БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.911.5

КАЧАН
Илья Вадимович

Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент,
Васьковский М. М.

Минск, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПЕРЕЧЕНЬ СОКРАЩЕНИЙ И (ИЛИ) УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$a \vee b$	большее из чисел a и b, т.е. $\max\{a,b\}$
$a \wedge b$	меньшее из чисел a и b, т.е. $\min\{a,b\}$
$\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	множества натуральных, действительных и комплексных чисел соответственно
$\mathbb{R}^+$	множество действительных положительных чисел
$\mathbb{R}^d$	евклидово пространство векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$, $x_1, x_2, \ldots, x_d \in \mathbb{R}$ со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_d y_d$ и нормой $\lvert x \rvert = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	пространство матриц $X = (x_{ij})$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$ размера $n \times m$ с вещественными элементами $x_{ij} \in \mathbb{R}$
$A^\top$	транспонированная матрица
$A^\star$	сопреженный оператор
tr$A$	след оператора
I_d	единичная матрица в $\mathbb{R}^{d \times d}$
col$(a_1, \ldots, a_n)$	матрица, состоящая из строк $a_1, \ldots, a_n$
$\otimes$	тензорное произведение в пространстве $\mathbb{R}^d$
$\lvert \cdot \rvert_W$	евклидова норма в конечномерном пространстве W
$\lVert \cdot \rVert_X$	норма в пространстве бесконечномерном пространстве X
$\langle \cdot, \cdot \rangle_H$	скалярное произведение в пространстве H
$\mathcal{L}(U_1, U_2)$	пространство линейных ограниченных операторов, действующих из U_1 в U_2
$L_2(U_1, U_2)$	множество операторов Гильберта-Шмидта, действующих из U_1 в U_2
$C(U_1, U_2)$	пространство непрерывных функций $\varphi \colon U_1 \to U_2$ с нормой $\lVert \varphi \rVert_\infty = \max_{x \in U_1} \lvert \varphi(x) \rvert_{U_2}$
$C_b^k(U_1, U_2)$	пространство функций $\varphi \colon U_1 \to U_2$ имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка k включительно с нормой $\lVert \varphi \rVert_{C_b^k} = \sum_{j=0}^{k} \lVert D^j \varphi \rVert_\infty$
$\overline{\text{co}}X$	замыкание выпуклой оболочки множества X
$[X]_\varepsilon$	множество $\{x \in T : \rho(x, X) \leq \varepsilon\}$, называемое ε-окрестностью множества X в метрическом пространстве T с расстоянием ρ

$\mathbf{1}_A$	функция-индикатор множества A
п.н.	почти наверное

ВВЕДЕНИЕ

Стохастические дифференциальные уравнения являются стремительно развивающейся областью исследований с множеством неразрешенных вопросов. Интерес к ним со стороны научного сообщества вызван, с одной стороны, многими плодотворными связями с другими математическими дисциплинами, а с другой — широким спектром приложений вне математики. В частности, стохастические дифференциальные уравнения находят свое применение в задачах фильтрации, детерминированных краевых задачах математической физики, финансовой и экономической областях, в задачах определения оптимального момента остановки, задачах оптимального размещения ценных бумаг, задачах расчета опционов и др. (см. [14, глава 1]).

Особое место в теории стохастических дифференциальных уравнений занимают проблемы асимптотического поведения решений, лежащие на стыке теории случайных процессов и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследованию асимптотических характеристик случайных процессов большое внимание уделяли И.И. Гихман и А.В. Скороход. Они — одни из создателей теории стохастических дифференциальных уравнений — вводили их для того, чтобы строго ставить и решать задачи асимптотического поведения случайных процессов (см. [5]).

Первая глава данной работы содержит предварительные сведения, известные результаты, необходимые для более глубокого понимания последующих глав работы.

Вторая глава данной работы посвящена исследованию устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. Несмотря на существенное усложнение объекта исследования, здесь определяющую роль по-прежнему играют методы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений: метод функционалов Ляпунова, метод интегральных неравенств, исследование устойчивости нелинейных уравнений по линейному приближению и др. Теория устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в конечномерных гильбертовых пространствах изучена наиболее полно. В монографии [36] рассматриваются уравнения относительно $X \in \mathbb{R}^d$ со стандартным d-мерным броуновским движением $W \in \mathbb{R}$ общего вида:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0 \tag{0.1}$$

с постоянными начальными условиями $X(0,\omega) \equiv x \in \mathbb{R}^n$. В ней доказаны аналоги теорем Ляпунова об устойчивости решений уравнения (0.1) с коэффициентами, удовлетворяющими по фазовой переменной глобальному условию Липшица:

$$|g(t,x) - g(y,t)| + |f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x-y|, \qquad x,y \in \mathbb{R}^n. \tag{0.2}$$

В монографии [16] излагается метод исследования устойчивости решений автономной системы с запаздыванием $X_t = \{X(t+\tau)| -h \leq \tau \leq 0\} \in \in C([-h,0],\mathbb{R}^n)$:

$$dX(t) = f(X_t)dt + g(X_t)dW(t), \quad t \geq 0 \tag{0.3}$$

с начальными условиями $X(0,\omega) = \xi(\omega)$ с помощью квадратичных функционалов Ляпунова. Отметим, что исследования в указанных монографиях проводятся с уравнениями (0.3), коэффициенты которых непрерывны. Для уравнений с разрывными коэффициентами существование решения в классическом смысле не гарантируется и для определения решений требуется привлечение дифференциальных включений [15]. Основная идея этой теории принадлежит А.Ф. Филиппову и состоит в том, что разрывные коэффициенты $f(t,x)$, $g(t,x)$ заменяются в каждой точке (t,x) на наименьшие выпуклые множества $F(t,x)$, $G(t,x)$, содержащие все предельные точки $f(t,x^*)$, $g(t,x^*)$ соответственно при $x^* \to x$. Исследованию устойчивости систем с разрывными коэффициентами посвящена статья [7]. В ней А.А. Леваков методом знакопостоянных функций Ляпунова доказал теоремы об устойчивости решений автономной системы

$$dX(t) = f(X(t))dt + g(X(t))dW(t), \quad t \geq 0 \tag{0.4}$$

без запаздывания с разрывными коэффициентами f,g. Тем не менее результаты работ [36, 16, 7] не применимы к исследованию устойчивости неавтономных систем с разрывными коэффициентами.

В настоящей работе с помощью метода знакопостоянных функций Ляпунова [36, 7] доказана теорема теорема об устойчивости решений системы

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t,X(t)))dt + g(t,X(t))dW(t), \quad t \geq 0 \tag{0.5}$$

в предположении, что линеаризованная система

$$dX(t) = A(t)X(t)dt \tag{0.6}$$

является равномерно экспоненциально устойчивой. Под решением системы (0.5) понимается решение стохастического дифференциального включения, построенного по уравнению в смысле А.Ф. Филиппова, см. также [2].

Также вторая глава данной работы посвящена исследованию устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений в произвольных сепарабельных гильбертовых пространствах. В свою очередь, стохастические дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах представляют большой интерес, поскольку они охватывают классы дифференциально-функциональных уравнений, уравнений в частных производных и тем самым позволяют получать более точные модели реальных физических явлений. Многие классические задачи математической физики могут быть истолкованы и обобщены с применением аппарата стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах.

К примеру, рассмотрим задачу распространения тепла в стрежне:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,u(t,x)), \quad t>0,\ 0<x<l\\ u(0,x)=\varphi(x), \quad 0<x<l,\\ u(t,0)=u(t,l)=0, \quad t>0,\end{gathered} \tag{0.7}$$

где l — длина стержня, a - коэффициент температуропроводности. Решение $u(t,x)$ этой задачи при фиксированных t,ω можно рассматривать как элемент гильбертова пространства $X(t)=u(t,\cdot)\in L_2[0,l]$. Вводя оператор 2-й производной $A=d^2/dx^2$, принимающий значения в $L_2[0,l]$ с областью определения $\mathcal{D}(A)=\{u(x)\in\ C_2[0,l]\ :\ u(0)=u(l)=0\}$; мы приходим к задаче Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка в гильбертовом пространстве $H=L_2[0,l]$. Обобщая ее с учетом случайных флюктуаций, получим новую задачу:

$$\begin{gathered}dX(t,\omega)=(AX(t,\omega)+f(t,X(t,\omega)))dt+dW(t,\omega), \quad t>0, X\in\mathcal{D}(A),\\ X(0,\omega)=\varphi(\omega),\end{gathered} \tag{0.8}$$

где $\varphi(\omega)=\varphi(\omega,\cdot)\in H$, а $dW(t,\omega)$ описывает белый шум.

С другими примерами использования стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах (в нейрофизиологии, генетике популяций и т.д.) можно ознакомиться в монографии [49, введение].

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение вида

$$dX(t,\omega)=(AX(t,\omega)+f(t,X(t,\omega))dt+g(t,X(t,\omega))dW(t),\ \ t>0, X\in H \tag{0.9}$$

в сепарабельном гильбертовом пространстве H с начальным условием $X(0,\omega) = \xi(\omega)$, коэффициенты f и g которого удовлетворяют локальному условию Липшица и имеют линейный порядок роста, а линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор $A\colon H \to H$ порождает C_0-полугруппу $S(t)$, $t \geq 0$ (см. [47]). Существуют несколько определений решений для уравнения (0.9) (см. [49, 23]). Как правило, рассматривают либо сильные решения $X(t,\omega)$ как процессы, удовлетворяющие интегральному уравнению

$$X(t,\omega) = \xi(\omega) + \int_0^t (AX(s,\omega) + f(s,X(s,\omega)))ds + \int_0^t g(s,X(s,\omega))dW(s), \quad (0.10)$$

или же слабые решения $X(t,\omega)$ как процессы, удовлетворяющие интегральному уравнению

$$X(t,\omega) = S(0)\xi(\omega) + \int_0^t S(t-s)f(s,X(s,\omega))ds + \int_0^t S(t-s)g(s,X(s,\omega))dW(s). \quad (0.11)$$

К настоящему времени получены глубокие результаты о количественных и качественных свойствах решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. Теоремы о существовании и асимптотических свойствах исходного уравнения с начальным условием доказаны в работах [53], [7–А]. В работах К. Лю [39, 40] были получены п.н. точные асимптотические оценки для решений исходного уравнения с начальным условием без запаздывания с коэффициентами, удовлетворяющими глобальному условию Липшица. В статье А. Ичикава [34] получены оценки для математического ожидания функционала Ляпунова от решения исходной задачи без запаздывания, в случае автономных коэффициентов $f(s, X(s)) = f(X(s))$, $g(s,X(s)) = g(X(s))$, удовлетворяющих глобальному условию Липшица. В статье Т. Танигучи [54] доказана экспоненциальная устойчивость p-го момента решения исходного уравнения $\mathbb{E}\,\|X(s,\omega)\|^p$, $p > 2$, в предположении, что коэффициенты f, g удовлетворяют локальному условию Липшица.

Настоящая работа призвана обобщить полученные результаты. Во второй главе рассматривается уравнение (0.9) с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица и имеющими линейный порядок роста. Для таких уравнений доказана теорема о притяжении слабых решений к нулю.

Третья и четвертая главы данной работы посвящены стохастическим дифференциальным уравнениям с дробными броуновскими движениями. В середине девяностых Т. Лайонс в фундаментальной работе [41] разработал теорию грубых траекторий (rough path). Данная теория нашла активное применение в контексте стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, что было показано Л. Кутэн [22], М. Хайрером и П. Фрицем [25], а также самим Т. Лайонсом. В данной работе был использован альтернативный поход М. Губинелли [30] к определению потраекторных интегралов, во многом схожий с подходом Т. Лайонса, но позволяющий получать более простым путем результаты в приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям с дробными броуновскими движениями, избегая обращения к сложным алгебраическим структурам, возникающим в [41].

Основным объектом изучения третьей главы станет следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = f(X_t)dB_t,\ t \in [0,T], \tag{0.12}$$

в котором $f = (f_0, \ldots, f_d),\ f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ i = 0\ldots,d,$ — достаточно гладкие функции с ограниченными производными, $B_t = (B_t^{(0)}, \ldots, B_t^{(d)})^T,\ B_t^{(0)} = t,$ $B_t^{(i)},\ i = 1, \ldots, d$ — независимые одномерные дробные броуновские движения с индексами Харста $H_i \in (1/3,1)$. Через X_t^x будем обозначать решение уравнения (0.12) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$.

Стоит отметить, что уравнение (0.12) охватывает важный частный случай, когда все индексы Харста $H_i = 1/2$ и, соответственно, дробные броуновские движения $B_t^{(i)}$ обращаются в стандартные винеровские процессы. Известно, что дробное броуновское движение $B_t^{(i)}$ является семимартингалом, если и только если его индекс Харста равен $1/2$. Таким образом, классический стохастический анализ Ито не применим к уравнению (0.12). Стохастические дифференциальные уравнения со сносом, дробными броуновскими движениями и винеровскими процессами принято называть стохастическими дифференциальными уравнениями смешанного типа. Д. Нюаларт и Дж. Гуэрра [32] доказали теорему существования и единственности для уравнений, содержащих винеровский процесс W_t и дробное броуновское движение B_t^H с индексом Харста $H > 1/2$, сочетая при этом теории интегрирования Ито и Янга. Ю.С. Мишура и Г.М. Шевченко [43] обобщили теорему существования для таких уравнений на случай, когда от процессов W_t и B_t^H не требуется их независимость. Некоторые другие обобщения теорем существования, а также свойства стохастических дифференциальных уравнений и включений смешанного типа приведены в статьях [3, 12, 13, 11, 8, 38].

Уравнение (0.12) находит множество приложений, главным образом в физике и финансовой математике. М. Клепцына, А. Ле Бретон и М.-К. Рубо [37] использовали модели с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, для описания сигнальных процессов в фильтрационных системах. П. Черидито [19] рассматривает модель Самуэльсона для движения цен на акции, используя дробные броуновские движения, имеющие различные индексы Харста. М. Зале [57] исследует стохастические дифференциальные уравнения смешанного типа в контексте моделей облигаций и акций. Некоторые другие финансовые приложения уравнений (0.12) также можно найти в книге Ю.С. Мишуры [44, глава 5].

Цель третьей главы состоит в том, чтобы исследовать при малых значениях времени t семейство операторов

$$(\mathbf{P}_t g)(x) = \mathbb{E}(g(X_t^x)), \tag{0.13}$$

соответствующих решениям общих уравнений (0.12) в предположении, что функция g является достаточно гладкой, и ее производные ограничены. Стоит отметить, что асимптотические разложения семейства операторов (0.13) при малых значений времени t могут быть применены для получения дифференциальных уравнений в частных производных колмогоровского типа для математических ожиданий от решений уравнения (0.12) в некоторых частных случаях (например, когда все индексы Харста $H_i = 1/2$ или в так называемом коммутативном случае, описанном в разделе 3.5 третьей главы).

Известны несколько работ, посвященных исследованию семейства операторов (0.13). Ф. Бадуэн и Л. Кутэн [17] вывели асимптотическую формулу для операторов $\mathbf{P}_t$, используя теорию грубых траекторий (rough paths) Т. Лайонса [41] в случае, когда $H_1 = \ldots = H_d > 1/3$ для уравнения (0.12) без сноса. А. Нойенкирх, И. Нурдэн [45] рассматривали уравнение (0.12) со сносом в случае $H_1 = \ldots = H_d > 1/3$ и получили асимптотическую формулу для операторов $\mathbf{P}_t$, используя теорию интегрирования по грубым траекториям М. Губиннелли [30], [25, глава 4]. В третьей главе результаты статей [17, 45] будут обобщены на случай уравнения (0.12) со сносом и дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста. В данной главе уравнение (0.12) рассматривается с точки зрения теории грубых траекторий [41, 25], а все интегралы, в свою очередь, рассматриваются как интегралы типа Стратоновича. Уравнение (0.12) в рамках теории интегрирования по грубым траекториям, развитой М. Губинелли [31], может рассматриваться как уравнение типа

Ито. М. Хайрер и Д. Келли установили связь между стохастическими дифференциальными уравнениями с дробными броуновскими движениями типа Стратоновича и Ито, а также доказали аналог корректирующей формулы Ито-Стратоновича [33].

Третья глава состоит из 5 разделов. Основным результатом представленной главы является теорема об асимптотических разложениях семейства операторов (0.13) при малых значений времени t, обобщающая результаты работ [17, 45] на случай дробного броуновского движения, компоненты которого имеют различные индексы Харста. Кроме того, в представленной главе получена формула типа Ито (формула замены переменных) для уравнения (0.12), выведены формулы для вычисления коэффициентов выше упомянутых асимптотических разложений в случае, когда все индексы Харста $H_i > 1/2$, исследован так называемый коммутативный случай, в котором были получены дифференциальные уравнения в частных производных типа Колмогорова для функций $\varphi(x,t) = \mathbb{E}(g(X_t^x))$, а также исследована непрерывная зависимость решений на ограниченном отрезке от начальных данных.

В разделе, посвященном непрерывной зависимости, наряду с уравнением (0.12) рассматривается аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\widetilde{X}_t = \widetilde{f}(\widetilde{X}_t)dB_t, \quad t \in [0,T], \tag{0.14}$$

где $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_0, \ldots, \widetilde{f}_d)$, $\widetilde{f}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0, \ldots, d$ — также достаточно гладкие функции с ограниченными производными.

Первые результаты, касающиеся непрерывной зависимости от начальных данных решений уравнений (0.12), (0.14) общего вида, где в качестве $(B_t)_{t\in[0,T]}$ выступают функции, непрерывные по Гельдеру с показателем $\alpha > 1/3$, были получены в работе М. Губинелли [30, предложение 8]. В ней же впервые вводится понятие потраекторного интеграла для уравнений (0.12). В монографии [25, гл. 4, 8] выводятся оценки простого вида для потраекторных интегралов Губинелли и также имеется результат, связанный с интегральной непрерывностью решений уравнений (0.12), (0.14) общего вида, см. [25, теорема 8.5]. В приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям указанные результаты означают, что имеет место почти наверное потраекторная интегральная непрерывность решений уравнений вида (0.12), (0.14) с дробным броуновским движением B_t, компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H > 1/3$, в условиях существования указанных решений.

В работе [46] впервые исследуются уравнения смешанного типа, содержащие дробное броуновское движение B_t^H с индексом Харста $H > 1/2$ и стандартное броуновское движение W_t (являющееся частным случаем B_t^H при $H = 1/2$). Здесь интеграл по W_t рассматривается как стохастический интеграл Ито, а интеграл по B_t^H — как потраекторный интеграл Римана-Стилтьеса, введенный в работе [57]. Стоит отметить, что из выведенных в работе [46] оценок можно получить условия, обеспечивающие интегральную непрерывность решений уравнений смешанного типа. В работе [3] получены условия, гарантирующие (α, p)-асимптотическую устойчивость по вероятности и (α, p)-притяжение решений, [3, теорема 1, 2]. Нетрудно заметить, что уравнения смешанного типа являются частным случаем уравнений (0.12).

Исследованию устойчивости уравнений вида (0.12) также посвящена работа [29]. В ней получены условия, обеспечивающие локальную почти наверное экспоненциальную устойчивость нулевого решения уравнения (0.12) на конечном отрезке $[0,T]$ с дробным броуновским движением B_t, компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H > 1/2$.

Основным результатом данного раздела третьей главы являются теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий и правых частей решений уравнений (0.12), (0.14) в условиях существования указанных решений. Доказанная теорема обобщает результаты выше упомянутых работ на случай уравнений со сносом и дробным броуновским движением B_t, компоненты которого имеют различные индексы Харста $H_i > 1/3$, $i = 1, \dots, d$.

Четвертая глава настоящей работы посвящена некоторым методам интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа. Объектом ее изучения является стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{0.15}$$

где $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — детерминированные функции.

Стохастическое дифференциальное уравнение (0.15) называется уравнением смешанного типа, если в определении решения интеграл по стандартному броуновскому движению $W(t)$ понимается как интеграл Ито, а интеграл по дробному броуновскому движению $B(t)$ определяется как потраекторный интеграл Римана-Стилтьеса. Интерес к стохастическим дифференциальным уравнениям смешанного типа вызван тем, что, с одной стороны, они охватывают стохастические дифференциальные уравнения Ито, а с другой стороны, наличие слагаемого с дробным броуновским движением позволяет строить более точные математические модели, учитывающие эффект долговременной памяти процессов, что особенно важно при моделировании экономических и финансовых процессов [18, 19]. В работах [32, 44, 43, 52, 12, 13, 11, 8, 3] исследованы вопросы существования, единственности решений стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, а также общие и асимптотические свойства решений таких уравнений. Стоит отметить, что задача исследования асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений, содержащих дробные броуновские движения, существенно усложняется по сравнению с задачей исследования аналогичных уравнений Ито, а ряд основополагающих методов, таких как второй метод Ляпунова исследования устойчивости, неприменим вовсе [3]. В связи с этим проблема нахождения решений уравнений (0.15) в явном виде представляется актуальной и важной.

Целью четвертой главы является в нахождение методов построения решений (либо их вероятностных характеристик) в явном виде стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа. В частности, приводятся необходимые и достаточные условия, обеспечивающие существование замен переменных, сводящих уравнение (0.15) к простейшим и линейным неоднородным уравнениям смешанного типа, и обобщающие результаты из [24, 9]. Используя подход к интегрированию непрерывных процессов с конечной квадратической вариацией, разработанный в [51], получается соотношение между решениями уравнений (0.15) и решениями соответствующих уравнений Стратоновича. Аналогичная связь хорошо известна для процессов Ито [9] и в ряде случаев помогает строить решения стохастических дифференциальных уравнений в явном виде.

Для нахождения вероятностных характеристик (математических ожиданий, плотностей распределений) решений стохастических дифференциальных уравнений Ито, как правило, используют прямые и обратные уравнения Колмогорова [9]. При выводе этих уравнений ключевую роль играет марковское свойство решений автономных стохастических дифференциальных уравнений Ито [14]. Решения стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, вообще говоря, не являются семимартингалами (даже в простейшем случае $f = g = 0$, $\sigma = 1$) и, как следствие, не обладают марковским свойством. В настоящей работе для вывода аналогов уравнений Колмогорова для автономных уравнений вида (0.15) используется принципиально другой подход: используется явное представление решений уравнений (0.15) через детерминированные дифференциальные потоки, соответствующие коэффициентам уравнения (0.15), при этом ключевую роль играет условие коммутирования соответствующих дифференциальных потоков. Более того, показано, что без предположения о коммутировании дифференциальных потоков, соответствующих коэффициентам уравнения (0.15), аналоги уравнений Колмогорова для смешанных уравнений, вообще говоря, не имеют места. Представленный в настоящей работе подход к выводу аналогов уравнений Колмогорова близок к методам работ [17], [5–A], где аналогичные уравнения получены для уравнений Стратоновича, содержащих дробные броуновские движения с индексами Харста, большими $1/3$. Но в отличие от упомянутых работ в настоящей работе условия на гладкость коэффициентов рассматриваемого стохастического дифференциального уравнения существенно ослаблены за счет того, что показатель Харста соответствующих дробных броуновских движений больше $1/2$.

Основным результатом четвертой главы являются новые методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа, основанные на приведении данного уравнения к простейшему или линейному неоднородному, или к уравнению Стратоновича. Кроме того, в предположении, что коэффициенты стохастического дифференциального уравнения смешанного типа порождают коммутирующие дифференциальные потоки, получены аналоги дифференциальных уравнений Колмогорова для математических ожиданий и плотностей распределений решений.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Исследования проводились в рамках следующих госбюджетных тем:

— Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах (2014 – 2016 гг., номер госрегистрации 20142883)

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является доказательство теорем об устойчивости решений и получение асимптотических разложений для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми в теории стохастических дифференциальных уравнений.

Получены новые результаты в устойчивости нелинейных стохастических уравнений в гильбертовых пространствах. Для неавтономных нелинейных уравнений с разрывными коэффициентами в конечномерных пространствах доказана теорема об асимптотической устойчивости по вероятности слабого нулевого решения по линейному приближению. Для нелинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица, доказана теорема о притяжении слабых решений к нулю. Приведены примеры, иллюстрирующие применение доказанных теорем.

Получены обобщения теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями на случай, когда указанные броуновские движения имеют различных индексы Харста, большие $1/3$. Для нелинейных уравнений, со сносом и дробным броуновскими движениями с различными индексами Харста, большими $1/3$, получены следующие результаты:

– доказана формула Ито (формула замены переменных),

– доказана теорема о непрерывной зависимости в среднем от начальных условий и правых частей решений указанных уравнений,

– доказана теорема, в которой получены асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий от функционалов от решений указанных уравнений,

– получено уравнение, являющееся обобщением обратного уравнения Колмогорова для решения уравнения с указанным дробным броуновским движением в коммутативном случае.

Также в диссертации были исследованы некоторые методы интегрирования смешанных уравнений, содержащих стандартное и дробное броуновское движение с индексом Харста, большим 1/2. Были получены теоремы о приведении указанных уравнений к простейшим, а также к линейным неоднородным уравнениям, теорема о переходу к уравнению Стратоновича. Кроме того, были получены дифференциальные уравнения для математических ожиданий и плотностей распределений решений указанных уравнений.

Положения, выносимые на защиту

Теорема об асимптотической устойчивости системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений по линейному приближению.

Теорема о притяжении к нулю слабых решений нелинейного стохастического дифференциального уравнения в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями.

Теорема о непрерывной зависимости от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями.

Методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа, основанные на приведении данного уравнения к простейшему или линейному неоднородному, или к уравнению Стратоновича.

Личный вклад соискателя ученой степени

Работы [1–А, 2–А, 7–А, 10–А, 12–А] написаны в соавторстве с научным руководителем М.М. Васьковским, а работы [1–А, 7–А] — также в соавторстве с Я.Б. Задворным. Они посвящены исследованию устойчивости стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах методом функций Ляпунова. Идеи совместных исследований были развиты автором в работе [11–А], в которой получены достаточные условия экспоненциальной устойчивости уравнений с разрывными коэффициентами в конечномерных гильбертовых пространствах. Работы [5–А, 6–А, 8–А, 9–А, 14–А], также написанные в соавторстве с научным руководителем М.М. Васьковским, посвящены исследованию асимптотического поведения решений и методов интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста. Идеи совместных исследований были развиты автором в работах [3–А, 13–А], посвященных существованию и непрерывной зависимости решений упомянутых уравнений.

Результаты, включенные в диссертацию и выносимые на защиту, получены лично автором диссертации. Научному руководителю принадлежат постановка задачи и выбор методов исследования.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты работы докладывались и обсуждались на 8-м международном научном семинаре (воркшопе) «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (АМАДЕ–2015) (Минск, 2015), на шестых Богдановских чтениях по обыкновенным дифференциальным уравнениям (Минск, 2015), на XII Белорусской математической конференции (Минск, 2016), на XII международной научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем» (Пенза, Россия, 2017), на XVII и XVIII международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2017» и «Еругинские чтения– 2018» (Минск, 2017 и Гродно, 2018), на международной научной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация», посвященной 100-летию со дня рождения академика Е.А. Барбашина (Минск, 2018), на 74-й и 75-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 2017, 2018). Результаты, включенные в диссертацию, отмечены дипломами 1-й категории Республиканского конкурса научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь (2017, 2018).

Диссертация имеет теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы при проведении исследований по теории устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах и общей теории стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями в научных коллективах, занимающихся исследованием дифференциальных уравнений, в институтах математики НАН РБ, Белорусском Государственном университете, а также при чтении спецкурсов.

Опубликование результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах: из них 4 статьи в научных журналах из перечня научных изданий ВАК, 2 статьи в зарубежных журналах, 1 депонированный отчет, 2 статьи в сборниках трудов международных научных конференций, 5 тезисов докладов международных научных конференций.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, основной части, включающей 4 главы, заключения и библиографического списка.

Объем диссертации — 126 стр., библиографический список содержит 57 источник, включая собственные публикации автора, на 7 стр.

ГЛАВА 1
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В данном разделе диссертации приводятся некоторые сведения и известные результаты из функционального анализа, теории случайных процессов и стохастических дифференциальных уравнений, которые будут использоваться в последующих главах представленной работы.

1.1 Теория меры

Пусть T — некоторое множество. Семейство подмножеств $\mathcal{F}$ множества T называют σ-алгеброй, если для него выполнены следующие свойства: $\emptyset \in \mathcal{F}$; если $A \in \mathcal{F}$, то и $T \setminus A \in \mathcal{F}$; объединение не более чем счетного количества множеств $\cup A_n \in \mathcal{F}$, если $A_n \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$. Пару $(T, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — σ-алгебра подмножеств множества T, называют измеримым пространством.

Рассмотрим функции, определенные на измеримом пространстве $(T, \mathcal{F})$. Функцию $\mu\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$, заданную на множествах σ-алгебры $\mathcal{F}$ называют мерой, если выполнены следующие свойства: $\mu(A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{F}$; $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ для любого не более чем счетного объединения попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathcal{F}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$, $n \neq m$, $n,m \in \mathbb{N}$. Меру μ называют конечной, если $\mu(T) < \infty$. Меру μ называют вероятностной, если она конечна и $\mu(T) = 1$.

Пусть далее T — метрическое пространство. Наименьшую σ-алгебру над открытыми множествами T называют борелевской σ-алгеброй пространства T и обозначают $\mathcal{B}(T)$. Пусть $(T_1, \mathcal{F}_1)$, $(T_2, \mathcal{F}_2)$ — измеримые пространства. Отображение $f\colon T_1 \to T_2$ называют $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$-измеримым, если для любого множества $M \in \mathcal{F}_2$ его прообраз $f^{-1}(M) \in \mathcal{F}_1$. Отображение $f\colon T_1 \to T_2$ называют измеримым по Борелю, если оно $(\mathcal{B}(T_1), \mathcal{B}(T_2))$-измеримо.

Пусть $(T, \mathcal{F}, \mu)$ — измеримое пространство с конечной мерой μ. Рассмотрим заданную на нем функцию $f\colon T \to \mathbb{R}^+$, являющуюся $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$-измеримой. Интегралом Лебега функции f по множеству $I \in \mathcal{F}$

называют предел интегральных сумм

$$\int_I f(t)d\mu = \lim_{n\to\infty}\Bigg(\sum_{i=0}^{n2^n-1}(i\cdot n2^{-n})\cdot\mu\{t\in I:\ i\cdot n2^{-n}<f(t)\le(i+1)\cdot n2^{-n}\}+$$
$$+n\mu\{t\in I:\ f(t)>n\}\Bigg)$$

Для измеримой функции $f\colon T\to\mathbb{R}$, принимающей произвольные действительные значения, введем в рассмотрение функции $f^+(t)=\max\{f(t),0\}$ и $f^-(t)=\min\{-f(t),0\}$; очевидно, $f(t)=f^+(t)-f^-(t)$, $|f(t)|=f^+(t)+f^-(t)$ и $f^+(t),f^-(t)\ge 0$ для любого $t\in T$. Интеграл Лебега определяют как $\int_I f(t)d\mu=\int_I f^+(t)d\mu-\int_I f^-(t)d\mu$ и считают, что функция f интегрируема по Лебегу, если $\int_I|f(t)|d\mu<+\infty$. Для функции $f\colon T\to\mathbb{R}^d$, $f=(f_1,\dots,f_d)$ под интегралом Лебега будем понимать вектор из интегралов Лебега от ее компонент: $\int_I f(t)d\mu=\big(\int_I f_1(t)d\mu,\dots,\int_I f_d(t)d\mu\big)$.

Теорема 1.1 о мажорируемой сходимости (Лебег). *Пусть* $(T,\mathcal{F},\mu)$ *— измеримое пространство с конечной мерой* μ. *Если последовательность* $(\mathcal{F},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$*-измеримых функций* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *сходится почти всюду к функции* $f(t)$ *и при этом существует интегрируемая по Лебегу функция* φ *такая, что* $|f_n|\le\varphi$ *для всех* n, *то* f *— также интегрируемая по Лебегу функция, причем*

$$\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(t)d\mu=\int_I\lim_{n\to\infty}f_n(t)d\mu=\int_I f(t)d\mu.$$

1.2 Теория линейных операторов и полугрупп

Зафиксируем некоторые банаховы пространства X, Y. Через $\mathcal{L}(X)$ обозначим множество линейных ограниченных операторов, действующих из X в X. Однопараметрическое семейство операторов $(T_t)_{t\ge0}\subset\mathcal{L}(X)$ называют полугруппой на X, если: 1) $T_0=I$ (I — тождественный оператор); 2) $T_{t+s}=T_tT_s$ для любых $s,t\ge0$. Полугруппу операторов $(T_t)_{t\ge0}$ называют сильно непрерывной (C_0-полугруппой), если $\|T_tx-T_{t_0}x\|\xrightarrow[t\to t_0]{}0$ для любого $x\in X$. Для сильно непрерывной полугруппы на X оператор A, определенный на множестве $D(A)=\left\{x\in X:\exists\lim\limits_{t\to+0}\frac{T_tx-x}{t}\in X\right\}$ формулой $Ax=\lim\limits_{t\to+0}\frac{T_tx-x}{t}$, $x\in D(A)$, называют генератором полугруппы $(T_t)_{t\ge0}$.

Предложение 1.1. [47, теорема 2.2]. *Пусть* $(T_t)_{t\geq 0}$ *— сильно непрерывная полугруппа на банаховом пространстве* X. *Тогда существуют постоянные* $M \geq 1$, *и* $\beta \in R$ *такие, что* $\|T_t\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\beta t}$ *для всех* $t \geq 0$.

Зафиксируем некоторый полный ортонормированный базис $\{h_i\}$ в банаховом пространстве X. Оператором Гильберта-Шмидта называют оператор $B \in \mathcal{L}(X,Y)$ такой, что $\sum_i \|Bh_i\|_Y^2 < \infty$. В случае, когда X, Y являются сепарабельными гильбертовыми пространствами, множество $L_2(X,Y)$ также образует сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle A, B\rangle_{L_2(X,Y)} = \sum_i \langle Ah_i,Bh_i\rangle_Y$. Будем считать далее, что X — сепарабельное гильбертово пространство. Если оператор $B \in \mathcal{L}(X)$ представим в виде $B = \sum_{i=1}^m A_iC_i$, где $A_1,\ldots, A_m$, $C_1,\ldots, C_m \in L_2(X,X)$, то такой оператор B называют ядерным. Множество всех ядерных операторов, действующих из X в X обозначают $L_1(X)$, оно является сепарабельным банаховым пространством с нормой $\|B\|_{L_1(H)} = \operatorname{tr} B := \sum_i \langle Bh_i,h_i\rangle_X$.

1.3 Теория случайных процессов

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, т.е. измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с заданной на нем вероятностной мерой $\mathbb{P}$. Случайной величиной $\xi = \xi(\omega)$ называют любую функцию $\xi\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, являющуюся $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$-измеримой. Под случайным процессом $X(t,\omega) = X_t(\omega)$, $t \in \mathbb{R}$ понимают семейство заданных на Ω случайных величин $(X_t(\omega))_{t\in\mathbb{R}}$, зависящее от параметра $t \in \mathbb{R}$. Функцию $t \mapsto X(t,\omega)$ при фиксированном $\omega \in \Omega$ называют траекторией процесса $X(t,\omega)$.

Математическим ожиданием случайной величины ξ называют интеграл Лебега $\int_\Omega \xi(\omega) d\,\mathbb{P}$. Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно σ-алгебры $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ называют измеримую относительно $\mathcal{G}$ случайную величину $\widetilde{\xi} = \mathbb{E}(\xi|\mathcal{G})$ такую, что $\mathbb{E}\,\widetilde{\xi}\mathbf{1}_A = \mathbb{E}\,\xi\mathbf{1}_A$ для любого $A \in \mathcal{G}$.

Случайный процесс $X(t,\omega)$, $t \geq \tau$ называют центрированным, если $\mathbb{E}\,X(t,\omega) = 0$ для любого $t \geq \tau$. Случайный процесс $X(t,\omega)$, $t \geq 0$, принимающий значения в $\mathbb{R}^d$, называют гауссовским, если для любых $t_1, t_2, \ldots, t_n$ таких, что $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$, случайная величина $Z = (X(t_1,\omega), X(t_2,\omega), \ldots, X(t_n,\omega)) \in \mathbb{R}^{dn}$ имеет (многомерное) нормальное распределение. Это означает, что существует вектор $M \in \mathbb{R}^{dn}$ и неотрицательно определенная матрица $C \in \mathbb{R}^{dn\times dn}$ такие, что

$$\mathbb{E}\, e^{i\langle u,Z\rangle} = \exp\left(-\frac{1}{2}u^\top Cu + i\langle u, M\rangle\right)$$

для любого вектора $u \in \mathbb{R}^{dn}$.

Рассмотрим возрастающее семейство под-σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)$, $t \geq \tau$ из $\mathcal{F}$ ($\tau \in \mathbb{R}$), т.е. такие σ-алгебры $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}$, что $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ для любых $t \geq s \geq \tau$. Семейство $(\mathcal{F}_t)$ называют непрерывным справа, если $\mathcal{F}_t = \cap_{\varepsilon>0}\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ для любого $t \geq \tau$. Непрерывное справа семейство σ-алгебр называют потоком σ-алгебр. Случайный процесс $X(t,\omega)$, заданный на $[\tau,+\infty) \times \Omega$ и принимающий значения в метрическом пространстве T, называют $\mathcal{F}_t$-согласованным, если для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(T)$ и любого $t \geq \tau$ множество $\{\omega \in \Omega :\ X(t,\omega) \in B\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{F}_t$. Заметим также, что для любого случайного процесса $X(t,\omega)$ существует поток σ-алгебр $(\mathcal{F}^{X_t})$, с которым данный процесс согласован. Такой поток можно построить следующим образом: обозначим через σ_t наименьшую σ-алгебру, относительно которой измеримы все случайные величины $X(s,\omega)$, $s \in [\tau, t]$, тогда $\mathcal{F}^{X_t} = \cap_{\varepsilon>0}\sigma_{t+\varepsilon}$. Далее для краткости будем опускать аргумент $\omega \in \Omega$ у случайных процессов. Пусть $\mathcal{J}$ — наименьшая σ-алгебра на $[\tau,+\infty) \times \Omega$, относительно которой измеримы все непрерывные слева $\mathcal{F}_t$-согласованные случайные процессы. Случайный процесс $X(t,\omega)$, заданный на $[\tau,+\infty) \times \Omega$ и принимающий значения в метрическом пространстве T, называют предсказуемым, если для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(T)$ множество $\{(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega :\ X(t,\omega) \in B\}$ принадлежит σ-алгебре $\mathcal{J}$. Процесс $X(t)$ называют $\mathcal{F}_t$-мартингалом, если он $\mathcal{F}_t$-согласован, $\mathbb{E}\,|X(t)| < +\infty$ для всех t и $\mathbb{E}(X(s)|\mathcal{F}_t) = X(t)$ для всех $s \geq t$.

Пусть U — сепарабельное гильбертово пространство. Зафиксируем некоторый ядерный симметрический положительно определенный оператор $Q \in \mathcal{L}(U)$, для которого существуют полный ортонормированный базис $\{e_k\} \subset U$ и последовательность положительных действительных чисел (λ_k), таких, что $Qe_k = \lambda_k e_k$, $k \geq 1$, tr$Q = \sum_k \lambda_k < \infty$. $\mathcal{F}_t$-согласованным Q-броуновским движением (винеровским процессом) со значениями в U называют непрерывный случайный процесс $W(t)$, $t \geq 0$, принимающий значения в $\mathbb{R}^d$ и удовлетворяющий равенству

$$\mathbb{E}\left(e^{i\langle\xi,W(t)-W(s)\rangle_U}\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right) = e^{-(t-s)\langle Q\xi,\xi\rangle_U/2} \quad \text{п.н.}$$

для любого $\xi \in U$ и любых $t \geq s \geq 0$. Если $W(t)$ — $\mathcal{F}_t$-согласованное Q-броуновское движение, то существует последовательность независимых одномерных $\mathcal{F}_t$-броуновских движений $W_k(t)$, $k \geq 1$ таких, что $W(t) = \sum_k \sqrt{\lambda_k} W_k(t) e_k$, причем данный ряд сходится локально равномерно на $\mathbb{R}^+$ п.н. В случае $U = \mathbb{R}^d$ можно выбрать оператор $Q = I_d$, и в этом случае приходим к определению d-мерного $\mathcal{F}_t$-согласованного броуновского движения. Можно показать, что для одномерного броуновского движения справедливы следующие свойства [4, гл. 1, §7], [14, раздел 2.2]:

– процесс $W(t)$ имеет независимые приращения, т.е. для любых $t_0, t_1, \ldots, t_n$ таких, что $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ случайные величины $W(t_0), W(t_1) - W(t_0), \ldots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ независимы в совокупности;

– приращения $W(t) - W(s)$ для любых $t > s \geq 0$ распределены по нормальному закону с нулевым средним и дисперсией $(t - s)$;

– процесс $W(t)$ имеет неограниченную вариацию на любом отрезке $[S, T] \subset \mathbb{R}^+$, т.е.

$$\sup_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^{n} |W(t_j) - W(t_{j-1})| = +\infty, \quad \text{п.н.}$$

где супремум берется по всем разбиениям $\mathcal{P} = \{S \leq t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq T\}$;

– процесс $W(t)$ является $(\mathcal{F}_t)$-мартингалом.

