

Доклад И.В. Качана на защите диссертации "Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста"

В общем смысле под стохастическим дифференциальным уравнением понимают выражение следующего вида

$$dX(t, \omega) = f(t, \omega, X(t, \omega))dt + g(t, \omega, X(t, \omega))dB(t, \omega),$$

в котором $B(t, \omega)$ — стандартное или дробное броуновское движение. Формализм приведенной записи заключается в том, что ввиду недифференцируемости траекторий процесса $B(t)$, выражение $dB(t)$ лишено смысла. Однако, не разрывая связи с классической теорией дифференциальных уравнений, опираясь на интегральный критерий, уравнение понимают в интегральном смысле:

$$X(t, \omega) = X(s, \omega) + \int_s^t f(\tau, \omega, X(\tau, \omega))d\tau + \int_s^t g(\tau, \omega, X(\tau, \omega))dB(\tau, \omega),$$

где интеграл по $d\tau$ является интегралом Бохнера при каждом фиксированном ω , а способ определения интеграла по dB зависит от свойств процесса $B(t)$. Можно выделить три основных подхода к определению интегралов по дробному броуновскому движению: потракторные интегралы (Янга, Губинелли), стохастические интегралы (Ито, Стратоновича, θ - и μ -интегралы) для стандартного броуновского движения и интегралы Вика-Ито-Скоророда, основанные на дифференцировании процесса $B(t)$ в пространствах обобщенных функций специального вида.

В настоящей работе исследуются уравнения, содержащие дробные броуновские движения с различными индексами Харста и снос. Для определения интегралов по дробным броуновским движениям с показателями Харста H , большими $1/3$, но меньшими $1/2$, будет использован подход Губинелли, для H , больших $1/2$ — подход Янга, а для H , равных $1/2$ (соответствующих стандартным броуновским движениям) — подходы Ито и Стратоновича.

Стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями находят множество приложений, главным образом в физике и финансовой математике. М. Клепцына, А. Ле Бретон и М.-К. Рубо (2000) использовали модели с дробными броуновскими движениями для описания сигнальных процессов в фильтрационных системах. П. Черидито (2001) рассматривает модель Самуэльсона для движения цен на акции, используя дробные броуновские движения. М. Сале (1998) исследует стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями в контексте моделей облигаций и акций. Ряд других финансовых приложений также можно найти в монографии Ю.С. Мишуры (2008). Отметим, что дробное броуновское движение с индексом Харста $H = 1/2$, называемое стандартным, совпадает с винеровским процессом. Стохастические дифференциальные уравнения со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах могут быть применены для истолкования и обобщения многих классических задач математической физики, фильтрации, нейрофизиологии, генетики популяций и уже упомянутой финансовой математики. Для уравнений со стандартным броуновским движением также развиты численные методы построения приближенных решений¹.

Настоящая работа ставит своей целью исследование общих и асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста.

¹Егоров, А.Д. Об аппроксимации функциональных интегралов по мерам, порожденным решениями стохастических уравнений по мартингалам / А.Д. Егоров // Доклады АН БССР. — 1991. — Т. 35, № 1. — С. 32–35.

В первой главе диссертации приведен аналитический обзор литературы по теме исследования.

Во второй и третьей главе диссертации исследуются стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие $1/3$. Рассматриваемые уравнения охватывают класс уравнений, содержащих дробное и стандартное броуновские движения, а также снос.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, на котором определены независимые одномерные дробные броуновские движения $B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)}$ с индексами Харста $H_1, \dots, H_d \in (1/3, 1)$. Введем обозначение $B_t = (B_t^{(0)}, \dots, B_t^{(d)})^\top$ для $(d+1)$ -мерного дробного броуновского движения, в котором $B_t^{(0)} = t$. Пусть также $H_0 = 1$. Пусть H_{\min} — значение наименьшего из индексов Харста H_i , $i = 0, \dots, d$. Выберем и зафиксируем некоторое $H \in (1/3, 1/2]$ такое, что $H < H_{\min}$.

Объектом изучения второй главы является следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = f(X_t)dB_t, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

в котором f — $(n \times (d+1))$ -матрица, столбцами которой являются векторы $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, d$. Через X_t^x будем обозначать решение уравнения (1) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$. Решение понимается в интегральном смысле, а интеграл по dB_t определяется как потраекторный интеграл Губинелли в рамках теории грубых траекторий. Данная теория была разработана Т. Лайонсом (1998), развита М. Губинелли (2004), П. Фрицем и М. Хайрером (2014) и является основным инструментом исследования уравнений с дробными броуновскими движениями с показателями Харста H , меньшими $1/2$. Стоит отдельно отметить М. Хайрера, который впервые применил теорию грубых траекторий к исследованию стохастических дифференциальных уравнений в частных производных и разработал так называемую теорию регулярных структур. Данный результат получил высокую оценку математического сообщества и был удостоен Филдсовской премии в 2014 г.

