**Доклад И.В. Качана на защите диссертации "Устойчивость решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями"**

Представленная магистерская диссертация посвящена доказательству теорем об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений и исследованию асимптотических свойств решений при малых значениях времени. Основная часть настоящей диссертации включает в себя 4 главы.

В первой главе работы приводятся некоторые сведения из теорий случайных процессов, в частности дробных броуновских движений и интегралов по ним, функционального анализа, дифференциальных уравнений и др.

Вторая глава работы посвящена исследованию стохастических дифференциально-функциональных уравнений со стандартным броуновским движением в гильбертовых пространствах. Основным объектом исследования первого раздела второй главы представленной работы является нелинейное СДУ в $\mathbb{R}^d$ с выделенной линейной частью и запаздыванием

$$dX(t) = (A(t)X(t) + f(t, X(t), X_t))dt + g(t, X(t), X_t)dW(t), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

где $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times C_h \to \mathbb{R}^d$, $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times C_h \to \mathbb{R}^{d\times d}$ – измеримые по Борелю функции, имеющие линейный порядок роста, $X_t = \{X(t+\tau) : -h \leq \tau \leq 0\} \in C_h$, $C_h = C\left([-h, 0], \mathbb{R}^d\right)$, $h > 0$ — время запаздывания, $A\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{d\times d}$ — кусочно-непрерывная функция такая, что $\sup_{t\geq 0} |A(t)| \leq M$, $W(t)$ – $d$-мерное броуновское движение.

Рассмотрим также соответствующее линеаризованное однородное детерминированное нестационарное уравнение

$$dX(t) = A(t)X(t)dt, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

Первая теорема об устойчивости стохастических уравнений по линейному приближению была получена в 1960 г. Кацем и Красовским для обыкновенных дифференциальных уравнений (1) ($g = 0$), в которых вместо $X_t$ рассматривается однородная по времени марковская цепь $Y(t)$ с бесконечным числом состояний. Было доказано, что исходная система устойчива по вероятности, если линеаризованная система экспоненциально устойчива в среднем квадратичном. Схожие результаты, но для процессов $Y(t)$ диффузионного типа были получены Гихманом в конце 60-х гг. Исследованию устойчивости уравнений (1) общего вида без выделенной линейной части ($A = 0$) были посвящены работы Хасьминского, Царькова, Левакова и др. В 70-х гг. Хасьминский доказал аналоги теорем Ляпунова об устойчивости решений уравнения (1) без запаздывания с коэффициентами, удовлетворяющими по переменной $X$ глобальному условию Липшица. В монографии Царькова 1989 г. излагается метод исследования устойчивости решений автономного уравнения (1) с непрерывными коэффициентами и запаздыванием с помощью квадратичных функционалов Ляпунова. Стоит отметить, что результаты всех выше упомянутых работ получены для уравнений с непрерывными коэффициентами. В свою очередь именно уравнения с разрывными коэффициентами играют определяющую роль в теории оптимального управления, теории автоматического регулирования, что обуславливает необходимость изучения такого класса уравнений.

Рассмотрение уравнений с разрывными коэффициентами сопряжено с тем фактом, что существование решения в классическом смысле не гарантируется и для определения решений требуется привлечение дифференциальных включений. Основная идея данной теории принадлежит Филиппову и состоит в том, что разрывные коэффициенты $f(t, x)$, $g(t, x)$ заменяются в каждой точке $(t, x)$ на наименьшие выпуклые множества $F(t, x)$, $G(t, x)$, содержащие все предельные точки $f(t, x^*)$, $g(t, x^*)$ соответственно при $x^* \to x$. Исследованию устойчивости систем с разрывными коэффициентами посвящены работы Левакова. В частности, в статье 2011 г. методом знакопостоянных функций Ляпунова были доказаны теоремы об устойчивости решений автономного уравнения (1) без выделенной линейной части, без запаздывания с разрывными коэффициентами $f, g$. Тем не менее, результаты всех указанных работ не применимы к исследованию устойчивости неавтономных уравнений с разрывными коэффициентами, что и являлось целью данного раздела диссертации. Основной результат представлен следующей теоремой.

