Доклад И.В. Качана на защите диссертации "Свойства решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста"

В общем смысле под стохастическим дифференциальным уравнением понимают выражение следующего вида

$$dX(t,\omega) = f(t,\omega,X(t,\omega))dt + g(t,\omega,X(t,\omega))dB(t,\omega),$$

в котором $B(t,\omega)$ — стандартное или дробное броуновское движение. Формализм приведенной записи заключается в том, что ввиду недифференцируемости траекторий процесса $B(t)$, выражение $dB(t)$ лишено смысла. Однако, не разрывая связи с классической теорией дифференциальных уравнений, опираясь на интегральный критерий, уравнение понимают в интегральном смысле:

$$X(t,\omega) = X(s,\omega) + \int_s^t f(\tau,\omega,X(\tau,\omega))d\tau + \int_s^t g(\tau,\omega,X(\tau,\omega))dB(\tau,\omega),$$

где интеграл по $d\tau$ является интегралом Бохнера при каждом фиксированном ω, а способ определения интеграла по dB зависит от свойств процесса $B(t)$. Можно выделить три основных подхода к определению интергралов по дробному броуновскому движению: потраекторные интегралы (Янга, Губинелли), стохастические интегралы (Ито, Стратоновича, θ- и μ-интегралы) для стандартного броуновского движения и интегралы Вика-Ито-Скорохода, основанные на дифференцировании процесса $B(t)$ в пространствах обобщенных функций специального вида.

В настоящей работе исследуются уравнения, содержащие дробные броуновские движения с различными индексами Харста и снос. Для определения интегралов по дробным броуновским движениям с показателями Харста H, большими $1/3$, но меньшими $1/2$, будет использован подход Губинелли, для H, больших $1/2$ — подход Янга, а для H, равных $1/2$ (соответствующих стандартным броуновским движениям) — подходы Ито и Стратоновича.

Стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями находят множество приложений, главным образом в физике и финансовой математике. М. Клепцына, А. Ле Бретон и М.-К. Рубо (2000) использовали модели с дробными броуновскими движениями для описания сигнальных процессов в фильтрационных системах. П. Черидито (2001) рассматривает модель Самуэльсона для движения цен на акции, используя дробные броуновские движения. М. Сале (1998) исследует стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями в контексте моделей облигаций и акций. Ряд других финансовых приложений также можно найти в монографии Ю.С. Мишуры (2008). Отметим, что дробное броуновское движение с индексом Харста $H = 1/2$, называемое стандартным, совпадает с винеровским процессом. Стохастические дифференциальные уравнения со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах могут быть применены для истолкования и обобщения многих классических задач математической физики, фильтрации, нейрофизиологии, генетики популяций и уже упомянутой финансовой математики. Для уравнений со стандартным броуновским движением также развиты численные методы построения приближенных решений[1].

Настоящая работа ставит своей целью исследование общих и асимптотических свойств решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых многомерными дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста.

---

[1] *Егоров, А.Д.* Об аппроксимации функциональных интегралов по мерам, порожденным решениями стохастических уравнений по мартингалам / А.Д. Егоров // Доклады АН БССР. — 1991. — Т. 35, є 1. — С. 32–35.

В первой главе диссертации приведен аналитический обзор литературы по теме исследования.

Во второй и третьей главе диссертации исследуются стохастические дифференциальные уравнения с дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста, большие $1/3$. Рассматриваемые уравнения охватывают класс уравнений, содержащих дробное и стандартное броуновские движения, а также снос.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, на котором определены независимые одномерные дробные броуновские движения $B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)}$ с индексами Харста $H_1, \ldots, H_d \in (1/3, 1)$. Введем обозначение $B_t = (B_t^{(0)}, \ldots, B_t^{(d)})^\top$ для $(d+1)$-мерного дробного броуновского движения, в котором $B_t^{(0)} = t$. Пусть также $H_0 = 1$. Пусть $H_{\min}$ — значение наименьшего из индексов Харста H_i, $i = 0, \ldots, d$. Выберем и зафиксируем некоторое $H \in (1/3, 1/2]$ такое, что $H < H_{\min}$.

Объектом изучения второй главы является следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = f(X_t) dB_t, \ t \in [0, T], \tag{1}$$

в котором f — $(n \times (d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 0, \ldots, d$. Через X_t^x будем обозначать решение уравнения (1) с начальным условием $X_0 = x \in \mathbb{R}^n$. Решение понимается в интегральном смысле, а интеграл по dB_t определяется как потраекторный интеграл Губинелли в рамках теории грубых траекторий. Данная теория была разработана Т. Лайонсом (1998), развита М. Губинелли (2004), П. Фрицем и М. Хайрером (2014) и является основным инструментом исследования уравнений с дробными броуновскими движениями с показателями Харста H, меньшими $1/2$. Стоит отдельно отметить М. Хайрера, который впервые применил теорию грубых траекторий к исследованию стохастических дифференциальных уравнений в частных производных и разработал так называемую теорию регулярных структур. Данный результат получил высокую оценку математического сообщества и был удостоен Филдсовской премии в 2014 г.