Заметим, что уравнение (1) охватывает важный частный случай, когда все индексы Харста H_i либо равны $1/2$, либо равны некоторому $H > 1/2$ (то есть в уравнение входят только стандартные броуновские движения W_t и дробные броуновские движения $B_t^{(H)}$ с одним и тем же индексом Харста $H > 1/2$). В данном случае мы приходим к уравнению Стратоновича, сводимое к уравнению смешанного типа, в котором интеграл по стандартному броуновскому движению W_t понимается как интеграл Ито, а интеграл по дробному броуновскому движению $B_t^{(H)}$ определяется как потраекторный интеграл Янга. В свою очередь, уравнения смешанного типа охватывают стохастические дифференциальные уравнения Ито, а также уравнения, управляемые дробными броуновскими движениями со сносом, впервые рассмотренные в работе Д. Нуаларта и А. Раскану (2008).

Глава 2 настоящей работы также посвящена общим свойствам решений уравнений (1). Существование и единственность решений, непрерывная зависимость решений от начальных данных детерминированных уравнений (1), где в качестве B_t выступают детерминированные функции, непрерывные по Гельдеру с показателем $\alpha > 1/3$, были впервые исследованы в работе М. Губинелли (2004) и впоследствии развиты в монографии П. Фрица и М. Хайрера (2014). Однако обобщение теоремы существования решений уравнений (1) на недетерминированный случай уравнений с дробными броуновскими движениями, вообще говоря, не столь тривиально, поскольку из существования решения $X(t, \omega)$ при каждом ω не следует его измеримость по ω . Обоснование измеримости решений было дано в работе А. Нойенкирха, И. Нурдэна (2009), где доказана теорема существования решений уравнений (1) с коэффициентами f класса C_b^2 , дробными броуновскими движениями, имеющими один и тот же индекс Харста $H > 1/3$, и сносом, а также доказана формула замены переменных для указанных

уравнений. В настоящей главе получена теорема существования, в целом аналогичная теореме из работы А. Нойенкирха и И. Нурдэна, для уравнений (1).

Через $C_b^k(V, U)$ будем обозначать пространство функций $\varphi: V \rightarrow U$, имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка k включительно с нормой $\|\varphi\|_{C_b^k} = \sum_{j=0}^k \|D^j \varphi\|_\infty$, где $\|D^j \varphi\|_\infty = \max_{x \in V} |D^j \varphi(x)|$. Следующая теорема дает достаточное условие существования и единственности решения уравнения (1).

Теорема 2.1.² [5]. Если $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, то для любого $x \in \mathbb{R}^n$ уравнение (1) имеет единственное решение с начальным условием $X_0 = x$, причем $X' = f(X)$, $(f(X), (f(X))') \in \mathcal{D}_B^{2H}([0, T], \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$ п.н. Более того, если $H_i > H^* \geq 1/2$ для всех $i = 0, \dots, d$, то справедливо включение $X \in C^{H^*}([0, T], \mathbb{R}^n)$ п.н. и интеграл в определении решения уравнения (1) является потраекторным интегралом Янга.

Следующие две теоремы являются основными результатами второй главы.

Формула замены переменных, полученная в настоящей работе, обобщает аналогичные результаты работ Ф. Бадуэна и Л. Кутэн (2007), А. Нойенкирха и И. Нурдэна (2009) на случай уравнения (1) со сносом и дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста.

Теорема 2.2. [5]. Пусть $f \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, $g \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Тогда для любых $s, t \in [0, T]$ п.н. справедлива следующая формула замены переменных:

$$g(X_t) = g(X_s) + \int_s^t Dg(X_r) f(X_r) dB_r, \quad s, t \in [0, T], \quad (2)$$

где X_t — решение уравнения (1).

Наряду с уравнением (1) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\tilde{X}_t = \tilde{f}(\tilde{X}_t) dB_t, \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

в котором \tilde{f} — $(n \times (d+1))$ -матрица, столбцами которой являются векторы $\tilde{f}_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 0, \dots, d$.

Результаты, полученные в работах М. Губинелли, П. Фрица и М. Хайрера в приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям означают, что почти наверное имеет место потраекторная интегральная непрерывность решений уравнений вида (1) с дробным броуновским движением B_t , компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H > 1/3$, в условиях существования указанных решений. Настоящая работа обобщает указанные результаты на случай компонент B_t , имеющих различные индексы Харста $H_i > 1/3$.

