БГУ

Исследование операций

Рак Алексей

March 26, 2018

1.2. Многокритериальные задачи

Задача 20

Имеется вычислительная сеть, имеющая топологию “звезда”, то есть множество $N = \{1, 2, ..., n\}$ параллельно работающих компьютеров, первый из которых выполняет роль концентратора. Имеется задание объёмом W единиц информации, которое необходимо выполнить на данных компьютерах. При этом концентратор помимо выполнения своей части задания, которая составляет не более 25% объёма задания, производит также обмен информацией между компьютерами. Производительность i-го компьютера составляет c_i единиц объёма информации в единицу времени по выполнению задания, формированию пересылаемой информации и обработке полученной информации. Между компьютерами должен происходить обмен информацией по каналам связи, через концентратор, но с условием сохранения баланса, то есть суммарный объём информации, передаваемой от компьютера другим компьютерам, должен быть равен суммарному объёму информации, получаемому компьютером. Оба суммарных объёма составляют 30% объёма информации задания, первоначально переданного компьютеру. Для концентратора объём обмена с компьютерами состоит из 30% процентов информации своей части задания и всей информации передаваемой между компьютерами. Скорость передачи по каналу $(1, j)$ равна v_{1j} единиц информации в единицу времени. Пусть также задано множество $M \subseteq \{(1, j) \mid j \in N, j \neq 1\}$ “контролируемых” каналов связи. Требуется распределить задание между компьютерами, минимизирующее время выполнения задания и минимизирующее суммарный трафик по “контролируемым” каналам связи.

Модель задачи.

Управляемые переменные: x_i – объем задания для i-го компьютера, $i = \overline{1, n}$.

Неуправляемые переменные: y_{ij} – объем информации, передаваемой от i-го компьютера к j-ому, $i, j = \overline{1, n}$.

Ограничения:

$$x_i \geq 0, i = \overline{1, n},$$

$$x_1 \leq 0.25W,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = W,$$

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_{ji} = 0.3x_i, j \neq i, i = \overline{2, n},$$

$$\sum_{j=2}^{n} y_{1j} = \sum_{j=2}^{n} y_{j1} = 0.3x_1 + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=2}^{n} y_{ij}.$$

Целевые функции:

$$f_1(x) = \max_{i=\overline{1,n}} \frac{x_i}{c_i} \to \min$$

$$f_2(x) = \sum_{(1,i) \in M} 0.6x_i \to \min$$

Задача 21

Задано n работ, подлежащих выполнению. Для выполнения работ можно привлечь $m \leq n$ исполнителей. Время выполненияi-ой работы j-ым исполнителем равно $t_{ij} > 0$, затраты на выполнение i-ой работы j-ым исполнителем соответственно $c_{ij} > 0$. Каждая работа может выполняться только одним исполнителем, соответственно каждый работник должен быть назначен хотя бы на выполнение одной работы.

Требуется найти назначение исполнителей на работы которое:

а) минимизирует общие затраты и время выполнения работ;

б) минимизирует общие затраты и общее время выполнения работ;

в) минимизирует общие затраты при заданном нормативном времени T выполнения всех работ.

Модель задачи.

Управляемые переменные: t_{ij} – время выполненияi-ой работы j-ым исполнителем, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, c_{ij} – затраты на выполнение i-ой работы j-ым исполнителем, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

Неуправляемые переменные:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если j-ый работник выполняет i-ую работу,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ограничения:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq 1, \quad \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1,$$

т. е. каждый работник может быть назначен на 1 и более работ, и на каждую работу может быть назначен ровно 1 работник.

Целевые функции:

а) общие затраты и время выполнения работ:

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} t_{ij} x_{ij} \to \min, \quad \forall i = \overline{1,n};$$

б) общие затраты и общее время выполнения работ:

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$f_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} t_{ij} x_{ij} \to \min;$$

в) введём дополнительное ограничение на время выполнения всех работ:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} t_{ij}x_{ij} = T,$$

