БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.911.5

КАЧАН
Илья Вадимович

Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент,
Васьковский М. М.

Минск, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И (ИЛИ) УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$a \vee b$	большее из чисел a и b, т.е. $\max\{a,b\}$
$a \wedge b$	меньшее из чисел a и b, т.е. $\min\{a,b\}$
$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	множества натуральных, действительных и комплексных чисел соответственно
$\mathbb{R}^+$	множество действительных положительных чисел
$\mathbb{R}^d$	евклидово пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$, $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_dy_d$ и нормой $\lvert x \rvert = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	пространство матриц $X = (x_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ размера $n \times m$ с вещественными элементами $x_{ij} \in \mathbb{R}$
$A^\top$	транспонированная матрица
$A^\star$	сопреженный оператор
tr$A$	след оператора
I	тождественный оператор
I_d	единичная матрица в $\mathbb{R}^{d \times d}$
col$(a_1, \ldots, a_n)$	матрица, состоящая из строк $a_1, \ldots, a_n$
$\otimes$	тензорное произведение в пространстве $\mathbb{R}^d$
$\lvert \cdot \rvert_W$	евклидова норма в конечномерном пространстве W
$\lVert \cdot \rVert_X$	норма в пространстве бесконечномерном пространстве X
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	скалярное произведение в пространстве H
$\mathcal{L}(U_1, U_2)$	пространство линейных ограниченных операторов, действующих из U_1 в U_2
$\mathfrak{L}_2(U_1, U_2)$	множество операторов Гильберта-Шмидта, действующих из U_1 в U_2
$C(U_1, U_2)$	пространство непрерывных функций $\varphi\colon U_1 \to U_2$ с нормой $\lVert \varphi \rVert_\infty = \max_{x \in U_1} \lvert \varphi(x) \rvert_{U_2}$
$C_b^k(U_1, U_2)$	пространство функций $\varphi\colon U_1 \to U_2$ имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка k включительно с нормой $\lVert \varphi \rVert_{C_b^k} = \sum_{j=0}^k \lVert D^j \varphi \rVert_\infty$
$L_2(\mathbb{R})$	гильбертово пространство классов эквивалентности квадратично интегрируемых по Лебегу функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ со скалярным произведением $\langle f, g \rangle_{L_2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx$

$L_p[a, b]$	пространство классов эквивалентности интегрируемых по Лебегу со степенью p функций $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$
$\mathcal{W}^{k,p}[a,b]$	пространство Соболева классов эквивалентности функций $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, имеющих обобщенные производные класса $L_p[a,b]$ до порядка k включительно, $k \in \mathbb{N}$.
$C_k[a,b]$	пространство функций $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, непрерывно диффернцируемых до порядка k включительно, $k \in \mathbb{N}$.
$\mathbf{1}_A$	функция-индикатор множества A
п.н.	почти наверное

ВВЕДЕНИЕ

При статистическом анализе финансовых временных рядов давно было подмечено, что многие из них обладают свойствами статистического самоподобия (автомодельности), проявляющимися в том, что их части устроены так же, как и целое. В 1951 г. британский математик Г. Харст, изучая годичные уровни водности Нила, исследовал размах $\mathcal{R}_n$ и среднеквадратичное отклонение $\mathcal{S}_n$ указанных величин (n — количество наблюдений). Применняя методы $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-анализа, им было установлено, что отношение $\mathcal{R}_n/\mathcal{S}_n$ эквивалентно cn^H, для некоторой константы c, где H — параметр, впоследствии получивший название показателя (или индекса) Харста. В оригинальной работе [44], посвященной изучению уровней водности рек, эмпирическим путем было получено значение $H \approx 0.7$. Позже, основываясь на работах Харста, Б. Мандельброт предложил как в рассматриваемой модели Харста, так и во многих других вероятностных моделях, в том числе в финансовой математике, использовать дробное (фрактальное) броуновское движение, обладающее указанным свойством автомодельности. Свойством самоподобия обладают самые разнообразные системы с нелинейной динамикой, встречающиеся в природе, и именно оно играет центральную роль в теории фрактальной геометрии, разработанной Б. Мандельбротом [56]. В прикладной теории вероятностей дробное броуновское с показателем Харста H используется в качестве модели, дающей простой способ получения дробного (фрактального) шума. В свою очередь, дробный шум находит многочисленные применения в финансовой математике: к примеру, при $H \in (1/2, 1)$ он используется для моделирования цен акций, обменных курсов, при $H = 1/2$ — для моделирования финансовых индексов, а при $H \in (0{,}1/2)$ — для описания турбулентных явлений [20, гл. 3, §2].

В представленной диссертации дробное броуновское движение рассматривается в контексте стохастических дифференциальных уравнений, являющихся в своем роде связующим звеном между теориями случайных процессов, стохастического анализа и классических дифференциальных уравнений. Стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями находят множество приложений, главным образом в физике и финансовой математике. М. Клепцына, А. Ле Бретон и М.-К. Рубо [50] использовали модели с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, для описания сигнальных процессов в фильтрационных системах. П. Черидито [23] рассматривает модель Самуэльсона для движения цен на акции, используя дробные броуновские движения, имеющие различные индексы Харста. М. Сале [72] исследует стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа в контексте моделей облигаций и акций. Некоторые другие финансовые приложения также можно найти в монографии Ю.С. Мишуры [58, глава 5]. Нельзя обойти вниманием и тот факт, что аппарат стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах может быть применен для истолкования и обобщения многих классических задач математической физики. Спектр приложений стохастических дифференциальных уравнений со стандартными броуновскими движениямив гильбертовых пространствах крайне обширен: от задач математической физики и фильтрации до нейрофизиологии, генетики популяций и уже упомянутой финансовой математики [28, введение], [17, гл. 1].

В общем смысле под стохастическим дифференциальным уравнением понимают формальное уравнение вида

$$dX(t,\omega) = f(t,\omega, X(t,\omega))dt + g(t,\omega, X(t,\omega))dB(t,\omega),$$

в котором $B(t,\omega)$ — стандартное или дробное броуновское движение. Формализм приведенной записи заключается в том, что ввиду недифференцируемости траекторий процесса $B(t)$, выражение $dB(t)$ лишено смысла. Однако, не разрывая связи с классической теорией дифференциальных уравнений, опираясь на интегральный критерий, указанное уравнение понимают в интегральном смысле:

$$X(t,\omega) = X(s,\omega) + \int_s^t f(\tau,\omega, X(\tau,\omega))d\tau + \int_s^t g(\tau,\omega, X(\tau,\omega))dB(\tau,\omega),$$

где интеграл по $d\tau$ является интегралом Бохнера при каждом фиксированном ω, а определение интеграла по dB может быть дано несколькими способами, в зависимости свойств процесса $B(t)$. Тем не менее, множество всех подходов к определению интеграла по дробному броуновскому движению можно условно свести к двум группам методов.

Методы первой группы игнорируют вероятностную структуру процесса $B(t,\omega)$ и строят детерминированную теорию интегрирования, исследуя при каждом фиксированном ω интегрируемость траекторий процессов $Y(t,\omega) = g(t,\omega, X(t,\omega))$ и $B(t,\omega)$. Наиболее естественным методом в данном случае является подход к определению интеграла $\int_s^t Y(\tau)dB^{(H)}(\tau)$ как потраекторного предела интегральных сумм Римана-Стилтьеса и, как следует из работ

Л. Янга [71] и М. Сале [72] данный подход применим лишь в случае, когда показатель Харста $H > 1/2$.

Для того, чтобы охватить случай $H \leq 1/2$, обеспечив потраекторную сходимость интегральных сумм Римана-Стилтьеса, оказывается необходимым привлечение дополнительных слагаемых в указанные суммы. Такая идея приводит нас к подходу, впервые примененному Т. Лайонсом [54] и развившемуся в так называемую теорию грубых траекторий в 90-х гг. прошлого века. Путем включения членов тейлоровских разложений высоких порядков в интегральные суммы, Т. Лайонс построил теорию интегрирования по процессам, принимающим значения в специальных тензорных алгебрах, фактически компенсировав «грубость» их траекторий дополнительной информацией указанных членов. Впоследствии альтернативный подход к теории Лайонса, разработанный М. Губинелли [37], позволил получить аналогичные результаты, избегая обращения к сложным алгебраическим структурам, сделав теорию грубых траекторий более доступной. В настоящее время теория грубых траекторий и ее приложения к дробному броуновскому движению является молодой и активно развививающейся областью математики. Различным ее аспектам, в частности, посвящены работы М. Губинелли [38], П. Фрица, Н. Виктуа [33], А. Ноенкирха [59], Ф. Бадуэна [21], М. Хайрера [31]. Стоит отдельно отметить М. Хайрера, который впервые применил теорию грубых траекторий к исследованию стохастических дифференциальных уравнений в частных производных и разработал так называемую теорию регулярных структур [40]. Данный результат получил высокую оценку математического сообщества и был удостоен Филдсовской премии в 2014 г.

Настоящая работа развививает указанную теорию в приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям с дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста, в частности, в направлении непрерывной зависимости решений уравнений от начальных данных, асимптотических разложений функционалов от решений и уравнений Колмогорова для указанных фунционалов.

Отметим, что стандартного броуновского движения $B(t) = B^{(1/2)}(t)$ существует подход к определению повторных интегралов $\int_s^t dB(\tau_1) \int_s^{\tau_1} dB(\tau_2)$ через стохастические интегралы Ито или Стратоновича [31, гл. 5]. В таком случае интегралы, определенные в контексте теории грубых траекторий, совпадают с названными стохастическими интегралами, и мы приходим ко второй группе подходов к определению интегралов, базирующейся на вероятностных свойствах процесса $B(t)$. Первое определение стохастического интеграла по стандартному броуновскому движению $B(t)$ было дано К. Ито в 40-х гг. прошлого века [48] для процессов, адаптированных к броуновской фильтрации. Теория интегрирования К. Ито имела коллосальный успех и вместе с формулой замены переменных, носящей его имя, предоставляет мощной инструмент к исследованию стохастических дифференциальных уравнений со стандартным броуновским движением. Так или иначе ее вопросы затрагивает множество монографий: И. И. Гихмана и А. В. Скорохода [5, 8], Р. Хасьминского [49], Б. Оксендаля [17], А. А. Левакова [12] и др. Более того, теория Ито была обобщена на случай бесконечномерных Гильбертовых пространств, чему посвящены монографии Дж. Да Прато [28] и Л. Гаварецкого и В. Мандрэкара [30].

Наряду с уравнениями, содержащими исключительно дробные броуновские движения $B^{(H)}(t)$, и уравениями, содержащими только стандартное броуновское движение $W(t)$, активно развивается теория для уравнений смешанного типа, в которой сочетаются теория интегрирования Ито для процессов $W(t)$ и теория потракторного интегрирования Янга для процессов $B^{(H)}(t)$, $H > 1/2$. Впервые смешанные уравнения были рассмотрены Д. Нуалартом и Г. Раскану [60], и далее получили свое развитие в работах Д. Нуаларта и Ж. Гуэрры [39], Г. Шевченко и Ю. Мишуры [57, 67], К. Кубилиуса [51] и др. Интерес к подобного рода уравнениям вызван их многоисленным приложениям в финансовой сфере, где их использование позволяет получить более гибкие модели, позволяющие учитывать долговременную память исследуемых процессов [22, 23, 58].

Для уравнений смешанного типа и уравнений со стандарнтым броуновским движением как частных случаев общих уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные показатели Харста, в настоящей работе получены более точные результаты. В частности, для уравнений смешанного типа получены методы точного интегрирования, основанные на приведении уравнений к простейшим уравнениям, линейным уравнениям, уравнению Стратоновича. Для уравнений со стандартным броуновским движением доказана теорема об устойчивости по линейному приближению уравнений в конечномерных гильбертовых пространств и теорема о притяжении решений уравнений в бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств к нулю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Исследования проводились в рамках следующих госбюджетных тем:

— Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах (2014 – 2016 гг., номер госрегистрации 20142883)

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является доказательство теорем об устойчивости решений и получение асимптотических разложений для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми в теории стохастических дифференциальных уравнений.

Получены новые результаты в устойчивости нелинейных стохастических уравнений в гильбертовых пространствах. Для неавтономных нелинейных уравнений с разрывными коэффициентами в конечномерных пространствах доказана теорема об асимптотической устойчивости по вероятности слабого нулевого решения по линейному приближению. Для нелинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица, доказана теорема о притяжении слабых решений к нулю. Приведены примеры, иллюстрирующие применение доказанных теорем.

Получены обобщения теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями на случай, когда указанные броуновские движения имеют различных индексы Харста, большие $1/3$. Для нелинейных уравнений, со сносом и дробным броуновскими движениями с различными индексами Харста, большими $1/3$, получены следующие результаты:

– доказана формула замены переменных,

– доказана теорема о непрерывной зависимости в среднем от начальных условий и правых частей решений указанных уравнений,

– доказана теорема, в которой получены асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий от функционалов от решений указанных уравнений,

– получено уравнение, являющееся обобщением обратного уравнения Колмогорова для решения уравнения с указанным дробным броуновским движением в коммутативном случае.

Также в диссертации были исследованы некоторые методы интегрирования смешанных уравнений, содержащих стандартное и дробное броуновское движение с индексом Харста, большим 1/2. Были получены теоремы о приведении указанных уравнений к простейшим, а также к линейным неоднородным уравнениям, теорема о переходу к уравнению Стратоновича. Кроме того, были получены дифференциальные уравнения для математических ожиданий и плотностей распределений решений указанных уравнений.

Положения, выносимые на защиту

Теорема об асимптотической устойчивости системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений по линейному приближению.

Теорема о притяжении к нулю слабых решений нелинейного стохастического дифференциального уравнения в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями.

Теорема о непрерывной зависимости от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями.

Методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа, основанные на приведении данного уравнения к простейшему или линейному неоднородному, или к уравнению Стратоновича.

Личный вклад соискателя ученой степени

Работы [1–А, 2–А, 7–А, 10–А, 12–А] написаны в соавторстве с научным руководителем М.М. Васьковским, а работы [1–А, 7–А] — также в соавторстве с Я.Б. Задворным. Они посвящены исследованию устойчивости стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах методом функций Ляпунова. Идеи совместных исследований были развиты автором в работе [11–A], в которой получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости уравнений с разрывными коэффициентами в конечномерных гильбертовых пространствах. Работы [5–A, 6–A, 8–A, 9–A, 14–A], также написанные в соавторстве с научным руководителем М.М. Васьковским, посвящены исследованию асимптотического поведения решений и методов интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста. Идеи совместных исследований были развиты автором в работах [3–A, 13–A], посвященных существованию и непрерывной зависимости решений упомянутых уравнений.

Результаты, включенные в диссертацию и выносимые на защиту, получены лично автором диссертации. Научному руководителю принадлежат постановка задачи и выбор методов исследования.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты работы докладывались и обсуждались на 8-м международном научном семинаре (воркшопе) «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (АМАДЕ–2015) (Минск, 2015), на шестых Богдановских чтениях по обыкновенным дифференциальным уравнениям (Минск, 2015), на XII Белорусской математической конференции (Минск, 2016), на XII международной научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (Пенза, Россия, 2017), на XVII, XVIII, XIX международных научных конференциях по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2017», «Еругинские чтения– 2018», «Еругинские чтения–2019» (Минск, 2017; Гродно, 2018; Могилев 2019, соответственно), на международной научной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», посвященной 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина (Минск, 2018), на 74-й и 75-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 2017, 2018). Результаты, включенные в диссертацию, отмечены дипломами 1-й категории Республиканского конкурса научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь (2017, 2018), а также третьей премией Специального фонда Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных учащихся и студентов (2019).

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы при проведении исследований по теории устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах и общей теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями в научных коллективах, занимающихся исследованием дифференциальных уравнений, в институтах математики НАН РБ, Белорусском Государственном университете, а также при чтении спецкурсов.

Опубликование результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах: из них 4 статьи в научных журналах из перечня научных изданий ВАК, 2 статьи в зарубежных журналах, 1 депонированный отчет, 2 статьи в сборниках трудов международных научных конференций, 5 тезисов докладов международных научных конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, основной части, включающей 4 главы, заключения и библиографического списка.

Объем диссертации — 142 стр., библиографический список содержит 72 источник, включая собственные публикации автора, на 7 стр.

ГЛАВА 1
ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ ПО ТЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

Впервые дробное броуновское движение $B^{(H)}(t)$ с показателем Харста $H \in (0,1)$ было введено Колмогоровым в статье [9] в 1940 г., где оно называлось спиралью Винера. Само же название «дробное броуновское движение» было предложено Б. Мандельбротом и Дж. Ван Нессом в статье [55] в 1968 г., в которой было дано явное определение процесса $B^{(H)}(t)$ через стохастические интегралы по винеровскому процессу $W(t)$. Из указанного определения, в частности, следует, что введенный процесс $B^{(H)}$ дробного броуновского движения является обобщением винеровского процесса $W(t)$ (называемого в этой связи стандартным броуновским движением) и совпадает с ним в случае $H = 1/2$. Процесс стандартного броуновского движения зачастую используется для моделирования так называемого белого шума. Идея добавления слагаемых, содержащих стандартное броуновское движение, в детерминированные дифференциальные уравнения и системы привела к моделям, более точно опысывающим поведение объектов реального мира, и послужила основой для развития теории стохастических дифференциальных уравнений.

Современная теория стохастических дифференциальных уравнений берет свое начало в конце 40-х — начале 50-х гг. прошлого века с работ И.И. Гихмана [6,7], в которых было введено понятие решения стохастического дифференциального уравнения. Примерно в то же время К. Ито в серии работ [47, 48] построил теорию стохастического интегрирования по стандартному броуновскому движению и доказал формулу замены переменных, носящую теперь его имя. Введенное сперва для простейших процессов, являющихся кусочно-постоянными, непрерывными слева функциями по t, и адаптированных к броуновской фильтрации, определение интеграла Ито $\int_s^t Y(\tau)dW(\tau)$ затем было расширено путем предельного перехода в специального вида мартингальных пространствах. Свойство адаптированности является стого вероятностным и на интуитивном уровне означает следующее: к моменту времени t процесс $Y(t)$ располагает лишь информацией о поведении процесса $W(t)$ до момента времени t (и в частности, не может заглядывать в будущее). Сходимость интегральных сумм Римана-Стилтьеса для интеграла Ито имеет место лишь по вероятности, и кроме того, зависит от выбора промежуточных точек: при выборе левых концов $Y(t_i)$ отрезков $[t_i, t_{i+1}]$ интегральные суммы сходятся к интегралу Ито, а при выборе полусумм $(Y(t_i) + Y(t_{i+1}))/2$ на концах отрезков — к интегралу Стратоновича. Работы К. Ито сформировали современный вид теории и послужили толчком к многочисленным исследованиям в данной области. В настоящий момент теория стохастических дифференциальных уравнений со стандартным броуновским движением хорошо развита, ей посвящено множество монографий как для уравнений в конечномерных пространствах [5, 8, 12, 17, 49], так и для уравнений в бесконечномерных гильбертовых пространствах [28, 30].

В то же время стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями представляют собой отдельный сложный и менее изученный (в сравнении с уравнениями со стандартными броуновскими движениями) объект исследования. Как известно, дробное броуновское движение $B^{(H)}(t)$ является семимартингалом, если и только если его индекс Харста $H = 1/2$. Поэтому в общем случае $H \neq 1/2$ классический стохастический анализ Ито не применим к уравнениям с дробными броуновскими движениями. Как правило, для уравнений с дробными броуновскими движениями используют потраекторный подход к определению интегралов. Ключевым свойством здесь выступает непрерывность по Гельдеру траекторий процесса $B^{(H)}(t)$ с любым показателем, строго меньшим H, а не вероятностные характеристики процесса, игравшие определяющую роль при построении интегралов по стандартному броуновскому движению. В случае $H > 1/2$ интеграл по дробному броуновскому движению $\int_s^t Y(\tau)dB(\tau)$ может быть построен как потраекторный предел интегральных сумм Римана-Стилтьеса. Л. Янг в фундаментальной работе [71] показал, что в случае, когда детерминированные функции $Y(t)$ и $B(t)$ имеют конечные p- и q-вариации соответственно, и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$, такое определение интеграла является корректным. Возможность применения потраекторного интегрирования Л. Янга к интегралам по дробному броуновскому движению $B^{(H)}(t)$ впервые обосновывается в работе М. Сале [72]. В приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям с дробными броуновскими движениями данный подход применим лишь в случае, когда показатель Харста $H > 1/2$, поскольку процесс $B^{(H)}(t)$ имеет ограниченную вариацию порядка $q < 1/H$, а процесс $Y(t)$ при достаточной гладкости коэффициентов уравнения будет иметь конечную вариацию того же порядка. Что же касается случая $H < 1/2$, то в нем указанные интегральные суммы расходятся, и возникает необходимость в дополнительных соображениях, компенсирующих отсутстсвие нужной степени гладкости траекторий процесса $B^{(H)}(t)$.

В середине 90-х гг. прошлого века Т. Лайонс в фундаментальной работе [54] разработал теорию грубых траекторий (rough path). Путем включения членов тейлоровских разложений высоких порядков в интегральные суммы, Т. Лайонс построил теорию интегрирования по процессам, принимающим значения в специальных тензорных алгебрах, фактически компенсировав «грубость» их траекторий дополнительной информацией указанных членов. Эта дополнительная информация, в свою очередь, сконцентрирована в повторных интегралах, которые требуют отдельного обоснования. В приложении к интегрированию по дробному броуновскому движению $B^{(H)}(t)$ первое обоснование повторных интегралов было дано Л. Кутэн и Ж. Киан в 2002 г. [26]. Путем введения диадных аппроксимаций процесса $B^{(H)}(t)$, они сумели построить повторные интегралы как интегралы Римана-Стилтьеса (для указанных аппроксимаций) с последующим предельном переходе в тензорных алгебрах Лионса, снабженных метрикой p-вариации, $p < 4$. Авторы доказали сходимость упомянутых интегральных сумм для повторных интегралов до 3-го порядка включительно для показателей Харста $H > 1/4$ и показали расходимость соответствующих интегральных сумм в случае $H \leq 1/4$. Чуть позже, в середине 2000-х гг. М. Губинелли [37] разработал альтернативный подход в теории грубых траекторий, который показывает, что для фиксированного процесса можно построить линейное пространство управляемых процессов, для которых теория интегрирования остается справедливой, при этом избегая перехода к тензорным алгебрам, возникающим в [54]. Для дробного броуновского движения $B^{(H)}(t)$ подход Губинелли позволяет построить теорию интегрирования в случае, когда показатель Харста $H > 1/3$, и может быть обобщен до случая $H > 1/4$ [42]. Теория грубых траекторий и ее приложения к стохастическим дифференциальным уравнениям с дробноми броуновскоми движениями активно развивалась и продолжают развиваться в работах М. Губинелли [38], П. Фрица, Н. Виктуа [33], А. Ноенкирха [59], Ф. Бадуэна [21], М. Хайрера [31] и др.

В наиболее общем виде автономное стохастическое дифференциальное уравнение с дробными броуновскими движениями и сносом может быть записано в следующей форме:

$$dX_t = f(X_t)dB_t,\ t \in [0,T], \tag{1.1}$$

где $f = (f_0, \ldots, f_d),\ f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ i = 0\ldots,d,$ — достаточно гладкие функции с ограниченными производными, $B_t = (B_t^{(0)}, \dots, B_t^{(d)})^T$, $B_t^{(0)} = t$, $B_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, d$ — независимые одномерные дробные броуновские движения с индексами Харста $H_i \in (1/3{,}1)$. Стоит отметить, что уравнение (1.1) охватывает два важных частный случая:

1) Все индексы Харста $H_i = 1/2$ и, соответственно, дробные броуновские движения $B_t^{(i)}$ обращаются в стандартные винеровские процессы. В таком случае приходим к классическому стохастическому дифференциальному уравнению со стандартным броуновским движением.

2) Все индексы Харста H_i либо равны $1/2$, либо равны некоторому $H > 1/2$ (т.е. в уравнение входят только стандартные броуновские движения W_t и дробные броуновские движения $B_t^{(H)}$ с одним и тем же индексом Харста $H > 1/2$). Такие стохастические дифференциальные уравнения со сносом, в которых интеграл по стандартному броуновскому движению $W(t)$ понимается как интеграл Ито, а интеграл по дробному броуновскому движению $B^{(H)}(t)$ определяется как потраекторный интеграл Янга, принято называть стохастическими дифференциальными уравнениями смешанного типа.

Общие свойства решений детерминированных уравнений (1.1), где в качестве B_t выступают детерминированные функции, непрерывные по Гельдеру с показателем $\alpha > 1/3$, были впервые сформулированы в работе М. Губинелли. [37, предложение 8]. В ней вводится понятие производной и интеграла Губинелли, доказывается теорема существования решений, а также теорема о непрерывной зависимости решений от начальных данных. В монографии П. Фрица и М. Хайрера [31, гл. 4, 8] выводятся оценки простого вида для интегралов Губинелли и также имеется результат, связанный с интегральной непрерывностью решений детерминированных уравнений (1.1) от начальных данных [31, теорема 8.5]. В приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям указанные результаты означают, что почти наверное имеет место потраекторная интегральная непрерывность решений уравнений вида (1.1) с дробным броуновским движением B_t, компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H > 1/3$, в условиях существования указанных решений. В свою очередь, обобщение теоремы существования решений уравнений (1.1) на случай уравнений с дробными броуновскими движениями, вообще говоря, не столь тривиально, поскольку из существования решения $X(t, \omega)$ при каждом ω не следует его измеримость по ω. Обоснование измеримости решений было дано в работе А. Нойенкирха, И. Нурдэна [59], где доказана теорема существования решений уравнений (1.1) с коэффициентами f класса

C_b^2, дробными броуновскими движениями, имеющими один и тот же индекс Харста $H > 1/3$, и сносом, а также доказана формула замены переменных для указанных уравнений.

Глава 2 настоящей работы также посвящена общим свойствам решений уравнений (1.1). Ее основные результаты — формула замены переменных и теорема о непрерывной зависимости от начальных условий и правых частей решений уравнений (1.1) — обобщают результаты выше упомянутых работ на случай уравнений со сносом и дробным броуновским движением B_t, компоненты которого имеют различные индексы Харста $H_i > 1/3$, $i = 1, \ldots, d$. Полученные результаты опубликованы в работах [3–A, 5–A, 8–A, 9–A, 13–A].

Обозначим через X_t^x решение уравнения (1.1) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$. Особый интерес представляет исследование при малых значениях времени t семейства операторов

$$(\mathbf{P}_t g)(x) = \mathbb{E}(g(X_t^x)), \tag{1.2}$$

соответствующих решениям уравнений (1.1) в предположении, что функция g является достаточно гладкой, и ее производные ограничены. Дело в том, что асимптотические разложения семейства операторов (1.2) при малых значений времени t могут быть применены для получения дифференциальных уравнений в частных производных колмогоровского типа для математических ожиданий от решений уравнения (1.1) в некоторых частных случаях (например, когда все индексы Харста $H_i = 1/2$ или когда дифференциальные потоки, соответствующие коэффициентам уравнения (1.1), коммутируют, см. раздел 3.3 третьей главы).

Известны несколько работ, посвященных исследованию семейства операторов (1.2). Ф. Бадуэн и Л. Кутэн [21] вывели асимптотическую формулу для операторов $\mathbf{P}_t$, используя теорию грубых траекторий (rough paths) Т. Лайонса [54] в случае, когда $H_1 = \ldots = H_d > 1/3$ для уравнения (1.1) без сноса. А. Нойенкирх, И. Нурдэн [59] рассматривали уравнение (1.1) со сносом в случае $H_1 = \ldots = H_d > 1/3$ и получили асимптотическую формулу для операторов $\mathbf{P}_t$, используя теорию интегрирования по грубым траекториям М. Губиннелли [37], [31, глава 4]. В третьей главе настоящей работы результаты статей [21, 59] обобщены на случай уравнения (1.1) со сносом и дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста. В данной главе уравнение (1.1) рассматривается с точки зрения теории грубых траекторий [31, 54], а все интегралы, в свою очередь, рассматриваются как интегралы типа Стратоновича. Уравнение (1.1) в рамках теории интегрирования по грубым траекториям, развитой М. Губинелли [38], может рассматриваться как уравнение типа Ито. М. Хайрер и Д. Келли установили связь между стохастическими дифференциальными уравнениями с дробными броуновскими движениями типа Стратоновича и Ито, а также доказали аналог корректирующей формулы Ито-Стратоновича [41]. Кроме того, в третьей главе исследован случай, когда дифференциальные потоки, соответствующие коэффициентам уравнения (1.1), коммутируют, в котором были получены дифференциальные уравнения в частных производных типа Колмогорова для функций $\varphi(x,t) = \mathbb{E}(g(X_t^x))$. Результаты третьей главы опубликованы в работах [4–A, 5–A, 14–A].

Четвертая глава настоящей работы посвящена некоторым методам интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа. Объектом ее изучения является стохастическое дифференциальное уравнение смешанного типа

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{1.3}$$

где $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — детерминированные функции. Отметим, что в автономном случае, когда коэффициенты f, g, σ не зависят явным образом от t, уравнение (1.3) можно рассматривать как частный случай уравнения (1.1).

Интерес к стохастическим дифференциальным уравнениям смешанного типа вызван тем, что, с одной стороны, они охватывают стохастические дифференциальные уравнения Ито, а с другой стороны, наличие слагаемого с дробным броуновским движением позволяет строить более точные математические модели, учитывающие эффект долговременной памяти процессов, что особенно важно при моделировании экономических и финансовых процессов [22, 23].

В работе Д. Нуаларта и А. Раскану [60] впервые исследуются уравнения смешанного типа, содержащие дробное броуновское движение $B_t^{(H)}$ с индексом Харста $H > 1/2$ и стандартное броуновское движение W_t. Стоит отметить, что из выведенных в работе [60] оценок можно получить условия, обеспечивающие интегральную непрерывность решений уравнений смешанного типа. Д. Нуаларт и Дж. Гуэрра [39] доказали теорему существования и единственности для уравнений, содержащих винеровский процесс W_t и дробное броуновское движение B_t^H с индексом Харста $H > 1/2$, сочетая при этом теории интегрирования Ито и Янга. Ю.С. Мишура и Г.М. Шевченко [57] обобщили теорему существования для таких уравнений на случай, когда от процессов W_t и B_t^H не требуется их независимость. Достаточно общие условия существования и единственности решений уравнений смешанного типа с запаздыванием получены в работе Г.М. Шевченко [67]. Некоторые другие обобщения теорем существования, а также свойства стохастических дифференциальных уравнений и включений смешанного типа приведены в статьях К. Кубилиуса [51], А.А. Левакова и М.М. Васьковского [3, 11, 14–16], монографии Ю.С. Мишуры [58].

Исследованию устойчивости уравнений смешанного типа посвящены работы [3,36]. В работе [36] получены условия, почти наверное обеспечивающие локальную экспоненциальную устойчивость нулевого решения автономного уравнения (1.3) на конечном отрезке $[0,T]$, не содержащего слагаемого с винеровким процессом W_t, с дробным броуновским движением B_t, компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H > 1/2$. В работе [3] получены условия, гарантирующие (α, p)-асимптотическую устойчивость по вероятности и (α, p)-притяжение решений уравнения (1.3), [3, теорема 1, 2]. Стоит отметить, что задача исследования асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений, содержащих дробные броуновские движения, существенно усложняется по сравнению с задачей исследования аналогичных уравнений Ито, а ряд основополагающих методов, таких как второй метод Ляпунова исследования устойчивости, неприменим вовсе [3]. В связи с этим проблема нахождения решений уравнений (1.3) в явном виде представляется актуальной и важной.

Целью четвертой главы является в нахождение методов построения решений (либо их вероятностных характеристик) в явном виде стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа. В частности, приводятся необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование замен переменных, сводящих уравнение (1.3) к простейшим и линейным неоднородным уравнениям смешанного типа, и обобщающие результаты из [12, 35]. Используя подход к интегрированию непрерывных процессов с конечной квадратической вариацией, разработанный в [65], получается соотношение между решениями уравнений (1.3) и решениями соответствующих уравнений Стратоновича. Аналогичная связь хорошо известна для процессов Ито [12] и в ряде случаев помогает строить решения стохастических дифференциальных уравнений в явном виде.

Для нахождения вероятностных характеристик (математических ожиданий, плотностей распределений) решений стохастических дифференциальных уравнений Ито, как правило, используют прямые и обратные уравнения Колмогорова [12]. При выводе этих уравнений ключевую роль играет марковское свойство решений автономных стохастических дифференциальных уравнений Ито [17]. Решения стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, вообще говоря, не являются семимартингалами (даже в простейшем случае $f = g = 0$, $\sigma = 1$) и, как следствие, не обладают марковским свойством. В настоящей работе для вывода аналогов уравнений Колмогорова для автономных уравнений вида (1.3) используется принципиально другой подход: используется явное представление решений уравнений (1.3) через детерминированные дифференциальные потоки, соответствующие коэффициентам уравнения (1.3), при этом ключевую роль играет условие коммутирования соответствующих дифференциальных потоков. Более того, показано, что без предположения о коммутировании дифференциальных потоков, соответствующих коэффициентам уравнения (1.3), аналоги уравнений Колмогорова для смешанных уравнений, вообще говоря, не имеют места. Представленный в настоящей работе подход к выводу аналогов уравнений Колмогорова близок к методам работ [21], [5–А], где аналогичные уравнения получены для уравнений Стратоновича, содержащих дробные броуновские движения с индексами Харста, большими $1/3$. Но в отличие от упомянутых работ в настоящей работе условия на гладкость коэффициентов рассматриваемого стохастического дифференциального уравнения существенно ослаблены за счет того, что показатель Харста соответствующих дробных броуновских движений больше $1/2$. Результаты четвертой главы опубликованы в работах [6–А, 15–А].

Наконец, пятая глава данной работы посвящена вопросам устойчивости и притяжения решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах. Для таких уравнений определяющую роль в исследовании устойчивости и притяжения решений по-прежнему играют классические методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений: метод функционалов Ляпунова, метод интегральных неравенств, исследование устойчивости нелинейных уравнений по линейному приближению и др., что позволяет получать более точные результаты по сравнению с уравнениями (1.1) более общего вида.

Теория устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в конечномерных гильбертовых пространствах изучена наиболее полно. В монографии [49] рассматриваются уравнения относительно $X \in \mathbb{R}^d$ со стандартным d-мерным броуновским движением $W(t)$ общего вида:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0 \tag{1.4}$$

с постоянными начальными условиями $X(0,\omega) \equiv x \in \mathbb{R}^n$. В ней доказаны аналоги теорем Ляпунова об устойчивости решений уравнения (1.4) с коэффициентами, удовлетворяющими по фазовой переменной глобальному условию Липшица. В монографии [19] излагается метод исследования устойчивости решений автономной системы с запаздыванием $X_t = \{X(t+\tau)| -h \leq \tau \leq 0\} \in \in C([-h,0], \mathbb{R}^n)$:

$$dX(t) = f(X_t)dt + g(X_t)dW(t), \quad t \geq 0 \tag{1.5}$$

с начальными условиями $X(0,\omega) = \xi(\omega)$ с помощью квадратичных функционалов Ляпунова. Отметим, что исследования в указанных монографиях проводятся с уравнениями (1.5), коэффициенты которых непрерывны. Для уравнений с разрывными коэффициентами существование решения в классическом смысле не гарантируется и для определения решений требуется привлечение дифференциальных включений [18]. Основная идея этой теории принадлежит А.Ф. Филиппову и состоит в том, что разрывные коэффициенты $f(t, x)$, $g(t, x)$ заменяются в каждой точке (t,x) на наименьшие выпуклые множества $F(t,x)$, $G(t,x)$, содержащие все предельные точки $f(t, x^*)$, $g(t, x^*)$ соответственно при $x^* \to x$. Исследованию устойчивости систем с разрывными коэффициентами посвящена статья [10]. В ней А.А. Леваков методом знакопостоянных функций Ляпунова доказал теоремы об устойчивости решений автономной системы

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), \quad t \geq 0 \tag{1.6}$$

без запаздывания с разрывными коэффициентами f,g. Тем не менее результаты работ [10, 19, 49] не применимы к исследованию устойчивости неавтономных систем с разрывными коэффициентами.

В настоящей работе с помощью метода знакопостоянных функций Ляпунова [10, 49] доказана теорема теорема об устойчивости решений системы

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t)))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0 \tag{1.7}$$

в предположении, что линеаризованная система

$$dX(t) = A(t)X(t)dt \tag{1.8}$$

является равномерно экспоненциально устойчивой [1–А, 7–А, 10–А]. Под решением системы (1.7) понимается решение стохастического дифференциального включения, построенного по уравнению в смысле А.Ф. Филиппова, см. также [2].

Заключительная часть пятой главы данной работы посвящена вопросам притяжения к нулю решений стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространствах. Объектом изучения в ней выступает уравнение вида

$$dX(t,\omega) = (AX(t,\omega)+f(t,X(t,\omega))dt+g(t,X(t,\omega))dW(t),\ \ t>0, X\in H \quad (1.9)$$

в сепарабельном гильбертовом пространстве H с начальным условием $X(0,\omega) = \xi(\omega)$, коэффициенты f и g которого удовлетворяют локальному условию Липшица и имеют линейный порядок роста, а линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор $A\colon H \to H$ порождает C_0-полугруппу $S(t)$, $t \geq 0$ (см. [61]). Существуют несколько определений решений для уравнения (1.9) (см. [28, 29]). Как правило, рассматривают либо сильные решения $X(t,\omega)$ как процессы, удовлетворяющие интегральному уравнению

$$X(t,\omega) = \xi(\omega)+\int_0^t (AX(s,\omega)+f(s,X(s,\omega)))ds+\int_0^t g(s,X(s,\omega))dW(s), \quad (1.10)$$

или же слабые решения $X(t,\omega)$ как процессы, удовлетворяющие интегральному уравнению

$$X(t,\omega) = S(0)\xi(\omega)+\int_0^t S(t-s)f(s,X(s,\omega))ds+\int_0^t S(t-s)g(s,X(s,\omega))dW(s). \quad (1.11)$$

К настоящему времени получены глубокие результаты о количественных и качественных свойствах решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. Теоремы о существовании и асимптотических свойствах исходного уравнения с начальным условием доказаны в работах [68], [7–А]. В работах К. Лю [52, 53] были получены п.н. точные асимптотические оценки для решений исходного уравнения с начальным условием без запаздывания с коэффициентами, удовлетворяющими глобальному условию Липшица. В статье А. Ичикава [45] получены оценки для математического ожидания функционала Ляпунова от решения исходной задачи без запаздывания, в случае автономных коэффициентов $f(s,X(s)) = f(X(s))$, $g(s,X(s)) = g(X(s))$, удовлетворяющих глобальному условию Липшица. В статье Т. Танигучи [69] доказана экспоненциальная устойчивость p-го момента решения исходного уравнения $\mathbb{E}\,\|X(s,\omega)\|^p$, $p > 2$, в предположении, что коэффициенты f, g удовлетворяют локальному условию Липшица.

Настоящая работа призвана обобщить полученные результаты на случай коэффициентов уравнения (1.9), удовлетворяющих локальному условию Липшица. Для таких уравнений доказана теорема о притяжении слабых решений к нулю [2–A, 7–A, 12–A].

Выводы

В данной главе был проведен аналитический обзор литературных источников по теме диссертации. Проведенный обзор позволяет сделать заключение об актуальности и важности задач, рассматриваемых в диссертации, для теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями. Задачи, рассматриваемые в диссертации, затрагивают следующие вопросы:

1) Исследование общих свойств и получение асимптотических разложений математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные показатели Харста.

2) Получение методов точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа.

3) Исследование устойчивости и притяжения решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартными броуновскими движениями в гильбертовых пространствах.

Результаты, полученные в ходе решения указанных задач, являются новыми в теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями.

ГЛАВА 2
ОБЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

2.1 Предварительные сведения

2.1.1 Теория меры

Пусть T — некоторое множество. Семейство подмножеств $\mathcal{F}$ множества T называют σ-алгеброй, если для него выполнены следующие свойства: $\emptyset \in \mathcal{F}$; если $A \in \mathcal{F}$, то и $T \setminus A \in \mathcal{F}$; объединение не более чем счетного количества множеств $\cup A_n \in \mathcal{F}$, если $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$. Пару $(T, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подмножеств множества T, называют измеримым пространством.

Пусть $(T, \mathcal{F})$ — измеримое пространство. Функцию $\mu \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ называют мерой, если выполнены следующие свойства: $\mu(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{F}$; $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ для любого не более чем счетного объединения попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathcal{F}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$, $n,m \in \mathbb{N}$. Меру μ называют конечной, если $\mu(T) < \infty$. Меру μ называют вероятностной, если она конечна и $\mu(T) = 1$. Меру μ пространства $(T, \mathcal{F})$ называют полной, если для любого множества E меры $\mu(E) = 0$ каждое его подмножество $A \subset E$ измеримо, то есть $A \in \mathcal{F}$.

Пусть далее T — метрическое пространство. Наименьшую σ-алгебру над открытыми множествами T называют борелевской σ-алгеброй пространства T и обозначают $\mathcal{B}(T)$. Пусть $(T_1, \mathcal{F}_1)$, $(T_2, \mathcal{F}_2)$ — измеримые пространства. Отображение $f \colon T_1 \to T_2$ называют $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$-измеримым, если для любого множества $M \in \mathcal{F}_2$ его прообраз $f^{-1}(M) \in \mathcal{F}_1$. Отображение $f \colon T_1 \to T_2$ называют измеримым по Борелю, если оно $(\mathcal{B}(T_1), \mathcal{B}(T_2))$-измеримо.

Пусть $(T, \mathcal{F})$ — измеримое пространство с конечной полной мерой μ, X — банахово пространство. Функция $f \colon T \to X$ называется простой, если существуют $x_1, \ldots, x_n, \ldots \in X$ и $E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{F}$, такие, что $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$, $\cup_{i=1}^{\infty} E_i = T$, $f = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{1}_{E_i}$. Функция $f \colon T \to X$ называется μ-измеримой, если существует последовательность простых функций (f_n), что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n(t) -$

$f(t)\| = 0$ для μ-почти всех $t \in T$. Если последовательность (f_n) μ-измеримых функций почти всюду сходится к f, то f также μ-измерима. μ-измеримая функция $f\colon T \to X$ называется интегрируемой по Бохнеру, если существует последовательность (f_n) простых функций такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int_T \|f_n - f\| d\mu = 0$. В этом случае интеграл Бохнера $\int_E f d\mu$ определяется для каждого $E \in \mathcal{F}$ с помощью соотношения $\int_E f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$, где $\int_E f_n d\mu$ — интеграл, определенный обычным образом: $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \mu(E_i \cap E)$. μ-измеримая функция $f\colon T \to X$ интегрируема по Бохнеру тогда и только тогда, когда функция $\|f\|\colon T \to \mathbb{R}^+$ является $(\mathcal{F},\mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$-измеримой и $\int_T \|f\| d\mu < \infty$. Если $p \in [1,\infty)$, то символом $L_p(T,X)$ обозначаем множество классов интегрируемых по Бохнеру функций $f\colon T \to X$, таких, что $\|f\|_{L_p} = (\int_T \|f\|^p d\mu)^{1/p} < \infty$. В случае $X = \mathbb{R}^d$ определения интеграла и интегрируемых функций по Бохнеру совпадают с определениями интеграла и функций, интегрируемых по Лебегу.