Дробным броуновским движением с индексом Харста $H \in (0{,}1)$ называют центрированный непрерывный гауссовский процесс $B^{(H)}(t)$, $t \geq 0$ с ковариационной функцией

$$\mathbb{E}\, B^{(H)}(t) B^{(H)}(s) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\right).$$

Существование дробного броуновского движения следует из теоремы существования центрированного гауссовского процесса с заданной ковариационной функцией [50, гл. I, раздел 24]. Процесс $B(t)$ впервые был рассмотрен Колмогоровым в статье [6] в 1940 г., где он назывался спиралью Винера. Название «дробное броуновское движение» процессу $B(t)$ было дано Б. Мандельбротом и Дж. Ван Нессом статье [42] в 1968 г.

Можно показать, что при $H = 1/2$ дробное броуновское движение $B^{(1/2)}(t)$ является винеровским процессом. Иными словами, одномерный процесс $W(t)$ является частным процессом из семейства $B^{(H)}(t)$ при $H = 1/2$. Кроме того, дробное броуновское движение обладает следующими свойствами [18, гл. 1]:

– процесс $B^{(H)}(t)$ имеет независимые приращения тогда и только тогда, когда $H = 1/2$; при $H > 1/2$ приращения положительно коррелированны (т.е.

$\mathbb{E}(B^{(H)}(t_3) - B^{(H)}(t_2))(B^{(H)}(t_2) - B^{(H)}(t_1)) > 0$ для любых $t_3 > t_2 > t_1 \geq 0$), а при $H < 1/2$ — отрицательно;

– почти все траектории процесса $B^{(H)}(t)$ непрерывны по Гельдеру с любым показателем, строго меньшим H, т.е. для любого $\varepsilon > 0$:

$$\|B^{(H)}\|_{H-\varepsilon} = \sup_{0 \leq s < t} \frac{|B^{(H)}(t) - B^{(H)}(s)|}{|t-s|^{H-\varepsilon}} < +\infty$$

– почти все траектории процесса $B^{(H)}(t)$ не дифференцируемы ни в одной точке для любого $H \in (0,1)$ (в том числе траектории винеровского процесса не дифференцируемы).

Под d-мерным дробным броуновским движением будем понимать процесс $B(t) = (B_1(t), \ldots, B_d(t))$, принимающий значения в $\mathbb{R}^d$, компоненты которого являются независимыми одномерными дробными броуновскими движениями.

1.4 Интегралы по броуновскому движению

Под стохастическим дифференциальным уравнением понимают формальное уравнение вида

$$dX(t,\omega) = f(t,\omega, X(t,\omega))dt + g(t, \omega, X(t, \omega))dB(t,\omega),$$

в котором $B(t, \omega)$ — стандартное или дробное броуновское движение. Формализм приведенной записи заключается в том, что ввиду недифференцируемости траекторий процесса $B(t)$, выражение $dB(t)$ лишено смысла, что, в свою очередь, делает невозможным понимание стохастических дифференциальных уравнений в русле классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому, не разрывая связи с классической теорией, опираясь на интегральный критерий, стохастическое дифференциальное уравнение понимают в интегральном смысле, как уравнение вида

$$X(t,\omega) = X(s,\omega) + \int_s^t f(\tau,\omega, X(\tau,\omega))d\tau + \int_s^t g(\tau, \omega, X(\tau, \omega))dB(\tau,\omega).$$

Здесь интеграл по $d\tau$ определяется как интеграл Лебега при каждом фиксированном ω. В свою очередь, определение интеграла по dB сильно зависит от свойств процесса B. Рассмотрим несколько способов определения интеграла $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$, которые будут использоваться в данной работе.

1.4.1 Потраекторный интеграл Янга

Обратимся сначала к случаю, когда $B(t)$ — дробное броуновское движение, принимающее значения в $\mathbb{R}^d$, все компоненты которого имеют индекс Харста $H > 1/2$. Тогда почти все траектории процесса $B(t)$ непрерывны по Гельдеру с любым показателем, меньшим H. Из результатов Янга [56] следует, что для любого процесса $\phi(t,\omega)$, почти все траектории которого непрерывны по Гельдеру с показателем $\gamma > 1 - H$, можно определить интеграл по $B(t)$ как потраекторный интеграл Римана-Стилтьеса (зачастую называемый интегралом Янга), т.е. как предел с вероятностью 1 интегральных сумм

$$\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \phi(\tau_k,\omega)(B(t_k,\omega) - B(t_{k-1},\omega)).$$

Здесь предел понимается не зависящим от последовательности разбиений $\mathcal{P} = \{S \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le T\}$ и промежуточных точек $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $|\mathcal{P}| = \max |t_k - t_{k-1}|$, $k = 1, \ldots, n$. В свою очередь, применительно к стохастическим дифференциальным уравнениям, показатель непрерывности по Гельдеру процесса $\phi(t,\omega) = \sigma(t, X(t,\omega))$ определяется показателем непрерывности решения $X(t,\omega)$ (совпадающим с показателем $B(t,\omega)$). Таким образом, с необходимостью возникает неравенство $H > 1 - H$, откуда $H > 1/2$.

Обозначим через $V_p(f, [S,T]) = \left(\sup\limits_{\mathcal{P}} \sum_{j=1}^{n} |f(t_j) - f(t_{j-1})|^p\right)^{1/p}$, $p > 0$, p-вариацию функции $f(t)$ на отрезке $[S,T]$ (супремум берется по всем разбиениям $\mathcal{P} = \{S \le t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n \le T\}$). Для интеграла Янга справедливо следующее фундаментальное свойство.

Предложение 1.2 (неравенство Лав-Янга, [56]). *Пусть функции $f(t)$, $g(t)$ таковы, что $V_p(f, [S,T]), V_q(g, [S,T]) < +\infty$ для некоторых $p,q > 0$ таких, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$. Если к тому же функции f и g не имеют общих точек разрыва, то интеграл Янга $\int_S^T f(t)dg(t)$ существует, и для него справедливо следующее неравенство:*

$$\left| \int_S^T f(t)dg(t) - f(\tau)(g(T) - g(S)) \right| \le C_{p,q} V_p(f, [S,T]) V_q(g, [S,T])$$

для любого $\tau \in [S,T]$, где $C_{p,q} = \zeta(p^{-1} + q^{-1})$, где $\zeta(s) = \sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^s}$ — дзета-функция Римана.

1.4.2 Стохастический интеграл Ито

Рассмотрим случай, когда $B(t) = W(t)$ — стандартное броуновское движение ($H = 1/2$), принимающее значения в $\mathbb{R}^d$. Поскольку процесс $B(t)$ имеет неограниченную вариацию, то интегральные суммы Стилтьеса для интеграла $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$ п.н. не будут сходиться, т.е. данный интеграл невозможно определить в потраекторном смысле как интеграл Стилтьеса. Приведем простой пример, иллюстрирующий данный факт: рассмотрим интеграл $\int_0^T B(t,\omega)dB(t,\omega)$ по одномерному стандартному броуновскому движению $B(t)$ как потраекторный предел (для почти всех $\omega \in \Omega$) двух интегральных сумм:

$$I_{\mathcal{P}}^{(1)} = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} B(t_j)(B(t_{j+1}) - B(t_j)), \quad I_{\mathcal{P}}^{(2)} = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} B(t_{j+1})(B(t_{j+1}) - B(t_j))$$

на разбиении $\mathcal{P} = \{0 = t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_n = T\}$ отрезка $[0,T]$. Тогда с одной стороны ввиду независимости приращений $B(t)$:

$$\mathbb{E}\, I_{\mathcal{P}}^{(1)} = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}\, B(t_j)\, \mathbb{E}(B(t_{j+1}) - B(t_j)) = 0.$$

А с другой стороны, поскольку приращения $B(t) - B(s)$ распределены по нормальному закону с дисперсией $t - s$:

$$\mathbb{E}\, I_{\mathcal{P}}^{(2)} = \mathbb{E}(I_{\mathcal{P}}^{(2)} - I_{\mathcal{P}}^{(1)}) = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} \mathbb{E}(B(t_{j+1}) - B(t_j))^2 = \sum_{t_j,t_{j+1}\in\mathcal{P}} (t_{j+1} - t_j) = T.$$

Таким образом, предел интегральных сумм Римана-Стилтьеса зависит от выбора промежуточных точек, что недопустимо. Поэтому для стандартного броуновского движения предел интегральных сумм понимается в смысле $\mathcal{L}_2$, а сами суммы строятся несколько иначе. Далее приведем краткое описание подхода Ито к построению таких интегралов.

Рассмотрим для начала одномерный процесс $B(t) \in \mathbb{R}$. Выделим класс случайных процессов $\phi(t,\omega)\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$, обозначаемый $\mathcal{L}_2(S,T)$, со следующими свойствами:

1. процесс $\phi(t,\omega)$ является $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-измеримым;
2. процесс $\phi(t,\omega)$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным;
3. $\|\phi\|^2_{\mathcal{L}_2(S,T)} = \mathbb{E} \int_S^T (\phi(t,\omega))^2 dt < +\infty$.

Будем говорить, что последовательность $\phi_n \in \mathcal{L}_2(S,T)$ сходится к $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$ в $\mathcal{L}_2(S,T)$, если $\|\phi - \phi_n\|^2_{\mathcal{L}_2(S,T)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Для каждой функции $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$ можно построить сходящуюся к ϕ в $\mathcal{L}_2(S,T)$ последовательность ограниченных непрерывных по t функций $\phi_n \in \in \mathcal{L}_2(S,T)$ следующим образом [14, гл. 3]:

$$\phi_n(t,\omega) = \int_0^t \psi_n(s-t)\bar{\phi}_n(t,\omega)ds,$$

$$\bar{\phi}_n(t,\omega) = \begin{cases} -n, & \text{если } \phi(t,\omega) < -n, \\ \phi(t,\omega) & \text{если } -n \le \phi(t,\omega) \le n, \\ n, & \text{если } \phi(t,\omega) > n \end{cases}$$

Здесь $\psi_n(t)$ — любые наперед заданные непрерывные функции такие, что $\psi(t) = 0,\ t \notin (1/n, 0)$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t) = 1$. В свою очередь, для $\phi_n(t,\omega)$ можно построить последовательность ступенчатых функций $\phi_{nm}(t,\omega) \in \mathcal{L}_2(S,T)$, сходящуюся к ϕ_n в $\mathcal{L}_2(S,T)$, следующего вида [14, гл. 3]:

$$\phi_{nm}(t,\omega) = \sum_{j=0}^{m} \phi_n(t_j,\omega)\mathbf{1}_{[t_j,t_{j+1})}(t),$$

где точки $t_j \in \mathcal{P}$ образуют разбиение отрезка $[S,T]$, $t_0 = S$, $t_{m+1} = T$. Таким образом, для любой функции $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$ можно построить сходящуюся к ней в $\mathcal{L}_2(S,T)$ последовательность ступенчатых функций $\phi_m \in \mathcal{L}_2(S,T)$.

Интегралом Ито $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$ функции $\phi \in \mathcal{L}_2(S,T)$ называют элемент $\mathcal{I}(\phi) \in \mathcal{L}_2(S,T)$, являющийся пределом последовательности $\mathcal{I}(\phi_m)$ в $\mathcal{L}_2(S,T)$ интегралов Ито от ступенчатых функций ϕ_m следующего вида:

$$I(\phi_m) = \sum_{j=0}^{m} \phi_m(t_j,\omega)(B(t_{j+1},\omega) - B(t_j,\omega)).$$

Интеграл Ито от функции $\phi\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{n\times d}$ по d-мерному броуновскому движению $B(t)$ определяется аналогичным образом. Говорят, что функция $\phi(t,\omega) = (\phi_{jk}(t,\omega)) \in \mathcal{L}_2(S,T)$, если каждая ее компонента $\phi_{jk}(t,\omega) \in \in \mathcal{L}_2(S,T)$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,d}$. Интеграл Ито $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$ представляет собой вектор размера n, в которой элемент в позиции j есть сумма одномерных интегралов Ито, определенных выше:

$$\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega) = \left(\sum_{k=1}^{d} \int_S^T \phi_{jk}(t,\omega)dB^{(k)}(t,\omega)\right)_{j=1}^{n}.$$

Приведем некоторые свойства интеграла Ито [14, гл. 3], [4, с. 56–60]:

1. нулевое среднее: $\mathbb{E}\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega) = 0$;
2. изометрия: $\mathbb{E}\left(\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)\right)^2 = \mathbb{E}\int_S^T (\phi(t,\omega))^2 dt$;
3. интеграл Ито $\int_0^t \phi(\tau,\omega)dB(\tau,\omega)$ является $(\mathcal{F}_t)$-мартингалом.

Пусть заданы измеримые $\mathcal{F}_t$-согласованные процессы $a\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $b\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{n\times d}$ такие, что $\int_0^t |a(s,\omega)|^2 ds < +\infty$ и $\int_0^t |b(s,\omega)| ds < +\infty$ п.н. для любого $t \geq 0$, $X(0,\omega)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина и $X(t,\omega)$ — n-мерный случайный процесс, определяемый равенством

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t a(s,\omega)ds + \int_0^t b(s,\omega)dB(s).$$

Теорема 1.2. (Фомула Ито, [4, теорема 5.1]). *Пусть* $f\colon \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — *функция, непрерывная вместе со своими частными производными* $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $i,j = 1,\ldots,n$. *Тогда для процесса* $X(t,\omega)$, *определенного выше, п.н. справедливо равенство*

$$f(t,X(t,\omega)) = f(0,X(0,\omega)) + \int_0^t \left(\frac{\partial f(\tau,X(\tau,\omega))}{\partial t} + \frac{\partial f(\tau,X(\tau,\omega))}{\partial x}a(\tau,\omega) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 f(\tau,X(\tau,\omega))}{\partial x^2} b(\tau,\omega)b(\tau,\omega)^\top\right)\right)d\tau + \int_0^t \frac{\partial f(\tau,X(\tau,\omega))}{\partial x} b(\tau,\omega)dB(\tau,\omega).$$

Далее будет дано определение интеграла Ито по $\mathcal{F}_t$-согласованному Q-броуновскому движению $W(t)$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве U, Q — симметрический положительно определенный ядерный оператор. Пусть H — также сепарабельное гильбертово пространство. Введем пространство измеримых $\mathcal{F}_t$-согласованных процессов $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to L_2(U,H)$ (обозначаемое $\mathcal{L}_2$) таких, что для любого $T > 0$:

$$\|\Phi(t)\|_{2,T} = \left(\mathbb{E}\int_0^T \|\Phi(s)\|^2_{L_2(U,H)} ds\right)^{1/2} =$$
$$= \left(\mathbb{E}\int_0^T \mathrm{tr}\left((\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^\star\right)ds\right)^{1/2} < \infty.$$

Процессы Φ,Φ' отождествляются, если $\|\Phi - \Phi'\|_{2,T} = 0$ для любого $T > 0$. Выделим подмножество $\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_2$ процессов $\Phi \in \mathcal{L}_0$, для которых существует последовательность вещественных чисел $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$, $t_n \to \infty$, а также последовательность $\mathcal{F}_{t_i}$-измеримых случайных величин (Φ_i)

со значениями в $L_2(U,H)$ таких, что $\sup_i ess\sup_\omega \ \|f_i(\omega)\| < \infty$ и $\Phi(0,\omega) = \Phi_0(\omega)$, $\Phi(t,\omega) = \Phi_i(t,\omega)$ для $t \in (t_i,t_{i+1}]$, $i = 1,2,\dots$ Для $\Phi \in \mathcal{L}_0$ положим $\int_0^t \Phi(s)dW(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi_i(W(t_{i+1}) - W(t_i)) + \Phi_n(W(t) - W(t_n))$ для $t_n < t \le t_{n+1}$, $n = 1,2,\dots$ Можно показать, что множество $\mathcal{L}_0$ плотно в $\mathcal{L}_2$ по норме пространства $\mathcal{L}_2$, а посему для любого процесса $\Phi \in \mathcal{L}_2$ найдется последовательность процессов $(\Phi_n) \subset \mathcal{L}_0$, сходящаяся к Φ по норме $\mathcal{L}_2$. Предел сходящейся последовательности $\int_0^t \Phi_n(s)dW(s)$, являющийся H-значным непрерывным п.н. мартингалом, обозначаемым $\int_0^t \Phi(s)dW(s)$, называют интегралом Ито от процесса $\Phi(t)$ по Q-броуновскому движению $W(t)$.

Предложение 1.3. (Формула Ито для гильбертовых пространств [49, с. 105]). *Пусть $\Phi(t)$, $t \in [0,T]$, — квадратично интегрируемый случайный процесс со значениями в $L_2(U,H)$, $\varphi(t)$, $t \in [0,T]$, — предсказуемый случайный процесс со значениями в H такой, что функция $\|\varphi(t)\|_H$ является $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$-измеримой и $\int_\Omega \|\varphi(t)\|_H d\,\mathbb{P} < \infty$. Пусть также $X(0)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина со значениями в H, а процесс $X(t)$ определяется равенством*

$$X(t) = X(0) + \int\limits_0^t \varphi(s)ds + \int\limits_0^t \Phi(s)dW(s),\ t \in [0,T].$$

Тогда для любой функции $F\colon [0,T]\times H \to \mathbb{R}$, равномерно непрерывной на каждом ограниченном подмножестве из $[0,T] \times H$ вместе со своими частными производными F'_t, F'_x, F''_{xx}, для любого $t \in [0,T]$ п.н. справедливо равенство

$$F(t,X(t)) = F(0,X(0)) + \int\limits_0^t \Big(F'_t(s,X(s)) + \langle F'_x(s,X(s)), \varphi(s)\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(F''_{xx}(s,X(s))(\Phi(s)Q^{1/2})(\Phi(s)Q^{1/2})^\star \right)\Big) ds + \int\limits_0^t \langle F'_x(s,X(s)),\Phi(s)dW(s)\rangle.$$

Предложение 1.4. (Неравенство Буркхольдера [48]). *Пусть $p > 1$, $S(t)$ — C_0-полугруппа на H. Тогда для любого $\mathcal{F}_t$-согласованного процесса $\Phi\colon [0,T] \times \Omega \to L_2(U,H)$ такого, что $\mathbb{E}\left(\int_0^T \|\Phi(s)\|^p ds\right) < +\infty$, выполнятся неравенство*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{\tau\in[0,t]} \left\| \int_0^\tau S(\tau - s)\Phi(s)dW(s)\right\|^p\right) \le C_{p,T}\,\mathbb{E}\left(\int_0^t \|\Phi(s)\|^p ds\right),\ t \in [0,T]$$

где $C_{p,T} = \left(\frac{p^2-p}{2}\right)^{p/2} \left(\sup_{t\in[0,T]} \|S(t)\|\right)^p T^{p/2-1}$.

1.4.3 Потраекторный интеграл Губинелли

Наконец, рассмотрим случай, когда $B(t)$ — дробное броуновское движение, принимающее значения в $\mathbb{R}^d$, все компоненты которого имеют индекс Харста $H < 1/2$. Вновь, поскольку процесс $B(t)$ имеет неограниченную вариацию, то интегральные суммы Стилтьеса для интеграла $\int_S^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega)$ п.н. не будут сходиться, однако, оказывается, что в интегральные суммы можно ввести дополнительные слагаемые, позволяющие им сходиться п.н. Данный метод возник в теории грубых траекторий [41], [25], [30], позволяющем определить интегралы $\int_0^T Y_t dZ_t$ для функций Y_t, Z_t, непрерывных по Гельдеру (не обязательно случайных процессов, зависящих также от ω). Приведем некоторые основные положения данной теории в соответствии с подходом Губинелли [30], [25, гл. 4].

Будем обозначать через V, W конечномерные банаховы пространства над полем $\mathbb{R}$. Пространство функций, непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha \in \in (0,1]$, будем обозначать следующим образом:

$$C^\alpha([0,T], W) = \left\{ Z\colon [0,T] \to W \;\middle|\; \|Z\|_\alpha = \sup_{s,t\in[0,T]: s\neq t} \frac{|Z_t - Z_s|_W}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\}.$$

Через $\|\cdot\|_{\alpha;I}$ обозначим норму Гельдера с показателем α на отрезке I, а через $\|\cdot\|_{\alpha;I,\delta}$ — норму Гельдера с показателем α, взятую по подотрезкам отрезка I длины не более δ, т.е.

$$\|Y\|_{\alpha;I} = \sup_{\substack{s,t\in I\\ s\neq t}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}, \quad \|Y\|_{\alpha;I,\delta} = \sup_{\substack{s,t\in I\\ 0<|t-s|\le\delta}} \frac{|Y_{s,t}|}{|t-s|^\alpha}$$

для функций $Y \in C^\alpha([0,T], U_1)$ или $Y \in C_2^\alpha([0,T]^2, U_2)$. Очевидно,

$$\|\cdot\|_{\alpha;I,\delta} \le \|\cdot\|_{\alpha;I} \le \|\cdot\|_{\alpha;[0,T],|I|} \le \|\cdot\|_{\alpha;[0,T]}$$

для любых $I \subset [0,T]$, $\delta \in (0,|I|]$, где I — длина отрезка I.

В дальнейшем будут рассматриваться функции $R(s,t)$, отображающие $(s,t) \in [0,T]^2$ непрерывно в W, которые удовлетворяют некоторому аналогу свойства α-непрерывности по Гельдеру [25, глава 1]. Более точно, будем считать, что функция двух переменных $R(s,t) = R_{s,t} \in C_2^\alpha([0,T]^2, W)$, если существует константа C такая, что $|R_{s,t}| \leq C|t-s|^{\alpha}$ для всех $(s,t) \in [0,T]^2$. Наименьшую такую константу будем обозначать как

$$\|R\|_{\alpha} = \sup_{s,t \in [0,T]: s \neq t} \frac{|R_{s,t}|_W}{|t-s|^{\alpha}}.$$

Отметим также, что если $Z \in C^{\alpha}([0,T], W)$ — непрерывная по Гельдеру функция одной переменной, то ее приращения $(s,t) \mapsto Z_t - Z_s$ принадлежат пространству $C_2^{\alpha}([0,T]^2, W)$. Поэтому обозначение $Z_{s,t} = Z_t - Z_s$ будет также использоваться для приращений функции одной переменной Z, определенной на $[0,T]$.

Пусть $\alpha \in (1/3, 1/2]$.

Говорят, что для функции $Z\colon [0,T] \to W$ функция $\mathbb{Z}\colon [0,T]^2 \to W \otimes W$ является процессом второго порядка над Z, если она удовлетворяет следующему тождеству Чена:

$$\mathbb{Z}_{s,t} - \mathbb{Z}_{s,u} - \mathbb{Z}_{u,t} = Z_{s,u} \otimes Z_{u,t}$$

для любой тройки $(s,u,t) \in [0,T]^3$.

Под множеством α-непрерывных по Гельдеру грубых траекторий над W (обозначаемым $\mathscr{C}^{\alpha}([0,T], W)$) понимают множество всех пар $(Z, \mathbb{Z})$ таких, что функция $Z \in C^{\alpha}([0,T], W)$ и $\mathbb{Z}$ является процессом второго порядка над Z, удовлетворяющим условию $\|\mathbb{Z}\|_{2\alpha} < \infty$.

Под множеством α-непрерывных по Гельдеру геометрических грубых траекторий над W (обозначаемым $\mathscr{C}_g^{\alpha}([0,T], W)$) понимают множество всех пар $(Z, \mathbb{Z}) \in \mathscr{C}^{\alpha}([0,T], W)$, для которых имеет место следующее соотношение:

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{Z}_{s,t}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{Z}_{s,t} + \mathbb{Z}_{s,t}^T\right) = \frac{1}{2} Z_{s,t} \otimes Z_{s,t}$$

для любой пары $(s,t) \in [0,T]^2$.

Говорят, что функция $Y \in C^{\alpha}([0,T], \mathcal{L}(W,V))$ управляется функцией $Z \in C^{\alpha}([0,T], W)$, если существует $Y' \in C^{\alpha}\big([0,T], \mathcal{L}(W, \mathcal{L}(W,V))\big)$ (называемое производной Губинелли Y), такое, что остаток $R_{s,t}^Y = Y_{s,t} - Y_s' Z_{s,t}$ удовлетворяет неравенству $\|R^Y\|_{2\alpha} < +\infty$. Множество всех (Y, Y') таких, что Y управляется Z, будем обозначать $\mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(W,V))$.

Замечание 1.1. Множество $\mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(W,V))$ является банаховым пространством с нормой $\|(Y,Y')\| = |Y_0| + |Y_0'| + \|Y'\|_{\alpha} + \|R^Y\|_{2\alpha}$.

Замечание 1.2. В общем случае Y' определено неоднозначно, и мы будем называть производной Губинелли любое Y', удовлетворяющее сформулированному выше определению.

Замечание 1.3. Далее для обозначения производной Губинелли будем использовать $'$, а обычную производную будем записывать с помощью дифференциального оператора D.

Пусть $(Z,\mathbb{Z}) \in \mathscr{C}^{\alpha}([0,T],W)$, а также $(Y,Y') \in \mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T],\mathcal{L}(W,V))$. Потраекторным интегралом Губинелли Y по Z называют предел интегральных сумм

$$\int_0^T YdZ = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\mathcal{P}} (Y_{t_i} Z_{t_i,t_{i+1}} + Y'_{t_i}\mathbb{Z}_{t_i,t_{i+1}}), \tag{1.1}$$

где $|\mathcal{P}| = \max|t_{i+1} - t_i|$ – диаметр разбиения $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = T\}$, а предел понимается не зависящим от последовательности разбиений $\mathcal{P}$. Если $Z \in C^{\beta}([0,T],W)$, $Y \in C^{\gamma}([0,T],\mathcal{L}(W,V))$, $\beta+\gamma > 1$, то потраекторный интеграл Губинелли совпадает с потраекторным интегралом Янга, определяемым как предел интегральных сумм

$$\int_0^T YdZ = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i,t_{i+1}\in\mathcal{P}} Y_{t_i} Z_{t_i,t_{i+1}}.$$

Замечание 1.4. Слагаемое $Y'_{t_i}\mathbb{Z}_{t_i,t_{i+1}}$ записано корректно в том смысле, что $\mathcal{L}(W,L(W,V)) \cong \mathcal{L}(W\otimes W,V)$. Действительно, указанное произведение можно понимать как результат действия билинейной формы на тензорное произведение двух векторов. Более точно, если

$$\mathbb{Z} = z\otimes z = (z_j z_k)\,, \quad Y' = \left(y'_{ijk}\right),$$
$$i = 1,2,\ldots,\mathrm{dim}V, \quad j,k = 1,2,\ldots,\mathrm{dim}W,$$

то

$$Y'\mathbb{Z} = \left(\sum_{j,k=1}^{\mathrm{dim}W} y'_{ijk} z_j z_k\right)_{i=1}^{\mathrm{dim}V}.$$

Посему потраекторный интеграл, определенный выше, принимает значения в пространстве V.

Далее будет существенно использоваться следующее предложение [25, теорема 4.10], [30, предложение 1].

Предложение 1.5. *Пусть функция* $Z \in \mathscr{C}^{\alpha}(I,W)$ *и* $(Y,Y') \in \mathcal{D}_Z^{2\alpha}(I,\mathcal{L}(W,V))$, $I = [0,T]$. *Тогда существует константа* $C > 0$, *зависящая лишь от* α *и* $|I| = T$, *такая, что для любых* $s,t \in I$ *выполняется неравенство*

$$\left|\int_s^t Y_r dZ_r - Y_s Z_{s,t} - Y_s' \mathbb{Z}_{s,t}\right| \leq C\left(\|Z\|_{\alpha;I}\|R^Y\|_{2\alpha;I} + \|\mathbb{Z}\|_{2\alpha;I}\|Y'\|_{\alpha;I}\right)|t-s|^{3\alpha}.$$

Причем константа $C = C(\alpha,|I|)$ *может быть выбрана не зависящей от* $|I| = T$, *если* $T \in (0,1]$.

Замечание 1.5. В предложении 1.5 несущественен тот факт, что отрезок I имеет вид $[0,T]$. Для произвольного отрезка $I = [a, a+T]$ предложение также справедливо ввиду замены переменных $\bar{s} = s - a$, $\bar{t} = t - a$ ($s,t \in [a, a+T]$, $\bar{s},\bar{t} \in [0,T]$) и замен функций $\bar{Y}_{\bar{s}} = Y_{a+\bar{s}}$, $\bar{Z}_{\bar{s}} = Z_{a+\bar{s}}$ (очевидно, указанные нормы и интегралы сохраняют свои значения).

Необходимость ограничения $\alpha > 1/3$ на интуитивном уровне можно пояснить следующим образом: в слагаемом вида $Y'\mathbb{Z}$ в интегральной сумме функция $Y' \in C^{\alpha}$, а $\mathbb{Z} \in C_2^{2\alpha}$. Из условия сходимости интегральных сумм потраекторного интеграла Янга можно заключить, что $\alpha + 2\alpha > 1$, т.е. $\alpha > 1/3$.

Вернемся к дробному броуновскому движению. При $H \in (1/3, 1/2)$ п.н. имеет место включение $B(t) \in C^{H^*}([0,T],\mathbb{R}^d)$ для любого $H^* < H$, $H^* > 1/3$. Поэтому для любого процесса $\phi(t,\omega)$ п.н. управляемого дробным броуновским движением $B(t)$ можно определить потраекторный интеграл Губинелли как предел п.н. интегральных сумм

$$\int_0^T \phi(t,\omega)dB(t,\omega) = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{t_i,t_{i+1}\in\mathcal{P}}(\phi(t_i,\omega)B_{t_i,t_{i+1}}(\omega) + \phi'(t_i,\omega)\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}(\omega))$$

при некотором выборе процесса второго порядка $\mathbb{B}$ над B. В главе 3 будет приведено явное определение процесса второго порядка над B, удовлетворяющего указанным выше определениям.

ГЛАВА 2
ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

Пусть заданы следующие объекты: вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, два сепарабельных гильбертовых пространства H и U; ядерный симметрический положительно определенный оператор Q_w на пространстве U; $\mathcal{F}_t$-согласованное Q_w-броуновское движение $W(t,\omega)$ со значениями в U и ковариационным оператором Q_w.

2.1 Стохастические дифференциальные уравнения в конечномерных гильбертовых пространствах

Данный раздел посвящен исследованию устойчивости в конечномерных пространствах $H = U = \mathbb{R}^d$. В этом случае $Q_w = I_d$ и $W(t)$ — стандартное броуновское движение со значениями в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t), \tag{2.1}$$

где $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — измеримые по Борелю функции такие, что $f(t, 0) = 0$ и $g(t, 0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^d$ и выполнено условие линейного порядка роста по x, то есть существует постоянная C такая, что для любых $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$, выполняется неравенство $|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq C(1 + |x|)$.

Пусть $\sigma(t,x) = g(t,x)g(t,x)^\top$. Для каждого $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ построим наименьшие выпуклые замкнутые множества $A(t,x)$, $B(t,x)$, содержащими соответственно матрицу $\sigma(t, x)$ и вектор $f(t,x)$ и все предельные точки $\sigma(t,x')$ и $f(t, x')$ при $x' \to x$.

Определение 2.1. Если:

1) существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ с потоком $\mathcal{F}_t$ и отображение $X \colon \Omega \to C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^d)$ такие, что функция $(t, \omega) \to X(t, \omega) \in \mathbb{R}^d$ — $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-измерима и $\mathcal{F}_t$-согласована;

2) существует $(\mathcal{F}_t)$-броуновское движение $W(t)$, $W(0) = 0$ п. н.;

3) существуют измеримые $(\mathcal{F}_t)$-согласованные процессы $v\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ и $u\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{d\times d}$, удовлетворяющие для $(\mu \times \mathbb{P})$-почти всех $(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$ включениям

$$v(t) \in B(t, X(t,\omega)), \quad u(t)u^\top(t) \in A(t, X(t,\omega)),$$

и такие, что для любого $T \in \mathbb{R}^+$ выполняется неравенство $\int_0^T (|v(s)| + |u(s)|^2)ds < \infty$ п. н.;

4) с вероятностью 1 для всех $t \in \mathbb{R}^+$ выполняется равенство

$$X(t) = X(0) + \int_0^t v(\tau)d\tau + \int_0^t u(\tau)dW(\tau),$$

то набор $(X, \Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, W(t), v(t), u(t))$ (или короче X) называем β-слабым решением уравнения (2.1).

Заметим, что условия $f(t,0) = 0$ и $g(t,0) = 0$ обеспечивают существование нулевого решения уравнения (2.1). Из теоремы 2.3 книги [10] следует, что если функции f и g измеримы по Борелю и имеют линейный порядок роста, то для любой вероятности ν на $(\mathbb{R}^d,\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ с компактным носителем уравнение (2.1) имеет слабое решение $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathcal{F}_t, W(t), x(t), v(t), u(t))$ с начальным распределением ν.

Определение 2.2. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (2.1) устойчиво по вероятности, если для любых ε_1, $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого слабого решения $x(t)$ уравнения (2.1), удовлетворяющего условию $|x_0| \le \delta$ п.н., выполняется неравенство (2.2):

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\ge 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2. \tag{2.2}$$

Определение 2.3. Будем говорить, что нулевое решение уравнения (2.1) асимптотически устойчиво по вероятности, если нулевое решение уравнения (2.1) устойчиво по вероятности и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого слабого решения $x(t)$ уравнения (2.1), удовлетворяющего условию $|x_0| \le \delta$ п.н., выполняется неравенство (2.3):

$$\mathbb{P}\{\lim_{t\to\infty} x(t) = 0\} \ge 1 - \varepsilon. \tag{2.3}$$

Предположим, что определена функция $V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$. Будем говорить, что функция $V(t,x)$ удовлетворяет **условию** L, если она непрерывно дифференцируема по t, дважды непрерывно дифференцируема по x и существует $\delta > 0$ такое, что для любого $t \in \mathbb{R}^+$ и любого $x \in \mathbb{R}^d$ такого, что $|x| \le \delta$, выполнено неравенство $BV(t,x) \le 0$, где

$$BV(t,x) = \frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \sup_{v \in F(t,x)} \left(\frac{\partial V(t,x)}{\partial x} v \right) + \frac{1}{2} \sup_{u \in G(t,x)} \mathrm{tr} \left(\frac{\partial^2 V(t,x)}{\partial x^2} u u^\top \right). \quad (2.4)$$

Следующие две теоремы[1], дающие достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по вероятности нулевого решения уравнения (2.1), доказаны в статье 1–А.

Теорема 2.1. *Пусть функция $V(t,x)$ удовлетворяет условию L, причем $V(t,0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$, $V(t,x) \ge \alpha(|x|) > 0$ при $0 < |x| \le \delta$ и всех $t \in \mathbb{R}^+$, где $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – некоторая функция, δ – число из условия L. Кроме того, предположим, что $\lim\limits_{x \to 0} \sup\limits_{t > 0} V(t,x) = 0$. Тогда нулевое решение уравнения* (2.1) *устойчиво по вероятности.*

Теорема 2.2. *Пусть существуют число $\delta > 0$ и функция $V : \mathbb{R}^+ \times \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^+$, дифференцируемая по $t \in \mathbb{R}^+$, дважды дифференцируемая по x, удовлетворяющие условиям:*

1) *$BV(t,x) < \beta(\varepsilon) < 0$ при всех x таких, что $\varepsilon \le |x| \le \delta$, и при всех $t \in \mathbb{R}^+$, где $\beta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^-$ – некоторая функция;*

2) *$\lim\limits_{x \to 0} \sup\limits_{t > 0} V(t,x) = 0$;*

3) *$V(t,0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$;*

4) *$V(t,x) \ge \alpha(|x|) > 0$ при всех x таких, что $|x| \le \delta$, и всех $t \in \mathbb{R}^+$, где $\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – некоторая функция.*

Тогда нулевое решение уравнения (2.1) *асимптотически устойчиво по вероятности.*

Исследуем устойчивость слабого нулевого решения стохастического дифференциального уравнения (2.1) с выделенной линейной частью вида

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t)))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \ge 0. \quad (2.5)$$

[1]Авторство указанных теорем принадлежит Я.Б. Задворному. Кроме того некоторые обобщения названных теорем для автономных уравнений можно найти в [10, раздел 3.2]

Здесь $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$ – кусочно непрерывная функция, $\sup_{t\geq 0}|A(t)| \leq M$, а функции f и g удовлетворяют условиям для уравнения (2.1).

Наряду с уравнением (2.5) рассмотрим линейное однородное детерминированное уравнение

$$dX(t) = A(t)X(t)dt, \quad t \geq 0, \tag{2.6}$$

Через $X^{(s,x)}(t)$ будем обозначать (единственное) решение уравнения (2.6), удовлетворяющее равенству $X^{(s,x)}(s) = x$ (существование, единственность и непрерывность по t такого решения в указанных предположениях имеет место, см., например, [2]).

Определение 2.4. Будем говорить, что уравнение (2.6) имеет *равномерно экспоненциально устойчивое* нулевое решение, если существуют константы $\Lambda, \lambda > 0$, не зависящие от s, x, такие, что для любых $s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$ и $t \geq s$ выполняется неравенство

$$|X^{(s,x)}(t)|^2 \leq \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)}. \tag{2.7}$$

Для систем (2.5) и (2.6) определим операторы B и B_0 по формулам (2.8) и (2.9):

$$BV(s,x) = \frac{\partial V(s,x)}{\partial s} + \sup_{v\in F(t,x)}\left(\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}(A(s)x+v)\right) + \frac{1}{2}\sup_{u\in G(t,x)} \mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}uu^\top\right), \tag{2.8}$$

$$B_0 V(s,x) = \frac{\partial V(s,x)}{\partial s} + \frac{\partial V(s,x)}{\partial x}A(s)x, \quad s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d, \varphi \in C_h. \tag{2.9}$$

Теорема 2.3. *Предположим, что функции $f(t,x)$ и $g(t,x)$ таковы, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что выполняются неравенства* (2.10)

$$|f(t,x)| \leq \varepsilon|x|, \qquad |g(t,x)| \leq \varepsilon|x|, \tag{2.10}$$

для любых x, $|x| \leq \delta_\varepsilon, t \in \mathbb{R}^+$, а система (2.6) *имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда система* (2.5) *имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.*

Доказательство. Зададим функцию $V(s,x)$ равенством (2.11):

$$V(s,x) = \int_s^{s+T} |X^{(s,x)}(t)|^2 dt, \tag{2.11}$$

где T — положительный параметр, который будет определен ниже. В [36, следствие 5.3] показано, что функция $V(s,x)$ определена, непрерывно дифференцируема по $s \in \mathbb{R}^+$ и дважды непрерывно дифференцируема по $x \in \mathbb{R}^d$, причем справедливо равенство $B_0 V(s,x) = |X^{(s,x)}(s+T)|^2 - |x|^2$. Отсюда и из неравенства (2.7) следует, что можно подобрать достаточно большое $T_\lambda > s$ такое, что $|X^{(s,x)}(s+T)|^2 \leq \frac{1}{2}|x|^2$ при всех $T \geq T_\lambda$, и значит, $B_0 V(s,x) \leq -\frac{1}{2}|x|^2$ при всех $T \geq T_\lambda$. Зафиксируем одно из таких T и покажем, что введенная функция $V(s,x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.2.

Условие 3) следует из единственности решения: $X^{(s,0)}(t) \equiv 0$.

Покажем, что выполнено условие 2). Оценим сверху функцию $V(s,x)$, используя неравенство (2.7):

$$0 \leq V(s,x) \leq \int\limits_s^{s+T} \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)} dt = \frac{1 - e^{-\lambda T}}{\lambda} \Lambda |x|^2 = k_1 |x|^2, \tag{2.12}$$

где $k_1 = \frac{1-e^{-\lambda T}}{\lambda}\Lambda > 0$. Взяв от обеих частей неравенства (2.12) супремум по $s > 0$ и перейдя к пределу, получим $\lim\limits_{x\to 0} \sup\limits_{s>0} V(s,x) = 0$, что и требовалось.

