будем говорить, что семейство отображений $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ порождает коммутирующие потоки, если для любых $\alpha,\ \beta \in A$ операторы $T_{h_\alpha}(t_1),\ T_{h_\beta}(t_2)$ перестановочные для любых $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$.

Замечание 4.4. Если $d = 1$, то легко видеть, что семейство $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ порождает коммутирующие потоки тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in A$ найдется постоянная γ_α такая, что $h_\alpha(x) = \gamma_\alpha\varphi(x)$, где $\varphi \in C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Обозначим $\Gamma = \{\tilde{f}\} \cup \{g_j|j = 1,\ldots,d\} \cup \{b_j|j = 1,\ldots,d\}$. Через $x^y(t)$ будем обозначать решение автономного уравнения (4.1) с начальным условием $x(0) = y \in \mathbb{R}^d$.

Определим функцию $F : \mathbb{R}^{3d+1} \to \mathbb{R}^d$ следующим образом:

$$F(y,t,s_1,\ldots,s_d,\tau_1,\ldots,\tau_d) = (T_{\tilde{f}}(t)T_{g_1}(s_1)\ldots T_{g_d}(s_d)T_{\sigma_1}(\tau_1)\ldots T_{\sigma_d}(\tau_d))(y),$$

где $y \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, $s_j, \tau_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1,\ldots,d$).

Предложение 4.5. *Если семейство* Γ *порождает коммутирующие потоки, то*

$$x^y(t) = F(y,t,W^1(t),\ldots,W^d(t),B^1(t),\ldots,B^d(t))$$

п.н. для любого $t \in \mathbb{R}^+$.

Доказательство. Выберем произвольные $y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ и зафиксируем их. Применяя формулу Ито к процессу $x^y(t)$, используя при этом условие коммутирования операторов $T_\alpha(t_1)$, $T_\beta(t_2)$, $\alpha,\ \beta \in \Gamma$, $t_1,\ t_2 \in \mathbb{R}$, получим соотношения

$$F(y,t,W^1(t),\ldots,W^d(t),B^1(t),\ldots,B^d(t)) =$$

$$= F(y,0,\ldots,0) + \int_0^t \left(\frac{\partial F(y,u,W(u),B(u))}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 F(y,u,W(u),B(u))}{\partial s_j^2} \right) du +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F(y,u,W(u),B(u))}{\partial s_j} dW^j(u) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F(y,u,W(u),B(u))}{\partial \tau_j} dB^j(u) =$$

$$= y + \int_0^t f(F(y,u,W(u),B(u)))du + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t g_j(F(y,u,W(u),B(u)))dW^j(u) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_j(F(y,u,W(u),B(u)))dB^j(u).$$

Непрерывность по Гельдеру траекторий процесса $x^y(t)$ вытекает из непрерывной дифференцируемости функции F и непрерывности по Гельдеру с любым показателем $\alpha < H$ траекторий процесса $B(t)$, а также непрерывности по Гельдеру с любым показателем $\alpha < 1/2$ траекторий процесса $W(t)$. Предложение доказано.

Теорема 4.3. *Пусть семейство* Γ *порождает коммутирующие потоки, функция* $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *вместе со своими частными производными до второго порядка включительно непрерывна и имеет полиномиальный порядок роста. Тогда функция* $u_h(y,t) = E(h(x^y(t)))$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{d} f_j(y) \frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{d} g_{ik}(y) g_{jk}(y) \frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y_i \partial y_j} +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{d} H t^{2H-1} \sigma_{ik}(y) \left(\sigma_{jk}(y) \frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial \sigma_{jk}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y_j} \right),\ t > 0,\ y \in \mathbb{R}^d,$$

и начальному условию $u_h(y,0) = h(y),\ y \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Определим функцию $G_d : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$G_d(y,\tau_d) = h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)),\ y \in \mathbb{R}^d,\ \tau_d \in \mathbb{R}.$$

Применяя формулу Ито к процессу $G_d(y,B^d(t))$, $t \in \mathbb{R}^+$, получим соотношение

$$G_d(y,B^d(t)) = G_d(y,0) + \int_0^t \frac{\partial G_d(y,B^d(s))}{\partial \tau_d} \diamond dB^d(s) + \int_0^t H s^{2H-1} \frac{\partial^2 G_d(y,B^d(s))}{\partial \tau_d^2} ds, \tag{4.23}$$

где стохастический интеграл в правой части соотношения (4.23) – интеграл Вика-Ито-Скорохода [18].

