

**Доклад И.В. Качана на защите диссертации "Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста"**

В общем смысле под стохастическим дифференциальным уравнением понимают выражение следующего вида

$$dX(t, \omega) = f(t, \omega, X(t, \omega))dt + g(t, \omega, X(t, \omega))dB(t, \omega),$$

в котором  $B(t, \omega)$  — стандартное или дробное броуновское движение. Формализм приведенной записи заключается в том, что ввиду недифференцируемости траекторий процесса  $B(t)$ , выражение  $dB(t)$  лишено смысла. Однако, не разрывая связи с классической теорией дифференциальных уравнений, опираясь на интегральный критерий, уравнение понимают в интегральном смысле:

$$X(t, \omega) = X(s, \omega) + \int_s^t f(\tau, \omega, X(\tau, \omega))d\tau + \int_s^t g(\tau, \omega, X(\tau, \omega))dB(\tau, \omega),$$

где интеграл по  $d\tau$  является интегралом Бохнера при каждом фиксированном  $\omega$ , а способ определения интеграла по  $dB$  зависит от свойств процесса  $B(t)$ . Можно выделить три основных подхода к определению интегралов по дробному броуновскому движению: потракторные интегралы (Янга, Губинелли), стохастические интегралы (Ито, Стратоновича,  $\theta$ - и  $\mu$ -интегралы) для стандартного броуновского движения и интегралы Вика-Ито-Скоророда, основанные на дифференцировании процесса  $B(t)$  в пространствах обобщенных функций специального вида.

В настоящей работе исследуются уравнения, содержащие дробные броуновские движения с различными индексами Харста и снос. Для определения интегралов по дробным броуновским движениям с показателями Харста  $H$ , большими  $1/3$ , но меньшими  $1/2$ , будет использован подход Губинелли, для  $H$ , больших  $1/2$  — подход Янга, а для  $H$ , равных  $1/2$  (соответствующих стандартным броуновским движениям) — подходы Ито и Стратоновича.

Стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями находят множество приложений, главным образом в физике и финансовой математике. М. Клепцына, А. Ле Бретон и М.-К. Рубо (2000) использовали модели с дробными броуновскими движениями для описания сигнальных процессов в фильтрационных системах. П. Черидито (2001) рассматривает модель Самуэльсона для движения цен на акции, используя дробные броуновские движения. М. Сале (1998) исследует стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями в контексте моделей облигаций и акций. Ряд других финансовых приложений также можно найти в монографии Ю.С. Мишуры (2008). Отметим, что дробное броуновское движение с индексом Харста  $H = 1/2$ , называемое стандартным, совпадает с винеровским процессом. Стохастические дифференциальные уравнения со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах могут быть применены для истолкования и обобщения многих классических задач математической физики, фильтрации, нейрофизиологии, генетики популяций и уже упомянутой финансовой математики. Для уравнений со стандартным броуновским движением также развиты численные методы построения приближенных решений<sup>1</sup>.

Настоящая работа ставит своей целью исследование общих и асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста.

<sup>1</sup>Егоров, А.Д. Об аппроксимации функциональных интегралов по мерам, порожденным решениями стохастических уравнений по мартингалам / А.Д. Егоров // Доклады АН БССР. — 1991. — Т. 35, № 1. — С. 32–35.

В первой главе диссертации приведен аналитический обзор литературы по теме исследования.

Во второй и третьей главе диссертации исследуются стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие  $1/3$ . Рассматриваемые уравнения охватывают класс уравнений, содержащих дробное и стандартное броуновские движения, а также снос.

Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , на котором определены независимые одномерные дробные броуновские движения  $B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)}$  с индексами Харста  $H_1, \dots, H_d \in (1/3, 1)$ . Введем обозначение  $B_t = (B_t^{(0)}, \dots, B_t^{(d)})^\top$  для  $(d+1)$ -мерного дробного броуновского движения, в котором  $B_t^{(0)} = t$ . Пусть также  $H_0 = 1$ . Пусть  $H_{\min}$  — значение наименьшего из индексов Харста  $H_i$ ,  $i = 0, \dots, d$ . Выберем и зафиксируем некоторое  $H \in (1/3, 1/2]$  такое, что  $H < H_{\min}$ .

Объектом изучения второй главы является следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = f(X_t)dB_t, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

в котором  $f$  —  $(n \times (d+1))$ -матрица, столбцами которой являются векторы  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, \dots, d$ . Через  $X_t^x$  будем обозначать решение уравнения (1) с начальным условием  $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$ . Решение понимается в интегральном смысле, а интеграл по  $dB_t$  определяется как потраекторный интеграл Губинелли в рамках теории грубых траекторий. Данная теория была разработана Т. Лайонсом (1998), развита М. Губинелли (2004), П. Фрицем и М. Хайрером (2014) и является основным инструментом исследования уравнений с дробными броуновскими движениями с показателями Харста  $H$ , меньшими  $1/2$ . Стоит отдельно отметить М. Хайрера, который впервые применил теорию грубых траекторий к исследованию стохастических дифференциальных уравнений в частных производных и разработал так называемую теорию регулярных структур. Данный результат получил высокую оценку математического сообщества и был удостоен Филдсовской премии в 2014 г.