Покажем, что выполнено условие 4). Применив формулу Ито к процессу $|X^{(s,x)}(t)|^2$, получим (2.13):

$$|X^{(s,x)}(s+T)|^2 - |x|^2 = \int\limits_s^{s+T} B_0(|X^{(s,x)}(t)|^2)\, dt. \tag{2.13}$$

Оценим $B_0(|X^{(s,x)}(t)|^2) = 2\left(X^{(s,x)}(t)\right)^\top A(t) X^{(s,x)}(t)$ с помощью неравенства Коши-Буняковского:

$$\left|2(X^{(s,x)}(t))^\top A(t) X^{(s,x)}(t)\right| = 2\left|\langle A(t)X^{(s,x)}(t), X^{(s,x)}(t)\rangle\right| \leq 2M|X^{(s,x)}(t)|^2,$$

т.е. $\left|B_0(|X^{(s,x)}(t)|^2)\right| \leq 2M|X^{(s,x)}(t)|^2$. Вернемся теперь к формуле Ито:

$$-\frac{1}{2}|x|^2 \geq |X^{(s,x)}(s+T)|^2 - |x|^2 = \int\limits_s^{s+T} B_0(|X^{(s,x)}(t)|^2)\, dt \geq -2M \cdot V(s,t). \tag{2.14}$$

Обозначая $k_3 = \frac{1}{4M} > 0$, из (2.14) получим: $V(s,t) \geq k_3|x|^2 > 0$ для $x \neq 0$, и следовательно, 4) выполнено.

Осталось показать, что выполнено условие 1). Оценим $BV(s,x)$, используя элементарное неравенство $|\mathrm{tr}A| \le \sqrt{d}|A|$ для $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$:

$$BV(s,x) = BV_0(s,x) + \sup_{v\in F(t,x)}\left(\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}v\right) + \frac{1}{2}\sup_{u\in G(t,x)}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}uu^\top\right) \le$$
$$\le -\frac{1}{2}|x|^2 + \sup_{v\in F(t,x)}|v|\left|\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}\right| + \frac{\sqrt{d}}{2}\sup_{u\in G(t,x)}\left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right||u|^2 \le$$
$$\le -\frac{1}{2}|x|^2 + \varepsilon|x|\left|\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right|\frac{\sqrt{d}}{2}\varepsilon^2|x|^2. \qquad (2.15)$$

для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ и соответствующей окрестности нуля $|x| \le \delta_\varepsilon$. Итак, остается оценить $\left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right|$ и $\left|\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}\right|$. Заметим, что $\frac{\partial}{\partial x}|X^{(s,x)}(t)|^2 = 2\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}X^{(s,x)}(t)$. Существование $\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}$ следует из [5, гл. VII, § 3]. Обозначим $\xi_x(t) = \frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}$. Тогда, как показано в [5, гл. VII, § 3], функция $\xi_x(t)$ удовлетворяет матричному уравнению (2.16):

$$\xi_x(t) = \frac{\partial}{\partial x}(\xi_x(s)) + \int_s^t \frac{\partial}{\partial x}(A(u)x)\Big|_{x=\xi_x(u)}\xi_x(u)\,du = I_d + \int_s^t A(t)\xi_x(t)\,du \quad \text{или}$$

$$\xi_i(t) = e_i + \int_s^t A(t)\xi_i(t)\,du, \quad i = 1,\ldots,d \qquad (2.16)$$

где $\xi_i(t) = \frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x_i}$, e_i — вектор, у которого i-я компонента равна 1, а остальные равны 0. К процессу $|\xi_i(t)|^2$ применим формулу Ито:

$$|\xi_i(t)|^2 = |e_i|^2 + \int_s^t B_0(|\xi_i(u)|^2)\,du \le 1 + \int_s^t 2M|\xi_i(u)|^2 du. \qquad (2.17)$$

Из (2.17), используя неравенство Гронуолла-Беллмана, получим неравенство $|\xi_i(t)|^2 = \left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x_i}\right|^2 \le e^{2M(t-s)}$. И значит, $\left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right|^2 = \sum_{i=1}^d \left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x_i}\right|^2 \le \le d\,e^{2M(t-s)}$. Из (2.7) и последнего неравенства следует (2.18):

$$\left|\frac{\partial V(s,x)}{\partial x}\right| \le \left|\int_s^{s+T}\frac{\partial}{\partial x}|X^{(s,x)}(t)|^2 dt\right| \le 2\int_s^{s+T}\left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right|\left|X^{(s,x)}(t)\right|dt \le$$
$$\le 2\sqrt{d\Lambda}|x|\int_s^{s+T} e^{\frac{2M-\lambda}{2}(t-s)}dt = \frac{4\sqrt{d\Lambda}\left(e^{\frac{2M-\lambda}{2}T}-1\right)}{2M-\lambda}|x| = K_1|x|. \qquad (2.18)$$

Без ограничения общности можно считать, что $2M-\lambda>0$ и $K_1>0$.

Для $\left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right|$ проводя те же рассуждения (но в роли $X^{(s,x)}$ уже выступает ξ_x), используя неравенство Гронулла-Беллмана, покажем, что $\left|\frac{\partial^2 X^{(s,x)}(t)}{\partial x_i \partial x_j}\right|^2=0$, и значит, $\left|\frac{\partial^2 X^{(s,x)}(t)}{\partial x^2}\right|^2=0$. Тогда легко видеть, что $\frac{\partial^2}{\partial x^2}|X^{(s,x)}(t)|^2=2\left(\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right)^2$, и будем иметь оценку $\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}|X^{(s,x)}(t)|^2\right|\le 2\left|\frac{\partial X^{(s,x)}(t)}{\partial x}\right|^2\le 2d\,e^{2M(t-s)}$, из которой выводим (2.19):

$$\left|\frac{\partial^2 V(s,x)}{\partial x^2}\right|\le\left|\int\limits_s^{s+T}\frac{\partial^2}{\partial x^2}|X^{(s,x)}(t)|^2dt\right|\le 2d\int\limits_s^{s+T}e^{2M(t-s)}dt=\frac{2d\left(e^{2MT}-1\right)}{2M}=K_2. \tag{2.19}$$

Из неравенств (2.15), (2.18), (2.19), следует оценка $BV(s,x)\le$ $\le\left(-\frac{1}{2}+\varepsilon K_1+\frac{\sqrt{d}}{2}\varepsilon^2K_2\right)|x|^2$. За счет выбора достаточно малого ε добьемся того, чтобы константа при $|x|^2$ была отрицательной. Тогда условие 1) будет выполнено. Теорема доказана.

Замечание 2.1. Некоторые достаточные условия равномерной экспоненциальной устойчивости системы (2.6) приведены в работе [35].

Пример 2.1. Приведем пример уравнения, имеющего асимптотически устойчивое по вероятности слабое нулевое решение на основании теоремы 2.3. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений (2.20)

$$\begin{gathered}dx(t)=((-20-0.1\sin t)x(t)+0.1\cos t\;y(t)+\sin^2 x(t))dt,\\ dy(t)=(-0.1\cos t\;x(t)-(20+0.1\sin t)y(t))dt+\sin^2 y(t)\mathrm{sgn}(x(t-1))dw(t),\end{gathered} \tag{2.20}$$

при $t\ge 0$ с начальными условиями $x(t)=\psi(t)$, $t\in[-1{,}0]$, $y(0)=y_0$, где x, $y\in\mathbb{R}$, $w(t)$ – одномерное броуновское движение. Нулевое решение линеаризованной системы

$$\begin{aligned}dx(t)&=((-20-0.1\sin t)x(t)+0.1\cos t\;y(t))dt,\\ dy(t)&=(-0.1\cos t\;x(t)-(20+0.1\sin t)y(t))dt,\end{aligned}$$

является равномерно экспоненциально устойчивым [35], и следовательно, нулевое решение системы (2.20) асимптотически устойчиво по вероятности.

2.2 Стохастические дифференциально-функциональные уравнения в произвольных гильбертовых пространствах

Вернемся к общему случаю сепарабельных гильбертовых пространств H и U. Рассмотрим стохастическое эволюционное функциональное уравнение

$$dX(t,\omega) = AX(t,\omega)dt + f(t, X(t,\omega))dt + g(t, X(t,\omega))dW(t,\omega), \quad (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{2.21}$$

относительно $X \in H$ с начальным условием

$$X(0,\omega) = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \tag{2.22}$$

где $f(t, X)\colon \mathbb{R}^+ \times H \to H$, $g(t, X)\colon \mathbb{R}^+ \times H \to L_2(U,H)$ — измеримые, непрерывные по X (при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$) функции, A — линейный оператор, определенный на всюду плотном в H множестве $\mathcal{D}(A)$ и порождающий C_0-полугруппу $S(t)$ на H, $\xi : \Omega \to \mathcal{D}(A)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина, имеющая конечный момент $\mathbb{E}\,\|\xi\|^p < \infty$ порядка $p > 2$. В дальнейшем для сокращения обозначений аргумент ω будем опускать. Все интегралы ниже записаны в предположении их существования и конечности.

Относительно функций $f(t, X)$ и $g(t, X)$ будем предполагать, что выполнены два условия:

1. *Локальное условие Липшица*. Для любого $a > 0$ существует постоянная q_a такая, что для всех $t \in [0,a]$ и любых $\varphi,\psi \in H$, таких, что $\|\varphi\| \le a$, $\|\psi\| \le a$, выполняются неравенства
$$\|f(t,\varphi) - f(t,\psi)\| \le q_a\|\varphi - \psi\|, \quad \|g(t,\varphi) - g(t,\psi)\| \le q_a\|\varphi - \psi\| \tag{2.23}$$
2. *Условие линейного порядка роста*. Существует непрерывная функция $k\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}^+$ и любого $\eta \in H$ выполняются неравенства
$$\|f(t,\eta)\| \le k(t)(1 + \|\eta\|), \quad \|g(t,\eta)\| \le k(t)(1 + \|\eta\|). \tag{2.24}$$

Стоит отметить, что всякая функция, удовлетворяющая глобальному условию Липшица, удовлетворяет и локальному условию, и в свою очередь, всякая функция, удовлетворяющая локальному условию Липшица, непрерывна.

Определение 2.5. Случайный процесс $X(t), t \ge 0$ называют слабым решением уравнения (2.21) с начальным условием (2.22), если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Процесс $X(t), t \geq 0$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным.
2. Процесс $X(t), t \geq 0$ п.н. непрерывен по t.
3. $X(t) = S(t)\xi + \int\limits_0^t S(t-s)f(s,X(s))ds + \int\limits_0^t S(t-s)g(s,X(s))dW(s),\ t \in \mathbb{R}^+$.

Определение 2.6. Случайный процесс $X(t), t \geq 0$ называют сильным решением уравнения (2.21) с начальным условием (2.22), если он удовлетворяет следующим условиям:

1. Процесс $X(t), t \geq 0$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным.
2. Процесс $X(t), t \geq 0$ п.н. непрерывен по t.
3. $X \in \mathcal{D}(A)$ для почти всех $(t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$.
4. $X(t) = \xi + \int\limits_0^t AX(s)\,ds + \int\limits_0^t f(s,X(s))ds + \int\limits_0^t g(s,X(s))dW(s), \quad t \in \mathbb{R}^+$.

Определение 2.7. Будем говорить, что (слабое или сильное) решение $X(t)$ уравнения (2.21) с начальным условием (2.22) является единственным, если для любое другое решение $Y(t)$ уравнения (2.21) с начальным условием (2.22) п.н. совпадает с $X(t)$, т.е. $\mathbb{P}(X(t) = Y(t)\ \forall t \geq 0) = 1$.

Определение 2.8. Пусть положительная функция $\lambda(t)$ определена для достаточно больших $t > 0$, скажем, $t \geq T > 0$. Предположим, что

1. $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty$.
2. $\ln \lambda(t)$ равномерно непрерывна по $t \geq T$.
3. Существует константа $\tau \geq 0$ такая, что $\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\ln\ln t}{\ln \lambda(t)} \leq \tau$.

Будем говорить, что слабое решение задачи (2.21), (2.22) притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$, если найдется $\gamma > 0$ такое, что выполняется неравенство (2.25)

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\ln \|X(t)\|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma \qquad \text{п.н.} \tag{2.25}$$

Через $\rho(A)$ обозначим резольвентное множество оператора A, т.е. множество тех значений $l \in \mathbb{C}$ для которых определен оператор $R(l,A) = (lI - A)^{-1}$ (резольвента оператора A). Обозначим также $R(l) = lR(l,A)$, $\rho_{\mathbb{R}}(A) = \rho(A) \cap \mathbb{R}$.

Для задачи (2.21), (2.22) построим аппроксимирующую задачу Коши

$$\begin{gathered} dX^{(l)}(t,\omega) = AX^{(l)}(t,\omega) + R(l)f(t,X^{(l)}(t,\omega))dt + R(l)g(t,X^{(l)}(t,\omega))dW(t,\omega), \\ t \in \mathbb{R}^+, \\ X^{(l)}(0,\omega) = \xi(\omega), \end{gathered} \tag{2.26}$$

где $l \in \rho_{\mathbb{R}}(A)$.

Лемма 2.1. *Для любого достаточно большого $l \in \rho_{\mathbb{R}}(A)$ задача Коши* (2.26) *имеет единственное сильное решение $X^{(l)}$ и более того, существует подпоследовательность $X^{(l_n)}$ такая, что $X^{(l_n)}(t) \to X(t)$ при $n \to \infty$ п.н. равномерно по $t \in [0,T]$, где $X(t)$ — слабое решение задачи* (2.21)*,* (2.22)*, а $T > 0$ — произвольное число.*

Доказательство. В [47, теорема 3.1], отталкиваясь от определения генератора C_0-полугруппы и (как следствие, см. [47, следствие 2.5]) замкнутости оператора A, было доказано интегральное представление резольвенты (2.27)

$$R(l,A)x = \int_0^{+\infty} e^{-l\,t} S(t)x\,dt, \quad x \in H, \tag{2.27}$$

для всех $l \in \rho(A)$, для которых указанный интеграл существует и конечен. Воспользуемся оценкой операторов C_0-полугруппы (см. предложение 1.1): $\|S(t)\| \le Me^{\beta t}$ для всех $t \ge 0$. Будем иметь оценку (2.28):

$$\|R(l,A)\| = \sup_{\|x\|=1} \|R(l,A)x\| \le \int_0^{+\infty} e^{-l\,t} \sup_{\|x\|=1} \|S(t)x\|\,dt \le$$

$$\le M \int_0^{+\infty} e^{-(l-\beta)t} dt = \frac{M}{l-\beta}, \quad l > \beta \tag{2.28}$$

откуда следует, что $(\beta, +\infty] \subset \rho(A)$ и более того, $\|R(l)\| \le \frac{M\,l}{l-\beta} \le 2M$ для $l \ge 2\beta$. Далее будем рассматривать только $l \ge 2M$, говоря о них, как о «достаточно больших» l.

Докажем, что задача Коши (2.26) имеет единственное слабое решение при достаточно большом l. С этой целью заметим, что для любого $r > 1$ ввиду условий (2.23) и (2.24) получим оценки (2.29) – (2.32):

$$\mathbb{E}\,\|R(l)f(t,\varphi) - R(l)f(t,\psi)\|^r \le (2M)^r\,\mathbb{E}\,\|f(t,\varphi) - f(t,\psi)\|^r \le (2Mq_a)^r\,\mathbb{E}\,\|\varphi - \psi\|^r, \tag{2.29}$$

$$\mathbb{E}\,\|R(l)g(t,\varphi) - R(l)g(t,\psi)\|^r \le (2M)^r\,\mathbb{E}\,\|g(t,\varphi) - g(t,\psi)\|^r \le (2Mq_a)^r\,\mathbb{E}\,\|\varphi - \psi\|^r, \tag{2.30}$$

$$\mathbb{E}\,\|R(l)f(t,\eta)\|^r \le (2M)^r\,\mathbb{E}\big(k(t)(1 + \|\eta\|)\big)^r \le$$

$$\le (2M)^r\,\mathbb{E}\big((k(t))^r 2^{r-1}(1 + \|\eta\|^r)\big) = \frac{(4Mk(t))^r}{2}(1 + \mathbb{E}\,\|\eta\|^r), \tag{2.31}$$

$$\mathbb{E}\,\|R(l)g(t,\eta)\|^r \le (2M)^r\,\mathbb{E}\big(k(t)(1 + \|\eta\|)\big)^r \le$$

$$\le (2M)^r\,\mathbb{E}\big((k(t))^r 2^{r-1}(1 + \|\eta\|^r)\big) = \frac{(4Mk(t))^r}{2}(1 + \mathbb{E}\,\|\eta\|^r), \tag{2.32}$$

где $\varphi,\psi,\eta\colon \Omega \to H$ — произвольные $\mathcal{F}$-измеримые случайные величины с конечным p-м моментом, такие, что п.н. $\|\varphi\| \leq\ a$ и $\|\zeta\| \leq a$. Таким образом, задача Коши (2.26) удовлетворяет условиям [7–А, теорема 1.1] и следовательно имеет единственное слабое решение $X^{(l)}(t), t \geq 0$.

Докажем, что при наложенных ранее ограничениях найденное слабое решение $X^{(l)}(t), t \geq 0$ будет также являться и сильным решением задачи Коши (2.26). Для этого достаточно проверить условия из [34, предложение 2.3], предварительно зафиксировав произвольный отрезок времени $t \in [0,T]$. Воспользуемся утверждением (с) из [47, теорема 2.4], показывающим, что операторы A и $S(t)$ (а также $(l\,I - A)$ и $S(t)$) перестановочны. Для любых $r \in [0,t)$, $\varphi \in H$, $u \in U$ элементы (2.33), (2.34)

$$(l\,I{-}A)\left(S(t{-}r)R(l)f(r,\varphi)\right) = l\,S(t{-}r)f(r,\varphi) \in H, \tag{2.33}$$

$$(l\,I{-}A)\left(S(t{-}r)R(l)g(r,\varphi)u\right) = l\,S(t{-}r)g(r,\varphi)u \in H, \tag{2.34}$$

откуда следует, что $S(t{-}r)R(l)f(r,\varphi)$, $S(t{-}r)R(l)g(r,\varphi)u \in \mathcal{D}(l\,I{-}A) = \mathcal{D}(A)$. Кроме того, $\xi \in \mathcal{D}(A)$, т.е. условие (a) выполнено. Далее оценим интегралы (2.35) — (2.38) из условия (b):

$$\int\limits_0^T \int\limits_0^t \|AS(t-r)R(l)f(r,X^{(l)}(r))\|drdt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^T \int\limits_0^t \|(A-lI)S(t-r)\,l(lI-A)^{-1}f(r,X^{(l)}(r))\|drdt +$$

$$+\int\limits_0^T \int\limits_0^t \|lS(t-r)\,l(l\,I-A)^{-1}f(r,X^{(l)}(r))\|drdt = I_1 + I_2, \tag{2.35}$$

$$I_1 = \int\limits_0^T \int\limits_0^t \|(A-l\,I)S(t-r)\,l(l\,I-A)^{-1}f(r,X^{(l)}(r))\|\,dr\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^t \|S(t-r)(A-lI)\,l(lI-A)^{-1}f(r,X^{(l)}(r))\|drdt =$$

$$= l\int\limits_0^T \int\limits_0^t \|S(t-r)f(r,X^{(l)}(r))\|drdt. \tag{2.36}$$

Из перестановочности операторов $(l\,I - A)$ и $S(t)$ следует перестановочность операторов $R(l)$ и $S(t)$, так как $(l\,I - A)S(t) = S(t)(l\,I - A) \implies S(t) = (l\,I - A)^{-1}S(t)(l\,I - A) \implies S(t)(l\,I - A)^{-1} = (l\,I - A)^{-1}S(t)$. Поэтому

$$
\begin{aligned}
I_2 = \int_0^T \int_0^t \|lS(t-r)R(l)f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt \le \\
\le 2Ml \int_0^T \int_0^t \|S(t-r)f(r, X^{(l)}(r))\| dr dt,
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^t \|AS(t-r)R(l)f(r, X^{(l)}(r))\|\, dr\, dt \le \\
\le (2M+1)l \int_0^T \int_0^t \|S(t-r)\| \cdot \|f(r, X^{(l)}(r))\|\, dr\, dt \le \\
= M(2M+1)l \int_0^T e^{\beta t} dt \int_0^t e^{-\beta r} k(r)(1 + \|X^{(l)}(r)\|)\, dr = I_3.
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

Поскольку $X^{(l)}(r)$ п.н непрерывен, то $M_T = \sup\limits_{0 \le r \le T} \|X^{(l)}(r)\| < \infty$. А поскольку функция $k(r)$ непрерывна на $[0,T]$, то интеграл I_3, очевидно, п.н. конечен, т.е. условие (b) выполнено. Условие (c) проверяется аналогично.

Таким образом, все условия [34, предложение 2.3] выполнены, а значит, задача Коши (2.26) имеет сильное решение. Это решение будет также и единственным ввиду того, что всякое сильное решение является слабым (см. [34, предложение 2.1]), а слабое решение (2.26) единственно.

Докажем теперь существование требуемой подпоследовательности $X^{(l_n)}$. Сперва покажем, что для любого $T \in \mathbb{R}^+$ существует постоянная $C(T) > 0$ такая, для слабого решения задачи (2.21), (2.22) выполняется оценка сверху (2.39)

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le s \le T} \|X(s)\|^p\right) \le C(T). \tag{2.39}
$$

Действительно, используя интегральное неравенство Гельдера, условие (2.24) и неравенство типа Буркхольдера (см. предложение 1.4), можно получить (см. [2–A]) оценку вида

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le s \le T} \|X(s)\|^p\right) \le C_1(T) + C_2(T) \int_0^T \mathbb{E}\left(\sup_{0 \le s \le T} \|X(s)\|^p\right) ds. \tag{2.40}
$$

Отсюда согласно неравенству Гронуолла получим неравенство (2.41):

$$
\mathbb{E}\left(\sup_{0 \le s \le T} \|X(s)\|^p\right) \le C_1(T) e^{C_2(T)T} =: C(T), \tag{2.41}
$$

как и утверждалось.

Поскольку $\|R(l)\| \leq 2M$ при достаточно больших l, то аналогично доказывается оценка для решения $X^{(l)}(t)$ задачи (2.26): существует постоянная $K(T)$ такая, что $\mathbb{E}\left(\sup\limits_{0\leq s\leq T}\|X^{(l)}(s)\|^p\right) \leq K(T)$. Обозначим $C_T = \max(C(T),K(T))$.

Для каждых $a,T > 0$ и достаточно большого l определим множество (2.42):

$$\Omega_l^{a,T} = \left\{\omega\in\Omega \,:\, \max\left(\sup_{0\leq s\leq T}\|X(s)\|, \sup_{0\leq s\leq T}\|X^{(l)}(s)\|\right) \leq a\right\} \tag{2.42}$$

и его характеристическую функцию $\zeta_l^{a,T} = 1_{\Omega_l^{a,T}}(\omega)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} X(t)-X^{(l)}(t) = \int_0^t S(t-s)(I-R(l))f(s,X(s))ds+ \\ +\int_0^t S(t-s)(I-R(l))g(s,X(s))dW(s)+ \\ +\int_0^t S(t-s)R(l)\left(f(s,X(s))-f(s,X^{(l)}(s))\right)ds+ \\ +\int_0^t S(t-s)R(l)\left(g(s,X(s))-g(s,X^{(l)}(s))\right)dW(s), \quad t\geq 0 \end{aligned} \tag{2.43}$$

Оценивая в равенстве (2.43) каждое слагаемое, используя неравенства Гельдера и Буркхольдера, условие линейного порядка роста и теорему Лебега о мажорируемой сходимости, можно показать (см. [2–A]), что существуют постоянные $\widetilde{C}(a,T)$ и $\varepsilon(l)>0$ такие, что

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T} \leq \widetilde{C}(a,T)\int_0^T \mathbb{E}\sup_{0\leq r\leq s}\|X(r)-X^{(l)}(r)\|^p\zeta_l^{a,T}ds+\varepsilon(l), \tag{2.44}$$

где $\varepsilon(l)\xrightarrow[l\to\infty]{}0$. Применяя к (2.44) лемму Гроноулла, получим (2.45):

$$\mathbb{E}\sup_{0\leq t\leq T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T} \leq \varepsilon(l)e^{T\widetilde{C}(a,T)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0 \quad \forall\,(a,T)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+ \tag{2.45}$$

Покажем, что отсюда следует сходимость по вероятности: $\sup\limits_{0\leq t\leq T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p \xrightarrow[l\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ для любого $T\in\mathbb{R}^+$. Неравенство Чебышева дает:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|>a\right)\le \frac{1}{a^p}\,\mathbb{E}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|\right)^p=\frac{1}{a^p}\,\mathbb{E}\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|^p\le \frac{C_T}{a^p}, \tag{2.46}$$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X^{(l)}(t)\|>a\right)\le \frac{C_T}{a^p}. \tag{2.47}$$

Из (2.46), (2.47) следует, для любого $a>0$ и достаточно больших l справедливо неравенство (2.48)

$$\mathbb{P}\left(\zeta_l^{a,T}=0\right)\le \mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)\|>a\right)+\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X^{(l)}(t)\|>a\right)\le \frac{2C_T}{a^p} \tag{2.48}$$

Возьмем произвольные $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ и положим $a=\left(\frac{4C_T}{\varepsilon_2}\right)^{1/p}$. Поскольку $\mathbb{E}\sup\limits_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T}\xrightarrow[l\to\infty]{}0$, то на основании неравенства Чебышева заключаем, что найдется l_{ε_2} такое, что для всех $l\ge l_{\varepsilon_2}$ выполняется неравенство $\mathbb{P}\left(\sup\limits_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T}>\varepsilon_1\right)\le\frac{\varepsilon_2}{2}$. Таким образом, для всех $l\ge l_{\varepsilon_2}$ справедливо, неравенство (2.8)

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p>\varepsilon_1\right)\le$$

$$\le\mathbb{P}\left(\left(\sup_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\zeta_l^{a,T}>\varepsilon_1\right)\bigcap\left(\zeta_l^{a,T}=1\right)\right)+\mathbb{P}\left(\zeta_l^{a,T}=0\right)\le\varepsilon_2,$$

что и означает сходимость $\sup\limits_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l)}(t)\|^p\xrightarrow[l\to\infty]{\mathbb{P}}0.$

А поскольку из всякой последовательности случайных величин, сходящейся по вероятности, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся п.н., то найдется подпоследовательность $X^{(l_n)}(t)$ такая, что $\sup\limits_{0\le t\le T}\|X(t)-X^{(l_n)}(t)\|^p\xrightarrow[l\to\infty]{\text{п.н.}}0$, т.е. $X(t)\xrightarrow[l\to\infty]{\text{п.н.}}X^{(l_n)}(t)$ равномерно по $t\in[0,T]$. Это и есть требуемая подпоследовательность. Лемма доказана.

2.2.1 Теорема о притяжении к нулю

Введем операторы L, Q по формулам (2.49), (2.50): если положительный функционал $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$, то

$$LV(t,x) = V_t'(t,x) + \langle V_x'(t,x), Ax + f(t,x)\rangle_H +$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q_w^{1/2})(g(t,x)Q_w^{1/2})^\star], \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A), \tag{2.49}$$
$$QV(t,x) = \mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x) \otimes V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q_w^{1/2})(g(t,x)Q_w^{1/2})^\star],$$
$$(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times H. \tag{2.50}$$

Далее для краткости будем опускать индекс H у скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ в пространстве H.

Теорема 2.4. *Пусть задан функционал $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$ и две неотрицательные непрерывные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$. Предположим, что существуют положительные постоянные $r > 0$, $m \geq 0$, постоянные $\mu,\nu,\theta \in \mathbb{R}$ и невозрастающая положительная функция $\zeta(t)$ такие, что $\frac{m-(\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r} > 0$ и выполнены следующие условия:*

1. $\|x\|^r(\lambda(t))^m \leq V(t,x)$ *для всех* $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times H$.
2. $LV(t,x) + \zeta(t)QV(t,x) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t)V(t,x)$ *для всех* $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathcal{D}(A)$.
3. $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup \frac{\ln\left(\int_0^t \psi_1(s)\,ds\right)}{\ln\lambda(t)} \leq \nu$, $\quad \lim\limits_{t\to+\infty}\sup \frac{\int_0^t \psi_2(s)\,ds}{\ln\lambda(t)} \leq \theta$, $\quad \lim\limits_{t\to+\infty}\inf \frac{\ln\zeta(t)}{\ln\lambda(t)} \geq -\mu$.

Тогда слабое решение задачи (2.21)*,* (2.22) *притягивается к нулю со скоростью* $\lambda(t)$*.*

Доказательство. Применим формулу Ито к функционалу $V(t,x)$ и решению (сильному) $X^l(t)$ задачи (2.26). Будем иметь:

$$V(t, X^{(l)}(t)) = V(0,\xi) + I_1(t,l) + \int_0^t LV(s, X^{(l)}(s))\,ds +$$
$$+I_2(t,l) + \int_0^t \langle V_x'(s, X(s)), g(s,X(s))dW(s)\rangle, \tag{2.51}$$

где I_1, I_2, L_l определяются формулами (2.52) — (2.54):

$$I_1(t,l) = \int_0^t L_l V(s, X^{(l)}(s))\, ds \, - \int_0^t LV(s, X^{(l)}(s))\, ds, \qquad (2.52)$$

$$I_2(t,l) = \int_0^t \langle V_x'(s, X^{(l)}(s)), R(l) g(s,X^{(l)}(s)) dW(s)\rangle -$$

$$- \int_0^t \langle V_x'(s, X(s)), g(s,X(s)) dW(s)\rangle, \qquad (2.53)$$

$$L_l V(t,x) = V_t'(t,x) + \langle V_x'(t,x), Ax + R(l) f(t,x)\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\big[V_{xx}''(t,x)(R(l)g(t,x)) \circ Q_w \circ (R(l)g(t,x))^\star\big]. \qquad (2.54)$$

Из равномерной непрерывности функции $\ln\lambda(t)$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют натуральные числа $N = N(\varepsilon)$ и $k_1 = k_1(\varepsilon)$ для всех $k \geq k_1(\varepsilon):\quad \left|\ln\lambda\left(\frac{k}{2^N}\right) - \ln\lambda(t)\right| \leq \varepsilon, \quad t \in \left[\frac{k-1}{2^N}; \frac{k}{2^N}\right]$. С другой стороны, по экспоненциальному неравенству (2.55) для мартингалов [39, лемма 1.1]:

$$\mathbb{P}\Bigg(\omega : \sup_{0\leq t\leq w}\Bigg(\int_0^t \langle V_x'(s,X(s)), g(s,X(s))dW(s)\rangle - \int_0^t \frac{u}{2} QV(s,X(s))\, ds\Bigg) > v\Bigg) \leq e^{-uv} \qquad (2.55)$$

для любых положительных постоянных u, v и w. Выбирая их по формуле (2.56)

$$u = 2\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right), \quad v = \ln\frac{k-1}{2^N}\bigg/\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right), \quad w = \frac{k}{2^N}, \quad k = 2,3,\ldots, \qquad (2.56)$$

и применяя затем лемму Бореля-Кантелли, получим что вне множества нулевой вероятностной меры $\widetilde{\Omega}$ ($\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 0$), т.е. для каждого $\omega \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$ существует натуральное число $k_0(\varepsilon,\omega)$ такое, что

$$\int_0^t \langle V_x'(s,X(s)), g(s,X(s))dW(s)\rangle \leq \frac{\ln\frac{k-1}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + \zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)\int_0^t QV(s,X(s))\, ds \qquad (2.57)$$

для всех $t \in \left[0, \frac{k}{2^N}\right]$, $k = k(\omega) \geq k_0(\varepsilon,\omega)$. Подставляя выражение (2.57) в (2.51) и используя 2-е условие теоремы, для всех $\omega \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$, $\mathbb{P}(\widetilde{\Omega}) = 0$ будем иметь оценку (см. [2–A])

$$V(t, X^{(l)}) \leq \frac{\ln\frac{k-1}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + V(0,\xi) +$$

$$+ \int_0^t \Big(\psi_1(s) + \psi_2(s) V(s,X^{(l)}(s))\Big) ds + I_1(t,l) + I_2(t,l) + I_3(t,l), \qquad (2.58)$$

для всех $t \in [0, \frac{k}{2^N}]$, $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon)\}$. Здесь I_3 определяется формулой (2.59)

$$I_3(t,l) = \zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)\int_0^t \Big(QV(s,X(s)) - QV(s,X^{(l)}(s))\Big)\,ds. \tag{2.59}$$

Следовательно, согласно лемме Гронуолла, п.н. выполнено неравенство

$$V(t,X^{(l)}(t)) \leq \Bigg(V(0,\xi) + \frac{\ln\frac{k-1}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} +$$

$$+\sup_{t\in\left[0,\frac{k}{2^N}\right]}\left(|I_1(t,l)| + |I_2(t,l)| + |I_3(t,l)| + \int_0^t \psi_1(s)\,ds\right)\Bigg)\cdot\exp\left(\int_0^t \psi_2(s)\,ds\right)$$

для всех $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$, $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon)\}$.

Покажем теперь, что существует подпоследовательность $(l_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ такая, что $I_1(t,l_n)$, $I_2(t,l_n)$ и $I_3(t,l_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ п.н. равномерно по $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$. Действительно, выберем подпоследовательность леммы 2.1: $X^{(l_n)}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(t)$ п.н. равномерно по $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$. Говоря точнее, существуют подмножества $\Omega_k \subset \Omega$ с $\mathbb{P}(\Omega_k) = 0$ такие, что для любого $\omega \in \Omega \setminus \Omega_k$: $X^{(l_n)}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(t)$ п.н. равномерно по $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$. Следовательно, для всех $\omega \in \Omega \setminus \left(\cup_{k\geq 2}\Omega_k \bigcup \widetilde{\Omega}\right)$, будем иметь оценку (2.60):

$$\sup_{t\in\left[0,\frac{k}{2^N}\right]} |I_1(t,l)| \leq \int_0^{k/2^N} \Big|L_{l_n}V(s,X^{(l_n)}(s)) - LV(s,X^{(l_n)}(s))\Big|\,ds \leq$$

$$\leq \int_0^{k/2^N} \Big|\langle V'_x(s,X^{(l_n)}(s)), (I - R(l_n))f(s,X^{(l_n)}(s))\rangle\Big|\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{k/2^N} \Big|\mathrm{tr}\big[V''_{xx}(s,X^{(l_n)}(s))\big\{(R(l_n)g(s,X^{(l_n)}(s)) \circ Q_w \circ (R(l_n)g(s,X^{(l_n)}(s)))^\star -$$

$$-g(s,X^{(l_n)}(s)) \circ Q_w \circ g(s,X^{(l_n)}(s)))^\star\big\}\big]\Big|\,ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \tag{2.60}$$

для всех $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon)\}$. Аналогично доказывается, что $\sup_{t\in\left[0,\frac{k}{2^N}\right]} |I_2(t,l)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ и $\sup_{t\in\left[0,\frac{k}{2^N}\right]} |I_3(t,l)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Следовательно, устремляя $n \to \infty$, получим, что п.н. верно (2.61):

$$V(t,X(t)) \leq \left(V(0,\xi) + \frac{\ln\frac{k}{2^N}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + \frac{\ln\frac{k-1}{k}}{\zeta\left(\frac{k}{2^N}\right)} + \int_0^{k/2^N}\psi_1(s)\,ds\right)\exp\left(\int_0^t \psi_2(s)\,ds\right) \tag{2.61}$$

для всех $t \in \left[0,\frac{k}{2^N}\right]$, $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon)\}$.

Таким образом, используя 3-е условие теоремы и равномерную непрерывность $\ln\lambda(t)$, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется натуральное $k_2(\varepsilon,\omega)$ такое, что

$$\ln V(t,X(t)) \leq$$
$$\leq \ln\left(V(0,\xi) + \lambda\left(\frac{k}{2^N}\right)^{(\mu+\tau+2\varepsilon)} + \ \lambda\left(\frac{k}{2^N}\right)^{(\mu+\varepsilon)}\ln\frac{k-1}{k} + \lambda\left(\frac{k}{2^N}\right)^{(\nu+\varepsilon)}\right)+$$
$$+(\theta+\varepsilon)\ln\lambda(t) \leq$$
$$\leq \ln\left(V(0,\xi) + e^{\varepsilon(\mu+\tau+2\varepsilon)}\lambda(t)^{(\mu+\tau+2\varepsilon)} + e^{\varepsilon(\mu+\varepsilon)}\lambda(t)\ln\frac{k-1}{k} + e^{\varepsilon(\nu+\varepsilon)}\lambda(t)^{(\nu+\varepsilon)}\right)+$$
$$+(\theta+\varepsilon)\ln\lambda(t) \tag{2.62}$$

для всех $t \in \left[\frac{k-1}{2^N},\frac{k}{2^N}\right]$, $k \geq \max\{k_0(\varepsilon,\omega), k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon,\omega)\}$. Из (2.62) следует

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln V(t,X(t))}{\ln\lambda(t)} \leq \max\{\nu+\varepsilon, \mu+\tau+2\varepsilon\} + \theta + \varepsilon. \tag{2.63}$$

Устремляя в (2.63) $\varepsilon \to 0$, получим неравенство (2.64)

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln V(t,X(t))}{\ln\lambda(t)} \leq \max\{\nu,\mu+\tau\} + \theta. \tag{2.64}$$

Окончательно, используя 1-е условие теоремы, будем иметь (2.66):

$$\lim_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln\|X(t)\|}{\ln\lambda(t)} \leq \lim_{t\to+\infty}\sup\frac{1}{r}\frac{\ln\left(\lambda(t)^{-m}V(t,X(t))\right)}{\ln\lambda(t)} \leq$$
$$\leq -\frac{m-(\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r} \qquad \text{п.н.} \tag{2.65}$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Пример 2.2. Рассмотрим следующую стохастическую дифференциальную систему (значение параметров $\alpha, m > 0$ будет уточнено ниже)

$$dX_t(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2}X_t(x) + \alpha\sin\left(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}}\cos X_t^1\right)\right)dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}}X_t(x)dW_t,$$
$$dX_t^1 = \left(\alpha X_t^1\sin X_t^1 + \left(\int_0^\pi X_t(x)^2dx\right)^{1/2}\right)dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}}\left(\int_0^\pi X_t(x)^2dx\right)^{1/2}dW_t,$$
$$t > 0,\ \ 0 < x < \pi$$

как уравнение относительно $\bar{X}_t = (X_t(\cdot),X_t^1)^\top$ в пространстве $H \times \mathbb{R}$ с начальным условием $\bar{X}_0 = (X_0(x), X_0^1)^\top = (x_0(x), x_0^1)$, $x \in (0,\pi)$. Здесь $H = L_2[0,\pi]$ — пространство функций, квадратично интегрируемых по Лебегу на отрезке $[0,\pi]$, $U = \mathbb{R}$. В компактной форме это уравнение примет вид

$$d\bar{X}_t = (\bar{A}\bar{X}_t + f(t,\bar{X}_t))dt + g(t,\bar{X}_t)dW_t, \tag{2.66}$$

$$f(t,\bar{X}_t) = \alpha\left(\sin(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}}\cos X_t^1), X_t^1\sin X_t^1 + \|X_t(x)\|_H\right)^\top,$$

$$g(t,\bar{X}_t) = \alpha e^{-\frac{mt}{2}}\left(X_t(x), \left(\int_0^\pi X_t(x)^2dx\right)^{1/2}\right)^\top, \ \bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$A = \frac{d^2}{dx^2}$, $\mathcal{D}(A) = \{u \in C_2[0,\pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$, $C_2[0,\pi]$ — пространство дважды непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0,\pi]$ функций.