Предложение 2.1 (теорема о мажорируемой сходимости [43, с. 83]). *Пусть $(T, \mathcal{F})$ — измеримое пространство с конечной полной мерой μ, X — банахово пространство. Если последовательность функций $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset L_1(T, X)$ сходится почти всюду к функции $f(t)$, и при этом существует интегрируемая по Лебегу функция $\varphi\colon T \to \mathbb{R}$ такая, что $\|f_n(t)\| \le \varphi(t)$ для всех $t \in T$ и n, то функция f интегрируема по Бохнеру, причем*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{I}} f_n(t) d\mu = \int_{\mathcal{I}} \lim_{n\to\infty} f_n(t) d\mu = \int_{\mathcal{I}} f(t) d\mu.$$

2.1.2 Теория случайных процессов

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, т.е. измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с заданной на нем вероятностной мерой $\mathbb{P}$. Случайной величиной $\xi = \xi(\omega)$ называют любую функцию $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, являющуюся $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$-измеримой. Под случайным процессом $X(t,\omega) = X_t(\omega)$, $t \in \mathbb{R}$ понимают семейство заданных на Ω случайных величин $(X_t(\omega))_{t\in\mathbb{R}}$, зависящее от параметра $t \in \mathbb{R}$. Функцию $t \mapsto X(t,\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ называют траекторией процесса $X(t,\omega)$.

Случайный процесс $X(t,\omega)$, $t \ge \tau$ называют центрированным, если $\mathbb{E}\, X(t,\omega) = 0$ для любого $t \ge \tau$. Случайный процесс $X(t,\omega)$,

$t \geq 0$, принимающий значения в $\mathbb{R}^d$, называют гауссовским, если для любых $t_1, t_2, \dots, t_n$ таких, что $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, случайная величина $Z = (X(t_1, \omega), X(t_2, \omega), \dots, X(t_n, \omega)) \in \mathbb{R}^{dn}$ имеет (многомерное) нормальное распределение. Это означает, что существует вектор $M \in \mathbb{R}^{dn}$ и неотрицательно определенная матрица $C \in \mathbb{R}^{dn \times dn}$ такие, что

$$\mathbb{E}\, e^{i\langle u, Z\rangle} = \exp\left(-\frac{1}{2} u^\top C u + i\langle u, M\rangle\right)$$

для любого вектора $u \in \mathbb{R}^{dn}$.

Рассмотрим возрастающее семейство под-σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$, $t \geq \tau$ из $\mathcal{F}$ ($\tau \in \mathbb{R}$), т.е. такие σ-алгебры $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$, что $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ для любых $t \geq s \geq \tau$. Семейство $(\mathcal{F}_t)$ называют непрерывным справа, если $\mathcal{F}_t = \cap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ для любого $t \geq \tau$. Непрерывное справа семейство σ-алгебр называют потоком σ-алгебр. Случайный процесс $X(t, \omega)$, заданный на $[\tau, +\infty) \times \Omega$ и принимающий значения в метрическом пространстве T, называют $\mathcal{F}_t$-согласованным, если для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(T)$ и любого $t \geq \tau$ множество $\{\omega \in \in \Omega :\ X(t,\omega) \in B\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}_t$. Заметим также, что для любого случайного процесса $X(t,\omega)$ существует поток σ-алгебр $(\mathcal{F}^{X_t})$, с которым данный процесс согласован. Такой поток можно построить следующим образом: обозначим через σ_t наименьшую σ-алгебру, относительно которой измеримы все случайные величины $X(s,\omega)$, $s \in [\tau, t]$, тогда $\mathcal{F}^{X_t} = \cap_{\varepsilon > 0} \sigma_{t+\varepsilon}$. Далее для краткости будем опускать аргумент $\omega \in \Omega$ у случайных процессов. Пусть $\mathcal{J}$ — наименьшая σ-алгебра на $[\tau, +\infty) \times \Omega$, относительно которой измеримы все непрерывные слева $\mathcal{F}_t$-согласованные случайные процессы. Случайный процесс $X(t, \omega)$, заданный на $[\tau, +\infty) \times \Omega$ и принимающий значения в метрическом пространстве T, называют предсказуемым, если для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(T)$ множество $\{(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega :\ X(t,\omega) \in B\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{J}$. Процесс $X(t)$ называют $\mathcal{F}_t$-мартингалом, если он $\mathcal{F}_t$-согласован, $\mathbb{E}\,|X(t)| < +\infty$ для всех t и $\mathbb{E}(X(s)|\mathcal{F}_t) = X(t)$ для всех $s \geq t$.

Пусть U — сепарабельное гильбертово пространство. Зафиксируем некоторый ядерный симметрический положительно определенный оператор $Q \in \in \mathcal{L}(U)$, для которого существуют полный ортонормированный базис $\{e_k\} \subset \subset U$ и последовательность положительных действительных чисел (λ_k), таких, что $Qe_k = \lambda_k e_k$, $k \geq 1$, tr$Q = \sum_k \lambda_k < \infty$. $\mathcal{F}_t$-согласованным Q-броуновским движением (винеровским процессом) со значениями в U называют непрерывный случайный процесс $W(t)$, $t \geq 0$, принимающий значения в $\mathbb{R}^d$ и удовлетворяющий равенству

$$\mathbb{E}\left(e^{i\langle\xi,W(t)-W(s)\rangle_U}\middle|\mathcal{F}_s\right)=e^{-(t-s)\langle Q\xi,\xi\rangle_U/2}\quad\text{п.н.}$$

для любого $\xi\in U$ и любых $t\geq s\geq 0$. Если $W(t)$ — $\mathcal{F}_t$-согласованное Q-броуновское движение, то существует последовательность независимых одномерных $\mathcal{F}_t$-броуновских движений $W_k(t)$, $k\geq 1$ таких, что $W(t)=$ $=\sum_k\sqrt{\lambda_k}W_k(t)e_k$, причем данный ряд сходится локально равномерно на $\mathbb{R}^+$ п.н. В случае $U=\mathbb{R}^d$ можно выбрать оператор $Q=I_d$, и в этом случае приходим к определению d-мерного $\mathcal{F}_t$-согласованного броуновского движения. Можно показать, что для одномерного броуновского движения справедливы следующие свойства [4, гл. 1, §7], [17, раздел 2.2]:

– процесс $W(t)$ имеет независимые приращения, т.е. для любых $t_0,t_1,\ldots,t_n$ таких, что $t_0\leq t_1\leq\ldots\leq t_n$ случайные величины $W(t_0),W(t_1)-W(t_0),\ldots,W(t_n)-W(t_{n-1})$ независимы в совокупности;

– приращения $W(t)-W(s)$ для любых $t>s\geq 0$ распределены по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией $(t-s)$;

– процесс $W(t)$ имеет неограниченную вариацию на любом отрезке $[S,T]\subset\mathbb{R}^+$, т.е.

$$\sup_{\mathcal{P}}\sum_{j=1}^{n}|W(t_j)-W(t_{j-1})|=+\infty,\quad\text{п.н.}$$

где супремум берется по всем разбиениям $\mathcal{P}=\{S\leq t_0\leq t_1\leq\ldots\leq t_n\leq T\}$;

– процесс $W(t)$ является $(\mathcal{F}_t)$-мартингалом.

Дробным броуновским движением с индексом Харста $H\in(0{,}1)$ называют центрированный непрерывный гауссовский процесс $B^{(H)}(t)$, $t\geq 0$ с ковариационной функцией

$$\mathbb{E}\,B^{(H)}(t)B^{(H)}(s)=\frac{1}{2}\left(t^{2H}+s^{2H}-|t-s|^{2H}\right).$$

Существование дробного броуновского движения следует из теоремы существования центрированного гауссовского процесса с заданной ковариационной функцией [63, гл. I, раздел 24].

Можно показать, что при $H=1/2$ дробное броуновское движение $B^{(1/2)}(t)$ является винеровским процессом. Иными словами, одномерный процесс $W(t)$ является частным процессом из семейства $B^{(H)}(t)$ при

$H = 1/2$. Кроме того, дробное броуновское движение обладает следующими свойствами [22, гл. 1]:

– процесс $B^{(H)}(t)$ имеет независимые приращения тогда и только тогда, когда $H = 1/2$; при $H > 1/2$ приращения положительно коррелированны (т.е. $\mathbb{E}(B^{(H)}(t_3) - B^{(H)}(t_2))(B^{(H)}(t_2) - B^{(H)}(t_1)) > 0$ для любых $t_3 > t_2 > t_1 \geq 0$), а при $H < 1/2$ — отрицательно;

– почти все траектории процесса $B^{(H)}(t)$ непрерывны по Гельдеру с любым показателем, строго меньшим H, т.е. для любого $\varepsilon > 0$:

$$\|B^{(H)}\|_{H-\varepsilon} = \sup_{0 \leq s < t} \frac{|B^{(H)}(t) - B^{(H)}(s)|}{|t-s|^{H-\varepsilon}} < +\infty$$

– почти все траектории процесса $B^{(H)}(t)$ не дифференцируемы ни в одной точке для любого $H \in (0,1)$ (в том числе траектории винеровского процесса не дифференцируемы).

Под d-мерным дробным броуновским движением будем понимать процесс $B(t) = (B_1(t), \ldots, B_d(t))$, принимающий значения в $\mathbb{R}^d$, компоненты которого являются независимыми одномерными дробными броуновскими движениями.

2.1.3 Потраекторный интеграл Янга

Обратимся сначала к случаю, когда $B(t)$ — дробное броуновское движение, принимающее значения в $\mathbb{R}^d$, все компоненты которого имеют индекс Харста $H > 1/2$. Тогда почти все траектории процесса $B(t)$ непрерывны по Гельдеру с любым показателем, меньшим H. Из результатов Янга [71] следует, что для любого процесса $\phi(t,\omega)$, почти все траектории которого непрерывны по Гельдеру с показателем $\gamma > 1 - H$, можно определить интеграл по $B(t)$ как потраекторный интеграл Римана-Стилтьеса (зачастую называемый интегралом Янга), т.е. как предел с вероятностью 1 интегральных сумм

$$\int_S^T \phi(t,\omega) dB(t,\omega) = \lim_{|\mathcal{P}| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \phi(\tau_k,\omega)(B(t_k,\omega) - B(t_{k-1},\omega)).$$

Здесь предел понимается не зависящим от последовательности разбиений $\mathcal{P} = \{S \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq T\}$ и промежуточных точек $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $|\mathcal{P}| = \max |t_k - t_{k-1}|$, $k = 1, \ldots, n$. В свою очередь, применительно к стохастическим дифференциальным уравнениям, показатель непрерывности по

Гельдеру процесса $\phi(t,\omega) = \sigma(t, X(t,\omega))$ определяется показателем непрерывности решения $X(t,\omega)$ (совпадающим с показателем $B(t,\omega)$). Таким образом, с необходимостью возникает неравенство $H > 1 - H$, откуда $H > 1/2$.

Обозначим через $V_p(f, [S,T]) = \left(\sup\limits_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p\right)^{1/p}$, $p > 0$, p-вариацию функции $f(t)$ на отрезке $[S,T]$ (супремум берется по всем разбиениям $\mathcal{P} = \{S \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq T\}$). Для интеграла Янга справедливо следующее фундаментальное свойство.

Предложение 2.2 (неравенство Лав-Янга, [71]). *Пусть функции $f(t)$, $g(t)$ таковы, что $V_p(f, [S,T]), V_q(g, [S,T]) < +\infty$ для некоторых $p,q > 0$ таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. Если к тому же функции f и g не имеют общих точек разрыва, то интеграл Янга $\int_S^T f(t)dg(t)$ существует, и для него справедливо следующее неравенство:*

$$\left|\int_S^T f(t)dg(t) - f(\tau)(g(T) - g(S))\right| \leq C_{p,q} V_p(f, [S,T]) V_q(g, [S,T])$$

для любого $\tau \in [S,T]$, где $C_{p,q} = \zeta(p^{-1} + q^{-1})$, где $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}$ — дзета-функция Римана.

2.1.4 Потраекторный интеграл Губинелли

Наконец, рассмотрим случай, когда $B(t)$ — дробное броуновское движение, принимающее значения в $\mathbb{R}^d$, все компоненты которого имеют индекс Харста $H < 1/2$. Вновь, поскольку процесс $B(t)$ имеет неограниченную вариацию, то интегральные суммы Стилтьеса для интеграла $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$ п.н. не будут сходиться, однако, оказывается, что в интегральные суммы можно ввести дополнительные слагаемые, позволяющие им сходиться п.н. Данный метод возник в теории грубых траекторий [54], [31], [37], позволяющем определить интегралы $\int_0^T Y_t dZ_t$ для функций Y_t, Z_t, непрерывных по Гельдеру (не обязательно случайных процессов, зависящих также от ω). Приведем некоторые основные положения данной теории в соответствии с подходом Губинелли [37], [31, гл. 4].

Будем обозначать через V, W конечномерные банаховы пространства над полем $\mathbb{R}$. Множество функций, непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha \in$

$\in (0,1]$, будем обозначать следующим образом:

$$C^\alpha([0,T],W) = \left\{ Z\colon [0,T] \to W \;\middle|\; \|Z\|_\alpha = \sup_{s,t\in[0,T]:s\neq t} \frac{|Z_t - Z_s|_W}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\}.$$

В дальнейшем будут рассматриваться функции $R(s,t)$, отображающие $(s,t) \in [0,T]^2$ непрерывно в W, которые удовлетворяют некоторому аналогу свойства α-непрерывности по Гельдеру [31, глава 1]. Более точно, через $C_2^\alpha([0,T]^2, W)$ будем обозначать множество функций двух переменных $R(s,t) = R_{s,t}$, для каждой из которых существует константа C такая, что $|R_{s,t}| \le C|t-s|^\alpha$ для всех $(s,t) \in [0,T]^2$. Наименьшую такую константу для функции R будем обозначать следующим образом:

$$\|R\|_\alpha = \sup_{s,t\in[0,T]:s\neq t} \frac{|R_{s,t}|_W}{|t-s|^\alpha}.$$

Отметим также, что если $Z \in C^\alpha([0,T],W)$ — непрерывная по Гельдеру функция одной переменной, то ее приращения $(s,t) \mapsto Z_t - Z_s$ принадлежат множеству $C_2^\alpha([0,T]^2, W)$. Поэтому обозначение $Z_{s,t} = Z_t - Z_s$ будет также использоваться для приращений функции одной переменной Z, определенной на $[0,T]$.

Пусть $\mathcal{I}$ — подотрезок отрезка $[0,T]$. Введем следующие обозначения:

$$\|Y\|_{\alpha;\mathcal{I}} = \sup_{\substack{s,t\in\mathcal{I}\\ s\neq t}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}, \quad \|Y\|_{\alpha;\mathcal{I},\delta} = \sup_{\substack{s,t\in\mathcal{I}\\ 0<|t-s|\le\delta}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$$

для функций $Y \in C^\alpha([0,T],U_1)$ или $Y \in C_2^\alpha([0,T]^2, U_2)$. Очевидно,

$$\|\cdot\|_{\alpha;\mathcal{I},\delta} \le \|\cdot\|_{\alpha;\mathcal{I}} \le \|\cdot\|_{\alpha;[0,T],|\mathcal{I}|} \le \|\cdot\|_{\alpha;[0,T]}$$

для любых $\mathcal{I} \subset [0,T]$, $\delta \in (0,|\mathcal{I}|]$, где $|\mathcal{I}|$ — длина отрезка $\mathcal{I}$.

Пусть далее $\alpha \in (1/3,1/2]$.

Говорят, что для функции $Z\colon [0,T] \to W$ функция $\mathbb{Z}\colon [0,T]^2 \to W \otimes W$ является процессом второго порядка над Z, если она удовлетворяет следующему тождеству Чена:

$$\mathbb{Z}_{s,t} - \mathbb{Z}_{s,u} - \mathbb{Z}_{u,t} = Z_{s,u} \otimes Z_{u,t}$$

для любой тройки $(s,u,t) \in [0,T]^3$.

Под множеством α-непрерывных по Гельдеру грубых траекторий над W (обозначаемым $\mathscr{C}^\alpha([0,T],W)$) понимают множество всех пар $(Z,\mathbb{Z})$ таких, что функция $Z \in C^\alpha([0,T], W)$ и $\mathbb{Z}$ является процессом второго порядка над Z, удовлетворяющим условию $\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha} < \infty$.

Под множеством α-непрерывных по Гельдеру геометрических грубых траекторий над W (обозначаемым $\mathscr{C}_g^\alpha([0,T], W)$) понимают множество всех пар $(Z, \mathbb{Z}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], W)$, для которых имеет место следующее соотношение:

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{Z}_{s,t}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{Z}_{s,t} + \mathbb{Z}_{s,t}^T\right) = \frac{1}{2} Z_{s,t} \otimes Z_{s,t}$$

для любой пары $(s,t) \in [0,T]^2$.

Говорят, что функция $Y \in C^\alpha([0,T], \mathcal{L}(W,V))$ управляется функцией $Z \in C^\alpha([0,T], W)$, если существует $Y' \in C^\alpha\big([0,T], \mathcal{L}(W, \mathcal{L}(W,V))\big)$ (называемое производной Губинелли Y), такое, что остаток $R_{s,t}^Y = Y_{s,t} - Y_s' Z_{s,t}$ удовлетворяет неравенству $\|R^Y\|_{2\alpha} < +\infty$. Множество всех (Y, Y') таких, что Y управляется Z, будем обозначать $\mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(W,V))$.

Замечание 2.1. Множество $\mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(W,V))$ является банаховым пространством с нормой $\|(Y,Y')\| = |Y_0| + |Y_0'| + \|Y'\|_\alpha + \|R^Y\|_{2\alpha}$.

Замечание 2.2. В общем случае Y' определено неоднозначно, и мы будем называть производной Губинелли любое Y', удовлетворяющее сформулированному выше определению.

Замечание 2.3. Далее для обозначения производной Губинелли будем использовать $'$, а обычную производную будем записывать с помощью дифференциального оператора D.

Пусть $(Z,\mathbb{Z}) \in \mathscr{C}^\alpha([0,T], W)$, а также $(Y, Y') \in \mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(W,V))$. Потраекторным интегралом Губинелли Y по Z называют предел интегральных сумм

$$\int_0^T Y dZ = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} (Y_{t_i} Z_{t_i, t_{i+1}} + Y_{t_i}' \mathbb{Z}_{t_i, t_{i+1}}), \tag{2.1}$$

где $|\mathcal{P}| = \max |t_{i+1} - t_i|$ — диаметр разбиения $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = T\}$, а предел понимается не зависящим от последовательности разбиений $\mathcal{P}$. Если $Z \in C^\beta([0,T], W)$, $Y \in C^\gamma([0,T], \mathcal{L}(W,V))$, $\beta + \gamma > 1$, то потраекторный интеграл Губинелли совпадает с потраекторным интегралом Янга, определяемым как предел интегральных сумм

$$\int_0^T Y dZ = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1} \in \mathcal{P}} Y_{t_i} Z_{t_i, t_{i+1}}.$$

Замечание 2.4. Слагаемое $Y'_{t_i}\mathbb{Z}_{t_i,t_{i+1}}$ записано корректно в том смысле, что $\mathcal{L}(W, L(W, V)) \cong \mathcal{L}(W \otimes W, V)$. Действительно, указанное произведение можно понимать как результат действия билинейной формы на тензорное произведение двух векторов. Более точно, если

$$\mathbb{Z} = z \otimes z = (z_j z_k)\,, \quad Y' = \left(y'_{ijk}\right),$$
$$i = 1,2,\ldots,\mathrm{dim}V, \quad j,k = 1,2,\ldots,\mathrm{dim}W,$$

то

$$Y'\mathbb{Z} = \left(\sum_{j,k=1}^{\mathrm{dim}W} y'_{ijk} z_j z_k\right)_{i=1}^{\mathrm{dim}V}.$$

Посему потраекторный интеграл, определенный выше, принимает значения в пространстве V.

Далее будет существенно использоваться следующее предложение [31, теорема 4.10], [37, предложение 1].

Предложение 2.3. *Пусть функция $Z \in \mathscr{C}^\alpha(\mathcal{I}, W)$ и $(Y,Y') \in \in \mathcal{D}_Z^{2\alpha}(\mathcal{I}, \mathcal{L}(W, V))$, $\mathcal{I} = [0,T]$. Тогда существует константа $C > 0$, зависящая лишь от α и $|\mathcal{I}| = T$, такая, что для любых $s,t \in \mathcal{I}$ выполняется неравенство*

$$\left|\int_s^t Y_r dZ_r - Y_s Z_{s,t} - Y'_s \mathbb{Z}_{s,t}\right| \le C\left(\|Z\|_{\alpha;\mathcal{I}} \|R^Y\|_{2\alpha;\mathcal{I}} + \|\mathbb{Z}\|_{2\alpha;\mathcal{I}} \|Y'\|_{\alpha;\mathcal{I}}\right) |t-s|^{3\alpha}.$$

Причем константа $C = C(\alpha, |\mathcal{I}|)$ может быть выбрана не зависящей от $|\mathcal{I}| = T$, если $T \in (0,1]$.

Замечание 2.5. В предложении 2.3 несущественен тот факт, что отрезок $\mathcal{I}$ имеет вид $[0,T]$. Для произвольного отрезка $\mathcal{I} = [a, a+T]$ предложение также справедливо ввиду замены переменных $\bar{s} = s - a$, $\bar{t} = t - a$ ($s,t \in [a, a+T]$, $\bar{s}, \bar{t} \in [0,T]$) и замен функций $\bar{Y}_{\bar{s}} = Y_{a+\bar{s}}$, $\bar{Z}_{\bar{s}} = Z_{a+\bar{s}}$ (очевидно, указанные нормы и интегралы сохраняют свои значения).

Необходимость ограничения $\alpha > 1/3$ на интуитивном уровне можно пояснить следующим образом: в слагаемом вида $Y'\mathbb{Z}$ в интегральной сумме функция $Y' \in C^\alpha$, а $\mathbb{Z} \in C_2^{2\alpha}$. Из условия сходимости интегральных сумм потраекторного интеграла Янга можно заключить, что $\alpha + 2\alpha > 1$, т.е. $\alpha > 1/3$.

Вернемся к дробному броуновскому движению. При $H \in (1/3, 1/2)$ п.н. имеет место включение $B(t) \in C^{H^*}([0,T], \mathbb{R}^d)$ для любого $H^* < H$, $H^* > 1/3$.

Поэтому для любого процесса $\phi(t,\omega)$ п.н. управляемого дробным броуновским движением $B(t)$ можно определить потраекторный интеграл Губинелли как предел п.н. интегральных сумм

$$\int_0^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\mathcal{P}} (\phi(t_i,\omega)B_{t_i,t_{i+1}}(\omega) + \phi'(t_i,\omega)\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}(\omega))$$

при некотором выборе процесса второго порядка $\mathbb{B}$ над B. Далее будет приведено явное определение процесса второго порядка над B, удовлетворяющего указанным выше определениям.

2.2 Существование решений и формула замены переменных

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, на котором определены независимые одномерные дробные броуновские движения $B_t^{(1)},\ldots,B_t^{(d)}$ с индексами Харста $H_1,\ldots,H_d \in (1/3,1)$. Введем обозначение $B_t = (B_t^{(0)},\ldots,B_t^{(d)})^\top$ для $(d+1)$-мерного дробного броуновского движения, в котором $B_t^{(0)} = t$. Пусть также $H_0 = 1$. Пусть $H_{\min}$ — значение наименьшего из индексов Харста H_i, $i = 0,\ldots,d$. Выберем и зафиксируем некоторое $H \in (1/3, 1/2]$ такое, что $H < H_{\min}$.

Объектом изучения данной главы станет следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = f(X_t)dB_t,\ t \in [0,T], \tag{2.2}$$

в котором f — $(n \times (d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0\ldots,d,$. Через X_t^x будем обозначать решение уравнения (2.2) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$.

Приведем конструктивное определение процесса второго порядка над дробным броуновским движением B.

О п р е д е л е н и е 2.1. Процессом второго порядка над дробным броуновским движением B будем называть процесс $\mathbb{B}\colon [0,T]^2\times\Omega \to \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$, определенный следующими равенствами:

$$\mathbb{B}_{s,t} = \left(\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}\right)_{i,j=0}^{d},$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} \overset{L^2}{=} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \int_{\mathcal{P}} B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)}, \quad \int_{\mathcal{P}} B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)} = \sum_{t_k, t_{k+1} \in \mathcal{P}} B_{s,t_k}^{(i)} B_{t_k,t_{k+1}}^{(j)}, \quad 1 \le i < j \le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)} = \int_s^t B_{s,r}^{(j)} dr \overset{\text{п.н.}}{=} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_k, t_{k+1} \in \mathcal{P}} B_{s,t_k}^{(j)} (t_{k+1} - t_k), \quad 1 \le j \le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,i)} = \frac{1}{2} \left(B_{s,t}^{(i)}\right)^2, \quad 0 \le i \le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} = -\mathbb{B}_{s,t}^{(j,i)} + B_{s,t}^{(i)} B_{s,t}^{(j)}, \quad 0 \le j < i \le d$$

для любой пары $(s,t) \in [0,T]^2$, где $\mathcal{P} = \{s = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = t\}$ — произвольное разбиение отрезка $[s,t]$, $|\mathcal{P}| = \max |t_{k+1} - t_k|$, а все пределы понимаются не зависящими от последовательности разбиений $\mathcal{P}$. Здесь обозначения $\overset{L^2}{=}$, $\overset{\text{п.н.}}{=}$ применяются для того, чтобы показать, что соответствующие пределы понимаются в смысле $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и $\mathbb{P} = 1$ соответственно.

Замечание 2.6. Поясним корректность приведенного определения. Интегралы, определяющие $\mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)}$, являются потраекторными интегралами Янга, соответствующие им интегральные суммы сходятся п.н., поскольку сумма показателей непрерывности по Гельдеру тождественной функции и $B_{s,\cdot}^{(j)}$ строго больше 1. Интегральные суммы в $\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}$ имеют конечный предел в L_2 ввиду предложения 10.3 [31], поскольку обе ковариационные функции $R_{B^{(i)}}$, $R_{B^{(j)}}$ имеют конечную ρ-вариацию, $\rho = \frac{1}{2H} < 2$ (см. [32, с. 417, предл. 2.2]).

Предложение 2.4. *Для любого фиксированного* $H \in (1/3, 1/2]$ *такого, что* $H < H_{\min} = \min\limits_{i=0,\ldots,d} H_i$ *имеет место включение* $(B, \mathbb{B}) \in \mathscr{C}_g^H([0,T], \mathbb{R}^{d+1})$ *п.н., и более того,* $\mathbb{E}\, \|\mathbb{B}\|_{2H}^q < \infty$ *для любого* $q \ge 1$.

Доказательство. Условие $\mathrm{Sym}(\mathbb{B}_{s,t}) = \frac{1}{2} B_{s,t} \otimes B_{s,t}$ очевидно выполнено по определению $\mathbb{B}$, поэтому достаточно доказать, что $(B, \mathbb{B}) \in \mathscr{C}^H([0,T], \mathbb{R}^{d+1})$. Обозначим через $\widetilde{\mathbb{B}}_{s,t} = \left(\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}\right)_{i,j=1}^{d}$ процесс второго порядка над дробным броуновским движением $\widetilde{B}_t = (B_t)_{i=1}^{d}$ с индексами Харста $H_i \in (1/3,1)$, $i = 1, \ldots, d$. Покажем, что пара $(B, \mathbb{B})$ удовлетворяет условиям теоремы 10.4 из [31]. Как было показано [31, раздел 10.3] и [34, раздел 2.3], справедливы неравенства

$$\|R_{B^{(i)}}\|_{\frac{1}{2H_i}-\mathrm{var};[s,t]^2} \le M_i|t-s|^{2H_i}, \quad H_i \in (1/3,1/2],$$
$$\|R_{B^{(i)}}\|_{1-\mathrm{var};[s,t]^2} \le M_i|t-s|, \quad H_i \in (1/2,1)$$

для $i = 1,\ldots,d$ с некоторыми константами M_i, где $\|R_{B^{(i)}}\|_{\rho-\mathrm{var};[s,t]^2}$ — ρ-вариация функции $R_{B^{(i)}}$ на прямоугольнике $[s,t]^2$ (см. определение в [31, раздел 10.2]). Следующее неравенство является простым следствием из определения ρ-вариации:

$$\|R_{B^{(i)}}\|_{\rho'-\mathrm{var};[s,t]^2} \le \left(\sup_{u,v,u',v'\in[s,t]}\left|\mathbb{E}(B^{(i)}_{u,v}B^{(i)}_{u',v'})\right|\right)^{\frac{\rho'-\rho}{\rho'}}\left(\|R_{B^{(i)}}\|_{\rho-\mathrm{var};[s,t]^2}\right)^{\frac{\rho}{\rho'}}$$

для любого $\rho' > \rho$. Непосредственное вычисление показывает, что $\left|\mathbb{E}(B^{(i)}_{u,v}B^{(i)}_{u',v'})\right| \le |t-s|^{2H_i} \le T^{2H_i}$ для любых $u,v,u',v' \in [s,t] \subset [0,T]$. Полагая $H_* = \min\{\frac{1}{2}, H_{min}\}$, из последних четырех неравенств можно вывести, что

$$\|R_{B^{(i)}}\|_{\frac{1}{2H_*}-\mathrm{var};[s,t]^2} \le M|t-s|^{2H_*}, \quad i = 1,\ldots,d,$$

где $M = \max\limits_{i=1,\ldots,d} M_i^{H_*/H_i'}T^{2H_i'-2H_*}$, $H_i' = \min\{H_i, \frac{1}{2}\}$. Таким образом, пара $(\widetilde{B},\widetilde{\mathbb{B}})$ удовлетворяет условиям теоремы 10.4 [31] со значением параметра $\rho = \frac{1}{2H_*} \in$ $\in [1,\frac{3}{2})$.

Применяя неравенство Лав-Янга (см. предложение 2.2) при $\tau = s$ к интегралам $\mathbb{B}^{(0,j)}_{s,t}$, $1 \le j \le d$, можем заключить, что для любой пары $(s,t) \in [0,T]^2$ п.н. справедливо неравенство

$$\left|\mathbb{B}^{(0,j)}_{s,t}\right| = \left|\int_s^t B^{(j)}_{s,r}dr\right| \le C_{1,H}|t-s|\|B^{(j)}\|_{\frac{1}{H}-var;[s,t]} \le C_0\|B^{(j)}\|_H|t-s|^{2H},$$

в котором $C_0 = C_{1,H}T^{1-H}$ — константа (зависящая только от H,T), а также была использована зависимость между $\frac{1}{H}$-вариацией и величиной $\|\cdot\|_H$ [33, с. 170]. Очевидно, $\left|\mathbb{B}^{(0,0)}_{s,t}\right| \le \frac{1}{2}T^{2-2H}|t-s|^{2H}$. Также из теоремы 10.4 [31] следует, что $(\widetilde{B},\widetilde{\mathbb{B}}) \in \mathscr{C}^H_g([0,T],\mathbb{R}^d)$, что в свою очередь влечет $\left|\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t}\right| \le \left|\widetilde{\mathbb{B}}_{s,t}\right| \le \|\widetilde{\mathbb{B}}\|_{2H}|t-s|^{2H}$, $\|\widetilde{\mathbb{B}}\|_{2H} < \infty$ п.н. для всех $1 \le i,j \le d$. Таким образом, ввиду эквивалентности норм в $\mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$, можем заключить, что

$$|\mathbb{B}_{s,t}| \le C_d\sum_{i,j=0}^d\left|\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t}\right| \le C_dC_{T,H}\left(1 + \|\widetilde{\mathbb{B}}\|_{2H} + \sum_{j=1}^d\|B^{(j)}\|_H\right)|t-s|^{2H},$$

для любой пары $(s,t) \in [0,T]^2$ п.н. с некоторыми константами C_d и $C_{T,H}$, зависящими только от d и T,H соответственно. Полученное неравенство устанавливает тот факт, что $\|\mathbb{B}\|_{2H} < \infty$ п.н. и, следовательно, $(B,\mathbb{B}) \in \in \mathscr{C}_g^H([0,T],\mathbb{R}^{d+1})$ п.н. (нетрудно убедиться, что тождество Чена также выполняется для всех элементов на позициях $(0,j)$, $(j,0)$, $0 \le j \le d$ в матрицах $\mathbb{B}$, $B \otimes B$).

Применяя неравенство о среднем степенном и применяя оператор математического ожидания, из последнего неравенства можем заключить, что для любого $q \ge 1$ справедливо неравенство

$$\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}\|_{2H}^q \le C_{d,T,H,q}\left(1 + \mathbb{E}\,\|\widetilde{\mathbb{B}}\|_{2H}^q + \sum_{j=1}^d \mathbb{E}\,\|B^{(j)}\|_H^q\right),$$

в котором $C_{d,T,H,q} = (C_d C_{T,H})^q (d+2)^{1-\frac{1}{q}}$. Как известно из [31, теорема 4.10] и [60, Лемма 7.4], $\mathbb{E}\,\|\widetilde{\mathbb{B}}\|_{2H}^q < \infty$ и $\mathbb{E}\,\|B^{(j)}\|_H^q < \infty$ для всех $j = 1,\ldots,d$. Последнее завершает доказательство.

Определение 2.2. Случайный процесс X_t такой, что $(X,X') \in \in \mathcal{D}_B^{2H}([0,T],\mathbb{R}^n)$ п.н., будем называть решением уравнения (2.2), если он п.н. удовлетворяет равенству

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)dB_s, \quad t \in [0,T], \tag{2.3}$$

где интеграл понимается как потраекторный интеграл Губинелли. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Решение уравнения (2.2) с начальным условием $X_0 = x$ будем называть п.н. единственным, если для любого другого решения Y_t уравнения (2.2) с начальным условием $Y_0 = x$ выполняется равенство $\mathbb{P}(X_t = Y_t\ \forall t \in [0,T]) = 1$.

Следующая теорема дает достаточное условие существования и единственности решения уравнения (2.2).

Теорема 2.1. *Если $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, то для любого $x \in \mathbb{R}^n$ уравнение* (2.2) *имеет единственное решение с начальным условием $X_0 = x$, причем $X' = f(X)$, $(f(X),(f(X))') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0,T],\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$ п.н. Более того, если $H_i > H^* \ge 1/2$ для всех $i = 0,\ldots,d$, то справедливо включение $X \in C^{H^*}([0,T],\mathbb{R}^n)$ п.н. и интеграл в определении решения уравнения* (2.2) *является потраекторным интегралом Янга.*

Доказательство существования и единственности функции $X(t, \omega)$ следует из теоремы 3.13 в [59]. В свою очередь, измеримость и $\mathcal{F}_t$-согласованность $X(t, \omega)$ следует из непрерывности отображения Ито-Лайонса, установленной в утверждении 2 терооремы 3.13 в работе [59], и сходимости диадных аппроксимаций $B_t(m)$ к дробному броуновскому движению B_t, доказанной в теореме 2 в работе [26].

Рассмотрим вопрос о том, какому стохастическому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция $g(X_t)$ от решения X_t исходного стохастического дифференциального уравнения (2.2).

Теорема 2.2. *Пусть* $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. *Тогда для любых* s, $t \in [0,T]$ *п.н. справедлива следующая формула замены переменных:*

$$g(X_t) = g(X_s) + \int_s^t Dg(X_r)f(X_r)dB_r, \qquad s,t \in [0,T], \tag{2.4}$$

где X_t *— решение уравнения* (2.2) *с начальным условием* $X_0 = x$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $s,t \in [0,T]$, $s \le t$ и рассмотрим разбиение отрезка $[s,t]$ точками $\mathcal{P}^{(N)} = \{s = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t\}$, $\left|\mathcal{P}^{(N)}\right| = \max\limits_{i=0,\ldots,N-1} |t_{i+1} - t_i|$. Будем обозначать $X^{\otimes m} = \underbrace{X \otimes \ldots \otimes X}_{m}$. Все равенства и неравенства ниже для случайных величин будем понимать выполненными почти наверное (п.н.). Используя формулу Тейлора, будем иметь:

$$g(X_t) - g(X_s) = \sum_{i=0}^{N-1}(g(X_{t_{i+1}}) - g(X_{t_i})) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left(Dg(X_{t_i})X_{t_i,t_{i+1}} + \frac{1}{2}D^2g(X_{t_i})X_{t_i,t_{i+1}}^{\otimes 2} + \frac{1}{6}D^3g(X_{t_i} + \theta_i X_{t_i,t_{i+1}})X_{t_i,t_{i+1}}^{\otimes 3}\right), \tag{2.5}$$

для некоторых $\theta_i \in (0,1)$. Здесь слагаемые вида $D^k g X^{\otimes k}$ следует понимать в смысле, указанном в замечании 2.4:

$$D^k g X^{\otimes k} = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k g}{\partial X_{i_1}\ldots\partial X_{i_k}} X_{i_1}\ldots X_{i_k}$$

Оценим последнее слагаемое в сумме (2.5). Следующее неравенство будет использоваться в дальнейшем (напомним, что $3H > 1$):

$$\sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i|^{3H} \le \sum_{i=0}^{N-1} \left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1} (t_{i+1} - t_i) = \left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1} (t-s).$$

Поскольку $X \in C^H([0,T], \mathbb{R}^n)$ и $3H > 1$, то

$$\left|\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{6} D^3 g(X_{t_i} + \theta_i X_{t_i,t_{i+1}}) X_{t_i,t_{i+1}}^{\otimes 3}\right| \le \frac{1}{6} \|D^3 g\|_\infty \|X\|_H^3 \sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i|^{3H} =$$
$$= \frac{1}{6} \|D^3 g\|_\infty \|X\|_H^3 (t-s) \left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1} = O\left(\left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1}\right). \tag{2.6}$$

Из теоремы 4.10 [31] следует, что

$$X_{t_i,t_{i+1}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X_r) dB_r = f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}} + Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + O\left(|t_{i+1} - t_i|^{3H}\right), \tag{2.7}$$

причем константа в $O\left(|t_{i+1} - t_i|^{3H}\right)$ зависит только от f, B и X и не зависит от разбиения $\mathcal{P}^{(N)}$. Поскольку $|f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}}| \le \|f\|_\infty \|B\|_H \times$ $\times |t_{i+1} - t_i|^H$, $|Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}| \le \|f\|_{C_b^2}^2 \|\mathbb{B}\|_{2H} |t_{i+1} - t_i|^{2H}$, то умножая соотношение (2.7) тензорно на себя, получим

$$X_{t_i,t_{i+1}}^{\otimes 2} = (f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} + (Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} +$$
$$+ f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}} \otimes Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} \otimes f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}} +$$
$$+ O\left(|t_{i+1} - t_i|^{4H}\right) =$$
$$= (f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} + O\left(|t_{i+1} - t_i|^{3H}\right). \tag{2.8}$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\sum_{i=0}^{N-1} O\left(|t_{i+1} - t_i|^{3H}\right) \le O(1) \sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i|^{3H} = O\left(\left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1}\right).$$

Подставляя (2.6) — (2.8) в (2.5), и замечая, что

$$D^2 g(X_{t_i}) (f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} = \left(f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}}\right)^\top D^2 g(X_{t_i}) \left(f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}}\right) =$$
$$= (B_{t_i,t_{i+1}})^\top \left(f(X_{t_i})^\top D^2 g(X_{t_i}) f(X_{t_i})\right) B_{t_i,t_{i+1}} =$$
$$= \left(f(X_{t_i})^\top D^2 g(X_{t_i}) f(X_{t_i})\right) (B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2}$$

получим:

$$g(X_t) - g(X_s) = \sum_{i=0}^{N-1} Dg(X_{t_i}) f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1} \left(Dg(X_{t_i}) Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + \frac{1}{2} D^2 g(X_{t_i}) (f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} \right) +$$

$$+ O\left(\left| \mathcal{P}^{(N)} \right|^{3H-1} \right) = \sum_{i=0}^{N-1} Dg(X_{t_i}) f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1} \left(Dg(X_{t_i}) Df(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + f(X_{t_i})^\top D^2 g(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} \right) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1} f(X_{t_i})^\top D^2 g(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \left(\frac{1}{2} (B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} - \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} \right) + O\left(\left| \mathcal{P}^{(N)} \right|^{3H-1} \right) \quad (2.9)$$

Поскольку пара $(B,\mathbb{B})$ принадлежит пространству геометрических грубых траекторий, то $\mathrm{Sym}(\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}) = \frac{1}{2}(B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2}$ и $\frac{1}{2}(B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} - \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} = -\mathrm{Anti}(\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}})$, где $\mathrm{Anti}(\mathbb{B}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{B} - \mathbb{B}^\top\right)$ — антисимметричная часть $\mathbb{B}$. Заметим, что $f(X_\cdot)^\top D^2 g(X_\cdot) f(X_\cdot)$ симметрично, в то время как $\mathrm{Anti}(\mathbb{B})$ антисимметрично, поэтому $f(X_{t_i})^\top D^2 g(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathrm{Anti}(\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}})$ зануляется для каждого $i = 0, \ldots, N-1$. Учитывая это и то, что $(Dg(X_\cdot) \cdot f(X_\cdot))' = D(Dg \cdot f)(X_\cdot) \cdot X'_\cdot = f(X_\cdot)^\top D^2 g(X_\cdot) f(X_\cdot) + Dg(X_\cdot) Df(X_\cdot) f(X_\cdot)$, из равенства (2.9) получим

$$g(X_t) - g(X_s) = \sum_{i=0}^{2^N-1} \left(Dg(X_{t_i}) f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}} + \big(Dg(X_\cdot) f(X_\cdot)\big)'_{t_i} \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} \right) +$$

$$+ O\left(\left| \mathcal{P}^{(N)} \right|^{3H-1} \right) \quad (2.10)$$

Переходя к пределу в (2.10) при $\left|\mathcal{P}^{(N)}\right| \to 0$, получим (2.4), что завершает доказательство формулы замены переменных.

2.3 Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями

Наряду с уравнением (2.2) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\widetilde{X}_t = \widetilde{f}(\widetilde{X}_t)dB_t, \quad t \in [0,T], \tag{2.11}$$

в котором $\widetilde{f}$ — $(n \times (d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $\widetilde{f}_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0, \ldots, d$.

Определения решений уравнений (2.2), (2.11) и связанных с ними объектов были приведены ранее. Будем предполагать выполненными условия существования решений указанных уравнений с начальными условиями $X_0 = \xi$, $\widetilde{X}_0 = \widetilde{\xi}$, где ξ, $\widetilde{\xi}$ — случайные величины. В частности, для согласованности со случаем $\xi(\omega) \equiv x$, $\widetilde{\xi}(\omega) \equiv \widetilde{x}$ (см. теорему 2.1) будем предполагать, что $f, \widetilde{f} \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$. Причем функцию f будем считать фиксированной, а $\widetilde{f}$ — изменяющейся в малой окрестности f в пространстве $C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$.

Будем использовать символ $\mathcal{I}$ для обозначения отрезков вещественной прямой: $\mathcal{I} = [a,b] \subset \mathbb{R}$ длины $|\mathcal{I}| = b - a$. Для краткости будем опускать индекс $[0,T]$ для норм, связанных с исходным отрезком интегрирования, полагая $\|\cdot\|_\alpha := \|\cdot\|_{\alpha;[0,T]}$, $\|\cdot\|_{\alpha,\delta} := \|\cdot\|_{\alpha;[0,T],\delta}$.

Приведем ряд утверждений, которые будем использовать в дальнейшем для проведения оценок.

