



БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра высшей математики

Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста

Качан Илья Вадимович

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент

Васьковский Максим Михайлович

Минск, 2019



Введение

Стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t, \omega) = f(t, \omega, X(t, \omega))dt + g(t, \omega, X(t, \omega))dB(t, \omega),$$

где $B(t, \omega)$ — стандартное или дробное броуновское движение.

Интегральный критерий

Траектории процесса $B(t)$ недифференцируемы, поэтому уравнение понимают в интегральном смысле:

$$X(t, \omega) = X(s, \omega) + \int_s^t f(\tau, \omega, X(\tau, \omega))d\tau + \int_s^t g(\tau, \omega, X(\tau, \omega))dB(\tau, \omega).$$

Интегралы по дробному броуновскому движению

- Потраекторные интегралы (Янга, Губинелли).
- Стохастические интегралы (Ито, Стратоновича, θ - и μ -интегралы) для стандартного броуновского движения.
- Интегралы Вика-Ито-Скорехода.



Введение: приложения

Уравнения с дробными броуновскими движениями

Некоторые сферы применения: физика, финансовая математика.

- М. Клепцына, А. Ле Бретон и М.-К. Рубо (2000): описание сигнальных процессов в фильтрационных системах.
- М. Сале (1998), П. Черидито (2001): моделирование движения цен акций и облигаций.

Монографии: Ю.С. Мишура (2008).

Уравнения со стандартным броуновским движением

Некоторые сферы применения: обобщение задач математической физики, фильтрации, нейрофизиологии, генетики популяций, финансовой математики.

Монографии: Дж. Да Прато, Е. Забчик (1992), Б. Оксендаль (2003).

Глава 2: объект исследования

Обозначения

Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) , на котором определены независимые одномерные дробные броуновские движения $B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)}$ с индексами Харста $H_1, \dots, H_d \in (1/3, 1)$.

Введем обозначение $B_t = (B_t^{(0)}, \dots, B_t^{(d)})^\top$ для $(d+1)$ -мерного дробного броуновского движения, в котором $B_t^{(0)} = t$. Пусть также $H_0 = 1$. Пусть H_{\min} — значение наименьшего из индексов Харста H_i , $i = 0, \dots, d$.

Выберем и зафиксируем некоторое $H \in (1/3, 1/2]$ такое, что $H < H_{\min}$.

Объект исследования

Стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = f(X_t)dB_t, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

в котором f — $(n \times (d+1))$ -матрица, столбцами которой являются векторы $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, d$.

Глава 2: существование решений

Пусть U, V — конечномерные банаховы пространства.
Через $C_b^k(V, U)$ будем обозначать пространство функций $\varphi: V \rightarrow U$, имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка k включительно с нормой $\|\varphi\|_{C_b^k} = \sum_{j=0}^k \|D^j \varphi\|_\infty$, где $\|D^j \varphi\|_\infty = \max_{x \in V} |D^j \varphi(x)|$.

Теорема 2.1.

Если $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, то для любого $x \in \mathbb{R}^n$ уравнение (1) имеет единственное решение с начальным условием $X_0 = x$, причем $X' = f(X)$, $(f(X), (f(X))') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0, T], \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ п.н. Более того, если $H_i > H^* \geq 1/2$ для всех $i = 0, \dots, d$, то справедливо включение $X \in C^{H^*}([0, T], \mathbb{R}^n)$ п.н. и интеграл в определении решения уравнения (1) является потраекторным интегралом Янга.



Глава 2: основные результаты

Теорема 2.2. [5].

Пусть $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, $g \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Тогда для любых $s, t \in [0, T]$ п.н. справедлива следующая формула замены переменных:

$$g(X_t) = g(X_s) + \int_s^t Dg(X_r)f(X_r)dB_r, \quad s, t \in [0, T], \quad (2)$$

где X_t — решение уравнения (1).

Наряду с уравнением (1) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\tilde{X}_t = \tilde{f}(\tilde{X}_t)dB_t, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

в котором $\tilde{f} - (n \times (d+1))$ -матрица, столбцами которой являются векторы $\tilde{f}_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, d$.



Глава 2: основные результаты

Теорема 2.3. [3].

Пусть $f, \tilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, причем функция \tilde{f} такова, что $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$.