Используя предложение 4.4, выразим частную производную $\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial \tau_d^2}$ через частные производные $\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i y_j}$, $\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i}$. Получаем

$$\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial \tau_d} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial \tau_d} = \sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \sigma^i_d(y) \frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial \tau_d^2} = \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \frac{\partial^2 h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j \partial y_k} \sigma^i_d(y) \sigma^l_d(y) \frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i} \frac{\partial \alpha^k_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_l} +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{d} \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \sigma^i_d(y) \left(\frac{\partial \sigma^k_d(y)}{\partial y_i} \frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_k} + \sigma^k_d(y) \frac{\partial^2 \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_k y_i} \right),$$

$$\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i y_l} = \sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial^2 h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i} \frac{\partial \alpha^k_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_l} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \frac{\partial^2 \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i \partial y_l}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial \tau_d^2} = \sum_{i,l=1}^{d} \frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i y_l} \sigma^i_d(x) \sigma^l_d(y) + \sum_{i,k=1}^{d} \frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial y_k} \sigma^i_d(y) \frac{\partial \sigma^k_d(y)}{\partial y_i} =$$

$$= (M^2_{\sigma_d} G_d(\cdot,\tau_d))(y). \tag{4.24}$$

Обозначим $\psi_d(y,t) = EG_d(y,B^d(t))$. Тогда из соотношений (4.23), (4.24), теоремы Фубини и правила Лейбница вытекает равенство

$$\psi_d(y,t) = \psi_d(y,0) + \int_0^t H s^{2H-1} (M^2_{\sigma_d} \psi_d(\cdot,s))(y) ds. \tag{4.25}$$

Из соотношения (4.25) вытекает справедливость соотношения

$$\frac{\partial \psi_d(\cdot,t)}{\partial t} = H t^{2H-1} M^2_{\sigma_d} \psi_d(\cdot,t). \tag{4.26}$$

Определим функцию $G_{d-1} : \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ равенством

$$G_{d-1}(y,\tau_{d-1},t) = \psi_d(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y),t),\ y \in \mathbb{R}^d,\ \tau_{d-1} \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+.$$

Применяя формулу Ито к процессу $G_{d-1}(y,B^{d-1}(t),t)$, получим соотношение

$$G_{d-1}(y,B^{d-1}(t),t) = G_{d-1}(y,0,0) + \int_0^t \frac{\partial G_{d-1}(y,B^{d-1}(s),s)}{\partial \tau_{d-1}} \diamond dB^{d-1}(s) +$$
$$+ \int_0^t \left(\frac{\partial G_{d-1}(y,B^{d-1}(s),s)}{\partial \tau_d} + Hs^{2H-1} \frac{\partial^2 G_{d-1}(y,B^{d-1}(s),s)}{\partial \tau_{d-1}^2} \right) ds. \qquad (4.27)$$

Отметим, что для каждых $y \in \mathbb{R}^d$, $\tau_{d-1} \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^+$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 G_{d-1}(y,\tau_{d-1},s)}{\partial \tau_{d-1}^2} = (M^2_{\sigma_{d-1}} G_{d-1}(\cdot,\tau_{d-1},s))(y). \qquad (4.28)$$

Действительно, в силу правила Лейбница достаточно проверить, что для любых $y \in \mathbb{R}^d$, $\tau_{d-1} \in \mathbb{R}$, $\tau_d \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau_{d-1}^2} h(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1}) T_{\sigma_d}(\tau_d)(x)) = (M^2_{\sigma_{d-1}} h(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1}) T_{\sigma_d}(\tau_d)(\cdot))(y). \qquad (4.29)$$

Для каждого фиксированного $\tau_d \in \mathbb{R}$ определим функцию $\omega_{\tau_d} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ такую, что

$$\omega_{\tau_d}(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y)) = h(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1}) T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)).$$

Теперь применяя рассуждения, которыми была доказана формула (4.24), заменяя при этом функцию $G_d(y,\tau_d)$ функцией $\omega_{\tau_d}(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y))$, устанавливаем справедливость соотношения (4.29), а вместе с ним и равенства (4.28).

