БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.911.5

КАЧАН
Илья Вадимович

Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Минск, 2019

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель — **Васьковский Максим Михайлович**,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики факультета
прикладной математики и информатики
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Егоров Александр Дмитриевич**,
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник отдела нелинейного
и стохастического анализа ГНУ «Институт
математики НАН Беларуси»;

Яблонский Олег Леонидович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры функционального анализа и
аналитической экономики
механико-математического факультета
Белорусского государственного университета.

Оппонирующая организация — Учреждение образования «Вильнюсский
университет».

Защита состоится декабря 2019 г. в .00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (юридический факультет), ауд . Телефон ученого секретаря: (+375-17) 209-53-68, e-mail: yauhen.radyna@gmail.com.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан ноября 2019 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д 02.01.07,
кандидат физико-математических наук,
доцент Е.М. Радыно

ВВЕДЕНИЕ

При статистическом анализе финансовых временных рядов давно было подмечено, что многие из них обладают свойствами статистического самоподобия (автомодельности), проявляющимися в том, что их части устроены так же, как и целое. В 1951 г. британский математик Г. Харст, изучая годичные уровни водности Нила, исследовал их размах $\mathcal{R}_n$ и среднеквадратичное отклонение $\mathcal{S}_n$ (n — количество наблюдений). Применяя методы $\mathcal{R}/\mathcal{S}$-анализа, им было установлено, что отношение $\mathcal{R}_n/\mathcal{S}_n$ эквивалентно cn^H, для некоторой константы c, где H — параметр, впоследствии получивший название показателя (или индекса) Харста. Позже, основываясь на работах Харста, Б. Мандельброт предложил как в рассматриваемой модели Харста, так и во многих других вероятностных моделях использовать дробное (фрактальное) броуновское движение, обладающее указанным свойством автомодельности. Свойством самоподобия обладают самые разнообразные системы с нелинейной динамикой, встречающиеся в природе, и именно оно играет центральную роль в теории фрактальной геометрии, разработанной Б. Мандельбротом (1982). В прикладной теории вероятностей дробное броуновское с показателем Харста H используется в качестве модели, дающей простой способ получения дробного (фрактального) шума. В свою очередь, дробный шум находит многочисленные применения в финансовой математике.

Стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями находят множество приложений, главным образом в физике и финансовой математике. М. Клепцына, А. Ле Бретон и М.-К. Рубо (2000) использовали модели с дробными броуновскими движениями для описания сигнальных процессов в фильтрационных системах. П. Черидито (2001) рассматривает модель Самуэльсона для движения цен на акции, используя дробные броуновские движения. М. Сале (1998) исследует стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями в контексте моделей облигаций и акций. Ряд других финансовых приложений также можно найти в монографии Ю.С. Мишуры (2008). Отметим, что дробное броуновское движение с индексом Харста $H = 1/2$, называемое стандартным, совпадает с винеровским процессом. Стохастические дифференциальные уравнения со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах могут быть применены для истолкования и обобщения многих классических задач математической физики, фильтрации, нейрофизиологии, генетики популяций и уже упомянутой финансовой математики. Для уравнений со стандартным броуновским движением также развиты численные методы построения приближенных решений[1].

В общем смысле под стохастическим дифференциальным уравнением понимают выражение следующего вида

$$dX(t,\omega) = f(t,\omega, X(t,\omega))dt + g(t, \omega, X(t, \omega))dB(t,\omega),$$

в котором $B(t, \omega)$ — стандартное или дробное броуновское движение. Формализм приведенной записи заключается в том, что ввиду недифференцируемости траекторий процесса $B(t)$, выражение $dB(t)$ лишено смысла. Однако, не разрывая связи с классической теорией дифференциальных уравнений, опираясь на интегральный критерий, уравнение понимают в интегральном смысле:

$$X(t,\omega) = X(s,\omega) + \int_s^t f(\tau,\omega, X(\tau,\omega))d\tau + \int_s^t g(\tau, \omega, X(\tau, \omega))dB(\tau,\omega),$$

где интеграл по $d\tau$ является интегралом Бохнера при каждом фиксированном ω, а способ определения интеграла по dB зависит от свойств процесса $B(t)$. Можно выделить три основных подхода к определению интерграла по дробному броуновскому движению: потраекторные интегралы (Янга (1936), Губинелли (2004)), стохастические интегралы (Ито (1944), Стратоновича[2], θ- и μ-интегралы[3]) для стандартного броуновского движения и интегралы Вика-Ито-Скорохода[4], основанные на дифференцировании процесса $B(t)$ в пространствах обобщенных функций специального вида.

Первый подход осуществляет построение детерминированной теории интегрирования, игнорирующей вероятностную структуру процесса $B(t,\omega)$. В данном случае наиболее естественно определять интеграл по $dB(t, \omega)$ как потраекторный предел интегральных сумм Римана-Стилтьеса при каждом фиксированном ω. Из работ Л. Янга (1936) и М. Сале (1998) следует, что такое определение корректно лишь в случае, когда показатель Харста H больше $1/2$.

[1] *Егоров, А.Д.* Об аппроксимации функциональных интегралов по мерам, порожденным решениями стохастических уравнений по мартингалам / А.Д. Егоров // Доклады АН БССР. — 1991. — Т. 35, № 1. — С. 32–35.

[2] *Оксендаль, Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. — М. : Мир, 000 «Издательство АСТ», 2003. — 408 с.

[3] *Лазакович, Н.В.* Предельное поведение итовских конечных сумм с осреднением / Н.В. Лазакович, О.Л. Яблонский // Теория вероятностей и ее применения. — 2005. — Т. 50, Вып. 4. — С. 711–732.

[4] Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications / F. Biagini [et al.]. — London : Springer-Verlag, 2008. — 330 p.

