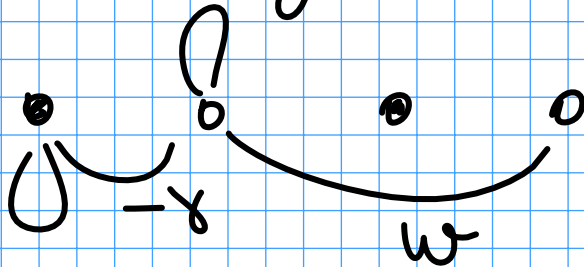


Контрольная работа по теоретической физике твёрдого тела



Масса иона: M

Масса электрона: m

$$A_{12}(0) = -\gamma, \quad A_{12}(-a) = -\gamma$$

$$A_{21}(0) = -\gamma, \quad A_{21}(a) = -\gamma$$

$$A_{22}(a) = w, \quad A_{22}(-a) = w$$

Известно, что $\sum_{jn} A_{ji}(n) = 0$

$$\sum_{jn} A_{j1}(n) = \sum_n A_{11}(n) + \sum_n A_{21}(n) = 0$$

$$A_{11}(0) + A_{21}(0) + A_{21}(a) = 0$$

$$A_{11}(0) = -A_{21}(0) - A_{21}(a) = 2\gamma$$

$$\begin{aligned} \sum_{jn} A_{j2}(n) &= \sum_n A_{12}(n) + \sum_n A_{22}(n) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$A_{12}(0) + A_{12}(-a) + A_{22}(0) + A_{22}(a) + A_{22}(-a) = 0$$

$$A_{22}(0) = 2\gamma - 2w$$

$$C_{ij} = \frac{1}{\sqrt{M_i M_j}} \sum_n A_{ij}(n) e^{-inl}$$

$$C_{11} = \frac{1}{M} \cdot A_{11}(0) = \frac{2\gamma}{M}$$

$$\begin{aligned} C_{22} &= \frac{1}{m} (A_{22}(0) + A_{22}(a)e^{-i\alpha l} + A_{22}(-a)e^{i\alpha l}) \\ &= \frac{1}{m} (2\gamma - 2w + 2w \cos \frac{la}{2}) = \\ &= \frac{2\gamma}{m} \left(1 - 2\alpha \sin^2 \frac{la}{2} \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } \alpha = \frac{w}{\gamma}$$

$$\begin{aligned} C_{12} &= \frac{1}{\sqrt{Mm}} (A_{12}(0) + A_{12}(-a)e^{i\alpha l}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{Mm}} (-\gamma - \gamma e^{i\alpha l}) = -\frac{\gamma}{\sqrt{Mm}} (1 + e^{i\alpha l}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{21} &= \frac{1}{\sqrt{Mm}} (A_{21}(0) + A_{21}(a)e^{-i\alpha l}) = \\ &= -\frac{\gamma}{\sqrt{Mm}} (1 + e^{-i\alpha l}) \end{aligned}$$

Получим образы,

$$C_{11} = \frac{2\gamma}{M}, \quad C_{22} = \frac{2\gamma}{m} \left(1 - 2\alpha \sin^2 \frac{la}{2} \right)$$

$$C_{12} = -\frac{\gamma}{\sqrt{Mm}} (1 + e^{i\alpha l}), \quad C_{21} = -\frac{\gamma}{\sqrt{Mm}} (1 + e^{-i\alpha l})$$

Найти собственные значения
матрицы C , то есть ω^2 :

$$\begin{vmatrix} C_{11} - \omega^2 & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} = (C_{11} - \omega^2)(C_{22} - \omega^2)$$

$$-C_{12}C_{21} = \omega^4 - \omega^2(C_{11} + C_{22}) + C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = 0$$

Итак:

$$\omega^2 = \frac{C_{11} + C_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{C_{11} + C_{22}}{2}\right)^2 - (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})}$$

Подстановка C_{ij} .

$$C_{12}C_{21} = \frac{1}{Mm} \gamma^2 (1 + e^{i\frac{1}{2}ka}) (1 + e^{-i\frac{1}{2}ka}) =$$

$$= \frac{1}{Mm} \gamma^2 (2 + e^{i\frac{1}{2}ka} + e^{-i\frac{1}{2}ka}) = \frac{1}{Mm} \gamma^2 (2 +$$

$$+ 2\cos \frac{ka}{2}) = \frac{4\gamma^2}{Mm} \cos^2 \frac{ka}{2}$$

$$C_{11}C_{22} = \frac{4\gamma^2}{Mm} (1 - 2\alpha \sin^2 \frac{ka}{2})$$

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = \frac{4\gamma^2}{Mm} (1 - 2\alpha \sin^2 \frac{ka}{2} - \cos^2 \frac{ka}{2})$$

$$= \frac{4\gamma^2}{Mm} (1 - 2\alpha) \sin^2 \frac{ka}{2}$$

$$\frac{C_{11} + C_{22}}{2} = \frac{\gamma}{M} + \frac{\gamma}{m} - \frac{2\alpha\gamma}{m} \sin^2 \frac{ka}{2} =$$

$$= \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2} \right)$$

$U_{max,1}$

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2} \right) \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2} \left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2} \right)^2 - \frac{4\gamma^2}{Mm} (1-2\alpha) \sin^2 \frac{f_a}{2}}$$

