Модификация метода Гаусса:
LU (P) – разложение

$$Ax = b, \quad \det(A) \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$PA = LU$$

$$P - \text{матрица перестановок}$$

$$L - \text{нижняя треугольная матрица}$$

$$U - \text{верхняя треугольная матрица}$$

$$PAx = Pb$$

$$LUx = Pb$$

$$Ly = Pb \quad Ux = y$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица $P -$ формируется из матрицы E путем перестановки соответсвующих строк.

Например, матрица

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

соответствует единичной матрице без перестановок, матрица

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответствует матрице E, у которой 1-ая и 3-я строки переставлены местами.

****
Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Пусть матрица $M = A$.

1. 1. Определяем ведущий элемент $\mathrm{el}_{\max}$ ($i = 1$):

$$\mathrm{el}_{\max}[\mathrm{i}] = \mathrm{M}[\mathrm{j},\mathrm{i}] : |\,\mathrm{M}[\mathrm{j},\mathrm{i}]| = \max_{j=\overline{\imath,n}}\{\,|\mathrm{M}[\mathrm{j},\mathrm{i}]|\,\}$$

$$\mathrm{i} = 1, \mathrm{j} = \overline{1,3}$$
$$\mathrm{el}_{\max}[1] = \mathrm{M}[2,1] = 1,$$

$$\text{т. к.} \max\{\,|\mathrm{M}[1,1]|, |\mathrm{M}[2,1]|, |\mathrm{M}[3,1]|\,\} = \max\{0,1,1\} = 1 \ \text{ при } j = 2$$

1. 2. Переставляем i-ю строку со строкой, в которой нашли ведущий элемент (в данном примере: первую со второй, т.к. $\mathrm{i} = 1, \mathrm{j} = 2$) в матрицах M и P:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. 3. Проводим преобразование матрицы M:

$$M[\mathrm{j},\mathrm{i}] = \frac{M[\mathrm{j},\mathrm{i}]}{M[\mathrm{i},\mathrm{i}]}, \quad \mathrm{j} = \overline{\imath + 1, \mathrm{n}}$$

$\mathrm{i} = 1 \quad M[1,1] = 1 \quad \mathrm{j} = \overline{2,3}$

$\mathrm{j} = 2$:
$M[2,1] = \dfrac{M[2,1]}{M[1,1]} = \dfrac{0}{1} = 0$

$M[\mathrm{j},\mathrm{k}] = M[\mathrm{j},\mathrm{k}] - M[\mathrm{j},\mathrm{i}] * M[\mathrm{i},\mathrm{k}]\,, \quad \mathrm{k} = \overline{\imath + 1, \mathrm{n}}$

$\mathrm{k} = \overline{2,3}$

$\mathrm{k} = 2$:
$M[2,2] = M[2,2] - M[2,1] * M[1,2] = 1 - 0 * 5 = 1$

$\mathrm{k} = 3$:
$M[2,3] = M[2,3] - M[2,1] * M[1,3] = 1 - 0 * 1 = 1$

$\mathrm{j} = 3$:
$M[3,1] = \dfrac{M[3,1]}{M[1,1]} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\mathrm{k} = \overline{2,3}$

$\mathrm{k} = 2$:
$M[3,2] = M[3,2] - \ M[3,1] * M[1,2] = 1 - 1 * 5 = -4$

$\mathrm{k} = 3$:
$M[3,3] = M[3,3] - \ M[3,1] * M[1,3] = 7 - 1 * 1 = 6$

После проведенных преобразований получаем матрицу M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

2. 1. Переходим к выбору очередного ведущего элемента $\mathrm{el_{max}}$ ($i = 2$):

$$\mathrm{el_{max}[i] = M[j,i]:\ |M[j,i]| = \max_{\mathit{j}=\overline{\mathit{i},\mathit{n}}}\{\ |\ M[j,i]\ |\ \}},$$

$$\mathrm{i} = 2, \mathrm{j} = \overline{2,3}$$
$$\mathrm{el_{max}}[2] = M[3,2] = -4\text{:}\ \max\{|M[2,2], M[3,2]|\} = 4\ \text{ при } j = 3$$

2. 2. Перестановка строк $(\mathrm{i} = 2, \mathrm{j} = 3)$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 3. После преобразования (аналогичного пункту 1. 3) получаем матрицу M:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \\ 0 & -1/4 & 5/2 \end{pmatrix}$$

3. 1. В итоге получаем матрицу $M = L + U - E$. Таким образом:

$$Sum = L + U = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 0 & -1/4 & 7/2 \end{pmatrix}$$

Отсюда определяем:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 5/2 \end{pmatrix}$$

Итоговая матрица перестановок (матрица P, полученная в результате последней перестановки в п. 2. 2.):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. 2. Составляем систему:

$$PAx = Pb$$

$$LUx = Pb$$

Последовательно находим $y = (y_1, y_2, y_3\ )$ из системы с нижней треугольной матрицей L:

$$Ly = Pb$$

Пусть $c = Pb,$ тогда

$$y_i = \left(c_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} * y_j \right) / \, l_{ii}\,, \;\; i = \overline{1,n}$$

$$c = Pb = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = \frac{\text{c}_1}{l_{11}} = \frac{20}{1} = 20$$

$$y_2 = \frac{\text{c}_2 - \; l_{21} * \; y_1}{l_{22}} = \frac{12 - \; 1 * \; 20}{1} = -8$$

$$y_3 = \frac{\text{c}_3 - \; l_{31} * \; y_1 - l_{32} * \; y_2}{l_{33}} = \frac{2 - \; 0 * \; 20 - (-\frac{1}{4}) * (-8)}{1} = 0$$

а затем обратным ходом последовательно вычисляем искомое решение $x = (x_1, x_2, x_3)$ из системы с верхней треугольной матрицей U:

$$Ux = y$$

$$x_3 = \frac{y_3}{u_{33}} = 0$$

$$x_2 = \frac{y_2 - \; u_{23} * \; x_3}{u_{22}} = 2$$

$$x_1 = \frac{y_1 - \; u_{12} * \; x_2 - u_{13} * \; x_3}{u_{11}} = 10$$

Итоговое решение:

$$x = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$