Обозначим $\psi_{d-1}(y,t) = EG_{d-1}(y,B^{d-1}(t),t)$, тогда с помощью соотношений (4.26), (4.27), (4.28), теоремы Фубини и правила Лейбница, получаем равенство

$$\psi_{d-1}(y,t) = \psi_{d-1}(y,0) + \int_0^t ((Hs^{2H-1} M^2_{\sigma_d} + Hs^{2H-1} M^2_{\sigma_{d-1}}) \psi_{d-1})(\cdot,s)(y) ds. \qquad (4.30)$$

Из соотношения (4.30) получаем, что

$$\frac{\partial \psi_{d-1}(\cdot,t)}{\partial t} = (Ht^{2H-1} M^2_{\sigma_d} + Ht^{2H-1} M^2_{\sigma_{d-1}}) \psi_{d-1}(\cdot,t). \qquad (4.31)$$

Далее рассматриваем функцию $G_{d-2}(y,\tau_{d-2},t) = \psi_{d-1}(T_{b_{d-2}}(\tau_{d-2})(y),t)$, применяем формулу Ито к процессу $G_{d-2}(y,B^{d-2}(t),t)$, получим уравнение, аналогичное уравнению (4.31) для функции $\psi_{d-2}(y,t) = EG_{d-2}(y,\tau_{d-2},t)$, и так далее. Тем самым прийдем к следующему уравнению для функции $u_h(y,t) = Eh(F(y,t,W^1(t),\ldots,W^d(t),B^1(t),\ldots,B^d(t)))$:

$$\frac{\partial u_h(\cdot,t)}{\partial t} = \left(M_{\tilde{f}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} M_{g_j}^2 + \sum_{j=1}^{d} Ht^{2H-1}M_{\sigma_j}^2\right)u_h(\cdot,t).$$

Теорема доказана.

Пример 4.3. Покажем существенность условия коммутирования потоков, порожденных функциями из семейства Г, в теореме 4.3. Рассмотрим линейное стохастическое уравнение

$$dx(t) = x(t)dt + dB(t) \tag{4.32}$$

с начальным условием

$$x(0) = y \in \mathbb{R}, \tag{4.33}$$

где $B(t)$ – одномерное дробное броуновское движение с показателем Харста $H \in (1/2,1)$. Решение $x^y(t)$ задачи Коши (4.32), (4.33) задается формулой [55]

$$x^y(t) = ye^t + \int_0^t e^{t-s}dB(s).$$

Положим $h(y) = y^2$, тогда

$$u_h(y,t) = y^2e^{2t} + e^{2t}2H(2H-1)\int_0^t e^{-s}\int_0^s e^{-v}(s-v)^{2H-2}dvds =$$

$$= y^2e^{2t} + e^{2t}H(2H-1)\int_0^t e^{-u}u^{2H-2}du - H(2H-1)\int_0^t e^{u}u^{2H-2}du =$$

$$= y^2e^{2t} + H\int_0^t (e^{2t-s} + e^s)s^{2H-1}ds.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial t} = 2y^2e^{2t} + 2He^tt^{2H-1} + 2He^{2t}\int_0^t e^{-s}s^{2H-1}ds,$$

$$y\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y} + Ht^{2H-1}\frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y^2} = 2y^2e^{2t} + 2e^{2t}Ht^{2H-1}.$$

Так как

$$\int_0^t e^{-s}s^{2H-1}ds = -e^{-t}t^{2H-1} + (2H-1)\int_0^t e^{-s}s^{2H-2}ds < -e^{-t}t^{2H-1} + t^{2H-1}$$

для любых $t > 0$, то функция $u_h(y,t)$ не удовлетворяет уравнению из теоремы 4.3 ни при каких $t > 0$, $y \in \mathbb{R}$. Отметим, что операторы $T_f(t_1)(y) = e^{t_1}y$, $T_\sigma(t_2)(y) = t_2 + y$ не являются перестановочными.