тогда целевая функция имеет вид:

$$f_0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min .$$

1.3. Сужение неопределенности. Компромиссы Парето

Задача 22

Найти множество Парето в следующих многокритериальных задачах:

a) $f_1(x) \to \max$, $f_2(x) \to \max$, где $f_1(x) = ax + b(a - x)$, $f_2(x) = x^{\alpha}(1-x)^{\beta}$, при условии $0 \le x \le 1$. Здесь a, b, α, β – положительные константы;

b) $f_1(x_1, x_2) \to \max$, $f_2(x_1, x_2) \to \max$, где $f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, при условии $0 \le x_i \le 1$, $i = 1, 2$;

c) $f_i(x_1, x_2, x_3) \to \max$, $i = \overline{1, 3}$, где $f_1(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_2, x_3\}$, $f_2(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1, x_3\}$, $f_3(x_1, x_2, x_3) = \min\{x_1, x_2\}$, при условии $x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_i \ge 0, i = 1, 2, 3$.

Решение.

a) $f_1(x)$ – линейная функция, возрастает, если $a < b$, и убывает, если $a > b$. Вторая функция f_2 достигает максимума в точке $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Таким образом,

- если $a = b$, то множество Парето имеет вид $\{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\}$;
- если $a < b$, то множество Парето имеет вид $\left[0, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right]$;
- если $a > b$, то множество Парето имеет вид $\left[\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, 1\right]$.

b) Первая функция возрастает с ростом x_1 или x_2, вторая – возрастает с ростом x_1, убывает с ростом x_2. Значит, множество Парето имеет вид $\{1\}\times[0,1]$, так как при фиксированном x_2 обе функции достигают максимума в точке $x_1 = 1$ и возрастают с ростом x_1.

c) Выразим $x_3 = 1-x_1-x_2$. Тогда получаем следующее множество Парето:

$$\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 = x_2 \geq \frac{1}{3}\} \cup \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 = x_3 \geq \frac{1}{3}\} \cup$$
$$\cup \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_2 = x_3 \geq \frac{1}{3}\}$$

2.1. Матричные игры. Разрешимость в чистых стратегиях

Задача 1

a) Показать, что матричная игра с матрицей $H = (h_{ij})_{n\times m}$ имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решение, если $h_{ij} = f(i) - g(j)$.

Решение.

Найдём нижнее и верхнее значения игры:

$$\underline{I} = \max_i \min_j (f(i) - g(j)) = \max_i \left(f(i) - \max_j g(j) \right) = \max_i f(i) - \max_j g(j)$$

$$\overline{I} = \min_j \max_i (f(i) - g(j)) = \min_j \left(\max_i f(i) - g(j) \right) = \max_i f(i) - \max_j g(j)$$

$$\underline{I} = \overline{I} = \max_i f(i) - \max_j g(j)$$

Значит, игра разрешима в чистых стратегиях. Пара стратегий (i_0, j_0) таких, что $\max_i f(i) = f(i_0)$, $\max_j g(j) = g(j_0)$, – решение игры.

b) Показать, что матричная игра с матрицей $H = (h_{ij})_{n\times m}$ имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решение, если $h_{ij} = f(i) + g(j)$.

Решение.

Найдём нижнее и верхнее значения игры:

$$\underline{I} = \max_i \min_j (f(i) + g(j)) = \max_i \left(f(i) + \min_j g(j) \right) = \max_i f(i) + \min_j g(j)$$

$$\overline{I} = \min_j \max_i (f(i) + g(j)) = \min_j \left(\max_i f(i) + g(j) \right) = \max_i f(i) + \min_j g(j)$$

$$\underline{I} = \overline{I} = \max_i f(i) + \min_j g(j)$$

Значит, игра разрешима в чистых стратегиях. Пара стратегий (i_0, j_0) таких, что $\max_i f(i) = f(i_0)$, $\min_j g(j) = g(j_0)$, – решение игры.

c) Показать, что матричная игра с матрицей $H = (h_{ij})_{n\times m}$ имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решение, если

$$H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ a & d \\ c & b \end{bmatrix}$$

Решение.

f) Показать, что матричная игра с матрицей $H = (h_{ij})_{n\times m}$ имеет решение в чистых стратегиях, и найти такое решение, если $n = m$ и для любых $i, j, k, 1 \le i, j, k \le m$, имеет место тождество $h_{ij} + h_{jk} + h_{ki} = 0$.

Решение.