Заметим, что уравнение (1) охватывает важный частный случай, когда все индексы Харста  $H_i$  либо равны  $1/2$ , либо равны некоторому  $H > 1/2$  (то есть в уравнение входят только стандартные броуновские движения  $W_t$  и дробные броуновские движения  $B_t^{(H)}$  с одним и тем же индексом Харста  $H > 1/2$ ). В данном случае мы приходим к уравнению Стратоновича, сводимое к уравнению смешанного типа, в котором интеграл по стандартному броуновскому движению  $W_t$  понимается как интеграл Ито, а интеграл по дробному броуновскому движению  $B_t^{(H)}$  определяется как потраекторный интеграл Янга. В свою очередь, уравнения смешанного типа охватывают стохастические дифференциальные уравнения Ито, а также уравнения, управляемые дробными броуновскими движениями со сносом, впервые рассмотренные в работе Д. Нуаларта и А. Раскану (2008).

Глава 2 настоящей работы также посвящена общим свойствам решений уравнений (1). Существование и единственность решений, непрерывная зависимость решений от начальных данных детерминированных уравнений (1), где в качестве  $B_t$  выступают детерминированные функции, непрерывные по Гельдеру с показателем  $\alpha > 1/3$ , были впервые исследованы в работе М. Губинелли (2004) и впоследствии развиты в монографии П. Фрица и М. Хайрера (2014). Однако обобщение теоремы существования решений уравнений (1) на недетерминированный случай уравнений с дробными броуновскими движениями, вообще говоря, не столь тривиально, поскольку из существования решения  $X(t, \omega)$  при каждом  $\omega$  не следует его измеримость по  $\omega$ . Обоснование измеримости решений было дано в работе А. Нойенкирха, И. Нурдэна (2009), где доказана теорема существования решений уравнений (1) с коэффициентами  $f$  класса  $C_b^2$ , дробными броуновскими движениями, имеющими один и тот же индекс Харста  $H > 1/3$ , и сносом, а также доказана формула замены переменных для указанных

уравнений. В настоящей главе получена теорема существования, в целом аналогичная теореме из работы А. Нойенкирха и И. Нурдэна, для уравнений (1).

Через  $C_b^k(V, U)$  будем обозначать пространство функций  $\varphi: V \rightarrow U$ , имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка  $k$  включительно с нормой  $\|\varphi\|_{C_b^k} = \sum_{j=0}^k \|D^j \varphi\|_\infty$ , где  $\|D^j \varphi\|_\infty = \max_{x \in V} |D^j \varphi(x)|$ . Следующая теорема дает достаточное условие существования и единственности решения уравнения (1).

**Теорема 2.1.<sup>2</sup>** [5]. Если  $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ , то для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  уравнение (1) имеет единственное решение с начальным условием  $X_0 = x$ , причем  $X' = f(X)$ ,  $(f(X), (f(X))') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0, T], \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$  п.н. Более того, если  $H_i > H^* \geq 1/2$  для всех  $i = 0, \dots, d$ , то справедливо включение  $X \in C^{H^*}([0, T], \mathbb{R}^n)$  п.н. и интеграл в определении решения уравнения (1) является потраекторным интегралом Янга.

Следующие две теоремы являются основными результатами второй главы.

Формула замены переменных, полученная в настоящей работе, обобщает аналогичные результаты работ Ф. Бадуэна и Л. Кутэн (2007), А. Нойенкирха и И. Нурдэна (2009) на случай уравнения (1) со сносом и дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста.

**Теорема 2.2.** [5]. Пусть  $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ ,  $g \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Тогда для любых  $s, t \in [0, T]$  п.н. справедлива следующая формула замены переменных:

$$g(X_t) = g(X_s) + \int_s^t Dg(X_r) f(X_r) dB_r, \quad s, t \in [0, T], \quad (2)$$

где  $X_t$  — решение уравнения (1).

Наряду с уравнением (1) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\tilde{X}_t = \tilde{f}(\tilde{X}_t) dB_t, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

в котором  $\tilde{f}$  —  $(n \times (d+1))$ -матрица, столбцами которой являются векторы  $\tilde{f}_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, \dots, d$ .