Для того, чтобы охватить случай $H \leq 1/2$, обеспечив потраекторную сходимость интегральных сумм Римана-Стилтьеса, оказывается необходимым привлечение дополнительных слагаемых в указанные суммы. Такая идея приводит нас к подходу, впервые примененному Т. Лайонсом (1998) и развившемуся в так называемую теорию грубых траекторий в 90-х гг. прошлого века. В настоящее время теория грубых траекторий и ее приложения к дробному броуновскому движению является молодой и активно развивающейся областью математики. Различным ее аспектам, в частности, посвящены работы М. Губинелли (2004, 2010), П. Фрица, Н. Виктуа (2010), А. Ноенкирха (2009), Ф. Бадуэна (2007), М. Хайрера (2014). Стоит отдельно отметить М. Хайрера, который впервые применил теорию грубых траекторий к исследованию стохастических дифференциальных уравнений в частных производных и разработал так называемую теорию регулярных структур. Данный результат получил высокую оценку математического сообщества и был удостоен Филдсовской премии в 2014 г.

Настоящая работа развивает указанную теорию в приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям с дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста, в частности, решая задачи, связанные с непрерывной зависимостью решений уравнений от начальных данных, получением асимптотических разложений функционалов от решений, а также уравнений Колмогорова для указанных функционалов.

Теория стохастических дифференциальных уравнений со стандартным броуновским движением, в том числе в бесконечномерных пространствах, является глубоко развитой, ей посвящены монографии И.И. Гихмана, А.В. Скорохода (1968, 1977), Б. Оксендаля (2003), А.А. Левакова, М.М. Васьковского (2009, 2019), Р. Хасьминского (2012), Дж. Да Прато (1992), Л. Гавarецкого, В. Мандрэкара (2011).

Наряду с уравнениями, содержащими исключительно дробные броуновские движения $B^{(H)}(t)$, и уравнениями, содержащими только стандартное броуновское движение $W(t)$, активно развивается теория для уравнений смешанного типа, в которой сочетаются теория интегрирования Ито для процессов $W(t)$ и теория потраекторного интегрирования Янга для процессов $B^{(H)}(t)$, $H > 1/2$. Впервые смешанные уравнения были рассмотрены К. Кубилюсом (2002), и далее получили свое развитие в работах Д. Нуаларта и Ж. Гуэрры (2008), Г. Шевченко и Ю. Мишуры (2011, 2014) и др. Интерес к подобного рода уравнениям вызван их многочисленными приложениями в финансовой сфере, где их использование позволяет получить более гибкие модели, позволяющие учитывать долговременную память исследуемых процессов.

В настоящей работе для уравнений смешанного типа получены методы точного интегрирования, основанные на приведении уравнений к простейшим уравнениям, линейным уравнениям, уравнению Стратоновича. Для уравнений со стандартным броуновским движением доказана теорема об устойчивости по линейному приближению уравнений в конечномерных гильбертовых пространств и теорема о притяжении решений уравнений в бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств к нулю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Исследования проводились в рамках следующих госбюджетных тем:

— Анализ структуры решений стохастических, дифференциальных и дифференциально-алгебраических систем (в рамках проекта «Асимптотические спектры дифференциальных систем», 2011 – 2015 гг., номер госрегистрации 20111922);

— Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах (2014 – 2016 гг., договор с БРФФИ № Ф14М-020, номер госрегистрации 20142883);

— Анализ асимптотических свойств решений дифференциальных и алгебраических систем (2016 – 2020 гг., номер госрегистрации 20162496).

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является доказательство теорем об устойчивости решений и получение асимптотических разложений для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми в теории стохастических дифференциальных уравнений.

Построена теория стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие $1/3$. Для нелинейных уравнений, со сносом и дробным броуновскими движениями с различными индексами Харста, большими $1/3$, получены следующие результаты:

– доказана формула замены переменных,

– доказана теорема о непрерывной зависимости в среднем от начальных условий и правых частей решений указанных уравнений,

– получены асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений указанных уравнений,

– получено обобщение обратного уравнения Колмогорова для математических ожиданий функционалов от решений указанных ураывнений в коммутативном случае.

В диссертации построены некоторые методы интегрирования уравнений смешанного типа, содержащих стандартное и дробное броуновское движение с индексом Харста, большим $1/2$.

Получены новые результаты об устойчивости нелинейных стохастических уравнений в гильбертовых пространствах. Для неавтономных нелинейных уравнений с разрывными коэффициентами в конечномерных пространствах доказана теорема об асимптотической устойчивости по вероятности слабого нулевого решения по линейному приближению. Для нелинейных стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица, доказана теорема о притяжении слабых решений к нулю.

Положения, выносимые на защиту

Теорема о непрерывной зависимости от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста.

Формула замены переменных и асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста.

Методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа.

Теорема об асимптотической устойчивости системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито с разрывными коэффициентами по нестационарному линейному приближению. Достаточные условия притяжения к нулю слабых решений нелинейного стохастического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве с нелипшициевыми коэффициентами.

Личный вклад соискателя ученой степени

Результаты, включенные в диссертацию и выносимые на защиту, получены лично автором диссертации. Научному руководителю принадлежат постановка задачи, выбор методов исследования и обсуждение результатов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты работы докладывались и обсуждались на 8-м международном научном семинаре (воркшопе) «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (АМАДЕ–2015) (Минск, 2015), на шестых Богдановских чтениях по обыкновенным дифференциальным уравнениям (Минск, 2015), на XII Белорусской математической конференции (Минск, 2016), на XII международной научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (Пенза, Россия, 2017), на XVII, XVIII, XIX международных научных конференциях по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2017», «Еругинские чтения– 2018», «Еругинские чтения–2019» (Минск, 2017; Гродно, 2018; Могилев 2019, соответственно), на международной научной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», посвященной 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина (Минск, 2018), на 74-й и 75-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 2017, 2018). Результаты, включенные в диссертацию, отмечены дипломами 1-й категории Республиканского конкурса научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь (2017, 2018), а также третьей премией Специального фонда Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных учащихся и студентов (2019).

Опубликование результатов диссертации

По теме диссертационного исследования опубликовано в 15 научных работ, в том числе: 6 статей в научных журналах в соответствии с пунктом

18 Положения ВАК о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 6.9 авторских листов), среди которых 2 статьи в зарубежных журналах, входящих в наукометрические базы данных Scopus и Web of Science, 1 отчет о НИР, 2 статьи в сборниках трудов международных научных конференций, 5 тезисов докладов международных научных конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, основной части, включающей 5 глав, заключения и библиографического списка.

