Домашнее задание №3 по курсу «Исследование операций»

Рак Алексей
БГУ

Матричные игры. Графоаналитический метод.

10c

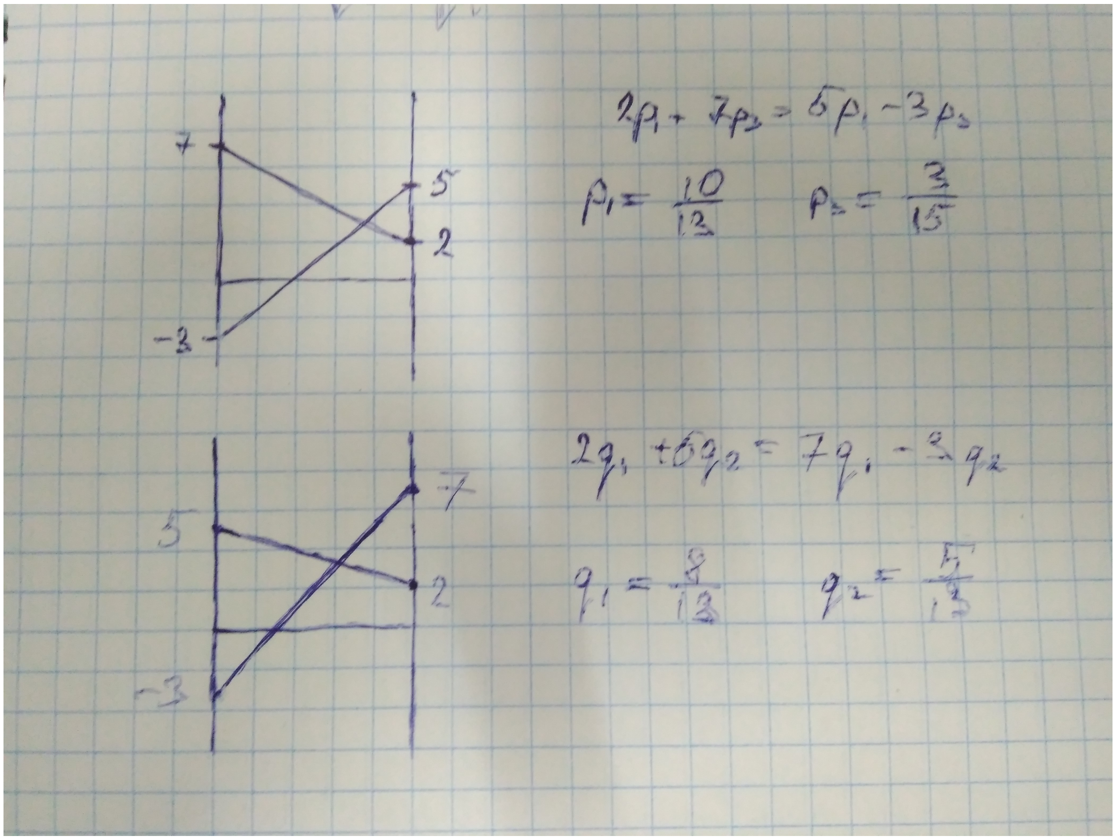
$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 & 11 \\ 2 & 0 & 9 & 2 \\ 7 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Первая стратегия первого игрока доминирует четвертую: $p_4 = 0$; втора стратегия второго игрока доминирует третью и четвертую: $q_3 = q_4 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 0 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Первая стратегия первого игрока доминирует вторую $p_2 = 0$, получаем:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$



$$I = \frac{5}{7}$$

11a

Показать, что если $h_{i-1,j} - 2h_{ij} + h_{i+1,j} \leq 0, i = \overline{2, n-1}, j = \overline{1, m}$, то в игре с матрицей $H = (h_{ij})_{n \times m}$ каждый игрок имеет оптимальную стратегию, в которой используется не более двух чистых стратегий;
Решение:
Из условия задачи: $(h_{i-1,j} - h_{ij}) + (h_{i+1,j} - h_{ij}) \leq 0$. Возможны два варианта. Либо $(h_{i+1,j} - h_{ij}) \leq 0$, то есть i-ая строка доминирует $(i+1)$-ую и тогда $p_{i+1} = 0, i = \overline{2, n-1}, j = \overline{1, m}$. Либо $(h_{i-1,j} - h_{ij}) \leq 0$, то есть i-ая строка доминирует (i-1)-ую и тогда $p_{i-1} = 0, i = \overline{2, n-1}, j = \overline{1, m}$. В обоих случаях матрица выигрышей сокращается до размеров 2×2. Затем можно найти оптимальные стратегии игроков, а так как матрица имеет размеры 2×2, то у каждого игрока для оптимальной стратегии не более двух чистых стратегий.