Результаты, полученные в работах М. Губинелли, П. Фрица и М. Хайрера в приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям означают, что почти наверное имеет место потраекторная интегральная непрерывность решений уравнений вида (1) с дробным броуновским движением  $B_t$ , компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста  $H > 1/3$ , в условиях существования указанных решений. Настоящая работа обобщает указанные результаты на случай компонент  $B_t$ , имеющих различные индексы Харста  $H_i > 1/3$ .

**Теорема 2.3.** [3]. Пусть  $f, \tilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ , причем функция  $f$  такова, что  $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq$   
1. Обозначим через  $X_t, \tilde{X}_t$  решения уравнений (1), (3) с начальными условиями  $X_0 = \xi$ ,  $\tilde{X}_0 = \tilde{\xi}$  соответственно. Тогда:

1) почти наверное справедлива следующая оценка

$$\|X - \tilde{X}\|_H \leq C \left( |\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right) \quad (4)$$

для некоторой случайной величины  $C = C(H, T, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ . Причем  $C$  может быть выбрана не зависящей от  $T$ , если  $T \in (0, 1]$ ;

2) имеет место следующее неравенство

$$\mathbb{E}(\ln \|X - \tilde{X}\|_H) \leq C + \ln(\mathbb{E}|\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}), \quad (5)$$

<sup>2</sup>Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations / A. Neuenkirch [et al.] // Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2009. — Vol. 45, n° 1. — P. 157–174.

где  $C = C(H, H_1, \dots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}) \in \mathbb{R}$  — константа, вообще говоря, зависящая от  $H, H_1, \dots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}$ .

Третья глава диссертации посвящена исследованию асимптотических разложений математических ожиданий функционалов от решений уравнения (1).

Будем придерживаться следующих компактных записей:

$$\Delta^k[0, t] = \{(t_1, \dots, t_k) \in [0, t]^k : 0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq t\} \quad (6)$$

$$\int_{\Delta^k[0, t]} dB^{(I_k)} = \int_0^t \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_2} dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} dB_{t_k}^{(i_k)}, \quad (7)$$

$$I_k = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_d^k := \{0, \dots, d\}^k, \quad (8)$$

$$D_f^{(i)} = \sum_{j=1}^n f_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i \in \{0, \dots, d\} \quad D_f^{(I_k)} = D_f^{(i_1)} \dots D_f^{(i_k)}, \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_t g(x) = \mathbb{E}g(X_t^x), \quad t \geq 0. \quad (10)$$

Исследование при малых значениях времени  $t$  семейства операторов (10) представляет особый интерес. Их асимптотические разложения могут быть применены для получения дифференциальных уравнений в частных производных колмогоровского типа для математических ожиданий от решений уравнения (1) в некоторых частных случаях (например, когда все индексы Харста  $H_i = 1/2$  или когда дифференциальные потоки, соответствующие коэффициентам уравнения (1), коммутируют), а также, как показано в статье Ф. Бадуэна и Л. Кутэн (2007), для получения систем дифференциальных уравнений в частных производных для инвариантных мер, связанных с решениями уравнений (1).

Известны несколько работ, посвященных исследованию семейства операторов (10). Ф. Бадуэн и Л. Кутэн (2007) вывели асимптотическую формулу для операторов  $\mathbf{P}_t$ , используя теорию грубых траекторий (rough paths) Т. Лайонса в случае, когда  $H_1 = \dots = H_d > 1/3$  для уравнения (1) без сноса. А. Нойенкирх, И. Нурдэн (2009) рассматривали уравнение (1) со сносом в случае  $H_1 = \dots = H_d > 1/3$  и получили асимптотическую формулу для операторов  $\mathbf{P}_t$ , используя теорию интегрирования М. Губиннелли. В третьей главе настоящей работы результаты указанных статей обобщены на случай уравнения (1) со сносом и дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста. В данной главе уравнение (1) рассматривается с точки зрения теории грубых траекторий как уравнение Стратоновича. Решения таких уравнений есть равномерные пределы последовательности аппроксимаций Вонга-Закаи, т.е. уравнений вида (1), в которых процесс  $B_t$  заменяется его кусочно-линейными аппроксимациями  $B_m(t)$ , введенными Л. Кутэн и Ж. Киян (2002).

Основной результат третьей главы представлен следующей теоремой.

**Теорема 3.1.** [4, 5]. Пусть  $f \in C_b^{N+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ ,  $g \in C_b^{N+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ ,  $N \in \mathbb{N}$ . Тогда для любого фиксированного  $H \in (1/3, 1/2]$  такого, что  $H < H_{\min} = \min_{i=0, \dots, d} H_i$  справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \{0, \dots, d\}^k} t^{|H_{I_k}|} \cdot (D_f^{(I_k)} g)(x) \mathbb{E} \left( \int_{\Delta^k[0, 1]} dB^{(I_k)} \right) + O(t^{(N+1)H}), \quad (11)$$

при  $t \rightarrow 0$ , где  $|H_{I_k}| = H_{i_1} + H_{i_2} + \dots + H_{i_k}$  — сумма индексов Харста дробных броуновских движений  $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \dots, B^{(i_k)}$ .

