БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра высшей математики

Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста

Качан Илья Вадимович

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент

Васьковский Максим Михайлович

Минск, 2019

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Введение

Стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t,\omega) = f(t,\omega,X(t,\omega))dt + g(t,\omega,X(t,\omega))dB(t,\omega),$$

где $B(t,\omega)$ — стандартное или дробное броуновское движение.

Интегральный критерий

Траектории процесса $B(t)$ недифференцируемы, поэтому уравнение понимают в интегральном смысле:

$$X(t,\omega) = X(s,\omega) + \int_s^t f(\tau,\omega,X(\tau,\omega))d\tau + \int_s^t g(\tau,\omega,X(\tau,\omega))dB(\tau,\omega).$$

Интегралы по дробному броуновскому движению

- Потраекторные интегралы (Янга, Губинелли).
- Стохастические интегралы (Ито, Стратоновича, θ- и μ-интегралы) для стандартного броуновского движения.
- Интегралы Вика-Ито-Скорохода.

Введение: приложения

Уравнения с дробными броуновскими движениями

Некоторые сферы применения: физика, финансовая математика.

- М. Клепцына, А. Ле Бретон и М.-К. Рубо (2000): описание сигнальных процессов в фильтрационных системах.
- М. Сале (1998), П. Черидито (2001): моделирование движения цен акций и облигаций.

Монографии: Ю.С. Мишура (2008).

Уравнения со стандартным броуновским движением

Некоторые сферы применения: обобщение задач математической физики, фильтрации, нейрофизиологии, генетики популяций, финансовой математики.

Монографии: Дж. Да Прато, Е. Забчик (1992), Б. Оксендаль (2003).

Введение: теория грубых траекторий

Одномерное ДУ $dy_t = f(y_t)dx_t$, управляемое $x_t \in C^{1-var}$

$$y_t = y_s + \int_s^t f(y_\tau)dx_\tau \Rightarrow y_t = y_s + \sum_{n=1}^{\infty} (V_f^n f)(y_s) \int_{s<t_1<\ldots<t_n<t} dx_{t_1} \ldots dx_{t_n},$$

где $(V_f g)(x) = f(x)g'(x)$. Таким образом, можно положить по определению

$$\int_s^t f(y_\tau)dx_\tau := \sum_{n=1}^{\infty} (V_f^n f)(y_s) \int_{s<t_1<\ldots<t_n<t} dx_{t_1} \ldots dx_{t_n}.$$

и поставить в соответствие $x \in C^{1-var} \mapsto \mathcal{J}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta^k} dx^{\otimes k}$.

Многомерное ДУ $dy_t = f(y_t)dx_t$, управляемое $x_t \in C^{p-var}$

Теорема Лайонса (1998). $x \in C^{p-var}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \Rightarrow \mathcal{J}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{[p]} \int_{\Delta^k} dx^{\otimes k}$, $\mathcal{J}(x) \in \mathbb{T}^{[p]}(\mathbb{R}^d) := \otimes_{k=0}^{[p]} (\mathbb{R}^d)^{\otimes k}$.

Введение: теория грубых траекторий

Процесс второго порядка

Пусть W — конечномерное БП над $\mathbb{R}$. Процессом второго порядка над $X\colon [0,T] \to W$ называется отображение $\mathbb{X}\colon [0,T]^2 \to W^{\otimes 2}$, удовлетворяющее тождеству Чена:

$$\mathbb{X}_{s,t} - \mathbb{X}_{s,u} - \mathbb{X}_{u,t} = (X_u - X_s) \otimes (X_t - X_u), \forall (s,u,t) \in [0,T]^3.$$

Пример. Если отображение $X\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ достаточно регулярное и определен интеграл Янга

$$I_{s,t} = \int_s^t (X_r - X_s) dX_r = \iint_{s<r<\tau<t} dX_r dX_\tau,$$

то $I_{s,t}$ является примером процесса второго порядка над X, а тождество Чена выражает свойство аддитивности кратного интеграла:

$$\int_s^t (X_r - X_s) dX_r = \int_s^u (X_r - X_s) dX_r + \int_u^t (X_r - X_u) dX_r + (X_u - X_s)(X_t - X_u).$$

Глава 2: объект исследования

Обозначения

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, на котором определены независимые одномерные дробные броуновские движения $B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)}$ с индексами Харста $H_1, \dots, H_d \in (1/3, 1)$.
Введем обозначение $B_t = (B_t^{(0)}, \dots, B_t^{(d)})^\top$ для $(d+1)$-мерного дробного броуновского движения, в котором $B_t^{(0)} = t$. Пусть также $H_0 = 1$. Пусть $H_{\min}$ — значение наименьшего из индексов Харста H_i, $i = 0, \dots, d$.
Выберем и зафиксируем некоторое $H \in (1/3, 1/2]$ такое, что $H < H_{\min}$.