Заметим, что уравнение (1) охватывает важный частный случай, когда все индексы Харста H_i либо равны $1/2$, либо равны некоторому $H > 1/2$ (то есть в уравнение входят только стандартные броуновские движения W_t и дробные броуновские движения $B_t^{(H)}$ с одним и тем же индексом Харста $H > 1/2$). В данном случае мы приходим к уравнению Стратоновича, сводимое к уравнению смешанного типа, в котором интеграл по стандартному броуновскому движению W_t понимается как интеграл Ито, а интеграл по дробному броуновскому движению $B_t^{(H)}$ определяется как потраекторный интеграл Янга. В свою очередь, уравнения смешанного типа охватывают стохастические дифференциальные уравнения Ито, а также уравнения, управляемые дробными броуновскими движениями со сносом, впервые рассмотренные в работе Д. Нуаларта и А. Раскану (2008).

Глава 2 настоящей работы также посвящена общим свойствам решений уравнений (1). Существование и единственность решений, непрерывная зависимость решений от начальных данных детерминированных уравнений (1), где в качестве B_t выступают детерминированные функции, непрерывные по Гельдеру с показателем $\alpha > 1/3$, были впервые исследованы в работе М. Губинелли (2004) и впоследствии развиты в монографии П. Фрица и М. Хайрера (2014). Однако обобщение теоремы существования решений уравнений (1) на недетерминированный случай уравнений с дробными броуновскими движениями, вообще говоря, не столь тривиально, поскольку из существования решения $X(t, \omega)$ при каждом ω не следует его измеримость по ω. Обоснование измеримости решений было дано в работе А. Нойенкирха, И. Нурдэна (2009), где доказана теорема существования решений уравнений (1) с коэффициентами f класса C_b^2, дробными броуновскими движениями, имеющими один и тот же индекс Харста $H > 1/3$, и сносом, а также доказана формула замены переменных для указанных уравнений. В настоящей главе получена теорема существования, в целом аналогичная теореме из работы А. Нойенкирха и И. Нурдэна, для уравнений (1).

Через $C_b^k(V,U)$ будем обозначать пространство функций $\varphi\colon V\to U$, имеющих непрерывные и ограниченные производные до порядка k включительно с нормой $\|\varphi\|_{C_b^k}=\sum_{j=0}^k\|D^j\varphi\|_\infty$, где $\|D^j\varphi\|_\infty=\sup_{x\in V}|D^j\varphi(x)|$. Следующая теорема дает достаточное условие существования и единственности решения уравнения (1).

Теорема 2.1.[2] [5]. *Если $f\in C_b^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, то для любого $x\in\mathbb{R}^n$ уравнение (1) имеет единственное решение с начальным условием $X_0=x$, причем $X'=f(X)$, $(f(X),(f(X))')\in\mathcal{D}_B^{2H}([0,T],\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$ п.н. Более того, если $H_i>H^*\geq 1/2$ для всех $i=0,\ldots,d$, то справедливо включение $X\in C^{H^*}([0,T],\mathbb{R}^n)$ п.н. и интеграл в определении решения уравнения (1) является потраекторным интегралом Янга.*

Следующие две теоремы являются основными результатами второй главы.

Формула замены переменных, полученная в настоященей работе, обобщает аналогичные результаты работ Ф. Бадуэна и Л. Кутэн (2007), А. Нойенкирха и И. Нурдэна (2009) на случай уравнения (1) со сносом и дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста.

Теорема 2.2. [5]. *Пусть $f\in C_b^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g\in C_b^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Тогда для любых s, $t\in[0,T]$ п.н. справедлива следующая формула замены переменных:*

$$g(X_t)=g(X_s)+\int_s^t Dg(X_r)f(X_r)dB_r,\qquad s,t\in[0,T],\tag{2}$$

где X_t — решение уравнения (1).

Наряду с уравнением (1) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\widetilde{X}_t=\widetilde{f}(\widetilde{X}_t)dB_t,\quad t\in[0,T],\tag{3}$$

в котором $\widetilde{f}$ — $(n\times(d+1))$-матрица, столбцами которой являются векторы $\widetilde{f}_i\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $i=0,\ldots,d$.

Результаты, полученные в работах М. Губинелли, П. Фрица и М. Хайрера в приложении к стохастическим дифференциальным уравнениям означают, что почти наверное имеет место потраекторная интегральная непрерывность решений уравнений вида (1) с дробным броуновским движением B_t, компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H>1/3$, в условиях существования указанных решений. Настоящая работа обобщает указынные результаты на случай компонент B_t, имеющих разлиные индексы Харста $H_i>1/3$.