**Пример.** Рассмотрим следующее одномерное уравнение:

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t^H,$$

в котором  $B_t^H$  — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста  $H \in (1/2, 1)$ ,  $b, \sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — функции класса  $C_b^4$ . Пусть  $g \in C_b^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , тогда согласно теореме 3.1 справедливо асимптотическое разложение следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t g(x) = & g(x) + t b(x) Dg(x) + \frac{1}{2} t^2 (b(x) D b(x) Dg(x) + b^2(x) D^2 g(x)) + \\ & + \frac{1}{2} t^{2H} (\sigma(x) D \sigma(x) Dg(x) + \sigma^2(x) D^2 g(x)) + O(t^{3H}). \end{aligned}$$

Также в третьей главе получены аналоги уравнений Колмогорова для математических ожиданий функционалов от решений в предположении, что компоненты  $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  правой части уравнения (1) являются функциями класса  $C_b^{d+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  такими, что справедливо равенство  $D_f^{(i)} \circ D_f^{(j)} = D_f^{(j)} \circ D_f^{(i)}$ , для любых  $i, j = 0, \dots, d$ . В таком случае справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.3** [5] *Для любой функции  $g \in C_b^{d+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  справедливо равенство*

$$\mathbb{E}(g(X_t^x)) = \left( \exp \left( t D_f^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d t^{2H_i} (D_f^{(i)})^2 \right) g \right)(x).$$

Другими словами, функция  $\varphi(t, x) = \mathbb{E}(g(X_t^x))$  удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_f^{(0)} \varphi + \sum_{i=1}^d H_i t^{2H_i-1} (D_f^{(i)})^2 \varphi, \quad (12)$$

с начальным условием

$$\varphi(0, x) = g(x). \quad (13)$$

**Пример.** Рассмотрим одномерное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = \sin X_t dt + 2H^{-1} \sin X_t dB_t^H,$$

в котором  $B_t^H$  — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста  $H \in (1/3, 1)$ . Пусть также задано начальное условие  $X_0 = x \in \mathbb{R}$ . Согласно теореме 3.3 функция  $\varphi(t, x) = \mathbb{E}g(X_t^x)$  будет являться решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (\sin x + t^{2H-1} \sin 2x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4t^{2H-1}}{H} \sin^2 x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

с начальным условием  $\varphi(0, x) = g(x)$ .

Четвертая глава диссертации посвящена получению методов интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа.

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  заданы  $d$ -мерное стандартное броуновское движение  $W(t)$  и  $d$ -мерное дробное броуновское движение  $B(t)$  с показателем Харста  $H \in (1/2, 1)$ .

Объектом изучения четвертой главы является стохастическое дифференциальное уравнение смешанного типа

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (14)$$

где  $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $\sigma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  — детерминированные функции.

Интерес к стохастическим дифференциальным уравнениям смешанного типа вызван тем, что наличие слагаемого с дробным броуновским движением позволяет строить более точные математические модели, учитывающие эффект долговременной памяти процессов, что особенно важно при моделировании экономических и финансовых процессов.

Впервые смешанные уравнения были рассмотрены К. Кубилюсом (2002), в данной работе была получена первая теорема существования и единственности для уравнений смешанного типа без сноса, содержащих винеровский процесс  $W_t$  и дробное броуновское движение  $B_t^H$  с индексом Харста  $H > 1/2$ , сочетая при этом теории интегрирования Ито и Янга. Д. Нуаларт и Дж. Гуэрра (2008) доказали теорему существования и единственности для уравнений, содержащих снос. Некоторые другие обобщения теорем существования, а также свойства стохастических дифференциальных уравнений и включений смешанного типа исследованы в работах Ю.С. Мишуры, Г.М. Шевченко, А.А. Левакова и М.М. Васьковского.

В монографиях С. Ватанабэ (1986), Гарда (1989), А.А. Левакова (2009), работах Г. Досса (1977), М.А. Курицина (2000) были получены некоторые методы точного интегрирования уравнений Ито. Методы точного интегрирования, полученные в четвертой главе настоящей работы, обобщают результаты монографии А.А. Левакова на случай уравнений смешанного типа.