**Теорема 2.3 (об устойчивости по линейному приближению).** Предположим, что функции $f(t,x,\varphi)$ и $g(t,x,\varphi)$ таковы, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что выполняются неравенства

$$|f(t,x,\varphi)| \le \varepsilon|x|, \qquad |g(t,x,\varphi)| \le \varepsilon|x|,$$

для любых $x$, $|x| \le \delta_\varepsilon$, $t \in \mathbb{R}^+$, $\varphi \in C\left([-h,0],\mathbb{R}^d\right)$, а уравнение (2) имеет равномерно экспоненциально устойчивое нулевое решение. Тогда уравнение (1) имеет асимптотически устойчивое по вероятности нулевое решение.

Приведем пример уравнения, имеющего асимптотически устойчивое по вероятности слабое нулевое решение на основании теоремы 2.3. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений (3)

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((-20-0.1\sin t)x(t) + 0.1\cos t\; y(t) + \sin^2 x(t))dt,\\ dy(t) &= (-0.1\cos t\; x(t) - (20+0.1\sin t)y(t))dt + \sin^2 y(t)\operatorname{sgn}(x(t-1))dw(t), \end{aligned} \tag{3}$$

при $t \ge 0$ с начальными условиями $x(t) = \psi(t)$, $t \in [-1,0]$, $y(0) = y_0$, где $x$, $y \in \mathbb{R}$, $w(t)$ – одномерное броуновское движение. Нулевое решение линеаризованной системы

$$\begin{aligned} dx(t) &= ((-20-0.1\sin t)x(t) + 0.1\cos t\; y(t))dt,\\ dy(t) &= (-0.1\cos t\; x(t) - (20+0.1\sin t)y(t))dt, \end{aligned}$$

является равномерно экспоненциально устойчивым, и согласно теореме 2.3 нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво по вероятности.

Второй раздел второй главы посвящен исследованию уравнений со стандартным броуновским движением в сепарабельных гильбертовых пространствах. Пусть $H$ и $U$ — сепарабельные гильбертовы пространства, $W(t,\omega)$ — стандартное броуновское движение со значениями в $U$, $C_h = C([-h,0],H)$. Основным объектом исследования второго раздела второй главы представленной работы является нелинейное СДУ в гильбертовом пространстве

$$dX(t,\omega) = AX(t,\omega)dt + f(t,\omega,X_t(\omega))dt + g(t,\omega,X_t(\omega))dW(t,\omega), \quad (t,\omega) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \tag{4}$$

$$X(t,\omega) = \xi(t,\omega), \quad t \in [-h,0],\ \omega \in \Omega, \tag{5}$$

где $X_t(\omega) = \{X(t+\tau,\omega) | \, \tau \in [-h,0]\} \in C_h$, $A$ — линейный оператор, порождающий $C_0$-полугруппу $S(t)$ на $H$, $\xi : [-h,0]\times\Omega \to D(A)$ — непрерывный случайный процесс, имеющий конечный момент $\mathbb{E}\sup_{t\in[-h,0]} \|\xi(t)\|^p < \infty$ порядка $p > 2$, $f\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \times C_h \to H$, $g\colon \mathbb{R}^+ \times \Omega \times C_h \to L_2(U,H)$ — функции, удовлетворяющие двум условиям:

1. **Локальное условие Липшица.** Для любого $a > 0$ существует постоянная $q_a$ такая, что для всех $t \in [0,a]$ и любых $(\mathcal{F},\mathcal{B}(C_h))$-измеримых случайных величин $\varphi,\psi\colon \Omega \to C_h$, таких, что п.н. $\|\varphi\| \le a$, $\|\psi\| \le a$:

$$\|f(t,\omega,\varphi) - f(t,\omega,\psi)\| \le q_a\|\varphi-\psi\|, \quad \|g(t,\omega,\varphi) - g(t,\omega,\psi)\| \le q_a\|\varphi-\psi\|.$$

