Wyprowadzenie równań dla wymiennika typu „rura w rurze”

Wymiennik ciepła składa się ze ścianek: wewnętrznej ($T_p(t)$) i zewnętrznej ($T_c(t)$). Założenia:

- Wewnętrzna ścianka wymienia ciepło z gorącym medium ($T_s(t)$) i zimnym medium ($T_t(t)$).
- Zewnętrzna ścianka wymienia ciepło z zimnym medium ($T_t(t)$) oraz otoczeniem ($T_o(t)$).
- Uwzględnione są ciepła właściwe i masy ścianek, które akumulują energię cieplną oraz otoczenie wymiennika.

Podstawowe równanie bilansu ciepła

$$Q = mc\Delta T,$$

gdzie:

Q - ilość ciepła [J],

m - masa substancji [kg],

c - ciepło właściwe danej substancji $\left[\frac{J}{(kgK)}\right]$

Temperatura gorącego medium ($T_s(t)$)

Równanie bilansu energii:

$$m_s c_s \frac{dT_s(t)}{dt} = Q_{t\to s} - Q_{s\to p},$$

gdzie:

$$Q_{si\to s} = \dot{m}_s(t) c_s \big(T_{si} - T_s(t)\big)$$
$$Q_{s\to p} = \alpha_{sp} A_{sp} \big(T_s(t) - T_p(t)\big).$$

Podstawiając:

$$m_s c_s \frac{dT_s(t)}{dt} = \dot{m}_s(t) c_s \big(T_{si} - T_s(t)\big) - \alpha_{sp} A_{sp} \big(T_s(t) - T_p(t)\big).$$

Dzieląc przez $m_s c_s$:

$$\frac{dT_s(t)}{dt} = \frac{1}{m_s c_s} \left[\dot{m}_s(t) c_s \big(T_{si} - T_s(t)\big) - \alpha_{sp} A_{sp} \big(T_s(t) - T_p(t)\big)\right].$$

Równanie dla temperatury wewnętrznej ścianki ($T_p(t)$)

Równanie bilansu energii dla wewnętrznej ścianki:

$$m_p c_p \frac{dT_p(t)}{dt} = Q_{s\to p} - Q_{p\to t},$$

gdzie:

$$Q_{p\to t} = \alpha_{pt} A_{pt} \big(T_p(t) - T_t(t)\big),$$

Podstawiając wyrażenia na strumienie ciepła:

$$m_p c_p \frac{dT_p(t)}{dt} = \alpha_{sp} A_{sp} \big(T_s(t) - T_p(t)\big) - \alpha_{pt} A_{pt} \big(T_p(t) - T_t(t)\big).$$

Dzieląc przez $m_p c_p$:

$$\frac{dT_p(t)}{dt} = \frac{1}{m_p c_p} \left[\alpha_{sp} A_{sp} \big(T_s(t) - T_p(t)\big) - \alpha_{pt} A_{pt} \big(T_p(t) - T_t(t)\big)\right].$$

Temperatura zimnego medium ($T_t(t)$)

Równanie bilansu energii:

$$m_c c_c \frac{dT_t(t)}{dt} = Q_{p\to t} - Q_{t\to ti} - Q_{t\to c},$$

gdzie:

$$Q_{t\to ti} = \dot{m}_t(t) c_t \big(T_t(t) - T_{ti}\big).$$
$$Q_{t\to c} = \alpha_{tc} A_{tc} \big(T_t(t) - T_c(t)\big),$$

Podstawiając:

$$m_t c_t \frac{dT_t(t)}{dt} = \alpha_{pt} A_{pt} \big(T_p(t) - T_t(t)\big) - \dot{m}_t(t) c_t \big(T_t(t) - T_{ti}\big) - \alpha_{tc} A_{tc} \big(T_t(t) - T_c(t)\big).$$

Dzieląc przez $m_t c_t$:

$$\frac{dT_t(t)}{dt} = \frac{1}{m_t c_t} \left[\alpha_{pt} A_{pt} \big(T_p(t) - T_t(t)\big) - \dot{m}_t(t) c_t \big(T_t(t) - T_{ti}\big) - \alpha_{tc} A_{tc} \big(T_t(t) - T_c(t)\big)\right].$$

Równanie dla temperatury zewnętrznej ścianki ($T_c(t)$)

Równanie bilansu energii dla zewnętrznej ścianki:

$$m_c c_c \frac{dT_c(t)}{dt} = Q_{t\to c} - Q_{c\to o},$$

gdzie:

$$Q_{c\to o} = \alpha_{co} A_{co} \big(T_c(t) - T_o\big),$$

Podstawiając wyrażenia na strumienie ciepła:

$$m_c c_c \frac{dT_c(t)}{dt} = \alpha_{tc} A_{tc} \big(T_t(t) - T_c(t)\big) - \alpha_{co} A_{co} \big(T_c(t) - T_o\big).$$

Dzieląc przez $m_p c_p$:

$$\frac{dT_p(t)}{dt} = \frac{1}{m_c c_c} \left[\alpha_{tc} A_{tc} \big(T_t(t) - T_c(t)\big) - \alpha_{co} A_{co} \big(T_c(t) - T_o\big)\right].$$

Legenda

- $T_s(t), T_p(t), T_t(t), T_c(t)$: Temperatury: gorącego medium, wewnętrznej ścianki, zimnego medium i zewnętrznej ścianki,
- $\alpha_{sp}, \alpha_{pt}, \alpha_{tc}, \alpha_{co}$: współczynniki przejmowania ciepła,
- $A_{sp}, A_{pt}, A_{tc}, A_{co}$: powierzchnie wymiany ciepła,
- m_s, m_p, m_t, m_c: masy odpowiednich warstw,
- c_s, c_p, c_t, c_c: ciepła właściwe odpowiednich warstw,
- $\dot{m}_s(t), \dot{m}_t(t)$: strumienie masowe gorącego i zimnego medium,
- T_{si}, T_{ti}: temperatury wejściowe gorącego i zimnego medium.