Теорема 2.3. [3]. Пусть $f, \tilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, причем функция f такова, что $\|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \leq$
1. Обозначим через X_t, \tilde{X}_t решения уравнений (1), (3) с начальными условиями $X_0 = \xi$, $\tilde{X}_0 = \tilde{\xi}$ соответственно. Тогда:

1) почти наверное справедлива следующая оценка

$$\|X - \tilde{X}\|_H \leq C \left(|\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2} \right) \quad (4)$$

для некоторой случайной величины $C = C(H, T, \|f\|_{C_b^3}, \|B\|_H, \|\mathbb{B}\|_{2H})$. Причем C может быть выбрана не зависящей от T , если $T \in (0, 1]$;

2) имеет место следующее неравенство

$$\mathbb{E}(\ln \|X - \tilde{X}\|_H) \leq C + \ln(\mathbb{E}|\xi - \tilde{\xi}| + \|f - \tilde{f}\|_{C_b^2}), \quad (5)$$

²Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations / A. Neuenkirch [et al.] // Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2009. — Vol. 45, n° 1. — P. 157–174.

где $C = C(H, H_1, \dots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}) \in \mathbb{R}$ — константа, вообще говоря, зависящая от $H, H_1, \dots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}$.

Третья глава диссертации посвящена исследованию асимптотических разложений математических ожиданий функционалов от решений уравнения (1).

Будем придерживаться следующих компактных записей:

$$\Delta^k[0, t] = \{(t_1, \dots, t_k) \in [0, t]^k : 0 \leq t_1 < \dots < t_k \leq t\} \quad (6)$$

$$\int_{\Delta^k[0, t]} dB^{(I_k)} = \int_0^t \int_0^{t_k} \dots \int_0^{t_2} dB_{t_1}^{(i_1)} \dots dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} dB_{t_k}^{(i_k)}, \quad (7)$$

$$I_k = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}_d^k := \{0, \dots, d\}^k, \quad (8)$$

$$D_f^{(i)} = \sum_{j=1}^n f_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i \in \{0, \dots, d\} \quad D_f^{(I_k)} = D_f^{(i_1)} \dots D_f^{(i_k)}, \quad (9)$$

$$\mathbf{P}_t g(x) = \mathbb{E}g(X_t^x), \quad t \geq 0. \quad (10)$$

Исследование при малых значениях времени t семейства операторов (10) представляет особый интерес. Их асимптотические разложения могут быть применены для получения дифференциальных уравнений в частных производных колмогоровского типа для математических ожиданий от решений уравнения (1) в некоторых частных случаях (например, когда все индексы Харста $H_i = 1/2$ или когда дифференциальные потоки, соответствующие коэффициентам уравнения (1), коммутируют), а также, как показано в статье Ф. Бадуэна и Л. Кутэн (2007), для получения систем дифференциальных уравнений в частных производных для инвариантных мер, связанных с решениями уравнений (1).

Известны несколько работ, посвященных исследованию семейства операторов (10). Ф. Бадуэн и Л. Кутэн (2007) вывели асимптотическую формулу для операторов \mathbf{P}_t , используя теорию грубых траекторий (rough paths) Т. Лайонса в случае, когда $H_1 = \dots = H_d > 1/3$ для уравнения (1) без сноса. А. Нойенкирх, И. Нурдэн (2009) рассматривали уравнение (1) со сносом в случае $H_1 = \dots = H_d > 1/3$ и получили асимптотическую формулу для операторов \mathbf{P}_t , используя теорию интегрирования М. Губиннелли. В третьей главе настоящей работы результаты указанных статей обобщены на случай уравнения (1) со сносом и дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста. В данной главе уравнение (1) рассматривается с точки зрения теории грубых траекторий как уравнение Стратоновича. Решения таких уравнений есть равномерные пределы последовательности аппроксимаций Вонга-Закаи, т.е. уравнений вида (1), в которых процесс B_t заменяется его кусочно-линейными аппроксимациями $B_m(t)$, введенными Л. Кутэн и Ж. Кян (2002).

Основной результат третьей главы представлен следующей теоремой.