2. **Условие линейного порядка роста.** Существует непрерывная функция $k\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такая, что для всех $t \in \mathbb{R}^+$ и любой $(\mathcal{F},\mathcal{B}(C_h))$-измеримой случайной величины $\eta\colon \Omega \to C_h$ такой, что $\mathbb{E}\|\eta\|^p<\infty$:

$$\|f(t,\omega,\eta)\| \le k(t)(1+\|\eta\|), \quad \|g(t,\omega,\eta)\| \le k(t)(1+\|\eta\|).$$

Устойчивость решений уравнений (4) исследовалась в работах Лю, Ичикавы, Танигучи и др. В 1982 г. А. Ичикава получил оценки для математического ожидания функционала Ляпунова от решения исходной задачи (4), (5) без запаздывания, в случае автономных коэффициентов, удовлетворяющих глобальному условию Липшица. Лю в 1997 г. были получены п.н. точные асимптотические оценки для решений исходного уравнения с начальным условием без запаздывания с коэффициентами, удовлетворяющими глобальному условию Липшица. Т. Танигучи в 2002 г. доказана экспоненциальная устойчивость $p$-го момента решения исходного уравнения $\mathbb{E}\|X(s,\omega)\|^p$, $p>2$, в предположении, что коэффициенты $f, g$ удовлетворяют локальному условию Липшица. Цель представленного раздела диссертации заключалась в том, чтобы обобщить результаты указанных работ на случай уравнения с запаздыванием и коэффициентами, удовлетворяющими локальному условию Липшица (вместо глобальнго). В свою очередь, уравнения с локально липшициевыми коэффициентами находят свое применение в моделях, включающих уравнения в частных производных со степенными нелинейностями, возникающими например, в нейробиологии (см. монографию Да Прато).

Введем оперторы ляпуновского типа

$$LV(t,x,\varphi)=V_t'(t,x)+\langle V_x'(t,x), Ax+f(t,\varphi)\rangle+$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x)(g(t,\varphi)Q_w^{1/2})(g(t,\varphi)Q_w^{1/2})^\star],\quad (t,x,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times D(A)\times C_h,$$
$$QV(t,x,\varphi)=\mathrm{tr}[V_{xx}''(t,x)\otimes V_{xx}''(t,x)(g(t,\varphi)Q_w^{1/2})(g(t,\varphi)Q_w^{1/2})^\star],$$
$$(t,x,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times H\times C_h.$$

Основной результат представленного раздела выражает

**Теорема 2.4 (об устойчивости).** Пусть задан функционал $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbb{R}^+\times H,\mathbb{R}^+)$ и две неотрицательные непрерывные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$. Предположим, что существуют положительные постоянные $r>0$, $m\geq 0$, постоянные $\mu,\nu,\theta\in\mathbb{R}$ и невозрастающая положительная функция $\zeta(t)$ такие, что $\frac{m-(\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r}>0$ и выполнены следующие условия:

1. $\|x\|^r(\lambda(t))^m\leq V(t,x)$ для всех $(t,x)\in\mathbb{R}^+\times H$.
2. $LV(t,x,\varphi)+\zeta(t)QV(t,x,\varphi)\leq\psi_1(t)+\psi_2(t)V(t,x)$ для всех $t\in\mathbb{R}^+$, $x\in D(A)$ и $\varphi\in C_h$.
3. $\lim\limits_{t\to+\infty}\sup\frac{\ln\left(\int_0^t\psi_1(s)\,ds\right)}{\ln\lambda(t)}\leq\nu$, $\quad\lim\limits_{t\to+\infty}\sup\frac{\int_0^t\psi_2(s)\,ds}{\ln\lambda(t)}\leq\theta$, $\quad\lim\limits_{t\to+\infty}\inf\frac{\ln\zeta(t)}{\ln\lambda(t)}\geq-\mu$.