Будем рассматривать одномерное уравнение (14), считая, что  $d = 1$ . Вместе с ним рассмотрим простейшее уравнение

$$dy(t) = u(t)dt + v(t)dW(t) + b(t)dB(t), \quad t \geq 0. \quad (15)$$

Решение уравнения (15) выражается следующей формулой:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)dW(\tau) + \int_0^t b(\tau)dB(\tau), \quad t \geq 0.$$

Предположим, что существуют некоторые функции  $r(t), q(t)$  такие, что

$$g(t, x) \left( \frac{g'_t(t, x)}{g^2(t, x)} + \left( \frac{f(t, x)}{g(t, x)} \right)'_x + \frac{1}{2} g''_{x^2}(t, x) \right) = r(t), \quad (16)$$

$$\frac{\sigma(t, x)}{g(t, x)} = q(t). \quad (17)$$

**Теорема 4.1.** [6]. Уравнение (14) с функцией  $g(t, x) \neq 0$  приводимо к уравнению (15) с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно  $x$  преобразования  $y = F(t, x)$  тогда и только тогда, когда найдутся функции  $q(t), r(t)$  такие, что оказываются выполненными соотношения (16), (17).

**Пример.** Решение линейного однородного уравнения

$$dx(t) = \alpha(t)x(t)dt + \beta(t)x(t)dW(t) + \gamma(t)x(t)dB(t), \quad t \geq 0,$$

выражается формулой

$$x(t) = x(0) \exp \left( \int_0^t \left( \alpha(\tau) - \frac{1}{2} \beta^2(\tau) \right) d\tau + \int_0^t \beta(\tau) dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau) dB(\tau) \right).$$

Решение линейного неоднородного уравнения

$$dx(t) = (\alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t))dt + (\beta_1(t)x(t) + \beta_2(t))dW(t) + (\gamma_1(t)x(t) + \gamma_2(t))dB(t), \quad t \geq 0,$$

выражается формулой

$$x(t) = x_0(t) \left( x(0) + \int_0^t \frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} dW(\tau) + \int_0^t \frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)} dB(\tau) \right),$$

где  $x_0(t)$  — решение соответствующего линейного однородного уравнения с начальным условием  $x_0(0) = 1$ .

**Пример.** Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$dx(t) = -2t \cdot x(t)dt + t^{1-H}x(t)dB(t), \quad t \geq 0,$$

Его решение выражается формулой

$$x(t) = x(0) \exp \left( -t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau) \right).$$

Нулевое решение рассматриваемого уравнения устойчиво по вероятности, то есть для любых  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  найдется  $\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 \exp \left( -\frac{C^2 \mathbb{E} \|B\|_H^2}{4\varepsilon_2} \right) > 0$ ,  $C = \zeta(1 + 1/H)$ , такая, что для любого решения с начальным значением  $x(0)$  таким, что  $|x(0)| < \delta$  п.н., выполнено неравенство  $P\{\sup_{t \geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$ .

Далее рассмотрим одномерное автономное уравнение

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (18)$$

и будем исследовать наличие автономной замены  $y = F(x)$ , приводящей указанное уравнение к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (\alpha_1 y(t) + \alpha_2)dt + (\beta_1 y(t) + \beta_2)dW(t) + (\gamma_1 y(t) + \gamma_2)dB(t), \quad t \geq 0 \quad (19)$$

с постоянными коэффициентами  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ .

Предположим, что существуют некоторые постоянные  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  такие, что

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}, \quad (20)$$

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = c_1, \quad (21)$$

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = c_2, \quad (22)$$

**Теорема 4.2.** [6]. Уравнение (18) с функциями  $g(x) \neq 0$ ,  $A'(x) \neq 0$  приводимо к уравнению (19) с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно  $x$  преобразования  $y = F(x)$  тогда и только тогда, когда найдутся постоянные  $c_1, c_2$  такие, что оказываются выполненными соотношения (20), (21), (22).

**Пример.** Уравнение бернуллиевского типа

$$dx(t) = (\alpha x^n(t) + \beta x(t))dt + \gamma x(t)dW(t) + \delta x(t)dB(t)$$

с помощью замены  $y = F(x) = \frac{1}{1-n}x^{1-n}$  приводится к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = \left( \alpha + (n-1) \left( -\beta + \frac{\gamma^2 n}{2} \right) y(t) \right) dt + \gamma(1-n)y(t)dW(t) + \delta(1-n)y(t)dB(t).$$

Вернемся к уравнению (14) в пространстве  $\mathbb{R}^d$  и вместе с ним рассмотрим соответствующее уравнение Стратоновича

$$dx(t) = (f(t, x(t)) - c(t, x(t)))dt + g(t, x(t)) \circ dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (23)$$

в котором  $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $\sigma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ ,  $c: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  и

$$c_i(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial g_{ij}(t, x)}{\partial x_k} g_{kj}(t, x), \quad i = 1, \dots, d.$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.3.** [6]. Пусть функция  $f$  непрерывна, а функция  $g$  непрерывна вместе со своими производными  $\frac{\partial g}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ . Процесс  $x(t)$  является решением уравнения (14) тогда и только тогда, когда процесс  $x(t)$  является решением уравнения Стратоновича (23).