Теорема 3.1. [4, 5]. Пусть $f \in C_b^{N+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times (d+1)})$, $g \in C_b^{N+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$. Тогда для любого фиксированного $H \in (1/3, 1/2]$ такого, что $H < H_{\min} = \min_{i=0, \dots, d} H_i$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \{0, \dots, d\}^k} t^{|H_{I_k}|} \cdot (D_f^{(I_k)} g)(x) \mathbb{E} \left(\int_{\Delta^k[0, 1]} dB^{(I_k)} \right) + O(t^{(N+1)H}), \quad (11)$$

при $t \rightarrow 0$, где $|H_{I_k}| = H_{i_1} + H_{i_2} + \dots + H_{i_k}$ — сумма индексов Харста дробных броуновских движений $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \dots, B^{(i_k)}$.

Пример. Рассмотрим следующее одномерное уравнение:

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/2, 1)$, $b, \sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — функции класса C_b^4 . Пусть $g \in C_b^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, тогда согласно теореме 3.1 справедливо асимптотическое разложение следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_t g(x) = & g(x) + t b(x) Dg(x) + \frac{1}{2} t^2 (b(x) D b(x) Dg(x) + b^2(x) D^2 g(x)) + \\ & + \frac{1}{2} t^{2H} (\sigma(x) D \sigma(x) Dg(x) + \sigma^2(x) D^2 g(x)) + O(t^{3H}). \end{aligned}$$

Также в третьей главе получены аналоги уравнений Колмогорова для математических ожиданий функционалов от решений в предположении, что компоненты $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ правой части уравнения (1) являются функциями класса $C_b^{d+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такими, что справедливо равенство $D_f^{(i)} \circ D_f^{(j)} = D_f^{(j)} \circ D_f^{(i)}$, для любых $i, j = 0, \dots, d$. В таком случае справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3 [5] *Для любой функции $g \in C_b^{d+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ справедливо равенство*

$$\mathbb{E}(g(X_t^x)) = \left(\exp \left(t D_f^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d t^{2H_i} (D_f^{(i)})^2 \right) g \right)(x).$$

Другими словами, функция $\varphi(t, x) = \mathbb{E}(g(X_t^x))$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_f^{(0)} \varphi + \sum_{i=1}^d H_i t^{2H_i-1} (D_f^{(i)})^2 \varphi, \quad (12)$$

с начальным условием

$$\varphi(0, x) = g(x). \quad (13)$$

Пример. Рассмотрим одномерное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = \sin X_t dt + 2H^{-1} \sin X_t dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/3, 1)$. Пусть также задано начальное условие $X_0 = x \in \mathbb{R}$. Согласно теореме 3.3 функция $\varphi(t, x) = \mathbb{E}g(X_t^x)$ будет являться решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = (\sin x + t^{2H-1} \sin 2x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4t^{2H-1}}{H} \sin^2 x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

с начальным условием $\varphi(0, x) = g(x)$.

Четвертая глава диссертации посвящена получению методов интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ заданы d -мерное стандартное броуновское движение $W(t)$ и d -мерное дробное броуновское движение $B(t)$ с показателем Харста $H \in (1/2, 1)$.

Объектом изучения четвертой главы является стохастическое дифференциальное уравнение смешанного типа

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (14)$$

где $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $\sigma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ — детерминированные функции.

Интерес к стохастическим дифференциальным уравнениям смешанного типа вызван тем, что наличие слагаемого с дробным броуновским движением позволяет строить более точные математические модели, учитывающие эффект долговременной памяти процессов, что особенно важно при моделировании экономических и финансовых процессов.

Впервые смешанные уравнения были рассмотрены К. Кубилюсом (2002), в данной работе была получена первая теорема существования и единственности для уравнений смешанного типа без сноса, содержащих винеровский процесс W_t и дробное броуновское движение B_t^H с индексом Харста $H > 1/2$, сочетая при этом теории интегрирования Ито и Янга. Д. Нуаларт и Дж. Гуэрра (2008) доказали теорему существования и единственности для уравнений, содержащих снос. Некоторые другие обобщения теорем существования, а также свойства стохастических дифференциальных уравнений и включений смешанного типа исследованы в работах Ю.С. Мишуры, Г.М. Шевченко, А.А. Левакова и М.М. Васьковского.

В монографиях С. Ватанабэ (1986), Гарда (1989), А.А. Левакова (2009), работах Г. Досса (1977), М.А. Курицина (2000) были получены некоторые методы точного интегрирования уравнений Ито. Методы точного интегрирования, полученные в четвертой главе настоящей работы, обобщают результаты монографии А.А. Левакова на случай уравнений смешанного типа.