Предложение 2.5 [31, с. 65]. *Пусть $Y \in C^\alpha([0,T], U)$, U — конечномерное банахово пространство, $\mathcal{I} \subset [0,T]$ — фиксированный отрезок. Если для некторых фиксированных $\delta \leq |\mathcal{I}|$ и $M > 0$ выполнено неравенство $\|Y\|_{\alpha;\mathcal{I},\delta} \leq M$, то также справедливо и неравенство $\|Y\|_{\alpha;\mathcal{I}} \leq M\left(1 \vee 2\delta^{-(1-\alpha)}|\mathcal{I}|^{1-\alpha}\right)$.*

Предложение 2.6. *Пусть X_t — решение уравнения* (2.2). *Тогда для любого отрезка $\mathcal{I} \subset [0,T]$ длины $|\mathcal{I}| \leq 1$ п.н. справедливы неравенства*

$$\|X\|_{H;\mathcal{I}} \leq K\left(C_B\|f\|_{C_b^2} \vee \left(C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^{1/H}\right), \tag{2.12}$$

$$\|R^X\|_{2H;\mathcal{I}} \leq \hat{K}\left(\left(C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^2 \vee \left(C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^{1+\frac{1}{H}}\right), \tag{2.13}$$

где $C_B = C_B(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) = \|B\|_H + \sqrt{\|\mathbb{B}\|_{2H}}$, *а константы* $K, \hat{K}$ *зависят лишь от* H.

Доказательство. Равенство (2.12) является простым следствием [31, предложение 8.3]. Докажем равенство (2.13). Используя предложение 2.3 для $s,t \in \mathcal{I}$, будем иметь:

$$\begin{gathered}|R^X_{s,t}| = |X_{s,t} - f(X_s)B_{s,t}| \leq \\ \leq \left|\int_s^t f(X_r)dB_r - f(X_s)B_{s,t} - Df(X_s)f(X_s)\mathbb{B}_{s,t}\right| + |Df(X_s)f(X_s)\mathbb{B}_{s,t}| \leq \\ \leq C\Big(\|B\|_{H;\mathcal{I}}\|R^{f(X)}\|_{2H;\mathcal{I}} + \|\mathbb{B}_{s,t}\|_{2H;\mathcal{I}}\|f(X)'\|_{H;\mathcal{I}}\Big)|t-s|^{3H} + \\ +\|Df\|_\infty\|f\|_\infty\|\mathbb{B}\|_{2H;\mathcal{I}}|t-s|^{2H}.\end{gathered} \tag{2.14}$$

Рассмотрим последнее неравенство для всех подотрезков $\mathcal{I}$ длины не больше δ. Тогда, как следствие

$$\begin{gathered}\|R^X\|_{2H;\delta} \leq \|Df\|_\infty\|f\|_\infty\|\mathbb{B}\|_{2H;\mathcal{I}} + \\ +C\Big(\|B\|_{H;\delta}\|R^{f(X)}\|_{2H;\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H;\delta}\|f(X)'\|_{H;\delta}\Big)\delta^H\end{gathered}$$

Ниже символами c_i будем обозначать константы, зависящие быть может, только от H. Заметим, что $R^{f(X)} = f(X)_{s,t} - Df(X_s)X'_sB_{s,t} = f(X)_{s,t} - -Df(X_s)X_{s,t} + Df(X_s)R^X_{s,t} = \frac{1}{2}D^2f(X_s + \theta X_{s,t})X^{\otimes 2}_{s,t} + Df(X_s)R^X_{s,t}$ для некоторого $\theta \in (0,1)$. Поэтому

$$\begin{gathered}\|R^{f(X)}\|_{2H;\delta} \leq \frac{1}{2}\|D^2f\|_\infty\|X\|^2_{H;\delta} + \|Df\|_\infty\|R^X\|_{2H;\delta} \leq \\ \leq \|f\|_{C^2_b}\Big(\|X\|^2_{H;\delta} + \|R^X\|_{2H;\delta}\Big).\end{gathered}$$

Также поскольку $f(X)' = Df(X)X' = Df(X)f(X)$, то, как легко видеть, $(Df(X)f(X))_{s,t} = D(Df\cdot f)(X_s + \theta_1X_{s,t})X_{s,t} = \big(D^2f\cdot f + Df\cdot Df\big)(X_s + +\theta_1X_{s,t})X_{s,t}$, поэтому $\|f(X)'\|_{H;\delta} \leq \|f\|^2_{C^2_b}\|X\|_{H;\delta}$. Значит,

$$\begin{gathered}\|R^X\|_{2H;\delta} \leq c_1\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta} + c_1\|f\|_{C^2_b}\|B\|_{H;\delta}\delta^H\Big(\|X\|^2_{H;\delta} + \|R^X\|_{2H;\delta}\Big) + \\ +c_1\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{H;\delta}\delta^H\|X\|_{H;\delta},\end{gathered}$$

где $c_1 = 1 \vee C$. Далее ограничимся достаточно малыми δ — такими, чтобы выполнялись неравенства

$$c_1\|f\|_{C^2_b}\|B\|_H\delta^H \leq \frac{1}{2}, \qquad c_1\|f\|_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|^{1/2}_{2H}\delta^H \leq 1. \tag{2.15}$$

При таком выборе будем иметь:

$$\|R^X\|_{2H;\delta} \le c_1\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta} + \frac{1}{2}\Big(\|X\|^2_{H;\delta} + \|R^X\|_{2H;\delta}\Big) + \|f\|_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|^{1/2}_{2H}\|X\|_{H;\delta}. \tag{2.16}$$

Отсюда с учетом неравенства $2\sqrt{ab} \le a + b$, выводим:

$$\begin{aligned}\|R^X\|_{2H;\delta} &\le 2c_1\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta} + \|X\|^2_{H;\delta} + 2\|f\|_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|^{1/2}_{2H}\|X\|_{H;\delta} \le \\ &\le c_3\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta} + 2\|X\|^2_{H;\delta},\end{aligned} \tag{2.17}$$

где $c_3 = 2c_2 + 1$ при достаточно малых $\delta \le \left(2c_1 C_B\|f\|_{C^2_b}\right)^{-1/H}$. Из [31, предложение 8.3] следует, что при тех же δ выполнено неравенство $\|X\|_{H;\delta} \le \le c_0\|f\|_{C^2_b}C_B$. Комбинируя последние два неравенства, получим:

$$\|R^X\|_{2H;\delta} \le \|f\|^2_{C^2_b}\left(c_3 + 2c_0^2\right)C_B^2 = c_4\left(C_B\|f\|_{C^2_b}\right)^2,$$

где $c_4 = c_3 + 2c_0^2$. Применяя предложение 2.5, с учетом $|\mathcal{I}| \le 1$, будем иметь:

$$\|R^X\|_{2H;\mathcal{I}} \le c_4\left(C_B\|f\|_{C^2_b}\right)^2\left(1 \vee 2\delta^{H-1}\right) \le c_5\left(\left(C_B\|f\|_{C^2_b}\right)^2 \vee \left(C_B\|f\|_{C^2_b}\right)^{1+\frac{1}{H}}\right),$$

где $c_5 = c_4(1 \vee 2^{1/H}c_1^{(1-H)/H})$ зависит лишь от H. Предложение доказано.

Предложение 2.7. *Пусть* $t_j = (j\cdot\delta)\wedge T$, $\mathcal{I}_j = [t_j, t_{j+1}] \subset [0,T]$, $j = 0,1,\ldots$ *Тогда справедливо неравенство* $\|Y\|_{H;\delta} \le 2^{1-H}\bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta\rfloor}\|Y\|_{H;\mathcal{I}_j}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $s,t \in [0,T]$ такие, что $0 < |t-s| < \delta$, $s < t$. Если $s,t \in \mathcal{I}_j$ для некоторого j, то, очевидно, $|Y_{s,t}| \le \|Y\|_{H;\mathcal{I}_j}|t-s|^H \le |t-s|^H\bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta\rfloor}\|Y\|_{H;\mathcal{I}_j}$. Иначе $s \in \mathcal{I}_{j-1}$, $t \in \mathcal{I}_j$. В таком случае

$$\begin{aligned}|Y_{s,t}| &\le |Y_{s,t_j}| + |Y_{t_j,t}| \le \|Y\|_{H;\mathcal{I}_{j-1}}|t_j - s|^H + \|Y\|_{H;\mathcal{I}_j}|t - t_j|^H \le \\ &\le \left(|t-t_j|^H + |t_j - s|^H\right)\bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta\rfloor}\|Y\|_{H;\mathcal{I}_j} \le 2^{1-H}|t-s|^H\bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta\rfloor}\|Y\|_{H;\mathcal{I}_j},\end{aligned}$$

где в последнем переходе было применено неравенство Иенсена для вогнутой функции $\phi(t) = t^H$, $t > 0$, $H \in (0,1)$. Так как $1 - H > 0$, то $2^{1-H} > 1$ и в любом из рассмотренных случаев

$$|Y_{s,t}| \le 2^{1-H}|t-s|^H\bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta\rfloor}\|Y\|_{H;\mathcal{I}_j}$$

для $|t-s| \le \delta$. Из последнего неравенства следует требуемое утверждение.

В технических выкладках будет полезно следующее элементарное предложение.

Предложение 2.8. *Пусть* $\mathrm{u},\widetilde{\mathrm{u}} \in \mathbf{U}$, $\mathrm{v},\widetilde{\mathrm{v}} \in \mathbf{V}$, $u,\widetilde{u} \in U \times V^{\otimes k}$, $v,\widetilde{v} \in V^{\otimes k}$ *— тензоры,* $\mathbf{U},\mathbf{V},U,V$ *— нормированные векторные пространства над полем* $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливы неравенства*

$$|\mathrm{uv} - \widetilde{\mathrm{u}}\widetilde{\mathrm{v}}| \le |\mathrm{u}|\,|\mathrm{v}-\widetilde{\mathrm{v}}| + |\widetilde{\mathrm{v}}|\,|\mathrm{u}-\widetilde{\mathrm{u}}|,$$
$$|uv - \widetilde{u}\widetilde{v}| \le |u|\,|v-\widetilde{v}| + |\widetilde{v}|\,|u-\widetilde{u}|.$$

2.3.1 Вспомогательные результаты

В данном разделе мы получим ряд вспомогательных лемм, на которых будут опираться доказательства результатов, связанных с непрерывной зависимостью решений уравнений (2.2), (2.11). Все неравенства в дальнейшем понимаются выполненными почти наверное.

Лемма 2.1. *Пусть* X_t *и* $\widetilde{X}_t$ *— решения уравнений* (2.2) *и* (2.11) *соответственно с правыми частями* f, $\widetilde{f}$ *из класса* $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, *причем функция* $\widetilde{f}$ *такова, что* $\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} \le 1$. *Тогда для любого отрезка* $\mathcal{I} = [u,v] \subset [0,T]$ *длины* $|\mathcal{I}| \le 1$ *и любых* $s,t \in \mathcal{I}$ *п.н. имеет место следующее неравенство:*

$$\left|\int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right) dB_\tau\right| \le C_f \|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} |t-s|^H,$$

где $C_f = C_f(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ *— случайная величина.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя предложение 2.3, получим оценку

$$\left|\int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right) dB_\tau\right| \le \left|f(\widetilde{X}_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right| |B_{s,t}| + \left|f(\widetilde{X}_s)' - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)'\right| |\mathbb{B}_{s,t}| +$$
$$+ C\left(\|B\|_H \left\|R^{f(\widetilde{X}) - \widetilde{f}(\widetilde{X})}\right\|_{2H;\mathcal{I}} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(\widetilde{X})' - \widetilde{f}(\widetilde{X})'\|_{H;\mathcal{I}}\right) |t-s|^{3H}. \quad (2.18)$$

Следуя [31, лемма 7.3, теорема 8.4], имеют место следующие соотношения для производных Губинелли:

$$f(\widetilde{X}_\cdot)' = Df(\widetilde{X}_\cdot) \cdot \widetilde{X}_\cdot' = Df(\widetilde{X}_\cdot) \cdot \widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot) = (Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_\cdot), \quad (2.19)$$
$$\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)' = D\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot) \cdot \widetilde{X}_\cdot' = D\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot) \cdot \widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot) = (D\widetilde{f} \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_\cdot). \quad (2.20)$$

Из соотношений (2.19), (2.20) очевидным образом следуют оценки

$$\begin{aligned}\Big|f(\widetilde{X}_s)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\Big|\,|B_{s,t}|\le\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\|B\|_H|t-s|^H,\\ \Big|f(\widetilde{X}_s)'-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)'\Big|\,|\mathbb{B}_{s,t}|\le\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\|\widetilde{f}\|_{C_b^2}\|\mathbb{B}\|_{2H}|t-s|^H\end{aligned}$$

для любых $s,t\in\mathcal{I}$, $|\mathcal{I}|\le 1$. Из неравенства треугольника следует, что $\|\widetilde{f}\|_{C_b^2}\le$ $\le\|f\|_{C_b^2}+1$ Таким образом,

$$\Big|f(\widetilde{X}_s)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\Big|\,|B_{s,t}|+\Big|f(\widetilde{X}_s)'-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)'\Big|\,|\mathbb{B}_{s,t}|\le c_0\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}|t-s|^H,\quad(2.21)$$

где $c_0=\|B\|_H+(1+\|f\|_{C_b^3})\|\mathbb{B}\|_{2H}$.

Далее оценим $\|f(\widetilde{X})'-\widetilde{f}(\widetilde{X})'\|_{H;\mathcal{I}}$. Используя соотношения (2.19), (2.20) и формулу конечных приращений будем иметь:

$$\begin{aligned}\Big|f(\widetilde{X}_\cdot)'_{s,t}-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)'_{s,t}\Big|=\Big|\Big(Df\cdot\widetilde{f}-D\widetilde{f}\cdot\widetilde{f}\Big)\,(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t}\Big|\le\\ \le\big\|D\big((Df-D\widetilde{f})\cdot\widetilde{f}\big)\big\|_\infty\|\widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}}|t-s|^H.\end{aligned}$$

Поскольку $D\big((Df-D\widetilde{f})\cdot\widetilde{f}\big)=(D^2f-D^2\widetilde{f})\cdot\widetilde{f}+(Df-D\widetilde{f})\cdot D\widetilde{f}$, то нетрудно видеть, что $\big\|D\big((Df-D\widetilde{f})\cdot\widetilde{f}\big)\big\|_\infty\le 2\|\widetilde{f}\|_{C_b^2}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\le 2(1+\|f\|_{C_b^3})\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}$. Отсюда ввиду предложения 2.6 выводим неравенство

$$\|f(\widetilde{X})'-\widetilde{f}(\widetilde{X})'\|_{H;\mathcal{I}}\le c_{f'}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2},\qquad(2.22)$$

где $c_{f'}=2(1+\|f\|_{C_b^3})K\left((1+\|f\|_{C_b^3})C_B\vee\Big((1+\|f\|_{C_b^3})C_B\Big)^{1/H}\right)$.

Осталось оценить $\Big\|R^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}\Big\|_{2H;\mathcal{I}}$. Учитывая соотношения (2.19), (2.20) и формулу конечных приращений, для некоторого $\widetilde{\theta}\in(0,1)$ будем иметь:

$$\begin{aligned}R^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}_{s,t}&=f(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t}-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t}-Df(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}'_sB_{s,t}+D\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}'_sB_{s,t}=\\ &=\Big(\big(f-\widetilde{f}\big)(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t}-D\big(f-\widetilde{f}\big)(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}_{s,t}\Big)+\Big(Df(\widetilde{X}_s)-D\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\Big)\,R^{\widetilde{X}}_{s,t}=\\ &=\frac{1}{2}D^2\left(f-\widetilde{f}\right)\big(\widetilde{X}_{s,t}(\widetilde{\theta})\big)\widetilde{X}^{\otimes 2}_{s,t}+\Big(Df(\widetilde{X}_s)-D\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\Big)\,R^{\widetilde{X}}_{s,t}.\end{aligned}$$

Из последнего равенства, равенства (2.36) и формулы конечных приращений следует, что для любых $s,t\in\mathcal{I}$ имеет место оценка

$$\Big|R^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}_{s,t}\Big|\le\left(\frac{1}{2}\|\widetilde{X}\|^2_{H;\mathcal{I}}+\|R^{\widetilde{X}}\|_{2H;\mathcal{I}}\right)\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}|t-s|^{2H},$$

из которой с учетом предложения 2.6 устанавливаем неравенство

$$\left\| R_{s,t}^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})} \right\|_{2H;\mathcal{I}} \leq c_R \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \tag{2.23}$$

где $c_R = \frac{1}{2}K^2 \left(K_B^2 \vee K_B^{2/H} \right) + \hat{K} \left(K_B^2 \vee K_B^{1+\frac{1}{H}} \right)$, $K_B = (1 + \|f\|_{C_b^3}) C_B$.

Применяя неравенства (2.21) — (2.23) к правой части (2.18), получим:

$$\left| \int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right| \leq (c_0 + C c_R \|B\|_H + C c_{f'} \|\mathbb{B}\|_{2H}) \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} |t-s|^H,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Пусть* X_t *и* $\widetilde{X}_t$ *— решения уравнений* (2.2) *и* (2.11) *соответственно с правыми частями* f, $\widetilde{f}$ *из класса* $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, *причем функция* $\widetilde{f}$ *такова, что* $\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$. *Тогда для любых функций* $g, \widetilde{g} \in C_b^1$, *любого отрезка* $\mathcal{I} = [u,v] \subset [0,T]$ *длины* $|\mathcal{I}| \leq 1$ *и любого* $s \in \mathcal{I}$ *п.н. справедливо неравенство*

$$\begin{gathered} |g(X_s) - \widetilde{g}(\widetilde{X}_s)| \leq \|g - \widetilde{g}\|_\infty + C_{0;g} \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_{1;g} |X_u - \widetilde{X}_u| + \\ + C_{2;g} \left(\|B\|_H \left\| R^{f(X)-f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;\mathcal{I}} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;\mathcal{I}} \right) |\mathcal{I}|^{3H}, \end{gathered}$$

где $C_{0;g} = C_{0;g}(H, \|g\|_{C_b^1}, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $C_{1;g} = C_{1;g}(H, \|g\|_{C_b^1}, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ *— случайные величины,* $C_{2;g} = C_{2;g}(H, \|g\|_{C_b^1})$ *— константа.*

Доказательство. Из формулы конечных приращений следует, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |g(X_s) - \widetilde{g}(\widetilde{X}_s)| &\leq |g(X_s) - g(\widetilde{X}_s)| + |g(\widetilde{X}_s) - \widetilde{g}(\widetilde{X}_s)| \leq \\ &\leq \|Dg\|_\infty |X_s - \widetilde{X}_s| + \|g - \widetilde{g}\|_\infty \leq \\ &\leq \|g - \widetilde{g}\|_\infty + \|g\|_{C_b^1} \left(|X_u - \widetilde{X}_u| + |X_{u,s} - \widetilde{X}_{u,s}| \right). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Поэтому осталось оценить $|X_{u,s} - \widetilde{X}_{u,s}|$. Для этого воспользуемся определением решения и предложением 2.3. Будем иметь:

$$|X_{u,s} - \widetilde{X}_{u,s}| = \left| \int_u^s \left(f(X_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right| \leq M_1 + M_2,$$

где $M_1 = \left| \int_u^s \left(f(X_\tau) - f(\widetilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right|$, $M_2 = \left| \int_u^s \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right|$. Оценку для второго выражения дает лемма 2.1: $M_2 \leq C_f \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} |s-u|^H$.

Оценим M_1. С учетом соотношений, аналогичных (2.19), (2.20), и предложения 2.3, получим:

$$M_1 \leq \left|f(X_u) - f(\widetilde{X}_u)\right| |B_{u,s}| + \left|(Df \cdot f)(X_u) - (Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_u)\right| |\mathbb{B}_{u,s}| +$$
$$+ C \left(\|B\|_{H;\mathcal{I}} \left\| R^{f(X) - f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;\mathcal{I}} + \|\mathbb{B}\|_{2H;\mathcal{I}} \|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;\mathcal{I}} \right) |s-u|^{3H}. \tag{2.25}$$

Осталось заметить, что ввиду формулы конечных приращений, примененной к функциям f и $Df \cdot f$, для любого $s \in \mathcal{I}$, $|\mathcal{I}| \leq 1$ будем иметь:

$$\left|f(X_u) - f(\widetilde{X}_u)\right| |B_{u,s}| \leq \|Df\|_\infty |X_u - \widetilde{X}_u| \cdot \|B\|_{H;\mathcal{I}} |s-u|^H \leq$$
$$\leq \|f\|_{C_b^3} \|B\|_H |X_u - \widetilde{X}_u|, \tag{2.26}$$

$$\left|Df(X_u) f(X_u) - Df(\widetilde{X}_u) \widetilde{f}(\widetilde{X}_u)\right| |\mathbb{B}_{u,s}| \leq$$
$$\leq \left(\|D(Df \cdot f)\|_\infty |X_u - \widetilde{X}_u| + \|Df\|_\infty \|f - \widetilde{f}\|_\infty \right) |\mathbb{B}_{u,s}| \leq$$
$$\leq \|f\|^2_{C_b^3} \|\mathbb{B}\|_{2H} |X_u - \widetilde{X}_u| + \|f\|_{C_b^3} \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \|\mathbb{B}\|_{2H}. \tag{2.27}$$

Окончательно, из соотношений (2.24) — (2.27) и леммы 2.1 выводим:

$$|g(X_s) - g(\widetilde{X}_s)| \leq \|g - \widetilde{g}\|_\infty + C_{0;g} \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_{1;g} |X_u - \widetilde{X}_u| +$$
$$+ C_{2;g} \left(\|B\|_H \left\| R^{f(X) - f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;\mathcal{I}} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;\mathcal{I}} \right) |\mathcal{I}|^{3H},$$

где $C_{0;g} = \|g\|_{C_b^1} (\|f\|_{C_b^3} \|\mathbb{B}\|_{2H} + C_f)$, $C_{1;g} = \|g\|_{C_b^1} \left(1 + \|f\|_{C_b^3} \|B\|_H + \|f\|^2_{C_b^3} \|\mathbb{B}\|_{2H}\right)$, $C_{2;g} = C \|g\|_{C_b^1}$. Последнее соотношение доказывает лемму.

Лемма 2.3. *Пусть X_t и $\widetilde{X}_t$ — решения уравнений* (2.2) *и* (2.11) *соответственно с правыми частями f, $\widetilde{f}$ из класса $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$. Для любого отрезка $\mathcal{I} = [u,v] \subset [0,T]$ длины $|\mathcal{I}| \leq 1$ п.н. имеет место следующее неравенство:*

$$\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;\mathcal{I}} \leq C_1 |X_u - \widetilde{X}_u| + C_2 \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_3 \|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}},$$

где $C_j = C_j(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j = 1,2,3$ — случайные величины.

Доказательство. Введем обозначения: $Y_{s,t}(\theta) = Y_s + \theta Y_{s,t}$, $\theta \in (0{,}1)$, $s{,}t \in \mathcal{I}$, $\varphi = Df \cdot f$. С учетом соотношений, аналогичных (2.19), (2.20), следуя формуле конечных приращений, найдутся $\theta_1, \theta_2, \theta \in (0{,}1)$ такие, что

$$\left|\Big(f(X_\cdot)' - f(\widetilde{X}_\cdot)'\Big)_{s,t}\right| \leq$$
$$\leq \left|(Df \cdot f)(X_\cdot)_{s,t} - (Df \cdot f)(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t}\right| + \left|\big(Df \cdot (f - \widetilde{f})\big)(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t}\right| =$$
$$= \left|D\varphi(X_{s,t}(\theta_1))X_{s,t} - D\varphi(\widetilde{X}_{s,t}(\theta_2))\widetilde{X}_{s,t}\right| + \left|D\big(Df \cdot (f - \widetilde{f})\big)(\widetilde{X}_{s,t}(\theta))\widetilde{X}_{s,t}\right| \leq$$
$$\leq |D\varphi(X_{s,t}(\theta_1))| \cdot |X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}| + |\widetilde{X}_{s,t}| \cdot \left|D\varphi(X_{s,t}(\theta_1)) - D\varphi(\widetilde{X}_{s,t}(\theta_2))\right| +$$
$$+ \left\|D^2 f \cdot (f - \widetilde{f}) + Df \cdot (Df - D\widetilde{f})\right\|_\infty |\widetilde{X}_{s,t}|. \qquad (2.28)$$

Легко видеть, что $\left\|D^2 f \cdot (f - \widetilde{f}) + Df \cdot (Df - D\widetilde{f})\right\|_\infty \leq 2\|f\|_{C_b^3}\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}$. Оценим второе слагаемое (2.28). Из формулы конечных приращений следует:

$$\left|D\varphi(X_{s,t}(\theta_1)) - D\varphi(\widetilde{X}_{s,t}(\theta_2))\right| \leq \|D^2\varphi\|_\infty \Big(|X_s - \widetilde{X}_s| + |\theta_1 - \theta_2| \cdot |X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}|\Big) \leq$$
$$\leq \|f\|^2_{C_b^3} \Big(|X_u - \widetilde{X}_u| + \|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}}|u - s|^H + \|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}}|t - s|^H\Big). \qquad (2.29)$$

С учетом соотношений (2.28), (2.29), очевидных неравенств $|\widetilde{X}_{s,t}| \leq \leq \|\widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}}|t - s|^H$, $\|\widetilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1 + \|f\|_{C_b^3}$ и предложения 2.6 для любых $s{,}t \in \mathcal{I}$ будем иметь:

$$\left|\Big(f(X_\cdot)' - f(\widetilde{X}_\cdot)'\Big)_{s,t}\right| \leq \Big(C_1|X_u - \widetilde{X}_u| + C_2\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_3\|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}}\Big) |t - s|^H,$$

где $C_1 = \|f\|^2_{C_b^3}C_{\widetilde{X}}$, $C_2 = 2\|f\|_{C_b^3}C_{\widetilde{X}}$, $C_3 = \big(1+2C_{\widetilde{X}}\big)\|f\|^2_{C_b^3}$, $C_{\widetilde{X}} = = K\bigg((1+\|f\|_{C_b^3})C_B \vee \Big((1+\|f\|_{C_b^3})C_B\Big)^{\frac{1}{H}}\bigg)$. Из последнего неравенства следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть X_t и $\widetilde{X}_t$ — решения уравнений* (2.2) *и* (2.11) *соответственно с правыми частями f, $\widetilde{f}$ из класса $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$. Для любого отрезка $\mathcal{I} = [u{,}v] \subset [0{,}T]$ длины $|\mathcal{I}| \leq 1$ п.н. имеет место следующее неравенство:*

$$\left\|R^{f(X) - f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;\mathcal{I}} \leq C_4|X_u - \widetilde{X}_u| + C_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_6\|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}},$$

где $C_j = C_j(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j = 4{,}5{,}6$ — случайные величины.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению

$$R_{s,t}^{f(X)-f(\widetilde{X})} = \Big(f(X.) - f(\widetilde{X}.)\Big)_{s,t} - Df(X_s)X'_s B_{s,t} + Df(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}'_s B_{s,t} =$$

$$= \Big(f(X.) - f(\widetilde{X}.)\Big)_{s,t} - Df(X_s)X_{s,t} + Df(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}_{s,t} + Df(X_s)R^X_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)R^{\widetilde{X}}_{s,t}. \tag{2.30}$$

Рассмотрим функцию $g(x,\widetilde{x}) = f(x) - f(\widetilde{x})$. Она дифференцируема по обеим переменным до 3-го порядка включительно и ввиду формулы Тейлора для некоторого $\theta \in (0,1)$:

$$g(X_t,\widetilde{X}_t) = g(X_s,\widetilde{X}_s) + \left(X_{s,t}\frac{\partial g(\cdot)}{\partial x} + \widetilde{X}_{s,t}\frac{\partial g(\cdot)}{\partial \widetilde{x}}\right)\Bigg|_{(X_s,\widetilde{X}_s)} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial x^2}X_{s,t}^{\otimes 2} + 2\cdot\frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial x \partial \widetilde{x}}(X_{s,t}\otimes \widetilde{X}_{s,t}) + \frac{\partial g^2(\cdot)}{\partial \widetilde{x}^2}\widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2}\right)\Bigg|_{(X_{s,t}(\theta),\widetilde{X}_{s,t}(\theta))}. \tag{2.31}$$

Вернемся к исходным обозначениям:

$$\frac{\partial^i g(x,\widetilde{x})}{\partial x^i} = D^i f(x), \quad \frac{\partial^i g(x,\widetilde{x})}{\partial \widetilde{x}^i} = -D^i f(\widetilde{x}), \quad i = 1,2; \quad \frac{\partial^2 g(x,\widetilde{x})}{\partial x \partial \widetilde{x}} = 0. \tag{2.32}$$

Учитывая равенства (2.30) — (2.32), получим:

$$R_{s,t}^{f(X)-f(\widetilde{X})} = \frac{1}{2}\Big(D^2 f(X_{s,t}(\theta))X_{s,t}^{\otimes 2} - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta))\widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2}\Big) +$$
$$+ \Big(Df(X_s)R^X_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)R^{\widetilde{X}}_{s,t}\Big). \tag{2.33}$$

Далее зафиксируем произвольные $s,t \in \mathcal{I}$ такие, что $|t-s| \le \delta$ для некоторого $\delta \le |\mathcal{I}|$ и получим оценку на $\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;\delta}$, оценивая слагаемые в равенстве (2.33). Выберем отрезок $\mathcal{I}_\delta \subset \mathcal{I}$ длины $|\mathcal{I}_\delta| \le \delta$, содержащий точки $s,t \in \mathcal{I}_\delta$.

Шаг 1. Оценим первое слагаемое в (2.33). Очевидно,

$$\left|D^2 f(X_{s,t}(\theta))X_{s,t}^{\otimes 2} - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta))\widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2}\right| \le |D^2 f(X_{s,t}(\theta))|\left|X_{s,t}^{\otimes 2} - \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2}\right| +$$
$$+ \left|\widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2}\right|\left|D^2 f(X_{s,t}(\theta)) - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta))\right|. \tag{2.34}$$

Ввиду формулы конечных приращений и неравенства $|\mathcal{I}| \le 1$:

$$\left|D^2 f(X_{s,t}(\theta)) - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta))\right| \le \|D^3 f\|_\infty \Big(|X_s - \widetilde{X}_s| + |\theta||X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}|\Big) \le$$
$$\le \|f\|_{C_b^3}\Big(|X_u - \widetilde{X}_u| + 2\|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}}\Big). \tag{2.35}$$

Из определения евклидовой нормы нетрудно установить справедливость соотношений

$$\left|\widetilde{X}^{\otimes 2}_{s,t}\right| = |\widetilde{X}_{s,t}|^2 \leq \|\widetilde{X}_{s,t}\|^2_{H;\mathcal{I}}|t-s|^{2H}, \tag{2.36}$$

$$\left|X^{\otimes 2}_{s,t} - \widetilde{X}^{\otimes 2}_{s,t}\right| \leq \sqrt{2\left(\|X\|^2_{H;\mathcal{I}} + \|\widetilde{X}\|^2_{H;\mathcal{I}}\right)}\|X-\widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}}|t-s|^{2H}, \tag{2.37}$$

Учитывая равенства (2.34) — (2.37) и предложение 2.6, получаем окончательно оценку:

$$\left|D^2 f(X_{s,t}(\theta))X^{\otimes 2}_{s,t} - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta))\widetilde{X}^{\otimes 2}_{s,t}\right| \leq \left(c_1|X_u - \widetilde{X}_u| + c_2\|X-\widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}}\right)|t-s|^{2H}, \tag{2.38}$$

где $c_1 = \|f\|_{C^3_b} C^2_{\widetilde{X}}$, $c_2 = 2c_1 + \|f\|_{C^3_b}\sqrt{2\left(C^2_X + C^2_{\widetilde{X}}\right)}$, $C_{\widetilde{X}} = K\Big(C_B(1+\|f\|_{C^3_b}) \vee$ $\vee \left(C_B(1+\|f\|_{C^3_b})\right)^{\frac{1}{H}}\Big)$, $C_X = K\left(C_B\|f\|_{C^3_b} \vee \left(C_B\|f\|_{C^3_b}\right)^{\frac{1}{H}}\right)$.

Шаг 2. Оценим второе слагаемое в (2.33). Очевидно,

$$\left|Df(X_s)R^X_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)R^{\widetilde{X}}_{s,t}\right| \leq |Df(X_s)|\left|R^X_{s,t} - R^{\widetilde{X}}_{s,t}\right| + \left|R^{\widetilde{X}}_{s,t}\right|\left|Df(X_s) - Df(\widetilde{X}_s)\right|. \tag{2.39}$$

Ввиду формулы конечных приращений:

$$\left|Df(X_s) - Df(\widetilde{X}_s)\right| \leq \|D^2 f\|_\infty \left|X_s - \widetilde{X}_s\right| \leq \|f\|_{C^3_b}\left(|X_u - \widetilde{X}_u| + \|X-\widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}}\right). \tag{2.40}$$

Рассмотрим разность остатков:

$$\begin{gathered}\left|R^X_{s,t} - R^{\widetilde{X}}_{s,t}\right| = \left|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t} - (X'_s - \widetilde{X}'_s)B_{s,t}\right| = \\ = \left|\int_s^t \left(f(X_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau - \left(f(X_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right)B_{s,t}\right| \leq M_1 + M_2, \quad (2.41) \\ M_1 = \left|\int_s^t \left(f(X_\tau) - f(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau - \left(f(X_s) - f(\widetilde{X}_s)\right)B_{s,t}\right|, \\ M_2 = \left|\int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau - \left(f(\widetilde{X}_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right)B_{s,t}\right|.\end{gathered}$$

Оценим M_1, применяя предложение 2.3:

$$M_1 \leq \left|(Df\cdot f)(X_s) - (Df\cdot\widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\right| |\mathbb{B}_{s,t}| +$$
$$+C\left(\|B\|_H \left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;\mathcal{I}_\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H}\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;\mathcal{I}_\delta}\right)\delta^H|t-s|^{2H}, \tag{2.42}$$

где константа C зависит лишь от H. По аналогии с неравенством (2.27) можем записать

$$\left|(Df\cdot f)(X_s) - (Df\cdot\widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\right| \leq \|D(Df\cdot f)\|_\infty|X_s-\widetilde{X}_s| + \|Df\|_\infty\|f-\widetilde{f}\|_\infty \leq$$
$$\leq \|f\|^2_{C^3_b}\left(|X_u-\widetilde{X}_u| + \|X-\widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}}\right) + \|f\|_{C^3_b}\|f-\widetilde{f}\|_{C^2_b}. \tag{2.43}$$

Согласно лемме 2.3 найдутся случайные величины C_1, C_2, C_3 (зависящие только от H, $\|f\|_{C^3_b}$, $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$) такие, что

$$\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;\mathcal{I}} \leq C_1|X_u-\widetilde{X}_u| + C_2\|f-\widetilde{f}\|_{C^2_b} + C_3\|X-\widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}}. \tag{2.44}$$

Учитывая, что $\|\cdot\|_{H;\mathcal{I}_\delta} \leq \|\cdot\|_{H;\mathcal{I}}$, $\|\cdot\|_{2H;\mathcal{I}_\delta} \leq \|\cdot\|_{2H;\mathcal{I},\delta}$, $\delta \leq 1$, подставляя (2.43), (2.44) в (2.42), получим оценку

$$M_1 \leq \Bigg(C_{M_1,1}|X_u-\widetilde{X}_u| + C_{M_1,2}\|X-\widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}} + C_{M_1,3}\|f-\widetilde{f}\|_{C^2_b} +$$
$$+C\|B\|_H\delta^H\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;\mathcal{I},\delta}\Bigg)|t-s|^{2H}, \tag{2.45}$$

где $C_{M_1,1} = \|\mathbb{B}\|_{2H}\left(\|f\|^2_{C^3_b} + CC_1\right)$, $C_{M_1,2} = \|\mathbb{B}\|_{2H}\left(\|f\|^2_{C^3_b} + CC_3\right)$, $C_{M_1,3} = \|\mathbb{B}\|_{2H}\left(\|f\|_{C^3_b} + CC_2\right)$.

Оценим M_2, также применяя предложение 2.3:

$$M_2 \leq \left|(Df\cdot\widetilde{f})(\widetilde{X}_s) - (D\widetilde{f}\cdot\widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\right| |\mathbb{B}_{s,t}| +$$
$$+C\left(\|B\|_H \left\|R^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}\right\|_{2H;\mathcal{I}_\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H}\|f(\widetilde{X})' - \widetilde{f}(\widetilde{X})'\|_{H;\mathcal{I}_\delta}\right)|t-s|^{2H}.$$

Используя неравенства (2.21) — (2.23), из последнего соотношения можно вывести неравенство

$$M_2 \leq C_{M_2,3}\|f-\widetilde{f}\|_{C^2_b}|t-s|^{2H}, \tag{2.46}$$

где $C_{M_2,3} = (1 + \|f\|_{C_b^3})\|\mathbb{B}\|_{2H} + Cc_R\|B\|_H + Cc_{f'}\|\mathbb{B}\|_{2H}$.

Учитывая равенства (2.39), (2.40), (2.45), (2.46) и предложение 2.6, получаем окончательно оценку:

$$\left|Df(X_s)R^X_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)R^{\widetilde{X}}_{s,t}\right| \le \Big(c_3|X_u - \widetilde{X}_u| + c_4\|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}} + c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + \\ + c_6\delta^H \left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;\mathcal{I},\delta}\Big)|t-s|^{2H}, \qquad (2.47)$$

где $c_i = c_i(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) = c_{3,4}(C_{M_1,i-2})$, $i = 3{,}4$, $c_5 = c_{3,4}(C_{M_1,3} + C_{M_2,3})$, $c_6 = C\|B\|_H$, а в свою очередь, $c_{3,4}(y) = \|f\|_{C_b^3}\left(\hat{K}\left((C_B(1+\|f\|_{C_b^3}))^2 \vee (C_B(1+\|f\|_{C_b^3}))^{1+\frac{1}{H}}\right) + y\right)\right)$.

Применяя оценки (2.38), (2.47) к равенству (2.33), получим, что для любых $s,t \in \mathcal{I}$ таких, что $|t-s| \le \delta$, справедливо неравенство

$$\left|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}_{s,t}\right| \le \Big(c_8|X_u - \widetilde{X}_u| + c_7\|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}} + \\ + c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + c_6\delta^H \left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;\mathcal{I},\delta}\Big)|t-s|^{2H},$$

где $c_8 = \frac{1}{2}c_1 + c_3$, $c_7 = \frac{1}{2}c_2 + c_4$. Отсюда заключаем, что

$$\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;\mathcal{I},\delta} \le c_8|X_u - \widetilde{X}_u| + c_7\|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}} + c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + \\ + c_6\delta^H \left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;\mathcal{I},\delta}$$

для произвольного $\delta \in (0, |\mathcal{I}|]$. Теперь выберем и зафиксируем δ таким, чтобы

$$c_6\delta^H = C\|B\|_H\delta^H \le \frac{1}{2} \iff \delta \le (2C\|B\|_H)^{-1/H},$$

т.е. положим $\delta := |\mathcal{I}| \wedge (2C\|B\|_H)^{-1/H}$. При таком выборе

$$\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;\mathcal{I},\delta} \le 2c_8|X_u - \widetilde{X}_u| + 2c_7\|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}} + 2c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}.$$

Из последнего равенства, предложения 2.5 и неравенства $|\mathcal{I}| \le 1$ вытекает

$$\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;\mathcal{I}} \le 2\left(1 \vee 2(2C\|B\|_H)^{\frac{1-H}{H}}\right) \times \\ \times \left(c_8|X_u - \widetilde{X}_u| + c_7\|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}} + c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\right),$$

откуда и следует требуемое неравенство. Лемма доказана.

2.3.2 Теорема о непрерывной зависимости от начальных данных

Перейдем к основным результатам, касающимся непрерывной зависимости от начальных условий и правых частей решений уравнений (2.2), (2.11) на отрезке $[0,T]$.

Пусть ξ, $\widetilde{\xi}$ — случайные величины, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Следующая теорема устанавливает непрерывную зависимость решений.

Теорема 2.3. *Пусть $f,\widetilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$. Обозначим через X_t, $\widetilde{X}_t$ решения уравнений* (2.2)*,* (2.11) *с начальными условиями $X_0 = \xi$, $\widetilde{X}_0 = \widetilde{\xi}$ соответственно. Тогда:*

1) *почти наверное справедлива следующая оценка*

$$\|X-\widetilde{X}\|_H \leq C\left(|\xi-\widetilde{\xi}| + \|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\right) \tag{2.48}$$

для некоторой случайной величины $C = C(H, T, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$. Причем C может быть выбрана не зависящей от T, если $T \in (0,1]$;

2) *имеет место следующее неравенство*

$$\mathbb{E}\big(\ln\|X-\widetilde{X}\|_H\big) \leq C + \ln\big(\mathbb{E}|\xi-\widetilde{\xi}| + \|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\big), \tag{2.49}$$

где $C = C(H, H_1, \ldots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}) \in \mathbb{R}$ — константа, вообще говоря, зависящая от H, $H_1, \ldots, H_d$, T, $\|f\|_{C_b^3}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Зафиксируем произвольный отрезок $\mathcal{I} = [u,v] \subset [0,T]$ достаточно малой длины $|\mathcal{I}| \leq 1 \wedge T$ (точное значение длины $|\mathcal{I}|$ будет указано ниже) и получим оценку на $\|X-\widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}}$. Выберем произвольные $s,t \in \mathcal{I}$, очевидно справедливо неравенство

$$|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}| = \left|\int_s^t f(X_\tau)dB_\tau - \int_s^t \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)dB_\tau\right| \leq M_1 + M_2, \tag{2.50}$$

где $M_1 = \left|\int_s^t \left(f(X_\tau) - f(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right|$, $M_2 = \left|\int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right|$.

Оценим M_1. Из предложения 2.3 следует, что

$$M_1 \leq \left| f(X_s) - f(\widetilde{X}_s) \right| \|B\|_H |t-s|^H +$$
$$+ \left| (Df \cdot f)(X_s) - (Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s) \right| \|B\|_{2H} |t-s|^{2H} +$$
$$+ C \left(\|B\|_H \left\| R^{f(X) - f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;\mathcal{I}} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;\mathcal{I}} \right) |t-s|^{3H}.$$

Введем обозначение: $c_{1,2}(K_1, K_2) = K_1 \|B\|_H + K_2 \|B\|_{2H}$. Применяя лемму 2.2 к функциям f и $\widetilde{f}$, $Df \cdot f$ и $Df \cdot \widetilde{f}$, учитывая, $|\mathcal{I}| \leq 1$, из последнего неравенства легко вывести:

$$\frac{|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}|}{|t-s|^H} \leq c_0 \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + c_1 |X_u - \widetilde{X}_u| +$$
$$+ \widetilde{C} \left(\|B\|_H \left\| R^{f(X) - f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;\mathcal{I}} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;\mathcal{I}} \right) |\mathcal{I}|^{2H},$$

где $c_0 = c_{1,2}(1, \|f\|_{C_b^3})$, $c_1 = c_{1,2}(C_{1;f}, C_{1;Df \cdot f})$, $\widetilde{C} = c_{1,2}(C_{2;f}, C_{2;Df \cdot f}) + C$. Причем c_1, c_2 — случайные величины, зависящие только от H, $\|f\|_{C_b^3}$, $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$, но не зависящие от s,t, $\mathcal{I}$.