Теорема 2.3. [3]. *Пусть $f,\widetilde{f}\in C_b^3(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\leq 1$. Обозначим через X_t, $\widetilde{X}_t$ решения уравнений (1), (3) с начальными условиями $X_0=\xi$, $\widetilde{X}_0=\widetilde{\xi}$ соответственно. Тогда:*

1) *почти наверное справедлива следующая оценка*

$$\|X-\widetilde{X}\|_H\leq C\left(|\xi-\widetilde{\xi}|+\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\right)\tag{4}$$

для некоторой случайной величины $C=C(H,T,\|f\|_{C_b^3},\|B\|_H,\|\mathbb{B}\|_{2H})$. Причем C может быть выбрана не зависящей от T, если $T\in(0,1]$;

2) *имеет место следующее неравенство*

$$\mathbb{E}\big(\ln\|X-\widetilde{X}\|_H\big)\leq C+\ln\big(\mathbb{E}|\xi-\widetilde{\xi}|+\|f-\widetilde{f}\|_{C_b^2}\big),\tag{5}$$

[2] Trees and asymptotic expansions for fractional stochastic differential equations / A. Neuenkirch [et al.] // Annales de I Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics. — 2009. — Vol. 45, є 1. — P. 157–174.

где $C = C(H, H_1, \ldots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}) \in \mathbb{R}$ *— константа, вообще говоря, зависящая от* H, $H_1, \ldots, H_d$, T, $\|f\|_{C_b^3}$.

Третья глава диссертации посвящена исследованию асимптотических разложений математических ожиданий функционалов от решений уравнения (1).

Будем придерживаться следующих компактных записей:

$$\Delta^k[0,t] = \{(t_1, \ldots, t_k) \in [0,t]^k : \ 0 \leq t_1 < \ldots < t_k \leq t\} \tag{6}$$

$$\int_{\Delta^k[0,t]} dB^{(I_k)} = \int_0^t \int_0^{t_k} \ldots \int_0^{t_2} dB_{t_1}^{(i_1)} \ldots dB_{t_{k-1}}^{(i_{k-1})} dB_{t_k}^{(i_k)}, \tag{7}$$

$$I_k = (i_1, \ldots, i_k) \in \mathbb{N}_d^k := \{0, \ldots, d\}^k, \tag{8}$$

$$D_f^{(i)} = \sum_{j=1}^n f_{ji}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}, \ i \in \{0, \ldots, d\} \qquad D_f^{(I_k)} = D_f^{(i_1)} \ldots D_f^{(i_k)}, \tag{9}$$

$$\mathbf{P}_t g(x) = \mathbb{E} g(X_t^x), \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Исследование при малых значениях времени t семейства операторов (10) представляет особый интерес. Их асимптотические разложения могут быть применены для получения дифференциальных уравнений в частных производных колмогоровского типа для математических ожиданий от решений уравнения (1) в некоторых частных случаях (например, когда все индексы Харста $H_i = 1/2$ или когда дифференциальные потоки, соответствующие коэффициентам уравнения (1), коммутируют), а также, как показано в статье Ф. Бадуэна и Л. Кутэн (2007), для получения систем дифференциальных уравнений в частных производных для инвариантных мер, связанных с решениями уравнений (1).

Известны несколько работ, посвященных исследованию семейства операторов (10). Ф. Бадуэн и Л. Кутэн (2007) вывели асимптотическую формулу для операторов $\mathbf{P}_t$, используя теорию грубых траекторий (rough paths) Т. Лайонса в случае, когда $H_1 = \ldots = H_d > 1/3$ для уравнения (1) без сноса. А. Нойенкирх, И. Нурдэн (2009) рассматривали уравнение (1) со сносом в случае $H_1 = \ldots = H_d > 1/3$ и получили асимптотическую формулу для операторов $\mathbf{P}_t$, используя теорию интегрирования М. Губиннелли. В третьей главе настоящей работы результаты указанных статей обобщены на случай уравнения (1) со сносом и дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста. В данной главе уравнение (1) рассматривается с точки зрения теории грубых траекторий как уравнение Стратоновича. Решения таких уравнений есть равномерные пределы последовательности аппроксимаций Вонга-Закаи, т.е. уравнений вида (1), в которых процесс B_t заменяется его кусочно-линейными аппроксимациями $B_m(t)$, введенными Л. Кутэн и Ж. Киан (2002).

Основной результат третьей главы представлен следующей теоремой.

Теорема 3.1. [4, 5]. *Пусть* $f \in C_b^{N+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g \in C_b^{N+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого фиксированного* $H \in (1/3, 1/2]$ *такого, что* $H < H_{min} = \min\limits_{i=0,\ldots d} H_i$ *справедливо следующее асимптотическое разложение:*

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + \sum_{k=1}^N \sum_{I_k \in \{0,\ldots,d\}^k} t^{|H_{I_k}|} \cdot (D_f^{(I_k)} g)(x) \mathbb{E}\left(\int_{\Delta^k[0,1]} dB^{(I_k)} \right) + O(t^{(N+1)H}), \tag{11}$$

при $t \to 0$, *где* $|H_{I_k}| = H_{i_1} + H_{i_2} + \ldots + H_{i_k}$ *— сумма индексов Харста дробных броуновских движений* $B^{(i_1)}, B^{(i_2)}, \ldots, B^{(i_k)}$.