Найдём нижнее и верхнее значения игры с учётом $h_{ij} = -h_{jk} - h_{ki}, \forall k$:

$$\underline{I} = \max_i \min_j h_{ij} = \max_i \min_j (-h_{jk} - h_{ki}) = -\max_j h_{jk} - \min_i h_{ki}$$

$$\overline{I} = \min_j \max_i h_{ij} = \min_j \max_i (-h_{jk} - h_{ki}) = -\max_j h_{jk} - \min_i h_{ki}$$

$$\underline{I} = \overline{I} = -\max_j h_{jk} - \min_i h_{ki}$$

Значит, игра разрешима в чистых стратегиях.

2.2. Матричные игры. Смешанные стратегии. Сведение к задаче линейного программирования

Задача 5.

Каждый из игроков имеет 10 чистых стратегий: поставить все 3 фишки на одну из трёх позиций (пронумеруем эти стратегии от 1 до 3), поставить 2 фишки на одну из трёх позиций и ещё одну на оставшиеся две (пронумеруем эти стратегии от 4 до 9; стратегия 4 - поставить 2 фишки на первую позицию и ещё одну на вторую, стратегия 5 - поставить 2 фишки на первую позицию и ещё одну на третью, стратегия 6 - поставить 2 фишки на вторую позицию и ещё одну на первую и так далее), поставить все 3 фишки на разные позиции (дадим этой стратегии номер 10).
Составим матрицу выигрышей:

$$H(i,j) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{I} = \max_i \min_j H(i,j) = 0$

$\overline{I} = \min_j \max_i H(i,j) = 2 \neq \underline{I}$

Значит, игра неразрешима в чистых стратегиях. Построим пару двойственных задач линейного программирования, предварительно добавив 1 ко всем элементам матрицы, чтобы они стали положительными:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{10} x_i \to \min \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_7 + 3x_8 + 4x_9 + 3x_{10} \geq 1 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_9 + 3x_{10} \geq 1 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 4x_6 + 3x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 3x_{10} \geq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 2x_{10} \geq 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 + 3x_7 + 2x_8 + 3x_9 + 2x_{10} \geq 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + 3x_9 + 2x_{10} \geq 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 + 3x_8 + 2x_9 + 2x_{10} \geq 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 3x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} \geq 1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + x_9 + 2x_{10} \geq 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 2x_9 + x_{10} \geq 1 \\ x_i \geq 0 \; i = \overline{1,10} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{10} y_i \to \max \\
y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 3y_6 + 4y_7 + 3y_8 + 4y_9 + 3y_{10} \leq 1 \\
4y_1 + y_2 + 4y_3 + 4y_4 + 3y_5 + 4y_6 + 2y_7 + 2y_8 + 3y_9 + 3y_{10} \leq 1 \\
4y_1 + 4y_2 + y_3 + 4y_4 + 3y_5 + 4y_6 + 3y_7 + 2y_8 + 2y_9 + 3y_{10} \leq 1 \\
2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + y_4 + 2y_5 + 2y_6 + 3y_7 + 3y_8 + 3y_9 + 2y_{10} \leq 1 \\
2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 2y_4 + y_5 + 3y_6 + 3y_7 + 2y_8 + 3y_9 + 2y_{10} \leq 1 \\
3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 3y_5 + y_6 + 2y_7 + 3y_8 + 3y_9 + 2y_{10} \leq 1 \\
4y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + y_7 + 3y_8 + 2y_9 + 2y_{10} \leq 1 \\
3y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 2y_5 + 3y_6 + 3y_7 + y_8 + 2y_9 + 2y_{10} \leq 1 \\
4y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 3y_6 + 2y_7 + 2y_8 + y_9 + 2y_{10} \leq 1 \\
3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 2y_6 + 2y_7 + 2y_8 + 2y_9 + y_{10} \leq 1 \\
y_i \geq 0 \; i = \overline{1, 10}
\end{cases}
$$

Решив полученную пару задач (например, симплекс-методом), найдём оптимальные решения:

$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{9}$

$x_i = 0, \; i = \overline{4, 10}$

$y_1 = y_2 = y_3 = \frac{1}{9}$

$y_i = 0\,; i = \overline{4, 10}$

Значение игры:

$I = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{10} x_i} - 1 = 3 - 1 = 2$ Оптимальные смешанные стратегии:

$p_1 = p_2 = p_3 = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{10} x_i} = \dfrac{1}{3}$