Объем диссертации — 124 страниц, библиографический список содержит 88 источников, включая собственные публикации автора, на 9 страницах.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В первой главе приводится обзор литературных источников по теме диссертации.

Во второй и третьей главе диссертации исследуются стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие 1/3.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, на котором определены независимые одномерные дробные броуновские движения $B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)}$ с индексами Харста $H_1, \ldots, H_d \in (1/3{,}1)$. Введем обозначение $B_t = (B_t^{(0)}, \ldots, B_t^{(d)})^\top$ для $(d+1)$-мерного дробного броуновского движения, в котором $B_t^{(0)} = t$. Пусть также $H_0 = 1$. Пусть $H_{\min}$ — значение наименьшего из индексов Харста H_i, $i = 0, \ldots, d$. Выберем и зафиксируем некоторое $H \in (1/3, 1/2]$ такое, что $H < H_{\min}$.

Объектом изучения второй главы является следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = f(X_t)dB_t,\ t \in [0{,}T], \tag{1}$$

в котором f — $(n \times (d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0, \ldots, d$. Через X_t^x будем обозначать решение уравнения (1) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$.

Для определение решения уравнения (1) потребуются некоторые понятия теории грубых траекторий[5]. Будем обозначать через U, V, W конечномерные банаховы пространства над полем $\mathbb{R}$. Множество функций, непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0,1]$, будем обозначать следующим образом:

$$C^\alpha([0,T],W) = \left\{ Z\colon [0,T] \to W \;\middle|\; \|Z\|_\alpha = \sup_{s,t\in[0,T]:s\neq t} \frac{|Z_t - Z_s|_W}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\}.$$

Через $C_2^\alpha([0,T]^2,U)$ будем обозначать множество функций двух переменных $R(s,t) = R_{s,t}$, для каждой из которых существует константа C такая, что $|R_{s,t}| \le C|t-s|^\alpha$ для всех $(s,t) \in [0,T]^2$. Наименьшую такую константу для функции R будем обозначать следующим образом:

$$\|R\|_\alpha = \sup_{s,t\in[0,T]:s\neq t} \frac{|R_{s,t}|_U}{|t-s|^\alpha}.$$

Отметим также, что если $Z \in C^\alpha([0,T],W)$ — непрерывная по Гельдеру функция одной переменной, то ее приращения $(s,t) \mapsto Z_t - Z_s$ принадлежат множеству $C_2^\alpha([0,T]^2,W)$. Поэтому обозначение $Z_{s,t} = Z_t - Z_s$ будет также использоваться для приращений функции одной переменной Z, определенной на $[0,T]$.

Пусть далее $\alpha \in (1/3,1/2]$.

Говорят, что для функции $Z\colon [0,T] \to W$ функция $\mathbb{Z}\colon [0,T]^2 \to W \otimes W$ является процессом второго порядка над Z, если она удовлетворяет следующему тождеству Чена:

$$\mathbb{Z}_{s,t} - \mathbb{Z}_{s,u} - \mathbb{Z}_{u,t} = Z_{s,u} \otimes Z_{u,t}$$

для любой тройки $(s,u,t) \in [0,T]^3$.

Под множеством α-непрерывных по Гельдеру грубых траекторий над W (обозначаемым $\mathscr{C}^\alpha([0,T],W)$) понимают множество всех пар $(Z,\mathbb{Z})$ таких, что функция $Z \in C^\alpha([0,T],W)$ и $\mathbb{Z}$ является процессом второго порядка над Z, удовлетворяющим условию $\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha} < \infty$.

Говорят, что функция $Y \in C^\alpha([0,T],\mathcal{L}(W,V))$ управляется функцией $Z \in$ $\in C^\alpha([0,T],W)$, если существует $Y' \in C^\alpha\big([0,T],\mathcal{L}(W,\mathcal{L}(W,V))\big)$ (называемое производной Губинелли Y), такое, что остаток $R^Y_{s,t} = Y_{s,t} - Y'_s Z_{s,t}$ удовлетворяет неравенству $\|R^Y\|_{2\alpha} < +\infty$. Множество всех (Y,Y') таких, что Y управляется Z, будем обозначать $\mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(W,V))$.

[5] *Friz, P.* A Course on Rough Paths with an introduction to regularity structures / P. Friz, M. Hairer. — Cham : Springer International Publishing AG, 2014. — 262 p.

Пусть $(Z,\mathbb{Z}) \in \mathscr{C}^{\alpha}([0,T],W)$, а также $(Y,Y') \in \mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(W,V))$. Потраекторным интегралом Губинелли Y по Z называют предел интегральных сумм

$$\int_0^T Y_t\,dZ_t = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\mathcal{P}} (Y_{t_i} Z_{t_i,t_{i+1}} + Y'_{t_i}\mathbb{Z}_{t_i,t_{i+1}}),$$

где $|\mathcal{P}| = \max|t_{i+1}-t_i|$ — диаметр разбиения $\mathcal{P} = \{0{=}t_0{<}t_1{<}\ldots{<}t_l{=}T\}$, а предел понимается не зависящим от последовательности разбиений $\mathcal{P}$. Интеграл по произвольному отрезку $[s,t] \subset [0,T]$ определяется равенством $\int_s^t Y_r\,dZ_r = \int_0^T Y_r \mathbf{1}_{[s,t]}(r)\,dZ_r$.

Приведем конструктивное определение процесса второго порядка над дробным броуновским движением B.