Пример 4.4. Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$dx(t) = ax(t)dt + bx(t)dB(t) + cx(t)dW(t), \tag{4.34}$$

с начальным условием

$$x(0) = y \in \mathbb{R}. \tag{4.35}$$

Пусть $h(y) = y^r$, $r \geq 2$, $u_h(y,t) = Eh(x^y(t))$, где $x^y(t)$ – решение задачи Коши (4.34), (4.35). Легко видеть, что условия теоремы 4.3 выполняются, и функция $u_h(y,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y}y(a+b^2Ht^{2H-1}) + \frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y^2}y^2(c^2/2+b^2Ht^{2H-1}),\ t > 0,\ y \in \mathbb{R},$$

с начальным условием

$$u_h(y,0) = y^r.$$

Теорема 4.4. *Пусть семейство* Γ *порождает коммутирующие потоки, решение* $x^y(t)$ *автономного уравнения* (4.1) *с начальным условием* $x(0) = y$ *имеет плотность распределения* $p(t,y,z)$, *функции* $f(z)$, $g(z)$, $\sigma(z)$, $p(t,y,z)$ *являются достаточно гладкими и ограниченными. Тогда функция* $p(t,y,z)$ *удовлетворяет равенству*

$$\frac{\partial p(t,y,z)}{\partial t} = -\sum_{j=1}^d \frac{\partial(f_j(z)p(t,y,z))}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^d \frac{\partial^2(g_{ik}(z)g_{jk}(z)p(t,y,z))}{\partial z_i \partial z_j} +$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^d Ht^{2H-1}\left(\frac{\partial^2(\sigma_{ik}(z)\sigma_{jk}(z)p(t,y,z))}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\partial(\sigma_{ik}(z)\frac{\partial \sigma_{jk}(z)}{\partial z_i}p(t,y,z))}{\partial z_j}\right),$$

$$t > 0,\ y,z \in \mathbb{R}^d.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную функцию $h(z)$ с компактным носителем, имеющую ограниченные и непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Обозначим через A_t оператор, действующий по правилу

$$(A_t h)(z) = \sum_{j=1}^{d} f_j(z)\frac{\partial h(z)}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{d} g_{ik}(z)g_{jk}(z)\frac{\partial^2 h(z)}{\partial z_i \partial z_j} +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{d} Ht^{2H-1}\sigma_{ik}(z)\left(\sigma_{jk}(z)\frac{\partial^2 h(z)}{\partial z_i \partial z_j} + \frac{\partial \sigma_{jk}(z)}{\partial z_i}\frac{\partial h(z)}{\partial z_j}\right),\ t > 0,\ z \in \mathbb{R}^d.$$

Используя соотношение

$$u_h(y,t) = \int_{\mathbb{R}^d} h(z)p(t,y,z)dz,$$

теорему 4.3 и правило Лейбница, получаем равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(h(z)\frac{\partial p(t,y,z)}{\partial t} - p(t,y,z)(A_t h)(z)\right)dz = 0. \tag{4.36}$$

Из соотношения (4.36) вытекает равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(h(z)\frac{\partial p(t,y,z)}{\partial t} - h(z)(A_t^* p(t,y,\cdot))(z)\right)dz = 0, \tag{4.37}$$

где A_t^* – сопряженный оператор к оператору A_t. Применяя формулу интегрирования по частям, легко видеть, что

$$(A_t^*\varphi)(z) = -\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial(f_j(z)\varphi(z))}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{d}\frac{\partial^2(g_{ik}(z)g_{jk}(z)\varphi(z))}{\partial y_i \partial y_j} +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{d} Ht^{2H-1}\left(\frac{\partial^2(\sigma_{ik}(z)\sigma_{jk}(z)\varphi(z))}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\partial(\sigma_{ik}(z)\frac{\partial \sigma_{jk}(z)}{\partial z_i}\varphi(z))}{\partial z_j}\right). \tag{4.38}$$

Теперь из соотношений (4.37), (4.38) и плотности множества функций с компактным носителем, имеющих непрерывные органиченные производные всех порядков, в $L_1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведено исследование асимптотического поведения решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновским движениями в конечномерных, а также сепарабельных гильбертовых пространствах и получены следующие основные результаты:

1. Доказана теорема 2.3, дающая достаточное условие асимптотической устойчивости по вероятности слабого нулевого решения неавтономной системы (2.5) с разрывными коэффициентами, исходя из равномерной экспоненциальной устойчивости слабого нулевого решения соответствующей однородной системы (2.6). Приведен пример, иллюстрирующий применение доказанной теоремы. Указанный результат был получен в работе 1–А и изложен главе 2.
2. Доказана теорема 2.4 о притяжении к нулю слабых решений нелинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений (2.21) в гильбертовых пространствах с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица. Приведен пример, иллюстрирующий применение доказанной теоремы. Данный результат был получен в работе 2–А и изложен главе 2.
3. Доказана теорема 3.3 о логарифмической непрерывной зависимости в среднем от начальных условий и правых частей решений стохастических дифференциальных уравнений (3.1), (3.10) со сносом и дробным броуновским движением с различными индексами Харста, большими $1/3$. Указанный результат был получен в работе 3–А и изложен главе 3.
4. Доказана теорема 3.4, в которой получено асимптотическое разложение (3.57) в окрестности нуля для математического ожидания от функционала от решения уравнения (3.1) со сносом и дробным броуновским движением с различными индексами Харста, большими $1/3$. Получено уравнение (3.100), являющееся обобщением обратного уравнения Колмогорова для решения уравнения (3.1) с указанным дробным броуновским движением в коммутативном случае. Приведенные результаты, а также другие связанные с ними результаты, изложенные в главе 3, были получены в работах 4–А, 5–А.