Будем рассматривать одномерное уравнение (14), считая, что $d = 1$. Вместе с ним рассмотрим простейшее уравнение

$$dy(t) = u(t)dt + v(t)dW(t) + b(t)dB(t), \quad t \geq 0. \quad (15)$$

Решение уравнения (15) выражается следующей формулой:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)dW(\tau) + \int_0^t b(\tau)dB(\tau), \quad t \geq 0.$$

Предположим, что существуют некоторые функции $r(t), q(t)$ такие, что

$$g(t, x) \left(\frac{g'_t(t, x)}{g^2(t, x)} + \left(\frac{f(t, x)}{g(t, x)} \right)'_x + \frac{1}{2} g''_{x^2}(t, x) \right) = r(t), \quad (16)$$

$$\frac{\sigma(t, x)}{g(t, x)} = q(t). \quad (17)$$

Теорема 4.1. [6]. Уравнение (14) с функцией $g(t, x) \neq 0$ приводимо к уравнению (15) с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно x преобразования $y = F(t, x)$ тогда и только тогда, когда найдутся функции $q(t), r(t)$ такие, что оказываются выполненными соотношения (16), (17).

Пример. Решение линейного однородного уравнения

$$dx(t) = \alpha(t)x(t)dt + \beta(t)x(t)dW(t) + \gamma(t)x(t)dB(t), \quad t \geq 0,$$

выражается формулой

$$x(t) = x(0) \exp \left(\int_0^t \left(\alpha(\tau) - \frac{1}{2} \beta^2(\tau) \right) d\tau + \int_0^t \beta(\tau) dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau) dB(\tau) \right).$$

Решение линейного неоднородного уравнения

$$dx(t) = (\alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t))dt + (\beta_1(t)x(t) + \beta_2(t))dW(t) + (\gamma_1(t)x(t) + \gamma_2(t))dB(t), \quad t \geq 0,$$

выражается формулой

$$x(t) = x_0(t) \left(x(0) + \int_0^t \frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} d\tau + \int_0^t \frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} dW(\tau) + \int_0^t \frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)} dB(\tau) \right),$$

где $x_0(t)$ — решение соответствующего линейного однородного уравнения с начальным условием $x_0(0) = 1$.

Пример. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$dx(t) = -2t \cdot x(t)dt + t^{1-H}x(t)dB(t), \quad t \geq 0,$$

Его решение выражается формулой

$$x(t) = x(0) \exp \left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau) \right).$$

Нулевое решение рассматриваемого уравнения устойчиво по вероятности, то есть для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 \exp \left(-\frac{C^2 \mathbb{E} \|B\|_H^2}{4\varepsilon_2} \right) > 0$, $C = \zeta(1 + 1/H)$, такая, что для любого решения с начальным значением $x(0)$ таким, что $|x(0)| < \delta$ п.н., выполнено неравенство $P\{\sup_{t \geq 0} |x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$.

Далее рассмотрим одномерное автономное уравнение

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (18)$$

и будем исследовать наличие автономной замены $y = F(x)$, приводящей указанное уравнение к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (\alpha_1 y(t) + \alpha_2)dt + (\beta_1 y(t) + \beta_2)dW(t) + (\gamma_1 y(t) + \gamma_2)dB(t), \quad t \geq 0 \quad (19)$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

Предположим, что существуют некоторые постоянные $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}, \quad (20)$$

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = c_1, \quad (21)$$

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = c_2, \quad (22)$$

Теорема 4.2. [6]. Уравнение (18) с функциями $g(x) \neq 0$, $A'(x) \neq 0$ приводимо к уравнению (19) с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно x преобразования $y = F(x)$ тогда и только тогда, когда найдутся постоянные c_1, c_2 такие, что оказываются выполненными соотношения (20), (21), (22).

Пример. Уравнение бернуллиевского типа

$$dx(t) = (\alpha x^n(t) + \beta x(t))dt + \gamma x(t)dW(t) + \delta x(t)dB(t)$$

с помощью замены $y = F(x) = \frac{1}{1-n}x^{1-n}$ приводится к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = \left(\alpha + (n-1) \left(-\beta + \frac{\gamma^2 n}{2} \right) y(t) \right) dt + \gamma(1-n)y(t)dW(t) + \delta(1-n)y(t)dB(t).$$

Вернемся к уравнению (14) в пространстве \mathbb{R}^d и вместе с ним рассмотрим соответствующее уравнение Стратоновича

$$dx(t) = (f(t, x(t)) - c(t, x(t)))dt + g(t, x(t)) \circ dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \quad (23)$$

в котором $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $\sigma: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, $c: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ и

$$c_i(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^d \frac{\partial g_{ij}(t, x)}{\partial x_k} g_{kj}(t, x), \quad i = 1, \dots, d.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. [6]. Пусть функция f непрерывна, функция g непрерывна вместе со своими производными $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, а функция σ удовлетворяет (α, β) -условию Гельдера по (t, x) для некоторых $\alpha > 1 - H$, $\beta > 2 - 2H$. Процесс $x(t)$ является решением уравнения (14) тогда и только тогда, когда процесс $x(t)$ является решением уравнения Стратоновича (23).