$p_i = 0 \cdot \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{10} x_i} = 0, \; i = \overline{4, 10}$

$q_1 = q_2 = q_3 = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{10} y_i} = \dfrac{1}{3}$

$q_i = 0 \cdot \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{10} y_i} = 0, \; i = \overline{4, 10}$

Задача 6 Составим матрицу выигрышей:

$$H(i,j) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ -3 & 4 & -5 & 6 & -7 \\ 4 & -5 & 6 & -7 & 8 \\ -5 & 6 & -7 & 8 & -9 \\ 6 & -7 & 8 & -9 & 10 \end{pmatrix}$$

$\underline{I} = \max\limits_i \min\limits_j H(i,j) = -5$

$\overline{I} = \min\limits_j \max\limits_i H(i,j) = 6 \neq \underline{I}$

Значит, игра неразрешима в чистых стратегиях. Построим пару двойственных задач линейного программирования, предварительно добавив 10 ко всем элементам матрицы, чтобы они стали положительными:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5} x_i \to \min \\ 12x_1 + 7x_2 + 14x_3 + 5x_4 + 16x_5 \geq 1 \\ 7x_1 + 14x_2 + 5x_3 + 16x_4 + 3x_5 \geq 1 \\ 14x_1 + 5x_2 + 16x_3 + 3x_4 + 18x_5 \geq 1 \\ 5x_1 + 16x_2 + 3x_3 + 18x_4 + x_5 \geq 1 \\ 16x_1 + 3x_2 + 18x_3 + x_4 + 20x_5 \geq 1 \\ x_i \geq 0 \ i = \overline{1,5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{5} y_i \to \max \\ 12y_1 + 7y_2 + 14y_3 + 5y_4 + 16y_5 \leq 1 \\ 7y_1 + 14y_2 + 5y_3 + 16y_4 + 3y_5 \leq 1 \\ 14y_1 + 5y_2 + 16y_3 + 3y_4 + 18y_5 \leq 1 \\ 5y_1 + 16y_2 + 3y_3 + 18y_4 + y_5 \leq 1 \\ 16y_1 + 3y_2 + 18y_3 + y_4 + 20y_5 \leq 1 \\ y_i \geq 0 \ i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Решив полученную пару задач (например, симплекс-методом), найдём оптимальные решения:

$x_1 = \frac{1}{80}$
$x_2 = x_3 = 0$
$x_4 = \frac{1}{20}$
$x_5 = \frac{3}{80}$
$y_1 = \frac{1}{80}$
$y_2 = y_3 = 0$
$y_4 = \frac{1}{20}$
$y_5 = \frac{3}{80}$
Значение игры:
$I = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{10} x_i} - 10 = 10 - 10 = 0$
Оптимальные смешанные стратегии:
$p_1 = \frac{1}{8}$
$p_2 = p_3 = 0$
$p_4 = \frac{1}{2}$
$p_5 = \frac{3}{8}$
$q_1 = \frac{1}{8}$
$q_2 = q_3 = 0$
$q_4 = \frac{1}{2}$
$q_5 = \frac{3}{8}$

Задача 8

Проверить, являются ли данные смешанные стратегии и значение игры:

$$p = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, I = 0.4.$$

решением матричной игры с выигрышами:

$$H = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0.6 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$$

Решение.

Найдём верхние и нижние значения игры по формуле:

$$\underline{I} = \overline{I} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} H(i,j) p_i q_j$$

$$\underline{I} = \overline{I} = 0.8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0.4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0.6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 +$$
$$+0.6 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0 + 0.4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0.8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 0.4$$

$$\underline{I} = \overline{I} = I = 0.4$$

Значит, стратегии p и q и значение игры I являются решением матричной игры для H.

Задача 9

Проверить, являются ли данные смешанные стратегии и значение игры:

$$p = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, I = 4.$$

решением матричной игры с выигрышами:

$$H = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

Найдём верхние и нижние значения игры по формуле:

$$\underline{I} = \overline{I} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} H(i,j) p_i q_j$$

$$\underline{I} = \overline{I} = 14 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} -$$
$$-4 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot 0 \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} +$$
$$+2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 4$$

$$\underline{I} = \overline{I} = I$$

Поэтому стратегии p и q и значение игры I являются решением матричной игры для H.