5. Получены методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа (4.1), основанные на приведении данного уравнения к простейшему или линейному неоднородному (теорема 4.2), или к уравнению Стратоновича (раздел 4.1.3). Указанные результаты были получены в работе [6–А] и изложены в главе 4.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Васьковский, М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием со стандартным и дробным броуновскими движениями / М.М. Васьковский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер фіз.-мат. навук. — 2015. — №. 1. — С. 22–34.
2. *Васьковский, М.М.* Существование слабых решений стохастических эволюционных функциональных уравнений параболического типа с измеримыми локально ограниченными коэффициентами / М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 8. — С. 1080–1095.
3. *Васьковский, М.М.* Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 2. — С. 160–173.
4. *Ватанабэ, С.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. — М. : Наука, 1986. — 448 с.
5. *Гихман, И.И.* Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — М. : Наука, 1977. — 568 с.
6. *Колмогоров, А.Н.* Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. — 1940. — Т. 26, № 2. — С. 115–118.
7. *Леваков, А.А.* Исследование устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений с помощью знакопостоянных функций Ляпунова / А.А. Леваков // Дифф. уравн. — 2011. — Т. 47, № 9. — С. 1258–1267.
8. *Леваков, А.А.* Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1011–1019.
9. *Леваков, А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения / А.А. Леваков. — Минск : БГУ, 2009. — 231 с.
10. *Леваков, А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения / А.А. Леваков, М.М. Васьковский. — Минск : БГУ, 2019. — 495 с.
11. *Леваков, А.А.* Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. —

2015. — Т. 51, № 8. — С. 997–1003.
12. *Леваков, А.А.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 2. — С. 187–200.
13. *Леваков, А.А.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 8. — С. 1060–1076.
14. *Оксендаль, Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. — М. : Мир, 000 «Издательство АСТ», 2003. — 408 с.
15. *Филиппов, А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М. : Наука, 1985. — 223 с.
16. *Царьков, Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений/ Е.Ф. Царьков. — Рига : Зинатне, 1989. — 421 с.
17. *Baudoin, F.* Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions / F. Baudoin, L. Coutin // Stochastic Processes and their Applications — 2007. — Vol. 117, № 5. — P. 550–574.
18. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications / F. Biagini [et al.]. — London : Springer-Verlag, 2008. — 330 p.
19. *Cheridito, P.* Regularizing fractional Brownian motion with a view towards stock price modeling : a dissertation ... doctor of mathematics / P. Cheridito. — Zürich, 2001. — 121 p.
20. *Cheridito, P.* Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter h in (0, 1/2) / P. Cheridito, D. Nualart // Annales de I Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2005. — Vol. 41, № 6. — P. 1049–1081.
21. *Coppel, W.A.* Dichotomies in Stability Theory / W.A. Coppel. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1978. — 102 p. — (Lecture Notes in Mathematics ; № 629).
22. *Coutin, L.* Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions / L. Coutin, Z. Qian // Probability Theory Related Fields. — 2002. — Vol. 122, № 1. — P. 108–140.
23. *Filipovic, D.* Consistency problems for Heath-Jarrow-Morton interest rate