Уравнение (2.66), записанное в интегральной форме, примет вид

$$\bar{X}_t = \int_0^\pi G(t,x,s)\bar{X}_0(s)ds + \int_0^t\int_0^\pi G(t-\tau,x,s)f(s,x_\tau^1)ds\,d\tau +$$
$$+\int_0^t\int_0^\pi G(t-\tau,x,s)g(s,x_\tau^1)ds\,dW(\tau),$$

где $G(t,x,y) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty e^{-n^2t}\sin nx\sin ny$. Соответственно, оператор $S(t) : H \times \times\mathbb{R} \to H \times \mathbb{R}$ определяется формулой

$$S(t)\bar{u}(\cdot) = \left(\int_0^\pi G(t,\cdot,s)u(s)ds, u^1\right).$$

Положим $V(t,\bar{u}) = V(t,u) = e^{mt}\|u\|^2, u \in H$. Очевидно, $V_t'(t,\bar{u}) = = mV(t,u)$. По определению производной по Фреше V_u' в точке $u \in H$ есть линейный ограниченный функционал такой, что для достаточно малых $\|h\|$, $h \in H$ выполняется

$$V(t,u+h) - V(t,u) - V_u'(t,u)h = o(\|h\|),$$

$$e^{mt}\int_0^\pi (u(s)+h(s))^2\,ds - e^{mt}\int_0^\pi (u(s))^2\,ds = V_u'(t,u)h + o(\|h\|).$$

Последнее равносильно $2e^{mt}\langle u,h\rangle + e^{mt}\|h\|^2 = V_u'(t,u)h + o(\|h\|)$, откуда $V_u'(t,u)h = 2e^{mt}\langle u,h\rangle\ \forall\, h \in H$. Аналогично $V_{uu}''h = 2e^{mt}\langle h,\cdot\rangle$, $\forall\, h \in H$. Можно показать (см. [2–A]), что

$$\langle V_u'(t,u), Au\rangle = -2\frac{\|u'\|^2}{\|u\|^2}V(u),$$
$$\langle V_u'(t,u), f(t,\bar{u})\rangle \le 3\alpha V(t,u) + \alpha\pi.$$

Нетрудно видеть, что

$$\|V'_u(t,u)\| = \sup_{\|h\|=1} 2e^{mt}|\langle u,h\rangle| \leq 2e^{mt} \sup_{\|h\|=1} \|u\| \cdot \|h\| = 2e^{mt}\|u\|$$

и аналогично $\|V''_{uu}(t,u)\| = 2e^{mt}\sup_{\|h\|=1}\sup_{\|u\|=1}|\langle h,u\rangle| \leq 2e^{mt}$. Кроме того, для любого ограниченного линейного оператора B след $\mathrm{tr}(BQ_w) = \sum\langle BQ_w u_k, u_k\rangle$ по модулю не превосходит $|\mathrm{tr}(BQ_w)| \leq \|B\|\mathrm{tr}Q_w$ (достаточно в качестве (u_k) взять базис из собственных векторов Q_w). В нашем случае $U = \mathbb{R}$, а значит, $Q_w = I$ и $\mathrm{tr}Q_w = 1$. Таким образом,

$$\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V''_{uu}(t,\bar{u})(g(t,\bar{u})Q_w^{1/2})(g(t,\bar{u})Q_w^{1/2})^\star] \leq \frac{1}{2}\|V''_{uu}\| \cdot \|g(t,\bar{u})\|^2 \leq$$
$$\leq 2e^{mt}\alpha^2 e^{-mt}\|u\|^2 \leq 2\alpha^2 V(t,\bar{u}),$$
$$|QV(t,\bar{u})| = |\mathrm{tr}[V''_{uu}(t,\bar{u}) \otimes V''_{uu}(t,\bar{u})(g(t,\bar{u})Q_w^{1/2})(g(t,\bar{u})Q_w^{1/2})^\star]| \leq$$
$$\leq \|V''_{uu}\|^2\|g(t,\bar{u})\|^2 \leq 8e^{mt}\alpha^2\|u\|^2 = 8\alpha^2 V(t,\bar{u}).$$

Итак, выберем в качестве невозрастающей положительной функции $\zeta(t) \equiv 1$, положим $\lambda_0 = \inf_{u\in D(A)} \frac{\|u'\|^2}{\|u\|^2}$ и оценим

$$LV(t,\bar{u}) + \zeta(t)QV(t,\bar{u}) \leq \alpha\pi + (-2\lambda_0 + m + 3\alpha + 10\alpha^2)V(t,u).$$

Нетрудно показать (см. [2–A]), что $\lambda_0 \geq \frac{1}{\pi^2} > 0$. Поэтому за счет выбора достаточно малого $\alpha > 0$ и достаточно большого $m > 0$ добьемся того, чтобы постоянная $\beta = -2\lambda_0 + m + 3\alpha + 10\alpha^2 > 0$, но $-2\lambda_0 + 3\alpha + 10\alpha^2 < 0$.

Обратимся к условию теоремы. Исходя из первого условия, полагаем $r = 2$, из второго условия: $\psi_1(t) \equiv \alpha\pi$, $\psi_2(t) \equiv \beta$. В качестве λ выберем $\lambda(t) = e^t$. Поскольку $\frac{\log\log t}{\log\lambda(t)} = \frac{\log\log t}{t} \underset{t\to\infty}{\to} 0$, то $\tau = 0$. Далее, $\frac{\log\zeta(t)}{\log\lambda(t)} = 0$, т.е. $\mu = 0$; $\frac{\log\left(\int_0^t \psi_1(s)ds\right)}{\log\lambda(t)} = \frac{\log\alpha\pi t}{t} \underset{t\to\infty}{\to} 0$, т.е. $\nu = 0$ и следовательно, $\max\{\nu,\mu+\tau\} = 0$. И наконец, $\frac{\int_0^t \psi_2(s)\,ds}{\log\lambda(t)} = \frac{\beta t}{t} = \beta$, т.е. $\theta = \beta$. Таким образом, согласно теореме 2.4:

$$\limsup_{t\to+\infty} \frac{\log\|X(t)\|}{t} \leq -\frac{m - (\max\{\nu,\mu+\tau\} + \theta)}{r} = -\frac{2\lambda_0 - 3\alpha - 10\alpha^2}{2} < 0.$$

Отметим, что функция g удовлетворяет глобальному условию Липшица, а f удовлетворяет локальному, но не удовлетворяет глобальному условию Липшица. Действительно, для g:

$$\|g(t,\bar{x}) - g(t,\bar{y})\|^2 = e^{-mt}\alpha^2\int_0^\pi |x(s) - y(s)|^2 ds + e^{-mt}\alpha^2(\|x\| - \|y\|)^2 \leq$$

$$\leq 2e^{-mt}\alpha^2\|x-y\|^2 \leq 2\alpha^2\|\bar{x}-\bar{y}\|^2.$$

Для f имеем:

$$\|f(t,\bar{x})-f(t,\bar{y})\|^2 = \int_0^\pi \left|\sin\left(x(s)+e^{-\frac{mt}{2}}\cos x^1\right) - \sin\left(y(s)+e^{-\frac{mt}{2}}\cos y^1\right)\right|^2 ds+$$
$$+\left|x^1\sin x^1 - y^1\sin y^1 + \|x\| - \|y\|\right|^2.$$

Так как $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$, $|\cos x - \cos y| \leq |x-y|$ для любых $x,y \in \mathbb{R}$, то

$$\|f(t,\bar{x})-f(t,\bar{y})\|^2 \leq \int_0^\pi \left|x(s)-y(s)+e^{-\frac{mt}{2}}\cos x^1 - e^{-\frac{mt}{2}}\cos y^1\right|^2 ds+$$
$$+2\left|x^1\sin x^1 - y^1\sin y^1\right|^2 + 2\|x-y\|^2 \leq$$
$$\leq 4\|x-y\|^2 + 2\pi\left|x^1-y^1\right|^2 + 2\left|x^1\sin x^1 - y^1\sin y^1\right|^2.$$

Функция $h(x) = x\sin x$, $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет локальному условию Липшица (и не удовлетворяет глобальному), поэтому для любого $a > 0$ найдется постоянная $q_a > 0$ такая, что для всех $|x^1|, |y^1| < a$ выполняется $\left|x^1\sin x^1 - y^1\sin y^1\right| \leq q_a|x^1-y^1|$. Но если $\|\bar{x}\|^2 = \int_0^\pi (x(s))^2 ds + (x^1)^2 \leq a^2$, $\|\bar{y}\|^2 \leq a^2$ то и $\left|x^1\right| \leq a$, $|y^1| \leq a$. Поэтому при любом $a > 0$ при условия $\|\bar{x}\|,\|\bar{y}\| \leq a$ выполняется неравенство

$$\|f(\bar{x})-f(\bar{y})\|^2 \leq \max\{4,2(\pi+q_a^2)\}\cdot\|\bar{x}-\bar{y}\|^2,$$

т.е. локальное условие Липшица выполнено.

ГЛАВА 3
СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ, ИМЕЮЩИМИ РАЗЛИЧНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ХАРСТА, БОЛЬШИЕ 1/3

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, на котором определены независимые одномерные дробные броуновские движения $B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)}$ с индексами Харста $H_1, \ldots, H_d \in (1/3,1)$. Введем обозначение $B_t = (B_t^{(0)}, \ldots, B_t^{(d)})^\top$ для $(d+1)$-мерного дробного броуновского движения, в котором $B_t^{(0)} = t$. Пусть также $H_0 = 1$. Пусть $H_{\min}$ — значение наименьшего из индексов Харста H_i, $i = 0, \ldots, d$. Выберем и зафиксируем некоторое $H \in (1/3, 1/2]$ такое, что $H < H_{\min}$.

Объектом изучения данной главы станет следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = f(X_t)dB_t, \ t \in [0,T], \tag{3.1}$$

в котором f — $(n \times (d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0 \ldots, d,$. Через X_t^x будем обозначать решение уравнения (3.1) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$.

Приведем конструктивное определение процесса второго порядка над дробным броуновским движением B.

Определение 3.1. Процессом второго порядка над дробным броуновским движением B будем называть процесс $\mathbb{B}\colon [0,T]^2 \times \Omega \to \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$, определенный следующими равенствами:

$$\mathbb{B}_{s,t} = \left(\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}\right)_{i,j=0}^{d},$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} \overset{L^2}{=} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \int_{\mathcal{P}} B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)}, \quad \int_{\mathcal{P}} B_{s,r}^{(i)} dB_r^{(j)} = \sum_{t_k, t_{k+1} \in \mathcal{P}} B_{s,t_k}^{(i)} B_{t_k,t_{k+1}}^{(j)}, \quad 1 \le i < j \le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)} = \int_s^t B_{s,r}^{(j)} dr \overset{\text{п.н.}}{=} \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_k, t_{k+1} \in \mathcal{P}} B_{s,t_k}^{(j)} (t_{k+1} - t_k), \quad 1 \le j \le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,i)} = \frac{1}{2} \left(B_{s,t}^{(i)}\right)^2, \quad 0 \le i \le d,$$

$$\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)} = -\mathbb{B}_{s,t}^{(j,i)} + B_{s,t}^{(i)} B_{s,t}^{(j)}, \quad 0 \le j < i \le d$$

для любой пары $(s,t) \in [0,T]^2$, где $\mathcal{P} = \{s = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = t\}$ – произвольное разбиение отрезка $[s,t]$, $|\mathcal{P}| = \max |t_{k+1} - t_k|$, а все пределы понимаются не зависящими от последовательности разбиений $\mathcal{P}$. Здесь обозначения $\overset{L^2}{=}$, $\overset{\text{п.н.}}{=}$ применяются для того, чтобы показать, что соответствующие пределы понимаются в смысле $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и $\mathbb{P} = 1$ соответственно.

Замечание 3.1. Поясним корректность приведенного определения. Интегралы, определяющие $\mathbb{B}^{(0,j)}_{s,t}$, являются потраекторными интегралами Янга, соответствующие им интегральные суммы сходятся п.н., поскольку сумма показателей непрерывности по Гельдеру тождественной функции и $B^{(j)}_{s,\cdot}$ строго больше 1. Интегральные суммы в $\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t}$ имеют конечный предел в L_2 ввиду предложения 10.3 [25], поскольку обе ковариационные функции $R_{B^{(i)}}$, $R_{B^{(j)}}$ имеют конечную ρ-вариацию, $\rho = \frac{1}{2H} < 2$ (см. [26, с. 417, предл. 2.2]).

Предложение 3.1. *Для любого фиксированного* $H \in (1/3, 1/2]$ *такого, что* $H < H_{\min} = \min\limits_{i=0,\ldots,d} H_i$ *имеет место включение* $(B, \mathbb{B}) \in \mathscr{C}^H_g([0,T], \mathbb{R}^{d+1})$ *п.н., и более того,* $\mathbb{E}\, \|\mathbb{B}\|^q_{2H} < \infty$ *для любого* $q \geq 1$.

Доказательство. Условие $\mathrm{Sym}(\mathbb{B}_{s,t}) = \frac{1}{2} B_{s,t} \otimes B_{s,t}$ очевидно выполнено по определению $\mathbb{B}$, поэтому достаточно доказать, что $(B, \mathbb{B}) \in \mathscr{C}^H([0,T], \mathbb{R}^{d+1})$. Обозначим через $\widetilde{\mathbb{B}}_{s,t} = \left(\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t}\right)^d_{i,j=1}$ процесс второго порядка над дробным броуновским движением $\widetilde{B}_t = (B_t)^d_{i=1}$ с индексами Харста $H_i \in (1/3,1)$, $i = 1, \ldots, d$. Покажем, что пара $(B, \mathbb{B})$ удовлетворяет условиям теоремы 10.4 из [25]. Как было показано [25, раздел 10.3] и [28, раздел 2.3], справедливы неравенства

$$\|R_{B^{(i)}}\|_{\frac{1}{2H_i}-\mathrm{var};[s,t]^2} \leq M_i |t-s|^{2H_i}, \quad H_i \in (1/3, 1/2],$$
$$\|R_{B^{(i)}}\|_{1-\mathrm{var};[s,t]^2} \leq M_i |t-s|, \quad H_i \in (1/2, 1)$$

для $i = 1, \ldots, d$ с некоторыми константами M_i, где $\|R_{B^{(i)}}\|_{\rho-\mathrm{var};[s,t]^2}$ – ρ-вариация функции $R_{B^{(i)}}$ на прямоугольнике $[s,t]^2$ (см. определение в [25, раздел 10.2]). Следующее неравенство является простым следствием из определения ρ-вариации:

$$\|R_{B^{(i)}}\|_{\rho'-\mathrm{var};[s,t]^2} \leq \left(\sup_{u,v,u',v' \in [s,t]} \left|\mathbb{E}(B^{(i)}_{u,v} B^{(i)}_{u',v'})\right| \right)^{\frac{\rho'-\rho}{\rho'}} \left(\|R_{B^{(i)}}\|_{\rho-\mathrm{var};[s,t]^2} \right)^{\frac{\rho}{\rho'}}$$

для любого $\rho' > \rho$. Непосредственное вычисление показывает, что $\left|\mathbb{E}(B^{(i)}_{u,v} B^{(i)}_{u',v'})\right| \leq |t-s|^{2H_i} \leq T^{2H_i}$ для любых $u,v,u',v' \in [s,t] \subset [0,T]$.

Полагая $H_* = \min\{\frac{1}{2}, H_{min}\}$, из последних четырех неравенств можно вывести, что

$$\|R_{B^{(i)}}\|_{\frac{1}{2H_*}-\text{var};[s,t]^2} \leq M|t-s|^{2H_*}, \quad i = 1,\ldots,d,$$

где $M = \max\limits_{i=1,\ldots,d} M_i^{H_*/H_i'} T^{2H_i'-2H_*}$, $H_i' = \min\{H_i, \frac{1}{2}\}$. Таким образом, пара $(\widetilde{B}, \widetilde{\mathbb{B}})$ удовлетворяет условиям теоремы 10.4 [25] со значением параметра $\rho = \frac{1}{2H_*} \in$ $\in [1,\frac{3}{2})$.

Применяя неравенство Лав-Янга (см. предложение 1.2) при $\tau = s$ к интегралам $\mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)}$, $1 \leq j \leq d$, можем заключить, что для любой пары $(s,t) \in [0,T]^2$ п.н. справедливо неравенство

$$\left|\mathbb{B}_{s,t}^{(0,j)}\right| = \left|\int_s^t B_{s,r}^{(j)} dr\right| \leq C_{1,H}|t-s|\|B^{(j)}\|_{\frac{1}{H}-var;[s,t]} \leq C_0\|B^{(j)}\|_H|t-s|^{2H},$$

в котором $C_0 = C_{1,H}T^{1-H}$ — константа (зависящая только от H, T), а также была использована зависимость между $\frac{1}{H}$-вариацией и нормой Гельдера с показателем H [27, с. 170]. Очевидно, $\left|\mathbb{B}_{s,t}^{(0,0)}\right| \leq \frac{1}{2}T^{2-2H}|t-s|^{2H}$. Также из теоремы 10.4 [25] следует, что $(\widetilde{B}, \widetilde{\mathbb{B}}) \in \mathscr{C}_g^H([0,T], \mathbb{R}^d)$, что в свою очередь влечет $\left|\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}\right| \leq \left|\widetilde{\mathbb{B}}_{s,t}\right| \leq \|\widetilde{\mathbb{B}}\|_{2H}|t-s|^{2H}$, $\|\widetilde{\mathbb{B}}\|_{2H} < \infty$ п.н. для всех $1 \leq i,j \leq d$. Таким образом, ввиду эквивалентности норм в $\mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$, можем заключить, что

$$|\mathbb{B}_{s,t}| \leq C_d \sum_{i,j=0}^d \left|\mathbb{B}_{s,t}^{(i,j)}\right| \leq C_d C_{T,H} \left(1 + \|\widetilde{\mathbb{B}}\|_{2H} + \sum_{j=1}^d \|B^{(j)}\|_H\right)|t-s|^{2H},$$

для любой пары $(s,t) \in [0,T]^2$ п.н. с некоторыми константами C_d и $C_{T,H}$, зависящими только от d и T,H соответственно. Полученное неравенство устанавливает тот факт, что $\|\mathbb{B}\|_{2H} < \infty$ п.н. и, следовательно, $(B,\mathbb{B}) \in$ $\in \mathscr{C}_g^H([0,T], \mathbb{R}^{d+1})$ п.н. (нетрудно убедиться, что тождество Чена также выполняется для всех элементов на позициях $(0,j)$, $(j,0)$, $0 \leq j \leq d$ в матрицах $\mathbb{B}$, $B \otimes B$).

Применяя неравенство о среднем степенном и применяя оператор математического ожидания, из последнего неравенства можем заключить, что для любого $q \geq 1$ справедливо неравенство

$$\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}\|_{2H}^q \leq C_{d,T,H,q}\left(1 + \mathbb{E}\,\|\widetilde{\mathbb{B}}\|_{2H}^q + \sum_{j=1}^d \mathbb{E}\,\|B^{(j)}\|_H^q\right),$$

в котором $C_{d,T,H,q} = (C_d C_{T,H})^q (d+2)^{1-\frac{1}{q}}$. Как известно из [25, теорема 4.10] и [46, Лемма 7.4], $\mathbb{E}\,\|\widetilde{\mathbb{B}}\|_{2H}^q < \infty$ и $\mathbb{E}\,\|B^{(j)}\|_H^q < \infty$ для всех $j = 1,\ldots,d$. Последнее завершает доказательство.

Определение 3.2. Случайный процесс X_t такой, что $(X, X') \in \in \mathcal{D}_B^{2H}([0,T], \mathbb{R}^n)$ п.н., будем называть решением уравнения (3.1), если он п.н. удовлетворяет равенству

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)dB_s, \quad t \in [0,T], \tag{3.2}$$

где интеграл понимается как потраекторный интеграл Губинелли. Пусть $x\in\mathbb{R}^n$. Решение уравнения (3.1) с начальным условием $X_0 = x$ будем называть п.н. единственным, если для любого другого решения Y_t уравнения (3.1) с начальным условием $Y_0 = x$ выполняется равенство $\mathbb{P}(X_t = Y_t \; \forall t \in [0,T]) = 1$.

Следующая теорема дает достаточное условие существования и единственности решения уравнения (3.1).

Теорема 3.1. *Если $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, то для любого $x \in \mathbb{R}^n$ уравнение* (3.1) *имеет единственное решение с начальным условием $X_0 = x$, причем $X' = f(X)$, $(f(X), (f(X))') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0,T], \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$ п.н. Более того, если $H_i > H^* \geq 1/2$ для всех $i = 0,\ldots,d$, то справедливо включение $X \in C^{H^*}([0,T], \mathbb{R}^n)$ п.н. и интеграл в определении решения уравнения* (3.1) *является потраекторным интегралом Янга.*

Доказательство существования и единственности функции $X(t,\omega)$ следует из теоремы 3.13 в [45]. В свою очередь, измеримость и $\mathcal{F}_t$-согласованность $X(t,\omega)$ следует из непрерывности отображения Ито-Лайонса, установленной в утверждении 2 тероремы 3.13 в работе [45], и сходимости диадных аппроксимаций $B_t(m)$ к дробному броуновскому движению B_t, доказанной в теореме 2 в работе [22].

3.1 Формула Ито

Рассмотрим вопрос о том, какому стохастическому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция $g(X_t)$ от решения X_t исходного стохастического дифференциального уравнения (3.1).

Теорема 3.2. *Пусть* $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. *Тогда для любых* s, $t \in [0,T]$ *п.н. справедлива следующая формула типа Ито:*

$$g(X_t) = g(X_s) + \int_s^t Dg(X_r)f(X_r)dB_r, \qquad s,t \in [0,T], \tag{3.3}$$

где X_t *— решение уравнения* (3.1) *с начальным условием* $X_0 = x$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $s,t \in [0,T]$, $s \leq t$ и рассмотрим разбиение отрезка $[s,t]$ точками $\mathcal{P}^{(N)} = \{s = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t\}$, $\left|\mathcal{P}^{(N)}\right| = \max\limits_{i=0,\ldots,N-1} |t_{i+1} - t_i|$. Будем обозначать $X^{\otimes m} = \underbrace{X \otimes \ldots \otimes X}_{m}$. Все равенства и неравенства ниже для случайных величин будем понимать выполненными почти наверное (п.н.). Используя формулу Тейлора, будем иметь:

$$g(X_t) - g(X_s) = \sum_{i=0}^{N-1}(g(X_{t_{i+1}}) - g(X_{t_i})) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1}\left(Dg(X_{t_i})X_{t_i,t_{i+1}} + \frac{1}{2}D^2g(X_{t_i})X_{t_i,t_{i+1}}^{\otimes 2} + \frac{1}{6}D^3g(X_{t_i} + \theta_i X_{t_i,t_{i+1}})X_{t_i,t_{i+1}}^{\otimes 3}\right), \tag{3.4}$$

для некоторых $\theta_i \in (0,1)$. Здесь слагаемые вида $D^k g X^{\otimes k}$ следует понимать в смысле, указанном в замечании 1.4:

$$D^k g X^{\otimes k} = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k g}{\partial X_{i_1}\ldots\partial X_{i_k}} X_{i_1}\ldots X_{i_k}$$

Оценим последнее слагаемое в сумме (3.4). Следующее неравенство будет использоваться в дальнейшем (напомним, что $3H > 1$):

$$\sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i|^{3H} \leq \sum_{i=0}^{N-1} \left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1}(t_{i+1} - t_i) = \left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1}(t-s).$$

Поскольку $X \in C^H([0,T], \mathbb{R}^n)$ и $3H > 1$, то

$$\left|\sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{6}D^3g(X_{t_i} + \theta_i X_{t_i,t_{i+1}})X_{t_i,t_{i+1}}^{\otimes 3}\right| \leq \frac{1}{6}\|D^3g\|_\infty \|X\|_H^3 \sum_{i=0}^{N-1} |t_{i+1} - t_i|^{3H} =$$

$$= \frac{1}{6}\|D^3g\|_\infty \|X\|_H^3 (t-s)\left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1} = O\left(\left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1}\right). \tag{3.5}$$

Из теоремы 4.10 [25] следует, что

$$X_{t_i,t_{i+1}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(X_r)dB_r = f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} + Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + O\left(|t_{i+1}-t_i|^{3H}\right), \tag{3.6}$$

причем константа в $O\left(|t_{i+1}-t_i|^{3H}\right)$ зависит только от f, B и X и не зависит от разбиения $\mathcal{P}^{(N)}$. Поскольку $|f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}}| \le \|f\|_\infty \|B\|_H \times$ $\times |t_{i+1}-t_i|^H$, $|Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}| \le \|f\|^2_{C_b^2}\|\mathbb{B}\|_{2H}|t_{i+1}-t_i|^{2H}$, то умножая соотношение (3.6) тензорно на себя, получим

$$\begin{gathered} X^{\otimes 2}_{t_i,t_{i+1}} = (f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} + (Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} + \\ + f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} \otimes Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} \otimes f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} + \\ + O\left(|t_{i+1}-t_i|^{4H}\right) = \\ = (f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} + O\left(|t_{i+1}-t_i|^{3H}\right). \end{gathered} \tag{3.7}$$

Кроме того, легко видеть, что

$$\sum_{i=0}^{N-1} O\left(|t_{i+1}-t_i|^{3H}\right) \le O(1)\sum_{i=0}^{N-1}|t_{i+1}-t_i|^{3H} = O\left(\left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1}\right).$$

Подставляя (3.5) — (3.7) в (3.4), и замечая, что

$$\begin{gathered} D^2g(X_{t_i})(f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} = \left(f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}}\right)^\top D^2g(X_{t_i})\left(f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}}\right) = \\ = (B_{t_i,t_{i+1}})^\top \left(f(X_{t_i})^\top D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})\right)B_{t_i,t_{i+1}} = \\ = \left(f(X_{t_i})^\top D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})\right)(B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} \end{gathered}$$

получим:

$$\begin{gathered} g(X_t) - g(X_s) = \sum_{i=0}^{N-1} Dg(X_{t_i})f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} + \\ + \sum_{i=0}^{N-1}\left(Dg(X_{t_i})Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + \frac{1}{2}D^2g(X_{t_i})(f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2}\right) + \\ + O\left(\left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1}\right) = \sum_{i=0}^{N-1} Dg(X_{t_i})f(X_{t_i})B_{t_i,t_{i+1}} + \\ + \sum_{i=0}^{N-1}\left(Dg(X_{t_i})Df(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} + f(X_{t_i})^\top D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}\right) + \\ + \sum_{i=0}^{N-1} f(X_{t_i})^\top D^2g(X_{t_i})f(X_{t_i})\left(\frac{1}{2}(B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} - \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}\right) + O\left(\left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1}\right) \end{gathered} \tag{3.8}$$

Поскольку пара $(B,\mathbb{B})$ принадлежит пространству геометрических грубых траекторий, то $\mathrm{Sym}(\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}}) = \frac{1}{2}(B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2}$ и $\frac{1}{2}(B_{t_i,t_{i+1}})^{\otimes 2} - \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} = -\mathrm{Anti}(\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}})$, где $\mathrm{Anti}(\mathbb{B}) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{B} - \mathbb{B}^\top\right)$ — антисимметричная часть $\mathbb{B}$. Заметим, что $f(X_.)^\top D^2 g(X_.) f(X_.)$ симметрично, в то время как $\mathrm{Anti}(\mathbb{B})$ антисимметрично, поэтому $f(X_{t_i})^\top D^2 g(X_{t_i}) f(X_{t_i}) \mathrm{Anti}(\mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}})$ зануляется для каждого $i = 0, \ldots, N-1$. Учитывая это и то, что $(Dg(X_.) \cdot f(X_.))' = D(Dg \cdot f)(X_.) \cdot X_.' = f(X_.)^\top D^2 g(X_.) f(X_.) + Dg(X_.) Df(X_.) f(X_.)$, из равенства (3.8) получим

$$g(X_t) - g(X_s) = \sum_{i=0}^{2^N-1} \left(Dg(X_{t_i}) f(X_{t_i}) B_{t_i,t_{i+1}} + \big(Dg(X_.) f(X_.)\big)'_{t_i} \mathbb{B}_{t_i,t_{i+1}} \right) + \\ + O\left(\left|\mathcal{P}^{(N)}\right|^{3H-1} \right) \tag{3.9}$$

Переходя к пределу в (3.9) при $\left|\mathcal{P}^{(N)}\right| \to 0$, получим (3.3), что завершает доказательство формулы Ито.

3.2 Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями

Наряду с уравнением (3.1) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\widetilde{X}_t = \widetilde{f}(\widetilde{X}_t) dB_t, \quad t \in [0,T], \tag{3.10}$$

в котором $\widetilde{f}$ — $(n \times (d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $\widetilde{f}_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0, \ldots, d$.

Определения решений уравнений (3.1), (3.10) и связанных с ними объектов были приведены ранее. Будем предполагать выполненными условия существования решений указанных уравнений с начальными условиями $X_0 = \xi$, $\widetilde{X}_0 = \widetilde{\xi}$, где ξ, $\widetilde{\xi}$ — случайные величины. В частности, для согласованности со случаем $\xi(\omega) \equiv x$, $\widetilde{\xi}(\omega) \equiv \widetilde{x}$ (см. теорему 3.1) будем предполагать, что $f, \widetilde{f} \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$. Причем функцию f будем считать фиксированной, а $\widetilde{f}$ — изменяющейся в малой окрестности f в пространстве $C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$.

Будем использовать символ I для обозначения отрезков вещественной прямой: $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ длины $|I| = b - a$. Для краткости будем опускать индекс $[0,T]$ для норм, связанных с исходным отрезком интегрирования, полагая $\|\cdot\|_\alpha := \|\cdot\|_{\alpha;[0,T]}$, $\|\cdot\|_{\alpha,\delta} := \|\cdot\|_{\alpha;[0,T],\delta}$.

Приведем ряд утверждений, которые будем использовать в дальнейшем для проведения оценок. Пусть $Y \in C^\alpha([0,T], U_1)$, $I \subset [0,T]$, где U_1 — конечномерное банахово пространство.

Предложение 3.2. *Если* $\|Y\|_{\alpha;I,\delta} \le M$, $\delta \le |I|$, *то* $\|Y\|_{\alpha;I} \le \le M\left(1 \vee 2\delta^{-(1-\alpha)}|I|^{1-\alpha}\right)$.

Доказательство приведено в [25], см. утверждение 4.24 на с. 77.

Предложение 3.3. *Пусть X_t — решение уравнения* (3.1). *Тогда для любого $I \subset [0,T]$ длины $|I| \le 1$ п.н. справедливы неравенства*

$$\|X\|_{H;I} \le K\left(C_B\|f\|_{C_b^2} \vee \left(C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^{1/H}\right), \tag{3.11}$$

$$\|R^X\|_{2H;I} \le \hat{K}\left(\left(C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^2 \vee \left(C_B\|f\|_{C_b^2}\right)^{1+\frac{1}{H}}\right), \tag{3.12}$$

где $C_B = C_B(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) = \|B\|_H + \sqrt{\|\mathbb{B}\|_{2H}}$, а константы $K, \hat{K}$ зависят лишь от H.

Доказательство. Равенство (3.11) является простым следствием [25, предложение 8.3]. Докажем равенство (3.12). Используя предложение 1.5 для $s,t \in I$, будем иметь:

$$\begin{gathered}|R^X_{s,t}| = |X_{s,t} - f(X_s)B_{s,t}| \le \\ \le \left|\int_s^t f(X_r)dB_r - f(X_s)B_{s,t} - Df(X_s)f(X_s)\mathbb{B}_{s,t}\right| + |Df(X_s)f(X_s)\mathbb{B}_{s,t}| \le \\ \le C\Big(\|B\|_{H;I}\|R^{f(X)}\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}_{s,t}\|_{2H;I}\|f(X)'\|_{H;I}\Big)|t-s|^{3H} + \\ + \|Df\|_\infty\|f\|_\infty\|\mathbb{B}\|_{2H;I}|t-s|^{2H}.\end{gathered} \tag{3.13}$$

Рассмотрим последнее неравенство для всех подотрезков I длины не больше δ. Тогда, как следствие

$$\begin{gathered}\|R^X\|_{2H;\delta} \le \|Df\|_\infty\|f\|_\infty\|\mathbb{B}\|_{2H;I} + \\ + C\Big(\|B\|_{H;\delta}\|R^{f(X)}\|_{2H;\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H;\delta}\|f(X)'\|_{H;\delta}\Big)\delta^H\end{gathered}$$

Ниже символами c_i будем обозначать константы, зависящие быть может, только от H. Заметим, что $R^{f(X)} = f(X)_{s,t} - Df(X_s)X'_sB_{s,t} = f(X)_{s,t} -$

$-Df(X_s)X_{s,t} + Df(X_s)R^X_{s,t} = \frac{1}{2}D^2 f(X_s + \theta X_{s,t})X^{\otimes 2}_{s,t} + Df(X_s)R^X_{s,t}$ для некоторого $\theta \in (0,1)$. Поэтому

$$\|R^{f(X)}\|_{2H;\delta} \le \frac{1}{2}\|D^2 f\|_\infty \|X\|^2_{H;\delta} + \|Df\|_\infty \|R^X\|_{2H;\delta} \le$$
$$\le \|f\|_{C^2_b}\Big(\|X\|^2_{H;\delta} + \|R^X\|_{2H;\delta}\Big).$$

Также поскольку $f(X)' = Df(X)X' = Df(X)f(X)$, то, как легко видеть, $(Df(X)f(X))_{s,t} = D(Df\cdot f)(X_s + \theta_1 X_{s,t})X_{s,t} = \big(D^2 f\cdot f + Df\cdot Df\big)(X_s + +\theta_1 X_{s,t})X_{s,t}$, поэтому $\|f(X)'\|_{H;\delta} \le \|f\|^2_{C^2_b}\|X\|_{H;\delta}$. Значит,

$$\|R^X\|_{2H;\delta} \le c_1\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta} + c_1\|f\|_{C^2_b}\|B\|_{H;\delta}\delta^H\Big(\|X\|^2_{H;\delta} + \|R^X\|_{2H;\delta}\Big) +$$
$$+ c_1\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{H;\delta}\delta^H\|X\|_{H;\delta},$$

где $c_1 = 1 \vee C$. Далее ограничимся достаточно малыми δ — такими, чтобы выполнялись неравенства

$$c_1\|f\|_{C^2_b}\|B\|_H\delta^H \le \frac{1}{2}, \qquad c_1\|f\|_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|^{1/2}_{2H}\delta^H \le 1. \tag{3.14}$$

При таком выборе будем иметь:

$$\|R^X\|_{2H;\delta} \le c_1\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta} + \frac{1}{2}\Big(\|X\|^2_{H;\delta} + \|R^X\|_{2H;\delta}\Big) + \|f\|_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|^{1/2}_{2H}\|X\|_{H;\delta}. \tag{3.15}$$

Отсюда с учетом неравенства $2\sqrt{ab} \le a + b$, выводим:

$$\|R^X\|_{2H;\delta} \le 2c_1\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta} + \|X\|^2_{H;\delta} + 2\|f\|_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|^{1/2}_{2H}\|X\|_{H;\delta} \le$$
$$\le c_3\|f\|^2_{C^2_b}\|\mathbb{B}\|_{2H;\delta} + 2\|X\|^2_{H;\delta}, \tag{3.16}$$

где $c_3 = 2c_2 + 1$ при достаточно малых $\delta \le \Big(2c_1 C_B\|f\|_{C^2_b}\Big)^{-1/H}$. Из [25, предложение 8.3] следует, что при тех же δ выполнено неравенство $\|X\|_{H;\delta} \le \le c_0\|f\|_{C^2_b}C_B$. Комбинируя последние два неравенства, получим:

$$\|R^X\|_{2H;\delta} \le \|f\|^2_{C^2_b}\left(c_3 + 2c_0^2\right)C_B^2 = c_4\left(C_B\|f\|_{C^2_b}\right)^2,$$

где $c_4 = c_3 + 2c_0^2$. Применяя предложение 3.2, с учетом $|I| \le 1$, будем иметь:

$$\|R^X\|_{2H;I} \le c_4\left(C_B\|f\|_{C^2_b}\right)^2\left(1 \vee 2\delta^{H-1}\right) \le c_5\left(\left(C_B\|f\|_{C^2_b}\right)^2 \vee \left(C_B\|f\|_{C^2_b}\right)^{1+\frac{1}{H}}\right),$$

где $c_5 = c_4(1 \vee 2^{1/H}c_1^{(1-H)/H})$ зависит лишь от H. Предложение доказано.

Предложение 3.4. *Пусть* $t_j = (j \cdot \delta) \wedge T$, $I_j = [t_j, t_{j+1}] \subset [0,T]$, $j = 0,1,\ldots$ *Тогда* $\|Y\|_{H;\delta} \le 2^{1-H} \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $s,t \in [0,T]$ такие, что $0 < |t-s| < \delta$, $s < t$. Если $s,t \in I_j$ для некоторого j, то, очевидно, $|Y_{s,t}| \le \|Y\|_{H;I_j} |t-s|^H \le |t-s|^H \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j}$. Иначе $s \in I_{j-1}$, $t \in I_j$. В таком случае

$$|Y_{s,t}| \le |Y_{s,t_j}| + |Y_{t_j,t}| \le \|Y\|_{H;I_{j-1}} |t_j - s|^H + \|Y\|_{H;I_j} |t - t_j|^H \le$$
$$\le \left(|t-t_j|^H + |t_j - s|^H\right) \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j} \le 2^{1-H} |t-s|^H \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j},$$

где в последнем переходе было применено неравенство Иенсена для вогнутой функции $\phi(t) = t^H$, $t > 0$, $H \in (0,1)$. Так как $1 - H > 0$, то $2^{1-H} > 1$ и в любом из рассмотренных случаев

$$|Y_{s,t}| \le 2^{1-H} |t-s|^H \bigvee_{j=0}^{\lfloor T/\delta \rfloor} \|Y\|_{H;I_j}$$

для $|t-s| \le \delta$. Из последнего неравенства следует требуемое утверждение.

В технических выкладках будет полезно следующее элементарное предложение.

Предложение 3.5. *Пусть* $\mathrm{u},\widetilde{\mathrm{u}} \in \mathbf{U}$, $\mathrm{v},\widetilde{\mathrm{v}} \in \mathbf{V}$, $u,\widetilde{u} \in U \times V^{\otimes k}$, $v,\widetilde{v} \in V^{\otimes k}$ *— тензоры,* $\mathbf{U},\mathbf{V},U,V$ *— нормированные векторные пространства над полем* $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливы неравенства*

$$|\mathrm{u}\mathrm{v} - \widetilde{\mathrm{u}}\widetilde{\mathrm{v}}| \le |\mathrm{u}|\,|\mathrm{v} - \widetilde{\mathrm{v}}| + |\widetilde{\mathrm{v}}|\,|\mathrm{u} - \widetilde{\mathrm{u}}|\,,$$
$$|uv - \widetilde{u}\widetilde{v}| \le |u|\,|v - \widetilde{v}| + |\widetilde{v}|\,|u - \widetilde{u}|\,.$$

3.2.1 Вспомогательные результаты

В данном разделе мы получим ряд вспомогательных лемм, на которых будут опираться доказательства результатов, связанных с непрерывной зависимостью решений уравнений (3.1), (3.10). Все неравенства в дальнейшем понимаются выполненными почти наверное.

Лемма 3.1. *Пусть* X_t *и* $\widetilde{X}_t$ *— решения уравнений* (3.1) *и* (3.10) *соответственно с правыми частями* f, $\widetilde{f}$ *из класса* $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, *причем функция* $\widetilde{f}$

такова, что $\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\le 1$. *Тогда для любого отрезка* $I=[u,v]\subset[0,T]$ *длины* $|I|\le 1$ *и любых* $s,t\in I$ *п.н. имеет место следующее неравенство:*

$$\left|\int_s^t\left(f(\widetilde{X}_\tau)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right|\le C_f\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}|t-s|^H,$$

где $C_f=C_f(H,\|f\|_{C_b^3},\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H})$ *— случайная величина.*

Доказательство. Используя предложение 1.5, получим оценку

$$\left|\int_s^t\left(f(\widetilde{X}_\tau)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right|\le\left|f(\widetilde{X}_s)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right||B_{s,t}|+\left|f(\widetilde{X}_s)'-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)'\right||\mathbb{B}_{s,t}|+$$
$$+C\left(\|B\|_H\left\|R^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I}+\|\mathbb{B}\|_{2H}\|f(\widetilde{X})'-\widetilde{f}(\widetilde{X})'\|_{H;I}\right)|t-s|^{3H}.\quad(3.17)$$

Следуя [25, лемма 7.3, теорема 8.4], имеют место следующие соотношения для производных Губинелли:

$$f(\widetilde{X}_\cdot)'=Df(\widetilde{X}_\cdot)\cdot\widetilde{X}_\cdot'=Df(\widetilde{X}_\cdot)\cdot\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)=(Df\cdot\widetilde{f})(\widetilde{X}_\cdot),\quad(3.18)$$
$$\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)'=D\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)\cdot\widetilde{X}_\cdot'=D\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)\cdot\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)=(D\widetilde{f}\cdot\widetilde{f})(\widetilde{X}_\cdot).\quad(3.19)$$

Из соотношений (3.18), (3.19) очевидным образом следуют оценки

$$\left|f(\widetilde{X}_s)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right||B_{s,t}|\le\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\|B\|_H|t-s|^H,$$
$$\left|f(\widetilde{X}_s)'-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)'\right||\mathbb{B}_{s,t}|\le\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\|\widetilde{f}\|_{C_b^2}\|\mathbb{B}\|_{2H}|t-s|^H$$

для любых $s,t\in I$, $|I|\le 1$. Из неравенства треугольника следует, что $\|\widetilde{f}\|_{C_b^2}\le$ $\le\|f\|_{C_b^2}+1$ Таким образом,

$$\left|f(\widetilde{X}_s)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right||B_{s,t}|+\left|f(\widetilde{X}_s)'-\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)'\right||\mathbb{B}_{s,t}|\le c_0\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}|t-s|^H,\quad(3.20)$$

где $c_0=\|B\|_H+(1+\|f\|_{C_b^3})\|\mathbb{B}\|_{2H}$.