**Пример.** Для уравнения

$$dx(t) = x^3(t)dt + x^2(t)dW(t) + x^2(t)dB(t), \quad x(0) = x_0,$$

соответствующее уравнение Стратоновича имеет вид

$$dx(t) = x^2(t) \circ dW(t) + x^2(t)dB(t).$$

Последнее уравнение имеет решение

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(W(t) + B(t))},$$

которое является решением и исходного уравнения.

Глава 5 посвящена исследованию устойчивости и притяжения решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах. Для таких уравнений определяющую роль в исследовании устойчивости и притяжения решений по-прежнему играют классические методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений: метод функционалов Ляпунова, метод интегральных неравенств, исследование устойчивости нелинейных уравнений по линейному приближению и др., что позволяет получать более точные результаты по сравнению с уравнениями (1) более общего вида.

В первой части главы 5 рассматриваются стохастические дифференциальные уравнения в конечномерном гильбертовом пространстве  $\mathbb{R}^d$  с выделенной линейной частью вида:

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t)))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0. \quad (24)$$

где  $W(t)$  — стандартное  $d$ -мерное броуновское движение,  $A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  — кусочно непрерывная функция,  $\sup_{t \geq 0} |A(t)| \leq M$ ,  $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$  — измеримые по Борелю функции такие, что  $f(t, 0) = 0$  и  $g(t, 0) = 0$  при всех  $t \in \mathbb{R}^+$  и выполнено условие линейного порядка роста по  $x$ , то есть существует постоянная  $C$  такая, что для любых  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , выполняется неравенство  $|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq C(1 + |x|)$ .

Под решением системы (24) понимается решение стохастического дифференциального включения, построенного по уравнению в смысле А.Ф. Филиппова.

Теория устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в конечномерных гильбертовых пространствах изучена наиболее полно. В монографии Р. Хасьминского (2012) доказаны аналоги теорем Ляпунова об устойчивости решений уравнения (24) с коэффициентами, удовлетворяющими глобальному условию Липшица. В монографии Е.Ф. Царькова (1982)



излагается метод исследования устойчивости решений автономной системы с непрерывными коэффициентами и запаздыванием. Исследованию устойчивости систем с разрывными коэффициентами посвящена статья А.А. Левакова (2011), в которой методом знакопостоянных функций Ляпунова доказаны теоремы об устойчивости решений автономной системы без запаздывания с разрывными коэффициентами  $f, g$ . Полученная в настоящей работе теорема об устойчивости по линейному приближению охватывает класс неавтономных уравнений с разрывными коэффициентами.

Наряду с уравнением (24) рассмотрим линейное однородное детерминированное уравнение

$$dX(t) = A(t)X(t)dt, \quad t \geq 0, \quad (25)$$

Через  $X^{(s,x)}(t)$  будем обозначать (единственное) решение уравнения (25), удовлетворяющее равенству  $X^{(s,x)}(s) = x$ .

**Определение 5.4.** Будем говорить, что уравнение (25) имеет *равномерно экспоненциально устойчивое* нулевое решение, если существуют константы  $\Lambda, \lambda > 0$ , не зависящие от  $s, x$ , такие, что для любых  $s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d$  и  $t \geq s$  выполняется неравенство

$$|X^{(s,x)}(t)|^2 \leq \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)}.$$

**Теорема 5.3.** [1]. *Предположим, что функции  $f(t, x)$  и  $g(t, x)$  таковы, что при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta_\varepsilon > 0$  такое, что выполняются неравенства*

$$|f(t, x)| \leq \varepsilon |x|, \quad |g(t, x)| \leq \varepsilon |x|, \quad (26)$$

*для любых  $x, |x| \leq \delta_\varepsilon, t \in \mathbb{R}^+$ , а система (25) имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда система (24) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.*

**Пример.** Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((-20 - 0.1 \sin t)x(t) + 0.1 \cos t y(t) + \sin^2 x(t))dt, \\ dy(t) &= (-0.1 \cos t x(t) - (20 + 0.1 \sin t)y(t))dt + \sin^2 y(t) \operatorname{sgn}(x(t))dw(t), \end{aligned} \quad (27)$$

при  $t \geq 0$  с начальными условиями  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ , где  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $w(t)$  — одномерное броуновское движение. Нулевое решение линеаризованной системы

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((-20 - 0.1 \sin t)x(t) + 0.1 \cos t y(t))dt, \\ dy(t) &= (-0.1 \cos t x(t) - (20 + 0.1 \sin t)y(t))dt, \end{aligned}$$

является равномерно экспоненциально устойчивым, и следовательно, по теореме 5.3. нулевое решение системы (27) асимптотически устойчиво по вероятности.