Пример. Рассмотрим следующее одномерное уравнение:

$$dX_t = b(X_t)\, dt + \sigma(X_t)\, dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/2, 1)$, b, $\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции класса C_b^4. Пусть $g \in C_b^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, тогда согласно теореме 3.1 справедливо асимптотическое разложение следующего вида:

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + t\, b(x) Dg(x) + \frac{1}{2} t^2 \left(b(x) Db(x) Dg(x) + b^2(x) D^2 g(x) \right) + \\ + \frac{1}{2} t^{2H} \left(\sigma(x) D\sigma(x) Dg(x) + \sigma^2(x) D^2 g(x) \right) + O\left(t^{3H}\right).$$

Также в третьей главе получены аналоги уравнений Колмогорова для математических ожиданий функционалов от решений в предположении, что компоненты $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ правой части уравнения (1) являются функциями класса $C_b^{d+2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ такими, что справедливо равенство $D_f^{(i)} \circ D_f^{(j)} = D_f^{(j)} \circ D_f^{(i)}$, для любых $i, j = 0, \ldots, d$. В таком случае справедлива следующая теорема.

Теорема 3.3 [5] *Для любой функции $g \in C_b^{d+3}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ справедливо равенство*

$$\mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right) = \left(\exp\left(t D_f^{(0)} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} t^{2H_i} (D_f^{(i)})^2 \right) g \right)(x).$$

Другими словами, функция $\varphi(t, x) = \mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_f^{(0)} \varphi + \sum_{i=1}^{d} H_i t^{2H_i - 1} (D_f^{(i)})^2 \varphi, \tag{12}$$

с начальным условием

$$\varphi(0, x) = g(x). \tag{13}$$

Пример. Рассмотрим одномерное стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dX_t = \sin X_t\, dt + 2H^{-1} \sin X_t\, dB_t^H,$$

в котором B_t^H — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/3, 1)$. Пусть также задано начальное условие $X_0 = x \in \mathbb{R}$. Согласно теореме 3.3 функция $\varphi(t, x) = \mathbb{E} g(X_t^x)$ будет являться решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\sin x + t^{2H-1} \sin 2x \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4t^{2H-1}}{H} \sin^2 x \, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

с начальным условием $\varphi(0, x) = g(x)$.

Четвертая глава диссертации посвящена получению методов интегрирования стохастических дифференциальных уравнений смешанного типа.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ заданы d-мерное стандартное броуновское движение $W(t)$ и d-мерное дробное броуновское движение $B(t)$ с показателем Харста $H \in (1/2, 1)$.

Объектом изучения четвертой главны является стохастическое дифференциальное уравнение смешанного типа

$$dx(t) = f(t, x(t)) dt + g(t, x(t)) dW(t) + \sigma(t, x(t)) dB(t), \quad t \geq 0, \tag{14}$$

где $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d}$ — детерминированные функции.

Интерес к стохастическим дифференциальным уравнениям смешанного типа вызван тем, что наличие слагаемого с дробным броуновским движением позволяет строить более точные математические модели, учитывающие эффект долговременной памяти процессов, что особенно важно при моделировании экономических и финансовых процессов.

Впервые смешанные уравнения были рассмотрены К. Кубилюсом (2002), в данной работе была получена первая теорема существования и единственности для уравнений смешанного типа без сноса, содержащих винеровский процесс W_t и дробное броуновское движение B_t^H с индексом Харста $H > 1/2$, сочетая при этом теории интегрирования Ито и Янга. Д. Нуаларт и Дж. Гуэрра (2008) доказали теорему существования и единственности для уравнений, содержащих снос. Некоторые другие обобщения теорем существования, а также свойства стохастических дифференциальных уравнений и включений смешанного типа исследованы в работах Ю.С. Мишуры, Г.М. Шевченко, А.А. Левакова и М.М. Васьковского.

В монографиях С. Ватанабэ (1986), Гарда (1989), А.А. Левакова (2009), работах Г. Досса (1977), М.А. Курицина (2000) были получены некоторые методы точного интегрирования уравнений Ито. Методы точного интегрирования, полученные в четвертой главе настоящей работы, обобщают результаты монографии А.А. Левакова на случай уравнений смешанного типа.