Далее оценим $\|f(\widetilde{X})'-\widetilde{f}(\widetilde{X})'\|_{H;I}$. Используя соотношения (3.18), (3.19) и формулу конечных приращений будем иметь:

$$\left|f(\widetilde{X}_\cdot)'_{s,t}-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)'_{s,t}\right|=\left|\left(Df\cdot\widetilde{f}-D\widetilde{f}\cdot\widetilde{f}\right)(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t}\right|\le$$
$$\le\left\|D\big((Df-D\widetilde{f})\cdot\widetilde{f}\big)\right\|_\infty\|\widetilde{X}\|_{H;I}|t-s|^H.$$

Поскольку $D\big((Df-D\widetilde{f})\cdot\widetilde{f}\big)=(D^2f-D^2\widetilde{f})\cdot\widetilde{f}+(Df-D\widetilde{f})\cdot D\widetilde{f}$, то нетрудно видеть, что $\left\|D\big((Df-D\widetilde{f})\cdot\widetilde{f}\big)\right\|_\infty\le 2\|\widetilde{f}\|_{C_b^2}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\le 2(1+\|f\|_{C_b^3})\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}$. Отсюда ввиду предложения 3.3 выводим неравенство

$$\|f(\widetilde{X})'-\widetilde{f}(\widetilde{X})'\|_{H;I}\le c_{f'}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2},\quad(3.21)$$

где $c_{f'} = 2(1+\|f\|_{C_b^3})K\left((1+\|f\|_{C_b^3})C_B \vee \left((1+\|f\|_{C_b^3})C_B\right)^{1/H}\right)$.

Осталось оценить $\left\|R^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I}$. Учитывая соотношения (3.18), (3.19) и формулу конечных приращений, для некоторого $\widetilde{\theta} \in (0,1)$ будем иметь:

$$\begin{aligned} R_{s,t}^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})} &= f(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t} - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}'_s B_{s,t} + D\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}'_s B_{s,t} = \\ &= \left((f-\widetilde{f})(\widetilde{X}_\cdot)_{s,t} - D\big(f-\widetilde{f}\big)(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}_{s,t}\right) + \left(Df(\widetilde{X}_s) - D\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right) R_{s,t}^{\widetilde{X}} = \\ &= \frac{1}{2}D^2\left(f-\widetilde{f}\right)\left(\widetilde{X}_{s,t}(\widetilde{\theta})\right)\widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} + \left(Df(\widetilde{X}_s) - D\widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right) R_{s,t}^{\widetilde{X}}. \end{aligned}$$

Из последнего равенства, равенства (3.35) и формулы конечных приращений следует, что для любых $s,t \in I$ имеет место оценка

$$\left|R_{s,t}^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}\right| \le \left(\frac{1}{2}\|\widetilde{X}\|_{H;I}^2 + \|R^{\widetilde{X}}\|_{2H;I}\right)\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}|t-s|^{2H},$$

из которой с учетом предложения 3.3 устанавливаем неравенство

$$\left\|R_{s,t}^{f(\widetilde{X})-\widetilde{f}(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} \le c_R\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} \tag{3.22}$$

где $c_R = \frac{1}{2}K^2\left(K_B^2 \vee K_B^{2/H}\right) + \hat{K}\left(K_B^2 \vee K_B^{1+\frac{1}{H}}\right)$, $K_B = (1+\|f\|_{C_b^3})C_B$.

Применяя неравенства (3.20) — (3.22) к правой части (3.17), получим:

$$\left|\int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right) dB_\tau\right| \le (c_0 + Cc_R\|B\|_H + Cc_{f'}\|\mathbb{B}\|_{2H})\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}|t-s|^H,$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть X_t и $\widetilde{X}_t$ — решения уравнений* (3.1) *и* (3.10) *соответственно с правыми частями f, $\widetilde{f}$ из класса $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} \le 1$. Тогда для любых функций $g, \widetilde{g} \in C_b^1$, любого отрезка $I = [u,v] \subset [0,T]$ длины $|I| \le 1$ и любого $s \in I$ п.н. справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} |g(X_s) - \widetilde{g}(\widetilde{X}_s)| &\le \|g-\widetilde{g}\|_\infty + C_{0;g}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_{1;g}|X_u - \widetilde{X}_u| + \\ &+ C_{2;g}\left(\|B\|_H\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H}\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;I}\right)|I|^{3H}, \end{aligned}$$

где $C_{0;g} = C_{0;g}(H, \|g\|_{C_b^1}, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $C_{1;g} = C_{1;g}(H, \|g\|_{C_b^1}, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$ — случайные величины, $C_{2;g} = C_{2;g}(H, \|g\|_{C_b^1})$ — константа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы конечных приращений следует, что имеет место неравенство

$$
\begin{aligned}
|g(X_s)-\widetilde{g}(\widetilde{X}_s)| &\le |g(X_s)-g(\widetilde{X}_s)|+|g(\widetilde{X}_s)-\widetilde{g}(\widetilde{X}_s)|\le \\
&\le \|Dg\|_\infty|X_s-\widetilde{X}_s|+\|g-\widetilde{g}\|_\infty\le \\
&\le \|g-\widetilde{g}\|_\infty+\|g\|_{C_b^1}\left(|X_u-\widetilde{X}_u|+|X_{u,s}-\widetilde{X}_{u,s}|\right). \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

Поэтому осталось оценить $|X_{u,s}-\widetilde{X}_{u,s}|$. Для этого воспользуемся определением решения и предложением 1.5. Будем иметь:

$$
|X_{u,s}-\widetilde{X}_{u,s}|=\left|\int_u^s\left(f(X_\tau)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right|\le M_1+M_2,
$$

где $M_1=\left|\int_u^s\left(f(X_\tau)-f(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right|$, $M_2=\left|\int_u^s\left(f(\widetilde{X}_\tau)-\widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right)dB_\tau\right|$. Оценку для второго выражения дает лемма 3.1: $M_2\le C_f\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}|s-u|^H$.

Оценим M_1. С учетом соотношений, аналогичных (3.18), (3.19), и предложения 1.5, получим:

$$
\begin{aligned}
M_1 \le \left|f(X_u)-f(\widetilde{X}_u)\right||B_{u,s}|+\left|(Df\cdot f)(X_u)-(Df\cdot\widetilde{f})(\widetilde{X}_u)\right||\mathbb{B}_{u,s}|+ \\
+C\left(\|B\|_{H;I}\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I}+\|\mathbb{B}\|_{2H;I}\|f(X)'-f(\widetilde{X})'\|_{H;I}\right)|s-u|^{3H}.
\end{aligned}
\qquad (3.24)
$$

Осталось заметить, что ввиду формулы конечных приращений, примененной к функциям f и $Df\cdot f$, для любого $s\in I$, $|I|\le 1$ будем иметь:

$$
\begin{aligned}
\left|f(X_u)-f(\widetilde{X}_u)\right||B_{u,s}| &\le \|Df\|_\infty|X_u-\widetilde{X}_u|\cdot\|B\|_{H;I}|s-u|^H\le \\
&\le \|f\|_{C_b^3}\|B\|_H|X_u-\widetilde{X}_u|, \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|Df(X_u)f(X_u)-Df(\widetilde{X}_u)\widetilde{f}(\widetilde{X}_u)\right||\mathbb{B}_{u,s}| &\le \\
\le\left(\|D(Df\cdot f)\|_\infty|X_u-\widetilde{X}_u|+\|Df\|_\infty\|f-\widetilde{f}\|_\infty\right)|\mathbb{B}_{u,s}| &\le \\
\le \|f\|^2_{C_b^3}\|\mathbb{B}\|_{2H}|X_u-\widetilde{X}_u|+\|f\|_{C_b^3}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\|\mathbb{B}\|_{2H}. &\qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

Окончательно, из соотношений (3.23) — (3.26) и леммы 3.1 выводим:

$$
\begin{aligned}
|g(X_s)-g(\widetilde{X}_s)|\le \|g-\widetilde{g}\|_\infty+C_{0;g}\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}+C_{1;g}|X_u-\widetilde{X}_u|+ \\
+C_{2;g}\left(\|B\|_H\left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I}+\|\mathbb{B}\|_{2H}\|f(X)'-f(\widetilde{X})'\|_{H;I}\right)|I|^{3H},
\end{aligned}
$$

где $C_{0;g} = \|g\|_{C_b^1}(\|f\|_{C_b^3}\|\mathbb{B}\|_{2H}+C_f)$, $C_{1;g} = \|g\|_{C_b^1}\left(1+\|f\|_{C_b^3}\|B\|_H+\|f\|^2_{C_b^3}\|\mathbb{B}\|_{2H}\right)$, $C_{2;g} = C\|g\|_{C_b^1}$. Последнее соотношение доказывает лемму.

Лемма 3.3. *Пусть X_t и $\widetilde{X}_t$ — решения уравнений* (3.1) *и* (3.10) *соответственно с правыми частями f, $\widetilde{f}$ из класса $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1$. Для любого отрезка $I = [u,v] \subset [0,T]$ длины $|I| \leq 1$ п.н. имеет место следующее неравенство:*

$$\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;I} \leq C_1|X_u - \widetilde{X}_u| + C_2\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_3\|X - \widetilde{X}\|_{H;I},$$

где $C_j = C_j(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j = 1,2,3$ — случайные величины.

Доказательство. Введем обозначения: $Y_{s,t}(\theta) = Y_s + \theta Y_{s,t}$, $\theta \in (0,1)$, $s,t \in I$, $\varphi = Df \cdot f$. С учетом соотношений, аналогичных (3.18), (3.19), следуя формуле конечных приращений, найдутся $\theta_1, \theta_2, \theta \in (0,1)$ такие, что

$$\begin{aligned}
&\left|\left(f(X.)' - f(\widetilde{X}.)'\right)_{s,t}\right| \leq \\
&\leq \left|(Df\cdot f)(X.)_{s,t} - (Df\cdot f)(\widetilde{X}.)_{s,t}\right| + \left|\big(Df\cdot(f-\widetilde{f})\big)(\widetilde{X}.)_{s,t}\right| = \\
&= \left|D\varphi(X_{s,t}(\theta_1))X_{s,t} - D\varphi(\widetilde{X}_{s,t}(\theta_2))\widetilde{X}_{s,t}\right| + \left|D\big(Df\cdot(f-\widetilde{f})\big)(\widetilde{X}_{s,t}(\theta))\widetilde{X}_{s,t}\right| \leq \\
&\leq |D\varphi(X_{s,t}(\theta_1))|\cdot|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}| + |\widetilde{X}_{s,t}|\cdot\left|D\varphi(X_{s,t}(\theta_1)) - D\varphi(\widetilde{X}_{s,t}(\theta_2))\right| + \\
&+ \left\|D^2f\cdot(f-\widetilde{f}) + Df\cdot(Df - D\widetilde{f})\right\|_\infty |\widetilde{X}_{s,t}|. \qquad (3.27)
\end{aligned}$$

Легко видеть, что $\left\|D^2f\cdot(f-\widetilde{f}) + Df\cdot(Df - D\widetilde{f})\right\|_\infty \leq 2\|f\|_{C_b^3}\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}$. Оценим второе слагаемое (3.27). Из формулы конечных приращений следует:

$$\begin{aligned}
&\left|D\varphi(X_{s,t}(\theta_1)) - D\varphi(\widetilde{X}_{s,t}(\theta_2))\right| \leq \|D^2\varphi\|_\infty\left(|X_s - \widetilde{X}_s| + |\theta_1-\theta_2|\cdot|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}|\right) \leq \\
&\leq \|f\|^2_{C_b^3}\left(|X_u - \widetilde{X}_u| + \|X-\widetilde{X}\|_{H;I}|u-s|^H + \|X-\widetilde{X}\|_{H;I}|t-s|^H\right). \qquad (3.28)
\end{aligned}$$

С учетом соотношений (3.27), (3.28), очевидных неравенств $|\widetilde{X}_{s,t}| \leq \leq \|\widetilde{X}\|_{H;I}|t-s|^H$, $\|\widetilde{f}\|_{C_b^2} \leq 1 + \|f\|_{C_b^3}$ и предложения 3.3 для любых $s,t \in I$ будем иметь:

$$\left|\left(f(X.)' - f(\widetilde{X}.)'\right)_{s,t}\right| \leq \left(C_1|X_u - \widetilde{X}_u| + C_2\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} + C_3\|X-\widetilde{X}\|_{H;I}\right)|t-s|^H,$$

где $C_1 = \|f\|^2_{C^3_b} C_{\widetilde{X}}$, $C_2 = 2\|f\|_{C^3_b} C_{\widetilde{X}}$, $C_3 = \big(1+2C_{\widetilde{X}}\big)\|f\|^2_{C^3_b}$, $C_{\widetilde{X}} = K\Bigg((1+\|f\|_{C^3_b})C_B \vee \Big((1+\|f\|_{C^3_b})C_B\Big)^{\frac{1}{H}}\Bigg)$. Из последнего неравенства следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть* X_t *и* $\widetilde{X}_t$ *— решения уравнений* (3.1) *и* (3.10) *соответственно с правыми частями* f, $\widetilde{f}$ *из класса* $C^3_b(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$*, причем функция* $\widetilde{f}$ *такова, что* $\|f-\widetilde{f}\|_{C^2_b} \le 1$. *Для любого отрезка* $I = [u,v] \subset [0,T]$ *длины* $|I| \le 1$ *п.н. имеет место следующее неравенство:*

$$\Big\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\Big\|_{2H;I} \le C_4|X_u - \widetilde{X}_u| + C_5\|f-\widetilde{f}\|_{C^2_b} + C_6\|X-\widetilde{X}\|_{H;I},$$

где $C_j = C_j(H, \|f\|_{C^3_b}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j = 4,5,6$ *— случайные величины.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению

$$R^{f(X)-f(\widetilde{X})}_{s,t} = \Big(f(X_\cdot) - f(\widetilde{X}_\cdot)\Big)_{s,t} - Df(X_s)X'_sB_{s,t} + Df(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}'_sB_{s,t} =$$
$$= \Big(f(X_\cdot) - f(\widetilde{X}_\cdot)\Big)_{s,t} - Df(X_s)X_{s,t} + Df(\widetilde{X}_s)\widetilde{X}_{s,t} + Df(X_s)R^X_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)R^{\widetilde{X}}_{s,t}. \quad (3.29)$$

Рассмотрим функцию $g(x,\widetilde{x}) = f(x) - f(\widetilde{x})$. Она дифференцируема по обеим переменным до 3-го порядка включительно и ввиду формулы Тейлора для некоторого $\theta \in (0,1)$:

$$g(X_t,\widetilde{X}_t) = g(X_s,\widetilde{X}_s) + \left(X_{s,t}\frac{\partial g(\cdot)}{\partial x} + \widetilde{X}_{s,t}\frac{\partial g(\cdot)}{\partial \widetilde{x}}\right)\Bigg|_{(X_s,\widetilde{X}_s)} +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial x^2}X^{\otimes 2}_{s,t} + 2\cdot\frac{\partial^2 g(\cdot)}{\partial x\partial\widetilde{x}}(X_{s,t}\otimes\widetilde{X}_{s,t}) + \frac{\partial g^2(\cdot)}{\partial\widetilde{x}^2}\widetilde{X}^{\otimes 2}_{s,t}\right)\Bigg|_{(X_{s,t}(\theta),\widetilde{X}_{s,t}(\theta))}. \quad (3.30)$$

Вернемся к исходным обозначениям:

$$\frac{\partial^i g(x,\widetilde{x})}{\partial x^i} = D^i f(x), \quad \frac{\partial^i g(x,\widetilde{x})}{\partial \widetilde{x}^i} = -D^i f(\widetilde{x}), \quad i = 1,2; \quad \frac{\partial^2 g(x,\widetilde{x})}{\partial x\partial\widetilde{x}} = 0. \quad (3.31)$$

Учитывая равенства (3.29) — (3.31), получим:

$$R^{f(X)-f(\widetilde{X})}_{s,t} = \frac{1}{2}\Big(D^2f(X_{s,t}(\theta))X^{\otimes 2}_{s,t} - D^2f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta))\widetilde{X}^{\otimes 2}_{s,t}\Big) +$$
$$+ \Big(Df(X_s)R^X_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)R^{\widetilde{X}}_{s,t}\Big). \quad (3.32)$$

Далее зафиксируем произвольные $s,t \in I$ такие, что $|t-s| \leq \delta$ для некоторого $\delta \leq |I|$ и получим оценку на $\left\| R^{f(X)-f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;\delta}$, оценивая слагаемые в равенстве (3.32). Выберем отрезок $I_\delta \subset I$ длины $|I_\delta| \leq \delta$, содержащий точки $s,t \in I_\delta$.

Шаг 1. Оценим первое слагаемое в (3.32). Очевидно,

$$\left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) X_{s,t}^{\otimes 2} - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)) \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \leq |D^2 f(X_{s,t}(\theta))| \left| X_{s,t}^{\otimes 2} - \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| + \\ + \left| \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)) \right|. \tag{3.33}$$

Ввиду формулы конечных приращений и неравенства $|I| \leq 1$:

$$\left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)) \right| \leq \|D^3 f\|_\infty \left(|X_s - \widetilde{X}_s| + |\theta| |X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}| \right) \leq \\ \leq \|f\|_{C_b^3} \left(|X_u - \widetilde{X}_u| + 2\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} \right). \tag{3.34}$$

Из определения евклидовой нормы нетрудно установить справедливость соотношений

$$\left| \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| = |\widetilde{X}_{s,t}|^2 \leq \|\widetilde{X}_{s,t}\|_{H;I}^2 |t-s|^{2H}, \tag{3.35}$$

$$\left| X_{s,t}^{\otimes 2} - \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \leq \sqrt{2 \left(\|X\|_{H;I}^2 + \|\widetilde{X}\|_{H;I}^2 \right)} \|X - \widetilde{X}\|_{H;I} |t-s|^{2H}, \tag{3.36}$$

Учитывая равенства (3.33) — (3.36) и предложение 3.3, получаем окончательно оценку:

$$\left| D^2 f(X_{s,t}(\theta)) X_{s,t}^{\otimes 2} - D^2 f(\widetilde{X}_{s,t}(\theta)) \widetilde{X}_{s,t}^{\otimes 2} \right| \leq \left(c_1 |X_u - \widetilde{X}_u| + c_2 \|X - \widetilde{X}\|_{H;I} \right) |t-s|^{2H}, \tag{3.37}$$

где $c_1 = \|f\|_{C_b^3} C_{\widetilde{X}}^2$, $c_2 = 2c_1 + \|f\|_{C_b^3} \sqrt{2 \left(C_X^2 + C_{\widetilde{X}}^2 \right)}$, $C_{\widetilde{X}} = K \Big(C_B (1 + \|f\|_{C_b^3}) \vee$ $\vee \left(C_B (1 + \|f\|_{C_b^3}) \right)^{\frac{1}{H}} \Big)$, $C_X = K \left(C_B \|f\|_{C_b^3} \vee \left(C_B \|f\|_{C_b^3} \right)^{\frac{1}{H}} \right)$.

Шаг 2. Оценим второе слагаемое в (3.32). Очевидно,

$$\left| Df(X_s) R_{s,t}^X - Df(\widetilde{X}_s) R_{s,t}^{\widetilde{X}} \right| \leq |Df(X_s)| \left| R_{s,t}^X - R_{s,t}^{\widetilde{X}} \right| + \left| R_{s,t}^{\widetilde{X}} \right| \left| Df(X_s) - Df(\widetilde{X}_s) \right|. \tag{3.38}$$

Ввиду формулы конечных приращений:

$$\left| Df(X_s) - Df(\widetilde{X}_s) \right| \leq \|D^2 f\|_\infty \left| X_s - \widetilde{X}_s \right| \leq \|f\|_{C_b^3} \left(|X_u - \widetilde{X}_u| + \|X - \widetilde{X}\|_{H;I} \right). \tag{3.39}$$

Рассмотрим разность остатков:

$$\left|R^X_{s,t} - R^{\widetilde{X}}_{s,t}\right| = \left|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t} - (X'_s - \widetilde{X}'_s)B_{s,t}\right| =$$

$$= \left|\int_s^t \left(f(X_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right) dB_\tau - \left(f(X_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right) B_{s,t}\right| \le M_1 + M_2, \tag{3.40}$$

$$M_1 = \left|\int_s^t \left(f(X_\tau) - f(\widetilde{X}_\tau)\right) dB_\tau - \left(f(X_s) - f(\widetilde{X}_s)\right) B_{s,t}\right|,$$

$$M_2 = \left|\int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau)\right) dB_\tau - \left(f(\widetilde{X}_s) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_s)\right) B_{s,t}\right|.$$

Оценим M_1, применяя предложение 1.5:

$$M_1 \le \left|(Df \cdot f)(X_s) - (Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\right| |\mathbb{B}_{s,t}| +$$

$$+C\left(\|B\|_H \left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I_\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H}\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;I_\delta}\right)\delta^H |t-s|^{2H}, \tag{3.41}$$

где константа C зависит лишь от H. По аналогии с неравенством (3.26) можем записать

$$\left|(Df \cdot f)(X_s) - (Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\right| \le \|D(Df\cdot f)\|_\infty |X_s - \widetilde{X}_s| + \|Df\|_\infty \|f - \widetilde{f}\|_\infty \le$$

$$\le \|f\|^2_{C^3_b}\left(|X_u - \widetilde{X}_u| + \|X - \widetilde{X}\|_{H;I}\right) + \|f\|_{C^3_b}\|f - \widetilde{f}\|_{C^2_b}. \tag{3.42}$$

Согласно лемме 3.3 найдутся случайные величины C_1, C_2, C_3 (зависящие только от H, $\|f\|_{C^3_b}$, $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$) такие, что

$$\|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;I} \le C_1|X_u - \widetilde{X}_u| + C_2\|f - \widetilde{f}\|_{C^2_b} + C_3\|X - \widetilde{X}\|_{H;I}. \tag{3.43}$$

Учитывая, что $\|\cdot\|_{H;I_\delta} \le \|\cdot\|_{H;I}$, $\|\cdot\|_{2H;I_\delta} \le \|\cdot\|_{2H;I,\delta}$, $\delta \le 1$, подставляя (3.42), (3.43) в (3.41), получим оценку

$$M_1 \le \Bigg(C_{M_1,1}|X_u - \widetilde{X}_u| + C_{M_1,2}\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} + C_{M_1,3}\|f - \widetilde{f}\|_{C^2_b} +$$

$$+C\|B\|_H \delta^H \left\|R^{f(X)-f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I,\delta}\Bigg)|t-s|^{2H}, \tag{3.44}$$

где $C_{M_1,1} = \|\mathbb{B}\|_{2H}\left(\|f\|^2_{C^3_b} + CC_1\right)$, $C_{M_1,2} = \|\mathbb{B}\|_{2H}\left(\|f\|^2_{C^3_b} + CC_3\right)$, $C_{M_1,3} = \|\mathbb{B}\|_{2H}\left(\|f\|_{C^3_b} + CC_2\right)$.

Оценим M_2, также применяя предложение 1.5:

$$M_2 \le \left|(Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s) - (D\widetilde{f} \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s)\right| |\mathbb{B}_{s,t}| +$$
$$+ C\left(\|B\|_H \left\|R^{f(\widetilde{X}) - \widetilde{f}(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I_\delta} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(\widetilde{X})' - \widetilde{f}(\widetilde{X})'\|_{H;I_\delta}\right)|t-s|^{2H}.$$

Используя неравенства (3.20) — (3.22), из последнего соотношения можно вывести неравенство

$$M_2 \le C_{M_2,3}\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}|t-s|^{2H}, \tag{3.45}$$

где $C_{M_2,3} = (1 + \|f\|_{C_b^3})\|\mathbb{B}\|_{2H} + Cc_R\|B\|_H + Cc_{f'}\|\mathbb{B}\|_{2H}$.

Учитывая равенства (3.38), (3.39), (3.44), (3.45) и предложение 3.3, получаем окончательно оценку:

$$\left|Df(X_s)R^X_{s,t} - Df(\widetilde{X}_s)R^{\widetilde{X}}_{s,t}\right| \le \Bigg(c_3|X_u - \widetilde{X}_u| + c_4\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} + c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} +$$
$$+ c_6\delta^H \left\|R^{f(X) - f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I,\delta}\Bigg)|t-s|^{2H}, \tag{3.46}$$

где $c_i = c_i(H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) = c_{3,4}(C_{M_1,i-2})$, $i = 3{,}4$, $c_5 = c_{3,4}(C_{M_1,3} + C_{M_2,3})$, $c_6 = C\|B\|_H$, а в свою очередь, $c_{3,4}(y) = \|f\|_{C_b^3}\left(\hat{K}\left((C_B(1 + \|f\|_{C_b^3}))^2 \vee (C_B(1 + \|f\|_{C_b^3}))^{1+\frac{1}{H}}\right) + y\right)\right)$.

Применяя оценки (3.37), (3.46) к равенству (3.32), получим, что для любых $s,t \in I$ таких, что $|t-s| \le \delta$, справедливо неравенство

$$\left|R^{f(X) - f(\widetilde{X})}_{s,t}\right| \le \Bigg(c_8|X_u - \widetilde{X}_u| + c_7\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} +$$
$$+ c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + c_6\delta^H \left\|R^{f(X) - f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I,\delta}\Bigg)|t-s|^{2H},$$

где $c_8 = \frac{1}{2}c_1 + c_3$, $c_7 = \frac{1}{2}c_2 + c_4$. Отсюда заключаем, что

$$\left\|R^{f(X) - f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I,\delta} \le c_8|X_u - \widetilde{X}_u| + c_7\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} + c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} +$$
$$+ c_6\delta^H \left\|R^{f(X) - f(\widetilde{X})}\right\|_{2H;I,\delta}$$

для произвольного $\delta \in (0, |I|]$. Теперь выберем и зафиксируем δ таким, чтобы

$$c_6\delta^H = C\|B\|_H\delta^H \le \frac{1}{2} \iff \delta \le (2C\|B\|_H)^{-1/H},$$

т.е. положим $\delta := |I| \wedge (2C\|B\|_H)^{-1/H}$. При таком выборе

$$\left\| R^{f(X)-f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I,\delta} \le 2c_8|X_u - \widetilde{X}_u| + 2c_7\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} + 2c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}.$$

Из последнего равенства, предложения 3.2 и неравенства $|I| \le 1$ вытекает

$$\left\| R^{f(X)-f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I} \le 2\left(1 \vee 2(2C\|B\|_H)^{\frac{1-H}{H}}\right) \times$$
$$\times \left(c_8|X_u - \widetilde{X}_u| + c_7\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} + c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\right),$$

откуда и следует требуемое неравенство. Лемма доказана.

3.2.2 Теорема о непрерывной зависимости от начальных данных

Перейдем к основным результатам, касающимся непрерывной зависимости от начальных условий и правых частей решений уравнений (3.1), (3.10) на отрезке $[0,T]$.

Пусть ξ, $\widetilde{\xi}$ — случайные величины, заданные на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ со значениями в $\mathbb{R}^n$. Следующая теорема устанавливает непрерывную зависимость решений.

Теорема 3.3. *Пусть $f,\widetilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \le 1$. Обозначим через X_t, $\widetilde{X}_t$ решения уравнений* (3.1), (3.10) *с начальными условиями $X_0 = \xi$, $\widetilde{X}_0 = \widetilde{\xi}$ соответственно. Тогда:*

1) *почти наверное справедлива следующая оценка*

$$\|X - \widetilde{X}\|_H \le C\left(|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\right) \tag{3.47}$$

для некоторой случайной величины $C = C(H, T, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$. Причем C может быть выбрана не зависящей от T, если $T \in (0,1]$;

2) *имеет место следующее неравенство*

$$\mathbb{E}\big(\ln\|X - \widetilde{X}\|_H\big) \le C + \ln\big(\mathbb{E}|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\big), \tag{3.48}$$

где $C = C(H, H_1, \ldots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}) \in \mathbb{R}$ — константа, вообще говоря, зависящая от H, $H_1, \ldots, H_d$, T, $\|f\|_{C_b^3}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Зафиксируем произвольный отрезок $I = [u,v] \subset [0,T]$ достаточно малой длины $|I| \leq 1 \wedge T$ (точное значение длины $|I|$ будет указано ниже) и получим оценку на $\|X - \widetilde{X}\|_{H;I}$. Выберем произвольные $s,t \in$ $\in I$, очевидно справедливо неравенство

$$|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}| = \left| \int_s^t f(X_\tau) dB_\tau - \int_s^t \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau) dB_\tau \right| \leq M_1 + M_2, \tag{3.49}$$

где $M_1 = \left| \int_s^t \left(f(X_\tau) - f(\widetilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right|$, $M_2 = \left| \int_s^t \left(f(\widetilde{X}_\tau) - \widetilde{f}(\widetilde{X}_\tau) \right) dB_\tau \right|$.

Оценим M_1. Из предложения 1.5 следует, что

$$M_1 \leq \left| f(X_s) - f(\widetilde{X}_s) \right| \|B\|_H |t-s|^H +$$
$$+ \left| (Df \cdot f)(X_s) - (Df \cdot \widetilde{f})(\widetilde{X}_s) \right| \|B\|_{2H} |t-s|^{2H} +$$
$$+ C \left(\|B\|_H \left\| R^{f(X) - f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;I} \right) |t-s|^{3H}.$$

Введем обозначение: $c_{1,2}(K_1, K_2) = K_1 \|B\|_H + K_2 \|B\|_{2H}$. Применяя лемму 3.2 к функциям f и $\widetilde{f}$, $Df \cdot f$ и $Df \cdot \widetilde{f}$, учитывая, $|I| \leq 1$, из последнего неравенства легко вывести:

$$\frac{|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}|}{|t-s|^H} \leq c_0 \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + c_1 |X_u - \widetilde{X}_u| +$$
$$+ \widetilde{C} \left(\|B\|_H \left\| R^{f(X) - f(\widetilde{X})} \right\|_{2H;I} + \|\mathbb{B}\|_{2H} \|f(X)' - f(\widetilde{X})'\|_{H;I} \right) |I|^{2H},$$

где $c_0 = c_{1,2}(1, \|f\|_{C_b^3})$, $c_1 = c_{1,2}(C_{1;f}, C_{1;Df \cdot f})$, $\widetilde{C} = c_{1,2}(C_{2;f}, C_{2;Df \cdot f}) + C$. Причем c_1, c_2 — случайные величины, зависящие только от H, $\|f\|_{C_b^3}$, $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$, но не зависящие от s,t, I.

Далее, применяя леммы 3.3, 3.4 к правой части последнего неравенства, с учетом $|I| \leq 1$ получим:

$$\frac{M_1}{|t-s|^H} \leq c_2 \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + c_3 |X_u - \widetilde{X}_u| + c_4 |I|^H \|X - \widetilde{X}\|_{H;I},$$

где $c_2 = c_0 + \widetilde{C} \cdot c_{1,2}(C_5, C_3)$, $c_3 = c_1 + \widetilde{C} \cdot c_{1,2}(C_4, C_1)$, $c_4 = \widetilde{C} \cdot c_{1,2}(C_6, C_3)$. Причем c_3, c_4 — случайные величины, зависящие от $H, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$, но не зависящие от s,t, I. Из леммы 3.1 следует, что $\frac{M_2}{|t-s|^H} \leq C_f \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}$, а посему

$$\frac{|X_{s,t} - \widetilde{X}_{s,t}|}{|t-s|^H} \leq c_3 |X_u - \widetilde{X}_u| + c_4 |I|^H \|X - \widetilde{X}\|_{H;I} + c_5 \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2},$$

где $c_5 = c_2 + C_f$. Последнее неравенство справедливо для любых $s,t \in I$, $s \neq t$, а значит,

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} \leq c_3|X_u - \widetilde{X}_u| + c_5\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} + c_4|I|^H\|X - \widetilde{X}\|_{H;I}$$

для произвольного $|I| \in (0,1]$. Теперь выберем $|I|$ таким, чтобы выполнялось соотношение

$$c_4|I|^H \leq \frac{1}{2} \iff |I| \leq (2c_4)^{-1/H} =: \delta_0,$$

Таким образом, для любого отрезка $I = [u,v] \subset [0,T]$ длины $|I| \leq 1 \wedge T \wedge \delta_0$ справедливо неравенство

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;I} \leq c|X_u - \widetilde{X}_u| + c_f\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}, \tag{3.50}$$

где $c = 2c_3$, $c_f = 2c_5$. Если $1 \wedge T \wedge \delta_0 = T$, то $I = [0,T]$, и неравенство (3.50) доказывает требуемое. Поэтому пусть далее $T > 1 \wedge \delta_0 =: \delta_1$.

Построим разбиение отрезка $[0,T]$ точками $t_j := (j \cdot \delta_1) \wedge T$, где $j = 0,1,\ldots$ Заметим, что $t_N = T$ при $N \geq \frac{T}{\delta_1}$, а также, что отрезки $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ имеют длины $|I_j| \leq \delta_1$, $j = 0,1,\ldots$ Поэтому из неравенства (3.50) следуют оценки

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;I_j} \leq c|X_{t_j} - \widetilde{X}_{t_j}| + c_f\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2},$$

для $j < \frac{T}{\delta_1}$. Заметим, что

$$\begin{aligned}|X_{t_j} - \widetilde{X}_{t_j}| &\leq |X_{t_{j-1}} - \widetilde{X}_{t_{j-1}}| + \delta_1^H\|X - \widetilde{X}\|_{H;I_{j-1}} \leq \\ &\leq (1 + c\delta_1^H)|X_{t_{j-1}} - \widetilde{X}_{t_{j-1}}| + c_f\delta_1^H\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}.\end{aligned}$$

Из полученного рекуррентного соотношения очевидной индукцией выводим неравенство:

$$\begin{aligned}|X_{t_j} - \widetilde{X}_{t_j}| &\leq (1 + c\delta_1^H)^j|X_0 - \widetilde{X}_0| + c_f\delta_1^H\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\sum_{k=0}^{j-1}(1 + c\delta_1^H)^k = \\ &= (1 + c\delta_1^H)^j|\xi - \widetilde{\xi}| + \frac{c_f}{c}\left((1 + c\delta_1^H)^j - 1\right)\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\end{aligned}$$

для $j < \frac{T}{\delta_1}$. Таким образом,

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;I_j} \leq (1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1}\left(c|\xi - \widetilde{\xi}| + c_f\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\right) \tag{3.51}$$

для любого $j = 0,1,\ldots,\lfloor\frac{T}{\delta_1}\rfloor$.

Применяя предложение 3.4 с учетом неравенства (3.51) получим:

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;\delta_1} \le 2^{1-H}(1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1} \left(c|\xi - \widetilde{\xi}| + c_f\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \right).$$

Рассмотрим выражение $(1+c\delta_1^H)^{T/\delta_1}$, $\delta_1 = 1 \wedge \delta_0$. Если $\delta_1 = 1$, то оно принимает значение $(1+c)^T$. В противном случае $\delta_1 = \delta_0$, $\delta_0 = (2c_4)^{-1/H} < 1$, $2c_4 > 1$ и

$$(1 + c\delta_0^H)^{\frac{T}{\delta_0}} = \left(1 + \frac{c}{2c_4}\right)^{(2c_4)^H T} \le \left(1 + \frac{c}{2c_4}\right)^{2c_4 T} = \left(\left(1 + \frac{c}{2c_4}\right)^{\frac{2c_4}{c}}\right)^{cT} \le e^{cT},$$

поскольку функция $\phi(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$, $x > 0$ ограничена сверху числом e. Кроме того, $(1+c)^T = \phi(\frac{1}{c})^{cT} \le e^{cT}$. Поэтому $(1 + c\delta_1^H)^{T/\delta_1} \le e^{cT}$ и

$$\|X - \widetilde{X}\|_{H;\delta_1} \le 2^{1-H} e^{cT} \left(c|\xi - \widetilde{\xi}| + c_f\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \right).$$

Теперь из предложения 3.2 и последнего неравенства получем оценку требуемого вида:

$$\|X - \widetilde{X}\|_H \le 2^{2-H} e^{2c_3 T} \left(1 \vee 2T^{1-H} \vee 2(2c_4)^{\frac{1-H}{H}} T^{1-H}\right) (c_3 \vee c_5) \times$$
$$\times \left(|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\right). \tag{3.52}$$

Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. Рассмотрим зависимость случайных величин c_3, c_4, c_5, фигурирующих в неравенстве (3.52), от $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ при фиксированных T, H, $\|f\|_{C_b^3}$. Из доказательства первой части следует, что эта зависимость выражается в виде композиции конечного числа функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = \alpha u + \beta v + \gamma$, $\Pi(u,v) = u \cdot v$, $\vee(u,v) = u \vee v$, $\psi_s(u) = u^s$ ($\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^+$ — параметры) вещественных аргументов $u,v \in \mathbb{R}^+$.

Применим логарифм к обеим частям неравенства (3.52). Учитывая, что $x \vee y \le x + y$ для $x,y > 0$, будем иметь:

$$\ln\|X - \widetilde{X}\|_H \le \mu + 2c_3 T + \ln(c_3 + c_5) + \ln\left(1 + 2T^{1-H} + 2(2c_4)^{\frac{1-H}{H}} T^{1-H}\right) +$$
$$+ \ln\big(|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\big),$$

где $\mu = (2 - H)\ln 2$. Возьмем математическое ожидание от обеих частей последнего неравенства. Ввиду вогнутости логарифма и неравенства Иенсена справедливо неравенство $\mathbb{E}(\ln\eta) \le \ln(\mathbb{E}\eta)$ для любой случайной величины η.

С учетом этого, выводим неравенство

$$\mathbb{E}\big(\ln \|X - \widetilde{X}\|_H\big) \le \mu + 2T\mathbb{E}c_3 + \ln(\mathbb{E}c_3 + \mathbb{E}c_5) +$$
$$+ \ln\left(1 + 2T^{1-H} + T^{1-H} 2^{\frac{1}{H}} \mathbb{E}\left(c_4^{\frac{1-H}{H}}\right)\right) + \ln\big(\mathbb{E}|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\big).$$

Таким образом, осталось доказать, что $\mathbb{E}c_3 < \infty$, $\mathbb{E}c_5 < \infty$, $\mathbb{E}\left(c_4^{\frac{1-H}{H}}\right) < \infty$. Однако, мы установим даже большее: для любого $r > 0$ конечны моменты $\mathbb{E}c_j^r = \mathbb{E}c_j^r(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j = 3{,}4{,}5$.

Далее воспользуемся тем, что зависимость $c_j^r = c_j^r(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$, $j = 3{,}4{,}5$ от норм $\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$ выражается в виде композиции конечного числа функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)$, $\Pi(u,v)$, $\vee(u,v)$, $\psi_s(u)$. Но очевидно, что $\vee(u,v) = u \vee v \le u + v = \Sigma_{1,1,0}(u,v)$ для $u,v \in \mathbb{R}^+$. Также понятно, что для $u = u(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) \in \mathbb{R}^+, v = v(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) \in \mathbb{R}^+$ справедливы соотношения

$$\mathbb{E}\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v) = \alpha\mathbb{E}u + \beta\mathbb{E}v + \gamma,$$
$$\mathbb{E}(u \vee v) \le \mathbb{E}u + \mathbb{E}v,$$
$$\mathbb{E}\Pi(u,v) \le (\mathbb{E}u^2)^{1/2}(\mathbb{E}v^2)^{1/2}.$$

Значит, конечность указанных математических ожиданий от функций $\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}$, Π, $\vee$ будет обеспечена конечностью моментов их аргументов. Осталось рассмотреть функцию $\psi_s(u) = u^s$.