models / D. Filipovic. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2001. — 138 p.
24. *Gard, T.C.* Introduction to stochastic differential equations / T.C. Gard. — New York ; Basel : Marcel Dekker Inc., 1988. — 234 p.
25. *Friz, P.* A Course on Rough Paths with an introduction to regularity structures / P. Friz, M. Hairer. — Cham : Springer International Publishing AG, 2014. — 262 p.
26. Large deviations and asymptotic methods in finance / P. Friz [et al.]. — Cham : Springer International Publishing AG, 2015. — 590 p.
27. *Friz, P.* Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications / P. Friz, N. Victoir. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 670 p.
28. The Jain-Monrad criterion for rough paths and applications to random Fourier series and non-Markovian Hörmander theory / P. Friz [et al.] // The Annals of Probability. — 2016. — Vol. 44, № 1. — P. 684–738.
29. *Garrido-Atienza, M.J.* Asymptotical stability of differential equations driven by Hölder-continuous paths / M.J. Garrido-Atienza, A. Neuenkirch, B. Schmalfuss // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 2017. — Vol. 30, № 1. — P. 359–377.
30. *Gubinelli, M.* Controlling rough paths / M. Gubinelli // Journal of Functional Analysis. — 2004. — Vol. 216, № 1. — P. 86–140.
31. *Gubinelli, M.* Ramification of rough paths / M. Gubinelli // Journal of Differential Equations. — 2010. — Vol. 248, № 4. — P. 693–721.
32. *Guerra, J.* Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion / J. Guerra, D. Nualart // Stochastic Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 26, № 5. — P. 1053–1075.
33. *Hairer, M.* Geometric versus non-geometric rough paths / M. Hairer, D. Kelly // Annales de I Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2015. — Vol. 51, № 1. — P. 207–251.
34. *Ichikawa, A.* Stability of Semilinear Stochastic Evolution Equations / A. Ichikawa // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1982. — Vol. 90, № 1. — P. 12–44.
35. *Ilchmann, A.* Sufficient conditions for stability of linear time-varying systems / A. Ilchmann, D.H. Owens, D. Prätzel-Wolters // Systems & Control Letters. — 1987. — Vol. 9, № 2. — P. 157–163.
36. *Khasminskii, R.* Stochastic stability of differential equations / R. Khasminskii. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2012. — 342 p.

37. *Kleptsyna, M.L.* General approach to filtering with fractional Brownian noises application to linear systems / M. Kleptsyna, A. Le Breton, M.-C. Roubaud // Stochastics and Stochastic Reports. — 2000. — Vol. 71, № 1–2. — P. 119–140.
38. *Kubilius, K.* The existence and uniqueness of the solution of an integral equation driven by a p-semimartingale of special type / K. Kubilius // Stochastic Processes and their Appl. — 2002. — Vol. 98, № 2. — P. 289–315.
39. *Liu, K.* On stability for a class of semilinear stochastic evolution equations / K. Liu // Stochastic Processes and their Appl. — 1997. — Vol. 70, № 2. — P. 219–241.
40. *Liu, K.* Stability of infinite dimensional stochastic differential equations with applications / K. Liu. — New York : Chapman and Hall/CRC, 2005. — 312 p.
41. *Lyons, T.* Differential equations driven by rough signals / T. Lyons // Revista Matemática Iberoamericana. — 1998. — Vol. 14, № 2. — P. 215–310.
42. *Mandelbrot, B.B.* Fractional Brownian Motions, fractional noises and applications / B.B. Mandelbrot, J.W. van Ness // SIAM Review. — 1968. — Vol. 10, № 4. — P. 422–437.
43. *Mishura, Y.S.* Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index H > 1/2 / Y.S. Mishura, G.M. Shevchenko // Communications in Statistics – Theory and Methods. — 2011. — Vol. 40, № 19–20. — P. 3492–3508.
44. *Mishura, Y.S.* Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes / Y.S. Mishura. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. — 398 p.
45. Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations / A. Neuenkirch [et al.] // Annales de I Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2009. — Vol. 45, № 1. — P. 157–174.
46. *Nualart, D.* Differential equations driven by fractial Brownian motion / D. Nualart, A. Răsçanu // Collectanea Mathematica. — 2002. — Vol. 53, № 1. — P. 55–81.
47. *Pazy, A.* Semigroups of linear operators and applications to Partial Differential Equations / A. Pazy. — New York : Springer-Verlag, 1983. — 282 p.
48. *Prato, G.D.* A note on stochastic convolution / G. Da Prato, J. Zabczyk // Stochastic Analysis and Appl. — 1992. — Vol. 10, № 2. — P. 143–153.
49. *Prato, G.D.* Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. — Cambridge : Cambridge university press, 1992. — 449 p.