Будем рассматривать одномерное уравнение (14), считая, что $d = 1$. Вместе с ним рассмотрим простейшее уравнение

$$dy(t) = u(t)dt + v(t)dW(t) + b(t)dB(t), \quad t \geq 0. \tag{15}$$

Решение уравнения (15) определяется следующим соотношением:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t u(\tau)d\tau + \int_0^t v(\tau)dW(\tau) + \int_0^t b(\tau)dB(\tau), \quad t \geq 0.$$

Предположим, что существуют некоторые функции $r(t), q(t)$ такие, что

$$g(t,x)\left(\frac{g_t'(t,x)}{g^2(t,x)} + \left(\frac{f(t,x)}{g(t,x)}\right)_x' + \frac{1}{2}g_{x^2}''(t,x)\right) = r(t), \tag{16}$$

$$\frac{\sigma(t,x)}{g(t,x)} = q(t). \tag{17}$$

Теорема 4.1. [6]. *Уравнение* (14) *с функцией* $g(t,x) \neq 0$ *приводимо к уравнению* (15) *с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно* x *преобразования* $y = F(t,x)$ *тогда и только тогда, когда найдутся функции* $q(t), r(t)$ *такие, что оказываются выполненными соотношения* (16), (17).

Пример. Решение линейного однородного уравнения

$$dx(t) = \alpha(t)x(t)dt + \beta(t)x(t)dW(t) + \gamma(t)x(t)dB(t), \quad t \geq 0,$$

выражается формулой

$$x(t) = x(0)\exp\left(\int_0^t \Big(\alpha(\tau) - \frac{1}{2}\beta^2(\tau)\Big)d\tau + \int_0^t \beta(\tau)dW(\tau) + \int_0^t \gamma(\tau)dB(\tau)\right).$$

Решение линейного неоднородного уравнения

$$dx(t) = \big(\alpha_1(t)x(t) + \alpha_2(t)\big)dt + \big(\beta_1(t)x(t) + \beta_2(t)\big)dW(t) + \\ + \big(\gamma_1(t)x(t) + \gamma_2(t)\big)dB(t), \quad t \geq 0,$$

выражается формулой

$$x(t) = x_0(t)\Bigg(x(0) + \int_0^t \frac{\alpha_2(\tau) - \beta_1(\tau)\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} d\tau + \\ + \int_0^t \frac{\beta_2(\tau)}{x_0(\tau)} dW(\tau) + \int_0^t \frac{\gamma_2(\tau)}{x_0(\tau)} dB(\tau)\Bigg),$$

где $x_0(t)$ — решение соответствующего линейного однородного уравнения с начальным условием $x_0(0) = 1$.

Пример. Рассмотрим линейное однородное уравнение

$$dx(t) = -2t \cdot x(t)dt + t^{1-H}x(t)dB(t), \quad t \geq 0,$$

Его решение выражается формулой

$$x(t) = x(0)\exp\left(-t^2 + \int_0^t \tau^{1-H} dB(\tau)\right).$$

Нулевое решение рассматриваемого уравнения устойчиво по вероятности, то есть для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_1 \exp\left(-\frac{C^2 \mathbb{E}\|B\|_H^2}{4\varepsilon_2}\right) > 0$, $C = \zeta(1 + 1/H)$, такая, что для любого решения с начальным значением $x(0)$ таким, что $|x(0)| < \delta$ п.н., выполнено неравенство $\mathsf{P}\{\sup_{t\geq 0}|x(t)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2$.

Далее рассмотрим одномерное автономное уравнение

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dW(t) + \sigma(x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{18}$$

и будем исследовать наличие автономной замены $y = F(x)$, приводящей указанное уравнение к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = (\alpha_1 y(t) + \alpha_2)dt + (\beta_1 y(t) + \beta_2)dW(t) + (\gamma_1 y(t) + \gamma_2)dB(t),\ t \geq 0 \tag{19}$$

с постоянными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$.

Предположим, что существуют некоторые постоянные $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$A(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{g'(x)}{2}, \tag{20}$$

$$\frac{(g(x)A'(x))'}{A'(x)} = c_1, \tag{21}$$

$$\frac{\sigma(x)}{g(x)} = c_2, \tag{22}$$

Теорема 4.2. [6]. *Уравнение* (18) *с функциями* $g(x) \neq 0$, $A'(x) \neq 0$ *приводимо к уравнению* (19) *с помощью некоторого дважды непрерывно дифференцируемого и обратимого относительно* x *преобразования* $y = F(x)$ *тогда и только тогда, когда найдутся постоянные* c_1, c_2 *такие, что оказываются выполненными соотношения* (20), (21), (22).

Пример. Уравнение бернуллиевского типа

$$dx(t) = (\alpha x^n(t) + \beta x(t))dt + \gamma x(t)dW(t) + \delta x(t)dB(t)$$

с помощью замены $y = F(x) = \frac{1}{1-n}x^{1-n}$ приводится к линейному неоднородному уравнению

$$dy(t) = \left(\alpha + (n-1)\left(-\beta + \frac{\gamma^2 n}{2}\right)y(t)\right)dt + \\ + \gamma(1-n)y(t)dW(t) + \delta(1-n)y(t)dB(t).$$

Вернемся к уравнению (14) в пространстве $\mathbb{R}^d$ и вместе с ним рассмотрим соответствующее уравнение Стратоновича

$$dx(t) = (f(t, x(t)) - c(t, x(t)))dt + g(t, x(t)) \circ dW(t) + \sigma(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \tag{23}$$