Объект исследования

Стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = f(X_t)dB_t, \;\; t \in [0, T], \tag{1}$$

в котором f — $(n \times (d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, d$.

Глава 2: процесс второго порядка

Процесс второго порядка над B_t

$$\mathbb{B}\colon [0,T]^2\times\Omega\to\mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)},\quad \mathbb{B}_{s,t}=\left(\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t}\right)_{i,j=0}^{d}.$$

$$\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t}\overset{L^2}{=}\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\int_{\mathcal{P}}B^{(i)}_{s,r}dB^{(j)}_r,\quad \int_{\mathcal{P}}B^{(i)}_{s,r}dB^{(j)}_r=\sum_{t_k,t_{k+1}\in\mathcal{P}}B^{(i)}_{s,t_k}B^{(j)}_{t_k,t_{k+1}},\quad 1\le i<j\le d,$$

$$\mathbb{B}^{(0,j)}_{s,t}=\int_s^t B^{(j)}_{s,r}dr\overset{\text{п.н.}}{=}\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}\sum_{t_k,t_{k+1}\in\mathcal{P}}B^{(j)}_{s,t_k}(t_{k+1}-t_k),\quad 1\le j\le d,$$

$$\mathbb{B}^{(i,i)}_{s,t}=\frac{1}{2}\left(B^{(i)}_{s,t}\right)^2,\quad 0\le i\le d,$$

$$\mathbb{B}^{(i,j)}_{s,t}=-\mathbb{B}^{(j,i)}_{s,t}+B^{(i)}_{s,t}B^{(j)}_{s,t},\quad 0\le j<i\le d$$

для любой пары $(s,t)\in[0,T]^2$, где $\mathcal{P}=\{s=t_0<t_1<\ldots<t_l=t\}$ — произвольное разбиение отрезка $[s,t]$, $|\mathcal{P}|=\max|t_{k+1}-t_k|$, а все пределы понимаются не зависящими от последовательности разбиений $\mathcal{P}$.

Обозначения $\overset{L^2}{=}$, $\overset{\text{п.н.}}{=}$ применяются для того, чтобы показать, что соответствующие пределы понимаются в смысле $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ и п.н. соответственно.

Глава 2: элементы теории грубых траекторий

Обозначения

Пусть $\alpha \in (1/3, 1/2]$.
V, W — конечномерные банаховы пространства над $\mathbb{R}$.

$$C^\alpha([0,T],W) = \left\{ Z\colon [0;T] \to W \;\middle|\; \|Z\|_\alpha = \sup_{s,t\in[0,T]:s\neq t} \frac{|Z_t - Z_s|_W}{|t-s|^\alpha} < \infty \right\}.$$

Для функций $R\colon [0,T]^2 \to W$ обозначим $\|R\|_{2\alpha} = \sup_{s,t\in[0,T]:s\neq t} \frac{|R_{s,t}|_W}{|t-s|^{2\alpha}}$.
Для функций $Z\colon [0,T] \to W$ обозначим их приращения как $Z_{s,t} = Z_t - Z_s$.
$\mathcal{L}(W,V)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из W в V.

Глава 2: элементы теории грубых траекторий

Производная Губинелли

Говорят, что функция $Y \in C^{\alpha}([0,T], \mathcal{L}(W,V))$ управляется функцией $Z \in$ $\in C^{\alpha}([0,T], W)$, если существует $Y' \in C^{\alpha}([0,T], \mathcal{L}(W, \mathcal{L}(W,V)))$ (называемое производной Губинелли Y), такое, что остаток $R^{Y}_{s,t} = Y_{s,t} - Y'_{s} Z_{s,t}$ удовлетворяет неравенству $\|R^{Y}\|_{2\alpha} < +\infty$. Множество всех (Y, Y') таких, что Y управляется Z, будем обозначать $\mathcal{D}^{2\alpha}_{Z}([0,T], \mathcal{L}(W,V))$.