Далее, применяя леммы 2.3, 2.4 к правой части последнего неравенства, с учетом $|\mathcal{I}| \leq 1$ получим:

$$\frac{M_1}{|t-s|^H} \leq c_2 \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + c_3 |X_u - \widetilde{X}_u| + c_4 |\mathcal{I}|^H \|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}},$$

где $c_2 = c_0 + \widetilde{C} \cdot c_{1,2}(C_5, C_3)$, $c_3 = c_1 + \widetilde{C} \cdot c_{1,2}(C_4, C_1)$, $c_4 = \widetilde{C} \cdot c_{1,2}(C_6, C_3)$. Причем c_3, c_4 — случайные величины, зависящие от $H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$, но не зависящие от s,t, $\mathcal{I}$. Из леммы 2.1 следует, что $\frac{M_2}{|t-s|^H} \leq C_f \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}$, а посему

$$\frac{|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}|}{|t-s|^H} \leq c_3 |X_u - \widetilde{X}_u| + c_4 |\mathcal{I}|^H \|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}} + c_5 \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2},$$

где $c_5 = c_2 + C_f$. Последнее неравенство справедливо для любых s,$t \in \mathcal{I}$, $s \neq t$, а значит,

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}} \leq c_3 |X_u - \widetilde{X}_u| + c_5 \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + c_4 |\mathcal{I}|^H \|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}}$$

для произвольного $|\mathcal{I}| \in (0, 1]$. Теперь выберем $|\mathcal{I}|$ таким, чтобы выполнялось соотношение

$$c_4 |\mathcal{I}|^H \leq \frac{1}{2} \iff |\mathcal{I}| \leq (2c_4)^{-1/H} =: \delta_0,$$

Таким образом, для любого отрезка $\mathcal{I} = [u,v] \subset [0,T]$ длины $|\mathcal{I}| \leq 1 \wedge T \wedge \delta_0$ справедливо неравенство

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}} \leq c|X_u - \widetilde{X}_u| + c_f\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}, \tag{2.51}$$

где $c = 2c_3$, $c_f = 2c_5$. Если $1 \wedge T \wedge \delta_0 = T$, то $\mathcal{I} = [0,T]$, и неравенство (2.51) доказывает требуемое. Поэтому пусть далее $T > 1 \wedge \delta_0 =: \delta_1$.

Построим разбиение отрезка $[0,T]$ точками $t_j := (j \cdot \delta_1) \wedge T$, где $j = 0,1,\ldots$ Заметим, что $t_N = T$ при $N \geq \frac{T}{\delta_1}$, а также, что отрезки $\mathcal{I}_j = [t_j, t_{j+1}]$ имеют длины $|\mathcal{I}_j| \leq \delta_1$, $j = 0,1,\ldots$ Поэтому из неравенства (2.51) следуют оценки

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}_j} \leq c|X_{t_j} - \widetilde{X}_{t_j}| + c_f\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2},$$

для $j < \frac{T}{\delta_1}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} |X_{t_j} - \widetilde{X}_{t_j}| &\leq |X_{t_{j-1}} - \widetilde{X}_{t_{j-1}}| + \delta_1^H\|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}_{j-1}} \leq \\ &\leq (1 + c\delta_1^H)|X_{t_{j-1}} - \widetilde{X}_{t_{j-1}}| + c_f\delta_1^H\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}. \end{aligned}$$

Из полученного рекуррентного соотношения очевидной индукцией выводим неравенство:

$$\begin{aligned} |X_{t_j} - \widetilde{X}_{t_j}| &\leq (1 + c\delta_1^H)^j|X_0 - \widetilde{X}_0| + c_f\delta_1^H\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\sum_{k=0}^{j-1}(1 + c\delta_1^H)^k = \\ &= (1 + c\delta_1^H)^j|\xi - \widetilde{\xi}| + \frac{c_f}{c}\left((1 + c\delta_1^H)^j - 1\right)\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \end{aligned}$$

для $j < \frac{T}{\delta_1}$. Таким образом,

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;\mathcal{I}_j} \leq (1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1}\left(c|\xi - \widetilde{\xi}| + c_f\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\right) \tag{2.52}$$

для любого $j = 0,1,\ldots,\lfloor\frac{T}{\delta_1}\rfloor$.

Применяя предложение 2.7 с учетом неравенства (2.52) получим:

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;\delta_1} \leq 2^{1-H}(1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1}\left(c|\xi - \widetilde{\xi}| + c_f\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\right).$$

Рассмотрим выражение $(1+c\delta_1^H)^{T/\delta_1}$, $\delta_1 = 1 \wedge \delta_0$. Если $\delta_1 = 1$, то оно принимает значение $(1 + c)^T$. В противном случае $\delta_1 = \delta_0$, $\delta_0 = (2c_4)^{-1/H} < 1$, $2c_4 > 1$ и

$$(1 + c\delta_0^H)^{\frac{T}{\delta_0}} = \left(1 + \frac{c}{2c_4}\right)^{(2c_4)^H T} \leq \left(1 + \frac{c}{2c_4}\right)^{2c_4 T} = \left(\left(1 + \frac{c}{2c_4}\right)^{\frac{2c_4}{c}}\right)^{cT} \leq e^{cT},$$

поскольку функция $\phi(x) = (1+\frac{1}{x})^x$, $x > 0$ ограничена сверху числом e. Кроме того, $(1+c)^T = \phi(\frac{1}{c})^{cT} \le e^{cT}$. Поэтому $(1+c\delta_1^H)^{T/\delta_1} \le e^{cT}$ и

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;\delta_1} \le 2^{1-H} e^{cT} \left(c|\xi - \widetilde{\xi}| + c_f \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \right).$$

Теперь из предложения 2.5 и последнего неравенства получем оценку требуемого вида:

$$\|X - \widetilde{X}\|_H \le 2^{2-H} e^{2c_3T} \left(1 \vee 2T^{1-H} \vee 2(2c_4)^{\frac{1-H}{H}} T^{1-H} \right) (c_3 \vee c_5) \times \\ \times \left(|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \right). \tag{2.53}$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. Рассмотрим зависимость случайных величин c_3, c_4, c_5, фигурирующих в неравенстве (2.53), от $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ при фиксированных T, H, $\|f\|_{C_b^3}$. Из доказательства первой части следует, что эта зависимость выражается в виде композиции конечного числа функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = \alpha u + \beta v + \gamma$, $\Pi(u,v) = u \cdot v$, $\vee(u,v) = u \vee v$, $\psi_s(u) = u^s$ ($\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^+$ — параметры) вещественных аргументов $u,v \in \mathbb{R}^+$.

Применим логарифм к обеим частям неравенства (2.53). Учитывая, что $x \vee y \le x + y$ для $x,y > 0$, будем иметь:

$$\ln \|X - \widetilde{X}\|_H \le \mu + 2c_3T + \ln(c_3 + c_5) + \ln \left(1 + 2T^{1-H} + 2(2c_4)^{\frac{1-H}{H}} T^{1-H} \right) + \\ + \ln\bigl(|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \bigr),$$

где $\mu = (2 - H)\ln 2$. Возьмем математическое ожидание от обеих частей последнего неравенства. Ввиду вогнутости логарифма и неравенства Иенсена справедливо неравенство $\mathbb{E}(\ln \eta) \le \ln(\mathbb{E}\eta)$ для любой случайной величины η. С учетом этого, выводим неравенство

$$\mathbb{E}\bigl(\ln \|X - \widetilde{X}\|_H\bigr) \le \mu + 2T\mathbb{E}c_3 + \ln(\mathbb{E}c_3 + \mathbb{E}c_5) + \\ + \ln \left(1 + 2T^{1-H} + T^{1-H} 2^{\frac{1}{H}} \mathbb{E}\left(c_4^{\frac{1-H}{H}} \right) \right) + \ln\bigl(\mathbb{E}|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \bigr).$$

Таким образом, осталось доказать, что $\mathbb{E}c_3 < \infty$, $\mathbb{E}c_5 < \infty$, $\mathbb{E}\left(c_4^{\frac{1-H}{H}} \right) < \infty$. Однако, мы установим даже большее: для любого $r > 0$ конечны моменты $\mathbb{E}c_j^r = \mathbb{E}c_j^r(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j = 3,4,5$.

Далее воспользуемся тем, что зависимость $c_j^r = c_j^r(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j = 3,4,5$ от норм $\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$ выражается в виде композиции конечного числа функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)$, $\Pi(u,v)$, $\vee(u,v)$, $\psi_s(u)$. Но очевидно, что $\vee(u,v) =$

$= u \vee v \leq u + v = \Sigma_{1,1,0}(u,v)$ для $u,v \in \mathbb{R}^+$. Также понятно, что для $u = u(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) \in \mathbb{R}^+, v = v(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) \in \mathbb{R}^+$ справедливы соотношения

$$\mathbb{E}\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = \alpha\mathbb{E}u + \beta\mathbb{E}v + \gamma,$$
$$\mathbb{E}(u \vee v) \leq \mathbb{E}u + \mathbb{E}v,$$
$$\mathbb{E}\Pi(u,v) \leq (\mathbb{E}u^2)^{1/2}(\mathbb{E}v^2)^{1/2}.$$

Значит, конечность указанных математических ожиданий от функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$, Π, $\vee$ будет обеспечена конечностью моментов их аргументов. Осталось рассмотреть функцию $\psi_s(u) = u^s$.

Если $s \in (0,1]$, то из неравенства Иенсена следует оценка $\mathbb{E}\psi_s(u) \leq \psi_s(\mathbb{E}u) = (\mathbb{E}u)^s$. Если же $s \in (1,\infty)$, то справедливы соотношения:

$$\mathbb{E}\psi_s(\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)) = \mathbb{E}(\alpha u + \beta v + \gamma)^s \leq 3^{s-1}(\alpha^s\mathbb{E}u^s + \beta^s\mathbb{E}v^s + \gamma^s),$$
$$\mathbb{E}\psi_s(u \vee v) \leq \mathbb{E}(u+v)^s \leq 2^{s-1}(\mathbb{E}u^s + \mathbb{E}v^s),$$
$$\mathbb{E}\psi_s(uv) = \mathbb{E}u^s v^s \leq (\mathbb{E}u^{2s})^{1/2}(\mathbb{E}v^{2s})^{1/2}.$$

В то же время, как следует из [60, лемма 7.4], любой s-момент, $s \geq 1$ случайной величины $\|B\|_H$ (а значит и любой s-момент, $s > 0$ ввиду неравенства Иенсена) конечен, т.е. $\mathbb{E}\psi_s(\|B\|_H) = \mathbb{E}\|B\|_H^s < \infty$, $s > 0$. То же самое справедливо для случайной величины $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ (см. предложение 2.4): $\mathbb{E}\psi_s(\|\mathbb{B}\|_{2H}) = \mathbb{E}\|\mathbb{B}\|_{2H}^s < \infty$, $s > 0$.

Из полученных соотношений следует, что композиция конечного числа указанных функций с нормами $\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$ в качестве аргументов будет иметь конечное математическое ожидание и, в частности, $\mathbb{E}c_j^r(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) < \infty$, $j = 3,4,5$ для любого $r > 0$. Теорема доказана.

Замечание 2.7. Нетрудно видеть, что в приведенном доказательстве первого утверждения теоремы не использовались никакие другие свойства дробного броуновского движения $(B_t)_{t\in[0,T]}$, кроме свойства непрерывности траекторий по Гельдеру с показателем H. Это означает, что утверждение 1 приведенной теоремы справедливо для произвольных гельдеровских функций $B \in C^H([0,T], \mathbb{R}^{d+1})$.

Выводы

В данной главе диссертации рассмотрены общие свойства стохастических дифференциальных уравнений $dX_t = f(X_t)dB_t$, $t \in [0,T]$ с многомерным дробным броуновским движением $B_t = (B_t^{(0)}, B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})$, компоненты $B_t^{(i)}$ которого имеют различные показатели Харста $H_i > 1/3$, $i \geq 1$, а также содержащих снос $dB_t^{(0)} = dt$.

Построено определение процесса второго порядка $\mathbb{B}_{s,t}$, фигурирующего в определении потракторного интеграла Губинелли, над указанным дробным броуновским движением B_t. Для процесса $\mathbb{B}_{s,t}$ доказана принадлежность п. н. пары $(B, \mathbb{B})$ пространству геометрических грубых траекторий и конечность моментов любого порядка $q \geq 1$ процесса $\|\mathbb{B}\|_H$. Введено определение решения рассматриваемого уравнения с использованием потраекторного интеграла Губинелли и указано условие существования и единственности решений — непрерывность и ограниченность производных функции f до второго порядка включительно.

Доказана формула замены переменных для функций g от решений рассматриваемых уравнений в предположении, что функции f и g имеют непрерывные и ограниченные производные до третьего порядка включительно.

Получена теорема о непрерывной зависимости решений рассматриваемых уравнений с начальными условиями $X_0 = \xi$ от начальных данных f, ξ в предположении, что исходная и возмущенная правые части f, $\widetilde{f}$ имеют непрерывные и ограниченные производные до третьего порядка включительно.

ГЛАВА 3
АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, УПРАВЛЯЕМЫХ ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

3.1 Асимптотические разложения в окрестности нуля

В данном разделе будем придерживаться следующих компактных записей:

$$\Delta^k[0,t] = \{(t_1, \dots, t_k) \in [0,1]^k :\ 0 \le t_1 < \dots < t_k \le t\} \tag{3.1}$$

$$\int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} = \int_0^t \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_2} dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} dB_{t_k}^{(i_k)},$$
$$I_k = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_d^k := \{0, \dots, d\}^k, \tag{3.2}$$

$$D_f^{(i)} = \sum_{j=1}^n f_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j},\ i \in \{0, \dots, d\} \qquad D_f^{(I_k)} = D_f^{(i_1)} \dots D_f^{(i_k)}, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{P}_t g(x) = \mathbb{E}\, g(X_t^x), \quad t \ge 0. \tag{3.4}$$

В дальнейшем для краткости будем опускать верхний индекс x и обозначать решение через X_t в доказательствах.

Теорема 3.1. *Пусть $f \in C_b^{N+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g \in C_b^{N+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда для любого фиксированного $H \in (1/3, 1/2]$ такого, что $H < H_{min} = \min\limits_{i=0,\dots d} H_i$ справедливо следующее асимптотическое разложение:*

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \{0,\dots,d\}^k} t^{|H_{I_k}|} \cdot (D_f^{(I_k)} g)(x)\, \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)}\right) + O(t^{(N+1)H}), \tag{3.5}$$

при $t \to 0$, где $|H_{I_k}| = H_{i_1} + H_{i_2} + \dots + H_{i_k}$ — сумма индексов Харста дробных броуновских движений $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \dots, B^{(i_k)}$.

Доказательство. С учетом обозначений (3.3) формулу замены переменных (2.4) можно записать в следующей развернутой форме:

$$g(X_t^x) = g(x) + \sum_{i=0}^d \int_0^t (D_f^{(i)} g)(X_r^x) dB_r^{(i)} \tag{3.6}$$

Применяя формулу (3.6) $(N+1)$ раз, с учетом обозначений (3.1) — (3.3) получим:

$$g(X_t) = g(x) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{I_k \in \mathbb{N}_d^k} (D_f^{(I_k)} g)(x) \int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} +$$

$$+ \sum_{I_{N+1} \in \mathbb{N}_d^{N+1}} \int_0^t \int_0^{t_{N+1}} \dots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(X_{t_1})\, dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})}. \qquad (3.7)$$

Обозначим $\varphi_{I_{N+1}}(x) = (D_f^{(I_{N+1})} g)(x)$ и преобразуем последнее слагаемое в (3.7). Введем в рассмотрение процесс $\widehat{B}_u^{(c)} = (\widehat{B}_u^{(0;c)}, \widehat{B}_u^{(1;c)}, \dots, \widehat{B}_u^{(d;c)})^\top$, зависящий от параметра $c > 0$, i-я компонента которого определяется равенством $\widehat{B}_u^{(i;c)} = c^{H_i} B_{u/c}^{(i)}$, $u \in [0,T]$. По свойству самоподобия дробного броуновского движения процесс $\widehat{B}_u^{(i;c)}$ также является дробным броуновским движением с индексом Харста H_i для любого $c > 0$, $i = \overline{1,d}$. Следовательно, при фиксированном $t \in [0,T]$:

$$\int_0^t \int_0^{t_{N+1}} \dots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(X_{t_1})\, dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} =$$

$$= \int_0^1 dB_{t\cdot t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \int_0^{t_{N+1}} dB_{t\cdot t_N}^{(i_N)} \dots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(X_{t\cdot t_1})\, dB_{t\cdot t_1}^{(i_1)} =$$

$$\stackrel{\mathcal{L}}{=} \int_0^1 d\widehat{B}_{t\cdot t_{N+1}}^{(i_{N+1};t)} \int_0^{t_{N+1}} d\widehat{B}_{t\cdot t_N}^{(i_N;t)} \dots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(\widehat{X}_{t\cdot t_1}^{(t)})\, d\widehat{B}_{t\cdot t_1}^{(i_1;t)} =$$

$$= t^{H_{i_1} + \ldots + H_{i_{N+1}}} \int_0^1 dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \int_0^{t_{N+1}} dB_{t_N}^{(i_N)} \dots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(\widehat{X}_{t\cdot t_1}^{(t)})\, dB_{t_1}^{(i_1)}, \qquad (3.8)$$

где знак $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ означает совпадение распределений, а $\widehat{X}_\tau^{(t)}$ — решение уравнения:

$$d\widehat{X}_\tau^{(t)} = f(\widehat{X}_\tau^{(t)}) d\widehat{B}_\tau^{(t)}, \quad \tau \in [0,T] \qquad (3.9)$$

с начальным условием $\widehat{X}_0^{(t)} = x$. По тем же соображениям

$$\int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} \ \stackrel{\mathcal{L}}{=}\ t^{|H_{I_k}|} \int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)}, \qquad (3.10)$$

а посему из (3.7) — (3.10) после взятия математического ожидания, получим:

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{I_k \in \mathbb{N}_d^k} t^{|H_{I_k}|} (D_f^{(I_k)} g)(x)\, \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)} \right) + \mathcal{R}_{N+1}(t), \ (3.11)$$

где

$$\mathcal{R}_{N+1}(t) =$$
$$= \sum_{I_{N+1}\in\mathbb{N}_d^{N+1}} \left(t^{|H_{I_{N+1}}|}\, \mathbb{E}\int_0^1 \int_0^{t_{N+1}} \dots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(\widehat{X}^{(t)}_{t\cdot t_1})\, dB^{(i_1)}_{t_1} \dots dB^{(i_N)}_{t_N} dB^{(i_{N+1})}_{t_{N+1}} \right). \tag{3.12}$$

Поскольку $|H_{I_{N+1}}| \geq (N+1)H$ для любого I_{N+1}, то при $t < 1$:

$$|\mathcal{R}_{N+1}(t)| \leq (d+1)^{N+1} t^{(N+1)H} \times$$
$$\times \max_{I_{N+1}\in\mathbb{N}_d^{N+1}} \mathbb{E}\left| \int_0^1 \int_0^{t_{N+1}} \dots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(\widehat{X}^{(t)}_{t\cdot t_1})\, dB^{(i_1)}_{t_1} \dots dB^{(i_N)}_{t_N} dB^{(i_{N+1})}_{t_{N+1}} \right|. \tag{3.13}$$

Поэтому, учитывая (3.11) — (3.13), для завершения доказательства формулы (3.5) осталось показать, что

$$\mathbb{E}\left| \int_0^1 \int_0^{t_{N+1}} \dots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(\widehat{X}^{(t)}_{t\cdot t_1})\, dB^{(i_1)}_{t_1} \dots dB^{(i_N)}_{t_N} dB^{(i_{N+1})}_{t_{N+1}} \right| < +\infty \tag{3.14}$$

для любых $I_{N+1} = (i_1, \dots, i_{N+1}) \in \mathbb{N}_d^{N+1}$.

Рассмотрим повторные интегралы чуть более общего вида, нежели (3.14). Для произвольного фиксированного $c \in (0,1]$ будем оценивать повторные интегралы вида

$$\mathcal{I}^{(k)}_t = \int_0^t \int_0^{t_{k-1}} \dots \int_0^{t_1} \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cr}\big)\, dB^{(i_1)}_r \dots dB^{(i_{k-2})}_{t_{k-2}} dB^{(i_{k-1})}_{t_{k-1}}, \quad t \in [0{,}1], \tag{3.15}$$

в которых $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — произвольная функция с непрерывными и ограниченными производными до второго порядка включительно. Для единообразия положим $\mathcal{I}^{(0)}_t = \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{ct}\big)$.

Лемма 3.1. *Пусть φ имеет непрерывные и ограниченные производные до второго порядка включительно. Тогда справедливы неравенства $|\mathcal{I}^{(k)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k-1)}_s B^{(i)}_{s,t}| \leq M_k |t-s|^{2H}$ для любого $i = \overline{0,d}$ и $|\mathcal{I}^{(k)}_{s,t}| \leq \widetilde{M}_k |t-s|^H$, где $M_k, \widetilde{M}_k$ — случайные величины* (*не зависящие от s, t*).

Доказательство. Проведем индукцией по k.

Рассмотрим $k = 1$. Докажем, что $\big(\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\big)\big)' = c^{H_{i_1}} D\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\big)\big(\widehat{X}^{(c)}\big)'_{c\cdot}$. Введем обозначение $R^{\widehat{X}^{(c)};i_1}_{u,v} = \widehat{X}^{(c)}_{u,v} - \big(\widehat{X}^{(c)}\big)'_u \widehat{B}^{(i_1;c)}_{u,v}$ для i_1-й компоненты остатка $R^{\widehat{X}^{(c)}}$ по отношению к процессу $\widehat{X}^{(c)}$, управляемому процессом $\widehat{B}^{(i_1;c)}$.

Используя формулу Тейлора, будем иметь

$$
\begin{aligned}
R_{s,t}^{\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)});i_1} &:= \varphi\big(\widehat{X}_{ct}^{(c)}\big) - \varphi\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)}\big) - c^{H_{i_1}} D\varphi\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)}\big)\big(\widehat{X}^{(c)}\big)'_{cs} B_{s,t}^{(i_1)} = \\
&= \varphi\big(\widehat{X}_{ct}^{(c)}\big) - \varphi\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)}\big) - D\varphi\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)}\big)\big(\widehat{X}^{(c)}\big)'_{cs} \widehat{B}_{cs,ct}^{(i_1;c)} = \\
&= \varphi\big(\widehat{X}_{ct}^{(c)}\big) - \varphi\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)}\big) - D\varphi\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)}\big)\widehat{X}_{cs,ct}^{(c)} + D\varphi\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)}\big) R_{cs,ct}^{\widehat{X}^{(c)};i_1} = \\
&= \frac{1}{2} D^2\varphi\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)} + \theta \widehat{X}_{cs,ct}^{(c)}\big)\widehat{X}_{cs,ct}^{(c)} \otimes \widehat{X}_{cs,ct}^{(c)} + D\varphi\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)}\big) R_{cs,ct}^{\widehat{X}^{(c)};i_1}
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

для некоторого $\theta \in (0{,}1)$. Из теоремы существования 2.1 следует, что $\|R^{\widehat{X}^{(c)};i_1}\|_{2H} \le \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H} < \infty$. Легко видеть, что

$$
\begin{aligned}
\left|R_{s,t}^{\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)});i_1}\right| &\le \frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|_H^2 |ct - cs|^{2H} + \|D\varphi\|_\infty \|R^{\widehat{X}^{(c)};i_1}\|_{2H} |ct - cs|^{2H} = \\
&= c^{2H}\left(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|_H^2 + \|D\varphi\|_\infty \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}\right)|t - s|^{2H},
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

откуда следует, что $\|R_{s,t}^{\varphi(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)});i_1}\|_{2H} \le \frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|_H^2 + \|D\varphi\|_\infty \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H} < \infty$ (так как $c \le 1$), что и требовалось.

Далее, поскольку $\varphi\big(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)}\big)' = c^{H_{i_1}} D\varphi\big(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)}\big)\big(\widehat{X}^{(c)}\big)'_{c\cdot} = c^{H_{i_1}} D\varphi\big(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)}\big) f\big(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)}\big)$, то

$$
\begin{aligned}
\left|\Big(\varphi\big(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)}\big)'\Big)_{s,t}\right| &= c^{H_{i_1}}\big|(D\varphi \cdot f)\big(\widehat{X}_{ct}^{(c)}\big) - (D\varphi \cdot f)\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)}\big)\big| = \\
&= c^{H_{i_1}}\left|D(D\varphi \cdot f)\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)} + \theta\widehat{X}_{cs,ct}^{(c)}\big)\right| \cdot \big|\widehat{X}_{cs,ct}^{(c)}\big| = \\
&= c^{H_{i_1}}\left|(D^2\varphi \cdot f)\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)} + \theta\widehat{X}_{cs,ct}^{(c)}\big) + (D\varphi \cdot Df)\big(\widehat{X}_{cs}^{(c)} + \theta\widehat{X}_{cs,ct}^{(c)}\big)\right| \cdot \big|\widehat{X}_{cs,ct}^{(c)}\big| \le \\
&\le c^{H_{i_1}}\left(\|D^2\varphi\|_\infty \|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty \|Df\|_\infty\right)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H |ct - cs|^H = \\
&= c^{H_{i_1}+H}\left(\|D^2\varphi\|_\infty \|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty \|Df\|_\infty\right)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H |t - s|^H.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

Отсюда следует, что $\big\|\varphi\big(\widehat{X}_{c\cdot}^{(c)}\big)'\big\|_H \le \left(\|D^2\varphi\|_\infty \|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty \|Df\|_\infty\right)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H < \infty$. Таким образом, ввиду неравенства $\big||a| - |b|\big| \le |a - b|$ и предложения 2.3, будем иметь:

$$\left|\int_s^t \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cr}\big)\,dB^{(i_1)}_r - \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big)B^{(i_1)}_{s,t}\right| \le c^{H_{i_1}}\|D\varphi\|_\infty\|f\|_\infty\|\mathbb{B}^{(i_1)}\|_{2H}|t-s|^{2H}+$$
$$+C\left(\|B^{(i_1)}\|_H\big\|R^{\varphi(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot});i_1}\big\|_{2H}+\|\mathbb{B}^{(i_1)}\|_{2H}\big\|\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\big)'\big\|_H\right)|t-s|^{3H}\le$$
$$\le\|D\varphi\|_\infty\|f\|_\infty\|\mathbb{B}\|_{2H}|t-s|^{2H}+$$
$$+C\Bigg(\left(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|^2_H+\|D\varphi\|_\infty\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}\right)\|B\|_H+$$
$$+\left(\|D^2\varphi\|_\infty\|f\|_\infty+\|D\varphi\|_\infty\|Df\|_\infty\right)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H\|\mathbb{B}\|_{2H}\Bigg)|t-s|^{2H}\le$$
$$\le M_1|t-s|^{2H}, \tag{3.19}$$

где $M_1=\Big(C(\|D^2\varphi\|_\infty\|f\|_\infty+\|D\varphi\|_\infty\|Df\|_\infty)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H+\|D\varphi\|_\infty\|f\|_\infty\Big)\|\mathbb{B}\|_{2H}+$ $+C\Big(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|^2_H+\|D\varphi\|_\infty\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}\Big)\|B\|_H$.

Итак, получили $|\mathcal{I}^{(1)}_{s,t}-\mathcal{I}^{(0)}_s B^{(i_1)}_{s,t}|\le M_1|t-s|^{2H}$, как и утверждалось. Из доказанного следует, что

$$|\mathcal{I}^{(1)}_{s,t}|\le|\mathcal{I}^{(0)}_s||B^{(i_1)}_{s,t}|+M_1|t-s|^{2H}\le$$
$$\le\big|\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big)\big|\|B^{(i_1)}\|_H|t-s|^H+M_1|t-s|^H\le$$
$$\le(\|\varphi\|_\infty\|B\|_H+M_1)|t-s|^H=:\widetilde{M}_1|t-s|^H. \tag{3.20}$$

Легко видеть, что проведенные выше выкладки (3.16) — (3.20) не зависят от значения i_1, т.е. справедливы и дают одни и те же оценки для любого $i_1=\overline{0,d}$.

Рассмотрим теперь $k=2$. Используя доказанное выше, предложение 2.3 и рекуррентное соотношение $\mathcal{I}^{(k)}_t=\int_0^t\mathcal{I}^{(k-1)}_r dB^{(i_k)}_r$, получим:

$$\left|\mathcal{I}^{(2)}_{s,t}-\mathcal{I}^{(1)}_s B^{(i_2)}_{s,t}\right|\ \le\ \left|(\mathcal{I}^{(1)})'_s\mathbb{B}^{(i_2)}_{s,t}\right|+$$
$$+C\Big(\|B^{(i_2)}\|_H\cdot\|(\mathcal{I}^{(1)})_{s,t}-(\mathcal{I}^{(1)})'_s B^{(i_2)}_{s,t}\|_{2H}+\|\mathbb{B}^{(i_2)}\|_{2H}\cdot\|(\mathcal{I}^{(1)})'\|_H\Big)|t-s|^{3H}=$$
$$=|\mathcal{I}^{(0)}_s\mathbb{B}^{(i_2)}_{s,t}|+C\Big(\|B^{(i_2)}\|_H\|\mathcal{I}^{(1)}_{s,t}-\mathcal{I}^{(0)}_s B^{(i_2)}_{s,t}\|_{2H}+\|\mathbb{B}^{(i_2)}\|_{2H}\|\mathcal{I}^{(0)}\|_H\Big)|t-s|^{3H}\le$$
$$\le\|\varphi\|_\infty\|\mathbb{B}\|_{2H}|t-s|^{2H}+C\Big(M_1\|B\|_H+\|\mathbb{B}\|_{2H}c^{H_{i_1}}\|D\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|_H\Big)|t-s|^{2H}\le$$
$$\le M_2|t-s|^{2H}. \tag{3.21}$$

Здесь $M_2=(\|\varphi\|_\infty+C\|D\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|_H)\|\mathbb{B}\|_{2H}+CM_1\|B\|_H$, а оценка на $\|\mathcal{I}^{(0)}\|_H$ была получена с помощью формулы конечных приращений:

$$\mathcal{I}^{(0)}_{s,t}=\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{ct}\big)-\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big)=D\varphi\Big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}+\theta\big(\widehat{X}^{(c)}_{ct}-\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big)\Big)\big(\widehat{X}^{(c)}_{ct}-\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big). \tag{3.22}$$

Так, мы получили $|\mathcal{I}^{(2)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(1)}_s B^{(i_2)}_{s,t}| \le M_2|t-s|^{2H}$. Как и в случае $k=1$, отсюда выводим, что $|\mathcal{I}^{(2)}_{s,t}| \le (\widetilde{M}_1\|B\|_H + M_2)|t-s|^H = \widetilde{M}_2|t-s|^H$, поскольку

$$|\mathcal{I}^{(2)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(1)}_s B^{(i_2)}_{s,t}| \ge |\mathcal{I}^{(2)}_{s,t}| - |\mathcal{I}^{(1)}_s| \cdot |B_{s,t}| \ge$$
$$\ge |\mathcal{I}^{(2)}_{s,t}| - \|\mathcal{I}^{(1)}\|_\infty \|B\|_H |t-s|^H \ge |\mathcal{I}^{(2)}_{s,t}| - \|\mathcal{I}^{(1)}\|_H \|B\|_H |t-s|^H. \tag{3.23}$$

Легко видеть, что проведенные выше выкладки (3.21) — (3.23) не зависят от значения i_2, т.е. справедливы и дают одни и те же оценки для любого $i_2 = \overline{0,d}$.

Переход доказывается аналогичным образом. Предположим, что утверждение выполнено для всех натуральных чисел, меньших k, и докажем его для $k+1$. По предположению индукции из предложения 2.3 будет следовать

$$|\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k-1)}_s \mathbb{B}^{(i_{k+1})}_{s,t}| \le$$
$$\le C\Big(\|B^{(i_{k+1})}\|_H \cdot \|\mathcal{I}^{(k)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k-1)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t}\|_{2H} + \|\mathbb{B}^{(i_{k+1})}\|_{2H} \cdot \|\mathcal{I}^{(k-1)}\|_H\Big)|t-s|^{3H} \le$$
$$\le C(M_k\|B\|_H + \widetilde{M}_{k-1}\|\mathbb{B}\|_{2H})|t-s|^{2H}. \tag{3.24}$$

В то же время,

$$|\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k-1)}_s \mathbb{B}^{(i_{k+1})}_{s,t}| \ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t}| - |\mathcal{I}^{(k-1)}_s| \cdot |\mathbb{B}^{(i_{k+1})}_{s,t}| \ge$$
$$\ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t}| - \|\mathcal{I}^{(k-1)}\|_\infty \|\mathbb{B}^{(i_{k+1})}\|_{2H}|t-s|^{2H} \ge$$
$$\ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t}| - \widetilde{M}_{k-1}\|\mathbb{B}\|_{2H}|t-s|^{2H}. \tag{3.25}$$

Таким образом,

$$|\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t}| \le M_{k+1}|t-s|^{2H}, \tag{3.26}$$

где $M_{k+1} = (C+1)\|\mathbb{B}\|_{2H}\widetilde{M}_{k-1} + C\|B\|_H M_k$. Осталось заметить, что

$$M_{k+1}|t-s|^H \ge M_{k+1}|t-s|^{2H} \ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t}| \ge$$
$$\ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t}| - |\mathcal{I}^{(k)}_s| \cdot |B^{(i_{k+1})}_{s,t}| \ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t}| - \|\mathcal{I}^{(k)}\|_\infty \|B^{(i_{k+1})}\|_H |t-s|^H \ge$$
$$\ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t}| - \widetilde{M}_k\|B\|_H|t-s|^H. \tag{3.27}$$

Отсюда

$$|\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t}| \le (M_{k+1} + \widetilde{M}_k\|B\|_H)|t-s|^H =: \widetilde{M}_{k+1}|t-s|^H, \tag{3.28}$$

что и требовалось. Причем, как легко видеть, что проведенные выше выкладки (3.24) — (3.28) не зависят от значения i_{k+1}, т.е. справедливы и дают одни и те же оценки для любого $i_{k+1} = \overline{0,d}$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что

$$(\mathcal{I}^{(k)})' = \mathcal{I}^{(k-1)},\ R^{\mathcal{I}^{(k)}}_{s,t} = (\mathcal{I}^{(k)})_{s,t} - (\mathcal{I}^{(k)})'_s B^{(i)}_{s,t} = \mathcal{I}^{(k)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k-1)}_s B^{(i)}_{s,t},$$

$$\|R^{\mathcal{I}^{(k)}}_{s,t}\|_{2H} \le M_k,\ \|\mathcal{I}^{(k)}\|_H \le \widetilde{M}_k,$$

а также $\|\mathcal{I}^{(k)}\|_\infty \le \widetilde{M}_k$, поскольку $\max_{t\in[0,1]} |\mathcal{I}^{(k)}_t| = \max_{t\in[0,1]} |\mathcal{I}^{(k)}_{0,t}|$.

Полученные рекуррентные соотношения

$$M_{k+1} = (C+1)\|\mathbb{B}\|_{2H}\widetilde{M}_{k-1} + C\|B\|_H M_k, \quad \widetilde{M}_{k+1} = M_{k+1} + \widetilde{M}_k\|B\|_H \tag{3.29}$$

с начальными условиями

$$M_1 = \Big(C(\|D^2\varphi\|_\infty\|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty\|Df\|_\infty)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H + \|D\varphi\|_\infty\|f\|_\infty\Big)\|\mathbb{B}\|_{2H} + \\ +C\left(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|^2_H + \|D\varphi\|_\infty\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}\right)\|B\|_H, \tag{3.30}$$

$$\widetilde{M}_1 = \|\varphi\|_\infty\|B\|_H + M_1, \tag{3.31}$$

$$M_2 = (\|\varphi\|_\infty + C\|D\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|_H)\|\mathbb{B}\|_{2H} + CM_1\|B\|_H, \tag{3.32}$$

$$\widetilde{M}_2 = \widetilde{M}_1\|B\|_H + M_2 \tag{3.33}$$

позволяют последовательно вычислить константы $M_k, \widetilde{M}_k$. Очевидная индукция по k показывает, что $M_k = M_k(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}, \|\widehat{X}^{(c)}\|_H, \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H})$, $\widetilde{M}_k = \widetilde{M}_k(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}, \|\widehat{X}^{(c)}\|_H, \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H})$ являются многочленами с постоянными положительными коэффициентами, причем $\|B\|_H$ и $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ входят в одночлены в степени не выше k, $\|\widehat{X}^{(c)}\|_H$ — в степени не выше 2, а $\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}$ — в степени не выше 1. Пусть $\widetilde{\gamma}_k$ — максимальный коэффициент многочлена $\widetilde{M}_k(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}, \|\widehat{X}^{(c)}\|_H, \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H})$ и пусть

$$\mathbb{E}\Big(\|B\|^{i_1}_H\|\mathbb{B}\|^{i_2}_{2H}\|\widehat{X}^{(c)}\|^{j_1}_H\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|^{j_2}_{2H}\Big) = \max_{\substack{i,i'=\overline{0,k},\\ j=0,1,2,\\ j'=0,1}} \mathbb{E}\Big(\|B\|^{i}_H\|\mathbb{B}\|^{i'}_{2H}\|\widehat{X}^{(c)}\|^{j}_H\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|^{j'}_{2H}\Big). \tag{3.34}$$

Тогда взяв супремум и математическое ожидание от обеих частей неравенства $|\mathcal{I}^{(k)}_{s,t}| \le \widetilde{M}_k|t-s|^H$, получим:

$$\sup_{0\le s<t\le 1} \mathbb{E}\,|\mathcal{I}^{(k)}_{s,t}| \le \mathbb{E}\,\widetilde{M}_k \le 2k^2\cdot\widetilde{\gamma}_k\cdot\mathbb{E}\Big(\|B\|^{i_1}_H\|\mathbb{B}\|^{i_2}_{2H}\|\widehat{X}^{(c)}\|^{j_1}_H\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|^{j_2}_{2H}\Big). \tag{3.35}$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\|B\|_H^{i_1}\|\mathbb{B}\|_{2H}^{i_2}\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{j_1}\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{j_2}\Big) \le \\
&\le \Big(\mathbb{E}\big(\|B\|_H^{2i_1}\|\mathbb{B}\|_{2H}^{2i_2}\big)\cdot\mathbb{E}\big(\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{2j_1}\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{2j_2}\big)\Big)^{1/2} \le \\
&\le \Big(\mathbb{E}\,\|B\|_H^{4i_1}\cdot\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}\|_{2H}^{4i_2}\cdot\mathbb{E}\,\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{4j_1}\cdot\mathbb{E}\,\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{4j_2}\Big)^{1/4}.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\sup_{0\le s<t\le 1}\left|\int_s^t\int_0^{t_{k-1}}\dots\int_0^{t_1}\varphi\big(\widehat{X}_{cr}^{(c)}\big)\,dB_r^{(i_1)}\dots dB_{t_{k-2}}^{(i_{k-2})}dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})}\right| \le \\
&\le 2k^2\cdot\widetilde{\gamma}_k\cdot\Big(\mathbb{E}\,\|B\|_H^{4i_1}\cdot\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}\|_{2H}^{4i_2}\cdot\mathbb{E}\,\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{4j_1}\cdot\mathbb{E}\,\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{4j_2}\Big)^{1/4}.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Согласно [60, лемма 7.4] любой момент порядка $p \ge 1$ случайной величины $\|B\|_H$ конечен; в частности, $\mathbb{E}\,\|B\|_H^{4i_1} < \infty$. То же верно и для случайной величины $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ ввиду предложения 2.4, т.е., в частности, $\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}\|_{2H}^{4i_2} < \infty$. Из предложения 2.6 следует, что существуют универсальные константы c_1, c_2 такие, что

$$\|\widehat{X}^{(c)}\|_H \le c_1\left(\|\widehat{B}^{(c)}\|_H + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H}^{1/2} + \|\widehat{B}^{(c)}\|_H^{1/H} + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H}^{1/(2H)}\right), \tag{3.38}$$

$$\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H} \le c_2\left(\|\widehat{B}^{(c)}\|_H^2 + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H} + \|\widehat{B}^{(c)}\|_H^{1+\frac{1}{H}} + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2H}}\right). \tag{3.39}$$

Из неравенства Гельдера следует, что конечны любые моменты $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ порядка $q \in (0,1)$: $\mathbb{E}\,\|B^{(c)}\|_H^q \le \Big(\mathbb{E}\,\|B^{(c)}\|_H\Big)^q\Big(\mathbb{E}\,1^{1/(1-q)}\Big)^{1-q} < \infty$ (и аналогично $\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}^{(c)}\|_{2H}^q < \infty$). Поэтому из оценок (3.38) и (3.39) и неравенств о средних следует конечность моментов

$$\mathbb{E}\,\|X^{(c)}\|_H^{4j_1} < \infty, \qquad \mathbb{E}\,\|R^{X^{(c)}}\|_{2H}^{4j_2} < \infty. \tag{3.40}$$

Это, в свою очередь, завершает доказательство того, что правая часть (3.37) конечна. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Рассмотрим случай, когда все показатели Харста H_i, $i = 1,\dots,d$, равны $1/2$. В этом случае уравнение (2.2) можно рассматривать как уравнение Стратоновича. Учитывая связь уравнений Ито и Стратоновича [12, предложение 2.4], данное уравнение можно свести к уравнению Ито

$$dX_t = \tilde{f}_0(X_t)dt + \hat{f}(X_t)dW_t, \tag{3.41}$$

где $\hat{f}$ – матрица, составленная из вектор-столбцов $f_1, \dots, f_d$, W_t – d-мерное броуновское движение,

$$\tilde{f}_0(X) = f_0(X) - \mathrm{col}(\rho_1(X), \dots, \rho_n(X)),$$

$$\rho_j(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \hat{f}_{ji}(X)}{\partial x_k} \hat{f}_{ki}(X).$$

Так как решение уравнения (3.41) обладает марковским свойством [17, теорема 7.1.2], то, полагая $N = 2$ в соотношении (3.5), получим, что функция $u(x,t) = \mathbf{P}_t g(x)$ удовлетворяет обратному уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A} u$$

с дифференциальным оператором

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_{0,j}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{n} f_{k,j}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2.$$

Отметим, что даже для простейшего одномерного уравнения $dX_t = dB_t^\alpha$ при $\alpha \in (1/3, 1/2) \cup (1/2, 1)$ решение $X_t = B_t^\alpha$ не является семимартингалом, и следовательно, не обладает марковским свойством, которое является ключевым при выводе уравнений Колмогорова [17, теорема 8.1.1].

3.2 Математические ожидания повторных интегралов от дробных броуновских движений

В данном разделе мы вычислим математические ожидания повторных интегралов возникающих их разложений для $\mathbf{P}_t g(x)$ в теореме 3.1, предполагая, что $H_i \geq H^* > 1/2$ для всех $i = 0, \dots, d$.

Теорема 3.2. *Пусть* $I_m = (i_1, \dots, i_m) \in \{1, \dots, d\}^m$, $m \in \mathbb{N}$.

1. *Если* $m = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, *то*

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})} \right) = 0.$$

2. *Если $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то справедливо равенство*

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} dB^{(I_{2k})}\right) =$$

$$= \frac{1}{k!2^{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \left(\prod_{l=1}^{k} (H_{i_{\sigma(2l)}} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 1)(H_{i_{\sigma(2l)}} + H_{i_{\sigma(2l-1)}}) \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} |t_{\sigma(2l)} - t_{\sigma(2l-1)}|^{H_{i_{\sigma(2l)}} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 2} dt_1 \dots dt_{2k} \right),$$

где δ — символ Кронекера, S_{2k} — группа подстановок.