Обозначим через X_t, \tilde{X}_t решения уравнений (1), (3) с начальными условиями $X_0 = \xi, \tilde{X}_0 = \tilde{\xi}$ соответственно. Тогда:

1) почти наверное справедлива следующая оценка

$$\|X - \tilde{X}\|_H \leq C \left(|\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right) \quad (4)$$

для некоторой случайной величины $C = C(H, T, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$.

Причем C может быть выбрана не зависящей от T , если $T \in (0, 1]$;

2) имеет место следующее неравенство

$$\mathbb{E}(\ln \|X - \tilde{X}\|_H) \leq C + \ln(\mathbb{E}|\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}), \quad (5)$$

где $C = C(H, H_1, \dots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}) \in \mathbb{R}$ — константа, вообще говоря, зависящая от $H, H_1, \dots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}$.



Глава 3: объект исследования и обозначения

Объект исследования

Стохастическое дифференциальное уравнение (1).

Обозначения

Через X_t^x будем обозначать решение уравнения (1) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$.

$$\Delta^k[0, t] = \{(t_1, \dots, t_k) \in [0, t]^k : 0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq t\} \quad (6)$$

$$\int_{\Delta^k[0, t]} dB^{(l_k)} = \int_0^t \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_2} dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} dB_{t_k}^{(i_k)}, \quad (7)$$

$$l_k = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_d^k := \{0, \dots, d\}^k, \quad (8)$$

$$D_f^{(i)} = \sum_{j=1}^n f_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i \in \{0, \dots, d\} \quad D_f^{(l_k)} = D_f^{(i_1)} \dots D_f^{(i_k)}, \quad (9)$$

$$P_t g(x) = \mathbb{E} g(X_t^x), \quad t \geq 0. \quad (10)$$



Глава 3: основной результат

Теорема 3.1. [4, 5].

Пусть $f \in C_b^{N+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, $g \in C_b^{N+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда для любого фиксированного $H \in (1/3, 1/2]$ такого, что $H < H_{\min} = \min_{i=0, \dots, d} H_i$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$P_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \{0, \dots, d\}^k} t^{|H_{I_k}|} \cdot (D_f^{(I_k)} g)(x) \mathbb{E} \left(\int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)} \right) + O(t^{(N+1)H}), \quad (11)$$

при $t \rightarrow 0$, где $|H_{I_k}| = H_{i_1} + H_{i_2} + \dots + H_{i_k}$ — сумма индексов Харста дробных броуновских движений $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \dots, B^{(i_k)}$.



Глава 3: пример

Рассмотрим следующее одномерное уравнение:

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/2, 1)$, $b, \sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функции класса C_b^4 .

Применение теоремы 3.1

Пусть $g \in C_b^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, тогда справедливо асимптотическое разложение следующего вида:

$$\begin{aligned} P_t g(x) = & g(x) + t b(x) Dg(x) + \frac{1}{2} t^2 \left(b(x) D b(x) Dg(x) + b^2(x) D^2 g(x) \right) + \\ & + \frac{1}{2} t^{2H} \left(\sigma(x) D \sigma(x) Dg(x) + \sigma^2(x) D^2 g(x) \right) + O \left(t^{3H} \right). \end{aligned}$$



Глава 3: уравнения Колмогорова

Коммутативный случай

Предположим, что компоненты $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ правой части уравнения (1) являются функциями класса $C_b^{d+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такими, что справедливо равенство $D_f^{(i)} \circ D_f^{(j)} = D_f^{(j)} \circ D_f^{(i)}$, для любых $i, j = 0, \dots, d$.

Теорема 3.3

Для любой функции $g \in C_b^{d+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\mathbb{E}(g(X_t^x)) = \left(\exp \left(t D_f^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d t^{2H_i} (D_f^{(i)})^2 \right) g \right) (x).$$

Другими словами, функция $\varphi(t, x) = \mathbb{E}(g(X_t^x))$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_f^{(0)} \varphi + \sum_{i=1}^d H_i t^{2H_i-1} (D_f^{(i)})^2 \varphi, \quad (12)$$

с начальным условием

$$\varphi(0, x) = g(x). \quad (13)$$



Глава 3: уравнения Колмогорова, пример

Рассмотрим одномерное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = \sin X_t dt + 2H^{-1} \sin X_t dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/3, 1)$. Пусть также задано начальное условие $X_0 = x \in \mathbb{R}$.

Применение теоремы 3.3

Функция $\varphi(t, x) = \mathbb{E} g(X_t^x)$ будет являться решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\sin x + t^{2H-1} \sin 2x \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4t^{2H-1}}{H} \sin^2 x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

с начальным условием $\varphi(0, x) = g(x)$.