Пусть  $H$  и  $K$  — сепарабельные гильбертовы пространства,  $\mathfrak{L}_2(K, H)$  — пространство операторов Гильберта-Шмидта, действующих из  $K$  в  $H$ ,  $Q$  — ядерный симметрический положительно определенный оператор на пространстве  $K$ ,  $W(t, \omega)$  —  $Q$ -броуновское движение со значениями в  $K$  и ковариационным оператором  $Q$ . Во второй части главы 5 рассматриваются эволюционные функциональные уравнения в пространстве  $H$  следующего вида:

$$dX(t, \omega) = AX(t, \omega)dt + f(t, X(t, \omega))dt + g(t, X(t, \omega))dW(t, \omega), \quad (t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \quad (28)$$

относительно  $X \in H$  с начальным условием

$$X(0, \omega) = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (29)$$

где  $f: \mathbb{R}^+ \times H \rightarrow H$ ,  $g: \mathbb{R}^+ \times H \rightarrow \mathfrak{L}_2(K, H)$  — измеримые, непрерывные по  $X$  (при любом фиксированном  $t \in \mathbb{R}^+$ ) функции,  $A$  — линейный оператор, определенный на всюду плотном в

$H$  множестве  $\mathcal{D}(A)$  и порождающий  $C_0$ -полугруппу  $S(t)$  на  $H$ ,  $\xi : \Omega \rightarrow \mathcal{D}(A)$  —  $\mathcal{F}_0$ -измеримая случайная величина, имеющая конечный момент  $\mathbb{E}\|\xi\|^p < \infty$  порядка  $p > 2$ . В дальнейшем для сокращения обозначений аргумент  $\omega$  будем опускать. Все интегралы ниже записаны в предположении их существования и конечности.

Относительно функций  $f(t, X)$  и  $g(t, X)$  будем предполагать, что выполнены два условия:

1. *Локальное условие Липшица.* Для любого  $a > 0$  существует постоянная  $q_a$  такая, что для всех  $t \in [0, a]$  и любых  $\varphi, \psi \in H$ , таких, что  $\|\varphi\| \leq a$ ,  $\|\psi\| \leq a$ , выполняются неравенства

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\| \leq q_a \|\varphi - \psi\|, \quad \|g(t, \varphi) - g(t, \psi)\| \leq q_a \|\varphi - \psi\|.$$

2. *Условие линейного порядка роста.* Существует непрерывная функция  $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  такая, что для всех  $t \in \mathbb{R}^+$  и любого  $\eta \in H$  выполняются неравенства

$$\|f(t, \eta)\| \leq k(t)(1 + \|\eta\|), \quad \|g(t, \eta)\| \leq k(t)(1 + \|\eta\|).$$

К настоящему времени получены глубокие результаты о количественных и качественных свойствах решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. Теоремы о существовании и асимптотических свойствах исходного уравнения с начальным условием доказаны в работах Т. Танигучи (1998), М.М. Васьковского (2018). В работах К. Лю (1997, 2005) были получены почти наверное точные асимптотические оценки для решений исходного уравнения с начальным условием без запаздывания с коэффициентами, удовлетворяющими глобальному условию Липшица. В статье А. Ичикавы (1982) получены оценки для математического ожидания функционала Ляпунова от решения исходной задачи в случае автономных коэффициентов, удовлетворяющих глобальному условию Липшица. В статье Т. Танигучи (2002) доказана экспоненциальная устойчивость  $p$ -го момента решения исходного уравнения  $\mathbb{E}\|X(s, \omega)\|^p$ ,  $p > 2$ , в предположении, что коэффициенты  $f, g$  удовлетворяют локальному по  $t$  и глобальному по  $X$  условию Липшица. Настоящая работа призвана обобщить полученные результаты на случай коэффициентов уравнения (28), удовлетворяющих локальному условию Липшица.

**О п р е д е л е н и е 5.8.** Пусть положительная функция  $\lambda(t)$  определена для достаточно больших  $t > 0$ , скажем,  $t \geq T > 0$ . Предположим, что

1.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty$ .
2.  $\ln \lambda(t)$  равномерно непрерывна по  $t \geq T$ .
3. Существует константа  $\tau \geq 0$  такая, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln \ln t}{\ln \lambda(t)} \leq \tau$ .