Пример: $Z_t = t$, $Y_t - Y_s = \frac{dY_t}{dt}(t-s) + o(|t-s|)$. Производная Губинелли $Y' = \frac{dY_t}{dt}$

Множество управляемых функций

В терминах предыдущего определения, множество всех (Y, Y') таких, что Y управляется Z, будем обозначать $\mathcal{D}^{2\alpha}_{Z}([0,T], \mathcal{L}(W,V))$.

Глава 2: потраекторный интеграл Губинелли и определение решения

Потраекторный интеграл Губинелли (П. Фриц, М. Хайрер, 2014)

Пусть $(Y, Y') \in \mathcal{D}_Z^{2\alpha}([0,T], \mathcal{L}(W, V))$. Потраекторным интегралом Губинелли Y по Z называют предел интегральных сумм

$$\int_0^T Y_t\, dZ_t = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{t_i, t_{i+1}\in\mathcal{P}} (Y_{t_i} Z_{t_i, t_{i+1}} + Y'_{t_i} \mathbb{Z}_{t_i, t_{i+1}}),$$

где $|\mathcal{P}| = \max|t_{i+1} - t_i|$ — диаметр разбиения $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l = T\}$, а предел понимается не зависящим от последовательности разбиений $\mathcal{P}$.

Решение основного уравнения

Случайный процесс X_t такой, что $(X, X') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0,T], \mathbb{R}^n)$ п.н., будем называть решением уравнения (1), если он п.н. удовлетворяет равенству

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s) dB_s, \quad t \in [0,T],$$

где интеграл понимается как потраекторный интеграл Губинелли.

Глава 2: существование решений

Пусть U, V — конечномерные банаховы пространства.
Через $C_b^k(V, U)$ будем обозначать пространство функций $\varphi\colon V \to U$, имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка k включительно с нормой $\|\varphi\|_{C_b^k} = \sum_{j=0}^k \|D^j\varphi\|_\infty$, где $\|D^j\varphi\|_\infty = \sup_{x\in V} |D^j\varphi(x)|$.

Теорема 2.1.

Если $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, то для любого $x \in \mathbb{R}^n$ уравнение (1) имеет единственное решение с начальным условием $X_0 = x$, причем $X' = f(X)$, $(f(X), (f(X))') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0, T], \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$ п.н. Более того, если $H_i > H^* \geq 1/2$ для всех $i = 0, \ldots, d$, то справедливо включение $X \in C^{H^*}([0, T], \mathbb{R}^n)$ п.н. и интеграл в определении решения уравнения (1) является потраекторным интегралом Янга.

Глава 2: основные результаты

Теорема 2.2. [5].

Пусть $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Тогда для любых s, $t \in [0, T]$ п.н. справедлива следующая формула замены переменных:

$$g(X_t) = g(X_s) + \int_s^t Dg(X_r)f(X_r)dB_r, \qquad s, t \in [0, T], \tag{2}$$

где X_t — решение уравнения (1).

Наряду с уравнением (1) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\widetilde{X}_t = \widetilde{f}(\widetilde{X}_t)dB_t, \quad t \in [0, T], \tag{3}$$

в котором $\widetilde{f}$ — $(n \times (d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $\widetilde{f}_i \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, d$.

Глава 2: основные результаты

Теорема 2.3. [3].

Пусть $f, \widetilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2} \le 1$. Обозначим через X_t, $\widetilde{X}_t$ решения уравнений (1), (3) с начальными условиями $X_0=\xi$, $\widetilde{X}_0=\widetilde{\xi}$ соответственно. Тогда:
1) почти наверное справедлива следующая оценка

$$\|X-\widetilde{X}\|_H \le C\left(|\xi-\widetilde{\xi}| + \|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\right) \tag{4}$$

для некоторой случайной величины $C = C(H, T, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$. Причем C может быть выбрана не зависящей от T, если $T\in(0,1]$;
2) имеет место следующее неравенство

$$\mathbb{E}\big(\ln\|X-\widetilde{X}\|_H\big) \le C + \ln\big(\mathbb{E}|\xi-\widetilde{\xi}| + \|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\big), \tag{5}$$

где $C = C(H, H_1, \dots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}) \in \mathbb{R}$ — константа, вообще говоря, зависящая от H, $H_1, \dots, H_d$, T, $\|f\|_{C_b^3}$.