Определение 2.1. Процессом второго порядка над дробным броуновским движением B будем называть процесс $\mathbb{B}\colon [0,T]^2\times\Omega \to \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$, определенный следующими равенствами:

$$\mathbb{B}_{s,t} = \left(\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}\right)_{i,j=0}^{d},$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} \overset{L^2}{=} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\int_{\mathcal{P}} B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)}, \quad \int_{\mathcal{P}} B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)} = \sum_{t_k,t_{k+1}\in\mathcal{P}} B_{s,t_k}^{(i)} B_{t_k,t_{k+1}}^{(j)}, \quad 1\le i<j\le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)} = \int_s^t B_{s,r}^{(j)} dr \overset{\text{п.н.}}{=} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{t_k,t_{k+1}\in\mathcal{P}} B_{s,t_k}^{(j)}(t_{k+1}-t_k), \quad 1\le j\le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,i)} = \frac{1}{2}\left(B_{s,t}^{(i)}\right)^2, \quad 0\le i\le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} = -\mathbb{B}_{s,t}^{(j,i)} + B_{s,t}^{(i)} B_{s,t}^{(j)}, \quad 0\le j<i\le d$$

для любой пары $(s,t)\in[0,T]^2$, где $\mathcal{P} = \{s = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = t\}$ — произвольное разбиение отрезка $[s,t]$, $|\mathcal{P}| = \max|t_{k+1}-t_k|$, а все пределы понимаются не зависящими от последовательности разбиений $\mathcal{P}$. Здесь обозначения $\overset{L^2}{=}$, $\overset{\text{п.н.}}{=}$ применяются для того, чтобы показать, что соответствующие пределы понимаются в смысле $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ и $\mathbb{P}=1$ соответственно.

Определение 2.2. Случайный процесс X_t такой, что $(X,X') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0,T],\mathbb{R}^n)$ п.н., будем называть решением уравнения (1), если он п.н. удовлетворяет равенству

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)dB_s, \quad t\in[0,T],$$

где интеграл понимается как потраекторный интеграл Губинелли. Пусть $x \in \in \mathbb{R}^n$. Решение уравнения (1) с начальным условием $X_0 = x$ будем называть п.н. единственным, если для любого другого решения Y_t уравнения (1) с начальным условием $Y_0 = x$ выполняется равенство $\mathbb{P}(X_t = Y_t \ \forall t \in [0,T]) = 1$.

Через $C_b^k(V,U)$ будем обозначать пространство функций $\varphi\colon V \to U$, имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка k включительно с нормой $\|\varphi\|_{C_b^k} = \sum_{j=0}^k \|D^j\varphi\|_\infty$, где $\|D^j\varphi\|_\infty = \max_{x\in V} |D^j\varphi(x)|$. Следующая теорема дает достаточное условие существования и единственности решения уравнения (1).

Теорема 2.1. *Если $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, то для любого $x \in \mathbb{R}^n$ уравнение* (1) *имеет единственное решение с начальным условием $X_0 = x$, причем $X' = f(X)$, $(f(X),(f(X))') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0,T],\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$ п.н. Более того, если $H_i > H^* \geq 1/2$ для всех $i = 0,\ldots,d$, то справедливо включение $X \in C^{H^*}([0,T],\mathbb{R}^n)$ п.н. и интеграл в определении решения уравнения* (1) *является потраекторным интегралом Янга.*

Следующие две теоремы являются основными результатами второй главы.

Теорема 2.2. [5]. *Пусть $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g \in C_b^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Тогда для любых s, $t \in [0,T]$ п.н. справедлива следующая формула замены переменных:*

$$g(X_t) = g(X_s) + \int_s^t Dg(X_r)f(X_r)dB_r, \qquad s,t \in [0,T], \tag{2}$$

где X_t — решение уравнения (1).

Наряду с уравнением (1) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\widetilde{X}_t = \widetilde{f}(\widetilde{X}_t)dB_t, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

в котором $\widetilde{f}$ — $(n\times(d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $\widetilde{f}_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0,\ldots,d$.

Теорема 2.3. [3]. *Пусть $f,\widetilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$. Обозначим через X_t, $\widetilde{X}_t$ решения уравнений* (1), (3) *с начальными условиями $X_0 = \xi$, $\widetilde{X}_0 = \widetilde{\xi}$ соответственно. Тогда:*

1) *почти наверное справедлива следующая оценка*

$$\|X-\widetilde{X}\|_H \leq C\left(|\xi-\widetilde{\xi}| + \|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\right) \tag{4}$$

для некоторой случайной величины $C = C(H,T,\|f\|_{C_b^3},\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H})$. Причем C может быть выбрана не зависящей от T, если $T \in (0,1]$;

2) *имеет место следующее неравенство*

$$\mathbb{E}\big(\ln \|X - \widetilde{X}\|_H\big) \le C + \ln\big(\mathbb{E}|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\big), \tag{5}$$

где $C = C(H, H_1, \ldots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}) \in \mathbb{R}$ *— константа, вообще говоря, зависящая от* H, $H_1, \ldots, H_d$, T, $\|f\|_{C_b^3}$.

Третья глава диссертации посвящена исследованию асимптотических разложений математических ожиданий функционалов от решений уравнения (1).

Будем придерживаться следующих компактных записей:

$$\Delta^k[0,t] = \{(t_1, \ldots, t_k) \in [0,t]^k : \ 0 \le t_1 < \ldots < t_k \le t\} \tag{6}$$

$$\int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} = \int_0^t \int_0^{t_k} \ldots \int_0^{t_2} dB_{t_1}^{(i_1)} \ldots dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} dB_{t_k}^{(i_k)}, \tag{7}$$

$$I_k = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}_d^k := \{0, \ldots, d\}^k, \tag{8}$$

$$D_f^{(i)} = \sum_{j=1}^n f_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \ i \in \{0, \ldots, d\} \qquad D_f^{(I_k)} = D_f^{(i_1)} \ldots D_f^{(i_k)}, \tag{9}$$

$$\mathbf{P}_t g(x) = \mathbb{E}\, g(X_t^x), \quad t \ge 0. \tag{10}$$

Основной результат третьей главы представлен следующей теоремой.

Теорема 3.1. [4, 5]. *Пусть* $f \in C_b^{N+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g \in C_b^{N+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого фиксированного* $H \in (1/3, 1/2]$ *такого, что* $H < H_{min} = \min\limits_{i=0,\ldots d} H_i$ *справедливо следующее асимптотическое разложение:*

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \{0,\ldots,d\}^k} t^{|H_{I_k}|} \cdot (D_f^{(I_k)} g)(x)\, \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)}\right) + O(t^{(N+1)H}), \tag{11}$$

при $t \to 0$, *где* $|H_{I_k}| = H_{i_1} + H_{i_2} + \ldots + H_{i_k}$ *— сумма индексов Харста дробных броуновских движений* $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \ldots, B^{(i_k)}$.