11b

Показать, что если $h_{i-1,j} - 2h_{ij} + h_{i+1,j} \geq 0, i = \overline{2, n-1}, i = \overline{1, m}$, то в игре с матрицей $H = (h_{ij})_{n \times m}$ первый игрок имеет оптимальную стратегию p, для которой $p_i = 0, i = \overline{2, n-1}$.
Решение:
Из условия задачи: $(h_{i-1,j} - h_{ij}) + (h_{i+1,j} - h_{ij}) \geq 0$. Возможны два варианта. Либо $(h_{i+1,j} - h_{ij})$, то есть (i+1)-ая строка доминирует i-ую и тогда $p_i = 0, i = \overline{2, n-1}, j = \overline{1, m}$. Либо $(h_{i-1,j} - h_{ij}) \geq 0$, то есть (i-1)-ая строка доминирует i-ую и тогда $p_i = 0, i = \overline{2, n-1}, j = \overline{1, m}$.

Матричные игры. Метод приближенных итераций

12b

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:
Верхнее значение игры $\beta = 5$, нижнее $\alpha = 0$. Решения в чистых стратегиях нет. Доминирования по строкам и столбцам нет.

k	i	B_1	B_2	B_3	B_4	j	A_1	A_2	A_3	$\underline{I}$	$\overline{I}$	I
1	1	1	$\underline{0}$	4	7	2	0	$\overline{5}$	1	0	5	2.5
2	2	$\underline{2}$	2.5	3	3.5	1	0.5	$\overline{4}$	0.5	2	4	3
3	2	$\underline{2.33}$	3.33	2.67	$\underline{2.33}$	1	0.67	$\overline{3.67}$	0.33	2.33	3.67	3
4	2	2.5	3.75	2.5	$\underline{1.75}$	4	2.25	$\overline{2.75}$	1.5	1.75	2.75	2.25
5	2	2.8	5	2.4	$\underline{1.4}$	4	$\overline{3.2}$	2.2	2.2	1.4	3.2	2.3

$$p_1 \approx \frac{1}{5}$$
$$p_2 \approx \frac{4}{5}$$
$$p_3 \approx 0$$
$$q_1 \approx \frac{2}{5}$$
$$q_2 \approx \frac{1}{5}$$
$$q_3 \approx 0$$
$$q_4 \approx \frac{2}{5}$$
$$I \approx \frac{23}{10}$$

12c

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:
Верхнее значение игры $\beta = 2$, нижнее $\alpha = 0$. Решения в чистых стратегиях нет. Доминирования по строкам и столбцам нет.

k	i	B_1	B_2	B_3	B_4	j	A_1	A_2	A_3	A_4	$\underline{I}$	$\overline{I}$	I
1	1	2	3	1	$\underline{0}$	4	0	$\overline{2}$	$\overline{2}$	1	0	2	1
2	2	$\underline{1}$	2.5	2.5	$\underline{1}$	1	1	1	$\overline{2.5}$	$\overline{2.5}$	1	2.5	1.75
3	3	1.67	1.67	2	$\underline{1.33}$	4	0.67	1.33	$\overline{2.33}$	2	1.33	2.33	1.73
4	3	2	$\underline{1.25}$	1.75	1.5	2	1.25	1.5	$\overline{1.75}$	$\overline{1.75}$	1.25	1.75	1.5
5	3	2.2	$\underline{1}$	1.6	1.6	2	$\overline{1.6}$	$\overline{1.6}$	1.4	$\overline{1.6}$	1	1.6	1.3

$$p_1 \approx \frac{1}{5}$$
$$p_2 \approx \frac{1}{5}$$
$$p_3 \approx \frac{3}{5}$$
$$p_4 \approx 0$$
$$q_1 \approx \frac{1}{5}$$
$$q_2 \approx \frac{2}{5}$$
$$q_3 \approx 0$$
$$q_4 \approx \frac{2}{5}$$
$$I \approx \frac{13}{10}$$

12d

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение:
Верхнее значение игры $\beta = 6$, нижнее $\alpha = 1$. Решения в чистых стратегиях нет. Стратегия A_1 доминирует над стратегией A_4, $p_4 = 0$. Получаем сокращенную матрицу:

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 6 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

k	i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	j	A_1	A_2	A_3	$\underline{I}$	$\overline{I}$	I
1	1	2	4	5	$\underline{1}$	5	4	1	$\overline{6}$	1	1	6	3.5
2	2	$\underline{1.5}$	4.5	2.5	3.5	3.5	1	1.5	$\overline{3.5}$	2	1.5	3.5	2.5
3	2	$\underline{1.33}$	4.67	2.67	4.33	3	1	1.67	$\overline{2.67}$	2.33	1.33	2.67	2
4	2	$\underline{1.25}$	4.75	$\underline{1.25}$	4.75	2.75	1	1.75	2.25	$\overline{2.5}$	1.25	2.5	1.88
5	3	1.6	3.8	$\underline{1.4}$	5	2.4	3	$\overline{2.4}$	2.2	2.2	1.4	2.4	1.9

$$p_1 \approx \frac{1}{5}$$
$$p_2 \approx \frac{3}{5}$$
$$p_3 \approx \frac{1}{5}$$
$$p_4 \approx 0$$
$$q_1 \approx \frac{3}{5}$$
$$q_2 \approx 0$$
$$q_3 \approx \frac{1}{5}$$
$$q_4 \approx \frac{1}{5}$$
$$q_5 \approx 0$$
$$I \approx \frac{19}{10}$$