Можно записать в такой форме:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2} \right) \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{m/M (1-2\alpha) \sin^2 \frac{f_a}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2} \right)^2}} \right)$$

Приступим ко второй части задачи
Пусть $f_a \ll 1$. Тогда:
 $\sin^2 \frac{f_a}{2} \approx \left(\frac{f_a}{2} \right)^2$

$$\omega^2 \approx \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \left(\frac{f_a}{2} \right)^2 \right) \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{(m/M)(1-2\alpha) \left(\frac{f_a}{2} \right)^2}{\left(\frac{m}{M} + 1 \right)^2}} \right) \approx$$

$$\approx \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \left(\frac{fa}{2} \right)^2 \right) \circ$$

$$\circ \left(1 \pm \left(1 - \frac{1}{2}(1-2\alpha) \frac{mM}{(m+M)^2} (fa)^2 \right) \right)$$

$$\omega_1^2 = \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2} (1-2\alpha) \frac{mM}{(m+M)^2} (fa)^2 =$$

$$= (1-2\alpha) \frac{\gamma}{2(m+M)} (fa)^2$$

$$\omega_2^2 \approx \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \left(\frac{fa}{2} \right)^2 \right) \circ$$

$$\circ \left(2 - \frac{1}{2}(1-2\alpha) \frac{mM}{(m+M)^2} (fa)^2 \right) \approx$$

$$\approx \frac{\gamma}{m} \left(2 \frac{m}{M} + 2 - \alpha (fa)^2 - \left(\frac{m}{M} + 1 \right) \circ \right)$$

$$\circ \frac{1}{2} (1-2\alpha) \frac{mM}{(m+M)^2} (fa)^2 \Big) =$$

$$= \frac{\gamma}{m} \left(2 \frac{m+M}{M} - \alpha (fa)^2 - \frac{m}{m+M} \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) (fa)^2 \right)$$

$$= \frac{\gamma}{m} \left(2 \frac{m+M}{M} - \frac{M\alpha + m/2}{m+M} (fa)^2 \right) =$$

$$= 2\gamma \frac{m+M}{mM} \left(1 - \frac{M(M\alpha + m/2)}{2(m+M)^2} (fa)^2 \right)$$

$$\omega_2 = \sqrt{2\gamma \frac{m+M}{mM} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{M(M\alpha + m/2)}{(m+M)^2} (fa)^2 \right)}$$

Umkehr, naymer:

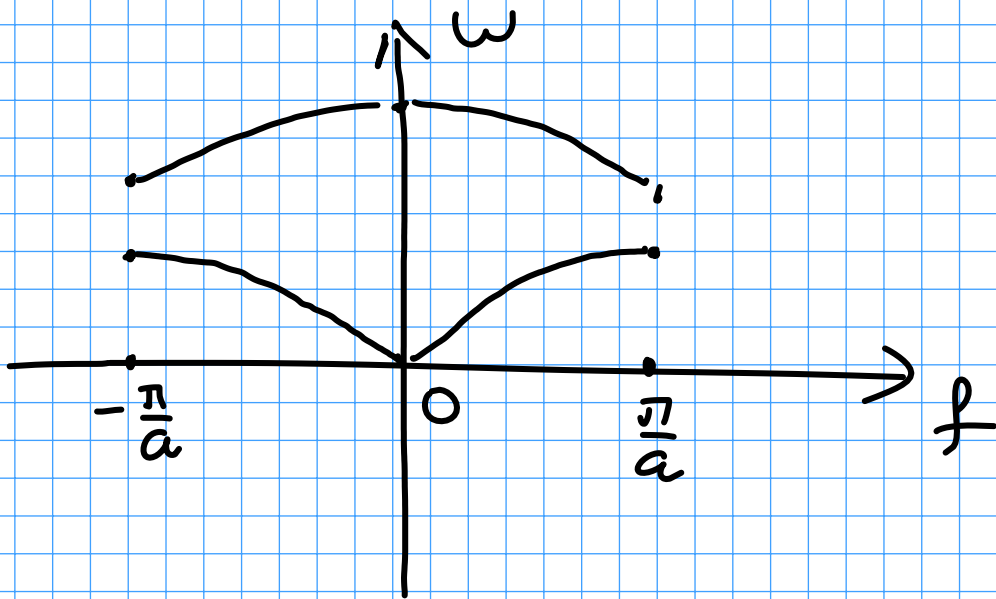
$$\omega_1 \approx \sqrt{(1-2\alpha) \frac{\gamma}{2(m+M)}} \cdot |fa|$$

$$\omega_2 \approx \sqrt{2\gamma \frac{m+M}{mM}} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{M(M\alpha + \frac{m}{2})}{(m+M)^2} (fa)^2 \right)$$

Jiyans $f = \frac{\pi}{a}$.