Если $s \in (0,1]$, то из неравенства Иенсена следует оценка $\mathbb{E}\psi_s(u) \le \psi_s(\mathbb{E}u) = (\mathbb{E}u)^s$. Если же $s \in (1,\infty)$, то справедливы соотношения:

$$\mathbb{E}\psi_s(\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}(u,v)) = \mathbb{E}(\alpha u + \beta v + \gamma)^s \le 3^{s-1}(\alpha^s\mathbb{E}u^s + \beta^s\mathbb{E}v^s + \gamma^s),$$
$$\mathbb{E}\psi_s(u \vee v) \le \mathbb{E}(u+v)^s \le 2^{s-1}(\mathbb{E}u^s + \mathbb{E}v^s),$$
$$\mathbb{E}\psi_s(uv) = \mathbb{E}u^s v^s \le (\mathbb{E}u^{2s})^{1/2}(\mathbb{E}v^{2s})^{1/2}.$$

В то же время, как следует из [46, лемма 7.4], любой s-момент, $s \ge 1$ случайной величины $\|B\|_H$ (а значит и любой s-момент, $s > 0$ ввиду неравенства Иенсена) конечен, т.е. $\mathbb{E}\psi_s(\|B\|_H) = \mathbb{E}\|B\|_H^s < \infty$, $s > 0$. То же самое справедливо для случайной величины $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ (см. предложение 3.1): $\mathbb{E}\psi_s(\|\mathbb{B}\|_{2H}) = \mathbb{E}\|\mathbb{B}\|_{2H}^s < \infty$, $s > 0$.

Из полученных соотношений следует, что композиция конечного числа указанных функций с нормами $\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}$ в качестве аргументов будет иметь конечное математическое ожидание и, в частности, $\mathbb{E}c_j^r(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}) < \infty$, $j = 3{,}4{,}5$ для любого $r > 0$. Теорема доказана.

Замечание 3.2. Нетрудно видеть, что в приведенном доказательстве первого утверждения теоремы не использовались никакие другие свойства дробного броуновского движения $(B_t)_{t\in[0,T]}$, кроме свойства непрерывности траекторий по Гельдеру с показателем H. Это означает, что утверждение 1 приведенной теоремы справедливо для произвольных гельдеровских функций $B \in C^H([0,T],\mathbb{R}^{d+1})$.

3.3 Асимптотические разложения в окрестности нуля

В данном разделе будем придерживаться следующих компактных записей:

$$\Delta^k[0,t] = \{(t_1,\dots,t_k) \in [0,1]^k :\ 0 \le t_1 < \ldots < t_k \le t\} \tag{3.53}$$

$$\int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} = \int_0^t \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_2} dB^{(i_1)}_{t_1} \dots dB^{(i_{k-1})}_{t_{k-1}} dB^{(i_k)}_{t_k},$$

$$I_k = (i_1,\dots,i_k) \in \mathbb{N}_d^k := \{0,\dots,d\}^k, \tag{3.54}$$

$$D_f^{(i)} = \sum_{j=1}^n f_{ji}(x)\frac{\partial}{\partial x_j},\ i \in \{0,\dots,d\} \qquad D_f^{(I_k)} = D_f^{(i_1)}\dots D_f^{(i_k)}, \tag{3.55}$$

$$\mathbf{P}_t g(x) = \mathbb{E}\, g(X_t^x), \quad t \ge 0. \tag{3.56}$$

В дальнейшем для краткости будем опускать верхний индекс x и обозначать решение через X_t в доказательствах.

Теорема 3.4. *Пусть $f \in C_b^{N+2}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g \in C_b^{N+3}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда для любого фиксированного $H \in (1/3,1/2]$ такого, что $H < H_{min} = \min\limits_{i=0,\dots d} H_i$ справедливо следующее асимптотическое разложение:*

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k\in\{0,\dots,d\}^k} t^{|H_{I_k}|}\cdot(D_f^{(I_k)}g)(x)\,\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)}\right) + O(t^{(N+1)H}), \tag{3.57}$$

при $t \to 0$, где $|H_{I_k}| = H_{i_1} + H_{i_2} + \ldots + H_{i_k}$ — сумма индексов Харста дробных броуновских движений $B^{(i_1)}, B^{(i_2)},\dots,B^{(i_k)}$.

Доказательство. С учетом обозначений (3.55) формулу Ито (3.3) можно записать в следующей развернутой форме:

$$g(X_t^x) = g(x) + \sum_{i=0}^{d} \int_0^t (D_f^{(i)} g)(X_r^x) dB_r^{(i)} \tag{3.58}$$

Применяя формулу (3.58) $(N+1)$ раз, с учетом обозначений (3.53) — (3.55) получим:

$$g(X_t) = g(x) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{I_k \in \mathbb{N}_d^k} (D_f^{(I_k)} g)(x) \int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} +$$

$$+ \sum_{I_{N+1} \in \mathbb{N}_d^{N+1}} \int_0^t \int_0^{t_{N+1}} \dots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(X_{t_1})\, dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})}. \tag{3.59}$$

Обозначим $\varphi_{I_{N+1}}(x) = (D_f^{(I_{N+1})} g)(x)$ и преобразуем последнее слагаемое в (3.59). Введем в рассмотрение процесс $\widehat{B}_u^{(c)} = (\widehat{B}_u^{(0;c)}, \widehat{B}_u^{(1;c)}, \dots, \widehat{B}_u^{(d;c)})^\top$, зависящий от параметра $c > 0$, i-я компонента которого определяется равенством $\widehat{B}_u^{(i;c)} = c^{H_i} B_{u/c}^{(i)}$, $u \in [0,T]$. По свойству самоподобия дробного броуновского движения процесс $\widehat{B}_u^{(i;c)}$ также является дробным броуновским движением с индексом Харста H_i для любого $c > 0$, $i = \overline{1,d}$. Следовательно, при фиксированном $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \int_0^{t_{N+1}} \dots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(X_{t_1})\, dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_N}^{(i_N)} dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} = \\
&= \int_0^1 dB_{t \cdot t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \int_0^{t_{N+1}} dB_{t \cdot t_N}^{(i_N)} \dots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(X_{t \cdot t_1})\, dB_{t \cdot t_1}^{(i_1)} = \\
&\overset{\mathcal{L}}{=} \int_0^1 d\widehat{B}_{t \cdot t_{N+1}}^{(i_{N+1};t)} \int_0^{t_{N+1}} d\widehat{B}_{t \cdot t_N}^{(i_N;t)} \dots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(\widehat{X}_{t \cdot t_1}^{(t)})\, d\widehat{B}_{t \cdot t_1}^{(i_1;t)} = \\
&= t^{H_{i_1} + \ldots + H_{i_{N+1}}} \int_0^1 dB_{t_{N+1}}^{(i_{N+1})} \int_0^{t_{N+1}} dB_{t_N}^{(i_N)} \dots \int_0^{t_2} \varphi_{I_{N+1}}(\widehat{X}_{t \cdot t_1}^{(t)})\, dB_{t_1}^{(i_1)},
\end{aligned} \tag{3.60}$$

где знак $\overset{\mathcal{L}}{=}$ означает совпадение распределений, а $\widehat{X}_\tau^{(t)}$ — решение уравнения:

$$d\widehat{X}_\tau^{(t)} = f(\widehat{X}_\tau^{(t)}) d\widehat{B}_\tau^{(t)}, \quad \tau \in [0,T] \tag{3.61}$$

с начальным условием $\widehat{X}_0^{(t)} = x$. По тем же соображениям

$$\int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} \ \overset{\mathcal{L}}{=}\ t^{|H_{I_k}|} \int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)}, \tag{3.62}$$

а посему из (3.59) — (3.62) после взятия математического ожидания, получим:

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{I_k \in \mathbb{N}_d^k} t^{|H_{I_k}|} (D_f^{(I_k)} g)(x)\, \mathbb{E}\Big(\int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)} \Big) + \mathcal{R}_{N+1}(t), \quad (3.63)$$

где

$$\mathcal{R}_{N+1}(t) =$$

$$= \sum_{I_{N+1} \in \mathbb{N}_d^{N+1}} \Bigg(t^{|H_{I_{N+1}}|}\, \mathbb{E} \int_0^1 \int_0^{t_{N+1}} \ldots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(\widehat{X}^{(t)}_{t\cdot t_1})\, dB^{(i_1)}_{t_1} \ldots dB^{(i_N)}_{t_N} dB^{(i_{N+1})}_{t_{N+1}} \Bigg). \quad (3.64)$$

Поскольку $|H_{I_{N+1}}| \geq (N+1)H$ для любого I_{N+1}, то при $t < 1$:

$$|\mathcal{R}_{N+1}(t)| \leq (d+1)^{N+1} t^{(N+1)H} \times$$

$$\times \max_{I_{N+1} \in \mathbb{N}_d^{N+1}} \mathbb{E} \Bigg| \int_0^1 \int_0^{t_{N+1}} \ldots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(\widehat{X}^{(t)}_{t\cdot t_1})\, dB^{(i_1)}_{t_1} \ldots dB^{(i_N)}_{t_N} dB^{(i_{N+1})}_{t_{N+1}} \Bigg|. \quad (3.65)$$

Поэтому, учитывая (3.63) — (3.65), для завершения доказательства формулы (3.57) осталось показать, что

$$\mathbb{E} \Bigg| \int_0^1 \int_0^{t_{N+1}} \ldots \int_0^{t_2} (D_f^{(I_{N+1})} g)(\widehat{X}^{(t)}_{t\cdot t_1})\, dB^{(i_1)}_{t_1} \ldots dB^{(i_N)}_{t_N} dB^{(i_{N+1})}_{t_{N+1}} \Bigg| < +\infty \quad (3.66)$$

для любых $I_{N+1} = (i_1, \ldots, i_{N+1}) \in \mathbb{N}_d^{N+1}$.

Рассмотрим кратные интегралы чуть более общего вида, нежели (3.66). Для произвольного фиксированного $c \in (0,1]$ будем оценивать кратные интегралы вида

$$\mathcal{I}_t^{(k)} = \int_0^t \int_0^{t_{k-1}} \ldots \int_0^{t_1} \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cr}\big)\, dB^{(i_1)}_r \ldots dB^{(i_{k-2})}_{t_{k-2}} dB^{(i_{k-1})}_{t_{k-1}}, \quad t \in [0{,}1], \quad (3.67)$$

в которых $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — произвольная функция с непрерывными и ограниченными производными до второго порядка включительно. Для единообразия положим $\mathcal{I}_t^{(0)} = \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{ct}\big)$.

Лемма 3.5. *Пусть φ имеет непрерывные и ограниченные производные до второго порядка включительно. Тогда справедливы неравенства $|\mathcal{I}_{s,t}^{(k)} - \mathcal{I}_s^{(k-1)} B^{(i)}_{s,t}| \leq M_k |t-s|^{2H}$ для любого $i = \overline{0,d}$ и $|\mathcal{I}_{s,t}^{(k)}| \leq \widetilde{M}_k |t-s|^H$, где $M_k, \widetilde{M}_k$ — случайные величины (не зависящие от s, t).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведем индукцией по k.

Рассмотрим $k = 1$. Докажем, что $\left(\varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\right)\right)' = c^{H_{i_1}} D\varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\right)\left(\widehat{X}^{(c)}\right)'_{c\cdot}$. Введем обозначение $R^{\widehat{X}^{(c)};i_1}_{u,v} = \widehat{X}^{(c)}_{u,v} - \left(\widehat{X}^{(c)}\right)'_u \widehat{B}^{(i_1;c)}_{u,v}$ для i_1-й компоненты остатка $R^{\widehat{X}^{(c)}}$ по отношению к процессу $\widehat{X}^{(c)}$, управляемому процессом $\widehat{B}^{(i_1;c)}$.

Используя формулу Тейлора, будем иметь

$$
\begin{aligned}
R^{\varphi(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot});i_1}_{s,t} &:= \varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{ct}\right) - \varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\right) - c^{H_{i_1}} D\varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\right)\left(\widehat{X}^{(c)}\right)'_{cs} B^{(i_1)}_{s,t} = \\
&= \varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{ct}\right) - \varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\right) - D\varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\right)\left(\widehat{X}^{(c)}\right)'_{cs} \widehat{B}^{(i_1;c)}_{cs,ct} = \\
&= \varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{ct}\right) - \varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\right) - D\varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\right)\widehat{X}^{(c)}_{cs,ct} + D\varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\right) R^{\widehat{X}^{(c)};i_1}_{cs,ct} = \\
&= \frac{1}{2} D^2\varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{cs} + \theta \widehat{X}^{(c)}_{cs,ct}\right)\widehat{X}^{(c)}_{cs,ct} \otimes \widehat{X}^{(c)}_{cs,ct} + D\varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\right) R^{\widehat{X}^{(c)};i_1}_{cs,ct} \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

для некоторого $\theta \in (0,1)$. Из теоремы существования 3.1 следует, что $\|R^{\widehat{X}^{(c)};i_1}\|_{2H} \leq \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H} < \infty$. Легко видеть, что

$$
\begin{aligned}
\left|R^{\varphi(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot});i_1}_{s,t}\right| &\leq \frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|^2_H |ct - cs|^{2H} + \|D\varphi\|_\infty \|R^{\widehat{X}^{(c)};i_1}\|_{2H} |ct - cs|^{2H} = \\
&= c^{2H}\left(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|^2_H + \|D\varphi\|_\infty \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}\right)|t - s|^{2H}, \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

откуда следует, что $\|R^{\varphi(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot});i_1}_{s,t}\|_{2H} \leq \frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty \|\widehat{X}^{(c)}\|^2_H + \|D\varphi\|_\infty \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H} < \infty$ (так как $c \leq 1$), что и требовалось.

Далее, поскольку $\varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\right)' = c^{H_{i_1}} D\varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\right)\left(\widehat{X}^{(c)}\right)'_{c\cdot} = c^{H_{i_1}} D\varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\right) f\left(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\right)$, то

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\right)'\right)_{s,t}\right| &= c^{H_{i_1}} \left|(D\varphi \cdot f)\left(\widehat{X}^{(c)}_{ct}\right) - (D\varphi \cdot f)\left(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\right)\right| = \\
&= c^{H_{i_1}} \left|D(D\varphi \cdot f)\left(\widehat{X}^{(c)}_{cs} + \theta \widehat{X}^{(c)}_{cs,ct}\right)\right| \cdot \left|\widehat{X}^{(c)}_{cs,ct}\right| = \\
&= c^{H_{i_1}} \left|(D^2\varphi \cdot f)\left(\widehat{X}^{(c)}_{cs} + \theta \widehat{X}^{(c)}_{cs,ct}\right) + (D\varphi \cdot Df)\left(\widehat{X}^{(c)}_{cs} + \theta \widehat{X}^{(c)}_{cs,ct}\right)\right| \cdot \left|\widehat{X}^{(c)}_{cs,ct}\right| \leq \\
&\leq c^{H_{i_1}} \left(\|D^2\varphi\|_\infty \|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty \|Df\|_\infty\right) \|\widehat{X}^{(c)}\|_H |ct - cs|^H = \\
&= c^{H_{i_1} + H} \left(\|D^2\varphi\|_\infty \|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty \|Df\|_\infty\right) \|\widehat{X}^{(c)}\|_H |t - s|^H. \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что $\left\|\varphi\left(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\right)'\right\|_H \leq \left(\|D^2\varphi\|_\infty \|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty \|Df\|_\infty\right) \|\widehat{X}^{(c)}\|_H < < \infty$. Таким образом, ввиду неравенства $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$ и предложения 1.5, будем иметь:

$$\left|\int_s^t \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cr}\big)\,dB^{(i_1)}_r - \varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big)B^{(i_1)}_{s,t}\right| \le c^{H_{i_1}}\|D\varphi\|_\infty\|f\|_\infty\|\mathbb{B}^{(i_1)}\|_{2H}|t-s|^{2H}+$$

$$+C\left(\|B^{(i_1)}\|_H\big\|R^{\varphi(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot});i_1}\big\|_{2H}+\|\mathbb{B}^{(i_1)}\|_{2H}\big\|\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{c\cdot}\big)'\big\|_H\right)|t-s|^{3H}\le$$

$$\le\|D\varphi\|_\infty\|f\|_\infty\|\mathbb{B}\|_{2H}|t-s|^{2H}+$$

$$+C\Bigg(\left(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|^2_H+\|D\varphi\|_\infty\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}\right)\|B\|_H+$$

$$+\big(\|D^2\varphi\|_\infty\|f\|_\infty+\|D\varphi\|_\infty\|Df\|_\infty\big)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H\|\mathbb{B}\|_{2H}\Bigg)|t-s|^{2H}\le$$

$$\le M_1|t-s|^{2H}, \tag{3.71}$$

где $M_1=\Big(C(\|D^2\varphi\|_\infty\|f\|_\infty+\|D\varphi\|_\infty\|Df\|_\infty)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H+\|D\varphi\|_\infty\|f\|_\infty\Big)\|\mathbb{B}\|_{2H}+$ $+C\Big(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|^2_H+\|D\varphi\|_\infty\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}\Big)\|B\|_H$.

Итак, получили $|\mathcal{I}^{(1)}_{s,t}-\mathcal{I}^{(0)}_s B^{(i_1)}_{s,t}|\le M_1|t-s|^{2H}$, как и утверждалось. Из доказанного следует, что

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}^{(1)}_{s,t}| &\le |\mathcal{I}^{(0)}_s||B^{(i_1)}_{s,t}|+M_1|t-s|^{2H}\le\\ &\le\big|\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big)\big|\|B^{(i_1)}\|_H|t-s|^H+M_1|t-s|^H\le\\ &\le(\|\varphi\|_\infty\|B\|_H+M_1)|t-s|^H=:\widetilde{M}_1|t-s|^H.\end{aligned}\tag{3.72}$$

Легко видеть, что проведенные выше выкладки (3.68) — (3.72) не зависят от значения i_1, т.е. справедливы и дают одни и те же оценки для любого $i_1=\overline{0,d}$.

Рассмотрим теперь $k=2$. Используя доказанное выше, предложение 1.5 и рекуррентное соотношение $\mathcal{I}^{(k)}_t=\int_0^t\mathcal{I}^{(k-1)}_r dB^{(i_k)}_r$, получим:

$$\left|\mathcal{I}^{(2)}_{s,t}-\mathcal{I}^{(1)}_s B^{(i_2)}_{s,t}\right|\ \le\ \left|(\mathcal{I}^{(1)})'_s\mathbb{B}^{(i_2)}_{s,t}\right|+$$

$$+C\Big(\|B^{(i_2)}\|_H\cdot\|(\mathcal{I}^{(1)})_{s,t}-(\mathcal{I}^{(1)})'_s B^{(i_2)}_{s,t}\|_{2H}+\|\mathbb{B}^{(i_2)}\|_{2H}\cdot\|(\mathcal{I}^{(1)})'\|_H\Big)|t-s|^{3H}=$$

$$=|\mathcal{I}^{(0)}_s\mathbb{B}^{(i_2)}_{s,t}|+C\Big(\|B^{(i_2)}\|_H\|\mathcal{I}^{(1)}_{s,t}-\mathcal{I}^{(0)}_s B^{(i_2)}_{s,t}\|_{2H}+\|\mathbb{B}^{(i_2)}\|_{2H}\|\mathcal{I}^{(0)}\|_H\Big)|t-s|^{3H}\le$$

$$\le\|\varphi\|_\infty\|\mathbb{B}\|_{2H}|t-s|^{2H}+C\Big(M_1\|B\|_H+\|\mathbb{B}\|_{2H}c^{H_{i_1}}\|D\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|_H\Big)|t-s|^{2H}\le$$

$$\le M_2|t-s|^{2H}.\tag{3.73}$$

Здесь $M_2=(\|\varphi\|_\infty+C\|D\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|_H)\|\mathbb{B}\|_{2H}+CM_1\|B\|_H$, а оценка на $\|\mathcal{I}^{(0)}\|_H$ была получена с помощью формулы конечных приращений:

$$\mathcal{I}^{(0)}_{s,t}=\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{ct}\big)-\varphi\big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big)=D\varphi\Big(\widehat{X}^{(c)}_{cs}+\theta\big(\widehat{X}^{(c)}_{ct}-\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big)\Big)\big(\widehat{X}^{(c)}_{ct}-\widehat{X}^{(c)}_{cs}\big).\tag{3.74}$$

Так, мы получили $|\mathcal{I}^{(2)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(1)}_s B^{(i_2)}_{s,t}| \le M_2|t-s|^{2H}$. Как и в случае $k=1$, отсюда выводим, что $|\mathcal{I}^{(2)}_{s,t}| \le (\widetilde{M}_1\|B\|_H + M_2)|t-s|^H = \widetilde{M}_2|t-s|^H$, поскольку

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}^{(2)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(1)}_s B^{(i_2)}_{s,t}| \ge |\mathcal{I}^{(2)}_{s,t}| - |\mathcal{I}^{(1)}_s| \cdot |B_{s,t}| \ge \\ \ge |\mathcal{I}^{(2)}_{s,t}| - \|\mathcal{I}^{(1)}\|_\infty \|B\|_H |t-s|^H \ge |\mathcal{I}^{(2)}_{s,t}| - \|\mathcal{I}^{(1)}\|_H \|B\|_H |t-s|^H. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Легко видеть, что проведенные выше выкладки (3.73) — (3.75) не зависят от значения i_2, т.е. справедливы и дают одни и те же оценки для любого $i_2 = \overline{0,d}$.

Переход доказывается аналогичным образом. Предположим, что утверждение выполнено для всех натуральных чисел, меньших k, и докажем его для $k+1$. По предположению индукции из предложения 1.5 будет следовать

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k-1)}_s \mathbb{B}^{(i_{k+1})}_{s,t}| \le \\ \le C\Big(\|B^{(i_{k+1})}\|_H \cdot \|\mathcal{I}^{(k)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k-1)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t}\|_{2H} + \|\mathbb{B}^{(i_{k+1})}\|_{2H} \cdot \|\mathcal{I}^{(k-1)}\|_H\Big)|t-s|^{3H} \le \\ \le C(M_k\|B\|_H + \widetilde{M}_{k-1}\|\mathbb{B}\|_{2H})|t-s|^{2H}. \end{aligned} \tag{3.76}$$

В то же время,

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k-1)}_s \mathbb{B}^{(i_{k+1})}_{s,t}| \ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t}| - |\mathcal{I}^{(k-1)}_s| \cdot |\mathbb{B}^{(i_{k+1})}_{s,t}| \ge \\ \ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t}| - \|\mathcal{I}^{(k-1)}\|_\infty \|\mathbb{B}^{(i_{k+1})}\|_{2H}|t-s|^{2H} \ge \\ \ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t}| - \widetilde{M}_{k-1}\|\mathbb{B}\|_{2H}|t-s|^{2H}. \end{aligned} \tag{3.77}$$

Таким образом,

$$|\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t}| \le M_{k+1}|t-s|^{2H}, \tag{3.78}$$

где $M_{k+1} = (C+1)\|\mathbb{B}\|_{2H}\widetilde{M}_{k-1} + C\|B\|_H M_k$. Осталось заметить, что

$$\begin{aligned} M_{k+1}|t-s|^H \ge M_{k+1}|t-s|^{2H} \ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k)}_s B^{(i_{k+1})}_{s,t}| \ge \\ \ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t}| - |\mathcal{I}^{(k)}_s| \cdot |B^{(i_{k+1})}_{s,t}| \ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t}| - \|\mathcal{I}^{(k)}\|_\infty \|B^{(i_{k+1})}\|_H|t-s|^H \ge \\ \ge |\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t}| - \widetilde{M}_k\|B\|_H|t-s|^H. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Отсюда

$$|\mathcal{I}^{(k+1)}_{s,t}| \le (M_{k+1} + \widetilde{M}_k\|B\|_H)|t-s|^H =: \widetilde{M}_{k+1}|t-s|^H, \tag{3.80}$$

что и требовалось. Причем, как легко видеть, что проведенные выше выкладки (3.76) — (3.80) не зависят от значения i_{k+1}, т.е. справедливы и дают одни и те же оценки для любого $i_{k+1} = \overline{0,d}$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что

$$(\mathcal{I}^{(k)})' = \mathcal{I}^{(k-1)},\ R^{\mathcal{I}^{(k)}}_{s,t} = (\mathcal{I}^{(k)})_{s,t} - (\mathcal{I}^{(k)})'_s B^{(i)}_{s,t} = \mathcal{I}^{(k)}_{s,t} - \mathcal{I}^{(k-1)}_s B^{(i)}_{s,t},$$

$$\|R^{\mathcal{I}^{(k)}}_{s,t}\|_{2H} \le M_k,\ \|\mathcal{I}^{(k)}\|_H \le \widetilde{M}_k,$$

а также $\|\mathcal{I}^{(k)}\|_\infty \le \widetilde{M}_k$, поскольку $\max_{t\in[0,1]} |\mathcal{I}^{(k)}_t| = \max_{t\in[0,1]} |\mathcal{I}^{(k)}_{0,t}|$.

Полученные рекуррентные соотношения

$$M_{k+1} = (C+1)\|\mathbb{B}\|_{2H}\widetilde{M}_{k-1} + C\|B\|_H M_k, \quad \widetilde{M}_{k+1} = M_{k+1} + \widetilde{M}_k\|B\|_H \quad (3.81)$$

с начальными условиями

$$M_1 = \Big(C(\|D^2\varphi\|_\infty\|f\|_\infty + \|D\varphi\|_\infty\|Df\|_\infty)\|\widehat{X}^{(c)}\|_H + \|D\varphi\|_\infty\|f\|_\infty\Big)\|\mathbb{B}\|_{2H} +$$
$$+C\left(\frac{1}{2}\|D^2\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|^2_H + \|D\varphi\|_\infty\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}\right)\|B\|_H, \quad (3.82)$$

$$\widetilde{M}_1 = \|\varphi\|_\infty\|B\|_H + M_1, \quad (3.83)$$

$$M_2 = (\|\varphi\|_\infty + C\|D\varphi\|_\infty\|\widehat{X}^{(c)}\|_H)\|\mathbb{B}\|_{2H} + CM_1\|B\|_H, \quad (3.84)$$

$$\widetilde{M}_2 = \widetilde{M}_1\|B\|_H + M_2 \quad (3.85)$$

позволяют последовательно вычислить константы $M_k, \widetilde{M}_k$. Очевидная индукция по k показывает, что $M_k = M_k(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}, \|\widehat{X}^{(c)}\|_H, \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H})$, $\widetilde{M}_k = \widetilde{M}_k(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}, \|\widehat{X}^{(c)}\|_H, \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H})$ являются многочленами с постоянными положительными коэффициентами, причем $\|B\|_H$ и $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ входят в одночлены в степени не выше k, $\|\widehat{X}^{(c)}\|_H$ — в степени не выше 2, а $\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}$ — в степени не выше 1. Пусть $\widetilde{\gamma}_k$ — максимальный коэффициент многочлена $\widetilde{M}_k(\|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H}, \|\widehat{X}^{(c)}\|_H, \|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H})$ и пусть

$$\mathbb{E}\Big(\|B\|^{i_1}_H\|\mathbb{B}\|^{i_2}_{2H}\|\widehat{X}^{(c)}\|^{j_1}_H\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|^{j_2}_{2H}\Big) = \max_{\substack{i,i'=\overline{0,k},\\ j=0,1,2,\\ j'=0,1}} \mathbb{E}\Big(\|B\|^{i}_H\|\mathbb{B}\|^{i'}_{2H}\|\widehat{X}^{(c)}\|^{j}_H\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|^{j'}_{2H}\Big). \quad (3.86)$$

Тогда взяв супремум и математическое ожидание от обеих частей неравенства $|\mathcal{I}^{(k)}_{s,t}| \le \widetilde{M}_k|t-s|^H$, получим:

$$\sup_{0\le s<t\le 1} \mathbb{E}\,|\mathcal{I}^{(k)}_{s,t}| \le \mathbb{E}\,\widetilde{M}_k \le 2k^2\cdot\widetilde{\gamma}_k\cdot\mathbb{E}\Big(\|B\|^{i_1}_H\|\mathbb{B}\|^{i_2}_{2H}\|\widehat{X}^{(c)}\|^{j_1}_H\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|^{j_2}_{2H}\Big). \quad (3.87)$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(\|B\|_H^{i_1}\|\mathbb{B}\|_{2H}^{i_2}\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{j_1}\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{j_2}\Big) \le \\
\le \Big(\mathbb{E}\big(\|B\|_H^{2i_1}\|\mathbb{B}\|_{2H}^{2i_2}\big)\cdot\mathbb{E}\big(\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{2j_1}\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{2j_2}\big)\Big)^{1/2} \le \\
\le \Big(\mathbb{E}\,\|B\|_H^{4i_1}\cdot\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}\|_{2H}^{4i_2}\cdot\mathbb{E}\,\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{4j_1}\cdot\mathbb{E}\,\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{4j_2}\Big)^{1/4}.
\end{aligned}
\tag{3.88}
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\sup_{0\le s<t\le 1}\left|\int_s^t\int_0^{t_{k-1}}\dots\int_0^{t_1}\varphi\big(\widehat{X}_{cr}^{(c)}\big)\,dB_r^{(i_1)}\dots dB_{t_{k-2}}^{(i_{k-2})}dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})}\right| \le \\
\le 2k^2\cdot\widetilde{\gamma}_k\cdot\Big(\mathbb{E}\,\|B\|_H^{4i_1}\cdot\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}\|_{2H}^{4i_2}\cdot\mathbb{E}\,\|\widehat{X}^{(c)}\|_H^{4j_1}\cdot\mathbb{E}\,\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H}^{4j_2}\Big)^{1/4}.
\end{aligned}
\tag{3.89}
$$

Согласно [46, лемма 7.4] любой момент порядка $p \ge 1$ случайной величины $\|B\|_H$ конечен; в частности, $\mathbb{E}\,\|B\|_H^{4i_1} < \infty$. То же верно и для случайной величины $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ ввиду предложения 3.1, т.е., в частности, $\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}\|_{2H}^{4i_2} < \infty$. Из предложения 3.3 следует, что существуют универсальные константы c_1, c_2 такие, что

$$
\|\widehat{X}^{(c)}\|_H \le c_1\left(\|\widehat{B}^{(c)}\|_H + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H}^{1/2} + \|\widehat{B}^{(c)}\|_H^{1/H} + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H}^{1/(2H)}\right), \tag{3.90}
$$

$$
\|R^{\widehat{X}^{(c)}}\|_{2H} \le c_2\left(\|\widehat{B}^{(c)}\|_H^2 + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H} + \|\widehat{B}^{(c)}\|_H^{1+\frac{1}{H}} + \|\widehat{\mathbb{B}}^{(c)}\|_{2H}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2H}}\right). \tag{3.91}
$$

Из неравенства Гельдера следует, что конечны любые моменты $\|B\|_H$, $\|\mathbb{B}\|_{2H}$ порядка $q \in (0,1)$: $\mathbb{E}\,\|B^{(c)}\|_H^q \le \Big(\mathbb{E}\,\|B^{(c)}\|_H\Big)^q\Big(\mathbb{E}\,1^{1/(1-q)}\Big)^{1-q} < \infty$ (и аналогично $\mathbb{E}\,\|\mathbb{B}^{(c)}\|_{2H}^q < \infty$). Поэтому из оценок (3.90) и (3.91) и неравенств о средних следует конечность моментов

$$
\mathbb{E}\,\|X^{(c)}\|_H^{4j_1} < \infty, \qquad \mathbb{E}\,\|R^{X^{(c)}}\|_{2H}^{4j_2} < \infty. \tag{3.92}
$$

Это, в свою очередь, завершает доказательство того, что правая часть (3.89) конечна. Теорема 3.4 доказана.

Замечание 3.3. Рассмотрим случай, когда все показатели Харста H_i, $i = 1,\dots,d$, равны $1/2$. В этом случае уравнение (3.1) можно рассматривать как уравнение Стратоновича. Учитывая связь уравнений Ито и Стратоновича [9, предложение 2.4], данное уравнение можно свести к уравнению Ито

$$
dX_t = \tilde{f}_0(X_t)dt + \hat{f}(X_t)dW_t, \tag{3.93}
$$

где $\hat{f}$ – матрица, составленная из вектор-столбцов $f_1, \ldots, f_d$, W_t – d-мерное броуновское движение,

$$\tilde{f}_0(X) = f_0(X) - \mathrm{col}(\rho_1(X), \ldots, \rho_n(X)),$$

$$\rho_j(X) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \hat{f}_{ji}(X)}{\partial x_k} \hat{f}_{ki}(X).$$

Так как решение уравнения (3.93) обладает марковским свойством [14, теорема 7.1.2], то, полагая $N = 2$ в соотношении (3.57), получим, что семейство операторов $\mathbf{P}_t$ является C_0-полугруппой с генератором

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_{0,j}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{n} f_{k,j}(\cdot) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^2.$$

Таким образом, для функции $u(x,t) = \mathbf{P}_t g(x)$ получаем обратное уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{A} u.$$

Отметим, что даже для простейшего одномерного уравнения $dX_t = dB_t^{\alpha}$ при $\alpha \in (1/3, 1/2) \cup (1/2, 1)$ решение $X_t = B_t^{\alpha}$ не является семимартингалом, и следовательно, не обладает марковским свойством, которое является ключевым при выводе уравнений Колмогорова [14, теорема 8.1.1].

3.4 Математические ожидания повторных интегралов от дробных броуновских движений

В данном разделе мы вычислим математические ожидания повторных интегралов возникающих их разложений для $\mathbf{P}_t g(x)$ в теореме 3.4, предполагая, что $H_i \geq H^* > 1/2$ для всех $i = 0, \ldots, d$.

Теорема 3.5. *Пусть* $I_m = (i_1, \ldots, i_m) \in \{1, \ldots, d\}^m$, $m \in \mathbb{N}$.

1. *Если* $m = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$, *то*

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})} \right) = 0.$$

2. *Если $m = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то справедливо равенство*

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} dB^{(I_{2k})}\right) =$$

$$= \frac{1}{k!2^{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \left(\prod_{l=1}^{k} (H_{i_{\sigma(2l)}} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 1)(H_{i_{\sigma(2l)}} + H_{i_{\sigma(2l-1)}}) \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} |t_{\sigma(2l)} - t_{\sigma(2l-1)}|^{H_{i_{\sigma(2l)}} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 2} dt_1 \dots dt_{2k} \right),$$

где δ — символ Кронекера, S_{2k} — группа подстановок.

Доказательство. Первую часть легко доказать, используя свойство симметрии распределения дробного броуновского движения: если $B^{(i)}$ — дробное броуновское движение с индексом Харста H_i, то $-B^{(i)}$ — также дробное броуновское движение с тем же индексом Харста. Таким образом, получим

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})}\right) = \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} d\left(-B^{(I_{2k-1})}\right)\right) =$$

$$= (-1)^{2k-1}\, \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})}\right) = -\, \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k-1}[0,1]} dB^{(I_{2k-1})}\right),$$

что доказывает первое утверждение теоремы.

Докажем вторую часть теоремы. Обозначим через $B^{(N)}$, $N \in \mathbb{N}$, последовательность приближений к B на диадных разбиениях $\mathcal{P}_{dyad}^{(N)} = \left\{t_k^{(N)} = \frac{k}{2^N},\, k = \overline{0, 2^N}\right\}$ отрезка [0,1], определяемых следующей формулой:

$$B_t^{(N)} = B_{t_{k-1}^{(N)}} + 2^N \left(t - t_{k-1}^{(N)}\right) \left(B_{t_k^{(N)}} - B_{t_{k-1}^{(N)}}\right),\ t \in \left[t_{k-1}^{(N)}, t_k^{(N)}\right),\, k = 1, \dots, N.$$

По теореме Лебега о мажорируемой сходимости ввиду [22, следствие 20], получим:

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} dB^{(I_{2k})}\right) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} (dB^{(N)})^{(I_{2k})}\right).$$

Поскольку функции $B^{(N)}$ абсолютно непрерывны п.н., то справедливы соотношения

$$\int_{\Delta^{2k}[0,1]} (dB^{(N)})^{(I_{2k})} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{t_{2k}} \dots \int_0^{t_2} d\big(B_{t_1}^{(N)}\big)^{(i_1)} \dots d\big(B_{t_{2k-1}}^{(N)}\big)^{(i_{2k-1})} d\big(B_{t_{2k}}^{(N)}\big)^{(i_{2k})} =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{t_{2k}} \dots \int_0^{t_2} \frac{d\big(B_{t_1}^{(N)}\big)^{(i_1)}}{dt_1} dt_1 \dots \frac{d\big(B_{t_{2k-1}}^{(N)}\big)^{(i_{2k-1})}}{dt_{2k-1}} dt_{2k-1} \frac{d\big(B_{t_{2k}}^{(N)}\big)^{(i_{2k})}}{dt_{2k}} dt_{2k} =$$

$$= \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \frac{d\big(B_{t_1}^{(N)}\big)^{(i_1)}}{dt_1} \dots \frac{d\big(B_{t_{2k}}^{(N)}\big)^{(i_{2k})}}{dt_{2k}} dt_1 \dots dt_{2k}. \qquad (3.94)$$

Нам потребуется следующее утверждение, которое может быть доказано непосредственно путем разложения в ряд производящей функции моментов гауссовского случайного вектора.

Лемма 3.6 [17]. *Для центрированного гауссовского вектора* $G = (G_1, \dots, G_{2k})$ *справедливо равенство*

$$\mathbb{E}(G_1 \dots G_{2k}) = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \prod_{l=1}^{k} \mathbb{E}(G_{\sigma(2l)} G_{\sigma(2l-1)}).$$

Применяя лемму 3.6 к равенству (3.94), получим:

$$\mathbb{E}\Bigg(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} (dB^{(N)})^{(I_{2k})} \Bigg) =$$

$$= \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \mathbb{E}\Bigg(\frac{d\big(B_{t_1}^{(N)}\big)^{(i_1)}}{dt_1} \dots \frac{d\big(B_{t_{2k}}^{(N)}\big)^{(i_{2k})}}{dt_{2k}} \Bigg) dt_1 \dots dt_{2k} =$$

$$= \frac{1}{k!2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \mathbb{E}\Bigg(\frac{d\big(B_{t_{\sigma(2l)}}^{(N)}\big)^{(i_{\sigma(2l)})}}{dt_{\sigma(2l)}} \cdot \frac{d\big(B_{t_{\sigma(2l-1)}}^{(N)}\big)^{(i_{\sigma(2l-1)})}}{dt_{\sigma(2l-1)}} \Bigg) dt_1 \dots dt_{2k}. \qquad (3.95)$$

Рассмотрим отдельно каждый множитель в соотношении (3.95). Пусть $t_{\sigma(2l)} \in [t_u^{(N)}, t_{u+1}^{(N)})$ и $t_{\sigma(2l-1)} \in [t_v^{(N)}, t_{v+1}^{(N)})$ для некоторых $u, v \in \{0, 1, \dots, 2^N - 1\}$ (для упрощения обозначений будем иногда опускать верхний индекс (N)). Используя представление $B^{(N)}$, можем записать:

$$\mathbb{E}\Bigg(\frac{d\big(B_{t_{\sigma(2l)}}^{(N)}\big)^{(i_{\sigma(2l)})}}{dt_{\sigma(2l)}} \cdot \frac{d\big(B_{t_{\sigma(2l-1)}}^{(N)}\big)^{(i_{\sigma(2l-1)})}}{dt_{\sigma(2l-1)}} \Bigg) =$$

$$= 2^{2N}\, \mathbb{E}\Big(B_{t_{u+1}}^{(i_{\sigma(2l)})} - B_{t_u}^{(i_{\sigma(2l)})} \Big) \Big(B_{t_{v+1}}^{(i_{\sigma(2l-1)})} - B_{t_v}^{(i_{\sigma(2l-1)})} \Big).$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, однородность приращений дробного Броуновского движения, получим неравенство

$$\left|\mathbb{E}\Big(B^{(i_{\sigma(2l)})}_{t_{u+1}} - B^{(i_{\sigma(2l)})}_{t_u}\Big)\Big(B^{(i_{\sigma(2l-1)})}_{t_{v+1}} - B^{(i_{\sigma(2l-1)})}_{t_v}\Big)\right| \le$$

$$\le \sqrt{|t_{u+1}-t_u|^{2H_{i_{\sigma(2l)}}}|t_{v+1}-t_v|^{2H_{i_{\sigma(2l-1)}}}} \le 2^{-2NH^*}. \qquad (3.96)$$

Если $|u-v|>1$, то легко вывести следующее равенство:

$$\mathbb{E}\Big(B^{(i_{\sigma(2l)})}_{t_{u+1}} - B^{(i_{\sigma(2l)})}_{t_u}\Big)\Big(B^{(i_{\sigma(2l-1)})}_{t_{v+1}} - B^{(i_{\sigma(2l-1)})}_{t_v}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\delta_{i_{\sigma(2l)},i_{\sigma(2l-1)}}(H_{i_{\sigma(2l)}} + H_{i_{\sigma(2l-1)}} - 1)(H_{i_{\sigma(2l)}} + H_{i_{\sigma(2l-1)}})\times$$

$$\times \iint_{[t_u^{(N)},t_{u+1}^{(N)})\times[t_v^{(N)},t_{v+1}^{(N)})} |x-y|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}dxdy. \qquad (3.97)$$

Введем следующее обозначение:

$$R^{(N)}_{u,v} = [t_u^{(N)}, t_{u+1}^{(N)}) \times [t_v^{(N)}, t_{v+1}^{(N)}),$$

$$f^{(l)}_{u,v}(t) = \mathbf{1}_{R^{(N)}_{u,v}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)})\,\mathbb{E}\Big(B^{(i_{\sigma(2l)})}_{t_{u+1}} - B^{(i_{\sigma(2l)})}_{t_u}\Big)\Big(B^{(i_{\sigma(2l-1)})}_{t_{v+1}} - B^{(i_{\sigma(2l-1)})}_{t_v}\Big).$$

Используя соотношение (3.95), получим:

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}(dB^{(N)})^{(I_{2k})}\right) =$$

$$= \frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\sum_{u,v=0}^{2^N-1}\mathbf{1}_{R^{(N)}_{u,v}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)})\times$$

$$\times\,\mathbb{E}\Big(B^{(i_{\sigma(2l)})}_{t_{u+1}} - B^{(i_{\sigma(2l)})}_{t_u}\Big)\Big(B^{(i_{\sigma(2l-1)})}_{t_{v+1}} - B^{(i_{\sigma(2l-1)})}_{t_v}\Big)dt_1\ldots dt_{2k} =$$

$$= \frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\left(\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f^{(l)}_{u,v}(t) + \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1} f^{(l)}_{u,v}(t)\right)dt_1\ldots dt_{2k} =$$

$$= \frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f^{(l)}_{u,v}(t)\;dt_1\ldots dt_{2k}+$$

$$+\frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\pi\in S_k}\left(\prod_{l=1}^{\alpha}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f^{(\pi(l))}_{u,v}(t)\right)\times$$

$$\times\Bigg(\prod_{l=\alpha+1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\Bigg)dt_1\dots dt_{2k} := I_1^{(N)} + I_2^{(N)}.$$

Сейчас утверждение теоремы является прямым следствием следующей леммы.