в котором $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $\sigma\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$, $c\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ и

$$c_i(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial g_{ij}(t, x)}{\partial x_k} g_{kj}(t, x), \quad i = 1, \ldots, d.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. [6]. *Пусть функция f непрерывна, функция g непрерывна вместе со своими производными $\frac{\partial g}{\partial t}$, $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, а функция σ удовлетворяет (α, β)-условию Гельдера по (t, x) для некоторых $\alpha > 1 - H$, $\beta > 2 - 2H$. Процесс $x(t)$ является решением уравнения* (14) *тогда и только тогда, когда процесс $x(t)$ является решением уравнения Стратоновича* (23).

Пример. Для уравнения

$$dx(t) = x^3(t)dt + x^2(t)dW(t) + x^2(t)dB(t),\ x(0) = x_0,$$

соответствующее уравнение Стратоновича имеет вид

$$dx(t) = x^2(t) \circ dW(t) + x^2(t)dB(t).$$

Последнее уравнение имеет решение

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0(W(t) + B(t))},$$

которое является решением и исходного уравнения.

Глава 5 посвящена исследованию устойчивости и притяжения решений стохастических дифференциальных уравнений со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах. Для таких уравнений определяющую роль в исследовании устойчивости и притяжения решений по-прежнему играют классические методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений: метод функционалов Ляпунова, метод интегральных неравенств, исследование устойчивости нелинейных уравнений по линейному приближению и др., что позволяет получать более точные результаты по сравнению с уравнениями (1) более общего вида.

В первой части главы 5 рассматриваются стохастические дифференциальные уравнения в пространстве $\mathbb{R}^d$ с выделенной линейной частью вида:

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t)))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad t \geq 0. \tag{24}$$

где $W(t)$ — стандартное d-мерное броуновское движение, $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — кусочно непрерывная функция, $\sup_{t\geq 0} |A(t)| \leq M$, $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — измеримые по Борелю функции такие, что $f(t, 0) = 0$ и $g(t, 0) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$ и выполнено условие линейного порядка роста по x, то есть существует постоянная C такая, что для любых $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$, выполняется неравенство $|f(t, x)| + |g(t, x)| \leq C(1 + |x|)$.

Под решением системы (24) понимается решение стохастического дифференциального включения, построенного по уравнению в смысле А.Ф. Филиппова.

Теория устойчивости стохастических дифференциальных уравнений в конечномерных гильбертовых пространствах изучена наиболее полно. В монографии Р. Хасьминского (2012) доказаны аналоги теорем Ляпунова об устойчивости решений уравнения (24) с коэффициентами, удовлетворяющими глобальному условию Липшица. В монографии Е.Ф. Царькова (1982) излагается метод исследования устойчивости решений автономной системы с непрерывными коэффициентами и запаздыванием. Исследованию устойчивости систем с разрывными коэффициентами посвящена статья А.А. Левакова (2011), в которой методом знакопостоянных функций Ляпунова доказаны теоремы об устойчивости решений автономной системы без запаздывания с разрывными коэффициентами f, g. Полученная в настоящей работе теорема об устойчивости по линейному приближению охватывает класс неавтономных уравнений с разрывными коэффициентами.

Наряду с уравнением (24) рассмотрим линейное однородное детерминированное уравнение

$$dX(t) = A(t)X(t)dt, \quad t \geq 0, \tag{25}$$

Через $X^{(s,x)}(t)$ будем обозначать (единственное) решение уравнения (25), удовлетворяющее равенству $X^{(s,x)}(s) = x$.

Определение 5.4. Будем говорить, что уравнение (25) имеет *равномерно экспоненциально устойчивое* нулевое решение, если существуют константы $\Lambda, \lambda > 0$, не зависящие от s, x, такие, что для любых $s \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}^d$ и $t \geq s$ выполняется неравенство

$$|X^{(s,x)}(t)|^2 \leq \Lambda |x|^2 e^{-\lambda(t-s)}.$$

Теорема 5.3. [1]. *Предположим, что функции $f(t,x)$ и $g(t,x)$ таковы, что выполнены соотношения*

$$\frac{|f(t,x)|}{|x|} \xrightarrow[x \to 0]{} 0, \qquad \frac{|g(t,x)|}{|x|} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \tag{26}$$

равномерно по $t \in \mathbb{R}^+$, а система (25) *имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда система* (24) *имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.*

Пример. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((-20 - 0.1\sin t)x(t) + 0.1\cos t\; y(t) + \sin^2 x(t))dt, \\ dy(t) &= (-0.1\cos t\; x(t) - (20 + 0.1\sin t)y(t))dt + \sin^2 y(t)\operatorname{sgn}(x(t))dw(t), \end{aligned} \tag{27}$$

при $t \geq 0$ с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, где $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $w(t)$ – одномерное броуновское движение. Нулевое решение линеаризованной системы

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((-20 - 0.1\sin t)x(t) + 0.1\cos t\; y(t))dt, \\ dy(t) &= (-0.1\cos t\; x(t) - (20 + 0.1\sin t)y(t))dt, \end{aligned}$$

является равномерно экспоненциально устойчивым, и следовательно, по теореме 5.3. нулевое решение системы (27) асимптотически устойчиво по вероятности.