Тогда слабое решение задачи (4), (5) асимптотически устойчиво.

В качестве примера рассмотрим следующую стохастическую дифференциальную систему

$$dX_t(x)=\left(\frac{d^2}{dx^2}X_t(x)+\alpha\sin\left(X_t(x)+e^{-\frac{mt}{2}}\cos X_t^1\right)\right)dt+\alpha e^{-\frac{mt}{2}}X_t(x)dW_t,$$
$$dX_t^1=\left(\alpha X_t^1\sin X_t^1+\left(\int_0^\pi X_t(x)^2dx\right)^{1/2}\right)dt+\alpha e^{-\frac{mt}{2}}\left(\int_0^\pi X_t(x)^2dx\right)^{1/2}dW_t,$$
$$t>0,\ \ 0<x<\pi$$

как уравнение относительно $\bar{X}_t=(X_t(\cdot),X_t^1)^\top$ в пространстве $H\times\mathbb{R}$ с начальным условием $\bar{X}_0=(X_0(x),X_0^1)^\top=(x_0(x),x_0^1)$, $x\in(0,\pi)$, $H=L_2[0,\pi]$, $U=\mathbb{R}$.

Положим $V(t,\bar{u})=V(t,u)=e^{mt}\|u\|^2$, $u\in H$, $\zeta(t)\equiv 1$, $r=2$, $\psi_1(t)\equiv\alpha\pi$, $\psi_2(t)\equiv\beta$, $\lambda(t)=e^t$, $\tau=\mu=\nu=0$, $\lambda_0=\inf_{u\in D(A)}\frac{\|u'\|^2}{\|u\|^2}\geq\frac{1}{\pi^2}>0$. Можно показать, что при указанном выборе, при достаточно больших $m>0$ и достаточно малых $\alpha>0$ все условия теоремы 2.4

будут соблюдены и, следовательно,

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{\log\|X(t)\|}{t}\le-\frac{m-(\max\{\nu,\mu+\tau\}+\theta)}{r}=-\frac{2\lambda_0-3\alpha-10\alpha^2}{2}<0.$$

Причем коэффициент $g$ уравнения удовлетворяет глобальному условию Липшица, а коэффициент $f$ удовлетворяет локальному, но не удовлетворяет глобальному условию Липшица.

Пусть $B_t^{(1)},\dots,B_t^{(d)}$ — независимые одномерные дробные броуновские движения с индексами Харста $H_1,\dots,H_d\in(1/3,1)$. Обозначим $B_t=(B_t^{(0)},\dots,B_t^{(d)})^\top$ $(d+1)$-мерное дробное броуновское движение, в котором $B_t^{(0)}=t$, $H_0=1$. Пусть $H_{\min}$ — значение наименьшего из индексов Харста $H_i$, $i=0,\dots,d$. Выберем и зафиксируем некоторое $H\in(1/3,1/2]$ такое, что $H<H_{\min}$. Пусть $\xi$, $\widetilde{\xi}$ — случайные величины со значениями в $\mathbb{R}^n$.

Основным объектом исследования третьей и четвертой глав представленной работы является СДУ с дробными броуновскими движениями

$$dX_t=f(X_t)dB_t,\quad t\in[0,T],\tag{6}$$

где $f=(f_0,\dots,f_d)$, $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $i=0,\dots,d$ — достаточно гладкие функции с ограниченными производными. Наряду с уравнением (6) рассмотрим аналогичное уравнение с возмущенной правой частью

$$d\widetilde{X}_t=\widetilde{f}(\widetilde{X}_t)dB_t,\quad t\in[0,T],\tag{7}$$

где $\widetilde{f}=(\widetilde{f}_0,\dots,\widetilde{f}_d)$, $\widetilde{f}_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $i=0,\dots,d$ — также достаточно гладкие функции с ограниченными производными. Отметим, что заявленный класс уравнений охватывает т.н. уравнения смешанного типа которые содержат в себе одновременно стандартное и дробное броуновское движение. Такие уравнения вперывые были ислледованы Нюалартом в 2002 и с тех пор нашли широкое применение в ряде практических сфер, таких как финансовая математика, фильтрационные системы в физике и др.