Лемма 3.7. *В предыдущих обозначениях пусть*

$$I_1^{(N)} = \frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(l)}(t)\;dt_1\dots dt_{2k},$$

$$I_2^{(N)} = \frac{2^{2Nk}}{k!2^k}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{\pi\in S_k}\Bigg(\prod_{l=1}^{\alpha}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\Bigg)\times$$

$$\times\Bigg(\prod_{l=\alpha+1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\Bigg)dt_1\dots dt_{2k}.$$

Тогда $\lim\limits_{N\to\infty} I_2^{(N)} = 0$ *и*

$$\lim_{N\to\infty} I_1^{(N)} = \frac{1}{k!2^{2k}}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\Bigg(\prod_{l=1}^{k}(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}})\Bigg)\times$$

$$\times\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\prod_{l=1}^{k}\delta_{i_{\sigma(2l)},i_{\sigma(2l-1)}}|t_{\sigma(2l)}-t_{\sigma(2l-1)}|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}dt_1\dots dt_{2k}.$$

Доказательство. По теореме о среднем существует точка $(t_u^*,t_v^*)\in R_{u,v}^{(N)}$ такая, что

$$\iint_{R_{u,v}^{(N)}}|x-y|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}dxdy = |t_u^*-t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}\cdot \mathrm{mes}(R_{u,v}^{(N)}) =$$

$$= 2^{-2N}\cdot|t_u^*-t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2}.$$

Когда N стремится к ∞, прямоугольник $R_{u,v}^{(N)}$ стягивается в точку $(t_{\sigma(2l)},t_{\sigma(2l-1)})$ и таким образом,

$$I_1^{(N)} = \frac{2^{2Nk}}{k!2^{2k}}\sum_{\sigma\in S_{2k}}\Bigg(\prod_{l=1}^{k}(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}})\Bigg)\times$$

$$\times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)}) \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} \times$$

$$\times \iint_{R_{u,v}^{(N)}} |x-y|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2} dx dy dt_1 \dots dt_{2k} =$$

$$= \frac{1}{k! 2^{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \left(\prod_{l=1}^{k} (H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}) \right) \times$$

$$\times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2l)}, t_{\sigma(2l-1)}) \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} \times$$

$$\times |t_u^* - t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2} dt_1 \dots dt_{2k} \xrightarrow[N\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{} \frac{1}{k! 2^{2k}} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \left(\prod_{l=1}^{k} (H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}) \right) \times$$

$$\times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \prod_{l=1}^{k} \delta_{i_{\sigma(2l)}, i_{\sigma(2l-1)}} |t_{\sigma(2l)} - t_{\sigma(2l-1)}|^{H_{i_{\sigma(2l)}}+H_{i_{\sigma(2l-1)}}-2} dt_1 \dots dt_{2k}. \qquad (3.98)$$

Осталось доказать, что $I_2^{(N)} \to 0$ as $N \to \infty$. Выберем число $q > 1$ такое, что $2 - \frac{1}{q} < 2H^*$, и пусть $p = \frac{q}{q-1}$. Воспользуемся неравенством Гельдера, чтобы получить верхнюю оценку для $I_2^{(N)}$:

$$|I_2^{(N)}| \le \frac{1}{k! 2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\pi \in S_k} 2^{2Nk} \times$$

$$\times \int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \left(\prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right) \left(\prod_{l=\alpha+1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right) \right| dt_1 \dots dt_{2k} \le$$

$$\le \frac{1}{k! 2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sum_{\pi \in S_k} 2^{2Nk} \times$$

$$\times \left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} \left| \prod_{l=1}^{\alpha} \sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t) \right|^p dt_1 \dots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\left|\prod_{l=\alpha+1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\right|^q dt_1\dots dt_{2k}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{3.99}$$

Достаточно показать, что каждое слагаемое в (3.99) порядка $O(2^{(2-\frac{1}{q}-2H^*)N(k-\alpha)})$. Для первого интеграла в слагаемом (3.99) воспользуемся соображениями из соотношений (3.97), (3.98):

$$2^{2N\alpha}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\left|\prod_{l=1}^{\alpha}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\right|^p dt_1\dots dt_{2k}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= 2^{2N\alpha}\cdot\frac{1}{2^k}\left(\prod_{l=1}^{\alpha}(H_{i_{\sigma(2\pi(l))}}+H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2\pi(l))}}+H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}})\right)\times$$

$$\times\Bigg(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\Bigg|\prod_{l=1}^{\alpha}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|>1}}^{2^N-1}\mathbf{1}_{R_{u,v}^{(N)}}(t_{\sigma(2\pi(l))},t_{\sigma(2\pi(l)-1)})\cdot\delta_{i_{\sigma(2\pi(l))},i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}\times$$

$$\times 2^{-2N}\cdot|t_u^*-t_v^*|^{H_{i_{\sigma(2\pi(l))}}+H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}-2}\Bigg|^p dt_1\dots dt_{2k}\Bigg)^{\frac{1}{p}}\xrightarrow[N\to\infty]{}$$

$$\xrightarrow[N\to\infty]{}\frac{1}{2^k}\left(\prod_{l=1}^{\alpha}(H_{i_{\sigma(2\pi(l))}}+H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}-1)(H_{i_{\sigma(2\pi(l))}}+H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}})\right)\times$$

$$\times\Bigg(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\Bigg|\prod_{l=1}^{\alpha}\delta_{i_{\sigma(2\pi(l))},i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}\times$$

$$\times|(t_{\sigma(2\pi(l))}-t_{\sigma(2\pi(l)-1)}|^{H_{i_{\sigma(2\pi(l))}}+H_{i_{\sigma(2\pi(l)-1)}}-2}\Bigg|^p dt_1\dots dt_{2k}\Bigg)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

поэтому первый множитель ограничен. Для второго интеграла в (3.99) воспользуемся оценкой (3.96) и получим:

$$2^{2N(k-\alpha)}\left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]}\left|\prod_{l=\alpha+1}^{k}\sum_{\substack{u,v=0\\|u-v|\le 1}}^{2^N-1} f_{u,v}^{(\pi(l))}(t)\right|^q dt_1\dots dt_{2k}\right)^{\frac{1}{q}}\le 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)}\times$$

$$\times \left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} \Bigg(\prod_{l=\alpha+1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|\le 1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R^{(N)}_{u,v}} \big(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big) \Bigg)^q dt_1 \ldots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Во внутренней сумме только одно слагаемое равно 1: то, для которого $\big(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big) \in R^{(N)}_{u,u}$ или $\big(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big) \in R^{(N)}_{u,u\pm 1}$; остальные слагаемые занулятся. Произведение отлично от нуля только если все его множители отличны от нуля, поэтому

$$2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \left(\int_{\Delta^{2k}[0,1]} \Bigg(\prod_{l=\alpha+1}^{k} \sum_{\substack{u,v=0 \\ |u-v|\le 1}}^{2^N-1} \mathbf{1}_{R^{(N)}_{u,v}} \big(t_{\sigma(2\pi(l))}, t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big) \Bigg)^q dt_1 \ldots dt_{2k} \right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \times \Big(\mathrm{mes}\big\{ (t_1, \ldots, t_{2k}) \in \Delta^{2k}[0,1] :$$

$$\big|t_{\sigma(2\pi(l))} - t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big| \le 2 \cdot 2^{-N} \;\; \forall\, l = \overline{\alpha+1, k} \big\} \Big)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \times \Big(\mathrm{mes}\big\{ (t_1, \ldots, t_{2k}) \in [0,1]^{2k} :$$

$$\big|t_{\sigma(2\pi(l))} - t_{\sigma(2\pi(l)-1)}\big| \le 2 \cdot 2^{-N} \;\; \forall\, l = \overline{\alpha+1, k} \big\} \Big)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \left(1^{\alpha} \cdot \Big(2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 2^{-N} \Big)^{k-\alpha} \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= 2^{(2-2H^*)N(k-\alpha)} \cdot 2^{\frac{5(k-\alpha)}{2q}} \cdot 2^{-\frac{N(k-\alpha)}{q}} = O\big(2^{(2-\frac{1}{q}-2H^*)N(k-\alpha)}\big),$$

что завершает доказательство сходимости $I_2^{(N)} \to 0$ при $N \to \infty$.

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Замечание 3.4. Рассмотрим математические ожидания повторных интегралов следующего вида

$$J(I^{(m)}, t) := \mathbb{E}\Bigg(\int_{\Delta^m[0,t]} dB^{(I_m)} \Bigg)$$

для произвольных индексов $I_m = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}_d^m$. Без ограничения общности будем считать, что $i_1, \ldots, i_k > 0$, а $i_j = 0$ для всех $j > k$. Тогда следующее равенство может быть получено изменением порядка интегрирования:

$$J(I^{(m)}, t) = \int_0^t J(\widetilde{I^{(k)}}, \tau) \frac{(t-\tau)^{m-k-1}}{(m-k-1)!} d\tau,$$

где $\widetilde{I^{(k)}} = (i_1, \ldots, i_k)$ и $J(\widetilde{I^{(k)}}, \tau)$ могут быть вычислены, используя равенство (3.62) и теорему 3.5.

Пример 3.1. Рассмотрим следующее одномерное уравнение:

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/2,1)$, $b, \sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции класса C_b^4. Обозначим $f(x) = (b(x), \sigma(x))$, $B_t = (t, B_t^H)$. Пусть также задано начальное условие $X_0 = x$. Выпишем несколько первых членов асимптотических разложений (3.57) (ограничимся $N = 2$) для решений данного уравнения.

Используя теорему 3.5 и замечание 3.4 можем вычислить повторные интегралы:

$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^1[0,1]} dB^{(0)}\right) = \int_0^1 dt = 1, \quad \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^1[0,1]} dB^{(1)}\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 dB_t^H\right) = 0,$$
$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(0,0)}\right) = \int_0^1 dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 = \int_0^1 t_2 dt_2 = \frac{1}{2},$$
$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(0,1)}\right) = \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(1,0)}\right) = \int_0^1 \mathbb{E}\left(\int_0^{t_2} dB_{t_1}^H\right) dt_2 = 0,$$
$$\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^2[0,1]} dB^{(1,1)}\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^1 dB_{t_2}^H \int_0^{t_2} dB_{t_1}^H\right) = \frac{1}{1!2^2} \cdot 2 \cdot 2H(2H-1)\times$$
$$\times \int_{\Delta^2[0,1]} |t_2 - t_1|^{2H-2} dt_1 dt_2 = H(2H-1)\int_0^1 dt_2 \int_0^{t_2} (t_2 - t_1)^{2H-2} dt_1 =$$
$$= H\int_0^1 t_2^{2H-1} dt_2 = \frac{1}{2}.$$

Для данного уравнения имеем операторы $D_f^{(0)} = b(x)\,\frac{\partial}{\partial x}$ и $D_f^{(1)} = \sigma(x)\,\frac{\partial}{\partial x}$. Нетрудно вычислить, что

$$D_f^{(0,0)} = b(x)Db(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + b^2(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D_f^{(1,1)} = \sigma(x)D\sigma(x)\,\frac{\partial}{\partial x} + \sigma^2(x)\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Таким образом, согласно теореме 3.4, для $\mathbf{P}_t g(x)$, $g \in C_b^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ справедливо асимптотическое разложение следующего вида:

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + t\,b(x)Dg(x) + \frac{1}{2}t^2\left(b(x)Db(x)Dg(x) + b^2(x)D^2g(x)\right) +$$
$$+\frac{1}{2}t^{2H}\left(\sigma(x)D\sigma(x)Dg(x) + \sigma^2(x)D^2g(x)\right) + O\left(t^{3H}\right).$$

3.5 Коммутативный случай

В данном разделе будем предполагать, что компоненты $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ правой части уравнения (3.1) являются векторными полями из класса $C_b^{d+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такими, что справедливо равенство $D_f^{(i)} \circ D_f^{(j)} = D_f^{(j)} \circ D_f^{(i)}$, для любых $0 \le i,j \le d$.

Для каждого $i = \overline{0,d}$ обозначим через $(e^{tD_f^{(i)}})_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ семейство операторов, определяемое соотношением $e^{tD_f^{(i)}}(x) = X_t^x$ для любых $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, в котором X_t^x — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dX_t}{dt} = f_i(X_t)$$

с начальным условием $X_0 = x$.

Предложение 3.6. *Для решения X_t^x уравнения* (3.1) *с начальным условием $X_0 = x$ п. н. справедлива следующая формула:*

$$X_t^x = F(x, B_t), \quad t \in [0,T],\ x \in \mathbb{R}^n,$$

в которой $F(x,y) = e^{y_0 D_f^{(0)}} \circ \ldots \circ e^{y_d D_f^{(d)}}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d+1}$.

Доказательство. Поскольку операторы $D_f^{(i)}$ коммутируют, потоки $(e^{tD_f^{(i)}})_{t\ge 0}$ также коммутируют. Для пары $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{d+1}$ обозначим

$$F(x,y) = \left(e^{y_0 D_f^{(0)}} \circ \ldots \circ e^{y_d D_f^{(d)}}\right)(x).$$

Применяя формулу Ито, легко видеть, что процесс $\left(e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x\right)_{t\ge 0}$ является решением уравнения $dX_t = f_d(X_t)dB_t^{(d)}$. Применяя формулу Ито еще раз и учитывая коммутативность операторов $D_f^{(d)}$, $D_f^{(d-1)}$, получим:

$$d\left(e^{B_t^{(d-1)} D_f^{(d)-1}}(e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x)\right) = f_{d-1}\left(e^{B_t^{(d-1)} D_f^{(d-1)}}(e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x)\right) dB_t^{(d-1)}$$
$$+ f_d\left(e^{B_t^{(d-1)} D_f^{(d-1)}}(e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}} x)\right) dB_t^{(d)}.$$

И так далее. Путем последовательного применения формулы Ито, заключаем, что процесс $(F(x,B_t))_{t\ge 0}$ удовлетворяет уравнению (3.1) с начальным условием $X_0 = x$. Таким образом, согласно теореме 3.1, можем сделать вывод, что

$$X_t^x = F(x, B_t), \quad t \in [0,T],$$

п.н. Предложение доказано.

Теорема 3.6. *Для любой функции $g \in C_b^{d+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ справедливо равенство*

$$\mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right) = \left(\exp\left(tD_f^{(0)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} t^{2H_i}(D_f^{(i)})^2\right) g\right)(x).$$

Другими словами, функция

$$\varphi(t,x) = \mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right),$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_f^{(0)}\varphi + \sum_{i=1}^{d} H_i t^{2H_i-1}(D_f^{(i)})^2\varphi, \tag{3.100}$$

с начальным условием

$$\varphi(0,x) = g(x).$$

Доказательство. Применяя формулу Ито для дробного броуновского движения из [20], получим для $i > 0$:

$$\mathbb{E}\left(g(e^{B_t^{(i)}D_f^{(i)}}(x))\right) = g(x) + H_i\int_0^t s^{2H_i-1}\,\mathbb{E}\left((D_f^{(i)})^2 g(e^{B_s^{(i)}D_f^{(i)}}(x))\right) ds.$$

Если $i = 0$, то для $B_t^{(0)} = t$ будем иметь следующее равенство

$$g(e^{B_t^{(0)}D_f^{(0)}}(x)) = g(x) + \int_0^t D_f^{(0)} g(e^{B_s^{(0)}D_f^{(0)}}(x))ds.$$

Последние два равенства означают, что функции $u_i(t,x) = \mathbb{E}\left(g(e^{B_t^{(i)}D_f^{(i)}}(x))\right)$ являются решениями следующих уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = H_i t^{2H_i-1}(D_f^{(i)})^2 u_i, \quad i > 0,$$
$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = D_f^{(0)} u_0,$$

следовательно,

$$\mathbb{E}\left(g(e^{B_t^{(i)}D_f^{(i)}}(x))\right) = \left(\exp\left(\frac{1}{2}t^{2H_i}(D_f^{(i)})^2\right) g\right)(x), \quad i > 0,$$
$$g(e^{B_t^{(0)}D_f^{(0)}}(x)) = \left(\exp\left(tD_f^{(0)}\right) g\right)(x).$$

Согласно предложению 3.6, п.н. верно равенство

$$X_t^x = (e^{B_t^{(0)} D_f^{(0)}} \circ \ldots \circ e^{B_t^{(d)} D_f^{(d)}})(x).$$

Используя коммутативность операторов $D_f^{(i)}$ и $D_f^{(j)}$, можем записать, что

$$\mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right) = \left(\exp\left(tD_f^{(0)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} t^{2H_i}(D_f^{(i)})^2\right) g\right)(x),$$

что, в свою очередь, доказывает теорему.

Замечание 3.5. Если компоненты правой части $f_i \in \mathbb{C}^{d+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ автономны, а операторы $D_f^{(i)}$ и $D_j^{(j)}$ коммутируют, то функция $\mathbb{E}(g(X_t^x))$ удовлетворяет уравнению (3.100), которое является обобщением обратного уравнения Колмогорова [14, теорема 8.1.1] на случай дробного броуновского движения с различными индексами Харста, вообще говоря отличными от $1/2$.

Пример 3.2. Рассмотрим следующее одномерное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = \sin X_t \, dt + 2H^{-1} \sin X_t \, dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/3,1)$. Пусть также задано начальное условие $X_0 = x \in \mathbb{R}$.

Для данного уравнения имеем операторы $D_f^{(0)} = \sin x \frac{\partial}{\partial x}$ и $D_f^{(1)} = 2H^{-1} \sin x \frac{\partial}{\partial x}$. Нетрудно видеть, что указанное уравнение удовлетворяет коммутативному случаю, поскольку

$$D_f^{(0)} \circ D_f^{(1)} = 2H^{-1} \sin x \cos x \frac{\partial}{\partial x} + 2H^{-1} \sin^2 x \frac{\partial^2}{\partial x^2} = D_f^{(1)} \circ D_f^{(0)}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что $(D_f^{(1)})^2 = H^{-1} \sin 2x \frac{\partial}{\partial x} + 4H^{-2} \sin^2 x \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Поэтому, согласно теореме 3.6, функция $\varphi(t,x) = \mathbb{E}\, g(X_t^x)$ будет являться решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\sin x + t^{2H-1} \sin 2x\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4t^{2H-1}}{H} \sin^2 x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

с начальным условием $\varphi(0,x) = g(x)$.

ГЛАВА 4
МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНЫМИ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ СМЕШАННОГО ТИПА

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ заданы d-мерное стандартное броуновское движение $W(t)$ и d-мерное дробное броуновское движение $B(t)$ с показателем Харста $H \in (1/2,1)$.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{4.1}$$

где $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — детерминированные функции.

Определение 4.1. Под решением уравнения (4.1) понимаем процесс $x(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$, согласованный с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$, порожденным процессами $W(t)$ и $B(t)$, такой, что выполняются условия:

1) существует $\alpha > 1 - H$ такое, что процесс $x(t)$ имеет п.н. непрерывные по Гельдеру с показателем α траектории;

2) для любого $t \in \mathbb{R}^+$ почти наверное выполняется равенство

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s,x(s))ds + \int_0^t g(s,x(s))dW(s) + \int_0^t \sigma(s,x(s))dB(s),$$

где интеграл по процессу $W(t)$ – стохастический интеграл Ито, а интеграл по процессу $B(t)$ – потраекторный интеграл Римана-Стилтьеса [32].

Замечание 4.1. Иногда рассматривают решения, допускающие взрывы за конечное время. В этом случае решение $x(t)$ определяется для $t < \tau$, где τ – так называемый момент взрыва ($\mathcal{F}_t$-момент остановки, такой что $\lim_{t\to\tau-0} \|x(t)\| = \infty$ при $\tau < \infty$), а непрерывность траекторий по Гельдеру предполагается до момента τ.

Пусть функция $F(t,x)$ непрерывна вместе со своими производными $F'_t(t,x)$, $F'_x(t,x)$, $F''_{x^2}(t,x)$. Если функции f, g измеримы по Борелю, функция σ удовлетворяет (δ,ρ)-условию Гельдера по (t,x) при некоторых $\delta > 1 - H$, $\rho > 2 - 2H$, а решение $x(t)$ имеет непрерывные по Гельдеру порядка α

траектории п.н. при $\alpha\rho > 1$, то имеет место аналог формулы Ито [44, P. 184]:

$$\begin{gathered}F(t,x(t)) = F(0,x(0)) + \\ + \int_0^t \Big(F'_t(\tau,x(\tau)) + F'_x(\tau,x(\tau)) f(\tau,x(\tau)) + \\ + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(F''_{x^2}(\tau,x(\tau)) g(\tau,x(\tau)) g^T(\tau,x(\tau))) \Big) d\tau + \\ + \int_0^t F'_x(\tau,x(\tau)) g(\tau,x(\tau)) dW(\tau) + \int F'_x(\tau,x(\tau)) \sigma(\tau,x(\tau)) dB(\tau).\end{gathered} \tag{4.2}$$

4.1 Методы интегрирования одномерных уравнений смешанного типа

В данном параграфе будем рассматривать одномерное уравнение (4.1), т.е. $d = 1$. В рамках настоящего параграфа будем предполагать, что коэффициенты рассматриваемых уравнений являются достаточно гладкими функциями, обеспечивающими возможность достаточного числа дифференцирований и применений формулы замены переменных (4.2).

4.1.1 Приведение к простейшим уравнениям

Рассмотрим простейшее уравнение

$$dy(t) = u(t)dt + v(t)dW(t) + b(t)dB(t), \quad t \geq 0. \tag{4.3}$$

Решение уравнения (4.3) выражается следующей формулой:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)dW(\tau) + \int_0^t b(\tau)dB(\tau), \quad t \geq 0.$$

Найдем класс уравнений (4.1), приводимых к (4.3) с помощью дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно x преобразования $y = F(t,x)$ посредством формулы Ито (4.2) в предположении, что что функции f, g, σ обладают производными требуемых порядков для последующих вычислений. В соответствии с формулой Ито, должны быть справедливы соотношения:

$$u(t) = F'_t(t,x) + F'_x(t,x)f(t,x) + \frac{1}{2}F''_{x^2}(t,x)g^2(t,x), \tag{4.4}$$

$$v(t) = F'_x(t,x)g(t,x), \tag{4.5}$$

$$b(t) = F'_x(t,x)\sigma(t,x). \tag{4.6}$$

Из соотношений (4.5), (4.6) следует, что $\frac{v(t)}{g(t,x)} = \frac{b(t)}{\sigma(t,x)}$, или $\frac{\sigma(t,x)}{g(t,x)} = \frac{b(t)}{v(t)} := q(t)$. Также из соотношения (4.5) очевидным образом можно выразить следующие производные функции F:

$$F'_x = \frac{v}{g}, \quad F''_{x^2} = -\frac{vg'_x}{g^2}, \quad F''_{tx} = \frac{v'g - vg'_t}{g^2}. \tag{4.7}$$

Дифференцируя соотношение (4.4) по x и используя полученные формулы для $F'_x, F''_{x^2}, F''_{tx}$, получим:

$$F''_{tx} + F''_{x^2}f + F'_xf'_x + \frac{1}{2}F'''_{x^3}g^2 + F''_{x^2}g'_xg = 0,$$

$$\frac{v'g - vg'_t}{g^2} - \frac{vg'_xf}{g^2} + \frac{vf'_x}{g} - \frac{vg''_{x^2}g^2 - 2vg(g'_x)^2}{2g^2} - \frac{v(g'_x)^2}{g} = 0,$$

$$\frac{v'}{v} = g\left(\frac{g'_t}{g^2} + \frac{g'_xf}{g^2} - \frac{f'_x}{g} + \frac{1}{2}g''_{x^2}\right) = g\left(\frac{g'_t}{g^2} + \left(\frac{f}{g}\right)'_x + \frac{1}{2}g''_{x^2}\right). \tag{4.8}$$

Левая часть последнего соотношения зависит лишь от t, поэтому на функции f, g, σ накладываются следующие ограничения:

$$g(t,x)\left(\frac{g'_t(t,x)}{g^2(t,x)} + \left(\frac{f(t,x)}{g(t,x)}\right)'_x + \frac{1}{2}g''_{x^2}(t,x)\right) = r(t), \tag{4.9}$$

$$\frac{\sigma(t,x)}{g(t,x)} = q(t) \tag{4.10}$$

для некоторых функций $r(t), q(t)$.

Обратно, пусть заданные функции f,g,σ удовлетворяют условиям (4.9), (4.10). Тогда из соотношения (4.8) находим функцию $v(t) = \exp\left(\int_0^t r(\tau)d\tau\right)$ (как любое нетривиальное решение линейного однородного уравнения). Из соотношения (4.7) найдем $F(t,x) = v(t)\int_0^x \frac{ds}{g(t,s)}$, причем ввиду того, что $v \neq 0$, $F'_x = \frac{v}{g} \neq 0$, т.е. функция F будет обратима по x. Зная функцию F, из соотношений (4.4), (4.6) однозначно определяем функции $u(t)$ и $b(t)$. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Уравнение* (4.1) *с* $g(t,x) \neq 0$ *приводимо к уравнению* (4.3) *с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно* x *преобразования* $y = F(t,x)$ *тогда и только тогда, когда найдутся функции* $q(t), r(t)$ *такие, что оказываются выполненными соотношения* (4.9), (4.10) .

Предложение 4.1. *Пусть заданы скалярные функции* $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, *при этом* $\beta(t) \neq 0$. *Тогда решение линейного однородного уравнения*

$$dx(t) = \alpha(t)x(t)dt + \beta(t)x(t)dW(t) + \gamma(t)x(t)dB(t), \quad t \geq 0, \tag{4.11}$$

с начальным условием $x(0) = x_0 > 0$ *выражается формулой*

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t \Big(\alpha(\tau) - \frac{1}{2}\beta^2(\tau)\Big)d\tau + \int_0^t \beta(\tau)dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau)dB(\tau)\right)$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что функции $f(t,x) = \alpha(t)x$, $g(t,x) = \beta(t)x$, $\sigma(t,x) = \gamma(t)x$ удовлетворяют условиям (4.9), (4.10), причем $\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}$, т.е. $\ln\left(\frac{v(t)}{\beta(t)}\right)' = 0$. Можно выбрать функцию $v(t) = \beta(t)$. Тогда $F'_x = \frac{1}{x}$, и, в свою очередь, можно выбрать преобразование $F = \ln x$. Из соотношений (4.4), (4.5) находим, что $u(t) = \alpha(t) - \frac{1}{2}\beta(t)$, $b(t) = \gamma(t)$. Так как $y(t) = \ln x(t)$, то $x(t) = e^{y(t)}$ и следовательно, имеет место формула

$$x(t) = C \exp\left(\int_0^t \Big(\alpha(\tau) - \frac{1}{2}\beta^2(\tau)\Big)d\tau + \int_0^t \beta(\tau)dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau)dB(\tau)\right),$$

где $C = e^{y(0)}$. Подставляя в формулу $t = 0$, находим величину $C = x(0)$, что и требовалось.

Замечание 4.2. Непосредственной подстановкой найденной формулы для решения в уравнение (4.11) можно убедиться, что данная формула сохраняет силу, в том числе, если опустить условия $\beta(t) \neq 0$ и $x_0 > 0$. Нетрудно видеть, что почти все траектории решения уравнения (4.11) непрерывны по Гельдеру с любым показателем $\kappa < 1/2$.

Предложение 4.2. *Решение линейного неоднородного уравнения*

$$dx(t) = \big(\alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)\big)dt + \big(\beta_1(t)x(t) + \beta_2(t)\big)dW(t) +$$
$$+ \big(\gamma_1(t)x(t) + \gamma_2(t)\big)dB(t), \quad t \geq 0,$$

выражается по формуле

$$x(t) = x_0(t)\biggl(x(0) + \int_0^t \frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} d\tau + \\ + \int_0^t \frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} dW(\tau) + \int_0^t \frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)} dB(\tau)\biggr),$$

в которой $x_0(t) = \exp\Bigl(\int_0^t \bigl(\alpha_1(\tau) - \frac{1}{2}\beta_1^2(\tau)\bigr)d\tau + \int_0^t \beta_1(\tau)dW(\tau) + \int_0^t \gamma_1(\tau)dB(\tau)\Bigr)$ *есть решение соответствующего линейного однородного уравнения с начальным условием* $x_0(0) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $x(t) = x_0(t)y(t)$. Определим уравнение

$$dy(t) = u(t,y(t))dt + v(t,y(t))dW(t) + b(t, y(t))dB(t), \quad t \geq 0,$$

которому удовлетворяет процесс $y(t)$. Применим формулу Ито к процессу $y = \frac{x}{x_0} = F(x, x_0)$, рассматривая пару $\bar{x} = (x,x_0)$ как решение двумерного уравнения

$$d\bar{x}(t) = \bigl(\bar{\alpha}_1(t)\bar{x}(t) + \bar{\alpha}_2(t)\bigr)dt + p(t,\bar{x}(t))d\bar{W}(t) + \bigl(\bar{\gamma}_1(t)\bar{x}(t) + \bar{\gamma}_2(t)\bigr)dB(t),$$

с начальным условием $\bar{x}(0) = (x(0), 1)^T$, где $\bar{\alpha}_1 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_1)$, $\bar{\gamma}_1 = \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_1)$, $\bar{\alpha}_2 = (\alpha_2, 0)^T$, $\bar{\gamma}_2 = (\gamma_2, 0)^T$, $p = \mathrm{diag}(\beta_1 x + \beta_2, \beta_1 x_0)$, $\bar{W} = (W, W)^T$. Ввиду того, что справедливы соотношения

$$F_t' = 0, \quad F_{\bar{x}}' = \left(\frac{1}{x_0}, -\frac{x}{x_0^2}\right), \quad F_{\bar{x}^2}'' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{x_0^2} \\ -\frac{1}{x_0^2} & \frac{2x}{x_0^3} \end{pmatrix},$$

будем иметь:

$$dy = \left(\frac{\alpha_2}{x_0} - \frac{\beta_1\beta_2}{x_0}\right)dt + \frac{\gamma_2}{x_0}dB + \frac{\beta_2}{x_0}dW.$$

Итак, получили простейшее уравнение для $y(t)$, причем $y(0) = \frac{x(0)}{x_0(0)} = x(0)$. Таким, образом, решение исходного уравнения выражается формулой

$$x(t) = x_0(t)y(t) = x_0(t)\biggl(x(0) + \int_0^t \frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} d\tau + \\ + \int_0^t \frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} dW(\tau) + \int_0^t \frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)} dB(\tau)\biggr),$$

что и требовалось.

Пример 4.1. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$dx(t) = -2t \cdot x(t)dt + t^{1-H}x(t)dB(t), \quad t \geq 0,$$

С учетом предложения 4.1 и замечания 4.2 его решение может быть выражено формулой

$$x(t) = x(0)\exp\left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H}dB(\tau)\right).$$

Докажем, что нулевое решение рассматриваемого уравнения устойчиво по вероятности, то есть для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ найдется $\delta > 0$ такая, что для любого решения с начальным значением $x(0)$ таким, что $|x(0)| < \delta$ п.н., выполнено неравенство $\mathbb{P}\{\sup_{t\geq 0}|x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$.

Используя явную фомулу для решения, получим:

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\geq 0}|x(t)| > \varepsilon_1\} = \mathbb{P}\left\{\sup_{t\geq 0}\left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H}dB(\tau)\right) > \ln\frac{\varepsilon_1}{|x(0)|}\right\}.$$

Применим неравенство Чебышева:

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t\geq 0}\left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H}dB(\tau)\right) > \ln\frac{\varepsilon_1}{|x(0)|}\right\} \leq \frac{\mathbb{E}\sup_{t\geq 0}\left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H}dB(\tau)\right)}{\ln\varepsilon_1 - \ln|x(0)|}$$

Оценим интеграл, используя неравенство Лав-Янга (см. предложение 1.2):

$$\int_0^t \tau^{1-H}dB(\tau) \leq C\cdot V_1\left(\tau^{1-H}, [0,t]\right)\cdot V_{1/H}(B(\tau), [0,t]) \leq Ct^{1-H}\|B\|_H t^H = Ct\|B\|_H.$$

Здесь $C = \zeta(1 + 1/H)$, ζ — дзета-функция Римана, а в последнем переходе использовалась монотонность функции τ^{1-H} и связь $1/H$-вариации с нормой Гельдера с показателем H [27, с. 170]. Таким образом,

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\geq 0}|x(t)| > \varepsilon_1\} \leq \frac{\mathbb{E}\sup_{t\geq 0} t(C\|B\|_H - t)}{\ln\varepsilon_1 - \ln|x(0)|} \leq \frac{\frac{1}{4}C^2\,\mathbb{E}\,\|B\|_H^2}{\ln\varepsilon_1 - \ln|x(0)|}.$$

Потребовав, чтобы правая часть последнего неравенства была меньше ε_2, получим значение δ:

$$|x(0)| < \varepsilon_1\exp\left(-\frac{C^2\,\mathbb{E}\,\|B\|_H^2}{4\varepsilon_2}\right) =: \delta.$$

4.1.2 Приведение к линейным неоднородным уравнениям

Ограничимся рассмотрением автономных уравнений

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{4.12}$$

а также поиском автономной замены $y = F(x)$, приводящей указанное уравнение к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (\alpha_1 y(t)+\alpha_2)dt+(\beta_1 y(t)+\beta_2)dW(t)+(\gamma_1 y(t)+\gamma_2)dB(t), \quad t \geq 0 \tag{4.13}$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$. Согласно формуле Ито должны выполняться соотношения

$$\alpha_1 F(x) + \alpha_2 = F'(x)f(x) + \frac{1}{2}F''(x)g^2(x), \tag{4.14}$$

$$\beta_1 F(x) + \beta_2 = F'(x)g(x), \tag{4.15}$$

$$\gamma_1 F(x) + \gamma_2 = F'(x)\sigma(x). \tag{4.16}$$

Решая линейные неоднородные по F уравнения (4.15), (4.16), находим функцию F:

$$F(x) = C_\beta \exp\left(\beta_1 \int_0^x \frac{ds}{g(s)}\right) - \frac{\beta_2}{\beta_1} = C_\gamma \exp\left(\gamma_1 \int_0^x \frac{ds}{\sigma(s)}\right) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}.$$

Подставляя в последнюю формулу значение $x = 0$, легко найти константы $C_\beta = F(0) + \frac{\beta_2}{\beta_1}$ и $C_\gamma = F(0) + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$. Далее ограничимся случаем $\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$. Тогда на выбор функций g,σ накладывается ограничение

$$\beta_1 \int_0^x \frac{ds}{g(s)} = \gamma_1 \int_0^x \frac{ds}{\sigma(s)},$$

дифференцируя которое, выводим соотношение

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = \frac{\gamma_1}{\beta_1} = \text{const}.$$

Обозначим $G(x) = \int_0^x \frac{ds}{g(s)}$. Подставим выражение для функции $F(x) = C_\beta e^{\beta_1 G(x)} - \frac{\beta_2}{\beta_1}$ в формулу (4.14):

$$\alpha_1 C_\beta e^{\beta_1 G(x)} + \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\beta_1} = C_\beta e^{\beta_1 G(x)} \frac{\beta_1}{g} f + \\ + \left(C_\beta e^{\beta_1 G(x)} \frac{\beta_1^2}{2g^2} - C_\beta e^{\beta_1 G(x)} \frac{\beta_1 g'}{2g^2}\right) g^2,$$

$$e^{\beta_1 G(x)} \left(\beta_1 \left(\frac{f}{g} - \frac{g'}{2}\right) + \frac{\beta_1^2}{2} - \alpha_1\right) = \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\beta_1 C_\beta} \tag{4.17}$$

Обозначим $A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}$ и продифференцируем последнее соотношение. Получим:

$$\beta_1 e^{\beta_1 G(x)} \left(A'(x) + \beta_1 \frac{A(x)}{g(x)} + \left(\frac{\beta_1^2}{2} - \alpha_1 \right) \frac{1}{g(x)} \right) = 0. \tag{4.18}$$

Умножим последнее равенство на $\frac{g(x)}{\beta_1} e^{\beta_1 G(x)}$ и полученное равенство вновь продифференцируем. Будем иметь:

$$(g(x)A'(x))' + \beta_1 A'(x) = 0.$$

Если, к тому же, $A'(x) \neq 0$, то

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = -\beta_1 = \text{const}.$$

Таким образом, необходимо выполнение следующих условий:

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}, \tag{4.19}$$

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = c_1, \tag{4.20}$$

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = c_2, \tag{4.21}$$

для некоторых постоянных $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Обратно, пусть заданные функции $f(x), g(x), \sigma(x)$ удовлетворяют соотношениям (4.19), (4.20), (4.21). Тогда положим $\alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$, $\beta_1 = -c_1$, $\gamma_1 = c_2\beta_1$ и выберем преобразование $F(x) = e^{\beta_1 G(x)}$. Тогда легко проверить, что соотношения (4.15) и (4.16) выполнены. Осталось подобрать α_1, α_2 так чтобы выполнялось соотношение (4.14). Поскольку $(g(x)A'(x))' + \beta_1 A'(x) = 0$, то величина $g(x)A'(x) + \beta_1 A(x) = c_3$, $c_3 \in \mathbb{R}$ – константа. Значит, $A'(x) + \beta_1 \frac{A(x)}{g(x)} = \frac{c_3}{g(x)}$ и соотношение (4.18) диктует выбор константы $\alpha_1 = \frac{\beta_1^2}{2} + c_3$. Теперь интергрируя соотношение (4.18), получим соотношение (4.17). Согласно (4.18) выражение в левой части (полностью определяемое заданными функциями f, g) будет константой. При указанном выборе эта константа совпадает с α_2. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Уравнение (4.12) с $g(x) \neq 0$, $A'(x) \neq 0$ приводимо к уравнению (4.13) тогда и только тогда, когда найдутся постоянные c_1, c_2 такие, что оказываются выполненными соотношения (4.19), (4.20), (4.21).*

Предложение 4.3. *Уравнение бернуллиевского типа*

$$dx(t) = (\alpha x^n(t) + \beta x(t))dt + \gamma x(t)dW(t) + \delta x(t)dB(t)$$

приводится к линейному неоднородному уравнению.

Доказательство. В данном случае $G(x) = \int_1^x \frac{ds}{\gamma s} = \frac{1}{\gamma}\ln x$, $A(x) = \frac{\alpha}{\gamma}x^{n-1} + \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{2}$, $A'(x) = \frac{\alpha(n-1)}{\gamma}x^{n-2}(t)$, $(g(x)A'(x))' = \alpha(n-1)^2x^{n-2}(t)$, $\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = \gamma(n-1) = c_1$. Выберем преобразование $F(x) = C_\beta e^{-c_1G(x)} = C_\beta x^{1-n}$. Подставляя функцию $F(x)$ в (4.15), найдем значение константы $C_\beta = \frac{1}{1-n}$. Итак, $y = F(x) = \frac{1}{1-n}x^{1-n}$, $x = ((1-n)y)^{1/(1-n)}$.