Глава 3: объект исследования и обозначения

Объект исследования

Стохастическое дифференциальное уравнение (1).

Обозначения

Через X_t^x будем обозначать решение уравнения (1) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$.

$$\Delta^k[0,t] = \{(t_1, \dots, t_k) \in [0,t]^k : \ 0 \le t_1 < \dots < t_k \le t\} \tag{6}$$

$$\int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} = \int_0^t \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_2} dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} dB_{t_k}^{(i_k)}, \tag{7}$$

$$I_k = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_d^k := \{0, \dots, d\}^k, \tag{8}$$

$$D_f^{(i)} = \sum_{j=1}^n f_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \ i \in \{0, \dots, d\} \qquad D_f^{(I_k)} = D_f^{(i_1)} \dots D_f^{(i_k)}, \tag{9}$$

$$\mathbf{P}_t g(x) = \mathbb{E}\, g(X_t^x), \quad t \ge 0. \tag{10}$$

Глава 3: основной результат

Теорема 3.1. [4, 5].

Пусть $f \in C_b^{N+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g \in C_b^{N+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда для любого фиксированного $H \in (1/3, 1/2]$ такого, что $H < H_{min} = \min\limits_{i=0,\dots d} H_i$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\mathsf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{N} \sum_{I_k \in \{0,\dots,d\}^k} t^{|H_{I_k}|} \cdot (D_f^{(I_k)} g)(x)\, \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)}\right) + O(t^{(N+1)H}), \tag{11}$$

при $t \to 0$, где $|H_{I_k}| = H_{i_1} + H_{i_2} + \ldots + H_{i_k}$ — сумма индексов Харста дробных броуновских движений $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \ldots, B^{(i_k)}$.

Глава 3: пример

Рассмотрим следующее одномерное уравнение:

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/2, 1)$, b, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции класса C_b^4.

Применение теоремы 3.1

Пусть $g \in C_b^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, тогда справедливо асимптотическое разложение следующего вида:

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + t\,b(x)Dg(x) + \frac{1}{2}t^2\left(b(x)Db(x)Dg(x) + b^2(x)D^2g(x)\right) + \\ + \frac{1}{2}t^{2H}\left(\sigma(x)D\sigma(x)Dg(x) + \sigma^2(x)D^2g(x)\right) + O\left(t^{3H}\right).$$

Глава 3: уравнения Колмогорова

Коммутативный случай

Предположим, что компоненты $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ правой части уравнения (1) являются функциями класса $C_b^{d+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такими, что справедливо равенство $D_f^{(i)} \circ D_f^{(j)} = D_f^{(j)} \circ D_f^{(i)}$, для любых $i, j = 0, \dots, d$.

Теорема 3.3

Для любой функции $g \in C_b^{d+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ справедливо равенство

$$\mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right) = \left(\exp\left(tD_f^{(0)} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} t^{2H_i}(D_f^{(i)})^2\right) g\right)(x).$$

Другими словами, функция $\varphi(t,x) = \mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_f^{(0)}\varphi + \sum_{i=1}^{d} H_i t^{2H_i-1}(D_f^{(i)})^2\varphi, \tag{12}$$

с начальным условием

$$\varphi(0,x) = g(x). \tag{13}$$

Глава 3: уравнения Колмогорова, пример

Рассмотрим одномерное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = \sin X_t \, dt + 2H^{-1} \sin X_t \, dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/3, 1)$. Пусть также задано начальное условие $X_0 = x \in \mathbb{R}$.

Применение теоремы 3.3

Функция $\varphi(t, x) = \mathbb{E}\, g(X_t^x)$ будет являться решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\sin x + t^{2H-1} \sin 2x\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4t^{2H-1}}{H} \sin^2 x \, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

с начальным условием $\varphi(0, x) = g(x)$.

Глава 4: объект исседования

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ заданы d-мерное стандартное броуновское движение $W(t)$ и d-мерное дробное броуновское движение $B(t)$ с показателем Харста $H \in (1/2, 1)$.

Объект исследования

Стохастическое дифференциальное уравнение смешанного типа

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \qquad (14)$$

где $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d}$ — детерминированные функции.