Будем говорить, что слабое решение задачи (28), (29) притягивается к нулю со скоростью  $\lambda(t)$ , если найдется  $\gamma > 0$  такое, что п.н. выполняется неравенство

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|X(t)\|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma.$$

Рассмотрим функционал  $V(t, x)$  класса  $C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$ , т.е. принимающий значения в  $\mathbb{R}^+$  и имеющий непрерывные производные по Фреше по переменной  $t \in \mathbb{R}^+$  — до первого порядка, по переменной  $x \in H$  — до второго порядка (включительно). Введем операторы  $L$ ,

$B$ , действующие на  $V$  следующим образом:

$$LV(t, x) = V'_t(t, x) + \langle V'_x(t, x), Ax + f(t, x) \rangle_H + \\ + \frac{1}{2} \text{tr}[V''_{xx}(t, x)(g(t, x)Q^{1/2})(g(t, x)Q^{1/2})^*], \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A), \quad (30)$$

$$BV(t, x) = \text{tr}[V''_{xx}(t, x) \otimes V''_{xx}(t, x)(g(t, x)Q^{1/2})(g(t, x)Q^{1/2})^*], \\ (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times H. \quad (31)$$

**Теорема 5.4.** [2]. Пусть задан функционал  $V(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$  и две неотрицательные непрерывные функции  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$ . Предположим, что существуют постоянные  $r > 0$ ,  $m \geq 0$ , постоянные  $\mu, \nu, \theta \in \mathbb{R}$  и невозрастающая положительная функция  $\zeta(t)$  такие, что  $\frac{m - (\max\{\nu, \mu + \tau\} + \theta)}{r} > 0$  и выполнены следующие условия:

1.  $\|x\|^r(\lambda(t))^m \leq V(t, x)$  для всех  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times H$ .
2.  $LV(t, x) + \zeta(t)BV(t, x) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t)V(t, x)$  для всех  $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A)$ .
3.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln(\int_0^t \psi_1(s) ds)}{\ln \lambda(t)} \leq \nu$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\int_0^t \psi_2(s) ds}{\ln \lambda(t)} \leq \theta$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf \frac{\ln \zeta(t)}{\ln \lambda(t)} \geq -\mu$ .

Тогда слабое решение задачи (28), (29) притягивается к нулю со скоростью  $\lambda(t)$ .

**Пример.** Рассмотрим следующую стохастическую дифференциальную систему (значение параметров  $\alpha, m > 0$  будет уточнено ниже)

$$dX_t(x) = \left( \frac{d^2}{dx^2} X_t(x) + \alpha \sin \left( X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos X_t^1 \right) \right) dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}} X_t(x) dW_t, \\ dX_t^1 = \left( \alpha X_t^1 \sin X_t^1 + \left( \int_0^\pi X_t(x)^2 dx \right)^{1/2} \right) dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}} \left( \int_0^\pi X_t(x)^2 dx \right)^{1/2} dW_t, \\ t > 0, \quad 0 < x < \pi$$

как уравнение относительно  $\bar{X}_t = (X_t(\cdot), X_t^1)^\top$  в пространстве  $H \times \mathbb{R}$  с начальным условием  $\bar{X}_0 = (X_0(x), X_0^1)^\top = (x_0(x), x_0^1)$ ,  $x \in (0, \pi)$ ,  $K = \mathbb{R}$ ,  $H = L_2[0, \pi]$  — гильбертово пространство классов эквивалентности квадратично интегрируемых по Лебегу функций  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ . В компактной форме это уравнение примет вид

$$d\bar{X}_t = (\bar{A}\bar{X}_t + f(t, \bar{X}_t))dt + g(t, \bar{X}_t)dW_t, \quad (32) \\ f(t, \bar{X}_t) = \alpha \left( \sin(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos X_t^1), X_t^1 \sin X_t^1 + \|X_t(x)\|_H \right)^\top, \\ g(t, \bar{X}_t) = \alpha e^{-\frac{mt}{2}} \left( X_t(x), \left( \int_0^\pi X_t(x)^2 dx \right)^{1/2} \right)^\top, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(A) = \{u \in C_2[0, \pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$$

Положим  $V(t, \bar{u}) = V(t, u) = e^{mt}\|u\|^2$ ,  $u \in H$ ,  $\lambda(t) = e^t$ ,  $\psi_1(t) \equiv \alpha\pi$ ,  $\psi_2(t) \equiv \theta$ ,  $\tau = \mu = \nu = 0$ . В статье [2] показано, что при таком выборе, достаточно малом  $\alpha$  и достаточно большом  $m$ , условия теоремы 5.4 будут выполнены, т.е. имеет место притяжение решений к нулю. При этом функция  $g$  удовлетворяет глобальному условию Липшица, а функция  $f$  удовлетворяет локальному, но не удовлетворяет глобальному условию Липшица.

**Основные положения, выносимые на защиту**

1. Формула замены переменных и теорема о непрерывной зависимости от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста (теоремы 2.2, 2.3).
2. Асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста (теорема 3.1).
3. Методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа (теоремы 4.1, 4.2, 4.3).
4. Теорема об асимптотической устойчивости системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито с разрывными коэффициентами по нестационарному линейному приближению. Достаточные условия притяжения к нулю слабых решений нелинейного стохастического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве с нелипшицевыми коэффициентами (теоремы 5.3, 5.4).