Глава 4: объект исследования

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) заданы d -мерное стандартное броуновское движение $W(t)$ и d -мерное дробное броуновское движение $B(t)$ с показателем Харста $H \in (1/2, 1)$.

Объект исследования

Стохастическое дифференциальное уравнение смешанного типа

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (14)$$

где $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $\sigma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ — детерминированные функции.



Глава 4: основные результаты

Простейшее уравнение

Будем рассматривать одномерное уравнение (14), считая, что $d = 1$.
Вместе с ним рассмотрим простейшее уравнение

$$dy(t) = u(t)dt + v(t)dW(t) + b(t)dB(t), \quad t \geq 0. \quad (15)$$

Решение простейшего уравнения

Решение уравнения (15) выражается следующей формулой:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)dW(\tau) + \int_0^t b(\tau)dB(\tau), \quad t \geq 0.$$



Глава 4: основные результаты

Предположим, что существуют некоторые функции $r(t)$, $q(t)$ такие, что

$$g(t, x) \left(\frac{g'_t(t, x)}{g^2(t, x)} + \left(\frac{f(t, x)}{g(t, x)} \right)'_x + \frac{1}{2} g''_{x^2}(t, x) \right) = r(t), \quad (16)$$

$$\frac{\sigma(t, x)}{g(t, x)} = q(t). \quad (17)$$

Теорема 4.1. [6].

Уравнение (14) с функцией $g(t, x) \neq 0$ приводимо к уравнению (15) с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно x преобразования $y = F(t, x)$ тогда и только тогда, когда найдутся функции $q(t)$, $r(t)$ такие, что оказываются выполненными соотношения (16), (17).



Глава 4: примеры

Линейное однородное уравнение

$$dx(t) = \alpha(t)x(t)dt + \beta(t)x(t)dW(t) + \gamma(t)x(t)dB(t), \quad t \geq 0,$$
$$x(t) = x(0) \exp \left(\int_0^t \left(\alpha(\tau) - \frac{1}{2}\beta^2(\tau) \right) d\tau + \int_0^t \beta(\tau)dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau)dB(\tau) \right).$$

Линейное неоднородное уравнение

$$dx(t) = (\alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t))dt + (\beta_1(t)x(t) + \beta_2(t))dW(t) +$$
$$+ (\gamma_1(t)x(t) + \gamma_2(t))dB(t), \quad t \geq 0,$$

$$x(t) = x_0(t) \left(x(0) + \int_0^t \frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} d\tau + \right.$$
$$\left. + \int_0^t \frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} dW(\tau) + \int_0^t \frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)} dB(\tau) \right),$$

где $x_0(t)$ — решение соответствующего линейного однородного уравнения с начальным условием $x_0(0) = 1$.



Глава 4: пример

Линейное однородное уравнение

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$dx(t) = -2t \cdot x(t)dt + t^{1-H}x(t)dB(t), \quad t \geq 0,$$

Его решение выражается формулой

$$x(t) = x(0) \exp \left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau) \right).$$

Устойчивость по вероятности нулевого решения

Нулевое решение рассматриваемого уравнения устойчиво по вероятности, то есть для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ найдется

$\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 \exp \left(-\frac{C^2 \mathbb{E} \|B\|_H^2}{4\varepsilon_2} \right) > 0$, $C = \zeta(1 + 1/H)$, такая, что для любого решения с начальным значением $x(0)$ таким, что $|x(0)| < \delta$ п.н., выполнено неравенство $P\{\sup_{t \geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$.



Глава 4: основные результаты

Линейное неоднородное уравнение

Далее рассмотрим одномерное автономное уравнение

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (18)$$

и будем исследовать наличие автономной замены $y = F(x)$, приводящей указанное уравнение к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (\alpha_1 y(t) + \alpha_2)dt + (\beta_1 y(t) + \beta_2)dW(t) + (\gamma_1 y(t) + \gamma_2)dB(t), \quad t \geq 0 \quad (19)$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.



Глава 4: основные результаты

Предположим, что существуют некоторые постоянные $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}, \quad (20)$$

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = c_1, \quad (21)$$

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = c_2, \quad (22)$$

Теорема 4.2. [6].

Уравнение (18) с функциями $g(x) \neq 0$, $A'(x) \neq 0$ приводимо к уравнению (19) с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно x преобразования $y = F(x)$ тогда и только тогда, когда найдутся постоянные c_1, c_2 такие, что оказываются выполненными соотношения (20), (21), (22).