Уже найдены значения $\beta_1 = -c_1 = \gamma(1-n)$, $\gamma_1 = \delta(1-n)$. Далее имеем:

$$c_3 = \gamma xA'(x) + \beta_1 A(x) = -\beta(n-1) + \frac{\gamma^2(n-1)}{2},$$
$$\alpha_1 = (n-1)\left(-\beta + \frac{\gamma^2 n}{2}\right),$$
$$\alpha_2 = C_\beta e^{\beta_1 G(x)}\left(\beta_1 A(x) + \frac{\beta_1^2}{2} - \alpha_1\right) = \frac{1}{1-n} = -F(x)\gamma xA'(x) = \alpha.$$

Таким образом, исходное уравнение сводится к следующему линейному неоднородному уравнению:

$$dy(t) = \left(\alpha + (n-1)\left(-\beta + \frac{\gamma^2 n}{2}\right)y(t)\right)dt+$$
$$+\gamma(1-n)y(t)dW(t) + \delta(1-n)y(t)dB(t),$$

что и требовалось доказать.

4.1.3 Переход к уравнению Стратоновича

Наряду с уравнением (4.1) рассмотрим соответствующее уравнение Стратоновича

$$dx(t) = (f(t,x(t)) - c(t,x(t)))dt + g(t,x(t)) \circ dW(t) + \sigma(t,x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{4.22}$$

где $c(t,x) = \frac{1}{2}g'_x(t,x)g(t,x)$.

Поскольку, решения смешанных уравнений, вообще говоря, не являются семимартингалами, то понятие интеграла Стратоновича требует дополнительных разъяснений.

Во-первых, отметим, что решения смешанных уравнений (4.1) имеют конечную квадратическую вариацию $[x](t)$ в силу того, что процесс

$$\int_0^t f(s,x(s))ds,\ t \geq 0,$$

абсолютно непрерывен, а процесс

$$\int_0^t \sigma(s,x(s))dB(s),\ t \geq 0,$$

имеет непрерывные по Гельдеру траектории порядка $\kappa > 1/2$. Более того,

$$[x](t) = \int_0^t g^2(s,x(s))ds.$$

Следуя [51], для непрерывных процессов $X(t)$, $Y(t)$ с конечной квадратической вариацией определим прямой, обратный и симметрический стохастические интегралы:

$$\int_0^t Y(s)d^- X(s) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^t Y(s) \frac{X(s+\varepsilon) - X(s)}{\varepsilon} ds,$$

$$\int_0^t Y(s)d^+ X(s) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^t Y(s) \frac{X(s) - X((s-\varepsilon) \vee 0)}{\varepsilon} ds,$$

$$\int_0^t Y(s)d^\circ X(s) = \frac{1}{2} \int_0^t Y(s)d^- X(s) + \frac{1}{2} \int_0^t Y(s)d^+ X(s).$$

Квадратической ковариацией процессов X, Y называется процесс

$$[X,Y](t) = \int_0^t Y(s)d^+ X(s) - \int_0^t Y(s)d^- X(s).$$

Прямой и симметрический стохастические интегралы $\int\limits_0^t Y(s)d^- X(s)$, $\int\limits_0^t Y(s)d^\circ X(s)$ являются расширением интегралов Ито и Стратоновича соответственно на класс непрерывных процессов с конечной квадратической вариацией.

Пусть функция $F(t,x)$ имеет непрерывные частные производные F'_t, F'_x, F''_{x^2}. Тогда процесс $y(t) = F(t,x(t))$ является непрерывным, имеет конечную квадратическую вариацию. Так как стохастические дифференциалы процессов $y(t)$, $W(t)$ имеют вид

$$dy(t) = \left(F'_t(t,x(t)) + F'_x(t,x(t))f(t,x(t)) + \frac{1}{2}F''_{x^2}(t,x(t))g^2(t,x(t))\right)dt+$$

$$+F'_x(t,x(t))g(t,x(t))dW(t) + F'_x(t,x(t))\sigma(t,x(t))dB(t),$$

$$dW(t) = 0 \cdot dt + 1 \cdot dW(t) + 0 \cdot dB(t),$$

то квадратическая ковариация процессов $y(t)$ и $W(t)$ равна

$$[y, W](t) = \int_0^t F'_x(s, x(s))g(s,x(s))ds.$$

С другой стороны, в силу определения прямого и симметрического стохастических интегралов имеем

$$\int_0^t F(s,x(s)) \circ dW(s) = \int_0^t F(s,x(s))dW(s) + \frac{1}{2}[F(\cdot, x(\cdot)), W(\cdot)](t) =$$

$$= \int_0^t F(s,x(s))dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t F'_x(s, x(s))g(s,x(s))ds.$$

Полагая $F(t,x) = g(t,x)$, заключаем, что процесс $x(t)$ является решением уравнения (4.1) тогда и только тогда, когда процесс $x(t)$ является решением уравнения Стратоновича (4.22).

Замечание 4.3. Легко видеть, что проведенные рассуждения также сохраняют силу в случае многомерного уравнения (4.1) и соответствующего уравнения Стратоновича.

Пример 4.2. Для уравнения

$$dx(t) = x^3(t)dt + x^2(t)dW(t) + x^2(t)dB(t),\ x(0) = x_0,$$

соответствующее уравнение Стратоновича имеет вид

$$dx(t) = x^2(t) \circ dW(t) + x^2(t)dB(t).$$

Последнее уравнение имеет решение

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(W(t) + B(t))},$$

которое является решением и исходного уравнения.

4.2 Дифференциальные уравнения для математических ожиданий и плотностей распределений решений

В этом параграфе рассматриваем автономное уравнение (4.1), т.е.

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0.$$

Будем предполагать, что выполнены условия, обеспечивающие существование и единственность решений автономного уравнения (4.1).

Через $C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ обозначим множество всех непрерывно дифференцируемых функций $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, имеющих линейный порядок роста. В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты $\tilde{f} = f - \frac{1}{2}g'_x g$, g_j, σ_j $(j = 1,\dots,d)$ принадлежат множеству $C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$.

Рассмотрим автономное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$dz(t) = h(z(t))dt, \ t \in \mathbb{R},$$

где $h = \mathrm{col}(h^1,\dots,h^d) \in C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, и обозначим через

$$z^y(t) = \alpha_h(y,t) = \mathrm{col}(\alpha^1_h(y,t),\dots,\alpha^d_h(y,t))$$

решение (единственное) данного уравнения с начальным условием $\alpha_h(y,0){=}y$.

Предложение 4.4. *Функция $\alpha_h(y,t)$ удовлетворяет системе уравнений*

$$\frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{d} h^i(y)\frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial y_i}, \ j = 1,\dots,d, \ t \in \mathbb{R}, \ y \in \mathbb{R}^d,$$

и начальному условию $\alpha_h(y,0) = y$.

Доказательство. Возьмем произвольные $x \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \{1,\dots,d\}$. Тогда

$$\frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial t} = \lim_{r\to 0}\frac{\alpha^j_h(y,t+r) - \alpha^j_h(y,t)}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{\alpha^j_h(\alpha_h(y,r),t) - \alpha^j_h(y,t)}{r} =$$

$$= \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial y_i}\lim_{r\to 0}\frac{\alpha^i_h(y,r) - x_i}{r} = \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial y_i}\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}\int_0^r h^i(\alpha_h(y,s))ds =$$

$$= \sum_{i=1}^{d} h^i(y)\frac{\partial \alpha^j_h(y,t)}{\partial y_i},$$

что и требовалось доказать.

Из предложения 4.4 вытекает, что $z^y(t) = T_h(t)y$, где $T_h(t){:=}e^{tM_h}$ – C_0-полугруппа на $C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, порожденная дифференциальным оператором $M_h : C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d) \to C(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ действующим по правилу

$$(M_h w)(y) = \mathrm{col}\left(\sum_{i=1}^{d} h^i(y)\frac{\partial w^1}{\partial y_i}, \ldots, \sum_{i=1}^{d} h^i(y)\frac{\partial w^d}{\partial y_i}\right),$$

где $w = \mathrm{col}(w^1,\ldots,w^d) \in C^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, $y \in \mathbb{R}^d$.

Определение 4.2. Будем говорить, что семейство отображений $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$ порождает коммутирующие потоки, если для любых α, $\beta \in A$ операторы $T_{h_\alpha}(t_1)$, $T_{h_\beta}(t_2)$ перестановочные для любых t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$.

Замечание 4.4. Если $d = 1$, то легко видеть, что семейство $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A} \subseteq C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ порождает коммутирующие потоки тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in A$ найдется постоянная γ_α такая, что $h_\alpha(x) = \gamma_\alpha\varphi(x)$, где $\varphi \in C^1_{\mathrm{Lin}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Обозначим $\Gamma = \{\tilde{f}\} \cup \{g_j | j = 1,\ldots,d\} \cup \{b_j | j = 1,\ldots,d\}$. Через $x^y(t)$ будем обозначать решение автономного уравнения (4.1) с начальным условием $x(0) = y \in \mathbb{R}^d$.

Определим функцию $F : \mathbb{R}^{3d+1} \to \mathbb{R}^d$ следующим образом:

$$F(y,t,s_1,\ldots,s_d,\tau_1,\ldots,\tau_d) = (T_{\tilde{f}}(t)T_{g_1}(s_1)\ldots T_{g_d}(s_d)T_{\sigma_1}(\tau_1)\ldots T_{\sigma_d}(\tau_d))(y),$$

где $y \in \mathbb{R}^d$, $t \in \mathbb{R}$, $s_j, \tau_j \in \mathbb{R}$ ($j = 1,\ldots,d$).

Предложение 4.5. *Если семейство Γ порождает коммутирующие потоки, то*

$$x^y(t) = F(y,t,W^1(t),\ldots,W^d(t),B^1(t),\ldots,B^d(t))$$

п.н. для любого $t \in \mathbb{R}^+$.

Доказательство. Выберем произвольные $y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ и зафиксируем их. Применяя формулу Ито к процессу $x^y(t)$, используя при этом условие коммутирования операторов $T_\alpha(t_1)$, $T_\beta(t_2)$, α, $\beta \in \Gamma$, t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$, получим соотношения

$$F(y,t,W^1(t),\ldots,W^d(t),B^1(t),\ldots,B^d(t)) =$$

$$= F(y,0,\dots,0) + \int_0^t \left(\frac{\partial F(y,u,W(u),B(u))}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 F(y,u,W(u),B(u))}{\partial s_j^2} \right) du +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F(y,u,W(u),B(u))}{\partial s_j} dW^j(u) + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial F(y,u,W(u),B(u))}{\partial \tau_j} dB^j(u) =$$

$$= y + \int_0^t f(F(y,u,W(u),B(u)))du + \sum_{j=1}^{d} \int_0^t g_j(F(y,u,W(u),B(u)))dW^j(u) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} \int_0^t \sigma_j(F(y,u,W(u),B(u)))dB^j(u).$$

Непрерывность по Гельдеру траекторий процесса $x^y(t)$ вытекает из непрерывной дифференцируемости функции F и непрерывности по Гельдеру с любым показателем $\alpha < H$ траекторий процесса $B(t)$, а также непрерывности по Гельдеру с любым показателем $\alpha < 1/2$ траекторий процесса $W(t)$. Предложение доказано.

Теорема 4.3. *Пусть семейство* Γ *порождает коммутирующие потоки, функция* $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *вместе со своими частными производными до второго порядка включительно непрерывна и имеет полиномиальный порядок роста. Тогда функция* $u_h(y,t) = E(h(x^y(t)))$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{d} f_j(y) \frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{d} g_{ik}(y) g_{jk}(y) \frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y_i \partial y_j} +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{d} H t^{2H-1} \sigma_{ik}(y) \left(\sigma_{jk}(y) \frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial \sigma_{jk}(y)}{\partial y_i} \frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y_j} \right),\ t > 0,\ y \in \mathbb{R}^d,$$

и начальному условию $u_h(y,0) = h(y),\ y \in \mathbb{R}^d$.

Доказательство. Определим функцию $G_d : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ следующим образом:

$$G_d(y,\tau_d) = h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)),\ y \in \mathbb{R}^d,\ \tau_d \in \mathbb{R}.$$

Применяя формулу Ито к процессу $G_d(y,B^d(t))$, $t \in \mathbb{R}^+$, получим соотношение

$$G_d(y,B^d(t)) = G_d(y,0) + \int_0^t \frac{\partial G_d(y,B^d(s))}{\partial \tau_d} \diamond dB^d(s) + \int_0^t H s^{2H-1} \frac{\partial^2 G_d(y,B^d(s))}{\partial \tau_d^2} ds, \tag{4.23}$$

где стохастический интеграл в правой части соотношения (4.23) – интеграл Вика-Ито-Скорохода [18].

Используя предложение 4.4, выразим частную производную $\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial\tau_d^2}$ через частные производные $\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i y_j}$, $\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i}$. Получаем

$$\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial\tau_d}=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j}\frac{\partial\alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial\tau_d}=\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j}\sigma^i_d(y)\frac{\partial\alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial\tau_d^2}=\sum_{i,j,k,l=1}^{d}\frac{\partial^2 h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j\partial y_k}\sigma^i_d(y)\sigma^l_d(y)\frac{\partial\alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i}\frac{\partial\alpha^k_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_l}+$$

$$+\sum_{i,j,k=1}^{d}\frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j}\sigma^i_d(y)\left(\frac{\partial\sigma^k_d(y)}{\partial y_i}\frac{\partial\alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_k}+\sigma^k_d(y)\frac{\partial^2\alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_k y_i}\right),$$

$$\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i}=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j}\frac{\partial\alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i},$$

$$\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i y_l}=\sum_{j,k=1}^{d}\frac{\partial^2 h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j\partial y_k}\frac{\partial\alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i}\frac{\partial\alpha^k_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_l}+$$

$$+\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial h(T_{\sigma_d}(\tau_d)(y))}{\partial y_j}\frac{\partial^2\alpha^j_{\sigma_d}(y,\tau_d)}{\partial y_i\partial y_l}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial\tau_d^2}=\sum_{i,l=1}^{d}\frac{\partial^2 G_d(y,\tau_d)}{\partial y_i y_l}\sigma^i_d(x)\sigma^l_d(y)+\sum_{i,k=1}^{d}\frac{\partial G_d(y,\tau_d)}{\partial y_k}\sigma^i_d(y)\frac{\partial\sigma^k_d(y)}{\partial y_i}=$$

$$=(M^2_{\sigma_d}G_d(\cdot,\tau_d))(y). \tag{4.24}$$

Обозначим $\psi_d(y,t)=EG_d(y,B^d(t))$. Тогда из соотношений (4.23), (4.24), теоремы Фубини и правила Лейбница вытекает равенство

$$\psi_d(y,t)=\psi_d(y,0)+\int_0^t Hs^{2H-1}(M^2_{\sigma_d}\psi_d(\cdot,s))(y)ds. \tag{4.25}$$

Из соотношения (4.25) вытекает справедливость соотношения

$$\frac{\partial\psi_d(\cdot,t)}{\partial t}=Ht^{2H-1}M^2_{\sigma_d}\psi_d(\cdot,t). \tag{4.26}$$

Определим функцию $G_{d-1} : \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ равенством

$$G_{d-1}(y,\tau_{d-1},t) = \psi_d(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y),t),\ y \in \mathbb{R}^d,\ \tau_{d-1} \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+.$$

Применяя формулу Ито к процессу $G_{d-1}(y,B^{d-1}(t),t)$, получим соотношение

$$G_{d-1}(y,B^{d-1}(t),t) = G_{d-1}(y,0,0) + \int_0^t \frac{\partial G_{d-1}(y,B^{d-1}(s),s)}{\partial \tau_{d-1}} \diamond dB^{d-1}(s) +$$
$$+ \int_0^t \left(\frac{\partial G_{d-1}(y,B^{d-1}(s),s)}{\partial \tau_d} + Hs^{2H-1} \frac{\partial^2 G_{d-1}(y,B^{d-1}(s),s)}{\partial \tau_{d-1}^2} \right) ds. \qquad (4.27)$$

Отметим, что для каждых $y \in \mathbb{R}^d$, $\tau_{d-1} \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}^+$ справедливо равенство

$$\frac{\partial^2 G_{d-1}(y,\tau_{d-1},s)}{\partial \tau_{d-1}^2} = (M^2_{\sigma_{d-1}} G_{d-1}(\cdot,\tau_{d-1},s))(y). \qquad (4.28)$$

Действительно, в силу правила Лейбница достаточно проверить, что для любых $y \in \mathbb{R}^d$, $\tau_{d-1} \in \mathbb{R}$, $\tau_d \in \mathbb{R}$ справедливо соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau_{d-1}^2} h(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1}) T_{\sigma_d}(\tau_d)(x)) = (M^2_{\sigma_{d-1}} h(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1}) T_{\sigma_d}(\tau_d)(\cdot))(y). \qquad (4.29)$$

Для каждого фиксированного $\tau_d \in \mathbb{R}$ определим функцию $\omega_{\tau_d} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ такую, что

$$\omega_{\tau_d}(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y)) = h(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1}) T_{\sigma_d}(\tau_d)(y)).$$

Теперь применяя рассуждения, которыми была доказана формула (4.24), заменяя при этом функцию $G_d(y,\tau_d)$ функцией $\omega_{\tau_d}(T_{\sigma_{d-1}}(\tau_{d-1})(y))$, устанавливаем справедливость соотношения (4.29), а вместе с ним и равенства (4.28).

Обозначим $\psi_{d-1}(y,t) = EG_{d-1}(y,B^{d-1}(t),t)$, тогда с помощью соотношений (4.26), (4.27), (4.28), теоремы Фубини и правила Лейбница, получаем равенство

$$\psi_{d-1}(y,t) = \psi_{d-1}(y,0) + \int_0^t ((Hs^{2H-1} M^2_{\sigma_d} + Hs^{2H-1} M^2_{\sigma_{d-1}}) \psi_{d-1})(\cdot,s)(y) ds. \qquad (4.30)$$

Из соотношения (4.30) получаем, что

$$\frac{\partial \psi_{d-1}(\cdot,t)}{\partial t} = (Ht^{2H-1} M^2_{\sigma_d} + Ht^{2H-1} M^2_{\sigma_{d-1}}) \psi_{d-1}(\cdot,t). \qquad (4.31)$$

Далее рассматриваем функцию $G_{d-2}(y,\tau_{d-2},t) = \psi_{d-1}(T_{b_{d-2}}(\tau_{d-2})(y),t)$, применяем формулу Ито к процессу $G_{d-2}(y,B^{d-2}(t),t)$, получим уравнение, аналогичное уравнению (4.31) для функции $\psi_{d-2}(y,t) = EG_{d-2}(y,\tau_{d-2},t)$, и так далее. Тем самым прийдем к следующему уравнению для функции $u_h(y,t) = Eh(F(y,t,W^1(t),\ldots,W^d(t),B^1(t),\ldots,B^d(t)))$:

$$\frac{\partial u_h(\cdot,t)}{\partial t} = \left(M_{\tilde{f}} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} M_{g_j}^2 + \sum_{j=1}^{d} Ht^{2H-1}M_{\sigma_j}^2\right)u_h(\cdot,t).$$

Теорема доказана.

Пример 4.3. Покажем существенность условия коммутирования потоков, порожденных функциями из семейства Г, в теореме 4.3. Рассмотрим линейное стохастическое уравнение

$$dx(t) = x(t)dt + dB(t) \tag{4.32}$$

с начальным условием

$$x(0) = y \in \mathbb{R}, \tag{4.33}$$

где $B(t)$ – одномерное дробное броуновское движение с показателем Харста $H \in (1/2,1)$. Решение $x^y(t)$ задачи Коши (4.32), (4.33) задается формулой [55]

$$x^y(t) = ye^t + \int_0^t e^{t-s}dB(s).$$

Положим $h(y) = y^2$, тогда

$$u_h(y,t) = y^2e^{2t} + e^{2t}2H(2H-1)\int_0^t e^{-s}\int_0^s e^{-v}(s-v)^{2H-2}dvds =$$

$$= y^2e^{2t} + e^{2t}H(2H-1)\int_0^t e^{-u}u^{2H-2}du - H(2H-1)\int_0^t e^{u}u^{2H-2}du =$$

$$= y^2e^{2t} + H\int_0^t (e^{2t-s} + e^s)s^{2H-1}ds.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial t} = 2y^2e^{2t} + 2He^tt^{2H-1} + 2He^{2t}\int_0^t e^{-s}s^{2H-1}ds,$$

$$y\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y} + Ht^{2H-1}\frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y^2} = 2y^2e^{2t} + 2e^{2t}Ht^{2H-1}.$$

Так как

$$\int_0^t e^{-s}s^{2H-1}ds = -e^{-t}t^{2H-1} + (2H-1)\int_0^t e^{-s}s^{2H-2}ds < -e^{-t}t^{2H-1} + t^{2H-1}$$

для любых $t > 0$, то функция $u_h(y,t)$ не удовлетворяет уравнению из теоремы 4.3 ни при каких $t > 0$, $y \in \mathbb{R}$. Отметим, что операторы $T_f(t_1)(y) = e^{t_1}y$, $T_\sigma(t_2)(y) = t_2 + y$ не являются перестановочными.

Пример 4.4. Рассмотрим линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$$dx(t) = ax(t)dt + bx(t)dB(t) + cx(t)dW(t), \tag{4.34}$$

с начальным условием

$$x(0) = y \in \mathbb{R}. \tag{4.35}$$

Пусть $h(y) = y^r$, $r \geq 2$, $u_h(y,t) = Eh(x^y(t))$, где $x^y(t)$ – решение задачи Коши (4.34), (4.35). Легко видеть, что условия теоремы 4.3 выполняются, и функция $u_h(y,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u_h(y,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_h(y,t)}{\partial y}y(a+b^2Ht^{2H-1}) + \frac{\partial^2 u_h(y,t)}{\partial y^2}y^2(c^2/2+b^2Ht^{2H-1}),\ t>0,\ y\in\mathbb{R},$$

с начальным условием

$$u_h(y,0) = y^r.$$

Теорема 4.4. *Пусть семейство* Γ *порождает коммутирующие потоки, решение* $x^y(t)$ *автономного уравнения* (4.1) *с начальным условием* $x(0) = y$ *имеет плотность распределения* $p(t,y,z)$, *функции* $f(z)$, $g(z)$, $\sigma(z)$, $p(t,y,z)$ *являются достаточно гладкими и ограниченными. Тогда функция* $p(t,y,z)$ *удовлетворяет равенству*

$$\frac{\partial p(t,y,z)}{\partial t} = -\sum_{j=1}^d \frac{\partial(f_j(z)p(t,y,z))}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^d \frac{\partial^2(g_{ik}(z)g_{jk}(z)p(t,y,z))}{\partial z_i \partial z_j} +$$
$$+ \sum_{i,j,k=1}^d Ht^{2H-1}\left(\frac{\partial^2(\sigma_{ik}(z)\sigma_{jk}(z)p(t,y,z))}{\partial z_i\partial z_j} - \frac{\partial(\sigma_{ik}(z)\frac{\partial\sigma_{jk}(z)}{\partial z_i}p(t,y,z))}{\partial z_j}\right),$$
$$t > 0,\ y,z \in \mathbb{R}^d.$$

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $h(z)$ с компактным носителем, имеющую ограниченные и непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Обозначим через A_t оператор, действующий по правилу

$$(A_t h)(z) = \sum_{j=1}^{d} f_j(z)\frac{\partial h(z)}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{d} g_{ik}(z)g_{jk}(z)\frac{\partial^2 h(z)}{\partial z_i \partial z_j} +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{d} Ht^{2H-1}\sigma_{ik}(z)\left(\sigma_{jk}(z)\frac{\partial^2 h(z)}{\partial z_i \partial z_j} + \frac{\partial \sigma_{jk}(z)}{\partial z_i}\frac{\partial h(z)}{\partial z_j}\right),\ t > 0,\ z \in \mathbb{R}^d.$$

Используя соотношение

$$u_h(y,t) = \int_{\mathbb{R}^d} h(z)p(t,y,z)dz,$$

теорему 4.3 и правило Лейбница, получаем равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(h(z)\frac{\partial p(t,y,z)}{\partial t} - p(t,y,z)(A_t h)(z)\right)dz = 0. \tag{4.36}$$

Из соотношения (4.36) вытекает равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left(h(z)\frac{\partial p(t,y,z)}{\partial t} - h(z)(A_t^* p(t,y,\cdot))(z)\right)dz = 0, \tag{4.37}$$

где A_t^* – сопряженный оператор к оператору A_t. Применяя формулу интегрирования по частям, легко видеть, что

$$(A_t^*\varphi)(z) = -\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial(f_j(z)\varphi(z))}{\partial z_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{d}\frac{\partial^2(g_{ik}(z)g_{jk}(z)\varphi(z))}{\partial y_i \partial y_j} +$$

$$+ \sum_{i,j,k=1}^{d} Ht^{2H-1}\left(\frac{\partial^2(\sigma_{ik}(z)\sigma_{jk}(z)\varphi(z))}{\partial z_i \partial z_j} - \frac{\partial(\sigma_{ik}(z)\frac{\partial \sigma_{jk}(z)}{\partial z_i}\varphi(z))}{\partial z_j}\right). \tag{4.38}$$

Теперь из соотношений (4.37), (4.38) и плотности множества функций с компактным носителем, имеющих непрерывные органиченные производные всех порядков, в $L_1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ вытекает требуемое утверждение. Теорема доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе было проведено исследование асимптотического поведения решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновским движениями в конечномерных, а также сепарабельных гильбертовых пространствах и получены следующие основные результаты:

1. Доказана теорема 2.3, дающая достаточное условие асимптотической устойчивости по вероятности слабого нулевого решения неавтономной системы (2.5) с разрывными коэффициентами, исходя из равномерной экспоненциальной устойчивости слабого нулевого решения соответствующей однородной системы (2.6). Приведен пример, иллюстрирующий применение доказанной теоремы. Указанный результат был получен в работе 1–А и изложен главе 2.
2. Доказана теорема 2.4 о притяжении к нулю слабых решений нелинейных стохастических дифференциально-функциональных уравнений (2.21) в гильбертовых пространствах с коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица. Приведен пример, иллюстрирующий применение доказанной теоремы. Данный результат был получен в работе 2–А и изложен главе 2.
3. Доказана теорема 3.3 о логарифмической непрерывной зависимости в среднем от начальных условий и правых частей решений стохастических дифференциальных уравнений (3.1), (3.10) со сносом и дробным броуновским движением с различными индексами Харста, большими $1/3$. Указанный результат был получен в работе 3–А и изложен главе 3.
4. Доказана теорема 3.4, в которой получено асимптотическое разложение (3.57) в окрестности нуля для математического ожидания от функционала от решения уравнения (3.1) со сносом и дробным броуновским движением с различными индексами Харста, большими $1/3$. Получено уравнение (3.100), являющееся обобщением обратного уравнения Колмогорова для решения уравнения (3.1) с указанным дробным броуновским движением в коммутативном случае. Приведенные результаты, а также другие связанные с ними результаты, изложенные в главе 3, были получены в работах 4–А, 5–А.

5. Получены методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа (4.1), основанные на приведении данного уравнения к простейшему или линейному неоднородному (теорема 4.2), или к уравнению Стратоновича (раздел 4.1.3). Указанные результаты были получены в работе [6–А] и изложены в главе 4.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Васьковский, М.М.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений с запаздыванием со стандартным и дробным броуновскими движениями / М.М. Васьковский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер фіз.-мат. навук. — 2015. — №. 1. — С. 22–34.
2. *Васьковский, М.М.* Существование слабых решений стохастических эволюционных функциональных уравнений параболического типа с измеримыми локально ограниченными коэффициентами / М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 8. — С. 1080–1095.
3. *Васьковский, М.М.* Устойчивость и притяжение решений нелинейных стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 2. — С. 160–173.
4. *Ватанабэ, С.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С. Ватанабэ, Н. Икэда. — М. : Наука, 1986. — 448 с.
5. *Гихман, И.И.* Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. — М. : Наука, 1977. — 568 с.
6. *Колмогоров, А.Н.* Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве / А.Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. — 1940. — Т. 26, № 2. — С. 115–118.
7. *Леваков, А.А.* Исследование устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений с помощью знакопостоянных функций Ляпунова / А.А. Леваков // Дифф. уравн. — 2011. — Т. 47, № 9. — С. 1258–1267.
8. *Леваков, А.А.* Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1011–1019.
9. *Леваков, А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения / А.А. Леваков. — Минск : БГУ, 2009. — 231 с.
10. *Леваков, А.А.* Стохастические дифференциальные уравнения и включения / А.А. Леваков, М.М. Васьковский. — Минск : БГУ, 2019. — 495 с.
11. *Леваков, А.А.* Существование решений стохастических дифференциальных включений со стандартным и дробным броуновскими движениями / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. —

2015. — Т. 51, № 8. — С. 997–1003.
12. *Леваков, А.А.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями и с разрывными коэффициентами / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 2. — С. 187–200.
13. *Леваков, А.А.* Существование слабых решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным и дробным броуновскими движениями, с разрывными коэффициентами и с частично вырожденным оператором диффузии / А.А. Леваков, М.М. Васьковский // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 8. — С. 1060–1076.
14. *Оксендаль, Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / Б. Оксендаль. — М. : Мир, 000 «Издательство АСТ», 2003. — 408 с.
15. *Филиппов, А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А.Ф. Филиппов. — М. : Наука, 1985. — 223 с.
16. *Царьков, Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений/ Е.Ф. Царьков. — Рига : Зинатне, 1989. — 421 с.
17. *Baudoin, F.* Operators associated with a stochastic differential equation driven by fractional Brownian motions / F. Baudoin, L. Coutin // Stochastic Processes and their Applications — 2007. — Vol. 117, № 5. — P. 550–574.
18. Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications / F. Biagini [et al.]. — London : Springer-Verlag, 2008. — 330 p.
19. *Cheridito, P.* Regularizing fractional Brownian motion with a view towards stock price modeling : a dissertation ... doctor of mathematics / P. Cheridito. — Zürich, 2001. — 121 p.
20. *Cheridito, P.* Stochastic integral of divergence type with respect to fractional Brownian motion with Hurst parameter h in (0, 1/2) / P. Cheridito, D. Nualart // Annales de I Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2005. — Vol. 41, № 6. — P. 1049–1081.
21. *Coppel, W.A.* Dichotomies in Stability Theory / W.A. Coppel. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1978. — 102 p. — (Lecture Notes in Mathematics ; № 629).
22. *Coutin, L.* Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions / L. Coutin, Z. Qian // Probability Theory Related Fields. — 2002. — Vol. 122, № 1. — P. 108–140.
23. *Filipovic, D.* Consistency problems for Heath-Jarrow-Morton interest rate

models / D. Filipovic. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2001. — 138 p.
24. *Gard, T.C.* Introduction to stochastic differential equations / T.C. Gard. — New York ; Basel : Marcel Dekker Inc., 1988. — 234 p.
25. *Friz, P.* A Course on Rough Paths with an introduction to regularity structures / P. Friz, M. Hairer. — Cham : Springer International Publishing AG, 2014. — 262 p.
26. Large deviations and asymptotic methods in finance / P. Friz [et al.]. — Cham : Springer International Publishing AG, 2015. — 590 p.
27. *Friz, P.* Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications / P. Friz, N. Victoir. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 670 p.
28. The Jain-Monrad criterion for rough paths and applications to random Fourier series and non-Markovian Hörmander theory / P. Friz [et al.] // The Annals of Probability. — 2016. — Vol. 44, № 1. — P. 684–738.
29. *Garrido-Atienza, M.J.* Asymptotical stability of differential equations driven by Hölder-continuous paths / M.J. Garrido-Atienza, A. Neuenkirch, B. Schmalfuss // Journal of Dynamics and Differential Equations. — 2017. — Vol. 30, № 1. — P. 359–377.
30. *Gubinelli, M.* Controlling rough paths / M. Gubinelli // Journal of Functional Analysis. — 2004. — Vol. 216, № 1. — P. 86–140.
31. *Gubinelli, M.* Ramification of rough paths / M. Gubinelli // Journal of Differential Equations. — 2010. — Vol. 248, № 4. — P. 693–721.
32. *Guerra, J.* Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and standard Brownian motion / J. Guerra, D. Nualart // Stochastic Analysis and Applications. — 2008. — Vol. 26, № 5. — P. 1053–1075.
33. *Hairer, M.* Geometric versus non-geometric rough paths / M. Hairer, D. Kelly // Annales de I Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2015. — Vol. 51, № 1. — P. 207–251.
34. *Ichikawa, A.* Stability of Semilinear Stochastic Evolution Equations / A. Ichikawa // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1982. — Vol. 90, № 1. — P. 12–44.
35. *Ilchmann, A.* Sufficient conditions for stability of linear time-varying systems / A. Ilchmann, D.H. Owens, D. Prätzel-Wolters // Systems & Control Letters. — 1987. — Vol. 9, № 2. — P. 157–163.
36. *Khasminskii, R.* Stochastic stability of differential equations / R. Khasminskii. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2012. — 342 p.

37. *Kleptsyna, M.L.* General approach to filtering with fractional Brownian noises application to linear systems / M. Kleptsyna, A. Le Breton, M.-C. Roubaud // Stochastics and Stochastic Reports. — 2000. — Vol. 71, № 1–2. — P. 119–140.
38. *Kubilius, K.* The existence and uniqueness of the solution of an integral equation driven by a p-semimartingale of special type / K. Kubilius // Stochastic Processes and their Appl. — 2002. — Vol. 98, № 2. — P. 289–315.
39. *Liu, K.* On stability for a class of semilinear stochastic evolution equations / K. Liu // Stochastic Processes and their Appl. — 1997. — Vol. 70, № 2. — P. 219–241.
40. *Liu, K.* Stability of infinite dimensional stochastic differential equations with applications / K. Liu. — New York : Chapman and Hall/CRC, 2005. — 312 p.
41. *Lyons, T.* Differential equations driven by rough signals / T. Lyons // Revista Matemática Iberoamericana. — 1998. — Vol. 14, № 2. — P. 215–310.
42. *Mandelbrot, B.B.* Fractional Brownian Motions, fractional noises and applications / B.B. Mandelbrot, J.W. van Ness // SIAM Review. — 1968. — Vol. 10, № 4. — P. 422–437.
43. *Mishura, Y.S.* Existence and uniqueness of the solution of stochastic differential equation involving Wiener process and fractional Brownian motion with Hurst index H > 1/2 / Y.S. Mishura, G.M. Shevchenko // Communications in Statistics – Theory and Methods. — 2011. — Vol. 40, № 19–20. — P. 3492–3508.
44. *Mishura, Y.S.* Stochastic calculus for fractional Brownian motion and related processes / Y.S. Mishura. — Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2008. — 398 p.
45. Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations / A. Neuenkirch [et al.] // Annales de I Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2009. — Vol. 45, № 1. — P. 157–174.
46. *Nualart, D.* Differential equations driven by fractial Brownian motion / D. Nualart, A. Răsçanu // Collectanea Mathematica. — 2002. — Vol. 53, № 1. — P. 55–81.
47. *Pazy, A.* Semigroups of linear operators and applications to Partial Differential Equations / A. Pazy. — New York : Springer-Verlag, 1983. — 282 p.
48. *Prato, G.D.* A note on stochastic convolution / G. Da Prato, J. Zabczyk // Stochastic Analysis and Appl. — 1992. — Vol. 10, № 2. — P. 143–153.
49. *Prato, G.D.* Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. — Cambridge : Cambridge university press, 1992. — 449 p.

50. *Rogers, L.C.G*. Diffusions, Markov Processes, and Martingales: Volume 1, Foundations / L.C.G. Rogers, D. Williams. — Cambridge : Cambridge University Press, 2000. — 410 p.
51. *Russo F.* Stochastic calculus with respect to continuous finite quadratic variation processes / F. Russo, P. Vallois // Stochastics and Stochastic Reports. — 2000. – Vol. 70, № 1-2. — P. 1–40.
52. *Shevchenko, G.M.* Mixed stochastic delay differential equations / G.M. Shevchenko // Theory of Probability and Mathematical Statistics. — 2014. — № 89. – P. 181–195.
53. *Taniguchi, T.* Almost sure exponential stability for stochastic partial functional differential equations / T. Taniguchi // Stochastic Analysis and Appl. — 1998. — Vol. 16, № 5. — P. 965–975.
54. *Taniguchi, T.* Existence, uniqueness, and asymptotic behavior of mild solutions to stochastic functional differential equations in Hilbert spaces / T. Taniguchi, K. Liu, A. Truman // Journal of Differential Equations. — 2002. — Vol. 181, № 1. — P. 72–91.
55. *Vyoral, M.* Kolmogorov equation and large-time behaviour for fractional Brownian motion driven linear SDE's / M. Vyoral. // Applications of Mathematics. — 2005. — Vol. 50, № 1. — P. 63–81.
56. *Young, L.C.* An inequality of the Hölder type connected with Stieltjes integration / L.C. Young // Acta Math. — 1936. — Vol. 67, № 1. — P. 251–282.
57. *Zähle, M.* Integration with respect to fractal functions and stochastic calculus. I / M. Zähle // Probability Theory and Related Fields. — 1998. — Vol. 111, № 3. — P. 333–374.

Список публикаций автора работы

Статьи в научных журналах (зарубежных и из перечня ВАК)

1–А. *Васьковский, М.М.* Исследование устойчивости решений неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами с помощью метода функций Ляпунова / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный, И.В. Качан // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1 : физ., мат., информ. — 2015. — №3. — С. 117–125.

2–А. *Васьковский, М.М.* Устойчивость решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с локально липшициевыми коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 866–880.

3–А. *Качан, И.В.* Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер фіз.-мат. навук. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 193–209.

4–А. *Васьковский, М.М.* Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. — 2018. — Т. 62, № 4. — С. 398–405.

5–А. *Vaskouski, M.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 / M. Vaskouski, I. Kachan // Stochastic Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 36, № 6. — P. 909–931.

6–А. *Васьковский, М.М.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа / Васьковский М.М., Качан И.В. // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 135–149.

Депонированные отчеты

7–А. Асимптотические свойства решений обыкновенных и стохастических дифференциальных уравнений в бесконечномерных пространствах : отчет о НИР (заключительный) / БГУ ; руководитель М.М.Васьковский, исполнители : Я.Б. Задворный, И.В. Качан. — Минск, 2016. — 122 с. — № ГР 20142883.

Статьи в сборниках трудов международных научных конференций

8–А. *Васьковский, М.М.* Аналог формулы Ито для стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие 1/3 / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : материалы XII Междунар. науч.-техн. конф., г. Пенза, Россия, 4–6 декабря 2017 г. / Пензенский гос. ун-т. ; под ред. И. В. Бойкова. — Пенза, 2017. — С. 12–16.

9–А. *Качан, И.В.* Непрерывная зависимость от начальных условий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан, М.М. Васьковский // Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация : материалы Междунар. научн. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения академ. Е.А. Барбашина, Минск, 24-29 сентября 2018 г. / БГУ. — Минск, 2018. — С. 117–118.

Тезисы докладов международных научных конференций

10–А. *Васьковский, М.М.* Теорема об устойчивости по линейному приближению решений стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ-2015) : тез. докл. 8-го междунар. научн. семинара (воркшопа), ОСК «Стайки», 14-19 сент. 2015. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2015. — С. 24.

11–А. *Качан, И.В.* Экспоненциальная устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами / И.В. Качан // Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям : тез. докл. междунар. матем. конф., Минск, 7-10 дек., 2015. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2015. — С. 34.

12–А. *Васьковский, М.М.* Устойчивость стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах / М.М. Васьковский, И.В. Качан // XII Белорусская математическая конференция : тез. докл. междунар. конф., Минск, 5-10 сент. 2016 г. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2016. — С. 14–15.

13–А. *Качан, И.В.* Существование решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями, имеющими различные показатели Харста, большие 1/3 / И.В. Качан // Еругинские чтения–2017 : тез. докл. XVII междунар. научн. конф. по дифф. уравнениям, Минск, 16-20 мая 2017 г. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2017. — С. 48–49.

14–А. *Васьковский, М.М.* Аналог уравнений Колмогорова для математических ожиданий решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Еругинские чтения–2018 : тез. докл. XVIII междунар. научн. конф. по дифф. уравнениям, Гродно, 15-18 мая 2018 г. / Ин-т мат. НАН Беларуси. — Минск, 2018. — С. 85–86.