Четвертая глава диссертации посвящена получению методов интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ заданы d-мерное стандартное броуновское движение $W(t)$ и d-мерное дробное броуновское движение $B(t)$ с показателем Харста $H \in (1/2,1)$.

Объектом изучения четвертой главны является стохастическое дифференциальное уравнение смешанного типа

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \ge 0, \tag{12}$$

где $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — детерминированные функции.

Определение 4.1. Под решением уравнения (12) понимаем процесс $x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, согласованный с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, порожденным процессами $W(t)$ и $B(t)$, такой, что выполняются условия:

1) существует $\alpha > 1 - H$ такое, что процесс $x(t)$ имеет п.н. непрерывные по Гельдеру с показателем α траектории;

2) для любого $t \in \mathbb{R}^+$ почти наверное выполняется равенство

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s,x(s))ds + \int_0^t g(s,x(s))dW(s) + \int_0^t \sigma(s,x(s))dB(s),$$

где интеграл по процессу $W(t)$ – стохастический интеграл Ито, а интеграл по процессу $B(t)$ – потраекторный интеграл Янга[6].

Будем рассматривать одномерное уравнение (12), считая, что $d = 1$. Вместе с ним рассмотрим простейшее уравнение

$$dy(t) = u(t)dt + v(t)dW(t) + b(t)dB(t), \quad t \geq 0. \tag{13}$$

Решение уравнения (13) выражается следующей формулой:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)dW(\tau) + \int_0^t b(\tau)dB(\tau), \quad t \geq 0.$$

Предположим, что существуют некоторые функции $r(t), q(t)$ такие, что

$$g(t,x)\left(\frac{g'_t(t,x)}{g^2(t,x)} + \left(\frac{f(t,x)}{g(t,x)}\right)'_x + \frac{1}{2}g''_{x^2}(t,x)\right) = r(t), \tag{14}$$

$$\frac{\sigma(t,x)}{g(t,x)} = q(t). \tag{15}$$

Теорема 4.1. [6]. *Уравнение* (12) *с функцией* $g(t,x) \neq 0$ *приводимо к уравнению* (13) *с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно* x *преобразования* $y = F(t,x)$ *тогда и только тогда, когда найдутся функции* $q(t), r(t)$ *такие, что оказываются выполненными соотношения* (14)*,* (15).

[6] *Guerra, J.* Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion / J. Guerra, D. Nualart // Stochastic Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 26, № 5. — P. 1053–1075.

Далее рассмотрим одномерное автономное уравнение

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{16}$$

и будем исследовать наличие автономной замены $y = F(x)$, приводящей указанное уравнение к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (\alpha_1 y(t) + \alpha_2)dt + (\beta_1 y(t) + \beta_2)dW(t) + (\gamma_1 y(t) + \gamma_2)dB(t), t \geq 0 \tag{17}$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

Предположим, что существуют некоторые постоянные $c_1,c_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}, \tag{18}$$

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = c_1, \tag{19}$$

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = c_2, \tag{20}$$

Теорема 4.2. [6]. *Уравнение* (16) *с функциями* $g(x) \neq 0$, $A'(x) \neq 0$ *приводимо к уравнению* (17) *тогда и только тогда, когда найдутся постоянные* c_1, c_2 *такие, что оказываются выполненными соотношения* (18), (19), (20).

Вернемся к уравнению (12) в пространстве $\mathbb{R}^d$ и вместе с ним рассмотрим соответствующее уравнение Стратоновича

$$dx(t) = (f(t,x(t)) - c(t,x(t)))dt + g(t, x(t)) \circ dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{21}$$

в котором $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $c\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ и

$$c_i(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial g_{ij}(t,x)}{\partial x_k} g_{kj}(t,x), \quad i = 1, \ldots, d.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. [6]. *Процесс* $x(t)$ *является решением уравнения* (12) *тогда и только тогда, когда процесс* $x(t)$ *является решением уравнения Стратоновича* (21).

Глава 5 посвящена исследованию устойчивости и притяжения решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах.

В первой части главы 5 рассматриваются стохастические дифференциальные уравнения в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \tag{22}$$

где $W(t)$ — стандартное d-мерное броуновское движение, $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — измеримые по Борелю функции такие, что $f(t, 0) = 0$ и $g(t, 0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$ и выполнено условие линейного порядка роста по x, то есть существует постоянная C такая, что для любых $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$, выполняется неравенство $|f(t, x)| + |g(t, x)| \le C(1 + |x|)$.

Пусть $\sigma(t,x) = g(t,x)g(t,x)^\top$. Для каждого $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ построим наименьшие выпуклые замкнутые множества $A(t,x)$, $F(t,x)$, содержащими соответственно матрицу $\sigma(t, x)$ и вектор $f(t,x)$ и все предельные точки $\sigma(t,x')$ и $f(t, x')$ при $x' \to x$. Будем использовать обозначение $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ для пространства непрерывных функций $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^d$, а символ $\mathcal{B}$ — для борелевской σ-алгебры.

Определение 5.1. Если:

1) существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с потоком $\mathcal{F}_t$ и отображение $X\colon \Omega \to C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ такие, что функция $(t, \omega) \to X(t, \omega) \in \mathbb{R}^d$ — $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-измерима и $\mathcal{F}_t$-согласована;

2) существует $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$, $W(0) = 0$ п.н.;

3) существуют измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы $v\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ и $u\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$, удовлетворяющие для $(\mu \times \mathbb{P})$-почти всех $(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ включениям

$$v(t) \in F(t, X(t, \omega)), \quad u(t)u^\top(t) \in A(t, X(t, \omega)),$$

и такие, что для любого $T \in \mathbb{R}^+$ п.н. выполняется следующее неравенство: $\int_0^T (|v(s)| + |u(s)|^2)ds < \infty$;

4) с вероятностью 1 для всех $t \in \mathbb{R}^+$ выполняется равенство

$$X(t) = X(0) + \int_0^t v(\tau)d\tau + \int_0^t u(\tau)dW(\tau),$$

то набор $(X, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, W(t), v(t), u(t))$ (или короче X) называем β-слабым решением уравнения (22).