Глава 4: основные результаты

Простейшее уравнение

Будем рассматривать одномерное уравнение (14), считая, что $d = 1$. Вместе с ним рассмотрим простейшее уравнение

$$dy(t) = u(t)dt + v(t)dW(t) + b(t)dB(t), \quad t \geq 0. \tag{15}$$

Решение простейшего уравнения

Решение уравнения (15) определяется следующим соотношением:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)dW(\tau) + \int_0^t b(\tau)dB(\tau), \quad t \geq 0.$$

Глава 4: основные результаты

Предположим, что существуют некоторые функции $r(t), q(t)$ такие, что

$$g(t,x)\left(\frac{g_t'(t,x)}{g^2(t,x)}+\left(\frac{f(t,x)}{g(t,x)}\right)_x'+\frac{1}{2}g_{x^2}''(t,x)\right)=r(t), \tag{16}$$

$$\frac{\sigma(t,x)}{g(t,x)}=q(t). \tag{17}$$

Теорема 4.1. [6].

Уравнение (14) с функцией $g(t,x)\neq 0$ приводимо к уравнению (15) с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно x преобразования $y=F(t,x)$ тогда и только тогда, когда найдутся функции $q(t), r(t)$ такие, что оказываются выполненными соотношения (16), (17).

Глава 4: примеры

Линейное однородное уравнение

$$dx(t) = \alpha(t)x(t)dt + \beta(t)x(t)dW(t) + \gamma(t)x(t)dB(t), \quad t \geq 0,$$

$$x(t) = x(0)\exp\left(\int_0^t \left(\alpha(\tau) - \frac{1}{2}\beta^2(\tau)\right)d\tau + \int_0^t \beta(\tau)dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau)dB(\tau)\right).$$

Линейное неоднородное уравнение

$$dx(t) = \big(\alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)\big)dt + \big(\beta_1(t)x(t) + \beta_2(t)\big)dW(t) + \\ + \big(\gamma_1(t)x(t) + \gamma_2(t)\big)dB(t), \quad t \geq 0,$$

$$x(t) = x_0(t)\Bigg(x(0) + \int_0^t \frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)}d\tau + \\ + \int_0^t \frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)}dW(\tau) + \int_0^t \frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)}dB(\tau)\Bigg),$$

где $x_0(t)$ — решение соответствующего линейного однородного уравнения с начальным условием $x_0(0) = 1$.

Глава 4: пример

Линейное однородное уравнение

Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$dx(t) = -2t \cdot x(t)dt + t^{1-H}x(t)dB(t), \quad t \geq 0,$$

Его решение выражается формулой

$$x(t) = x(0) \exp\left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau)\right).$$

Устойчивость по вероятности нулевого решения

Нулевое решение рассматриваемого уравнения устойчиво по вероятности, то есть для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 \exp\left(-\frac{C^2\,\mathbb{E}\,\|B\|_H^2}{4\varepsilon_2}\right) > 0$, $C = \zeta(1 + 1/H)$, такая, что для любого решения с начальным значением $x(0)$ таким, что $|x(0)| < \delta$ п.н., выполнено неравенство $\mathrm{P}\{\sup_{t\geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$.

Глава 4: основные результаты

Линейное неоднородное уравнение

Далее рассмотрим одномерное автономное уравнение

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{18}$$

и будем исследовать наличие автономной замены $y = F(x)$, приводящей указанное уравнение к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (\alpha_1 y(t)+\alpha_2)dt+(\beta_1 y(t)+\beta_2)dW(t)+(\gamma_1 y(t)+\gamma_2)dB(t), \; t \geq 0 \tag{19}$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

Глава 4: основные результаты

Предположим, что существуют некоторые постоянные $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}, \tag{20}$$

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = c_1, \tag{21}$$

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = c_2, \tag{22}$$

Теорема 4.2. [6].

Уравнение (18) с функциями $g(x) \neq 0$, $A'(x) \neq 0$ приводимо к уравнению (19) с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно x преобразования $y = F(x)$ тогда и только тогда, когда найдутся постоянные c_1, c_2 такие, что оказываются выполненными соотношения (20), (21), (22).

Глава 4: пример

Предложение 4.3

Уравнение бернуллиевского типа

$$dx(t) = (\alpha x^n(t) + \beta x(t))dt + \gamma x(t)dW(t) + \delta x(t)dB(t)$$

приводится к линейному неоднородному уравнению.