Глава 4: пример

Предложение 4.3

Уравнение бернуллиевского типа

$$dx(t) = (\alpha x^n(t) + \beta x(t))dt + \gamma x(t)dW(t) + \delta x(t)dB(t)$$

приводится к линейному неоднородному уравнению.

Замена $y = F(x) = \frac{1}{1-n}x^{1-n}$.

Соответствующее линейное неоднородное уравнение:

$$dy(t) = \left(\alpha + (n-1) \left(-\beta + \frac{\gamma^2 n}{2} \right) y(t) \right) dt + \\ + \gamma(1-n)y(t)dW(t) + \delta(1-n)y(t)dB(t).$$



Глава 4: основные результаты

Уравнение Стратоновича

Вернемся к уравнению (14) в пространстве \mathbb{R}^d и вместе с ним рассмотрим соответствующее уравнение Стратоновича

$$dx(t) = (f(t, x(t)) - c(t, x(t)))dt + g(t, x(t)) \circ dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (23)$$

в котором $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $\sigma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $c: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ и

$$c_i(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial g_{ij}(t, x)}{\partial x_k} g_{kj}(t, x), \quad i = 1, \dots, d.$$

Теорема 4.3. [6].

Пусть функция f непрерывна, функция g непрерывна вместе со своими производными $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, а функция σ удовлетворяет (α, β) -условию Гельдера по (t, x) для некоторых $\alpha > 1 - H$, $\beta > 2 - 2H$. Процесс $x(t)$ является решением уравнения (14) тогда и только тогда, когда процесс $x(t)$ является решением уравнения Стратоновича (23).



Глава 4: пример

Для уравнения

$$dx(t) = x^3(t)dt + x^2(t)dW(t) + x^2(t)dB(t), \quad x(0) = x_0,$$

соответствующее уравнение Стратоновича имеет вид

$$dx(t) = x^2(t) \circ dW(t) + x^2(t)dB(t).$$

Последнее уравнение имеет решение

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(W(t) + B(t))},$$

которое является решением и исходного уравнения.



Глава 5, раздел 5.2: объект исследования

Объект исследования

Стохастическое дифференциальное уравнение в конечномерном гильбертовом пространстве \mathbb{R}^d с выделенной линейной частью вида:

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t)))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0. \quad (24)$$

где $W(t)$ — стандартное d -мерное броуновское движение,
 $A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ — кусочно непрерывная функция, $\sup_{t \geq 0} |A(t)| \leq M$,
 $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ — измеримые по Борелю функции
такие, что:

- 1) $f(t, 0) = 0$ и $g(t, 0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$
- 2) существует постоянная C такая, что для любых $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$,
выполняется неравенство $|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq C(1 + |x|)$ (выполнено
условие линейного порядка роста по x).

Детерминированное линейное приближение

$$dX(t) = A(t)X(t)dt, \quad t \geq 0, \quad (25)$$

Обозначим через $X^{(s,x)}(t)$ решение уравнения (25), такое, что $X^{(s,x)}(s) = x$.



Глава 5, раздел 5.2: основной результат

Определение 5.4.

Будем говорить, что уравнение (25) имеет *равномерно экспоненциально устойчивое* нулевое решение, если существуют константы $\Lambda, \lambda > 0$, не зависящие от s, x , такие, что для любых $s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d$ и $t \geq s$ выполняется неравенство

$$|X^{(s,x)}(t)|^2 \leq \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)}.$$

Теорема 5.3. [1].

Предположим, что функции $f(t, x)$ и $g(t, x)$ таковы, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что выполняются неравенства

$$|f(t, x)| \leq \varepsilon |x|, \quad |g(t, x)| \leq \varepsilon |x|, \quad (26)$$

для любых $x, |x| \leq \delta_\varepsilon, t \in \mathbb{R}^+$, а система (25) имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда система (24) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.



Глава 5, раздел 5.2: пример

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}dx(t) &= ((-20 - 0.1 \sin t)x(t) + 0.1 \cos t y(t) + \sin^2 x(t))dt, \\dy(t) &= (-0.1 \cos t x(t) - (20 + 0.1 \sin t)y(t))dt + \sin^2 y(t)\operatorname{sgn}(x(t))dw(t),\end{aligned}\tag{27}$$

при $t \geq 0$ с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, где $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $w(t)$ – одномерное броуновское движение.