Пример. Для уравнения

$$dx(t) = x^3(t)dt + x^2(t)dW(t) + x^2(t)dB(t), \quad x(0) = x_0,$$

соответствующее уравнение Стратоновича имеет вид

$$dx(t) = x^2(t) \circ dW(t) + x^2(t)dB(t).$$

Последнее уравнение имеет решение

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(W(t) + B(t))},$$

которое является решением и исходного уравнения.

Глава 5 посвящена исследованию устойчивости и притяжения решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах. Для таких уравнений определяющую роль в исследовании устойчивости и притяжения решений по-прежнему играют классические методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений: метод функционалов Ляпунова, метод интегральных неравенств, исследование устойчивости нелинейных уравнений по линейному приближению и др., что позволяет получать более точные результаты по сравнению с уравнениями (1) более общего вида.

В первой части главы 5 рассматриваются стохастические дифференциальные уравнения в пространстве \mathbb{R}^d с выделенной линейной частью вида:

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t)))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0. \quad (24)$$

где $W(t)$ — стандартное d -мерное броуновское движение, $A: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ — кусочно непрерывная функция, $\sup_{t \geq 0} |A(t)| \leq M$, $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$ — измеримые по Борелю функции такие, что $f(t, 0) = 0$ и $g(t, 0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$ и выполнено условие линейного порядка роста по x , то есть существует постоянная C такая, что для любых $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$, выполняется неравенство $|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq C(1 + |x|)$.

Под решением системы (24) понимается решение стохастического дифференциального включения, построенного по уравнению в смысле А.Ф. Филиппова.

Теория устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в конечномерных гильбертовых пространствах изучена наиболее полно. В монографии Р. Хасьминского (2012) доказаны аналоги теорем Ляпунова об устойчивости решений уравнения (24) с коэффициентами, удовлетворяющими глобальному условию Липшица. В монографии Е.Ф. Царькова (1982)

излагается метод исследования устойчивости решений автономной системы с непрерывными коэффициентами и запаздыванием. Исследованию устойчивости систем с разрывными коэффициентами посвящена статья А.А. Левакова (2011), в которой методом знакопостоянных функций Ляпунова доказаны теоремы об устойчивости решений автономной системы без запаздывания с разрывными коэффициентами f, g . Полученная в настоящей работе теорема об устойчивости по линейному приближению охватывает класс неавтономных уравнений с разрывными коэффициентами.

Наряду с уравнением (24) рассмотрим линейное однородное детерминированное уравнение

$$dX(t) = A(t)X(t)dt, \quad t \geq 0, \quad (25)$$

Через $X^{(s,x)}(t)$ будем обозначать (единственное) решение уравнения (25), удовлетворяющее равенству $X^{(s,x)}(s) = x$.

Определение 5.4. Будем говорить, что уравнение (25) имеет *равномерно экспоненциально устойчивое* нулевое решение, если существуют константы $\Lambda, \lambda > 0$, не зависящие от s, x , такие, что для любых $s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^d$ и $t \geq s$ выполняется неравенство

$$|X^{(s,x)}(t)|^2 \leq \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)}.$$

Теорема 5.3. [1]. *Предположим, что функции $f(t, x)$ и $g(t, x)$ таковы, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что выполняются неравенства*

$$|f(t, x)| \leq \varepsilon |x|, \quad |g(t, x)| \leq \varepsilon |x|, \quad (26)$$

для любых $x, |x| \leq \delta_\varepsilon, t \in \mathbb{R}^+$, а система (25) имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда система (24) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.

Пример. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((-20 - 0.1 \sin t)x(t) + 0.1 \cos t y(t) + \sin^2 x(t))dt, \\ dy(t) &= (-0.1 \cos t x(t) - (20 + 0.1 \sin t)y(t))dt + \sin^2 y(t) \operatorname{sgn}(x(t))dw(t), \end{aligned} \quad (27)$$

при $t \geq 0$ с начальными условиями $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, где $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $w(t)$ — одномерное броуновское движение. Нулевое решение линеаризованной системы

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((-20 - 0.1 \sin t)x(t) + 0.1 \cos t y(t))dt, \\ dy(t) &= (-0.1 \cos t x(t) - (20 + 0.1 \sin t)y(t))dt, \end{aligned}$$

является равномерно экспоненциально устойчивым, и следовательно, по теореме 5.3. нулевое решение системы (27) асимптотически устойчиво по вероятности.