Определение 5.2. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (22) устойчиво по вероятности, если для любых ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого β-слабого решения $X(t)$ уравнения (22), удовлетворяющего условию $|X(0)| \leq \delta$ п.н., выполняется неравенство $\mathbb{P}\left(\sup_{t\geq 0}|X(t)| > \varepsilon_1\right) < \varepsilon_2$.

Определение 5.3. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (22) асимптотически устойчиво по вероятности, если нулевое решение уравнения (22) устойчиво по вероятности и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого β-слабого решения $X(t)$ уравнения (22), удовлетворяющего условию $|X(0)| \leq \delta$ п.н., выполняется неравенство $\mathbb{P}\left(\lim_{t\to\infty} X(t) = 0\right) \geq 1 - \varepsilon$.

Исследуем устойчивость β-слабого нулевого решения стохастического дифференциального уравнения с выделенной линейной частью вида

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t)))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0. \tag{23}$$

Здесь $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — кусочно непрерывная функция, $\sup_{t\geq 0}|A(t)| \leq M$, а функции f и g удовлетворяют условиям для уравнения (22).

Наряду с уравнением (23) рассмотрим линейное однородное детерминированное уравнение

$$dX(t) = A(t)X(t)dt, \quad t \geq 0, \tag{24}$$

Через $X^{(s,x)}(t)$ будем обозначать (единственное) решение уравнения (24), удовлетворяющее равенству $X^{(s,x)}(s) = x$.

Определение 5.4. Будем говорить, что уравнение (24) имеет *равномерно экспоненциально устойчивое* нулевое решение, если существуют константы $\Lambda, \lambda > 0$, не зависящие от s, x, такие, что для любых $s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$ и $t \geq s$ выполняется неравенство

$$|X^{(s,x)}(t)|^2 \leq \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)}.$$

Теорема 5.3. [1]. *Предположим, что функции $f(t,x)$ и $g(t,x)$ таковы, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что выполняются неравенства*

$$|f(t,x)| \leq \varepsilon|x|, \qquad |g(t,x)| \leq \varepsilon|x|, \tag{25}$$

для любых x, $|x| \leq \delta_\varepsilon, t \in \mathbb{R}^+$, а система (24) *имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда система* (23) *имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.*

Пусть H и K — сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathfrak{L}_2(K,H)$ — пространство операторов Гильберта-Шмидта, действующих из K в H, Q —

ядерный симметрический положительно определенный оператор на пространстве K, $W(t,\omega)$ — Q-броуновское движение со значениями в K и ковариационным оператором Q. Во второй части главы 5 рассматриваются эволюционные функциональные уравнения в пространстве H следующего вида:

$$dX(t,\omega) = AX(t,\omega)dt + f(t, X(t,\omega))dt + g(t, X(t,\omega))dW(t,\omega), \quad (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{26}$$

относительно $X \in H$ с начальным условием

$$X(0,\omega) = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \tag{27}$$

где $f\colon \mathbb{R}^+ \times H \to H$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times H \to \mathfrak{L}_2(K,H)$ — измеримые, непрерывные по X (при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$) функции, A — линейный оператор, определенный на всюду плотном в H множестве $\mathcal{D}(A)$ и порождающий C_0-полугруппу $S(t)$ на H, $\xi : \Omega \to \mathcal{D}(A)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина, имеющая конечный момент $\mathbb{E}\,\|\xi\|^p < \infty$ порядка $p > 2$. В дальнейшем для сокращения обозначений аргумент ω будем опускать. Все интегралы ниже записаны в предположении их существования и конечности.

Относительно функций $f(t,X)$ и $g(t,X)$ будем предполагать, что выполнены два условия:

1. *Локальное условие Липшица.* Для любого $a > 0$ существует постоянная q_a такая, что для всех $t \in [0,a]$ и любых $\varphi,\psi \in H$, таких, что $\|\varphi\| \le a$, $\|\psi\| \le a$, выполняются неравенства
$$\|f(t,\varphi) - f(t,\psi)\| \le q_a\|\varphi - \psi\|, \quad \|g(t,\varphi) - g(t,\psi)\| \le q_a\|\varphi - \psi\|.$$
2. *Условие линейного порядка роста.* Существует непрерывная функция $k\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}^+$ и любого $\eta \in H$ выполняются неравенства
$$\|f(t,\eta)\| \le k(t)(1 + \|\eta\|), \quad \|g(t,\eta)\| \le k(t)(1 + \|\eta\|).$$

Определение 5.5. Случайный процесс $X(t), t \ge 0$ называют слабым решением уравнения (26) с начальным условием (27), если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Процесс $X(t), t \ge 0$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным.
2. Процесс $X(t), t \ge 0$ п.н. непрерывен по t.
3. $X(t) = S(t)\xi + \int_0^t S(t-s)f(s,X(s))ds + \int_0^t S(t-s)g(s,X(s))dW(s)$, $t \ge 0$.

О п р е д е л е н и е 5.8. Пусть положительная функция $\lambda(t)$ определена для достаточно больших $t > 0$, скажем, $t \geq T > 0$. Предположим, что

1. $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty$.
2. $\ln \lambda(t)$ равномерно непрерывна по $t \geq T$.
3. Существует константа $\tau \geq 0$ такая, что $\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\ln \ln t}{\ln \lambda(t)} \leq \tau$.