Применение теоремы 5.3

Нулевое решение линеаризованной системы

$$\begin{aligned}dx(t) &= ((-20 - 0.1 \sin t)x(t) + 0.1 \cos t y(t))dt, \\dy(t) &= (-0.1 \cos t x(t) - (20 + 0.1 \sin t)y(t))dt,\end{aligned}$$

является равномерно экспоненциально устойчивым, и следовательно, по теореме 5.3. нулевое решение системы (27) асимптотически устойчиво по вероятности.



Глава 5, раздел 5.3: объект исследования

Обозначения

Пусть H и K — сепарабельные гильбертовы пространства,

$\mathcal{L}_2(K, H)$ — пространство операторов Гильберта-Шмидта, действующих из K в H ,

Q — ядерный симметрический положительно определенный оператор на пространстве K ,

$W(t, \omega)$ — Q -броуновское движение со значениями в K и ковариационным оператором Q .



Глава 5, раздел 5.3: объект исследования

Объект исследования

Эволюционное функциональное уравнение в пространстве H следующего вида:

$$dX(t, \omega) = AX(t, \omega)dt + f(t, X(t, \omega))dt + g(t, X(t, \omega))dW(t, \omega), \quad (t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \quad (28)$$

относительно $X \in H$ с начальным условием

$$X(0, \omega) = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (29)$$

где $f: \mathbb{R}^+ \times H \rightarrow H$, $g: \mathbb{R}^+ \times H \rightarrow \mathfrak{L}_2(K, H)$ — измеримые, непрерывные по X (при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$) функции,

A — линейный оператор, определенный на всюду плотном в H множестве $\mathcal{D}(A)$ и порождающий C_0 -полугруппу $S(t)$ на H ,

$\xi: \Omega \rightarrow \mathcal{D}(A)$ — \mathcal{F}_0 -измеримая случайная величина, имеющая конечный момент $\mathbb{E} \|\xi\|^p < \infty$ порядка $p > 2$.



Глава 5, раздел 5.3: объект исследования

Условия на коэффициенты f, g

Относительно функций $f(t, X)$ и $g(t, X)$ будем предполагать, что выполнены два условия:

- 1 *Локальное условие Липшица.* Для любого $a > 0$ существует постоянная q_a такая, что для всех $t \in [0, a]$ и любых $\varphi, \psi \in H$, таких, что $\|\varphi\| \leq a$, $\|\psi\| \leq a$, выполняются неравенства

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\| \leq q_a \|\varphi - \psi\|, \quad \|g(t, \varphi) - g(t, \psi)\| \leq q_a \|\varphi - \psi\|.$$

- 2 *Условие линейного порядка роста.* Существует непрерывная функция $k: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}^+$ и любого $\eta \in H$ выполняются неравенства

$$\|f(t, \eta)\| \leq k(t)(1 + \|\eta\|), \quad \|g(t, \eta)\| \leq k(t)(1 + \|\eta\|).$$



Глава 5, раздел 5.3: притяжение к нулю

Определение 5.8.

Пусть положительная функция $\lambda(t)$ определена для достаточно больших $t > 0$, скажем, $t \geq T > 0$. Предположим, что

- ❶ $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty$.
- ❷ $\ln \lambda(t)$ равномерно непрерывна по $t \geq T$.
- ❸ Существует константа $\tau \geq 0$ такая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln \ln t}{\ln \lambda(t)} \leq \tau$.

Будем говорить, что слабое решение задачи (28), (29) притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$, если найдется $\gamma > 0$ такое, что п.н. выполняется неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln \|X(t)\|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma.$$



Глава 5, раздел 5.3: основной результат

Обозначения

Введем операторы L, B , действующие на функционал $V(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$ следующим образом:

$$LV(t, x) = V'_t(t, x) + \langle V'_x(t, x), Ax + f(t, x) \rangle_H + \\ + \frac{1}{2} \text{tr}[V''_{xx}(t, x)(g(t, x)Q^{1/2})(g(t, x)Q^{1/2})^*], \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A), \quad (30)$$

$$BV(t, x) = \text{tr}[V''_{xx}(t, x) \otimes V''_{xx}(t, x)(g(t, x)Q^{1/2})(g(t, x)Q^{1/2})^*], \\ (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times H. \quad (31)$$



Глава 5, раздел 5.3: основной результат

Теорема 5.4. [2].