Пусть H и K — сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathfrak{L}_2(K, H)$ — пространство операторов Гильберта-Шмидта, действующих из K в H , Q — ядерный симметрический положительно определенный оператор на пространстве K , $W(t, \omega)$ — Q -броуновское движение со значениями в K и ковариационным оператором Q . Во второй части главы 5 рассматриваются эволюционные функциональные уравнения в пространстве H следующего вида:

$$dX(t, \omega) = AX(t, \omega)dt + f(t, X(t, \omega))dt + g(t, X(t, \omega))dW(t, \omega), \quad (t, \omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \quad (28)$$

относительно $X \in H$ с начальным условием

$$X(0, \omega) = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \quad (29)$$

где $f: \mathbb{R}^+ \times H \rightarrow H$, $g: \mathbb{R}^+ \times H \rightarrow \mathfrak{L}_2(K, H)$ — измеримые, непрерывные по X (при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$) функции, A — линейный оператор, определенный на всюду плотном в

H множестве $\mathcal{D}(A)$ и порождающий C_0 -полугруппу $S(t)$ на H , $\xi : \Omega \rightarrow \mathcal{D}(A)$ — \mathcal{F}_0 -измеримая случайная величина, имеющая конечный момент $\mathbb{E}\|\xi\|^p < \infty$ порядка $p > 2$. В дальнейшем для сокращения обозначений аргумент ω будем опускать. Все интегралы ниже записаны в предположении их существования и конечности.

Относительно функций $f(t, X)$ и $g(t, X)$ будем предполагать, что выполнены два условия:

1. *Локальное условие Липшица.* Для любого $a > 0$ существует постоянная q_a такая, что для всех $t \in [0, a]$ и любых $\varphi, \psi \in H$, таких, что $\|\varphi\| \leq a$, $\|\psi\| \leq a$, выполняются неравенства

$$\|f(t, \varphi) - f(t, \psi)\| \leq q_a \|\varphi - \psi\|, \quad \|g(t, \varphi) - g(t, \psi)\| \leq q_a \|\varphi - \psi\|.$$

2. *Условие линейного порядка роста.* Существует непрерывная функция $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}^+$ и любого $\eta \in H$ выполняются неравенства

$$\|f(t, \eta)\| \leq k(t)(1 + \|\eta\|), \quad \|g(t, \eta)\| \leq k(t)(1 + \|\eta\|).$$

К настоящему времени получены глубокие результаты о количественных и качественных свойствах решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. Теоремы о существовании и асимптотических свойствах исходного уравнения с начальным условием доказаны в работах Т. Танигучи (1998), М.М. Васьковского (2018). В работах К. Лю (1997, 2005) были получены почти наверное точные асимптотические оценки для решений исходного уравнения с начальным условием без запаздывания с коэффициентами, удовлетворяющими глобальному условию Липшица. В статье А. Ичикавы (1982) получены оценки для математического ожидания функционала Ляпунова от решения исходной задачи в случае автономных коэффициентов, удовлетворяющих глобальному условию Липшица. В статье Т. Танигучи (2002) доказана экспоненциальная устойчивость p -го момента решения исходного уравнения $\mathbb{E}\|X(s, \omega)\|^p$, $p > 2$, в предположении, что коэффициенты f, g удовлетворяют локальному по t и глобальному по X условию Липшица. Настоящая работа призвана обобщить полученные результаты на случай коэффициентов уравнения (28), удовлетворяющих локальному условию Липшица.

О п р е д е л е н и е 5.8. Пусть положительная функция $\lambda(t)$ определена для достаточно больших $t > 0$, скажем, $t \geq T > 0$. Предположим, что

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \infty$.
2. $\ln \lambda(t)$ равномерно непрерывна по $t \geq T$.
3. Существует константа $\tau \geq 0$ такая, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln \ln t}{\ln \lambda(t)} \leq \tau$.