Будем говорить, что слабое решение задачи (26), (27) притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$, если найдется $\gamma > 0$ такое, что п.н. выполняется неравенство

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\ln \|X(t)\|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma.$$

Рассмотрим функционал $V(t,x)$ класса $C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$, т.е. принимающий значения в $\mathbb{R}^+$ и имеющий непрерывные производные по Фреше по переменной $t \in \mathbb{R}^+$ — до первого порядка, по переменной $x \in H$ — до второго порядка (включительно). Введем операторы L, B, действующие на V следующим образом:

$$LV(t,x) = V_t'(t,x) + \langle V_x'(t,x), Ax + f(t,x)\rangle_H +$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q^{1/2})(g(t,x)Q^{1/2})^\star], \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A), \tag{28}$$
$$BV(t,x) = \mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x) \otimes V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q^{1/2})(g(t,x)Q^{1/2})^\star],$$
$$(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times H. \tag{29}$$

Теорема 5.4. [2]. *Пусть задан функционал $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$ и две неотрицательные непрерывные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$. Предположим, что существуют постоянные $r > 0$, $m \geq 0$, постоянные $\mu,\nu,\theta \in \mathbb{R}$ и невозрастающая положительная функция $\zeta(t)$ такие, что $\frac{m-(\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r} > 0$ и выполнены следующие условия:*

1. $\|x\|^r (\lambda(t))^m \leq V(t,x)$ для всех $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times H$.
2. $LV(t,x) + \zeta(t) BV(t,x) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t) V(t,x)$ для всех $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A)$.
3. $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup \frac{\ln\left(\int_0^t \psi_1(s)\,ds\right)}{\ln \lambda(t)} \leq \nu, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} \sup \frac{\int_0^t \psi_2(s)\,ds}{\ln \lambda(t)} \leq \theta, \quad \lim\limits_{t\to+\infty} \inf \frac{\ln \zeta(t)}{\ln \lambda(t)} \geq -\mu$.

Тогда слабое решение задачи (26), (27) *притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Данная работа посвящена исследованию асимптотического поведения решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновским движениями в конечномерных, а также сепарабельных гильбертовых пространствах и получены следующие основные результаты:

1. Доказана теорема о непрерывной зависимости в среднем от начальных условий и правых частей решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста, большими $1/3$, и сносом. Указанный результат был получен в работе [3] и изложен в главе 2.
2. Доказана теорема об асимптотических разложениях в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста, большими $1/3$, и сносом. Получено уравнение, обобщающее обратное уравнение Колмогорова для решений указанных уравнений в коммутативном случае. Приведенные результаты, а также другие связанные с ними результаты, изложенные в главе 3, были получены в работах [4], [5].
3. Получены методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа с дробным броуновским движениям с показателем Харста, большим $1/2$, стандартным броуновским движением и сносом, основанные на приведении данных уравнений к простейшим уравнениям, линейным неоднородным уравнениям или к уравнениям Стратоновича. Указанные результаты были получены в работе [6] и изложены в главе 4.
4. Доказана теорема об устойчивости по линейному приближению, дающая достаточное условие асимптотической устойчивости по вероятности слабого нулевого решения неавтономной системы стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами и стандартными броуновскими движениями, исходя из равномерной экспонен-

циальной устойчивости слабого нулевого решения соответствующей однородной системы. Указанный результат был получен в работе [1] и изложен в главе 5.

5. Доказана теорема о притяжении к нулю слабых решений нелинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица. Данный результат был получен в работе [2] и изложен в главе 5.

Рекомендации по практическому использованию результатов

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы при проведении исследований по теории устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах и общей теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями в научных коллективах, занимающихся исследованием дифференциальных уравнений, в институтах математики НАН РБ, Белорусском государственном университете, а также при чтении спецкурсов.

Список публикаций соискателя

Статьи в научных журналах (зарубежных и из перечня ВАК)

1. *Васьковский, М.М.* Исследование устойчивости решений неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами с помощью метода функций Ляпунова / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный, И.В. Качан // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1 : физ., мат., информ. — 2015. — №3. — С. 117–125.
2. *Васьковский, М.М.* Устойчивость решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с локально липшициевыми коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 866–880.
3. *Качан, И.В.* Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер фіз.-мат. навук. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 193–209.
4. *Васьковский, М.М.* Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. — 2018. — Т. 62, № 4. — С. 398–405.
5. *Vaskouski, M.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 / M. Vaskouski, I. Kachan // Stochastic Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 36, № 6. — P. 909–931.
6. *Васьковский, М.М.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями / Васьковский М.М., Качан И.В. // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 135–151.

Отчеты о НИР

7. Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах : отчет о НИР (заключительный) / БГУ ; руководитель М.М.Васьковский,

исполнители : Я.Б. Задворный, И.В. Качан. — Минск, 2016. — 122 с. — № ГР 20142883.

Статьи в сборниках трудов международных научных конференций

8. *Васьковский, М.М.* Аналог формулы Ито для стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие 1/3 / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем (ANM-2017) : материалы междунар. науч.-техн. конф., Пенза, Россия, 4-6 декабря 2017 г. / Изд-во ПГУ; редкол. : И.В. Бойков [и др.]. — Пенза 2017. — С. 12–16.
9. *Качан, И.В.* Непрерывная зависимость от начальных условий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан, М.М. Васьковский // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация : материалы Междунар. научн. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения академ. Е.А. Барбашина, Минск, 24-29 сентября 2018 г. / Белорус. гос. ун-т; редкол. : Ф.М. Кириллова [и др.]. — Минск, 2018. — С. 117–118.

Тезисы докладов международных научных конференций

10. *Васьковский, М.М.* Теорема об устойчивости по линейному приближению решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (AMADE-2015) : тез. докл. междунар. конф., Минск, 14-19 сентября 2015. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол. : С.В. Рогозин [и др.]. — Минск, 2015. — С. 24.
11. *Качан, И.В.* Экспоненциальная устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / И.В. Качан // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : тез. докл. междунар. конф., Минск, 7-10 декабря 2015 г. : в 2 ч. / Институт математики Нац. акад. наук Беларуси; редкол. : С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2015. — Ч. 1. — С. 34.
12. *Васьковский, М.М.* Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах / М.М. Васьковский, И.В. Качан // XII Белорусская математическая конференция: тез. докл.

междунар. конф., Минск, 5-10 сентября 2016 г. : в 5 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол. : С.Г. Красовский [и др.]. — Минск, 2016. — Ч. 2. — С. 14–15.

