1 этап. Разработка физической и математической модели.

Данные:

• Длина ракеты: ~ 42 м

• Стартовая масса: ~ 482 т

• Масса полезного груза: ~ 4,5 т

• Стартовая масса топлива: ~ 450 т

• Расход топлива первой ступени: ~ 230 кг/с

• Расход топлива второй ступени: ~ 175 кг/с

• Время работы первой ступени: ~ 180 секунд

• Время работы второй ступени: ~ 420 секунд

• Диаметр ракеты: ~ 3.1 м

• Тяга: ~ 1300 кН

Глобальные константы:

G = 6.6 \* 10−11

R = 6400 км

U = 4100 м/c

М = 5.9 \* 1024 кг

ρ0 = кг/м3

Пусть изменение массы космического аппарата со временем: m = m。- ղt, где m。- начальная масса, ղ - расход топлива. Рассмотрим второй закон Ньютона. ma = Fтяги - Fгр - Fсопр, где Fгр = 𝐺𝑀𝑚 / (𝑅+ℎ)2,

Fсопр = 0,5cSρсредыV2 (1) S = 𝜋𝑑2/4 - площадь поперечного сечения ракеты с - табличное значение (～0.45)

Изменение высоты (высоту атмосферы) считаем от 0 до 150 км. Сила тяги меняется в зависимости от высоты и от этапа полета. Предположим, что сила тяги меняется по линейному закону.

Fтяги = −𝑈 (2)

Где U - скорость истечения газов из сопла двигателя, η - расход топлива.

В графике мы увидим, что сила тяги уменьшается, происходит это из-за уменьшения общей массы ракеты. Проецируем второй закон Ньютона на вертикальную ось и подставив формулы получим: = −𝑈 − − 0,5𝑐𝑆𝜌𝑉2 (3)

Также с течением времени меняется скорость от высоты: = 𝑣(𝑡) (по определению скорости) Относительно высоты также меняется плотность среды

ρ = 𝜌0𝑒−𝛽ℎ (4)

где β = 1,29 \* 10-4, а ρ0 - плотность среды около поверхности Земли С учетом того, что ракета летит под определенным углом к горизонту, этот угол 𝛼 будет меняться с течением времени также по линейному закону.

α = 𝜋2 − 𝛾𝑡 (5)

где 𝛾 - угол между вертикальной осью и кораблем

𝛽 = const

Объединив все уравнения получаем систему:

= −𝑈 − − 0,5𝑐𝑆𝜌𝑉2 (6)

m = m。- ղt

Fтяги = −𝑈

ρ = 𝜌0𝑒−𝛽ℎ

α = 𝜋2 – 𝛾𝑡

Проецируя на оси Ох и Оу получим:

= −𝑈 𝑐𝑜𝑠α − 0,5𝑐𝑆𝜌𝑉2 𝑐𝑜𝑠α

= −𝑈 sinα − − 0,5𝑐𝑆𝜌𝑉2sinα

m = m。- ղt

ρ = 𝜌0𝑒−𝛽ℎ

α = 𝜋2 – 𝛾𝑡

Данная система описывает взлет ракеты с поверхности Земли. В ней учитывается сила сопротивления, однако в дальнейшей работе придется прибегнуть к ее пренебрежению, из-за чего на начальных этапах показатели модели будут отличаться от реальности, однако со временем, из-за уменьшения силы сопротивления, значения модели будут приближены к реальности. Это происходит, так как сопротивление исчезает в определенный момент времени, а мы пренебрегаем его с самого начала

Математическая модель

Для упрощения математических вычислений в формуле не будет учитываться сила сопротивление; это повлияет только на начальный этап полета. Проведем преобразования с уравнением (6)

m

умножим на dt и разделим на m и получим:

Наши познания в дифференциальных уравнениях и их аналитическом программном решении не позволили нам проинтегрировать уравнение, поэтому мы решили прибегнуть к упрощению , заменив в начальной формуле во втором слагаемом m на

Тогда формула примет вид:

m

Умножим обе части на dt и разделим на m и получим:

Проинтегрируем обе части уравнения. Левую часть по dv – правую по dm, от v0 до v и m0 до m соответственно.

*,* перенесем v0 вправо и получим конечную формулу скорости.

(7)

По полученному уравнению видно, что , следовательно, мы можем утверждать, что скорость ракеты будет возрастать, с изменением массы, которая в свою очередь зависит от времени. При этом мы считаем, что масса всё время изменяется по линейному закону. График скорости был построен по конечной формуле (7)

Гомановский перелёт

Допустим после взлета через определенное время мы оказались на геопереходной орбите и нам нужно попасть на орбиту Марса. Сделаем это с помощью Гомановского перехода.

Для этого нужно узнать орбитальную скорость тела.

𝑣 = , 𝜇 - гравитационный параметр, r - расстояние между телами, а - большая полуось

Так как орбита круговая, то формула примет вид:

𝑣 =

Тогда приращение скоростей можно выразить следующим образом:

*ΔVA = ( - 1)*

*ΔVB = (- + 1)*

Суммарное изменение скорости будет равно *ΔVS = ΔVA + ΔVB*

*Δm = (1 – e-Vs/l)m0*, где l - удельная тяга ракеты.

Эксцентриситет орбиты перехода: e =

Время, за которое совершается переход, равно половине периода Гомановской орбиты.

t = 𝜋 , где a =

Для гомановского перелета угловая дальность равна 180ο Угол начальной конфигурации определяется по формуле 𝛾 = 180𝑜 − 𝑎 где a – дуга, которую проходит ракета за время перелета.

a = 𝜔𝑡, где 𝜔 - угловая скорость.

Начальная конфигурация наступает за определенное время до того, как либо внутренняя планета догонит Землю и окажется на нижней линии соединения, либо Земля догонит внешнюю планету и окажется на линии верхнего соединения.

Посадка на Марс

Садится на поверхность Марса будем при помощи торможения, то есть придачи скорости в противоположном направлении движению ракеты. Пусть V0 - скорость на круговой орбите Марса, тогда V1 - скорость в афелии траектории снижения, V2 - скорость в перигелии траектории снижения (будем считать, что аппарат еще не совершил посадку). *Δ*𝑣 = 𝑣0−𝑣1 - искомая скорость, которую нужно придать ракете для торможения.

По Закону Сохранения Энергии:

=

V1 =

Так как движение выполняется по круговой орбите, то используем формулу центростремительного ускорения

*a =*

По второму закону Ньютона выразим V0

В конечном итоге получаем формулу

Мы получили скорость, придав которую в направлении, обратном движению,

мы будем снижаться для посадки на Марc