Третья глава работы посвящена развитию асимптотической теории стохастических дифференциальных уравнений, управляемых дробными броуновскими движениями с различными показателями Харста, большими 1/3. Известны несколько работ, посвященных исследованию семейства операторов $\mathbf{P}_tg=\mathbb{E}g(X_t)$. Ф. Бадуэн и Л. Кутэн в 2007 г. вывели асимптотическую формулу для операторов $\mathbf{P}_t$, используя теорию грубых траекторий (rough paths) Т. Лайонса в случае, когда $H_1=\ldots=H_d>1/3$ для уравнения (6) без сноса. А. Нойенкирх, И. Нурдэн в 2009 г. рассматривали уравнение (6) со сносом в случае $H_1=\ldots=H_d>1/3$ и получили асимптотическую формулу для операторов $\mathbf{P}_t$, используя теорию интегрирования по грубым траекториям М. Губиннелли. В третьей главе указанные результаты обобщены на случай уравнения (6) со сносом и дробными броуновскими движениями, имеющими различные индексы Харста.

**Теорема 3.3 (об асимптотических разложениях).** Пусть $f\in C_b^{N+2}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, $g\in C_b^{N+3}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $N\in\mathbb{N}$. Тогда для любого фиксированного $H\in(1/3,1/2]$ такого, что $H<H_{min}=\min\limits_{i=0,\dots d}H_i$ справедливо следующее асимптотическое разложение для функции $\mathbf{P}_tg(x)=\mathbb{E}g(X_t^x)$:

$$\mathbf{P}_tg(x)=g(x)+\sum_{k=1}^{N}\sum_{I_k\in\{0,\dots,d\}^k}t^{|H_{I_k}|}\cdot(D_f^{(I_k)}g)(x)\mathbb{E}\left(\int_{\Delta^k[0,1]}dB^{(I_k)}\right)+O(t^{(N+1)H}),\tag{8}$$

при $t\to0$, где $|H_{I_k}|=H_{i_1}+H_{i_2}+\ldots+H_{i_k}$ — сумма индексов Харста дробных броуновских движений $B^{(i_1)},B^{(i_2)},\dots,B^{(i_k)}$, $D_f^{(i)}=\sum_{j=1}^n f_{ji}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}$, $i\in\{0,\dots,d\}$, $D_f^{(I_k)}=D_f^{(i_1)}\dots D_f^{(i_k)}$ при $I_k=(i_1,\dots,i_k)$.

**Теорема 3.5 (аналог обратных уравнений Колмогорова).** Предположим, что операторы $D_f^{(i)}$ и $D_f^{(j)}$ коммутируют для любых $i, j \in \{0, \ldots, d\}$. Тогда если $f \in C_b^\infty$, то функция $\varphi(t,x) = \mathbb{E}\left(g(X_t^x)\right)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_f^{(0)}\varphi + \sum_{i=1}^{d} H_i t^{2H_i - 1}(D_f^{(i)})^2 \varphi, \tag{9}$$

с начальным условием $\varphi(0,x) = g(x)$.

**Пример 3.1.**

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t^H,$$

где $B_t^H$ — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/2, 1)$, $b$, $\sigma \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функции класса $C_b^4$.