Доказательство. Первую часть легко доказать, используя свойство симметрии распределения дробного броуновского движения: если $B^{(i)}$ — дробное броуновское движение с индексом Харста H_i, то $-B^{(i)}$ — также дробное броуновское движение с тем же индексом Харста. Таким образом, получим

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})}\right) = \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} d\left(-B^{(I_{2k-1})}\right)\right) =$$

$$= (-1)^{2k-1}\, \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})}\right) = -\,\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})}\right),$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

Докажем вторую часть теоремы. Обозначим через $B^{(N)}$, $N \in \mathbb{N}$, последовательность приближений к B на диадных разбиениях $\mathcal{P}_{dyad}^{(N)} = \left\{ t_k^{(N)} = \frac{k}{2^N},\, k = \overline{0, 2^N} \right\}$ отрезка $[0,1]$, определяемых следующей формулой:

$$B_t^{(N)} = B_{t_{k-1}^{(N)}} + 2^N \left(t - t_{k-1}^{(N)}\right) \left(B_{t_k^{(N)}} - B_{t_{k-1}^{(N)}}\right),\ t \in \left[t_{k-1}^{(N)}, t_k^{(N)}\right),\ k = 1, \dots, N.$$

По теореме о мажорируемой сходимости (предложение 2.1) ввиду [26, следствие 20], получим:

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} dB^{(I_{2k})}\right) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} (dB^{(N)})^{(I_{2k})}\right).$$

Поскольку функции $B^{(N)}$ абсолютно непрерывны п.н., то справедливы соотношения

$$\int_{\Delta^{2k}[0,1]} (dB^{(N)})^{(I_{2k})} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{t_{2k}} \dots \int_0^{t_2} d\big(B^{(N)}_{t_1}\big)^{(i_1)} \dots d\big(B^{(N)}_{t_{2k-1}}\big)^{(i_{2k-1})} d\big(B^{(N)}_{t_{2k}}\big)^{(i_{2k})} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{t_{2k}} \dots \int_0^{t_2} \frac{d\big(B^{(N)}_{t_1}\big)^{(i_1)}}{dt_1}\, dt_1 \dots \frac{d\big(B^{(N)}_{t_{2k-1}}\big)^{(i_{2k-1})}}{dt_{2k-1}}\, dt_{2k-1} \frac{d\big(B^{(N)}_{t_{2k}}\big)^{(i_{2k})}}{dt_{2k}}\, dt_{2k} =$$

$$= \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \frac{d\big(B^{(N)}_{t_1}\big)^{(i_1)}}{dt_1} \dots \frac{d\big(B^{(N)}_{t_{2k}}\big)^{(i_{2k})}}{dt_{2k}}\, dt_1 \dots dt_{2k}. \tag{3.42}$$

Нам потребуется следующее утверждение, которое может быть доказано непосредственно путем разложения в ряд производящей функции моментов гауссовского случайного вектора.

Лемма 3.2 [21]. *Для центрированного гауссовского вектора* $G = (G_1, \dots, G_{2k})$ *справедливо равенство*

$$\mathbb{E}(G_1 \dots G_{2k}) = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \prod_{l=1}^{k} \mathbb{E}(G_{\sigma(2l)} G_{\sigma(2l-1)}).$$

Применяя лемму 3.2 к равенству (3.42), получим:

$$\mathbb{E}\bigg(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} (dB^{(N)})^{(I_{2k})} \bigg) =$$

$$= \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \mathbb{E}\bigg(\frac{d\big(B^{(N)}_{t_1}\big)^{(i_1)}}{dt_1} \dots \frac{d\big(B^{(N)}_{t_{2k}}\big)^{(i_{2k})}}{dt_{2k}} \bigg) dt_1 \dots dt_{2k} =$$

$$= \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \mathbb{E}\bigg(\frac{d\big(B^{(N)}_{t_{\sigma(2l)}}\big)^{(i_{\sigma(2l)})}}{dt_{\sigma(2l)}} \cdot \frac{d\big(B^{(N)}_{t_{\sigma(2l-1)}}\big)^{(i_{\sigma(2l-1)})}}{dt_{\sigma(2l-1)}} \bigg) dt_1 \dots dt_{2k}. \tag{3.43}$$

Рассмотрим отдельно каждый множитель в соотношении (3.43). Пусть $t_{\sigma(2l)} \in [t^{(N)}_u, t^{(N)}_{u+1})$ и $t_{\sigma(2l-1)} \in [t^{(N)}_v, t^{(N)}_{v+1})$ для некоторых $u,v \in \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ (для упрощения обозначений будем иногда опускать верхний индекс (N)). Используя представление $B^{(N)}$, можем записать:

$$\mathbb{E}\bigg(\frac{d\big(B^{(N)}_{t_{\sigma(2l)}}\big)^{(i_{\sigma(2l)})}}{dt_{\sigma(2l)}} \cdot \frac{d\big(B^{(N)}_{t_{\sigma(2l-1)}}\big)^{(i_{\sigma(2l-1)})}}{dt_{\sigma(2l-1)}} \bigg) =$$

$$= 2^{2N}\, \mathbb{E}\Big(B^{(i_{\sigma(2l)})}_{t_{u+1}} - B^{(i_{\sigma(2l)})}_{t_u} \Big) \Big(B^{(i_{\sigma(2l-1)})}_{t_{v+1}} - B^{(i_{\sigma(2l-1)})}_{t_v} \Big).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, однородность приращений дробного Броуновского движения, получим неравенство

$$\left|\mathbb{E}\Big(B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})} - B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})}\Big)\Big(B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})} - B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})}\Big)\right| \leq$$

$$\leq \sqrt{|t_{u+1} - t_u|^{2H_{i_{\sigma(2l)}}}|t_{v+1} - t_v|^{2H_{i_{\sigma(2l-1)}}}} \leq 2^{-2NH^*}. \tag{3.44}$$

Если $|u - v| > 1$, то легко вывести следующее равенство:

$$\mathbb{E}\Big(B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})} - B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})}\Big)\Big(B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})} - B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\delta_{i_{\sigma(2l)},i_{\sigma(2l-1)}}(H_{i_{\sigma(2l)}} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 1)(H_{i_{\sigma(2l)}} + H_{i_{\sigma(2l-1)}})\times$$

$$\times \iint_{[t_u^{(N)},t_{u+1}^{(N)})\times[t_v^{(N)},t_{v+1}^{(N)})} |x-y|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}dxdy. \tag{3.45}$$

Введем следующее обозначение:

$$R_{u,v}^{(N)} = [t_u^{(N)}, t_{u+1}^{(N)}) \times [t_v^{(N)}, t_{v+1}^{(N)}),$$

$$f_{u,v}^{(l)}(t) = \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)})\,\mathbb{E}\Big(B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})} - B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})}\Big)\Big(B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})} - B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})}\Big).$$

Используя соотношение (3.43), получим:

$$\mathbb{E}\bigg(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}(dB^{(N)})^{(I_{2k})}\bigg) =$$

$$= \frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\sum_{u,v=0}^{2^N-1}\mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)})\times$$

$$\times\,\mathbb{E}\Big(B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})} - B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})}\Big)\Big(B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})} - B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})}\Big)dt_1\dots dt_{2k} =$$

$$= \frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\left(\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(l)}(t) + \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\leq 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(l)}(t)\right)dt_1\dots dt_{2k} =$$

$$= \frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(l)}(t)\,dt_1\dots dt_{2k}+$$

$$+\frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\pi\in S_k}\left(\prod_{l=1}^{\alpha}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\right)\times$$

$$\times\Bigg(\prod_{l=\alpha+1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\Bigg)dt_1\dots dt_{2k} := I_1^{(N)}+I_2^{(N)}.$$

Сейчас утверждение теоремы является прямым следствием следующей леммы.

Лемма 3.3. *В предыдущих обозначениях пусть*

$$I_1^{(N)}=\frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(l)}(t)\,dt_1\dots dt_{2k},$$

$$I_2^{(N)}=\frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\pi\in S_k}\Bigg(\prod_{l=1}^{\alpha}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\Bigg)\times$$

$$\times\Bigg(\prod_{l=\alpha+1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\Bigg)dt_1\dots dt_{2k}.$$

Тогда $\lim\limits_{N\to\infty} I_2^{(N)}=0$ *и*

$$\lim_{N\to\infty} I_1^{(N)}=\frac{1}{k!2^{2k}}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\Bigg(\prod_{l=1}^{k}(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}})\Bigg)\times$$

$$\times\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\delta_{i_{\sigma(2l)},i_{\sigma(2l-1)}}|t_{\sigma(2l)}-t_{\sigma(2l-1)}|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}dt_1\dots dt_{2k}.$$

Доказательство. По теореме о среднем существует точка $(t_u^*,t_v^*)\in R_{u,v}^{(N)}$ такая, что

$$\iint_{R_{u,v}^{(N)}}|x-y|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}dxdy=|t_u^*-t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}\cdot \mathrm{mes}(R_{u,v}^{(N)})=$$

$$=2^{-2N}\cdot|t_u^*-t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}.$$

Когда N стремится к ∞, прямоугольник $R_{u,v}^{(N)}$ стягивается в точку $(t_{\sigma(2l)},t_{\sigma(2l-1)})$ и таким образом,

$$I_1^{(N)}=\frac{2^{2Nk}}{k!2^{2k}}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\Bigg(\prod_{l=1}^{k}(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}})\Bigg)\times$$

$$\times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)}) \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} \times$$

$$\times \iint_{R_{u,v}^{(N)}} |x-y|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2} dx dy dt_1 \ldots dt_{2k} =$$

$$= \frac{1}{k!2^{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \left(\prod_{l=1}^{k} (H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}) \right) \times$$

$$\times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)}) \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} \times$$

$$\times |t_u^* - t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2} dt_1 \ldots dt_{2k} \xrightarrow[N\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{k!2^{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \left(\prod_{l=1}^{k} (H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}) \right) \times$$

$$\times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} |t_{\sigma(2l)} - t_{\sigma(2l-1)}|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2} dt_1 \ldots dt_{2k}. \qquad (3.46)$$

Осталось доказать, что $I_2^{(N)} \to 0$ as $N \to \infty$. Выберем число $q > 1$ такое, что $2 - \frac{1}{q} < 2H^*$, и пусть $p = \frac{q}{q-1}$. Воспользуемся неравенством Гельдера, чтобы получить верхнюю оценку для $I_2^{(N)}$:

$$|I_2^{(N)}| \leq \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\pi \in S_k} 2^{2Nk} \times$$

$$\times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \left(\prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right) \left(\prod_{l=\alpha+1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\leq 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right) \right| dt_1 \ldots dt_{2k} \leq$$

$$\leq \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\pi \in S_k} 2^{2Nk} \times$$

$$\times \left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right|^p dt_1 \ldots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \prod_{l=\alpha+1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right|^q dt_1 \dots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.47}$$

Достаточно показать, что каждое слагаемое в (3.47) порядка $O(2^{(2-\frac{1}{q}-2H^*)N(k-\alpha)})$. Для первого интеграла в слагаемом (3.47) воспользуемся соображениями из соотношений (3.45), (3.46):

$$2^{2N\alpha} \left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right|^p dt_1 \dots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2^{2N\alpha} \cdot \frac{1}{2^k} \left(\prod_{l=1}^{\alpha} (H_{i_{\sigma(2\pi(l))}} + H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}} - 1)(H_{i_{\sigma(2\pi(l))}} + H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}) \right) \times$$

$$\times \Bigg(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} \Bigg| \prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|>1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}) \cdot \delta_{i_{\sigma(2\pi(l))}, i_{\sigma(2\pi(l)-1)}} \times$$

$$\times 2^{-2N} \cdot |t_u^* - t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2\pi(l))}} + H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}} - 2} \Bigg|^p dt_1 \dots dt_{2k} \Bigg)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[N\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{2^k} \left(\prod_{l=1}^{\alpha} (H_{i_{\sigma(2\pi(l))}} + H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}} - 1)(H_{i_{\sigma(2\pi(l))}} + H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}) \right) \times$$

$$\times \Bigg(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} \Bigg| \prod_{l=1}^{\alpha} \delta_{i_{\sigma(2\pi(l))}, i_{\sigma(2\pi(l)-1)}} \times$$

$$\times |(t_{\sigma(2\pi(l))} - t_{\sigma(2\pi(l)-1)}|^{H_{i_{\sigma(2\pi(l))}} + H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}} - 2} \Bigg|^p dt_1 \dots dt_{2k} \Bigg)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

поэтому первый множитель ограничен. Для второго интеграла в (3.47) воспользуемся оценкой (3.44) и получим:

$$2^{2N(k-\alpha)} \left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \prod_{l=\alpha+1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right|^q dt_1 \dots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{q}} \le 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \times$$

$$
\times \left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} \Bigg(\prod_{l=\alpha+1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|\leq 1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}\big(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big) \Bigg)^q dt_1 \dots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{q}}
$$

Во внутренней сумме только одно слагаемое равно 1: то, для которого $\big(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big) \in R_{u,u}^{(N)}$ или $\big(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big) \in R_{u,u\pm 1}^{(N)}$; остальные слагаемые занулятся. Произведение отлично от нуля только если все его множители отличны от нуля, поэтому

$$
2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} \Bigg(\prod_{l=\alpha+1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|\leq 1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}\big(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big) \Bigg)^q dt_1 \dots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{q}} \leq
$$

$$
\leq 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \times \Big(\mathrm{mes}\big\{ (t_1, \dots, t_{2k}) \in \Delta^{2k}[0,1] :
$$

$$
\big|t_{\sigma(2\pi(l))} - t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big| \leq 2 \cdot 2^{-N} \;\; \forall\, l = \overline{\alpha+1, k} \big\} \Big)^{\frac{1}{q}} \leq
$$

$$
\leq 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \times \Big(\mathrm{mes}\big\{ (t_1, \dots, t_{2k}) \in [0,1]^{2k} :
$$

$$
\big|t_{\sigma(2\pi(l))} - t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big| \leq 2 \cdot 2^{-N} \;\; \forall\, l = \overline{\alpha+1, k} \big\} \Big)^{\frac{1}{q}} \leq
$$

$$
\leq 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \left(1^\alpha \cdot \left(2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 2^{-N} \right)^{k-\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} =
$$

$$
= 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \cdot 2^{\frac{5(k-\alpha)}{2q}} \cdot 2^{-\frac{N(k-\alpha)}{q}} = O\big(2^{(2-\frac{1}{q}-2H^*)N(k-\alpha)}\big),
$$

что завершает доказательство сходимости $I_2^{(N)} \to 0$ при $N \to \infty$.

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Замечание 3.2. Рассмотрим математические ожидания повторных интегралов следующего вида

$$
J(I^{(m)}, t) := \mathbb{E}\bigg(\int_{\Delta^m[0,t]} dB^{(I_m)} \bigg)
$$

для произвольных индексов $I_m = (i_1, \dots, i_m) \in \mathbb{N}_d^m$. Без ограничения общности будем считать, что $i_1, \dots, i_k > 0$, а $i_j = 0$ для всех $j > k$. Тогда следующее равенство может быть получено изменением порядка интегрирования:

$$
J(I^{(m)}, t) = \int_0^t J(\widetilde{I^{(k)}}, \tau) \frac{(t-\tau)^{m-k-1}}{(m-k-1)!} d\tau,
$$

где $\widetilde{I^{(k)}} = (i_1, \ldots, i_k)$ и $J(\widetilde{I^{(k)}}, \tau)$ могут быть вычислены, используя равенство (3.10) и теорему 3.2.

Пример 3.1. Рассмотрим следующее одномерное уравнение:

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/2{,}1)$, $b, \sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции класса C_b^4. Обозначим $f(x) = (b(x), \sigma(x))$, $B_t = (t, B_t^H)$. Пусть также задано начальное условие $X_0 = x$. Выпишем несколько первых членов асимптотических разложений (3.5) (ограничимся $N = 2$) для решений данного уравнения.

Используя теорему 3.2 и замечание 3.2 можем вычислить повторные интегралы:

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^1[0,1]} dB^{(0)}\right) = \int_0^1 dt = 1, \quad \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^1[0,1]} dB^{(1)}\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 dB_t^H\right) = 0,$$

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(0,0)}\right) = \int_0^1 dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 = \int_0^1 t_2 dt_2 = \frac{1}{2},$$

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(0,1)}\right) = \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(1,0)}\right) = \int_0^1 \mathbb{E}\left(\int_0^{t_2} dB_{t_1}^H\right) dt_2 = 0,$$

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(1,1)}\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 dB_{t_2}^H \int_0^{t_2} dB_{t_1}^H\right) = \frac{1}{1!2^2} \cdot 2 \cdot 2H(2H-1)\times$$

$$\times \int_{\Delta^2[0,1]} |t_2 - t_1|^{2H-2} dt_1 dt_2 = H(2H-1) \int_0^1 dt_2 \int_0^{t_2} (t_2 - t_1)^{2H-2} dt_1 =$$

$$= H \int_0^1 t_2^{2H-1} dt_2 = \frac{1}{2}.$$

Для данного уравнения имеем операторы $D_f^{(0)} = b(x)\,\frac{\partial}{\partial x}$ и $D_f^{(1)} = \sigma(x)\,\frac{\partial}{\partial x}$. Нетрудно вычислить, что

$$D_f^{(0,0)} = b(x) Db(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + b^2(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D_f^{(1,1)} = \sigma(x) D\sigma(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + \sigma^2(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Таким образом, согласно теореме 3.1, для $\mathbf{P}_t g(x)$, $g \in C_b^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ справедливо асимптотическое разложение следующего вида:

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + t\, b(x) Dg(x) + \frac{1}{2} t^2 \left(b(x) Db(x) Dg(x) + b^2(x) D^2 g(x)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2} t^{2H} \left(\sigma(x) D\sigma(x) Dg(x) + \sigma^2(x) D^2 g(x)\right) + O\left(t^{3H}\right).$$

3.3 Коммутативный случай

В данном разделе будем предполагать, что компоненты $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ правой части уравнения (2.2) являются векторными полями из класса $C_b^{d+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такими, что справедливо равенство $D_f^{(i)} \circ D_f^{(j)} = D_f^{(j)} \circ D_f^{(i)}$, для любых $0 \le i,j \le d$.

Для каждого $i = \overline{0,d}$ обозначим через $(e^{tD_f^{(i)}})_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ семейство операторов, определяемое соотношением $e^{tD_f^{(i)}}(x) = X_t^x$ для любых $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, в котором X_t^x — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dX_t}{dt} = f_i(X_t)$$

с начальным условием $X_0 = x$.

Предложение 3.1. *Для решения X_t^x уравнения* (2.2) *с начальным условием $X_0 = x$ п. н. справедлива следующая формула:*

$$X_t^x = F(x, B_t), \quad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n,$$

в которой $F(x,y) = e^{y_0 D_f^{(0)}} \circ \ldots \circ e^{y_d D_f^{(d)}}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d+1}$.

Доказательство. Поскольку операторы $D_f^{(i)}$ коммутируют, то операторы $(e^{tD_f^{(i)}})_{t\ge 0}$ также коммутируют. Для пары $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d+1}$ обозначим

$$F(x,y) = \left(e^{y_0 D_f^{(0)}} \circ \ldots \circ e^{y_d D_f^{(d)}}\right)(x).$$

Применяя формулу замены переменных, легко видеть, что процесс $\left(e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x\right)_{t\ge 0}$ является решением уравнения $dX_t = f_d(X_t) dB_t^{(d)}$. Применяя формулу замены переменных еще раз и учитывая коммутативность операторов $D_f^{(d)}$, $D_f^{(d-1)}$, получим:

$$\begin{aligned} d\left(e^{B_t^{(d-1)} D_f^{(d)-1}} (e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x)\right) &= f_{d-1}\left(e^{B_t^{(d-1)} D_f^{(d-1)}} (e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x)\right) dB_t^{(d-1)} \\ &\quad + f_d\left(e^{B_t^{(d-1)} D_f^{(d-1)}} (e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x)\right) dB_t^{(d)}. \end{aligned}$$

И так далее. Путем последовательного применения формулы замены переменных, заключаем, что процесс $(F(x, B_t))_{t\ge 0}$ удовлетворяет уравнению (2.2) с начальным условием $X_0 = x$. Таким образом, согласно теореме 2.1, можем сделать вывод, что

$$X_t^x = F(x, B_t), \quad t \in [0,T],$$

п.н. Предложение доказано.

Теорема 3.3. *Для любой функции $g \in C_b^{d+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ справедливо равенство*

$$\mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right) = \left(\exp\left(tD_f^{(0)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} t^{2H_i}(D_f^{(i)})^2\right) g\right)(x).$$

Другими словами, функция

$$\varphi(t,x) = \mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right),$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_f^{(0)}\varphi + \sum_{i=1}^{d} H_i t^{2H_i - 1}(D_f^{(i)})^2\varphi, \tag{3.48}$$

с начальным условием

$$\varphi(0, x) = g(x).$$

Доказательство. Применяя формулу Ито для дробного броуновского движения из [24], получим для $i > 0$:

$$\mathbb{E}\left(g(e^{B_t^{(i)}D_f^{(i)}}(x))\right) = g(x) + H_i \int_0^t s^{2H_i - 1}\,\mathbb{E}\left((D_f^{(i)})^2 g(e^{B_s^{(i)}D_f^{(i)}}(x))\right) ds.$$

Если $i = 0$, то для $B_t^{(0)} = t$ будем иметь следующее равенство

$$g(e^{B_t^{(0)}D_f^{(0)}}(x)) = g(x) + \int_0^t D_f^{(0)} g(e^{B_s^{(0)}D_f^{(0)}}(x))ds.$$

Последние два равенства означают, что функции $u_i(t, x) = \mathbb{E}\left(g(e^{B_t^{(i)}D_f^{(i)}}(x))\right)$ являются решениями следующих уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = H_i t^{2H_i - 1}(D_f^{(i)})^2 u_i, \quad i > 0,$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = D_f^{(0)} u_0,$$

следовательно,

$$\mathbb{E}\left(g(e^{B_t^{(i)}D_f^{(i)}}(x))\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{2}t^{2H_i}(D_f^{(i)})^2\right)g\right)(x), \quad i > 0,$$

$$g(e^{B_t^{(0)}D_f^{(0)}}(x)) = \left(\exp\left(tD_f^{(0)}\right)g\right)(x).$$

Согласно предложению 3.1, п.н. верно равенство

$$X_t^x = (e^{B_t^{(0)}D_f^{(0)}} \circ \ldots \circ e^{B_t^{(d)}D_f^{(d)}})(x).$$

Используя коммутативность операторов $D_f^{(i)}$ и $D_f^{(j)}$, можем записать, что

$$\mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right) = \left(\exp\left(tD_f^{(0)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} t^{2H_i}(D_f^{(i)})^2\right)g\right)(x),$$

что, в свою очередь, доказывает теорему.

Замечание 3.3. Если компоненты правой части $f_i \in \mathbb{C}^{d+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ автономны, а операторы $D_f^{(i)}$ и $D_j^{(j)}$ коммутируют, то функция $\mathbb{E}(g(X_t^x))$ удовлетворяет уравнению (3.48), которое является обобщением обратного уравнения Колмогорова [17, теорема 8.1.1] на случай дробного броуновского движения с различными индексами Харста, вообще говоря отличными от $1/2$.

Пример 3.2. Рассмотрим следующее одномерное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = \sin X_t\, dt + 2H^{-1} \sin X_t\, dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/3,1)$. Пусть также задано начальное условие $X_0 = x \in \mathbb{R}$.

Для данного уравнения имеем операторы $D_f^{(0)} = \sin x \frac{\partial}{\partial x}$ и $D_f^{(1)} = 2H^{-1} \sin x \frac{\partial}{\partial x}$. Нетрудно видеть, что указанное уравнение удовлетворяет коммутативному случаю, поскольку

$$D_f^{(0)} \circ D_f^{(1)} = 2H^{-1} \sin x \cos x \frac{\partial}{\partial x} + 2H^{-1} \sin^2 x \frac{\partial^2}{\partial x^2} = D_f^{(1)} \circ D_f^{(0)}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $(D_f^{(1)})^2 = H^{-1} \sin 2x \frac{\partial}{\partial x} + 4H^{-2} \sin^2 x \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Поэтому, согласно теореме 3.3, функция $\varphi(t,x) = \mathbb{E}\, g(X_t^x)$ будет являться решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\sin x + t^{2H-1} \sin 2x\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4t^{2H-1}}{H} \sin^2 x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

с начальным условием $\varphi(0,x) = g(x)$.

Выводы

В данной главе диссертации исследовано асимптотическое поведение функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений $dX_t = f(X_t)dB_t$, $t \in [0,T]$ с многомерным дробным броуновским движением $B_t = (B_t^{(0)}, B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})$, компоненты $B_t^{(i)}$ которого имеют различные показатели Харста $H_i > 1/3$, $i \geq 1$, а также содержащих снос $dB_t^{(0)} = dt$. В настоящей главе рассматриваются решения X_t^x данных уравнений с постоянными начальными условиями $X_0 = x$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Получены асимптотические разложения тейлоровского типа для функционалов $\mathbf{P}_t g(x) = \mathbb{E}\, g(X_t^x)$ от решений указанных уравнений при малых значениях времени $t \geq 0$. Указанные разложения порядка $N \in \mathbb{N}$ имеют место, если функции f, g имеют непрерывные и ограниченные производные до порядков $N+2$ и $N+3$ соответственно (включительно). Также в случае, когда все индексы Харста удовлетворяют уловию $H_i \geq H^* > 1/2$, приведены явные формулы вычисления математических ожиданий повторных интегралов от дробных броуновских движений, фигурирующих в разложениях.

В случае, когда дифференциальные операторы $D_f^{(i)}$, $0 \leq i \leq d$ коммутируют, получены уравнения в частных производных колмогоровского типа для функций $\varphi(t,x) = \mathbb{E}\, g(X_t^x)$ в предположении, что функции f, g имеют непрерывные и ограниченные производные до порядков $d+2$ и $d+3$ соответственно (включительно).

Приведены примеры, иллюстрирующие применение указанных теорем.

ГЛАВА 4
МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА

4.1 Предварительные сведения

4.1.1 Теория полугрупп

Пусть X — банахово пространство. Через $\mathcal{L}(X)$ обозначим множество линейных ограниченных операторов, действующих из X в X. Однопараметрическое семейство операторов $(S(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ называют полугруппой на X, если $S(0) = I$ и $S(t+s) = S(t)S(s)$ для любых $s, t \geq 0$. Полугруппу операторов $(S(t))_{t\geq 0}$ называют сильно непрерывной (C_0-полугруппой), если $\|S(t)x - S(t_0)x\| \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$ для любого $x \in X$. Для сильно непрерывной полугруппы $(S(t))_{t\geq 0}$ на X оператор A, определенный на множестве $\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X : \exists \lim\limits_{t\to+0} \frac{S(t)x - x}{t} \in X \right\}$ формулой $Ax = \lim\limits_{t\to+0} \frac{S(t)x-x}{t}$, $x \in \mathcal{D}(A)$, называют генератором полугруппы $(S(t))_{t\geq 0}$.

Предложение 4.1 [61, теорема 2.2]. *Пусть $(S(t))_{t\geq 0}$ — сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве X. Тогда существуют постоянные $M \geq 1$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}$ для всех $t \geq 0$.*

Теория полугрупп имеет тесные связи как с обыкновенныи дифференциальными уравнениями, так и с дифференциальными уравнениями в частных производных.

Пример 4.1. Рассмотрим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка d. В векторном виде она примет вид

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \quad t \in \mathbb{R}^+,$$
$$x(0) = \xi,$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$, $\xi \in \mathbb{R}^d$. Решение данной задачи выражается формулой Коши:

$$x(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t)S^{-1}(s)f(s)ds,$$

где $S(t)$ — базисная матрица системы, $S(0) = I_d$. Каноничесим выбором служит оператор $S(t) = e^{At}$. Нетрудно убедиться в том, что при таком выборе семейство операторов $(S(t))_{t\geq 0}$ является сильно непрерывной полугруппой в $\mathbb{R}^d$ с генератором $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$.

Пример 4.2. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения в частных производных параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in (0,l), \tag{4.1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in [0,l], \tag{4.2}$$

$$u(t,0) = u(t,l) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \tag{4.3}$$

где функции φ, f таковы, что $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $f(t,0) = f(t,l) = 0$, $t \in \mathbb{R}^+$. Ее решение может быть выражено следующей формулой:

$$u(t,x) = \int_0^t G(t,x,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \int_0^t\int_0^l G(t-\tau,x,\xi)f(\tau,\xi)d\xi d\tau, \tag{4.4}$$

$$G(t,x,y) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\pi n/l)^2 t}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{l}\right). \tag{4.5}$$

Задача (4.1) — (4.3) может быть представлена в виде задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве. Пусть $H = \{z(\cdot) \in L_2[a,b] \,:\, z(0) = z(l) = 0\}$ — гильбертово пространство, $X(t) = u(t,\cdot) \in H$, $F(t) = f(t,\cdot) \in H$, $\psi = \varphi(\cdot) \in H$, $A = a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — оператор, действующий из H в H, с областью определения $\mathcal{D}(A) = \{z(\cdot) \in \mathcal{W}^{2,2}[a,b] \,:\, z(0) = z(l) = 0\}$, всюду плотной в H. Задача (4.1) — (4.3) может быть интерпретирована следующим образом:

$$\frac{dX}{dt} = AX(t) + F(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{4.6}$$

$$X(0) = \psi. \tag{4.7}$$

Можно показать, что оператор A является генератором C_0-полугруппы $(S(t))_{t\geq 0}$ в H, определяемой соотношением

$$S(t)z(\cdot) = \int_0^l G(t,\cdot,\xi)z(\xi)d\xi, \quad t > 0; \quad S(0) = I.$$

При этом равенство (4.4) перепишется в виде соотношения, определяющего слабое решение задачи (4.6), (4.7): $X(t) = S(t)\psi + \int_0^t S(t-s)F(s)ds$.

4.1.2 Прямой, обратный и симметрический стохастические интегралы

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Говорят, что последовательность случайных процессов $(X_n(t))_{n\geq 0}$, сходится к случайному процессу $X(t)$, $t \geq 0$, равномерно на компактах по вероятности (сокращенно ucp, см. [62, с. 57]), если для любого $\varepsilon > 0$ и $T \geq 0$ выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \sup_{0\leq t\leq T} |X_n(t) - X(t)| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Следуя [64–66], для непрерывных процессов $X(t)$, $Y(t)$ с конечной квадратической вариацией определим квадратичную ковариацию:

$$[X,Y](t) \overset{ucp}{=} \lim_{\varepsilon\to+0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t (Y(s+\varepsilon) - Y(s))(X(s+\varepsilon) - X(s))ds,$$

а также прямой, обратный и симметрический стохастические интегралы соответственно:

$$\int_0^t Y(s)d^- X(s) \overset{ucp}{=} \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^t Y(s)\frac{X(s+\varepsilon) - X(s)}{\varepsilon}ds,$$

$$\int_0^t Y(s)d^+ X(s) \overset{ucp}{=} \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^t Y(s)\frac{X(s) - X((s-\varepsilon)\vee 0)}{\varepsilon}ds,$$

$$\int_0^t Y(s)d^\circ X(s) = \frac{1}{2}\int_0^t Y(s)d^- X(s) + \frac{1}{2}\int_0^t Y(s)d^+ X(s),$$

где знак $\overset{ucp}{=}$ означает то, что соответствующие пределы понимаются в смысле равномерной на компактах сходимости по вероятности.

Существование квадратической ковариации $[X,Y]$ равносильно существовнию одного из указанных интегралов (прямого или обратного), и более того справедлива следущая формула [66, с. 85–86]:

$$[X,Y](t) = \int_0^t Y(s) d^+ X(s) - \int_0^t Y(s) d^- X(s).$$

Определение $[X,Y]$ обобщает понятие квадратической ковариации для семимартингалов, а прямой и симметрический стохастические интегралы $\int\limits_0^t Y(s) d^- X(s)$, $\int\limits_0^t Y(s) d^\circ X(s)$ являются расширением интегралов Ито и Стратоновича соответственно на класс непрерывных процессов с конечной квадратической вариацией [65, с. 5], [66, предложение 1.1].

4.1.3 Интеграл Вика-Ито-Скорохода

Определим интеграл Вика-Ито-Скорохода по дробному броуновскому движению $B^{(H)}(t)$ с индексом Харста $H > 1/2$.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}\}$ — пространство Шварца быстро убывающих функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, $\Omega := \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ — двойственное к $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ пространство. Построим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, в котором $\mathbb{P}$ — вероятностная мера, определеная на множествах борелевской σ-алгебры $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}))$ и обладающая следующим свойством:

$$\int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R})} e^{i<\omega,f>} d\,\mathbb{P}(\omega) = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle f, f\rangle_{L_2(\mathbb{R})}\right),$$

где $<\omega, f> = \omega(f)$ — образ $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ при отображении $\omega \in \Omega = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $i^2 = -1$.

Определим оператор $M = M_H$, действующий на функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ по следующему правилу:

$$Mf(x) = C_H \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{|t-x|^{3/2-H}} dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $C_H = \left(2\Gamma\left(H - \frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(H - \frac{1}{2}\right)\right)\right)^{-1} (\Gamma(2H+1)\sin(\pi H))^{1/2}$ — константа, выраженная через значения гамма-функции Γ.

Зададим функцию $I_{[0,t]}(\cdot)$: $I_{[0,t]}(s) = \text{sign}(s)\mathbf{1}_{[-t,t]}$, $s \neq 0$, $I_{[0,t]}(0) = 1$. Для каждого $t \in \mathbb{R}$ определим процесс

$$\tilde{B}^{(H)}(t) = \tilde{B}^{(H)}(t,\omega) =< \omega, MI_{[0,t]}(\cdot) > .$$

Для данного процесса существует непрерывная версия $B^{(H)}(t)$, которая является дробным броуновским движением в пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ [22, гл. 4].

Пусть $h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}\big(e^{-x^2/2}\big)$, $n = 0{,}1{,}2\ldots$ — многочлены Эмита. Введем в рассмотрение функции Эрмита

$$\xi_n(x) = \pi^{-1/4}((n-1)!)^{-1/2} h_{n-1}(\sqrt{2}x)e^{-x^2/2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Функции $(\xi_n)_{n=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$.

Пусть $\mathcal{J}$ — множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ конечной длины $l(\alpha) = \max\{i : \alpha_i \neq 0\} < \infty$ с компонентами $\alpha_i \in \{0{,}1{,}2, \ldots\}$ для всех i. Для мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{J}$ длины n будем использовать обозначение $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$, а также рассматривать величины

$$\mathcal{H}_\alpha(\omega) = h_{\alpha_1}(<\omega, \xi_1>) h_{\alpha_2}(<\omega, \xi_2>) \ldots h_{\alpha_n}(<\omega, \xi_n>).$$

Важным частным случаем являются мультииндексы $\alpha = \varepsilon^{(n)} = (0, \ldots, 0, 1)$, $l(\varepsilon^{(n)}) = n$, для них $\mathcal{H}_{\varepsilon^{(n)}}(\omega) = h_1(<\omega, \xi_n>) =<\omega, \xi_n>$.

Для любой случайной величины $F \in L_2(\mathbb{P})$ существует единственное семейство $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{J}}$ констант $c_\alpha \in \mathbb{R}$ таких, что $F(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} c_\alpha \mathcal{H}_\alpha(\omega)$ (предел в $L_2(\mathbb{P})$), причем $\mathbb{E}\, F^2 = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} c_\alpha^2 \alpha!$ (см. [22, теорема A.1.3]).

Определим пространства Хиды $\mathcal{S}$ и $(\mathcal{S})^*$ (см. [22, приложение A]):

1. Пространством Хиды $\mathcal{S}$ называют множество фунций $\psi \in L_2(\mathbb{P})$, чьи разложения $\psi(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha \mathcal{H}_\alpha(\omega)$ удовлетворяют соотношению $\|\psi\|_k^2 := \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha^2 \alpha! (2\mathbb{N})^{k\alpha} < \infty$ для всех $k \in \mathbb{N}$, где $(2\mathbb{N})^\gamma = (2 \cdot 1)^{\gamma_1} \ldots (2 \cdot n)^{\gamma_n}$ для $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathcal{J}$.
2. Для фиксированного $q \in \mathbb{N}$ пространством Хиды $(\mathcal{S})^*$ называют множество формальных разложений $G(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} b_\alpha \mathcal{H}_\alpha(\omega)$, удовлетворяющих соотношению $\|G\|_q^2 := \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} b_\alpha^2 \alpha! (2\mathbb{N})^{-q\alpha} < \infty$

Пространство $(\mathcal{S})^*$ является двойственным к пространству $\mathcal{S}$, и действие $G \in (\mathcal{S})^*$ на $\psi \in \mathcal{S}$ определяется равенством $<G, \psi>= \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} a_\alpha b_\alpha \alpha!$

Функцию $Z\colon \mathbb{R} \to (\mathcal{S})^*$ обладающую тем свойством, что $<Z(\cdot), \psi>\in L_1(\mathbb{R})$ для любого $\psi \in \mathcal{S}$, называют dt-интегрируемой в $(\mathcal{S})^*$ и определяют интеграл $\int_\mathbb{R} Z(t)dt$ как единственный элемент в $(\mathcal{S})^*$, удовлетворяющий соотношению $<\int_\mathbb{R} Z(t)dt, \psi>= \int_\mathbb{R} <Z(t), \psi> dt$ для любого $\psi \in \mathcal{S}$.

Если $F_i(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}} c_\alpha^{(i)} \mathcal{H}_\alpha(\omega).$, $i = 1{,}2$ — два элемента пространства $(\mathcal{S})^*$, то их произведение Вика $(F_1 \diamond F_2)(\omega)$ определяется следующим образом:

$$(F_1 \diamond F_2)(\omega) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathcal{J}} c_\alpha^{(1)} c_\beta^{(2)} \mathcal{H}_{\alpha+\beta}(\omega) = \sum_{\gamma \in \mathcal{J}} \Bigg(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} c_\alpha^{(1)} c_\beta^{(2)} \Bigg) \mathcal{H}_\gamma(\omega)$$

Определим дробный белый шум $W^{(H)}(t)$ следующей формулой:

$$W^{(H)}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} M\xi_k(t)\mathcal{H}_{\varepsilon^{(k)}}(\omega).$$

Пусть функция $Y\colon \mathbb{R} \to (\mathcal{S})^*$ такова, что выражение $Y(t) \diamond W^{(H)}(t)$ является dt-интегрируемым в $(\mathcal{S})^*$. Для функций $Y(t) = Y(t,\omega)$ указанного класса определяют интеграл Вика-Ито-Скорохода по дробному броуновскому движению $B^{(H)}(t)$ как

$$\int_{\mathbb{R}} Y(t,\omega) \diamond dB^{(H)}(t) := \int_{\mathbb{R}} Y(t) \diamond W^{(H)} dt.$$

Интеграл Вика-Ито-Скорохода на конечном отрезке $[0, T] \subset \mathbb{R}$ определяют следующим образом:

$$\int_0^T Y(t,\omega) \diamond dB^{(H)}(t) := \int_{\mathbb{R}} Y(t)\mathbf{1}_{[0,T]} \diamond W^{(H)}(t)dt.$$

Интеграл Вика-Ито-Скорохода обладает нулевым средним [22, с. 107], а также для него справедлива следующая формула Ито.

Предложение 4.2 ([22, теорема 4.2.6]). *Пусть функция $f(t, x)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, имеющая непрерывные производные $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ такова, что все случайные величины*

$$f(t, B^{(H)}(t)), \quad \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, B^{(H)}(s))ds, \quad \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B^{(H)}(s))ds$$

принадлежат пространству $L_2(\mathbb{P})$. Тогда справедлива следующая дробная формула Ито:

$$f(t, B^{(H)}(t)) = f(0,0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial s}(s, B^{(H)}(s))ds +$$
$$+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B^{(H)}(s)) \diamond dB^{(H)}(s) + H \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B^{(H)}(s))s^{2H-1}ds. \qquad (4.8)$$

4.2 Методы интегрирования одномерных уравнений смешанного типа

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ заданы d-мерное стандартное броуновское движение $W(t)$ и d-мерное дробное броуновское движение $B(t)$ с показателем Харста $H \in (1/2,1)$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dW(t) + \sigma(t,x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{4.9}$$

где $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — детерминированные функции.

Определение 4.1. Под решением уравнения (4.9) понимаем процесс $x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, согласованный с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, порожденным процессами $W(t)$ и $B(t)$, такой, что выполняются условия:

1) существует $\alpha > 1 - H$ такое, что процесс $x(t)$ имеет п.н. непрерывные по Гельдеру с показателем α траектории;

2) для любого $t \in \mathbb{R}^+$ почти наверное выполняется равенство

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s,x(s))ds + \int_0^t g(s,x(s))dW(s) + \int_0^t \sigma(s,x(s))dB(s),$$

где интеграл по процессу $W(t)$ – стохастический интеграл Ито, а интеграл по процессу $B(t)$ – потраекторный интеграл Янга [39].

Замечание 4.1. Иногда рассматривают решения, допускающие взрывы за конечное время. В этом случае решение $x(t)$ определяется для $t < \tau$, где τ – так называемый момент взрыва ($\mathcal{F}_t$-момент остановки, такой что $\lim_{t\to\tau-0} \|x(t)\| = \infty$ при $\tau < \infty$), а непрерывность траекторий по Гельдеру предполагается до момента τ.

Пусть функция $F(t,x)$ непрерывна вместе со своими производными $F'_t(t,x)$, $F'_x(t,x)$, $F''_{x^2}(t,x)$. Если функции f, g измеримы по Борелю, функция σ удовлетворяет (δ,ρ)-условию Гельдера по (t,x) при некоторых $\delta > 1 - H$, $\rho > 2 - 2H$, а решение $x(t)$ имеет непрерывные по Гельдеру порядка α

траектории п.н. при $\alpha\rho > 1$, то имеет место аналог формулы Ито [58, P. 184]:

$$\begin{gathered}
F(t, x(t)) = F(0, x(0)) + \\
+ \int_0^t \Bigg(F'_t(\tau, x(\tau)) + F'_x(\tau, x(\tau)) f(\tau, x(\tau)) + \\
+ \frac{1}{2}\mathrm{tr}(F''_{x^2}(\tau, x(\tau)) g(\tau, x(\tau)) g^T(\tau, x(\tau))) \Bigg) d\tau + \\
+ \int_0^t F'_x(\tau, x(\tau)) g(\tau, x(\tau)) dW(\tau) + \int F'_x(\tau, x(\tau)) \sigma(\tau, x(\tau)) dB(\tau). \qquad (4.10)
\end{gathered}$$

В данном параграфе будем рассматривать одномерное уравнение (4.9), считая, что $d = 1$. В рамках настоящего параграфа будем предполагать, что коэффициенты рассматриваемых уравнений являются достаточно гладкими функциями, обеспечивающими возможность достаточного числа дифференцирований и применений формулы замены переменных (4.10).