Пусть H и K — сепарабельные гильбертовы пространства, $\mathfrak{L}_2(K,H)$ — пространство операторов Гильберта-Шмидта, действующих из K в H, Q — ядерный симметрический положительно определенный оператор на пространстве K, $W(t,\omega)$ — Q-броуновское движение со значениями в K и ковариационным оператором Q. Во второй части главы 5 рассматриваются эволюционные функциональные уравнения в пространстве H следующего вида:

$$dX(t,\omega) = AX(t,\omega)dt + f(t, X(t,\omega))dt + g(t, X(t,\omega))dW(t,\omega), \quad (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{28}$$

относительно $X \in H$ с начальным условием

$$X(0,\omega) = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega, \tag{29}$$

где $f\colon \mathbb{R}^+ \times H \to H$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times H \to \mathfrak{L}_2(K,H)$ — измеримые, непрерывные по X (при любом фиксированном $t \in \mathbb{R}^+$) функции, A — линейный оператор, определенный на всюду плотном в

H множестве $\mathcal{D}(A)$ и порождающий C_0-полугруппу $S(t)$ на H, $\xi : \Omega \to \mathcal{D}(A)$ — $\mathcal{F}_0$-измеримая случайная величина, имеющая конечный момент $\mathbb{E}\|\xi\|^p < \infty$ порядка $p > 2$. В дальнейшем для сокращения обозначений аргумент ω будем опускать. Все интегралы ниже записаны в предположении их существования и конечности.

Относительно функций $f(t, X)$ и $g(t, X)$ будем предполагать, что выполнены два условия:

1. *Локальное условие Липшица.* Для любого $a > 0$ существует постоянная q_a такая, что для всех $t \in [0, a]$ и любых $\varphi, \psi \in H$, таких, что $\|\varphi\| \le a$, $\|\psi\| \le a$, выполняются неравенства
$$\|f(t,\varphi) - f(t,\psi)\| \le q_a\|\varphi - \psi\|, \quad \|g(t,\varphi) - g(t,\psi)\| \le q_a\|\varphi - \psi\|.$$

2. *Условие линейного порядка роста.* Существует непрерывная функция $k\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}^+$ и любого $\eta \in H$ выполняются неравенства
$$\|f(t,\eta)\| \le k(t)(1 + \|\eta\|), \quad \|g(t,\eta)\| \le k(t)(1 + \|\eta\|).$$

К настоящему времени получены глубокие результаты о количественных и качественных свойствах решений стохастических дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах. Теоремы о существовании и асимптотических свойствах исходного уравнения с начальным условием доказаны в работах Т. Танигучи (1998), М.М. Васьковского (2018). В работах К. Лю (1997, 2005) были получены почти наверное точные асимптотические оценки для решений исходного уравнения с начальным условием без запаздывания с коэффициентами, удовлетворяющими глобальному условию Липшица. В статье А. Ичикавы (1982) получены оценки для математического ожидания функционала Ляпунова от решения исходной задачи в случае автономных коэффициентов, удовлетворяющих глобальному условию Липшица. В статье Т. Танигучи (2002) доказана экспоненциальная устойчивость p-го момента решения исходного уравнения $\mathbb{E}\|X(s,\omega)\|^p$, $p > 2$, в предположении, что коэффициенты f, g удовлетворяют локальному по t и глобальному по X условию Липшица. Настоящая работа призвана обобщить полученные результаты на случай коэффициентов уравнения (28), удовлетворяющих локальному условию Липшица.

Определение 5.8. Пусть положительная функция $\lambda(t)$ определена для достаточно больших $t > 0$, скажем, $t \ge T > 0$. Предположим, что

1. $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty$.

2. $\ln \lambda(t)$ равномерно непрерывна по $t \ge T$.

3. Существует константа $\tau \ge 0$ такая, что $\lim_{t\to\infty}\sup \frac{\ln\ln t}{\ln\lambda(t)} \le \tau$.