13. *Качан, И.В.* Существование решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные показатели Харста, большие 1/3 / И.В. Качан // Еругинские чтения-2017 : тез. докл. междунар. конф., Минск, 16-20 мая 2017 г.: в 2 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. — Минск, 2017. — Ч. 2. — С. 48–49.
14. *Васьковский, М.М.* Аналог уравнений Колмогорова для математических ожиданий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Еругинские чтения-2018 : тез. докл. междунар. конф., Гродно, 15-18 мая 2018 г. : в 2 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол. : А.К. Деменчук [и др.]. — Минск, 2018. — Ч. 2. — С. 85–86.
15. *Васьковский, М.М.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Еругинские чтения-2019 : тез. докл. междунар. конф., Могилев, 14-17 мая 2019 г.: в 2 ч. / Ин-т мат. Нац. акад. наук Беларуси; редкол. : А.К. Деменчук [и др.]. — Минск, 2019. — Ч. 2. — С. 66–67.

РЕЗЮМЕ

Качан Илья Вадимович

Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста

Ключевые слова. Стохастическое дифференциальное уравнение, дробное броуновское движение, потраекторный интеграл Губинелли, асимптотическое разложение, формула Ито, непрерывная зависимость от начальных данных, методы интегрирования, асимптотическая устойчивость, притяжение к нулю.

Цель работы. Исследование общих и асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста.

Методы исследования. Методы теории дифференциальных уравнений, теории случайных процессов и функционального анализа.

Полученные результаты и их новизна. Для стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные показатели Харста, большие 1/3, получена формула замены переменных, доказана теорема о непрерывной зависимости решений от начальных данных, получены асимптотические разложения математических ожиданий функционалов от решений. Для стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа получены новые методы точного интегрирования. Для стохастических дифференциальных уравнений со стандартным броуновским движением доказана теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения нелинейного уравнения в пространстве $\mathbb{R}^d$ по линейному приближению, доказана теорема о притяжении к нулю слабых решений нелинейного уравнения в сепарабельном гильбертовом пространстве. Все результаты диссертации являются новыми.

Рекомендации по использованию. Результаты исследования носят теоретический характер и могут быть использованы при проведении исследований по теории устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах и общей теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями.

Область применения. Результаты исследования могут быть применены в теории дифференциальных уравнений, а также в математическом моделировании случайных процессов.

РЭЗЮМЭ

Качан Ілья Вадзімавіч

Уласцівасці рашэнняў стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў, якія кіруюцца шматмернымі дробавымі броўнаўскімі рухамі с рознымі паказчыкамі Харста

Ключавыя словы. Стахастычнае дыферэнцыяльнае раўнанне, дробавы броўнаўскі рух, патраекторны інтэграл Губінэллі, асімптатычнае раскладанне, формула Іта, непарыўная залежнасць ад пачатковых дадзеных, метады інтэгравання, асімптатычная ўстойлівасць, прыцягненне да нуля.

Мэта работы. Даследаванне агульных і асімптатычных уласцівасцяў рашэнняў стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў, якія кіруюцца шматмернымі дробавымі броўнаўскімі рухамі з рознымі паказчыкамі Харста.

Метады даследавання. Метады тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, тэорыі выпадковых працэсаў і функцыянальнага аналізу.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Для стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў з дробавымі броўнаўскімі рухамі, якія маюць розныя паказчыкі Харста, большыя за 1/3, атрымана формула замены зменных, даказана тэарэма аб непарыўнай залежнасці рашэнняў ад пачатковых дадзеных, атрыманы асімптатычныя раскладанні матэматычных чаканняў функцыяналаў ад рашэнняў. Для стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў змешанага тыпу атрыманы новыя метады дакладнага інтэгравання. Для стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў са стандартным броўнаўскім рухам даказана тэарэма аб асімптатычнай устойлівасці нулявога рашэння нелінейнага ўраўнення ў прасторы $\mathbb{R}^d$ па лінейным набліжэнні, даказана тэарэма аб прыцягненні да нуля слабых рашэнняў нелінейнага ўраўнення ў сепарабельнай гільбертавай прасторы. Усе вынікі дысертацыі з'яўляюцца новымі.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Вынікі даследавання носяць тэарэтычны характар і могуць быць выкарыстаны пры правядзенні даследаванняў па тэорыі ўстойлівасці стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў у гільбертавых прасторах і агульнай тэорыі стахастычных дыферэнцыяльных раўнанняў з дробавымі броўнаўскімі рухамі.

Галіна прымянення. Вынікі даследавання могуць быць ужыты ў тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў, а таксама ў матэматычным мадэляванні выпадковых працэсаў.

SUMMARY

Kachan Ilya Vadimovich

The properties of the solutions of the stochastic differential equations controlled by multidimensional fractional Brownian motions with different Hurst exponents

Key words. Stochastic differential equation, fractional Brownian motion, Gubinelli piecewise integral, asymptotic expansio, Ito formula, continuous dependence on the initial data, integration methods, asymptotic stability, attraction to zero.

The purpose of the research. Investigation of the general and asymptotic properties of the solutions of the stochastic differential equations controlled by multidimensional fractional Brownian motions with different Hurst exponents.

Methods of the research. Methods of the theory of differential equations, theory of random processes and functional analysis.

The obtained results and their novelty. For the stochastic differential equations with fractional Brownian motions having different Hurst exponents greater than 1/3, a change of variables formula variables has been obtained, a theorem on the continuous dependence of the solutions on the initial data has been proved, asymptotic expansions of the mathematical expectations of functionals on the solutions have been obtained. For stochastic differential equations of mixed type, new methods of exact integration have been obtained. For stochastic differential equations with standard Brownian motion, a theorem on the asymptotic stability of the zero solution of the nonlinear equation in the space $\mathbb{R}^d$ in a linear approximation has been proved, and a theorem on the attraction to zero of weak solutions of the nonlinear equation in a separable Hilbert space has been proved. All the results of the thesis are new.

Recommendations for use. The results of the study are theoretical in nature and can be used in research on the theory of stability of stochastic differential equations in Hilbert spaces and the general theory of stochastic differential equations with fractional Brownian motions.

Field of applications. The research results can be applied in the theory of differential equations, as well as in mathematical modeling of random processes.