Пусть задан функционал $V(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$ и две неотрицательные непрерывные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$. Предположим, что существуют постоянные $r > 0$, $m \geq 0$, постоянные $\mu, \nu, \theta \in \mathbb{R}$ и невозрастающая положительная функция $\zeta(t)$ такие, что $\frac{m - (\max\{\nu, \mu + \tau\} + \theta)}{r} > 0$ и выполнены следующие условия:

- ① $\|x\|^r(\lambda(t))^m \leq V(t, x)$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times H$.
- ② $LV(t, x) + \zeta(t)BV(t, x) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t)V(t, x)$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A)$.
- ③ $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln(\int_0^t \psi_1(s) ds)}{\ln \lambda(t)} \leq \nu, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\int_0^t \psi_2(s) ds}{\ln \lambda(t)} \leq \theta,$
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf \frac{\ln \zeta(t)}{\ln \lambda(t)} \geq -\mu.$

Тогда слабое решение задачи (28), (29) притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$.



Глава 5, раздел 5.3: пример

$$dX_t(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} X_t(x) + \alpha \sin \left(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos X_t^1 \right) \right) dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}} X_t(x) dW_t,$$

$$dX_t^1 = \left(\alpha X_t^1 \sin X_t^1 + \left(\int_0^\pi X_t(x)^2 dx \right)^{1/2} \right) dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}} \left(\int_0^\pi X_t(x)^2 dx \right)^{1/2} dW_t.$$

Уравнение относительно $\bar{X}_t = (X_t(\cdot), X_t^1)^\top$, $t > 0$, в пространстве $H \times \mathbb{R}$ с начальным условием $\bar{X}_0 = (X_0(x), X_0^1)^\top = (x_0(x), x_0^1)$, $x \in (0, \pi)$, $K = \mathbb{R}$, $H = L_2[0, \pi]$ в компактной форме примет вид

$$d\bar{X}_t = (\bar{A}\bar{X}_t + f(t, \bar{X}_t))dt + g(t, \bar{X}_t)dW_t, \quad (32)$$

$$f(t, \bar{X}_t) = \alpha \left(\sin(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos X_t^1), X_t^1 \sin X_t^1 + \|X_t(x)\|_H \right)^\top,$$

$$g(t, \bar{X}_t) = \alpha e^{-\frac{mt}{2}} \left(X_t(x), \left(\int_0^\pi X_t(x)^2 dx \right)^{1/2} \right)^\top, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(A) = \{u \in C_2[0, \pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$$



Глава 5, раздел 5.3: пример

Применение теоремы 5.4

Положим $V(t, \bar{u}) = V(t, u) = e^{mt} \|u\|^2$, $u \in H$, $\lambda(t) = e^t$, $\psi_1(t) \equiv \alpha\pi$, $\psi_2(t) \equiv \theta$, $\tau = \mu = \nu = 0$.

В статье [2] показано, что при таком выборе, достаточно малом α и достаточно большом m , условия теоремы 5.4 будут выполнены, т.е. имеет место притяжение решений к нулю.

При этом функция g удовлетворяет глобальному условию Липшица, а функция f удовлетворяет локальному, но не удовлетворяет глобальному условию Липшица.



Положения, выносимые на защиту

- 1 Формула замены переменных и теорема о непрерывной зависимости от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста (теоремы 2.2, 2.3).
- 2 Асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста (теорема 3.1).
- 3 Методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа (теоремы 4.1, 4.2, 4.3).
- 4 Теорема об асимптотической устойчивости системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито с разрывными коэффициентами по нестационарному линейному приближению. Достаточные условия притяжения к нулю слабых решений нелинейного стохастического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве с нелипшицевыми коэффициентами (теоремы 5.3, 5.4).



Список основных публикаций соискателя



1. *Васьковский, М.М.* Исследование устойчивости решений неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами с помощью метода функций Ляпунова / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный, И.В. Качан // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1 : физ., мат., информ. — 2015. — №3. — С. 117–125.



2. *Васьковский, М.М.* Устойчивость решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с локально липшицевыми коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 866–880.



3. *Качан, И.В.* Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 193–209.



Список основных публикаций соискателя



4. *Васьковский, М.М.* Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. — 2018. — Т. 62, № 4. — С. 398–405.



5. *Vaskouski, M.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than $1/3$ / M. Vaskouski, I. Kachan // Stochastic Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 36, № 6. — P. 909–931.



6. *Васьковский, М.М.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями / Васьковский М.М., Качан И.В. // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 135–151.