Замена $y = F(x) = \frac{1}{1-n}x^{1-n}$.
Соответствующее линейное неоднородное уравнение:

$$dy(t) = \left(\alpha + (n-1)\left(-\beta + \frac{\gamma^2 n}{2}\right)y(t)\right)dt +$$
$$+\gamma(1-n)y(t)dW(t) + \delta(1-n)y(t)dB(t).$$

Глава 4: основные результаты

Уравнение Стратоновича

Вернемся к уравнению (14) в пространстве $\mathbb{R}^d$ и вместе с ним рассмотрим соответствующее уравнение Стратоновича

$$dx(t) = (f(t,x(t)) - c(t,x(t)))dt + g(t,x(t)) \circ dW(t) + \sigma(t,x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{23}$$

в котором $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $c\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ и

$$c_i(t,x) = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial g_{ij}(t,x)}{\partial x_k} g_{kj}(t,x), \quad i = 1,\dots,d.$$

Теорема 4.3. [6].

Пусть функция f непрерывна, функция g непрерывна вместе со своими производными $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, а функция σ удовлетворяет (α,β)-условию Гельдера по (t,x) для некоторых $\alpha > 1-H$, $\beta > 2-2H$. Процесс $x(t)$ является решением уравнения (14) тогда и только тогда, когда процесс $x(t)$ является решением уравнения Стратоновича (23).

Глава 4: пример

Для уравнения

$$dx(t) = x^3(t)dt + x^2(t)dW(t) + x^2(t)dB(t), \; x(0) = x_0,$$

соответствующее уравнение Стратоновича имеет вид

$$dx(t) = x^2(t) \circ dW(t) + x^2(t)dB(t).$$

Последнее уравнение имеет решение

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(W(t) + B(t))},$$

которое является решением и исходного уравнения.

Глава 5, раздел 5.2: объект исследования

Объект исследования

Стохастическое дифференциальное уравнение в пространстве $\mathbb{R}^d$ с выделенной линейной частью вида:

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t)))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0. \qquad (24)$$

где $W(t)$ — стандартное d-мерное броуновское движение,
$A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — кусочно непрерывная функция, $\sup_{t\geq 0} |A(t)| \leq M$,
$f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — измеримые по Борелю функции такие, что:
1) $f(t,0) = 0$ и $g(t,0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$
2) существует постоянная C такая, что для любых $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$, выполняется неравенство $|f(t,x)| + |g(t,x)| \leq C(1 + |x|)$ (выполнено условие линейного порядка роста по x).

Глава 5, раздел 5.2: основной результат

Детерминированное линейное приближение

$$dX(t) = A(t)X(t)dt, \quad t \geq 0, \tag{25}$$

Обозначим через $X^{(s,x)}(t)$ решение уравнения (25), такое, что $X^{(s,x)}(s) = x$.

Будем говорить, что уравнение (25) имеет *равномерно экспоненциально устойчивое* нулевое решение, если существуют константы $\Lambda, \lambda > 0$, не зависящие от s, x, такие, что для любых $s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$ и $t \geq s$ выполняется неравенство $|X^{(s,x)}(t)|^2 \leq \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)}$.

Теорема 5.3. [1].

Предположим, что функции $f(t,x)$ и $g(t,x)$ таковы, что выполнены соотношения

$$\frac{|f(t,x)|}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0, \qquad \frac{|g(t,x)|}{|x|} \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \tag{26}$$

равномерно по $t \in \mathbb{R}^+$, а система (25) имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда система (24) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.

Глава 5, раздел 5.2: пример

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((-20 - 0.1\sin t)x(t) + 0.1\cos t\ y(t) + \sin^2 x(t))dt, \\ dy(t) &= (-0.1\cos t\ x(t) - (20 + 0.1\sin t)y(t))dt + \sin^2 y(t)\mathrm{sgn}(x(t))dw(t), \end{aligned} \tag{27}$$

при $t \geq 0$ с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, где $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $w(t)$ – одномерное броуновское движение.

Применение теоремы 5.3

Нулевое решение линеаризованной системы

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((-20 - 0.1\sin t)x(t) + 0.1\cos t\ y(t))dt, \\ dy(t) &= (-0.1\cos t\ x(t) - (20 + 0.1\sin t)y(t))dt, \end{aligned}$$

является равномерно экспоненциально устойчивым, и следовательно, по теореме 5.3. нулевое решение системы (27) асимптотически устойчиво по вероятности.