Согласно теореме 3.3 асимптотические разложения примут вид:

$$\mathbf{P}_t g(x) = g(x) + t\, b(x)Dg(x) + \frac{1}{2}t^2\left(b(x)Db(x)Dg(x) + b^2(x)D^2g(x)\right) +$$

$$+\frac{1}{2}t^{2H}\left(\sigma(x)D\sigma(x)Dg(x) + \sigma^2(x)D^2g(x)\right) + O\left(t^{3H}\right).$$

**Пример 3.2.**

$$dX_t = \sin X_t\,dt + 2H^{-1}\sin X_t\,dB_t^H,$$

где $B_t^H$ — одномерное дробное броуновское движение с индексом Харста $H \in (1/3, 1)$.

Нетрудно показать, что указанное уравнение удовлетворяет коммутативному случаю, и согласно теореме 3.5 функция $\varphi(t,x) = \mathbb{E}g(X_t^x)$ будет являться решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(\sin x + t^{2H-1}\sin 2x\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{4t^{2H-1}}{H}\sin^2 x\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

с начальным условием $\varphi(0,x) = g(x)$.

Четвертая глава работы посвящена доказательству теоремы о непрерывной зависимости от начальных данных решений стохастических дифференциальных уравнений с дробными броуновскими движениями. Первые результаты, касающиеся непрерывной зависимости от начальных данных решений уравнений (6), (7) были получены М. Губинелли в 2004 г. Он же ввел понятие потраекторного интеграла для уравнений (6). Результаты Губинелли означают, что имеет место почти наверное потраекторная интегральная непрерывность решений уравнений вида (6), (7) с дробным броуновским движением $B_t$, компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H > 1/3$, в условиях существования указанных решений. В 2017 г. Нойенкирх получил условия, обеспечивающие локальную почти наверное экспоненциальную устойчивость нулевого решения уравнения (7) на конечном отрезке $[0,T]$ с дробным броуновским движением $B_t$, компоненты которого имеют один и тот же индекс Харста $H > 1/2$. Результаты настоящей главы обобщают упомянутые выше результаты на случай различных индексов Харста $H_i$, $i = 0, \ldots, d$.

Будем считать функцию $f$ фиксированной, а функцию $\widetilde{f}$ — изменяющейся в малой окрестности $f$ в пространстве $C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$. Основной результат 4-й главы представлен следующей теоремой.

**Теорема 4.2 (о непрерывной зависимости от начальных данных).** Пусть $f, \widetilde{f} \in C_b^3(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times(d+1)})$, причем функция $\widetilde{f}$ такова, что $\|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2} \le 1$. Тогда для решений $X_t$, $\widetilde{X}_t$ уравнений (6), (7) с начальными условиями $X_0 = \xi$, $\widetilde{X}_0 = \widetilde{\xi}$ соответственно имеет место следующее неравенство

$$\mathbb{E}\left(\ln\|X - \widetilde{X}\|_H\right) \le C + \ln\left(\mathbb{E}|\xi - \widetilde{\xi}| + \|f - \widetilde{f}\|_{C_b^2}\right), \tag{10}$$

где $C = C(H, H_1, \ldots, H_d, T, \|f\|_{C_b^3}) \in \mathbb{R}$ — константа, вообще говоря, зависящая от $H, H_1, \ldots, H_d$, $T$, $\|f\|_{C_b^3}$.

**Основные положения, выносимые на защиту**

1. Теорема 2.3 об устойчивости по линейному приближению нулевого решения СДУ (1) в $\mathbb{R}^d$ с разрывными коэффициентами и запаздыванием.

2. Теорема 2.4 об устойчивости слабого нулевого решения задачи Коши (4), (5) в гильбертовом пространстве $H$ с локально липшициевыми коэффициентами.

3. Теорема 3.3 об асимптотических разложениях для математических ожиданий функционалов от решений уравнений (6).

4. Теорема 3.5 об аналоге обратных уравнений Колмогорова для уравнений (6) в коммутативном случае.

5. Теорема 4.2 о логарифмической непрерывной зависимости в среднем решений уравнений (6), (7) на конечном отрезке в условиях их существования.