4.2.1 Приведение к простейшим уравнениям

Рассмотрим простейшее уравнение

$$dy(t) = u(t)dt + v(t)dW(t) + b(t)dB(t), \quad t \geq 0. \qquad (4.11)$$

Решение уравнения (4.11) выражается следующей формулой:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)dW(\tau) + \int_0^t b(\tau)dB(\tau), \quad t \geq 0.$$

Найдем класс уравнений (4.9), приводимых к (4.11) с помощью дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно x преобразования $y = F(t, x)$ посредством формулы Ито (4.10) в предположении, что что функции f, g, σ обладают производными требуемых порядков для последующих вычислений. В соответствии с формулой Ито, должны быть справедливы соотношения:

$$u(t) = F'_t(t, x) + F'_x(t, x) f(t, x) + \frac{1}{2} F''_{x^2}(t, x) g^2(t, x), \qquad (4.12)$$

$$v(t) = F'_x(t, x) g(t, x), \qquad (4.13)$$

$$b(t) = F'_x(t, x) \sigma(t, x). \qquad (4.14)$$

Из соотношений (4.13), (4.14) следует, что $\frac{v(t)}{g(t,x)} = \frac{b(t)}{\sigma(t,x)}$, или $\frac{\sigma(t,x)}{g(t,x)} = \frac{b(t)}{v(t)} :=$ $q(t)$. Также из соотношения (4.13) очевидным образом можно выразить следующие производные функции F:

$$F'_x = \frac{v}{g}, \quad F''_{x^2} = -\frac{vg'_x}{g^2}, \quad F''_{tx} = \frac{v'g - vg'_t}{g^2}. \tag{4.15}$$

Дифференцируя соотношение (4.12) по x и используя полученные формулы для $F'_x, F''_{x^2}, F''_{tx}$, получим:

$$F''_{tx} + F''_{x^2}f + F'_x f'_x + \frac{1}{2}F'''_{x^3}g^2 + F''_{x^2}g'_x g = 0,$$

$$\frac{v'g - vg'_t}{g^2} - \frac{vg'_x f}{g^2} + \frac{vf'_x}{g} - \frac{vg''_{x^2}g^2 - 2vg(g'_x)^2}{2g^2} - \frac{v(g'_x)^2}{g} = 0,$$

$$\frac{v'}{v} = g\left(\frac{g'_t}{g^2} + \frac{g'_x f}{g^2} - \frac{f'_x}{g} + \frac{1}{2}g''_{x^2}\right) = g\left(\frac{g'_t}{g^2} + \left(\frac{f}{g}\right)'_x + \frac{1}{2}g''_{x^2}\right). \tag{4.16}$$

Левая часть последнего соотношения зависит лишь от t, поэтому на функции f, g, σ накладываются следующие ограничения:

$$g(t,x)\left(\frac{g'_t(t,x)}{g^2(t,x)} + \left(\frac{f(t,x)}{g(t,x)}\right)'_x + \frac{1}{2}g''_{x^2}(t,x)\right) = r(t), \tag{4.17}$$

$$\frac{\sigma(t,x)}{g(t,x)} = q(t) \tag{4.18}$$

для некоторых функций $r(t), q(t)$.

Обратно, пусть заданные функции f,g,σ удовлетворяют условиям (4.17), (4.18). Тогда из соотношения (4.16) находим функцию $v(t) = \exp\left(\int_0^t r(\tau)d\tau\right)$ (как любое нетривиальное решение линейного однородного уравнения). Из соотношения (4.15) найдем $F(t,x) = v(t)\int_0^x \frac{ds}{g(t,s)}$, причем ввиду того, что $v \neq 0$, $F'_x = \frac{v}{g} \neq 0$, т.е. функция F будет обратима по x. Зная функцию F, из соотношений (4.12), (4.14) однозначно определяем функции $u(t)$ и $b(t)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Уравнение* (4.9) *с* $g(t,x) \neq 0$ *приводимо к уравнению* (4.11) *с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно* x *преобразования* $y = F(t,x)$ *тогда и только тогда, когда найдутся функции* $q(t), r(t)$ *такие, что оказываются выполненными соотношения* (4.17)*,* (4.18) .

Предложение 4.3. *Пусть заданы скалярные функции* $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, *при этом* $\beta(t) \neq 0$. *Тогда решение линейного однородного уравнения*

$$dx(t) = \alpha(t)x(t)dt + \beta(t)x(t)dW(t) + \gamma(t)x(t)dB(t), \quad t \geq 0, \tag{4.19}$$

с начальным условием $x(0) = x_0 > 0$ *выражается формулой*

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t \Big(\alpha(\tau) - \frac{1}{2}\beta^2(\tau)\Big)d\tau + \int_0^t \beta(\tau)dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau)dB(\tau)\right)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно проверить, что функции $f(t,x) = \alpha(t)x$, $g(t,x) = \beta(t)x$, $\sigma(t,x) = \gamma(t)x$ удовлетворяют условиям (4.17), (4.18), причем $\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}$, т.е. $\ln\left(\frac{v(t)}{\beta(t)}\right)' = 0$. Можно выбрать функцию $v(t) = \beta(t)$. Тогда $F'_x = \frac{1}{x}$, и, в свою очередь, можно выбрать преобразование $F = \ln x$. Из соотношений (4.12), (4.13) находим, что $u(t) = \alpha(t) - \frac{1}{2}\beta(t)$, $b(t) = \gamma(t)$. Так как $y(t) = \ln x(t)$, то $x(t) = e^{y(t)}$ и следовательно, имеет место формула

$$x(t) = C \exp\left(\int_0^t \Big(\alpha(\tau) - \frac{1}{2}\beta^2(\tau)\Big)d\tau + \int_0^t \beta(\tau)dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau)dB(\tau)\right),$$

где $C = e^{y(0)}$. Подставляя в формулу $t = 0$, находим величину $C = x(0)$, что и требовалось.

Замечание 4.2. Непосредственной подстановкой найденной формулы для решения в уравнение (4.19) можно убедиться, что данная формула сохраняет силу, в том числе, если опустить условия $\beta(t) \neq 0$ и $x_0 > 0$. Нетрудно видеть, что почти все траектории решения уравнения (4.19) непрерывны по Гельдеру с любым показателем $\kappa < 1/2$.

Предложение 4.4. *Решение линейного неоднородного уравнения*

$$dx(t) = \big(\alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)\big)dt + \big(\beta_1(t)x(t) + \beta_2(t)\big)dW(t) + \\ + \big(\gamma_1(t)x(t) + \gamma_2(t)\big)dB(t), \quad t \geq 0,$$

выражается по формуле

$$x(t) = x_0(t)\bigg(x(0) + \int_0^t \frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)}d\tau + \\ + \int_0^t \frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)}dW(\tau) + \int_0^t \frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)}dB(\tau)\bigg),$$

в которой $x_0(t){=}\exp\left(\int_0^t\bigl(\alpha_1(\tau){-}\frac{1}{2}\beta_1^2(\tau)\bigr)d\tau+\int_0^t\beta_1(\tau)dW(\tau)+\int_0^t\gamma_1(\tau)dB(\tau)\right)$ *есть решение соответствующего линейного однородного уравнения с начальным условием* $x_0(0)=1$.

Доказательство. Положим $x(t)=x_0(t)y(t)$. Определим уравнение

$$dy(t)=u(t,y(t))dt+v(t,y(t))dW(t)+b(t,y(t))dB(t),\quad t\geq 0,$$

которому удовлетворяет процесс $y(t)$. Применим формулу Ито к процессу $y=\frac{x}{x_0}=F(x,x_0)$, рассматривая пару $\bar{x}=(x,x_0)$ как решение двумерного уравнения

$$d\bar{x}(t)=\bigl(\bar{\alpha}_1(t)\bar{x}(t)+\bar{\alpha}_2(t)\bigr)dt+p(t,\bar{x}(t))d\bar{W}(t)+\bigl(\bar{\gamma}_1(t)\bar{x}(t)+\bar{\gamma}_2(t)\bigr)dB(t),$$

с начальным условием $\bar{x}(0)=(x(0),1)^T$, где $\bar{\alpha}_1=\mathrm{diag}(\alpha_1,\alpha_1)$, $\bar{\gamma}_1=\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_1)$, $\bar{\alpha}_2=(\alpha_2,0)^T$, $\bar{\gamma}_2=(\gamma_2,0)^T$, $p=\mathrm{diag}(\beta_1x+\beta_2,\beta_1x_0)$, $\bar{W}=(W,W)^T$. Ввиду того, что справедливы соотношения

$$F'_t=0,\quad F'_{\bar{x}}=\left(\frac{1}{x_0},-\frac{x}{x_0^2}\right),\quad F''_{\bar{x}^2}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{x_0^2}\\ -\frac{1}{x_0^2} & \frac{2x}{x_0^3}\end{pmatrix},$$

будем иметь:

$$dy=\left(\frac{\alpha_2}{x_0}-\frac{\beta_1\beta_2}{x_0}\right)dt+\frac{\gamma_2}{x_0}dB+\frac{\beta_2}{x_0}dW.$$

Итак, получили простейшее уравнение для $y(t)$, причем $y(0)=\frac{x(0)}{x_0(0)}=x(0)$. Таким, образом, решение исходного уравнения выражается формулой

$$x(t)=x_0(t)y(t)=x_0(t)\biggl(x(0)+\int_0^t\frac{\alpha_2(\tau)-\beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)}d\tau+ \\ +\int_0^t\frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)}dW(\tau)+\int_0^t\frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)}dB(\tau)\biggr),$$

что и требовалось.

Пример 4.3. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$dx(t)=-2t\cdot x(t)dt+t^{1-H}x(t)dB(t),\quad t\geq 0,$$

С учетом предложения 4.3 и замечания 4.2 его решение может быть выражено формулой

$$x(t)=x(0)\exp\left(-t^2+\int_0^t\tau^{1-H}dB(\tau)\right).$$

Докажем, что нулевое решение рассматриваемого уравнения устойчиво по вероятности, то есть для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ найдется $\delta > 0$ такая, что для любого решения с начальным значением $x(0)$ таким, что $|x(0)| < \delta$ п.н., выполнено неравенство $\mathbb{P}\{\sup_{t\geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$.

Используя явную фомулу для решения, получим:

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} = \mathbb{P}\left\{\sup_{t\geq 0}\left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau)\right) > \ln \frac{\varepsilon_1}{|x(0)|}\right\}.$$

Применим неравенство Чебышева:

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t\geq 0}\left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau)\right) > \ln \frac{\varepsilon_1}{|x(0)|}\right\} \leq \frac{\mathbb{E}\sup_{t\geq 0}\left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau)\right)}{\ln \varepsilon_1 - \ln |x(0)|}$$

Оценим интеграл, используя неравенство Лав-Янга (см. предложение 2.2):

$$\int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau) \leq C \cdot V_1\left(\tau^{1-H}, [0,t]\right) \cdot V_{1/H}(B(\tau), [0,t]) \leq C t^{1-H} \|B\|_H t^H = C t \|B\|_H.$$

Здесь $C = \zeta(1 + 1/H)$, ζ — дзета-функция Римана, а в последнем переходе использовалась монотонность функции τ^{1-H} и связь $1/H$-вариации с величиной $\|\cdot\|_H$ [33, с. 170]. Таким образом,

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} \leq \frac{\mathbb{E}\sup_{t\geq 0} t(C\|B\|_H - t)}{\ln \varepsilon_1 - \ln |x(0)|} \leq \frac{\frac{1}{4}C^2\,\mathbb{E}\,\|B\|_H^2}{\ln \varepsilon_1 - \ln |x(0)|}.$$

Потребовав, чтобы правая часть последнего неравенства была меньше ε_2, получим значение δ:

$$|x(0)| < \varepsilon_1 \exp\left(-\frac{C^2\,\mathbb{E}\,\|B\|_H^2}{4\varepsilon_2}\right) =: \delta.$$

4.2.2 Приведение к линейным неоднородным уравнениям

Ограничимся рассмотрением автономных уравнений

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{4.20}$$

а также поиском автономной замены $y = F(x)$, приводящей указанное уравнение к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (\alpha_1 y(t) + \alpha_2)dt + (\beta_1 y(t) + \beta_2)dW(t) + (\gamma_1 y(t) + \gamma_2)dB(t), \quad t \geq 0 \tag{4.21}$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$. Согласно формуле Ито должны выполняться соотношения

$$\alpha_1 F(x) + \alpha_2 = F'(x)f(x) + \frac{1}{2}F''(x)g^2(x), \tag{4.22}$$

$$\beta_1 F(x) + \beta_2 = F'(x)g(x), \tag{4.23}$$

$$\gamma_1 F(x) + \gamma_2 = F'(x)\sigma(x). \tag{4.24}$$

Решая линейные неоднородные по F уравнения (4.23), (4.24), находим функцию F:

$$F(x) = C_\beta \exp\left(\beta_1 \int_0^x \frac{ds}{g(s)}\right) - \frac{\beta_2}{\beta_1} = C_\gamma \exp\left(\gamma_1 \int_0^x \frac{ds}{\sigma(s)}\right) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Подставляя в последнюю формулу значение $x = 0$, легко найти константы $C_\beta = F(0) + \frac{\beta_2}{\beta_1}$ и $C_\gamma = F(0) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$. Далее ограничимся случаем $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$. Тогда на выбор функций g,σ накладывается ограничение

$$\beta_1 \int_0^x \frac{ds}{g(s)} = \gamma_1 \int_0^x \frac{ds}{\sigma(s)},$$

дифференцируя которое, выводим соотношение

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = \frac{\gamma_1}{\beta_1} = \text{const}.$$

Обозначим $G(x) = \int_0^x \frac{ds}{g(s)}$. Подставим выражение для функции $F(x) = C_\beta e^{\beta_1 G(x)} - \frac{\beta_2}{\beta_1}$ в формулу (4.22):

$$\alpha_1 C_\beta e^{\beta_1 G(x)} + \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\beta_1} = C_\beta e^{\beta_1 G(x)} \frac{\beta_1}{g} f +$$

$$+ \left(C_\beta e^{\beta_1 G(x)} \frac{\beta_1^2}{2g^2} - C_\beta e^{\beta_1 G(x)} \frac{\beta_1 g'}{2g^2}\right) g^2,$$

$$e^{\beta_1 G(x)} \left(\beta_1 \left(\frac{f}{g} - \frac{g'}{2}\right) + \frac{\beta_1^2}{2} - \alpha_1\right) = \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\beta_1 C_\beta} \tag{4.25}$$

Обозначим $A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}$ и продифференцируем последнее соотношение. Получим:

$$\beta_1 e^{\beta_1 G(x)} \left(A'(x) + \beta_1 \frac{A(x)}{g(x)} + \left(\frac{\beta_1^2}{2} - \alpha_1\right) \frac{1}{g(x)}\right) = 0. \tag{4.26}$$

Умножим последнее равенство на $\frac{g(x)}{\beta_1}e^{\beta_1 G(x)}$ и полученное равенство вновь продифференцируем. Будем иметь:

$$(g(x)A'(x))' + \beta_1 A'(x) = 0.$$

Если, к тому же, $A'(x) \neq 0$, то

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = -\beta_1 = \text{const}.$$

Таким образом, необходимо выполнение следующих условий:

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}, \tag{4.27}$$

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = c_1, \tag{4.28}$$

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = c_2, \tag{4.29}$$

для некоторых постоянных $c_1,c_2 \in \mathbb{R}$.

Обратно, пусть заданные функции $f(x)$,$g(x)$,$\sigma(x)$ удовлетворяют соотношениям (4.27), (4.28), (4.29). Тогда положим $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$, $\beta_1 = -c_1$, $\gamma_1 = c_2\beta_1$ и выберем преобразование $F(x) = e^{\beta_1 G(x)}$. Тогда легко проверить, что соотношения (4.23) и (4.24) выполнены. Осталось подобрать α_1, α_2 так чтобы выполнялось соотношение (4.22). Поскольку $(g(x)A'(x))' + \beta_1 A'(x) = 0$, то величина $g(x)A'(x) + \beta_1 A(x) = c_3$, $c_3 \in \mathbb{R}$ – константа. Значит, $A'(x) + \beta_1\frac{A(x)}{g(x)} = \frac{c_3}{g(x)}$ и соотношение (4.26) диктует выбор константы $\alpha_1 = \frac{\beta_1^2}{2} + c_3$. Теперь интергрируя соотношение (4.26), получим соотношение (4.25). Согласно (4.26) выражение в левой части (полностью определяемое заданными функциями f,g) будет константой. При указанном выборе эта константа совпадает с α_2. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Уравнение* (4.20) *с* $g(x) \neq 0$, $A'(x) \neq 0$ *приводимо к уравнению* (4.21) *тогда и только тогда, когда найдутся постоянные* c_1, c_2 *такие, что оказываются выполненными соотношения* (4.27), (4.28), (4.29).

Предложение 4.5. *Уравнение бернуллиевского типа*

$$dx(t) = (\alpha x^n(t) + \beta x(t))dt + \gamma x(t)dW(t) + \delta x(t)dB(t)$$

приводится к линейному неоднородному уравнению.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В данном случае $G(x) = \int_1^x \frac{ds}{\gamma s} = \frac{1}{\gamma}\ln x$, $A(x) = \frac{\alpha}{\gamma}x^{n-1} + \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{2}$, $A'(x) = \frac{\alpha(n-1)}{\gamma}x^{n-2}(t)$, $(g(x)A'(x))' = \alpha(n-1)^2x^{n-2}(t)$, $\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = \gamma(n-1) = c_1$. Выберем преобразование $F(x) = C_\beta e^{-c_1G(x)} = C_\beta x^{1-n}$. Подставляя функцию $F(x)$ в (4.23), найдем значение константы $C_\beta = \frac{1}{1-n}$. Итак, $y = F(x) = \frac{1}{1-n}x^{1-n}$, $x = ((1-n)y)^{1/(1-n)}$.

Уже найдены значения $\beta_1 = -c_1 = \gamma(1-n)$, $\gamma_1 = \delta(1-n)$. Далее имеем:

$$c_3 = \gamma xA'(x) + \beta_1A(x) = -\beta(n-1) + \frac{\gamma^2(n-1)}{2},$$

$$\alpha_1 = (n-1)\left(-\beta + \frac{\gamma^2 n}{2}\right),$$

$$\alpha_2 = C_\beta e^{\beta_1G(x)}\left(\beta_1A(x) + \frac{\beta_1^2}{2} - \alpha_1\right) = \frac{1}{1-n} = -F(x)\gamma xA'(x) = \alpha.$$

Таким образом, исходное уравнение сводится к следующему линейному неоднородному уравнению:

$$dy(t) = \left(\alpha + (n-1)\left(-\beta + \frac{\gamma^2 n}{2}\right)y(t)\right)dt+$$
$$+\gamma(1-n)y(t)dW(t) + \delta(1-n)y(t)dB(t),$$

что и требовалось доказать.

4.2.3 Переход к уравнению Стратоновича

Наряду с уравнением (4.9) рассмотрим соответствующее уравнение Стратоновича

$$dx(t) = (f(t,x(t)) - c(t,x(t)))dt + g(t,x(t)) \circ dW(t) + \sigma(t,x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{4.30}$$

где $c(t,x) = \frac{1}{2}g'_x(t,x)g(t,x)$.

Поскольку, решения смешанных уравнений, вообще говоря, не являются семимартингалами, то понятие интеграла Стратоновича требует дополнительных разъяснений.

Во-первых, отметим, что решения смешанных уравнений (4.9) имеют конечную квадратическую вариацию $[x](t)$ в силу того, что процесс

$$\int_0^t f(s,x(s))ds,\ t \geq 0,$$

абсолютно непрерывен, а процесс

$$\int_0^t \sigma(s,x(s))dB(s),\ t \geq 0,$$

имеет непрерывные по Гельдеру траектории порядка $\kappa > 1/2$. Более того,

$$[x](t) = \int_0^t g^2(s,x(s))ds.$$

Пусть функция $F(t,x)$ имеет непрерывные частные производные F'_t, F'_x, F''_{x^2}. Тогда процесс $y(t) = F(t,x(t))$ является непрерывным, имеет конечную квадратическую вариацию. Ввиду формулы Ито (4.10) стохастические дифференциалы процессов $y(t)$, $W(t)$ имеют вид

$$dy(t) = \left(F'_t(t,x(t)) + F'_x(t,x(t))f(t,x(t)) + \frac{1}{2}F''_{x^2}(t,x(t))g^2(t,x(t))\right)dt+$$

$$+F'_x(t,x(t))g(t,x(t))dW(t) + F'_x(t,x(t))\sigma(t,x(t))dB(t),$$

$$dW(t) = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW(t) + 0 \cdot dB(t),$$

Поскольку $[t, W(t)] = 0$, $[W,B](t) = 0$, $[W,W](t) = t$, то ввиду леммы 4.9 [65] квадратическая ковариация процессов $y(t)$ и $W(t)$ равна

$$[y,W](t) = \int_0^t F'_x(s, x(s))g(s,x(s))ds.$$

С другой стороны, в силу определения прямого и симметрического стохастических интегралов имеем

$$\int_0^t F(s,x(s)) \circ dW(s) = \int_0^t F(s,x(s))dW(s) + \frac{1}{2}[F(\cdot, x(\cdot)), W(\cdot)](t) =$$

$$= \int_0^t F(s,x(s))dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t F'_x(s, x(s))g(s,x(s))ds.$$

Полагая $F(t,x) = g(t,x)$, заключаем, что процесс $x(t)$ является решением уравнения (4.9) тогда и только тогда, когда процесс $x(t)$ является решением уравнения Стратоновича (4.30).

Замечание 4.3. Легко видеть, что проведенные рассуждения также сохраняют силу в случае многомерного уравнения (4.9) и соответствующего уравнения Стратоновича.

Пример 4.4. Для уравнения

$$dx(t) = x^3(t)dt + x^2(t)dW(t) + x^2(t)dB(t),\ x(0) = x_0,$$

соответствующее уравнение Стратоновича имеет вид

$$dx(t) = x^2(t) \circ dW(t) + x^2(t)dB(t).$$

Последнее уравнение имеет решение

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(W(t) + B(t))},$$

которое является решением и исходного уравнения.

4.3 Дифференциальные уравнения для математических ожиданий и плотностей распределений решений

В этом параграфе рассматриваем автономное уравнение (4.9), т.е.

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0.$$

Будем предполагать, что выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность решений автономного уравнения (4.9).

Через $C^1_{\text{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ обозначим множество всех непрерывно дифференцируемых функций $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, имеющих линейный порядок роста. В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты $\tilde{f} = f - \frac{1}{2}g'_x g$, g_j, σ_j $(j = 1,\dots,d)$ принадлежат множеству $C^1_{\text{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$.

Рассмотрим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dz(t) = h(z(t))dt,\ t \in \mathbb{R},$$

где $h = \text{col}(h^1,\dots,h^d) \in C^1_{\text{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, и обозначим через

$$z^y(t) = \alpha_h(y,t) = \text{col}(\alpha^1_h(y,t),\dots,\alpha^d_h(y,t))$$

решение (единственное) данного уравнения с начальным условием $\alpha_h(y,0){=}y$.

Предложение 4.6. *Функция $\alpha_h(y,t)$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{d} h^i(y)\frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial y_i},\ j = 1,\dots,d,\ t \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^d,$$

и начальному условию $\alpha_h(y,0) = y$.

Доказательство. Возьмем произвольные $y \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \{1,\ldots,d\}$. Тогда

$$\frac{\partial \alpha_h^j(y,t)}{\partial t} = \lim_{r\to 0} \frac{\alpha_h^j(y,t+r) - \alpha_h^j(y,t)}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{\alpha_h^j(\alpha_h(y,r),t) - \alpha_h^j(y,t)}{r} =$$

$$= \sum_{i=1}^d \frac{\partial \alpha_h^j(y,t)}{\partial y_i} \lim_{r\to 0} \frac{\alpha_h^i(y,r) - y_i}{r} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial \alpha_h^j(y,t)}{\partial y_i} \lim_{r\to 0} \frac{1}{r} \int_0^r h^i(\alpha_h(y,s))ds =$$

$$= \sum_{i=1}^d h^i(y) \frac{\partial \alpha_h^j(y,t)}{\partial y_i},$$

что и требовалось доказать.

Из предложения 4.6 вытекает, что $z^y(t) = T_h(t)y$, где $T_h(t){:=}e^{tM_h}$ – C_0-полугруппа на $C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, порожденная дифференциальным оператором $M_h : C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \to C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ действующим по правилу

$$(M_h w)(y) = \mathrm{col}\left(\sum_{i=1}^d h^i(y)\frac{\partial w^1}{\partial y_i}, \ldots, \sum_{i=1}^d h^i(y)\frac{\partial w^d}{\partial y_i}\right),$$

где $w = \mathrm{col}(w^1,\ldots,w^d) \in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Определение 4.2. Будем говорить, что семейство отображений $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ порождает коммутирующие потоки, если для любых α, $\beta \in A$ операторы $T_{h_\alpha}(t_1)$, $T_{h_\beta}(t_2)$ перестановочные для любых t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$.

Замечание 4.4. Если $d = 1$, то легко видеть, что семейство $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ порождает коммутирующие потоки тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in A$ найдется постоянная γ_α такая, что $h_\alpha(x) = \gamma_\alpha\varphi(x)$, где $\varphi \in C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Обозначим $\Gamma = \{\tilde{f}\} \cup \{g_j | j = 1,\ldots,d\} \cup \{\sigma_j | j = 1,\ldots,d\}$. Через $x^y(t)$ будем обозначать решение автономного уравнения (4.9) с начальным условием $x(0) = y \in \mathbb{R}^d$.

Определим функцию $F : \mathbb{R}^{3d+1} \to \mathbb{R}^d$ следующим образом:

$$F(y,t,s_1,\ldots,s_d,\tau_1,\ldots,\tau_d) = (T_{\tilde{f}}(t)T_{g_1}(s_1)\ldots T_{g_d}(s_d)T_{\sigma_1}(\tau_1)\ldots T_{\sigma_d}(\tau_d))(y),$$

где $y \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, $s_j, \tau_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1,\ldots,d$).

Предложение 4.7. *Если семейство* Γ *порождает коммутирующие потоки, то*

$$x^y(t) = F(y,t,W^1(t),\ldots,W^d(t),B^1(t),\ldots,B^d(t))$$

п.н. для любого $t \in \mathbb{R}^+$.

Доказательство. Выберем произвольные $y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ и зафиксируем их. Применяя формулу Ито к процессу $x^y(t)$, используя при этом условие коммутирования операторов $T_\alpha(t_1)$, $T_\beta(t_2)$, α, $\beta \in \Gamma$, t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, получим соотношения

$$F(y,t,W^1(t),\ldots,W^d(t),B^1(t),\ldots,B^d(t)) =$$

$$= F(y,0,\ldots,0) + \int_0^t \left(\frac{\partial F(y,u,W(u),B(u))}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 F(y,u,W(u),B(u))}{\partial s_j^2} \right) du +$$

$$+ \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial F(y,u,W(u),B(u))}{\partial s_j} dW^j(u) + \sum_{j=1}^d \int_0^t \frac{\partial F(y,u,W(u),B(u))}{\partial \tau_j} dB^j(u) =$$

$$= y + \int_0^t f(F(y,u,W(u),B(u)))du + \sum_{j=1}^d \int_0^t g_j(F(y,u,W(u),B(u)))dW^j(u) +$$

$$+ \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(F(y,u,W(u),B(u)))dB^j(u).$$

Непрерывность по Гельдеру траекторий процесса $x^y(t)$ вытекает из непрерывной дифференцируемости функции F и непрерывности по Гельдеру с любым показателем $\alpha < H$ траекторий процесса $B(t)$, а также непрерывности по Гельдеру с любым показателем $\alpha < 1/2$ траекторий процесса $W(t)$. Предложение доказано.

Теорема 4.3. *Пусть семейство* Γ *порождает коммутирующие потоки, функция* $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *вместе со своими частными производными до второго порядка включительно непрерывна и имеет полиномиальный порядок роста. Тогда функция* $u_h(y,t) = \mathbb{E}\, h(x^y(t))$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^d f_j(y)\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^d g_{ik}(y)g_{jk}(y)\frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y_i \partial y_j} +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^d Ht^{2H-1}\sigma_{ik}(y)\left(\sigma_{jk}(y)\frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial \sigma_{jk}(y)}{\partial y_i}\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y_j}\right),\ t > 0,\ y \in \mathbb{R}^d,$$

и начальному условию $u_h(y,0) = h(y),\ y \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Определим функцию $G_d : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$G_d(y,\tau_d) = h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)),\ y \in \mathbb{R}^d,\ \tau_d \in \mathbb{R}.$$

Применяя дробную формулу Ито (4.8) к процессу $G_d(y,B^d(t)),\ t \in \mathbb{R}^+$, получим соотношение

$$G_d(y,B^d(t)) = G_d(y,0) + \int_0^t \frac{\partial G_d(y,B^d(s))}{\partial \tau_d} \diamond dB^d(s) + \int_0^t Hs^{2H-1} \frac{\partial^2 G_d(y,B^d(s))}{\partial \tau_d^2} ds, \tag{4.31}$$

где стохастический интеграл в правой части соотношения (4.31) – интеграл Вика-Ито-Скорохода.

Используя предложение 4.6, выразим частную производную $\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial \tau_d^2}$ через частные производные $\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i y_j}$, $\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i}$. Получаем

$$\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial \tau_d} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial \tau_d} = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \sigma^i_d(y) \frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial \tau_d^2} = \sum_{i,j,k,l=1}^d \frac{\partial^2 h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j \partial y_k} \sigma^i_d(y) \sigma^l_d(y) \frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i} \frac{\partial \alpha^k_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_l} +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^d \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \sigma^i_d(y) \left(\frac{\partial \sigma^k_d(y)}{\partial y_i} \frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_k} + \sigma^k_d(y) \frac{\partial^2 \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_k y_i} \right),$$

$$\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i y_l} = \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial^2 h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j \partial y_k} \frac{\partial \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i} \frac{\partial \alpha^k_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_l} +$$

$$+ \sum_{j=1}^d \frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j} \frac{\partial^2 \alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i \partial y_l}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial \tau_d^2} = \sum_{i,l=1}^d \frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i y_l} \sigma^i_d(x) \sigma^l_d(y) + \sum_{i,k=1}^d \frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial y_k} \sigma^i_d(y) \frac{\partial \sigma^k_d(y)}{\partial y_i} =$$

$$= (M^2_{\sigma_d} G_d(\cdot,\tau_d))(y). \tag{4.32}$$

Обозначим $\psi_d(y,t) = \mathbb{E}\, G_d(y,B^d(t))$. Тогда из соотношений (4.31), (4.32), теоремы Фубини и правила Лейбница вытекает равенство

$$\psi_d(y,t) = \psi_d(y,0) + \int_0^t Hs^{2H-1}(M^2_{\sigma_d}\psi_d(\cdot,s))(y)ds. \tag{4.33}$$

Из соотношения (4.33) вытекает справедливость соотношения

$$\frac{\partial\psi_d(\cdot,t)}{\partial t} = Ht^{2H-1}M^2_{\sigma_d}\psi_d(\cdot,t). \tag{4.34}$$

Определим функцию $G_{d-1} : \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ равенством

$$G_{d-1}(y,\tau_{d-1},t) = \psi_d(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y),t),\ y \in \mathbb{R}^d,\ \tau_{d-1} \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+.$$

Применяя дробную формулу Ито (4.8) к процессу $G_{d-1}(y,B^{d-1}(t),t)$, получим соотношение

$$G_{d-1}(y,B^{d-1}(t),t) = G_{d-1}(y,0,0) + \int_0^t \frac{\partial G_{d-1}(y,B^{d-1}(s),s)}{\partial\tau_{d-1}} \diamond dB^{d-1}(s) +$$
$$+ \int_0^t \left(\frac{\partial G_{d-1}(y,B^{d-1}(s),s)}{\partial\tau_d} + Hs^{2H-1}\frac{\partial^2 G_{d-1}(y,B^{d-1}(s),s)}{\partial\tau^2_{d-1}}\right)ds. \tag{4.35}$$

Отметим, что для каждых $y \in \mathbb{R}^d$, $\tau_{d-1} \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^+$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 G_{d-1}(y,\tau_{d-1},s)}{\partial\tau^2_{d-1}} = (M^2_{\sigma_{d-1}}G_{d-1}(\cdot,\tau_{d-1},s))(y). \tag{4.36}$$

Действительно, в силу правила Лейбница достаточно проверить, что для любых $y \in \mathbb{R}^d$, $\tau_{d-1} \in \mathbb{R}$, $\tau_d \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2_{d-1}}h(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)) = (M^2_{\sigma_{d-1}}h(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})T_{\sigma_d}(\tau_d)(\cdot))(y). \tag{4.37}$$

Для каждого фиксированного $\tau_d \in \mathbb{R}$ определим функцию $\omega_{\tau_d} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ такую, что

$$\omega_{\tau_d}(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y)) = h(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)).$$

Теперь применяя рассуждения, которыми была доказана формула (4.32), заменяя при этом функцию $G_d(y,\tau_d)$ функцией $\omega_{\tau_d}(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y))$, устанавливаем справедливость соотношения (4.37), а вместе с ним и равенства (4.36).

Обозначим $\psi_{d-1}(y,t) = \mathbb{E}\, G_{d-1}(y,B^{d-1}(t),t)$, тогда с помощью соотношений (4.34), (4.35), (4.36), теоремы Фубини и правила Лейбница, получаем равенство

$$\psi_{d-1}(y,t) = \psi_{d-1}(y,0) + \int_0^t ((Hs^{2H-1}M^2_{\sigma_d} + Hs^{2H-1}M^2_{\sigma_{d-1}})\psi_{d-1})(\cdot,s)(y)ds. \tag{4.38}$$

Из соотношения (4.38) получаем, что

$$\frac{\partial \psi_{d-1}(\cdot,t)}{\partial t} = (Ht^{2H-1}M^2_{\sigma_d} + Ht^{2H-1}M^2_{\sigma_{d-1}})\psi_{d-1}(\cdot,t). \tag{4.39}$$

Далее рассматриваем функцию $G_{d-2}(y,\tau_{d-2},t) = \psi_{d-1}(T_{\sigma_{d-2}}(\tau_{d-2})(y),t)$, применяем дробную формулу Ито (4.8) к процессу $G_{d-2}(y,B^{d-2}(t),t)$, получим уравнение, аналогичное уравнению (4.39) для функции $\psi_{d-2}(y,t) = \mathbb{E}\, G_{d-2}(y,\tau_{d-2},t)$, и так далее. Тем самым прийдем к следующему уравнению для функции $u_h(y,t) = \mathbb{E}\, h(F(y,t,W^1(t),\ldots,W^d(t),B^1(t),\ldots,B^d(t)))$:

$$\frac{\partial u_h(\cdot,t)}{\partial t} = \left(M_{\tilde f} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d M^2_{g_j} + \sum_{j=1}^d Ht^{2H-1}M^2_{\sigma_j}\right)u_h(\cdot,t).$$

Теорема доказана.

Пример 4.5. Покажем существенность условия коммутирования потоков, порожденных функциями из семейства Г, в теореме 4.3. Рассмотрим линейное стохастическое уравнение

$$dx(t) = x(t)dt + dB(t) \tag{4.40}$$

с начальным условием

$$x(0) = y \in \mathbb{R}, \tag{4.41}$$

где $B(t)$ – одномерное дробное броуновское движение с показателем Харста $H \in (1/2,1)$. Решение $x^y(t)$ задачи Коши (4.40), (4.41) задается формулой [70]

$$x^y(t) = ye^t + \int_0^t e^{t-s}dB(s).$$

Положим $h(y) = y^2$, тогда

$$u_h(y,t) = y^2e^{2t} + e^{2t}2H(2H-1)\int_0^t e^{-s}\int_0^s e^{-v}(s-v)^{2H-2}dvds =$$

$$= y^2 e^{2t} + e^{2t} H(2H-1) \int_0^t e^{-u} u^{2H-2} du - H(2H-1) \int_0^t e^{u} u^{2H-2} du =$$

$$= y^2 e^{2t} + H \int_0^t (e^{2t-s} + e^s) s^{2H-1} ds.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial t} = 2y^2 e^{2t} + 2He^t t^{2H-1} + 2He^{2t} \int_0^t e^{-s} s^{2H-1} ds,$$

$$y \frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y} + Ht^{2H-1} \frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y^2} = 2y^2 e^{2t} + 2e^{2t} H t^{2H-1}.$$

Так как

$$\int_0^t e^{-s} s^{2H-1} ds = -e^{-t} t^{2H-1} + (2H-1) \int_0^t e^{-s} s^{2H-2} ds < -e^{-t} t^{2H-1} + t^{2H-1}$$

для любых $t > 0$, то функция $u_h(y,t)$ не удовлетворяет уравнению из теоремы 4.3 ни при каких $t > 0$, $y \in \mathbb{R}$. Отметим, что операторы $T_f(t_1)(y) = e^{t_1} y$, $T_\sigma(t_2)(y) = t_2 + y$ не являются перестановочными.

Пример 4.6. Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$dx(t) = ax(t)dt + bx(t)dB(t) + cx(t)dW(t), \tag{4.42}$$

с начальным условием

$$x(0) = y \in \mathbb{R}. \tag{4.43}$$

Пусть $h(y) = y^r$, $r \geq 2$, $u_h(y,t) = \mathbb{E}\, h(x^y(t))$, где $x^y(t)$ – решение задачи Коши (4.42), (4.43). Легко видеть, что условия теоремы 4.3 выполняются, и функция $u_h(y,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y} y(a+b^2 H t^{2H-1}) + \frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y^2} y^2 (c^2/2 + b^2 H t^{2H-1}),\ t > 0,\ y \in \mathbb{R},$$

с начальным условием

$$u_h(y,0) = y^r.$$

Теорема 4.4. *Пусть семейство* Γ *порождает коммутирующие потоки, решение* $x^y(t)$ *автономного уравнения* (4.9) *с начальным условием* $x(0) = y$ *имеет плотность распределения* $p(t,y,z)$, *функция* $f(z)$ *принадлежит классу*

$C_b^1(\mathbb{R}^d)$, функции $g(z)$, $\sigma(z)$ — классу $C_b^2(\mathbb{R}^d)$, а функция $p(t,y,z)$ имеет непрерывные и ограниченные производные до первого порядка включительно по t и до второго порядка включительно по z. Тогда функция $p(t,y,z)$ удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial p(t,y,z)}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial (f_j(z)p(t,y,z))}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{d} \frac{\partial^2 (g_{ik}(z)g_{jk}(z)p(t,y,z))}{\partial z_i \partial z_j} +$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^{d} Ht^{2H-1}\left(\frac{\partial^2(\sigma_{ik}(z)\sigma_{jk}(z)p(t,y,z))}{\partial z_i\partial z_j} - \frac{\partial(\sigma_{ik}(z)\frac{\partial \sigma_{jk}(z)}{\partial z_i}p(t,y,z))}{\partial z_j}\right),$$

$$t>0,\ y,z\in\mathbb{R}^d.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольную функцию $h(z)$ с компактным носителем, имеющую ограниченные и непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Обозначим через A_t оператор, действующий по правилу

$$(A_th)(z) = \sum_{j=1}^{d} f_j(z)\frac{\partial h(z)}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{d} g_{ik}(z)g_{jk}(z)\frac{\partial^2 h(z)}{\partial z_i\partial z_j} +$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^{d} Ht^{2H-1}\sigma_{ik}(z)\left(\sigma_{jk}(z)\frac{\partial^2 h(z)}{\partial z_i \partial z_j} + \frac{\partial \sigma_{jk}(z)}{\partial z_i}\frac{\partial h(z)}{\partial z_j}\right),\ t>0,\ z\in\mathbb{R}^d.$$

Используя соотношение

$$u_h(y,t) = \int_{\mathbb{R}^d} h(z)p(t,y,z)dz,$$

теорему 4.3 и правило Лейбница, получаем равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(h(z)\frac{\partial p(t,y,z)}{\partial t} - p(t,y,z)(A_th)(z)\right)dz = 0. \tag{4.44}$$

Из соотношения (4.44) вытекает равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(h(z)\frac{\partial p(t,y,z)}{\partial t} - h(z)(A_t^*p(t,y,\cdot))(z)\right)dz = 0, \tag{4.45}$$

где A_t^* – сопряженный оператор к оператору A_t. Применяя формулу интегрирования по частям, легко видеть, что

$$(A_t^*\varphi)(z) = -\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial(f_j(z)\varphi(z))}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{d}\frac{\partial^2(g_{ik}(z)g_{jk}(z)\varphi(z))}{\partial y_i\partial y_j}+$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^{d}Ht^{2H-1}\left(\frac{\partial^2(\sigma_{ik}(z)\sigma_{jk}(z)\varphi(z))}{\partial z_i\partial z_j} - \frac{\partial(\sigma_{ik}(z)\frac{\partial\sigma_{jk}(z)}{\partial z_i}\varphi(z))}{\partial z_j}\right). \qquad (4.46)$$

Теперь из соотношений (4.45), (4.46) и плотности множества функций с компактным носителем, имеющих непрерывные органиченные производные всех порядков, в $L_1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана.

Выводы

В данной главе диссертации исследованы некоторые методы точного интегрирования стохастических диффенциальных уравнений смешанного типа $dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dW(t) + \sigma(t,x(t))dB(t)$, $t \geq 0$, в которых $W(t)$ — стандартное броуновское движение, а $B(t)$ — дробное броуновское движение с индексом Харста $H > 1/2$.

Получены условия приводимости рассматриваемых уравнений с помощью преобразования $y = F(t,x)$ к простейшим уравнениям, а также линейным уравнениям относительно $y(t)$. Доказаны явные формулы решений соответствующих линейных уравнений, а также приведен пример исследования устойчивости по вероятности нулевого решения линейного однородного уравнения с использованием упомянутой явной формулы.

Построен метод перехода от рассматриваемых уравнений типа Ито к уравнениям типа Стратоновича и приведен пример, когда данный переход позволяет получить решение исходного уравнения в явном виде.

Для автономных уравнений смешанного типа $dx(t) = f(x(t))dt + {}+g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t)$, $t \geq 0$ получены уравнения в частных производных колмогоровского типа для математических ожиданий функционалов от решений $u_h(y,t) = \mathbb{E}\,h(x^y(t))$ и плотности распределения $p(t,y,z)$ решений $x^y(t)$ указанных уравнений с начальными условиями $x^y(0) = y$. Приведены примеры, иллюстрирующие применение данных результатов.

ГЛАВА 5
УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРИТЯЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

5.1 Предварительные сведения

5.1.1 Операторы Гильберта-Шмидта

Зафиксируем некоторые банаховы пространства X, Y, а также некоторый полный ортонормированный базис $\{h_i\}$ в банаховом пространстве X. Оператором Гильберта-Шмидта называют оператор $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ такой, что $\sum_i \|Bh_i\|_Y^2 < \infty$. В случае, когда X, Y являются сепарабельными гильбертовыми пространствами, множество операторов Гильберта-Шмидта $\mathfrak{L}_2(X,Y)$ также образует сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle A, B\rangle_{\mathfrak{L}_2(X,Y)} = \sum_i \langle Ah_i,Bh_i\rangle_Y$. Будем считать далее, что X — сепарабельное гильбертово пространство. Если оператор $B \in \mathcal{L}(X)$ представим в виде $B = \sum_{i=1}^m A_iC_i$, где $A_1, \dots, A_m$, $C_1, \dots, C_m \in \mathfrak{L}_2(X, X)$, то такой оператор B называют ядерным. Множество всех ядерных операторов, действующих из X в X обозначают $L_1(X)$, оно является сепарабельным банаховым пространством с нормой $\|B\|_{L_1(X)} = \operatorname{tr} B := \sum_i \langle Bh_i,h_i\rangle_X$.

5.1.2 Стохастический интеграл Ито в конечномерном гильбертовом пространстве

Рассмотрим несколько способов определения интеграла $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$, которые будут использоваться в данной работе.