Глава 5, раздел 5.3: объект исследования

Обозначения

Пусть H и K — сепарабельные гильбертовы пространства,

$\mathfrak{L}_2(K, H)$ — пространство операторов Гильберта-Шмидта, действующих из K в H,

Q — ядерный симметрический положительно определенный оператор на пространстве K,

$W(t, \omega)$ — Q-броуновское движение со значениями в K и ковариационным оператором Q.

Глава 5, раздел 5.3: объект исследования

Объект исследования

Эволюционное функциональное уравнение в пространстве H следующего вида:

$$dX(t,\omega) = AX(t,\omega)dt + f(t, X(t,\omega))dt + g(t, X(t,\omega))dW(t,\omega), \; (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{28}$$

относительно $X \in H$ с начальным условием

$$X(0,\omega) = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \tag{29}$$

где $f : \mathbb{R}^+ \times H \to H$, $g : \mathbb{R}^+ \times H \to \mathfrak{L}_2(K, H)$ — измеримые, непрерывные по X (при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$) функции,

A — линейный оператор, определенный на всюду плотном в H множестве $\mathcal{D}(A)$ и порождающий C_0-полугруппу $S(t)$ на H,

$\xi : \Omega \to \mathcal{D}(A)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина, имеющая конечный момент $\mathbb{E}\,\|\xi\|^p < \infty$ порядка $p > 2$.

Глава 5, раздел 5.3: объект исследования

Условия на коэффициенты f, g

Относительно функций $f(t,X)$ и $g(t,X)$ будем предполагать, что выполнены два условия:

1. *Локальное условие Липшица.* Для любого $a>0$ существует постоянная q_a такая, что для всех $t\in[0,a]$ и любых $\varphi,\psi\in H$, таких, что $\|\varphi\|\le a$, $\|\psi\|\le a$, выполняются неравенства
$$\|f(t,\varphi)-f(t,\psi)\|\le q_a\|\varphi-\psi\|,\quad \|g(t,\varphi)-g(t,\psi)\|\le q_a\|\varphi-\psi\|.$$
2. *Условие линейного порядка роста.* Существует непрерывная функция $k\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ такая, что для всех $t\in\mathbb{R}^+$ и любого $\eta\in H$ выполняются неравенства
$$\|f(t,\eta)\|\le k(t)(1+\|\eta\|),\quad \|g(t,\eta)\|\le k(t)(1+\|\eta\|).$$

Глава 5, раздел 5.3: притяжение к нулю

Определение 5.8.

Пусть положительная функция $\lambda(t)$ определена для достаточно больших $t > 0$, скажем, $t \geq T > 0$. Предположим, что

1. $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty$.
2. $\ln \lambda(t)$ равномерно непрерывна по $t \geq T$.
3. Существует константа $\tau \geq 0$ такая, что $\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\ln \ln t}{\ln \lambda(t)} \leq \tau$.

Будем говорить, что слабое решение задачи (28), (29) притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$, если найдется $\gamma > 0$ такое, что п.н. выполняется неравенство

$$\lim_{t\to\infty} \sup \frac{\ln \|X(t)\|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma.$$

Глава 5, раздел 5.3: основной результат

Обозначения

Введем операторы L, B, действующие на функционал $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$ следующим образом:

$$LV(t,x) = V_t'(t,x) + \langle V_x'(t,x), Ax + f(t,x)\rangle_H + \\ + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q^{1/2})(g(t,x)Q^{1/2})^\star], \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A), \tag{30}$$

$$BV(t,x) = \mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x) \otimes V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q^{1/2})(g(t,x)Q^{1/2})^\star], \\ (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times H. \tag{31}$$

(Q — ковариационный оператор броуновского движения $W(t)$)

Глава 5, раздел 5.3: основной результат

Теорема 5.4. [2].

Пусть задан функционал $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$ и две неотрицательные непрерывные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$. Предположим, что существуют постоянные $r > 0$, $m \geq 0$, постоянные $\mu, \nu, \theta \in \mathbb{R}$ и невозрастающая положительная функция $\zeta(t)$ такие, что $\frac{m-(\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r} > 0$ и выполнены следующие условия:

1. $\|x\|^r(\lambda(t))^m \leq V(t,x)$ для всех $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times H$.
2. $LV(t,x) + \zeta(t)BV(t,x) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t)V(t,x)$ для всех $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A)$.
3. $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup \frac{\ln\left(\int_0^t \psi_1(s)\,ds\right)}{\ln \lambda(t)} \leq \nu$, $\quad \lim\limits_{t\to+\infty} \sup \frac{\int_0^t \psi_2(s)\,ds}{\ln \lambda(t)} \leq \theta$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \inf \frac{\ln \zeta(t)}{\ln \lambda(t)} \geq -\mu$.