Будем говорить, что слабое решение задачи (28), (29) притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$, если найдется $\gamma > 0$ такое, что п.н. выполняется неравенство

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|X(t)\|}{\ln \lambda(t)} \leq -\gamma.$$

Рассмотрим функционал $V(t, x)$ класса $C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$, т.е. принимающий значения в \mathbb{R}^+ и имеющий непрерывные производные по Фреше по переменной $t \in \mathbb{R}^+$ — до первого порядка, по переменной $x \in H$ — до второго порядка (включительно). Введем операторы L ,

B , действующие на V следующим образом:

$$LV(t, x) = V'_t(t, x) + \langle V'_x(t, x), Ax + f(t, x) \rangle_H + \\ + \frac{1}{2} \text{tr}[V''_{xx}(t, x)(g(t, x)Q^{1/2})(g(t, x)Q^{1/2})^*], \quad (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A), \quad (30)$$

$$BV(t, x) = \text{tr}[V''_{xx}(t, x) \otimes V''_{xx}(t, x)(g(t, x)Q^{1/2})(g(t, x)Q^{1/2})^*], \\ (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times H. \quad (31)$$

Теорема 5.4. [2]. Пусть задан функционал $V(t, x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$ и две неотрицательные непрерывные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$. Предположим, что существуют постоянные $r > 0$, $m \geq 0$, постоянные $\mu, \nu, \theta \in \mathbb{R}$ и невозрастающая положительная функция $\zeta(t)$ такие, что $\frac{m - (\max\{\nu, \mu + \tau\} + \theta)}{r} > 0$ и выполнены следующие условия:

1. $\|x\|^r(\lambda(t))^m \leq V(t, x)$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times H$.
2. $LV(t, x) + \zeta(t)BV(t, x) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t)V(t, x)$ для всех $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A)$.
3. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\ln(\int_0^t \psi_1(s) ds)}{\ln \lambda(t)} \leq \nu$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{\int_0^t \psi_2(s) ds}{\ln \lambda(t)} \leq \theta$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \inf \frac{\ln \zeta(t)}{\ln \lambda(t)} \geq -\mu$.

Тогда слабое решение задачи (28), (29) притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$.

Пример. Рассмотрим следующую стохастическую дифференциальную систему (значение параметров $\alpha, m > 0$ будет уточнено ниже)

$$dX_t(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2} X_t(x) + \alpha \sin \left(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos X_t^1 \right) \right) dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}} X_t(x) dW_t, \\ dX_t^1 = \left(\alpha X_t^1 \sin X_t^1 + \left(\int_0^\pi X_t(x)^2 dx \right)^{1/2} \right) dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}} \left(\int_0^\pi X_t(x)^2 dx \right)^{1/2} dW_t, \\ t > 0, \quad 0 < x < \pi$$

как уравнение относительно $\bar{X}_t = (X_t(\cdot), X_t^1)^\top$ в пространстве $H \times \mathbb{R}$ с начальным условием $\bar{X}_0 = (X_0(x), X_0^1)^\top = (x_0(x), x_0^1)$, $x \in (0, \pi)$, $K = \mathbb{R}$, $H = L_2[0, \pi]$ — гильбертово пространство классов эквивалентности квадратично интегрируемых по Лебегу функций $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$. В компактной форме это уравнение примет вид

$$d\bar{X}_t = (\bar{A}\bar{X}_t + f(t, \bar{X}_t))dt + g(t, \bar{X}_t)dW_t, \quad (32) \\ f(t, \bar{X}_t) = \alpha \left(\sin(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}} \cos X_t^1), X_t^1 \sin X_t^1 + \|X_t(x)\|_H \right)^\top, \\ g(t, \bar{X}_t) = \alpha e^{-\frac{mt}{2}} \left(X_t(x), \left(\int_0^\pi X_t(x)^2 dx \right)^{1/2} \right)^\top, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ A = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(A) = \{u \in C_2[0, \pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$$

Положим $V(t, \bar{u}) = V(t, u) = e^{mt}\|u\|^2$, $u \in H$, $\lambda(t) = e^t$, $\psi_1(t) \equiv \alpha\pi$, $\psi_2(t) \equiv \theta$, $\tau = \mu = \nu = 0$. В статье [2] показано, что при таком выборе, достаточно малом α и достаточно большом m , условия теоремы 5.4 будут выполнены, т.е. имеет место притяжение решений к нулю. При этом функция g удовлетворяет глобальному условию Липшица, а функция f удовлетворяет локальному, но не удовлетворяет глобальному условию Липшица.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Формула замены переменных и теорема о непрерывной зависимости от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста (теоремы 2.2, 2.3).
2. Асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста (теорема 3.1).
3. Методы точного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа (теоремы 4.1, 4.2, 4.3).
4. Теорема об асимптотической устойчивости системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито с разрывными коэффициентами по нестационарному линейному приближению. Достаточные условия притяжения к нулю слабых решений нелинейного стохастического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве с нелипшицевыми коэффициентами (теоремы 5.3, 5.4).