Рассмотрим случай, когда $B(t) = W(t)$ — стандартное броуновское движение ($H = 1/2$), принимающее значения в $\mathbb{R}^d$. Поскольку процесс $B(t)$ имеет неограниченную вариацию, то интегральные суммы Стилтьеса для интеграла $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$ п.н. не будут сходиться, т.е. данный интеграл невозможно определить в потраекторном смысле как интеграл Стилтьеса. Приведем простой пример, иллюстрирующий данный факт: рассмотрим интеграл $\int_0^T B(t,\omega)dB(t,\omega)$ по одномерному стандартному броуновскому движению $B(t)$ как потраекторный предел (для почти всех $\omega \in \Omega$) двух интегральных сумм:

$$I_{\mathcal{P}}^{(1)} = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} B(t_j)(B(t_{j+1}) - B(t_j)), \quad I_{\mathcal{P}}^{(2)} = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} B(t_{j+1})(B(t_{j+1}) - B(t_j))$$

на разбиении $\mathcal{P} = \{0 = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n = T\}$ отрезка $[0,T]$. Тогда с одной стороны ввиду независимости приращений $B(t)$:

$$\mathbb{E}\, I_{\mathcal{P}}^{(1)} = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}\, B(t_j)\, \mathbb{E}(B(t_{j+1}) - B(t_j)) = 0.$$

А с другой стороны, поскольку приращения $B(t) - B(s)$ распределены по нормальному закону с дисперсией $t - s$:

$$\mathbb{E}\, I_{\mathcal{P}}^{(2)} = \mathbb{E}(I_{\mathcal{P}}^{(2)} - I_{\mathcal{P}}^{(1)}) = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}(B(t_{j+1}) - B(t_j))^2 = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} (t_{j+1} - t_j) = T.$$

Таким образом, предел интегральных сумм Римана-Стилтьеса зависит от выбора промежуточных точек, что недопустимо. Поэтому для стандартного броуновского движения предел интегральных сумм понимается в смысле $\mathcal{L}_2$, а сами суммы строятся несколько иначе. Далее приведем краткое описание подхода Ито к построению таких интегралов.

Рассмотрим для начала одномерный процесс $B(t) \in \mathbb{R}$. Выделим класс случайных процессов $\phi(t,\omega)\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$, обозначаемый $\mathcal{L}_2(S,T)$, со следующими свойствами:

1. процесс $\phi(t,\omega)$ является $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-измеримым;
2. процесс $\phi(t,\omega)$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным;
3. $\|\phi\|^2_{\mathcal{L}_2(S,T)} = \mathbb{E}\int_S^T (\phi(t,\omega))^2 dt < +\infty$.

Будем говорить, что последовательность $\phi_n \in \mathcal{L}_2(S,T)$ сходится к $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$ в $\mathcal{L}_2(S,T)$, если $\|\phi - \phi_n\|^2_{\mathcal{L}_2(S,T)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Для каждой функции $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$ можно построить сходящуюся к ϕ в $\mathcal{L}_2(S,T)$ последовательность ограниченных непрерывных по t функций $\phi_n \in$

$\in \mathcal{L}_2(S,T)$ следующим образом [17, гл. 3]:

$$\phi_n(t,\omega) = \int_0^t \psi_n(s-t)\bar{\phi}_n(t,\omega)ds,$$

$$\bar{\phi}_n(t,\omega) = \begin{cases} -n, & \text{если } \phi(t,\omega) < -n, \\ \phi(t,\omega) & \text{если } -n \le \phi(t,\omega) \le n, \\ n, & \text{если } \phi(t,\omega) > n \end{cases}$$

Здесь $\psi_n(t)$ — любые наперед заданные непрерывные функции такие, что $\psi(t) = 0$, $t \notin (1/n, 0)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t) = 1$. В свою очередь, для $\phi_n(t,\omega)$ можно построить последовательность ступенчатых функций $\phi_{nm}(t,\omega) \in \mathcal{L}_2(S,T)$, сходящуюся к ϕ_n в $\mathcal{L}_2(S,T)$, следующего вида [17, гл. 3]:

$$\phi_{nm}(t,\omega) = \sum_{j=0}^{m} \phi_n(t_j,\omega)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t),$$

где точки $t_j \in \mathcal{P}$ образуют разбиение отрезка $[S,T]$, $t_0 = S$, $t_{m+1} = T$. Таким образом, для любой функции $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$ можно построить сходящуюся к ней в $\mathcal{L}_2(S,T)$ последовательность ступенчатых функций $\phi_m \in \mathcal{L}_2(S,T)$.

Интегралом Ито $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$ функции $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$ называют элемент $\mathcal{I}(\phi) \in \mathcal{L}_2(S,T)$, являющийся пределом последовательности $\mathcal{I}(\phi_m)$ в $\mathcal{L}_2(S,T)$ интегралов Ито от ступенчатых функций ϕ_m следующего вида:

$$I(\phi_m) = \sum_{j=0}^{m} \phi_m(t_j,\omega)(B(t_{j+1},\omega) - B(t_j,\omega)).$$

Интеграл Ито от функции $\phi\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{n\times d}$ по d-мерному броуновскому движению $B(t)$ определяется аналогичным образом. Говорят, что функция $\phi(t,\omega) = (\phi_{jk}(t,\omega)) \in \mathcal{L}_2(S,T)$, если каждая ее компонента $\phi_{jk}(t,\omega) \in \mathcal{L}_2(S,T)$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,d}$. Интеграл Ито $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$ представляет собой вектор размера n, в которой элемент в позиции j есть сумма одномерных интегралов Ито, определенных выше:

$$\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega) = \left(\sum_{k=1}^{d}\int_S^T \phi_{jk}(t,\omega)dB^{(k)}(t,\omega)\right)_{j=1}^{n}.$$

Приведем некоторые свойства интеграла Ито [17, гл. 3], [4, с. 56–60]:

1. нулевое среднее: $\mathbb{E}\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega) = 0$;

2. изометрия: $\mathbb{E}\left(\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)\right)^2 = \mathbb{E}\int_S^T (\phi(t,\omega))^2 dt$;
3. интеграл Ито $\int_0^t \phi(\tau,\omega)dB(\tau,\omega)$ является $(\mathcal{F}_t)$-мартингалом.

Пусть заданы измеримые $\mathcal{F}_t$-согласованные процессы $a\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $b\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{n\times d}$ такие, что $\int_0^t |a(s,\omega)|^2 ds < +\infty$ и $\int_0^t |b(s,\omega)| ds < +\infty$ п.н. для любого $t \geq 0$, $X(0,\omega)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина и $X(t,\omega)$ — n-мерный случайный процесс, определяемый равенством

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t a(s,\omega)ds + \int_0^t b(s,\omega)dB(s).$$

Предложение 5.1 (фомула Ито, [4, теорема 5.1]). *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — *функция, непрерывная вместе со своими частными производными* $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = 1,\dots,n$. *Тогда для процесса* $X(t,\omega)$, *определенного выше, п.н. справедливо равенство*

$$f(t,X(t,\omega)) = f(0,X(0,\omega)) + \int_0^t \left(\frac{\partial f(\tau, X(\tau,\omega))}{\partial t} + \frac{\partial f(\tau, X(\tau,\omega))}{\partial x} a(\tau,\omega) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 f(\tau, X(\tau,\omega))}{\partial x^2} b(\tau,\omega)b(\tau,\omega)^\top\right)\right)d\tau + \int_0^t \frac{\partial f(\tau, X(\tau,\omega))}{\partial x} b(\tau,\omega)dB(\tau,\omega).$$

5.1.3 Стохастический интеграл Ито в бесконечномерном гильбертовом пространстве

Далее будет дано определение интеграла Ито по $\mathcal{F}_t$-согласованному Q-броуновскому движению $W(t)$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве U, Q — симметрический положительно определенный ядерный оператор. Пусть H — также сепарабельное гильбертово пространство. Введем пространство измеримых $\mathcal{F}_t$-согласованных процессов $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathfrak{L}_2(U,H)$ (обозначаемое $\mathcal{L}_2$) таких, что для любого $T > 0$:

$$\|\Phi(t)\|_{2,T} = \left(\mathbb{E}\int\limits_0^T \|\Phi(s)\|^2_{\mathfrak{L}_2(U,H)} ds\right)^{1/2} =$$
$$= \left(\mathbb{E}\int\limits_0^T \mathrm{tr}\left((\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^\star\right) ds\right)^{1/2} < \infty.$$

Процессы Φ,Φ' отождествляются, если $\|\Phi-\Phi'\|_{2,T}=0$ для любого $T>0$. Выделим подмножество $\mathcal{L}_0\subset\mathcal{L}_2$ процессов $\Phi\in\mathcal{L}_0$, для которых существует последовательность вещественных чисел $0=t_0<t_1<\ldots<t_n<\ \ldots$, $t_n\to\infty$, а также последовательность $\mathcal{F}_{t_i}$-измеримых случайных величин (Φ_i) со значениями в $\mathfrak{L}_2(U,H)$ таких, что $\sup_i ess\sup_\omega\ \|f_i(\omega)\|<\infty$ и $\Phi(0,\omega)=$ $=\Phi_0(\omega)$, $\Phi(t,\omega)=\Phi_i(t,\omega)$ для $t\in(t_i,t_{i+1}]$, $i=1,2,\ldots$ Для $\Phi\in\mathcal{L}_0$ положим $\int_0^t\Phi(s)dW(s)=\sum_{i=0}^{n-1}\Phi_i(W(t_{i+1})-W(t_i))+\Phi_n(W(t)-W(t_n))$ для $t_n<t\le t_{n+1}$, $n=1,2,\ldots$ Можно показать, что множество $\mathcal{L}_0$ плотно в $\mathcal{L}_2$ по норме пространства $\mathcal{L}_2$, а посему для любого процесса $\Phi\in\mathcal{L}_2$ найдется последовательность процессов $(\Phi_n)\subset\mathcal{L}_0$, сходящаяся к Φ по норме $\mathcal{L}_2$. Предел сходящейся последовательности $\int_0^t\Phi_n(s)dW(s)$, являющийся H-значным непрерывным п.н. мартингалом, обозначаемым $\int_0^t\Phi(s)dW(s)$, называют интегралом Ито от процесса $\Phi(t)$ по Q-броуновскому движению $W(t)$.

Предложение 5.2. (Формула Ито для гильбертовых пространств [28, с. 105]). *Пусть $\Phi(t)$, $t\in[0,T]$, — квадратично интегрируемый случайный процесс со значениями в $\mathfrak{L}_2(U,H)$, $\varphi(t)$, $t\in[0,T]$, — предсказуемый случайный процесс со значениями в H такой, что функция $\|\varphi(t)\|_H$ является $(\mathcal{F},\mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$-измеримой и $\int_\Omega\|\varphi(t)\|_H d\,\mathbb{P}<\infty$. Пусть также $X(0)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина со значениями в H, а процесс $X(t)$ определяется равенством*

$$X(t)=X(0)+\int\limits_0^t\varphi(s)ds+\int\limits_0^t\Phi(s)dW(s),\ t\in[0,T].$$

Тогда для любой функции $F\colon[0,T]\times H\to\mathbb{R}$, равномерно непрерывной на каждом ограниченном подмножестве из $[0,T]\times H$ вместе со своими частными производными F'_t, F'_x, F''_{xx}, для любого $t\in[0,T]$ п.н. справедливо равенство

$$F(t,X(t))=F(0,X(0))+\int\limits_0^t\Bigg(F'_t(s,X(s))+\langle F'_x(s,X(s)),\varphi(s)\rangle+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(F''_{xx}(s,X(s))(\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^\star\right)\Bigg)ds+\int\limits_0^t\langle F'_x(s,X(s)),\Phi(s)dW(s)\rangle.$$

Предложение 5.3 (Неравенство Буркхольдера [27]). *Пусть $p{>}1$, $S(t)$ — C_0-полугруппа на H. Тогда для любого $\mathcal{F}_t$-согласованного процесса $\Phi\colon[0,T]\times$*

$\Omega \to \mathfrak{L}_2(U,H)$ *такого, что* $\mathbb{E}\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|^p ds\right) < +\infty$, *выполнятся неравенство*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{\tau\in[0,t]}\left\|\int_0^\tau S(\tau-s)\Phi(s)dW(s)\right\|^p\right) \le C_{p,T}\,\mathbb{E}\left(\int_0^t \|\Phi(s)\|^p ds\right),\ t\in[0,T]$$

где $C_{p,T} = \left(\frac{p^2-p}{2}\right)^{p/2}\left(\sup_{t\in[0,T]}\|S(t)\|\right)^p T^{p/2-1}$.

Пусть заданы следующие объекты: вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\ge0}$, два сепарабельных гильбертовых пространства H и U; ядерный симметрический положительно определенный оператор Q_w на пространстве U; $\mathcal{F}_t$-согласованное Q_w-броуновское движение $W(t,\omega)$ со значениями в U и ковариационным оператором Q_w.

5.2 Стохастические дифференциальные уравнения в конечномерных гильбертовых пространствах

Данный раздел посвящен исследованию устойчивости в конечномерных пространствах $H = U = \mathbb{R}^d$. В этом случае $Q_w = I_d$ и $W(t)$ — стандартное броуновское движение со значениями в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dW(t), \tag{5.1}$$

где $f:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, $g:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d\times d}$ — измеримые по Борелю функции такие, что $f(t,0)=0$ и $g(t,0)=0$ при всех $t\in\mathbb{R}^d$ и выполнено условие линейного порядка роста по x, то есть существует постоянная C такая, что для любых $t\in\mathbb{R}^+$, $x\in\mathbb{R}^d$, выполняется неравенство $|f(t,x)|+|g(t,x)| \le C(1+|x|)$.

Пусть $\sigma(t,x) = g(t,x)g(t,x)^\top$. Для каждого $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d$ построим наименьшие выпуклые замкнутые множества $A(t,x)$, $B(t,x)$, содержащими соответственно матрицу $\sigma(t,x)$ и вектор $f(t,x)$ и все предельные точки $\sigma(t,x')$ и $f(t,x')$ при $x'\to x$.

Определение 5.1. Если:

1) существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с потоком $\mathcal{F}_t$ и отображение $X\colon \Omega \to C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ такие, что функция $(t, \omega) \to X(t, \omega) \in \mathbb{R}^d$ — $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$-измерима и $\mathcal{F}_t$-согласована;

2) существует $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$, $W(0) = 0$ п. н.;

3) существуют измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы $v\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ и $u\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$, удовлетворяющие для $(\mu \times \mathbb{P})$-почти всех $(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ включениям

$$v(t) \in B(t, X(t, \omega)), \quad u(t)u^\top(t) \in A(t, X(t, \omega)),$$

и такие, что для любого $T \in \mathbb{R}^+$ выполняется неравенство $\int_0^T (|v(s)| + |u(s)|^2) ds < \infty$ п. н.;

4) с вероятностью 1 для всех $t \in \mathbb{R}^+$ выполняется равенство

$$X(t) = X(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau + \int_0^t u(\tau) dW(\tau),$$

то набор $(X, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, W(t), v(t), u(t))$ (или короче X) называем β-слабым решением уравнения (5.1).

Заметим, что условия $f(t, 0) = 0$ и $g(t, 0) = 0$ обеспечивают существование нулевого решения уравнения (5.1). Из теоремы 2.3 книги [13] следует, что если функции f и g измеримы по Борелю и имеют линейный порядок роста, то для любой вероятности ν на $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ с компактным носителем уравнение (5.1) имеет слабое решение $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, W(t), x(t), v(t), u(t))$ с начальным распределением ν.

Определение 5.2. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (5.1) устойчиво по вероятности, если для любых ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого слабого решения $x(t)$ уравнения (5.1), удовлетворяющего условию $|x_0| \leq \delta$ п.н., выполняется неравенство (5.2):

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2. \tag{5.2}$$

Определение 5.3. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (5.1) асимптотически устойчиво по вероятности, если нулевое решение уравнения (5.1) устойчиво по вероятности и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого слабого решения $x(t)$ уравнения (5.1), удовлетворяющего условию $|x_0| \leq \delta$ п.н., выполняется неравенство (5.3):

$$\mathbb{P}\{\lim_{t\to\infty} x(t) = 0\} \geq 1 - \varepsilon. \tag{5.3}$$

Предположим, что определена функция $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$. Будем говорить, что функция $V(t,x)$ удовлетворяет **условию** L, если она непрерывно дифференцируема по t, дважды непрерывно дифференцируема по x и существует $\delta > 0$ такое, что для любого $t \in \mathbb{R}^+$ и любого $x \in \mathbb{R}^d$ такого, что $|x| \le \delta$, выполнено неравенство $BV(t,x) \le 0$, где

$$BV(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sup_{v \in F(t,x)} \left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} v \right) + \frac{1}{2} \sup_{u \in G(t,x)} \mathrm{tr} \left(\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} u u^\top \right). \quad (5.4)$$

Следующие две теоремы[1], дающие достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по вероятности нулевого решения уравнения (5.1), доказаны в статье 1–A.

Теорема 5.1. *Пусть функция $V(t,x)$ удовлетворяет условию L, причем $V(t,0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$, $V(t,x) \ge \alpha(|x|) > 0$ при $0 < |x| \le \delta$ и всех $t \in \mathbb{R}^+$, где $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – некоторая функция, δ – число из условия L. Кроме того, предположим, что $\lim\limits_{x \to 0} \sup\limits_{t > 0} V(t,x) = 0$. Тогда нулевое решение уравнения* (5.1) *устойчиво по вероятности.*

Теорема 5.2. *Пусть существуют число $\delta > 0$ и функция $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$, дифференцируемая по $t \in \mathbb{R}^+$, дважды дифференцируемая по x, удовлетворяющие условиям:*

1) $BV(t,x) < \beta(\varepsilon) < 0$ *при всех x таких, что $\varepsilon \le |x| \le \delta$, и при всех $t \in \mathbb{R}^+$, где $\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$ – некоторая функция;*

2) $\lim\limits_{x \to 0} \sup\limits_{t > 0} V(t,x) = 0$*;*

3) $V(t,0) = 0$ *при всех $t \in \mathbb{R}^+$;*

4) $V(t,x) \ge \alpha(|x|) > 0$ *при всех x таких, что $|x| \le \delta$, и всех $t \in \mathbb{R}^+$, где $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – некоторая функция.*

Тогда нулевое решение уравнения (5.1) *асимптотически устойчиво по вероятности.*

Исследуем устойчивость слабого нулевого решения стохастического дифференциального уравнения (5.1) с выделенной линейной частью вида

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t)))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \ge 0. \quad (5.5)$$

[1]Авторство указанных теорем принадлежит Я.Б. Задворному. Кроме того некоторые обобщения названных теорем для автономных уравнений можно найти в [13, раздел 3.2]

Здесь $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — кусочно непрерывная функция, $\sup_{t\geq 0}|A(t)| \leq M$, а функции f и g удовлетворяют условиям для уравнения (5.1).

Наряду с уравнением (5.5) рассмотрим линейное однородное детерминированное уравнение

$$dX(t) = A(t)X(t)dt, \quad t \geq 0, \tag{5.6}$$

Через $X^{(s,x)}(t)$ будем обозначать (единственное) решение уравнения (5.6), удовлетворяющее равенству $X^{(s,x)}(s) = x$ (существование, единственность и непрерывность по t такого решения в указанных предположениях имеет место, см., например, [2]).

Определение 5.4. Будем говорить, что уравнение (5.6) имеет *равномерно экспоненциально устойчивое* нулевое решение, если существуют константы $\Lambda, \lambda > 0$, не зависящие от s, x, такие, что для любых $s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$ и $t \geq s$ выполняется неравенство

$$|X^{(s,x)}(t)|^2 \leq \Lambda|x|^2 e^{-\lambda(t-s)}. \tag{5.7}$$

Для систем (5.5) и (5.6) определим операторы B и B_0 по формулам (5.8) и (5.9):

$$BV(s,x) = \frac{\partial V(s,x)}{\partial s} + \sup_{v\in F(t,x)}\left(\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}(A(s)x+v)\right) + \frac{1}{2}\sup_{u\in G(t,x)} \operatorname{tr}\left(\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}uu^\top\right), \tag{5.8}$$

$$B_0V(s,x) = \frac{\partial V(s,x)}{\partial s} + \frac{\partial V(s,x)}{\partial x}A(s)x, \quad s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d, \varphi \in C_h. \tag{5.9}$$

Теорема 5.3. *Предположим, что функции $f(t,x)$ и $g(t,x)$ таковы, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что выполняются неравенства* (5.10)

$$|f(t,x)| \leq \varepsilon|x|, \qquad |g(t,x)| \leq \varepsilon|x|, \tag{5.10}$$

для любых x, $|x| \leq \delta_\varepsilon, t \in \mathbb{R}^+$, а система (5.6) *имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда система* (5.5) *имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.*

Доказательство. Зададим функцию $V(s,x)$ равенством (5.11):

$$V(s,x) = \int_s^{s+T} |X^{(s,x)}(t)|^2 dt, \tag{5.11}$$

где T — положительный параметр, который будет определен ниже. В [49, следствие 5.3] показано, что функция $V(s,x)$ определена, непрерывно дифференцируема по $s \in \mathbb{R}^+$ и дважды непрерывно дифференцируема по $x \in \mathbb{R}^d$, причем справедливо равенство $B_0 V(s,x) = |X^{(s,x)}(s+T)|^2 - |x|^2$. Отсюда и из неравенства (5.7) следует, что можно подобрать достаточно большое $T_\lambda > s$ такое, что $|X^{(s,x)}(s+T)|^2 \leq \frac{1}{2}|x|^2$ при всех $T \geq T_\lambda$, и значит, $B_0 V(s,x) \leq -\frac{1}{2}|x|^2$ при всех $T \geq T_\lambda$. Зафиксируем одно из таких T и покажем, что введенная функция $V(s,x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5.2.

Условие 3) следует из единственности решения: $X^{(s,0)}(t) \equiv 0$.

Покажем, что выполнено условие 2). Оценим сверху функцию $V(s,x)$, используя неравенство (5.7):

$$0 \leq V(s,x) \leq \int\limits_s^{s+T} \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)} dt = \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \Lambda |x|^2 = k_1 |x|^2, \tag{5.12}$$

где $k_1 = \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda}\Lambda > 0$. Взяв от обеих частей неравенства (5.12) супремум по $s > 0$ и перейдя к пределу, получим $\lim\limits_{x\to 0} \sup\limits_{s>0} V(s,x) = 0$, что и требовалось.

Покажем, что выполнено условие 4). Применив формулу Ито к процессу $|X^{(s,x)}(t)|^2$, получим (5.13):

$$|X^{(s,x)}(s+T)|^2 - |x|^2 = \int\limits_s^{s+T} B_0(|X^{(s,x)}(t)|^2)\, dt. \tag{5.13}$$

Оценим $B_0(|X^{(s,x)}(t)|^2) = 2\left(X^{(s,x)}(t)\right)^\top A(t) X^{(s,x)}(t)$ с помощью неравенства Коши-Буняковского:

$$\left|2(X^{(s,x)}(t))^\top A(t) X^{(s,x)}(t)\right| = 2\left|\langle A(t)X^{(s,x)}(t), X^{(s,x)}(t)\rangle\right| \leq 2M|X^{(s,x)}(t)|^2,$$

т.е. $\left|B_0(|X^{(s,x)}(t)|^2)\right| \leq 2M|X^{(s,x)}(t)|^2$. Вернемся теперь к формуле Ито:

$$-\frac{1}{2}|x|^2 \geq |X^{(s,x)}(s+T)|^2 - |x|^2 = \int\limits_s^{s+T} B_0(|X^{(s,x)}(t)|^2)\, dt \geq -2M \cdot V(s,t). \tag{5.14}$$

Обозначая $k_3 = \frac{1}{4M} > 0$, из (5.14) получим: $V(s,t) \geq k_3|x|^2 > 0$ для $x \neq 0$, и следовательно, 4) выполнено.

Осталось показать, что выполнено условие 1). Оценим $BV(s,x)$, используя элементарное неравенство $|\mathrm{tr}A| \le \sqrt{d}|A|$ для $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$:

$$\begin{aligned} BV(s,x) &= BV_0(s,x) + \sup_{v\in F(t,x)} \left(\frac{\partial V(s,x)}{\partial x} v\right) + \frac{1}{2}\sup_{u\in G(t,x)} \mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2} uu^\top\right) \le \\ &\le -\frac{1}{2}|x|^2 + \sup_{v\in F(t,x)} |v| \left|\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}\right| + \frac{\sqrt{d}}{2}\sup_{u\in G(t,x)} \left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right| |u|^2 \le \\ &\le -\frac{1}{2}|x|^2 + \varepsilon|x| \left|\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right| \frac{\sqrt{d}}{2}\varepsilon^2|x|^2. \end{aligned} \tag{5.15}$$

для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ и соответствующей окрестности нуля $|x| \le \delta_\varepsilon$. Итак, остается оценить $\left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right|$ и $\left|\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}\right|$. Заметим, что $\frac{\partial}{\partial x}|X^{(s,x)}(t)|^2 = 2\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}X^{(s,x)}(t)$. Существование $\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}$ следует из [5, гл. VII, § 3]. Обозначим $\xi_x(t) = \frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}$. Тогда, как показано в [5, гл. VII, § 3], функция $\xi_x(t)$ удовлетворяет матричному уравнению (5.16):

$$\xi_x(t) = \frac{\partial}{\partial x}(\xi_x(s)) + \int_s^t \frac{\partial}{\partial x}(A(u)x)\Big|_{x=\xi_x(u)} \xi_x(u)\,du = I_d + \int_s^t A(t)\xi_x(t)\,du \quad \text{или}$$

$$\xi_i(t) = e_i + \int_s^t A(t)\xi_i(t)\,du, \quad i = 1,\ldots,d \tag{5.16}$$

где $\xi_i(t) = \frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x_i}$, e_i — вектор, у которого i-я компонента равна 1, а остальные равны 0. К процессу $|\xi_i(t)|^2$ применим формулу Ито:

$$|\xi_i(t)|^2 = |e_i|^2 + \int_s^t B_0(|\xi_i(u)|^2)\,du \le 1 + \int_s^t 2M|\xi_i(u)|^2 du. \tag{5.17}$$

Из (5.17), используя неравенство Гронуолла-Беллмана, получим неравенство $|\xi_i(t)|^2 = \left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x_i}\right|^2 \le e^{2M(t-s)}$. И значит, $\left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right|^2 = \sum_{i=1}^d \left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x_i}\right|^2 \le$ $\le d\,e^{2M(t-s)}$. Из (5.7) и последнего неравенства следует (5.18):

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}\right| &\le \left|\int_s^{s+T} \frac{\partial}{\partial x}|X^{(s,x)}(t)|^2 dt\right| \le 2\int_s^{s+T} \left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right| \left|X^{(s,x)}(t)\right| dt \le \\ &\le 2\sqrt{d\Lambda}|x| \int_s^{s+T} e^{\frac{2M-\lambda}{2}(t-s)}dt = \frac{4\sqrt{d\Lambda}\left(e^{\frac{2M-\lambda}{2}T} - 1\right)}{2M-\lambda}|x| = K_1|x|. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Без ограничения общности можно считать, что $2M-\lambda>0$ и $K_1>0$.

Для $\left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right|$ проводя те же рассуждения (но в роли $X^{(s,x)}$ уже выступает ξ_x), используя неравенство Гронулла-Беллмана, покажем, что $\left|\frac{\partial^2 X^{(s,x)}(t)}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2 = 0$, и значит, $\left|\frac{\partial^2 X^{(s,x)}(t)}{\partial x^2}\right|^2 = 0$. Тогда легко видеть, что $\frac{\partial^2}{\partial x^2}|X^{(s,x)}(t)|^2 = 2\left(\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right)^2$, и будем иметь оценку $\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}|X^{(s,x)}(t)|^2\right| \leq 2\left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right|^2 \leq 2d\, e^{2M(t-s)}$, из которой выводим (5.19):

$$\left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right| \leq \left|\int\limits_s^{s+T} \frac{\partial^2}{\partial x^2}|X^{(s,x)}(t)|^2 dt\right| \leq 2d \int\limits_s^{s+T} e^{2M(t-s)} dt = \frac{2d\left(e^{2MT}-1\right)}{2M} = K_2. \tag{5.19}$$

Из неравенств (5.15), (5.18), (5.19), следует оценка $BV(s,x) \leq$ $\leq \left(-\frac{1}{2}+\varepsilon K_1+\frac{\sqrt{d}}{2}\varepsilon^2 K_2\right)|x|^2$. За счет выбора достаточно малого ε добьемся того, чтобы константа при $|x|^2$ была отрицательной. Тогда условие 1) будет выполнено. Теорема доказана.

Замечание 5.1. Некоторые достаточные условия равномерной экспоненциальной устойчивости системы (5.6) приведены в работе [46].

Пример 5.1. Приведем пример уравнения, имеющего асимптотически устойчивое по вероятности слабое нулевое решение на основании теоремы 5.3. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений (5.20)

$$\begin{gathered} dx(t) = ((-20-0.1\sin t)x(t) + 0.1\cos t\; y(t) + \sin^2 x(t))dt, \\ dy(t) = (-0.1\cos t\; x(t) - (20+0.1\sin t)y(t))dt + \sin^2 y(t)\mathrm{sgn}(x(t))dw(t), \end{gathered} \tag{5.20}$$

при $t \geq 0$ с начальными условиями $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, где $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $w(t)$ – одномерное броуновское движение. Нулевое решение линеаризованной системы

$$\begin{gathered} dx(t) = ((-20-0.1\sin t)x(t) + 0.1\cos t\; y(t))dt, \\ dy(t) = (-0.1\cos t\; x(t) - (20+0.1\sin t)y(t))dt, \end{gathered}$$

является равномерно экспоненциально устойчивым [46], и следовательно, нулевое решение системы (5.20) асимптотически устойчиво по вероятности.

5.3 Стохастические дифференциально-функциональные уравнения в произвольных гильбертовых пространствах

Вернемся к общему случаю сепарабельных гильбертовых пространств H и U. Рассмотрим стохастическое эволюционное функциональное уравнение

$$dX(t,\omega) = AX(t,\omega)dt + f(t, X(t, \omega))dt + g(t, X(t, \omega))dW(t,\omega), \quad (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{5.21}$$

относительно $X \in H$ с начальным условием

$$X(0,\omega) = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \tag{5.22}$$

где $f(t, X)\colon \mathbb{R}^+ \times H \to H$, $g(t, X)\colon \mathbb{R}^+ \times H \to \mathfrak{L}_2(U,H)$ — измеримые, непрерывные по X (при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$) функции, A — линейный оператор, определенный на всюду плотном в H множестве $\mathcal{D}(A)$ и порождающий C_0-полугруппу $S(t)$ на H, $\xi : \Omega \to \mathcal{D}(A)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина, имеющая конечный момент $\mathbb{E}\,\|\xi\|^p < \infty$ порядка $p > 2$. В дальнейшем для сокращения обозначений аргумент ω будем опускать. Все интегралы ниже записаны в предположении их существования и конечности.

Относительно функций $f(t, X)$ и $g(t, X)$ будем предполагать, что выполнены два условия:

1. *Локальное условие Липшица*. Для любого $a > 0$ существует постоянная q_a такая, что для всех $t \in [0,a]$ и любых $\varphi,\psi \in H$, таких, что $\|\varphi\| \le a$, $\|\psi\| \le a$, выполняются неравенства
$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\| \le q_a\|\varphi - \psi\|, \quad \|g(t,\varphi) - g(t,\psi)\| \le q_a\|\varphi - \psi\| \tag{5.23}$$

2. *Условие линейного порядка роста*. Существует непрерывная функция $k\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}^+$ и любого $\eta \in H$ выполняются неравенства
$$\|f(t,\eta)\| \le k(t)(1 + \|\eta\|), \quad \|g(t,\eta)\| \le k(t)(1 + \|\eta\|). \tag{5.24}$$

Стоит отметить, что всякая функция, удовлетворяющая глобальному условию Липшица, удовлетворяет и локальному условию, и в свою очередь, всякая функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица, непрерывна.

Определение 5.5. Случайный процесс $X(t), t \ge 0$ называют слабым решением уравнения (5.21) с начальным условием (5.22), если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Процесс $X(t), t \geq 0$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным.
2. Процесс $X(t), t \geq 0$ п.н. непрерывен по t.
3. $X(t) = S(t)\xi + \int\limits_0^t S(t-s)f(s,X(s))ds + \int\limits_0^t S(t-s)g(s,X(s))dW(s),\ t \in \mathbb{R}^+$.

Определение 5.6. Случайный процесс $X(t), t \geq 0$ называют сильным решением уравнения (5.21) с начальным условием (5.22), если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Процесс $X(t), t \geq 0$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным.
2. Процесс $X(t), t \geq 0$ п.н. непрерывен по t.
3. $X \in \mathcal{D}(A)$ для почти всех $(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$.
4. $X(t) = \xi + \int\limits_0^t AX(s)\,ds + \int\limits_0^t f(s,X(s))ds + \int\limits_0^t g(s,X(s))dW(s), \quad t \in \mathbb{R}^+$.

Определение 5.7. Будем говорить, что (слабое или сильное) решение $X(t)$ уравнения (5.21) с начальным условием (5.22) является единственным, если для любое другое решение $Y(t)$ уравнения (5.21) с начальным условием (5.22) п.н. совпадает с $X(t)$, т.е. $\mathbb{P}(X(t) = Y(t)\ \forall t \geq 0) = 1$.

Определение 5.8. Пусть положительная функция $\lambda(t)$ определена для достаточно больших $t > 0$, скажем, $t \geq T > 0$. Предположим, что

1. $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty$.
2. $\ln \lambda(t)$ равномерно непрерывна по $t \geq T$.
3. Существует константа $\tau \geq 0$ такая, что $\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\ln\ln t}{\ln \lambda(t)} \leq \tau$.

Будем говорить, что слабое решение задачи (5.21), (5.22) притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$, если найдется $\gamma > 0$ такое, что выполняется неравенство (5.25)

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\ln \|X(t)\|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma \qquad \text{п.н.} \tag{5.25}$$

Через $\rho(A)$ обозначим резольвентное множество оператора A, т.е. множество тех значений $l \in \mathbb{C}$ для которых определен оператор $R(l,A) = (lI - A)^{-1}$ (резольвента оператора A). Обозначим также $R(l) = lR(l,A)$, $\rho_{\mathbb{R}}(A) = \rho(A) \cap \mathbb{R}$.

Для задачи (5.21), (5.22) построим аппроксимирующую задачу Коши

$$\begin{aligned} &dX^{(l)}(t,\omega) = AX^{(l)}(t,\omega) + R(l)f(t,X^{(l)}(t,\omega))dt + R(l)g(t,X^{(l)}(t,\omega))dW(t,\omega), \\ &\hspace{28em} t \in \mathbb{R}^+, \\ &X^{(l)}(0,\omega) = \xi(\omega), \end{aligned} \tag{5.26}$$

где $l \in \rho_{\mathbb{R}}(A)$.

Лемма 5.1. *Для любого достаточно большого* $l \in \rho_{\mathbb{R}}(A)$ *задача Коши* (5.26) *имеет единственное сильное решение* $X^{(l)}$ *и более того, существует подпоследовательность* $X^{(l_n)}$ *такая, что* $X^{(l_n)}(t) \to X(t)$ *при* $n \to \infty$ *п.н. равномерно по* $t \in [0,T]$*, где* $X(t)$ *— слабое решение задачи* (5.21)*,* (5.22)*, а* $T > 0$ *— произвольное число.*

Доказательство. В [61, теорема 3.1], отталкиваясь от определения генератора C_0-полугруппы и (как следствие, см. [61, следствие 2.5]) замкнутости оператора A, было доказано интегральное представление резольвенты (5.27)

$$R(l,A)x = \int_0^{+\infty} e^{-l\,t} S(t)x\,dt, \quad x \in H, \tag{5.27}$$

для всех $l \in \rho(A)$, для которых указанный интеграл существует и конечен. Воспользуемся оценкой операторов C_0-полугруппы (см. предложение 4.1): $\|S(t)\| \le Me^{\beta t}$ для всех $t \ge 0$. Будем иметь оценку (5.28):

$$\begin{aligned}\|R(l,A)\| = \sup_{\|x\|=1} \|R(l,A)x\| \le \int_0^{+\infty} e^{-l\,t} \sup_{\|x\|=1} \|S(t)x\|\,dt \le \\ \le M \int_0^{+\infty} e^{-(l-\beta)t} dt = \frac{M}{l-\beta}, \quad l > \beta\end{aligned} \tag{5.28}$$

откуда следует, что $(\beta, +\infty] \subset \rho(A)$ и более того, $\|R(l)\| \le \frac{M\,l}{l-\beta} \le 2M$ для $l \ge 2\beta$. Далее будем рассматривать только $l \ge 2M$, говоря о них, как о «достаточно больших» l.

Докажем, что задача Коши (5.26) имеет единственное слабое решение при достаточно большом l. С этой целью заметим, что для любого $r > 1$ ввиду условий (5.23) и (5.24) получим оценки (5.29) – (5.32):

$$\mathbb{E}\,\|R(l)f(t,\varphi) - R(l)f(t,\psi)\|^r \le (2M)^r\,\mathbb{E}\,\|f(t,\varphi) - f(t,\psi)\|^r \le (2Mq_a)^r\,\mathbb{E}\,\|\varphi - \psi\|^r, \tag{5.29}$$

$$\mathbb{E}\,\|R(l)g(t,\varphi) - R(l)g(t,\psi)\|^r \le (2M)^r\,\mathbb{E}\,\|g(t,\varphi) - g(t,\psi)\|^r \le (2Mq_a)^r\,\mathbb{E}\,\|\varphi - \psi\|^r, \tag{5.30}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\|R(l)f(t,\eta)\|^r \le (2M)^r\,\mathbb{E}\big(k(t)(1 + \|\eta\|)\big)^r \le \\ \le (2M)^r\,\mathbb{E}\big((k(t))^r 2^{r-1}(1 + \|\eta\|^r)\big) = \frac{(4Mk(t))^r}{2}(1 + \mathbb{E}\,\|\eta\|^r),\end{aligned} \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\|R(l)g(t,\eta)\|^r \le (2M)^r\,\mathbb{E}\big(k(t)(1 + \|\eta\|)\big)^r \le \\ \le (2M)^r\,\mathbb{E}\big((k(t))^r 2^{r-1}(1 + \|\eta\|^r)\big) = \frac{(4Mk(t))^r}{2}(1 + \mathbb{E}\,\|\eta\|^r),\end{aligned} \tag{5.32}$$

где $\varphi,\psi,\eta\colon \Omega \to H$ — произвольные $\mathcal{F}$-измеримые случайные величины с конечным p-м моментом, такие, что п.н. $\|\varphi\| \leq a$ и $\|\zeta\| \leq a$. Таким образом, задача Коши (5.26) удовлетворяет условиям [7–A, теорема 1.1] и следовательно имеет единственное слабое решение $X^{(l)}(t), t \geq 0$.

Докажем, что при наложенных ранее ограничениях найденное слабое решение $X^{(l)}(t), t \geq 0$ будет также являться и сильным решением задачи Коши (5.26). Для этого достаточно проверить условия из [45, предложение 2.3], предварительно зафиксировав произвольный отрезок времени $t \in [0,T]$. Воспользуемся утверждением (c) из [61, теорема 2.4], показывающим, что операторы A и $S(t)$ (а также $(l\,I - A)$ и $S(t)$) перестановочны. Для любых $r \in [0,t)$, $\varphi \in H$, $u \in U$ элементы (5.33), (5.34)

$$(l\,I{-}A)\big(S(t{-}r)R(l)f(r,\varphi)\big) = l\,S(t{-}r)f(r,\varphi) \in H, \tag{5.33}$$

$$(l\,I{-}A)\big(S(t{-}r)R(l)g(r,\varphi)u\big) = l\,S(t{-}r)g(r,\varphi)u \in H, \tag{5.34}$$

откуда следует, что $S(t{-}r)R(l)f(r,\varphi)$, $S(t{-}r)R(l)g(r,\varphi)u \in \mathcal{D}(l\,I{-}A) = \mathcal{D}(A)$. Кроме того, $\xi \in \mathcal{D}(A)$, т.е. условие (a) выполнено. Далее оценим интегралы (5.35) — (5.38) из условия (b):

$$\int_0^T \int_0^t \|AS(t-r)R(l)f(r,X^{(l)}(r))\|drdt \leq$$

$$\leq \int_0^T \int_0^t \|(A-lI)S(t-r)\,l(lI-A)^{-1}f(r,X^{(l)}(r))\|drdt +$$

$$+\int_0^T \int_0^t \|lS(t-r)\,l(l\,I-A)^{-1}f(r,X^{(l)}(r))\|drdt = I_1 + I_2, \tag{5.35}$$

$$I_1 = \int_0^T \int_0^t \|(A-l\,I)S(t-r)\,l(l\,I-A)^{-1}f(r,X^{(l)}(r))\|\,dr\,dt =$$

$$= \int_0^T \int_0^t \|S(t-r)(A-lI)\,l(lI-A)^{-1}f(r,X^{(l)}(r))\|drdt =$$

$$= l\int_0^T \int_0^t \|S(t-r)f(r,X^{(l)}(r))\|drdt. \tag{5.36}$$

Из перестановочности операторов $(l\,I - A)$ и $S(t)$ следует перестановочность операторов $R(l)$ и $S(t)$, так как $(l\,I-A)S(t) = S(t)(l\,I-A) \implies S(t) = (l\,I-A)^{-1}S(t)(l\,I-A) \implies S(t)(l\,I-A)^{-1} = (l\,I-A)^{-1}S(t)$. Поэтому

$$I_2 = \int_0^T \int_0^t \|lS(t-r)R(l)f(r,X^{(l)}(r))\| drdt \leq$$

$$\leq 2Ml \int_0^T \int_0^t \|S(t-r)f(r,X^{(l)}(r))\| drdt, \tag{5.37}$$

$$\int_0^T \int_0^t \|AS(t-r)R(l)f(r,X^{(l)}(r))\|\,dr\,dt \leq$$

$$\leq (2M+1)l \int_0^T \int_0^t \|S(t-r)\| \cdot \|f(r,X^{(l)}(r))\|\,dr\,dt \leq$$

$$= M(2M+1)l \int_0^T e^{\beta t} dt \int_0^t e^{-\beta r} k(r)(1+\|X^{(l)}(r)\|)\,dr = I_3. \tag{5.38}$$

Поскольку $X^{(l)}(r)$ п.н непрерывен, то $M_T = \sup\limits_{0\leq r\leq T} \|X^{(l)}(r)\| < \infty$. А поскольку функция $k(r)$ непрерывна на $[0,T]$, то интеграл I_3, очевидно, п.н. конечен, т.е. условие (b) выполнено. Условие (c) проверяется аналогично.

Таким образом, все условия [45, предложение 2.3] выполнены, а значит, задача Коши (5.26) имеет сильное решение. Это решение будет также и единственным ввиду того, что всякое сильное решение является слабым (см. [45, предложение 2.1]), а слабое решение (5.26) единственно.

Докажем теперь существование требуемой подпоследовательности $X^{(l_n)}$. Сперва покажем, что для любого $T \in \mathbb{R}^+$ существует постоянная $C(T) > 0$ такая, для слабого решения задачи (5.21), (5.22) выполняется оценка сверху (5.39)

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T} \|X(s)\|^p\right) \leq C(T). \tag{5.39}$$

Действительно, используя интегральное неравенство Гельдера, условие (5.24) и неравенство типа Буркхольдера (см. предложение 5.3), можно получить (см. [2–A]) оценку вида

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T} \|X(s)\|^p\right) \leq C_1(T) + C_2(T) \int_0^T \mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T} \|X(s)\|^p\right) ds. \tag{5.40}$$

Отсюда согласно неравенству Гронуолла получим неравенство (5.41):

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq s\leq T} \|X(s)\|^p\right) \leq C_1(T)e^{C_2(T)T} =: C(T), \tag{5.41}$$

как и утверждалось.