Будем говорить, что слабое решение задачи (28), (29) притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$, если найдется $\gamma > 0$ такое, что п.н. выполняется неравенство
$$\lim_{t\to\infty}\sup \frac{\ln\|X(t)\|}{\ln\lambda(t)} \le -\gamma.$$

Рассмотрим функционал $V(t,x)$ класса $C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$, т.е. принимающий значения в $\mathbb{R}^+$ и имеющий непрерывные производные по Фреше по переменной $t \in \mathbb{R}^+$ — до первого порядка, по переменной $x \in H$ — до второго порядка (включительно). Введем операторы L,

B, действующие на V следующим образом:

$$LV(t,x) = V_t'(t,x) + \langle V_x'(t,x), Ax + f(t,x)\rangle_H +$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q^{1/2})(g(t,x)Q^{1/2})^\star], \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A), \tag{30}$$
$$BV(t,x) = \mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x) \otimes V_{xx}''(t,x)(g(t,x)Q^{1/2})(g(t,x)Q^{1/2})^\star],$$
$$(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times H. \tag{31}$$

Теорема 5.4. [2]. *Пусть задан функционал $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times H, \mathbb{R}^+)$ и две неотрицательные непрерывные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$. Предположим, что существуют постоянные $r > 0$, $m \geq 0$, постоянные $\mu, \nu, \theta \in \mathbb{R}$ и невозрастающая положительная функция $\zeta(t)$ такие, что $\frac{m-(\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r} > 0$ и выполнены следующие условия:*

1. $\|x\|^r(\lambda(t))^m \leq V(t,x)$ для всех $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times H$.
2. $LV(t,x) + \zeta(t)BV(t,x) \leq \psi_1(t) + \psi_2(t)V(t,x)$ для всех $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{D}(A)$.
3. $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup \frac{\ln\left(\int_0^t \psi_1(s)\,ds\right)}{\ln\lambda(t)} \leq \nu, \quad \lim\limits_{t\to+\infty}\sup\frac{\int_0^t \psi_2(s)\,ds}{\ln\lambda(t)} \leq \theta, \quad \lim\limits_{t\to+\infty}\inf\frac{\ln\zeta(t)}{\ln\lambda(t)} \geq -\mu.$

Тогда слабое решение задачи (28), (29) *притягивается к нулю со скоростью $\lambda(t)$.*

Пример. Рассмотрим следующую стохастическую дифференциальную систему (значение параметров $\alpha, m > 0$ будет уточнено ниже)

$$dX_t(x) = \left(\frac{d^2}{dx^2}X_t(x) + \alpha\sin\left(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}}\cos X_t^1\right)\right)dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}}X_t(x)dW_t,$$
$$dX_t^1 = \left(\alpha X_t^1\sin X_t^1 + \left(\int_0^\pi X_t(x)^2dx\right)^{1/2}\right)dt + \alpha e^{-\frac{mt}{2}}\left(\int_0^\pi X_t(x)^2dx\right)^{1/2}dW_t,$$
$$t > 0, \quad 0 < x < \pi$$

как уравнение относительно $\bar{X}_t = (X_t(\cdot), X_t^1)^\top$ в пространстве $H \times \mathbb{R}$ с начальным условием $\bar{X}_0 = (X_0(x), X_0^1)^\top = (x_0(x), x_0^1)$, $x \in (0,\pi)$, $K = \mathbb{R}$, $H = L_2[0,\pi]$ — гильбертово пространство классов эквивалентности квадратично интегрируемых по Лебегу функций $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$. В компактной форме это уравнение примет вид

$$d\bar{X}_t = (\bar{A}\bar{X}_t + f(t,\bar{X}_t))dt + g(t,\bar{X}_t)dW_t, \tag{32}$$
$$f(t,\bar{X}_t) = \alpha\left(\sin(X_t(x) + e^{-\frac{mt}{2}}\cos X_t^1), X_t^1\sin X_t^1 + \|X_t(x)\|_H\right)^\top,$$
$$g(t,\bar{X}_t) = \alpha e^{-\frac{mt}{2}}\left(X_t(x), \left(\int_0^\pi X_t(x)^2dx\right)^{1/2}\right)^\top, \; \bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix},$$
$$A = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(A) = \{u \in C_2[0,\pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$$

Положим $V(t,\bar{u}) = V(t,u) = e^{mt}\|u\|^2$, $u \in H$, $\lambda(t) = e^t$, $\psi_1(t) \equiv \alpha\pi$, $\psi_2(t) \equiv \theta$, $\tau = \mu = \nu = 0$. В статье [2] показано, что при таком выборе, достаточно малом α и достаточно большом m, условия теоремы 5.4 будут выполнены, т.е. имеет место притяжение решений к нулю. При этом функция g удовлетворяет глобальному условию Липшица, а функция f удовлетворяет локальному, но не удовлетворяет глобальному условию Липшица.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Формула замены переменных и теорема о непрерывной зависимости от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста (теоремы 2.2, 2.3).

2. Асимптотические разложения в окрестности нуля для математических ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста (теорема 3.1).

3. Методы интегрирования стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями смешанного типа, основанные на приведении к простейшим уравнениям, линейным неоднородным уравнениям и переходе к уравнению Стратоновича. (теоремы 4.1, 4.2, 4.3).

4. Теорема об асимптотической устойчивости системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Ито с разрывными коэффициентами по нестационарному линейному приближению. Достаточные условия притяжения к нулю слабых решений нелинейного стохастического дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве с нелипшициевыми коэффициентами (теоремы 5.3, 5.4).