Тогда слабое решение задачи (28), (29) притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$.

Глава 5, раздел 5.3: пример

$$dX_t(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2}X_t(x) + \alpha \sin\left(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos X_t^1\right)\right) dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}} X_t(x) dW_t,$$

$$dX_t^1 = \left(\alpha X_t^1 \sin X_t^1 + \left(\int_0^\pi X_t(x)^2 dx\right)^{1/2}\right) dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}} \left(\int_0^\pi X_t(x)^2 dx\right)^{1/2} dW_t.$$

Уравнение относительно $\bar{X}_t = (X_t(\cdot), X_t^1)^\top$, $t > 0$, в пространстве $H \times \mathbb{R}$ с начальным условием $\bar{X}_0 = (X_0(x), X_0^1)^\top = (x_0(x), x_0^1), x \in (0, \pi)$, $K = \mathbb{R}$, $H = L_2[0, \pi]$ в компактной форме примет вид

$$d\bar{X}_t = (\bar{A}\bar{X}_t + f(t, \bar{X}_t))dt + g(t, \bar{X}_t)dW_t, \tag{32}$$

$$f(t, \bar{X}_t) = \alpha\left(\sin(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos X_t^1), X_t^1 \sin X_t^1 + \|X_t(x)\|_H\right)^\top,$$

$$g(t, \bar{X}_t) = \alpha e^{-\frac{mt}{2}} \left(X_t(x), \left(\int_0^\pi X_t(x)^2 dx\right)^{1/2}\right)^\top, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(A) = \{u \in C_2[0, \pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$$

Глава 5, раздел 5.3: пример

Применение теоремы 5.4

Положим $V(t,\bar{u}) = V(t,u) = e^{mt}\|u\|^2$, $u \in H$, $\lambda(t) = e^t$, $\psi_1(t) \equiv \alpha\pi$, $\psi_2(t) \equiv \theta$, $\tau = \mu = \nu = 0$.
В статье [2] показано, что при таком выборе, достаточно малом α и достаточно большом m, условия теоремы 5.4 будут выполнены, т.е. имеет место притяжение решений к нулю.
При этом функция g удовлетворяет глобальному условию Липшица, а функция f удовлетворяет локальному, но не удовлетворяет глобальному условию Липшица.

Положения, выносимые на защиту

1. Формула замены переменных и теорема о непрерывной зависимости от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста (теоремы 2.2, 2.3).
2. Асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста (теорема 3.1).
3. Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа, основанные на приведении к простейшим уравнениям, линейным неоднородным уравнениям и переходе к уравнению Стратоновича (теоремы 4.1, 4.2, 4.3).
4. Теорема об асимптотической устойчивости системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито с разрывными коэффициентами по нестационарному линейному приближению. Достаточные условия притяжения к нулю слабых решений нелинейного стохастического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве с нелипшициевыми коэффициентами (теоремы 5.3, 5.4).

Список основных публикаций соискателя

1. *Васьковский, М.М.* Исследование устойчивости решений неавтономных стохастических дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами с помощью метода функций Ляпунова / М.М. Васьковский, Я.Б. Задворный, И.В. Качан // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1 : физ., мат., информ. — 2015. — №3. — С. 117–125.

2. *Васьковский, М.М.* Устойчивость решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений в гильбертовых пространствах с локально липшициевыми коэффициентами / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 7. — С. 866–880.

3. *Качан, И.В.* Непрерывная зависимость от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / И.В. Качан // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 193–209.

Список основных публикаций соискателя

4. *Васьковский, М.М.* Асимптотические разложения решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями / М.М. Васьковский, И.В. Качан // Доклады Нац. акад. наук Беларуси. — 2018. — Т. 62, № 4. — С. 398–405.

5. *Vaskouski, M.* Asymptotic expansions of solutions of stochastic differential equations driven by multivariate fractional Brownian motions having Hurst indices greater than 1/3 / M. Vaskouski, I. Kachan // Stochastic Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 36, № 6. — P. 909–931.

6. *Васьковский, М.М.* Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа, управляемых дробными броуновскими движениями / Васьковский М.М., Качан И.В. // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. — 2019. — Т. 55, № 2. — С. 135–151.