Поскольку $\|R(l)\| \leq 2M$ при достаточно больших l, то аналогично доказывается оценка для решения $X^{(l)}(t)$ задачи (5.26): существует постоянная $K(T)$ такая, что $\mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leq s\leq T}\|X^{(l)}(s)\|^p\right) \leq K(T)$. Обозначим $C_T = \max(C(T),K(T))$.

Для каждых $a,T > 0$ и достаточно большого l определим множество (5.42):

$$\Omega_l^{a,T} = \left\{\omega\in\Omega\, :\, \max\left(\sup_{0\leq s\leq T}\|X(s)\|, \sup_{0\leq s\leq T}\|X^{(l)}(s)\|\right)\leq a\right\} \tag{5.42}$$

и его характеристическую функцию $\zeta_l^{a,T} = 1_{\Omega_l^{a,T}}(\omega)$. Заметим, что

$$\begin{gathered}X(t)-X^{(l)}(t) = \int_0^t S(t-s)(I-R(l))f(s,X(s))ds+\\ +\int_0^t S(t-s)(I-R(l))g(s,X(s))dW(s)+\\ +\int_0^t S(t-s)R(l)\left(f(s,X(s))-f(s,X^{(l)}(s))\right)ds+\\ +\int_0^t S(t-s)R(l)\left(g(s,X(s))-g(s,X^{(l)}(s))\right)dW(s),\quad t\geq 0\end{gathered} \tag{5.43}$$

Оценивая в равенстве (5.43) каждое слагаемое, используя неравенства Гельдера и Буркхольдера, условие линейного порядка роста и теорему о мажорируемой сходимости (предложение 2.1), можно показать (см. [2–А]), что существуют постоянные $\widetilde{C}(a,T)$ и $\varepsilon(l)>0$ такие, что

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T} \leq \widetilde{C}(a,T)\int_0^T \mathbb{E}\sup_{0\leq r\leq s}\|X(r)-X^{(l)}(r)\|^p\zeta_l^{a,T}ds+\varepsilon(l), \tag{5.44}$$

где $\varepsilon(l)\xrightarrow[l\to\infty]{}0$. Применяя к (5.44) лемму Гроноулла, получим (5.45):

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T} \leq \varepsilon(l)e^{T\widetilde{C}(a,T)}\xrightarrow[l\to\infty]{}0\quad\forall\,(a,T)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \tag{5.45}$$

Покажем, что отсюда следует сходимость по вероятности: $\sup\limits_{0\leq t\leq T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\xrightarrow[l\to\infty]{\mathbb{P}}0$ для любого $T\in\mathbb{R}^+$. Неравенство Чебышева дает:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|>a\right)\le\frac{1}{a^p}\,\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|\right)^p=\frac{1}{a^p}\,\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|^p\le\frac{C_T}{a^p}, \tag{5.46}$$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X^{(l)}(t)\|>a\right)\le\frac{C_T}{a^p}. \tag{5.47}$$

Из (5.46), (5.47) следует, для любого $a > 0$ и достаточно больших l справедливо неравенство (5.48)

$$\mathbb{P}\left(\zeta_l^{a,T}=0\right)\le\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|>a\right)+\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X^{(l)}(t)\|>a\right)\le\frac{2C_T}{a^p} \tag{5.48}$$

Возьмем произвольные $\varepsilon_1,\varepsilon_2 > 0$ и положим $a = \left(\frac{4C_T}{\varepsilon_2}\right)^{1/p}$. Поскольку $\mathbb{E}\sup\limits_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T}\xrightarrow[l\to\infty]{}0$, то на основании неравенства Чебышева заключаем, что найдется l_{ε_2} такое, что для всех $l\ge l_{\varepsilon_2}$ выполняется неравенство $\mathbb{P}\left(\sup\limits_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T}>\varepsilon_1\right)\le\frac{\varepsilon_2}{2}$. Таким образом, для всех $l\ge l_{\varepsilon_2}$ справедливо, неравенство (5.8)

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p>\varepsilon_1\right)\le$$

$$\le\mathbb{P}\left(\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T}>\varepsilon_1\right)\bigcap\left(\zeta_l^{a,T}=1\right)\right)+\mathbb{P}\left(\zeta_l^{a,T}=0\right)\le\varepsilon_2,$$

что и означает сходимость $\sup\limits_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\xrightarrow[l\to\infty]{\mathbb{P}}0$.

А поскольку из всякой последовательности случайных величин, сходящейся по вероятности, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся п.н., то найдется подпоследовательность $X^{(l_n)}(t)$ такая, что $\sup\limits_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l_n)}(t)\|^p\xrightarrow[l\to\infty]{\text{п.н.}}0$, т.е. $X(t)\xrightarrow[l\to\infty]{\text{п.н.}}X^{(l_n)}(t)$ равномерно по $t\in[0,T]$. Это и есть требуемая подпоследовательность. Лемма доказана.

5.3.1 Теорема о притяжении к нулю

Введем операторы L, Q по формулам (5.49), (5.50): если положительный функционал $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbb{R}^+\times H,\mathbb{R}^+)$, то

$$LV(t,x)=V'_t(t,x)+\langle V'_x(t,x),Ax+f(t,x)\rangle_H+$$
$$+\frac{1}{2}\text{tr}[V''_{xx}(t,x)(g(t,x)Q_w^{1/2})(g(t,x)Q_w^{1/2})^\star],\quad (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathcal{D}(A),\tag{5.49}$$
$$QV(t,x)=\text{tr}[V''_{xx}(t,x)\otimes V''_{xx}(t,x)(g(t,x)Q_w^{1/2})(g(t,x)Q_w^{1/2})^\star],$$
$$(t,x)\in\mathbb{R}^+\times H.\tag{5.50}$$

Далее для краткости будем опускать индекс H у скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ в пространстве H.

Теорема 5.4. *Пусть задан функционал $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbb{R}^+\times H,\mathbb{R}^+)$ и две неотрицательные непрерывные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$. Предположим, что существуют положительные постоянные $r>0$, $m\geq 0$, постоянные $\mu,\nu,\theta\in\mathbb{R}$ и невозрастающая положительная функция $\zeta(t)$ такие, что $\frac{m-(\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r}>0$ и выполнены следующие условия:*

1. *$\|x\|^r(\lambda(t))^m\leq V(t,x)$ для всех $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times H$.*
2. *$LV(t,x)+\zeta(t)QV(t,x)\leq\psi_1(t)+\psi_2(t)V(t,x)$ для всех $t\in\mathbb{R}^+$, $x\in\mathcal{D}(A)$.*
3. *$\lim\limits_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln\left(\int_0^t\psi_1(s)\,ds\right)}{\ln\lambda(t)}\leq\nu$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup\frac{\int_0^t\psi_2(s)\,ds}{\ln\lambda(t)}\leq\theta$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\frac{\ln\zeta(t)}{\ln\lambda(t)}\geq-\mu$.*

Тогда слабое решение задачи (5.21), (5.22) *притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$.*

Доказательство. Применим формулу Ито к функционалу $V(t,x)$ и решению (сильному) $X^l(t)$ задачи (5.26). Будем иметь:

$$V(t,X^{(l)}(t))=V(0,\xi)+I_1(t,l)+\int_0^t LV(s,X^{(l)}(s))\,ds+$$
$$+I_2(t,l)+\int_0^t\langle V'_x(s,X(s)),g(s,X(s))dW(s)\rangle,\tag{5.51}$$

где I_1, I_2, L_l определяются формулами (5.52) — (5.54):

$$I_1(t,l) = \int_0^t L_l V(s, X^{(l)}(s))\, ds \, - \int_0^t LV(s, X^{(l)}(s))\, ds, \tag{5.52}$$

$$I_2(t,l) = \int_0^t \langle V_x'(s, X^{(l)}(s)), R(l) g(s,X^{(l)}(s)) dW(s)\rangle -$$
$$- \int_0^t \langle V_x'(s, X(s)), g(s,X(s)) dW(s)\rangle, \tag{5.53}$$

$$L_l V(t,x) = V_t'(t,x) + \langle V_x'(t,x), Ax + R(l) f(t,x)\rangle +$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big[V_{xx}''(t,x)(R(l)g(t,x)) \circ Q_w \circ (R(l)g(t,x))^\star\big]. \tag{5.54}$$

Из равномерной непрерывности функции $\ln\lambda(t)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют натуральные числа $N = N(\varepsilon)$ и $k_1 = k_1(\varepsilon)$ для всех $k \ge k_1(\varepsilon)$: $\quad \left|\ln\lambda\left(\frac{k}{2^N}\right) - \ln\lambda(t)\right| \le \varepsilon, \quad t \in \left[\frac{k-1}{2^N}; \frac{k}{2^N}\right]$. С другой стороны, по экспоненциальному неравенству (5.55) для мартингалов [52, лемма 1.1]:

$$\mathbb{P}\Bigg(\omega : \sup_{0\le t\le w}\Bigg(\int\limits_0^t \langle V_x'(s,X(s)), g(s,X(s))dW(s)\rangle - \int\limits_0^t \frac{u}{2} QV(s,X(s))\, ds\Bigg) > v\Bigg) \le e^{-uv} \tag{5.55}$$

для любых положительных постоянных u, v и w. Выбирая их по формуле (5.56)

$$u = 2\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right), \quad v = \ln\frac{k-1}{2^N}\Big/\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right), \quad w = \frac{k}{2^N}, \quad k = 2,3,\dots, \tag{5.56}$$

и применяя затем лемму Бореля-Кантелли, получим что вне множества нулевой вероятностной меры $\widetilde{\Omega}$ ($\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 0$), т.е. для каждого $\omega \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$ существует натуральное число $k_0(\varepsilon,\omega)$ такое, что

$$\int_0^t \langle V_x'(s,X(s)), g(s,X(s))dW(s)\rangle \le \frac{\ln\frac{k-1}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + \zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)\int_0^t QV(s,X(s))\, ds \tag{5.57}$$

для всех $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$, $k = k(\omega) \ge k_0(\varepsilon,\omega)$. Подставляя выражение (5.57) в (5.51) и используя 2-е условие теоремы, для всех $\omega \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$, $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 0$ будем иметь оценку (см. [2–A])

$$V(t, X^{(l)}) \le \frac{\ln\frac{k-1}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + V(0,\xi) +$$
$$+ \int_0^t \Big(\psi_1(s) + \psi_2(s) V(s,X^{(l)}(s))\Big) ds + I_1(t,l) + I_2(t,l) + I_3(t,l), \tag{5.58}$$

для всех $t \in [0, \frac{k}{2^N}]$, $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon)\}$. Здесь I_3 определяется формулой (5.59)

$$I_3(t,l) = \zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)\int_0^t \Big(QV(s,X(s)) - QV(s,X^{(l)}(s))\Big)\,ds. \tag{5.59}$$

Следовательно, согласно лемме Гронуолла, п.н. выполнено неравенство

$$V(t,X^{(l)}(t)) \leq \left(V(0,\xi) + \frac{\ln\frac{k-1}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + \right.$$

$$\left. + \sup_{t\in\left[0,\frac{k}{2^N}\right]}\left(|I_1(t,l)| + |I_2(t,l)| + |I_3(t,l)| + \int_0^t \psi_1(s)\,ds\right)\right) \cdot \exp\left(\int_0^t \psi_2(s)\,ds\right)$$

для всех $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$, $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon)\}$.

Покажем теперь, что существует подпоследовательность $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ такая, что $I_1(t,l_n)$, $I_2(t,l_n)$ и $I_3(t,l_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ п.н. равномерно по $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$. Действительно, выберем подпоследовательность леммы 2.1: $X^{(l_n)}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(t)$ п.н. равномерно по $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$. Говоря точнее, существуют подмножества $\Omega_k \subset \Omega$ с $\mathbb{P}(\Omega_k) = 0$ такие, что для любого $\omega \in \Omega \setminus \Omega_k$: $X^{(l_n)}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(t)$ п.н. равномерно по $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$. Следовательно, для всех $\omega \in \Omega \setminus \left(\cup_{k\geq 2}\Omega_k \bigcup \widetilde{\Omega}\right)$, будем иметь оценку (5.60):

$$\sup_{t\in\left[0,\frac{k}{2^N}\right]} |I_1(t,l)| \leq \int_0^{k/2^N} \Big|L_{l_n}V(s,X^{(l_n)}(s)) - LV(s,X^{(l_n)}(s))\Big|\,ds \leq$$

$$\leq \int_0^{k/2^N} \Big|\langle V_x'(s,X^{(l_n)}(s)), (I - R(l_n))f(s,X^{(l_n)}(s))\rangle\Big|\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{k/2^N} \Big|\mathrm{tr}\big[V_{xx}''(s,X^{(l_n)}(s))\big\{(R(l_n)g(s,X^{(l_n)}(s)) \circ Q_w \circ (R(l_n)g(s,X^{(l_n)}(s)))^\star -$$

$$-g(s,X^{(l_n)}(s)) \circ Q_w \circ g(s,X^{(l_n)}(s)))^\star\big\}\big]\Big|\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{5.60}$$

для всех $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon)\}$. Аналогично доказывается, что $\sup_{t\in\left[0,\frac{k}{2^N}\right]} |I_2(t,l)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\sup_{t\in\left[0,\frac{k}{2^N}\right]} |I_3(t,l)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Следовательно, устремляя $n \to \infty$, получим, что п.н. верно (5.61):

$$V(t,X(t)) \leq \left(V(0,\xi) + \frac{\ln\frac{k}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + \frac{\ln\frac{k-1}{k}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + \int_0^{k/2^N}\psi_1(s)\,ds\right)\exp\left(\int_0^t \psi_2(s)\,ds\right) \tag{5.61}$$

для всех $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$, $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon)\}$.

Таким образом, используя 3-е условие теоремы и равномерную непрерывность $\ln\lambda(t)$, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется натуральное $k_2(\varepsilon,\omega)$ такое, что

$$\ln V(t, X(t)) \leq$$
$$\leq \ln\left(V(0,\xi) + \lambda\left(\frac{k}{2^N}\right)^{(\mu+\tau+2\varepsilon)} + \ \lambda\left(\frac{k}{2^N}\right)^{(\mu+\varepsilon)} \ln\frac{k-1}{k} + \lambda\left(\frac{k}{2^N}\right)^{(\nu+\varepsilon)}\right) +$$
$$+(\theta+\varepsilon)\ln\lambda(t) \leq$$
$$\leq \ln\left(V(0,\xi) + e^{\varepsilon(\mu+\tau+2\varepsilon)}\lambda(t)^{(\mu+\tau+2\varepsilon)} + e^{\varepsilon(\mu+\varepsilon)}\lambda(t)\ln\frac{k-1}{k} + e^{\varepsilon(\nu+\varepsilon)}\lambda(t)^{(\nu+\varepsilon)}\right) +$$
$$+(\theta+\varepsilon)\ln\lambda(t) \tag{5.62}$$

для всех $t \in \left[\frac{k-1}{2^N},\frac{k}{2^N}\right]$, $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon,\omega)\}$. Из (5.62) следует

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln V(t, X(t))}{\ln\lambda(t)} \leq \max\{\nu+\varepsilon, \mu+\tau+2\varepsilon\} + \theta + \varepsilon. \tag{5.63}$$

Устремляя в (5.63) $\varepsilon \to 0$, получим неравенство (5.64)

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln V(t, X(t))}{\ln\lambda(t)} \leq \max\{\nu,\mu+\tau\} + \theta. \tag{5.64}$$

Окончательно, используя 1-е условие теоремы, будем иметь (5.66):

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln\|X(t)\|}{\ln\lambda(t)} \leq \lim_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{r}\frac{\ln\left(\lambda(t)^{-m}V(t,X(t))\right)}{\ln\lambda(t)} \leq$$
$$\leq -\frac{m - (\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r} \qquad \text{п.н.} \tag{5.65}$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Пример 5.2. Рассмотрим следующую стохастическую дифференциальную систему (значение параметров $\alpha, m > 0$ будет уточнено ниже)

$$dX_t(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2}X_t(x) + \alpha\sin\left(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}}\cos X_t^1\right)\right)dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}}X_t(x)dW_t,$$
$$dX_t^1 = \left(\alpha X_t^1\sin X_t^1 + \left(\int_0^\pi X_t(x)^2dx\right)^{1/2}\right)dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}}\left(\int_0^\pi X_t(x)^2dx\right)^{1/2}dW_t,$$
$$t > 0,\ \ 0 < x < \pi$$

как уравнение относительно $\bar{X}_t = (X_t(\cdot), X_t^1)^\top$ в пространстве $H \times \mathbb{R}$ с начальным условием $\bar{X}_0 = (X_0(x), X_0^1)^\top = (x_0(x), x_0^1),\ x \in (0,\pi),\ H = L_2[0,\pi]$, $U = \mathbb{R}$. В компактной форме это уравнение примет вид

$$d\bar{X}_t = (\bar{A}\bar{X}_t + f(t, \bar{X}_t))dt + g(t, \bar{X}_t)dW_t, \tag{5.66}$$

$$f(t, \bar{X}_t) = \alpha \left(\sin(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos X_t^1), X_t^1 \sin X_t^1 + \|X_t(x)\|_H\right)^\top,$$

$$g(t, \bar{X}_t) = \alpha e^{-\frac{mt}{2}} \left(X_t(x), \left(\int_0^\pi X_t(x)^2 dx\right)^{1/2}\right)^\top,\ \bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(A) = \{u \in C_2[0,\pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$$

Уравнение (5.66), записанное в интегральной форме, примет вид

$$\bar{X}_t = \int_0^\pi G(t, x, s)\bar{X}_0(s)ds + \int_0^t \int_0^\pi G(t-\tau, x, s) f(s, x_\tau^1) ds\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_0^\pi G(t-\tau, x, s) g(s, x_\tau^1) ds\, dW(\tau),$$

где функция $G(t,x,y)$ определяется по формуле (4.5) при $l = \pi$. Соответственно, оператор $S(t) : H \times \mathbb{R} \to H \times \mathbb{R}$ определяется формулой

$$S(t)\bar{u}(\cdot) = \left(\int_0^\pi G(t, \cdot, s)u(s)ds, u^1\right).$$

Положим $V(t,\bar{u}) = V(t, u) = e^{mt}\|u\|^2, u \in H$. Очевидно, $V_t'(t,\bar{u}) = mV(t, u)$. По определению производной по Фреше V_u' в точке $u \in H$ есть линейный ограниченный функционал такой, что для достаточно малых $\|h\|$, $h \in H$ выполняется

$$V(t, u+h) - V(t, u) - V_u'(t, u)h = o(\|h\|),$$

$$e^{mt} \int_0^\pi (u(s) + h(s))^2\, ds - e^{mt} \int_0^\pi (u(s))^2\, ds = V_u'(t,u)h + o(\|h\|).$$

Последнее равносильно $2e^{mt}\langle u,h\rangle + e^{mt}\|h\|^2 = V_u'(t,u)h + o(\|h\|)$, откуда $V_u'(t,u)h = 2e^{mt}\langle u,h\rangle\ \forall\, h \in H$. Аналогично $V_{uu}''h = 2e^{mt}\langle h,\cdot\rangle$, $\forall\, h \in H$. Можно показать (см. [2–A]), что

$$\langle V_u'(t, u), Au\rangle = -2\frac{\|u'\|^2}{\|u\|^2} V(u),$$
$$\langle V_u'(t, u), f(t, \bar{u})\rangle \le 3\alpha V(t, u) + \alpha\pi.$$

Нетрудно видеть, что

$$\|V_u'(t,u)\| = \sup_{\|h\|=1} 2e^{mt}|\langle u,h\rangle| \le 2e^{mt} \sup_{\|h\|=1} \|u\|\cdot\|h\| = 2e^{mt}\|u\|$$

и аналогично $\|V_{uu}''(t,u)\| = 2e^{mt}\sup_{\|h\|=1}\sup_{\|u\|=1}|\langle h,u\rangle| \le 2e^{mt}$. Кроме того, для любого ограниченного линейного оператора B след $\mathrm{tr}(BQ_w) = \sum\langle BQ_w u_k, u_k\rangle$ по модулю не превосходит $|\mathrm{tr}(BQ_w)| \le \|B\|\mathrm{tr}Q_w$ (достаточно в качестве (u_k) взять базис из собственных векторов Q_w). В нашем случае $U = \mathbb{R}$, а значит, $Q_w = I$ и $\mathrm{tr}Q_w = 1$. Таким образом,

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V_{uu}''(t,\bar{u})(g(t,\bar{u})Q_w^{1/2})(g(t,\bar{u})Q_w^{1/2})^\star] \le \frac{1}{2}\|V_{uu}''\|\cdot\|g(t,\bar{u})\|^2 \le \\ \le 2e^{mt}\alpha^2 e^{-mt}\|u\|^2 \le 2\alpha^2 V(t,\bar{u}), \\ |QV(t,\bar{u})| = |\mathrm{tr}[V_{uu}''(t,\bar{u})\otimes V_{uu}''(t,\bar{u})(g(t,\bar{u})Q_w^{1/2})(g(t,\bar{u})Q_w^{1/2})^\star]| \le \\ \le \|V_{uu}''\|^2\|g(t,\bar{u})\|^2 \le 8e^{mt}\alpha^2\|u\|^2 = 8\alpha^2 V(t,\bar{u}).\end{gathered}$$

Итак, выберем в качестве невозрастающей положительной функции $\zeta(t) \equiv 1$, положим $\lambda_0 = \inf_{u\in D(A)} \frac{\|u'\|^2}{\|u\|^2}$ и оценим

$$LV(t,\bar{u}) + \zeta(t)QV(t,\bar{u}) \le \alpha\pi + (-2\lambda_0 + m + 3\alpha + 10\alpha^2)V(t,u).$$

Нетрудно показать (см. [2–A]), что $\lambda_0 \ge \frac{1}{\pi^2} > 0$. Поэтому за счет выбора достаточно малого $\alpha > 0$ и достаточно большого $m > 0$ добьемся того, чтобы постоянная $\beta = -2\lambda_0 + m + 3\alpha + 10\alpha^2 > 0$, но $-2\lambda_0 + 3\alpha + 10\alpha^2 < 0$.

Обратимся к условию теоремы. Исходя из первого условия, полагаем $r = 2$, из второго условия: $\psi_1(t) \equiv \alpha\pi$, $\psi_2(t) \equiv \beta$. В качестве λ выберем $\lambda(t) = e^t$. Поскольку $\frac{\log\log t}{\log\lambda(t)} = \frac{\log\log t}{t} \underset{t\to\infty}{\to} 0$, то $\tau = 0$. Далее, $\frac{\log\zeta(t)}{\log\lambda(t)} = 0$, т.е. $\mu = 0$; $\frac{\log\left(\int_0^t \psi_1(s)ds\right)}{\log\lambda(t)} = \frac{\log\alpha\pi t}{t} \underset{t\to\infty}{\to} 0$, т.е. $\nu = 0$ и следовательно, $\max\{\nu,\mu+\tau\} = 0$. И наконец, $\frac{\int_0^t\psi_2(s)\,ds}{\log\lambda(t)} = \frac{\beta t}{t} = \beta$, т.е. $\theta = \beta$. Таким образом, согласно теореме 5.4:

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log\|X(t)\|}{t} \le -\frac{m - (\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r} = -\frac{2\lambda_0 - 3\alpha - 10\alpha^2}{2} < 0.$$

Отметим, что функция g удовлетворяет глобальному условию Липшица, а f удовлетворяет локальному, но не удовлетворяет глобальному условию Липшица. Действительно, для g:

$$\|g(t,\bar{x}) - g(t,\bar{y})\|^2 = e^{-mt}\alpha^2\int_0^\pi |x(s)-y(s)|^2 ds + e^{-mt}\alpha^2(\|x\| - \|y\|)^2 \le$$

$$\leq 2e^{-mt}\alpha^2\|x-y\|^2 \leq 2\alpha^2\|\bar{x}-\bar{y}\|^2.$$

Для f имеем:

$$\|f(t,\bar{x})-f(t,\bar{y})\|^2 = \int_0^\pi \left|\sin\left(x(s)+e^{-\frac{mt}{2}}\cos x^1\right)-\sin\left(y(s)+e^{-\frac{mt}{2}}\cos y^1\right)\right|^2 ds+$$
$$+\left|x^1\sin x^1 - y^1\sin y^1 + \|x\|-\|y\|\right|^2.$$

Так как $|\sin x-\sin y| \leq |x-y|$, $|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$ для любых $x,y\in\mathbb{R}$, то

$$\|f(t,\bar{x})-f(t,\bar{y})\|^2 \leq \int_0^\pi \left|x(s)-y(s)+e^{-\frac{mt}{2}}\cos x^1 - e^{-\frac{mt}{2}}\cos y^1\right|^2 ds+$$
$$+2\left|x^1\sin x^1 - y^1\sin y^1\right|^2 + 2\|x-y\|^2 \leq$$
$$\leq 4\|x-y\|^2 + 2\pi\left|x^1-y^1\right|^2 + 2\left|x^1\sin x^1 - y^1\sin y^1\right|^2.$$

Функция $h(x) = x\sin x$, $x\in\mathbb{R}$ удовлетворяет локальному условию Липшица (и не удовлетворяет глобальному), поэтому для любого $a>0$ найдется постоянная $q_a>0$ такая, что для всех $|x^1|,|y^1|<a$ выполняется $\left|x^1\sin x^1-y^1\sin y^1\right| \leq q_a|x^1-y^1|$. Но если $\|\bar{x}\|^2 = \int_0^\pi (x(s))^2ds + (x^1)^2 \leq a^2$, $\|\bar{y}\|^2\leq a^2$ то и $\left|x^1\right|\leq a$, $|y^1|\leq a$. Поэтому при любом $a>0$ при условия $\|\bar{x}\|,\|\bar{y}\|\leq a$ выполняется неравенство

$$\|f(\bar{x})-f(\bar{y})\|^2 \leq \max\{4{,}2(\pi+q_a^2)\}\cdot\|\bar{x}-\bar{y}\|^2,$$

т.е. локальное условие Липшица выполнено.

Выводы

В данной главе диссертации были рассмотрены вопросы устойчивости и притяжения к нулю решений стохастических дифференциальных уравнений вида $dX(t) = (A(t)X(t)+f(t,X(t)))dt + g(t,X(t))dW(t)$, $t\geq 0$ со стандартными броуновскими движениями $W(t)$ в гильбертовых пространствах и получены следующие результаты.

Для рассматриваемых уравнений с разрывными коэффициентами f, g, имеющими линейный порядок роста, в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathbb{R}^d$ с помощью метода фунций Ляпунова доказана теорема об асимптотической устойчивости по вероятности по линейному приближению $dX(t) = A(t)X(t)dt$.

Для рассматриваемых уравнений с коэффициентами f, g, удовлетворяющими локальному условию Липшица и имеющими линейный порядок роста, в бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространствах H с помощью метода функционалов Ляпунова доказана теорема о притяжении решений к нулю.

Приведены примеры, иллюстрирующие применение указанных теорем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведено исследование асимптотического поведения решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновским движениями в конечномерных, а также сепарабельных гильбертовых пространствах и получены следующие основные результаты:

1. Доказана теорема 2.3 о непрерывной зависимости в среднем от начальных условий и правых частей решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста, большими $1/3$, и сносом. Указанный результат был получен в работе 3–А и изложен в главе 2.
2. Доказана теорема 3.1, в которой получены асимптотическое разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста, большими $1/3$, и сносом. Получено уравнение, обобщающее обратное уравнение Колмогорова для решений указанных уравнений в коммутативном случае. Приведенные результаты, а также другие связанные с ними результаты, изложенные в главе 3, были получены в работах 4–А, 5–А.
3. Получены методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа с дробным броуновским движениям с показателем Харста, большим $1/2$, стандартным броуновским движением и сносом, основанные на приведении данных уравненияй к простейшим или линейным неоднородным уравнениям (теорема 4.2), или к уравнениям Стратоновича (раздел 4.2.3). Указанные результаты были получены в работе [6–А] и изложены в главе 4.
4. Доказана теорема 5.3 об устойчивости по линейному приближению, дающая достаточное условие асимптотической устойчивости по вероятности слабого нулевого решения неавтономной системы стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и стандартными броуновскими движениями, исходя из равномерной экспоненциальной устойчивости слабого нулевого решения соответствующей однородной системы. Приведен пример, иллюстрирующий применение доказанной теоремы. Указанный результат был получен в работе 1–А и

изложен в главе 5.

5. Доказана теорема 5.4 о притяжении к нулю слабых решений нелинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица. Приведен пример, иллюстрирующий применение доказанной теоремы. Данный результат был получен в работе 2–А и изложен в главе 5.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Список использованных источников

1. *Васьковский, М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием со стандартным и дробным броуновскими движениями / М.М. Васьковский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2015. — №. 1. — С. 22–34.
2. *Васьковский, М.М.* Существование слабых решений стохастических эволюционных функциональных уравнений параболического типа с измеримыми локально ограниченными коэффициентами / М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 8. — С. 1080–1095.
3. *Васьковский, М.М.* Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 2. — С. 160–173.
4. *Ватанабэ, С.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. — М. : Наука, 1986. — 448 с.
5. *Гихман, И.И.* Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — М. : Наука, 1977. — 568 с.
6. *Гихман, И.И.* К теории дифференциальных уравнений случайных процессов / И.И. Гихман // Укр. мат. журнал. — 1951. — Т. 3, № 3. — С. 317–339.
7. *Гихман, И.И.* О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями / И.И. Гихман // Укр. мат. журнал. — 1950. — Т. 2, № 4. — С. 37–63.
8. *Гихман, И.И.* Стохастические дифференциальные уравнения / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — Киев : Наукова думка, 1968. — 354 с.
9. *Колмогоров, А.Н.* Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. — 1940. — Т. 26, № 2. — С. 115–118.
10. *Леваков, А.А.* Исследование устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений с помощью знакопостоянных функций Ляпунова / А.А. Леваков // Дифф. уравн. — 2011. — Т. 47, № 9. — С. 1258–1267.
11. *Леваков, А.А.* Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А.

Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1011–1019.

12. *Леваков, А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения / А.А. Леваков. — Минск : БГУ, 2009. — 231 с.
13. *Леваков, А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения / А.А. Леваков, М.М. Васьковский. — Минск : БГУ, 2019. — 495 с.
14. *Леваков, А.А.* Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2015. — Т. 51, № 8. — С. 997–1003.
15. *Леваков, А.А.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 2. — С. 187–200.
16. *Леваков, А.А.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 8. — С. 1060–1076.
17. *Оксендаль, Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. — М. : Мир, 000 «Издательство АСТ», 2003. — 408 с.
18. *Филиппов, А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М. : Наука, 1985. — 223 с.
19. *Царьков, Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений / Е.Ф. Царьков. — Рига : Зинатне, 1989. — 421 с.
20. Основы стохастической финансовой математики: в 2 т. / А.Н. Ширяев. — М. : ФАЗИС, 1998. — Т. 1 : Факты. Модели. — 512 с.
21. *Baudoin, F.* Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions / F. Baudoin, L. Coutin // Stochastic Processes and their Applications — 2007. — Vol. 117, № 5. — P. 550–574.
22. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications / F. Biagini [et al.]. — London : Springer-Verlag, 2008. — 330 p.
23. *Cheridito, P.* Regularizing fractional Brownian motion with a view towards stock price modeling : a dissertation ... doctor of mathematics / P. Cheridito. — Zürich, 2001. — 121 p.

24. *Cheridito, P.* Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter h in (0, 1/2) / P. Cheridito, D. Nualart // Annales de I Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2005. — Vol. 41, № 6. — P. 1049–1081.
25. *Coppel, W.A.* Dichotomies in Stability Theory / W.A. Coppel. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1978. — 102 p. — (Lecture Notes in Mathematics ; № 629).
26. *Coutin, L.* Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions / L. Coutin, Z. Qian // Probability Theory Related Fields. — 2002. — Vol. 122, № 1. — P. 108–140.
27. *Da Prato, G.* A note on stochastic convolution / G. Da Prato, J. Zabczyk // Stochastic Analysis and Appl. — 1992. — Vol. 10, № 2. — P. 143–153.
28. *Da Prato, G.* Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. — Cambridge : Cambridge university press, 1992. — 449 p.
29. *Filipovic, D.* Consistency problems for Heath-Jarrow-Morton interest rate models / D. Filipovic. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2001. — 138 p.
30. *Gawarecki, L.* Stochastic differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations / L. Gawarecki, V. Mandrekar. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2011. — 291 p.
31. *Friz, P.* A Course on Rough Paths with an introduction to regularity structures / P. Friz, M. Hairer. — Cham : Springer International Publishing AG, 2014. — 262 p.
32. Large deviations and asymptotic methods in finance / P. Friz [et al.]. — Cham : Springer International Publishing AG, 2015. — 590 p.
33. *Friz, P.* Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications / P. Friz, N. Victoir. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 670 p.
34. The Jain-Monrad criterion for rough paths and applications to random Fourier series and non-Markovian Hörmander theory / P. Friz [et al.] // The Annals of Probability. — 2016. — Vol. 44, № 1. — P. 684–738.
35. *Gard, T.C.* Introduction to stochastic differential equations / T.C. Gard. — New York ; Basel : Marcel Dekker Inc., 1988. — 234 p.
36. *Garrido-Atienza, M.J.* Asymptotical stability of differential equations driven by Hölder-continuous paths / M.J. Garrido-Atienza, A. Neuenkirch, B. Schmalfuss // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 2017. — Vol. 30, № 1. — P. 359–377.

37. *Gubinelli, M.* Controlling rough paths / M. Gubinelli // Journal of Functional Analysis. — 2004. — Vol. 216, № 1. — P. 86–140.
38. *Gubinelli, M.* Ramification of rough paths / M. Gubinelli // Journal of Differential Equations. — 2010. — Vol. 248, № 4. — P. 693–721.
39. *Guerra, J.* Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion / J. Guerra, D. Nualart // Stochastic Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 26, № 5. — P. 1053–1075.
40. *Hairer, M.* A theory of regularity structures / M. Hairer // Inventiones mathematicae. — 2014. — Vol. 198, № 2. — P. 269–504.
41. *Hairer, M.* Geometric versus non-geometric rough paths / M. Hairer, D. Kelly // Annales de I Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2015. — Vol. 51, № 1. — P. 207–251.
42. *Harang, F.A.* On the theory of rough paths, fractional and multifractional Brownian motion with applications to finance : a dissertation ... master of mathematics / F. A. Harang. — Oslo, 2015. — 83 p.
43. *Hille, E.* Functional analysis and semi-groups / E. Hille, R. S. Phillips. — Revised edition. — Providence : American Mathematical Soc., 1957. — Vol. 31 : Colloquium Publications – American Mathematical Society. — 808 p.
44. *Hurst, H.* Long-term storage capacity of reservoirs / H. Hurst // Trasactions of American Society of Civil Engineers. — 1951. — Vol. 116, № 1. — P. 770–808.
45. *Ichikawa, A.* Stability of Semilinear Stochastic Evolution Equations / A. Ichikawa // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1982. — Vol. 90, № 1. — P. 12–44.
46. *Ilchmann, A.* Sufficient conditions for stability of linear time-varying systems / A. Ilchmann, D.H. Owens, D. Prätzel-Wolters // Systems & Control Letters. — 1987. — Vol. 9, № 2. — P. 157–163.
47. *Ito, K.* On stochastic differential equations / K. Ito. — Providence : American Mathematical Soc., 1951. — № 4. — 51 p.
48. *Ito, K.* Stochastic integral / K. Ito // Proceedings of the Japan academy. Series A, mathematical sciences. — 1944. — Vol. 20, № 8. — P. 519–524.
49. *Khasminskii, R.* Stochastic stability of differential equations / R. Khasminskii. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2012. — 342 p.
50. *Kleptsyna, M.L.* General approach to filtering with fractional Brownian noises application to linear systems / M. Kleptsyna, A. Le Breton, M.-C. Roubaud // Stochastics and Stochastic Reports. — 2000. — Vol. 71, № 1–2. — P. 119–140.
51. *Kubilius, K.* The existence and uniqueness of the solution of an integral

equation driven by a p-semimartingale of special type / K. Kubilius // Stochastic Processes and their Appl. — 2002. — Vol. 98, № 2. — P. 289–315.
52. *Liu, K.* On stability for a class of semilinear stochastic evolution equations / K. Liu // Stochastic Processes and their Appl. — 1997. — Vol. 70, № 2. — P. 219–241.
53. *Liu, K.* Stability of infinite dimensional stochastic differential equations with applications / K. Liu. — New York : Chapman and Hall/CRC, 2005. — 312 p.
54. *Lyons, T.* Differential equations driven by rough signals / T. Lyons // Revista Matemática Iberoamericana. — 1998. — Vol. 14, № 2. — P. 215–310.
55. *Mandelbrot, B.B.* Fractional Brownian Motions, fractional noises and applications / B.B. Mandelbrot, J.W. van Ness // SIAM Review. — 1968. — Vol. 10, № 4. — P. 422–437.
56. *Mandelbrot, B.B.* The fractal geometry of nature / B.B. Mandelbrot. — San Francisco : W.H. Freeman — 1982. — 468 p.
57. *Mishura, Y.S.* Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index H > 1/2 / Y.S. Mishura, G.M. Shevchenko // Communications in Statistics – Theory and Methods. — 2011. — Vol. 40, № 19–20. — P. 3492–3508.
58. *Mishura, Y.S.* Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes / Y.S. Mishura. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. — 398 p.
59. Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations / A. Neuenkirch [et al.] // Annales de I Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2009. — Vol. 45, № 1. — P. 157–174.
60. *Nualart, D.* Differential equations driven by fractial Brownian motion / D. Nualart, A. Răsçanu // Collectanea Mathematica. — 2002. — Vol. 53, № 1. — P. 55–81.
61. *Pazy, A.* Semigroups of linear operators and applications to Partial Differential Equations / A. Pazy. — New York : Springer-Verlag, 1983. — 282 p.
62. *Protter, P.* Stochastic integration and differential equations / P. Protter. — 2nd edition. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2004. — 415 p.
63. *Rogers, L.C.G.* Diffusions, Markov Processes, and Martingales: Volume 1, Foundations / L.C.G. Rogers, D. Williams. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000. — 410 p.
64. *Russo F.* Ito formula for C^1-functions of semimartingales / F. Russo, P.

Vallois // Probab. Theory Relat. Fields. — 1996. – Vol. 104, № 1. — P. 27–41.
65. *Russo F.* Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes / F. Russo, P. Vallois // Stochastics and Stochastic Reports. — 2000. – Vol. 70, № 1-2. — P. 1–40.
66. *Russo F.* The generalized covariation process and Ito formula / F. Russo, P. Vallois // Stochastic Processes and their Applications. — 1995. – Vol. 59, № 1. — P. 81–104.
67. *Shevchenko, G.M.* Mixed stochastic delay differential equations / G.M. Shevchenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2014. — № 89. – P. 181–195.
68. *Taniguchi, T.* Almost sure exponential stability for stochastic partial functional differential equations / T. Taniguchi // Stochastic Analysis and Appl. — 1998. — Vol. 16, № 5. — P. 965–975.
69. *Taniguchi, T.* Existence, uniqueness, and asymptotic behavior of mild solutions to stochastic functional differential equations in Hilbert spaces / T. Taniguchi, K. Liu, A. Truman // Journal of Differential Equations. — 2002. — Vol. 181, № 1. — P. 72–91.
70. *Vyoral, M.* Kolmogorov equation and large-time behaviour for fractional Brownian motion driven linear SDE's / M. Vyoral. // Applications of Mathematics. — 2005. — Vol. 50, № 1. — P. 63–81.
71. *Young, L.C.* An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration / L.C. Young // Acta Math. — 1936. — Vol. 67, № 1. — P. 251–282.
72. *Zähle, M.* Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I / M. Zähle // Probability Theory and Related Fields. — 1998. — Vol. 111, № 3. — P. 333–374.

Список публикаций соискателя

Статьи в научных журналах (зарубежных и из перечня ВАК)

1–A. *Васьковский, М.М.* Исследование устойчивости решений неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами с помощью метода функций Ляпунова / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный, И.В. Качан // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1 : физ., мат., информ. — 2015. — №3. — С. 117–125.

2–А. *Васьковский, М.М.* Устойчивость решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с локально липшициевыми коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 866–880.

3–А. *Качан, И.В.* Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер фіз.-мат. навук. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 193–209.

4–А. *Васьковский, М.М.* Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. — 2018. — Т. 62, № 4. — С. 398–405.

5–А. *Vaskouski, M.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 / M. Vaskouski, I. Kachan // Stochastic Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 36, № 6. — P. 909–931.

6–А. *Васьковский, М.М.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями / Васьковский М.М., Качан И.В. // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 135–151.

Отчеты о НИР

7–А. Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах : отчет о НИР (заключительный) / БГУ ; руководитель М.М.Васьковский, исполнители : Я.Б. Задворный, И.В. Качан. — Минск, 2016. — 122 с. — № ГР 20142883.

Статьи в сборниках трудов международных научных конференций

8–А. *Васьковский, М.М.* Аналог формулы Ито для стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие 1/3 / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем (ANM-2017) : материалы междунар. науч.-техн. конф., Пенза, Россия, 4-6 декабря 2017 г. / Изд-во ПГУ; редкол. : И.В. Бойков [и др.]. — Пенза 2017. — С. 12–16.

9–А. *Качан, И.В.* Непрерывная зависимость от начальных условий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан, М.М. Васьковский // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация : материалы Междунар. научн. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения академ. Е.А. Барбашина, Минск, 24-29 сентября 2018 г. / Белорус. гос. ун-т; редкол. : Ф.М. Кириллова [и др.]. — Минск, 2018. — С. 117–118.

Тезисы докладов международных научных конференций

10–А. *Васьковский, М.М.* Теорема об устойчивости по линейному приближению решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE-2015) : тез. докл. междунар. конф., Минск, 14-19 сентября 2015. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол. : С.В. Рогозин [и др.]. — Минск, 2015. — С. 24.

11–А. *Качан, И.В.* Экспоненциальная устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / И.В. Качан // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : тез. докл. междунар. конф., Минск, 7-10 декабря 2015 г. : в 2 ч. / Институт математики Нац. акад. наук Беларуси; редкол. : С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2015. — Ч. 1. — С. 34.

12–А. *Васьковский, М.М.* Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах / М.М. Васьковский, И.В. Качан // XII Белорусская математическая конференция: тез. докл. междунар. конф., Минск, 5-10 сентября 2016 г. : в 5 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол. : С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2016. — Ч. 2. — С. 14–15.

13–А. *Качан, И.В.* Существование решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные показатели Харста, большие 1/3 / И.В. Качан // Еругинские чтения-2017 : тез. докл. междунар. конф., Минск, 16-20 мая 2017 г.: в 2 ч. /

Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. — Минск, 2017. — Ч. 2. — С. 48–49.

14–А. *Васьковский, М.М.* Аналог уравнений Колмогорова для математических ожиданий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Еругинские чтения-2018 : тез. докл. междунар. конф., Гродно, 15-18 мая 2018 г. : в 2 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол. : А.К. Деменчук [и др.]. — Минск, 2018. — Ч. 2. — С. 85–86.

15–А. *Васьковский, М.М.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Еругинские чтения-2019 : тез. докл. междунар. конф., Могилев, 14-17 мая 2019 г.: в 2 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол. : А.К. Деменчук [и др.]. — Минск, 2019. — Ч. 2. — С. 66–67.