50. *Rogers, L.C.G*. Diffusions, Markov Processes, and Martingales: Volume 1, Foundations / L.C.G. Rogers, D. Williams. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000. — 410 p.
51. *Russo F.* Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes / F. Russo, P. Vallois // Stochastics and Stochastic Reports. — 2000. – Vol. 70, № 1-2. — P. 1–40.
52. *Shevchenko, G.M.* Mixed stochastic delay differential equations / G.M. Shevchenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2014. — № 89. – P. 181–195.
53. *Taniguchi, T.* Almost sure exponential stability for stochastic partial functional differential equations / T. Taniguchi // Stochastic Analysis and Appl. — 1998. — Vol. 16, № 5. — P. 965–975.
54. *Taniguchi, T.* Existence, uniqueness, and asymptotic behavior of mild solutions to stochastic functional differential equations in Hilbert spaces / T. Taniguchi, K. Liu, A. Truman // Journal of Differential Equations. — 2002. — Vol. 181, № 1. — P. 72–91.
55. *Vyoral, M.* Kolmogorov equation and large-time behaviour for fractional Brownian motion driven linear SDE's / M. Vyoral. // Applications of Mathematics. — 2005. — Vol. 50, № 1. — P. 63–81.
56. *Young, L.C.* An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration / L.C. Young // Acta Math. — 1936. — Vol. 67, № 1. — P. 251–282.
57. *Zähle, M.* Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I / M. Zähle // Probability Theory and Related Fields. — 1998. — Vol. 111, № 3. — P. 333–374.

Список публикаций автора работы

Статьи в научных журналах (зарубежных и из перечня ВАК)

1–А. *Васьковский, М.М.* Исследование устойчивости решений неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами с помощью метода функций Ляпунова / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный, И.В. Качан // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1 : физ., мат., информ. — 2015. — №3. — С. 117–125.

2–А. *Васьковский, М.М.* Устойчивость решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с локально липшициевыми коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 866–880.
3–А. *Качан, И.В.* Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер фiз.-мат. навук. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 193–209.
4–А. *Васьковский, М.М.* Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. — 2018. — Т. 62, № 4. — С. 398–405.
5–А. *Vaskouski, M.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 / M. Vaskouski, I. Kachan // Stochastic Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 36, № 6. — P. 909–931.
6–А. *Васьковский, М.М.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа / Васьковский М.М., Качан И.В. // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 135–149.

Депонированные отчеты

7–А. Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах : отчет о НИР (заключительный) / БГУ ; руководитель М.М.Васьковский, исполнители : Я.Б. Задворный, И.В. Качан. — Минск, 2016. — 122 с. — № ГР 20142883.

Статьи в сборниках трудов международных научных конференций

8–А. *Васьковский, М.М.* Аналог формулы Ито для стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие 1/3 / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф., г. Пенза, Россия, 4–6 декабря 2017 г. / Пензенский гос. ун-т. ; под ред. И. В. Бойкова. — Пенза, 2017. — С. 12–16.

9–А. *Качан, И.В.* Непрерывная зависимость от начальных условий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан, М.М. Васьковский // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация : материалы Междунар. научн. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения академ. Е.А. Барбашина, Минск, 24-29 сентября 2018 г. / БГУ. — Минск, 2018. — С. 117–118.

Тезисы докладов международных научных конференций

10–А. *Васьковский, М.М.* Теорема об устойчивости по линейному приближению решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ-2015) : тез. докл. 8-го междунар. научн. семинара (воркшопа), ОСК «Стайки», 14-19 сент. 2015. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2015. — С. 24.

11–А. *Качан, И.В.* Экспоненциальная устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / И.В. Качан // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : тез. докл. междунар. матем. конф., Минск, 7-10 дек., 2015. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2015. — С. 34.

12–А. *Васьковский, М.М.* Устойчивость стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах / М.М. Васьковский, И.В. Качан // XII Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. конф., Минск, 5-10 сент. 2016 г. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2016. — С. 14–15.

13–А. *Качан, И.В.* Существование решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные показатели Харста, большие 1/3 / И.В. Качан // Еругинские чтения–2017 : тез. докл. XVII междунар. научн. конф. по дифф. уравнениям, Минск, 16-20 мая 2017 г. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2017. — С. 48–49.

14–А. *Васьковский, М.М.* Аналог уравнений Колмогорова для математических ожиданий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Еругинские чтения–2018 : тез. докл. XVIII междунар. научн. конф. по дифф. уравнениям, Гродно, 15-18 мая 2018 г. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2018. — С. 85–86.