$$\sin^2 \frac{fa}{2} = 1$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \right) \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{mM(1-2\alpha)}{(m+M-2\alpha M)^2}} \right)$$



Определим условие устойчивости.

$$\omega^2 \geq 0, \text{ если } \frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi_a}{2} \geq 0$$

$$\text{и если } 1 \geq \sqrt{1 - 4 \frac{m/M (1-2\alpha) \sin^2 \frac{\varphi_a}{2}}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi_a}{2}\right)^2}$$

при любых φ

$$\text{Это имеет место при } \alpha \leq \frac{1}{2} \frac{m+M}{M}$$

и при $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Получим образы:

$$\alpha \leq \frac{1}{2}$$

Пусть $\frac{m}{M} \ll 1$

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi_a}{2} \right).$$

$$\bullet \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{m}{M} \frac{(1-2\alpha) \sin^2 \frac{\varphi_a}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{\varphi_a}{2}\right)^2}} \right)$$

При малых α

$$\frac{(1-2\alpha) \sin^2 \frac{f_a}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{1-2\alpha}$$

Получаем:

$$\frac{m}{M} \ll 1-2\alpha$$

Тогда можно получить корни:

$$\omega^2 \approx \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2} \right).$$

$$\cdot \left(1 \pm \left(1 - 2 \frac{m}{M} \frac{(1-2\alpha) \sin^2(\frac{f_a}{2})}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2}\right)^2} \right) \right)$$

Получаем:

$$\omega_1^2 \approx \frac{2\gamma}{M} \frac{(1-2\alpha) \sin^2(\frac{f_a}{2})}{1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2}}$$

$$\omega_2^2 \approx \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2} \right).$$

$$\cdot \left(2 - 2 \frac{m}{M} \frac{(1-2\alpha) \sin^2 \frac{f_a}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2}\right)^2} \right) \approx$$

$$\begin{aligned}
& \approx \frac{2\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{m}{M} \frac{(1-2\alpha) \sin^2 \frac{f_a}{2}}{1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2}} \right) = \\
& = \frac{2\gamma}{m} \left(1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2} + \frac{m}{M} \frac{\cos^2 \frac{f_a}{2}}{1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2}} \right) \\
\omega_2^2 & \approx \frac{2\gamma}{m} \left(1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2} + \frac{m}{M} \frac{\cos^2 \frac{f_a}{2}}{1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2}} \right)
\end{aligned}$$

Тipu $f_a \ll 1$ учееи:

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{2\gamma}{m} (1-2\alpha)} f_a$$

$$\begin{aligned}
\omega_2 \approx \sqrt{\frac{2\gamma}{m}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m}{M} + \frac{1}{8} (2\alpha-1) \frac{m}{M} (f_a)^2 - \right. \\
\left. - \frac{1}{4} \alpha (f_a)^2 \right)
\end{aligned}$$

Это соответствует к случаю с
мееи асимптотическим, что м: наг-
нее паке.

Пусть $\alpha \approx \frac{1}{2}$, но если α близко к предельному значению

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi, \quad \xi \ll 1$$

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m} \left(1 + \frac{m}{M} - (1-\xi) \sin^2 \frac{\theta_a}{2} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{\xi m M \sin^2 \frac{\theta_a}{2}}{\left(\frac{m}{M} - (1-\xi) \sin^2 \frac{\theta_a}{2} \right)^2}} \right)$$

Рассмотрим 2 случая:

$$\frac{m}{M} \ll \xi, \quad \frac{m}{M} \gg \xi$$

Первый случай мы рассмотрим выше. Рассмотрим теперь α .

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma}{M} \frac{\xi \sin^2 \frac{\theta_a}{2}}{1 - (1-\xi) \sin^2 \frac{\theta_a}{2}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{m} \left(1 - (1-\xi) \sin^2 \frac{\varphi_a}{2} - \frac{m}{M} \frac{\xi \sin^2 \frac{\varphi_a}{2}}{1 - (1-\xi) \sin^2 \frac{\varphi_a}{2}} \right) \approx \frac{2\gamma}{m} \left(1 - (1-\xi) \sin^2 \left(\frac{\varphi_a}{2} \right) \right)$$

Здесь с $\frac{m}{M}$ мы откинули, так как он много меньше единицы. Ранее мы не оставили, чтобы получить правильную асимптотику.

Итак,

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma}{M} \frac{\xi \sin^2 \frac{\varphi_a}{2}}{1 - (1-\xi) \sin^2 \frac{\varphi_a}{2}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{m} \left(1 - (1-\xi) \sin^2 \frac{\varphi_a}{2} \right)$$

III. к. $\xi \ll 1$, но при $\varphi_a \neq \frac{\pi}{2}$

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma}{M} \frac{\xi \sin^2 \left(\frac{\varphi_a}{2} \right)}{1 - \sin^2 \frac{\varphi_a}{2}} = \frac{2\gamma}{M} \xi \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_a}{2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{m} \left(1 - \sin^2 \frac{\varphi_a}{2} \right) =$$

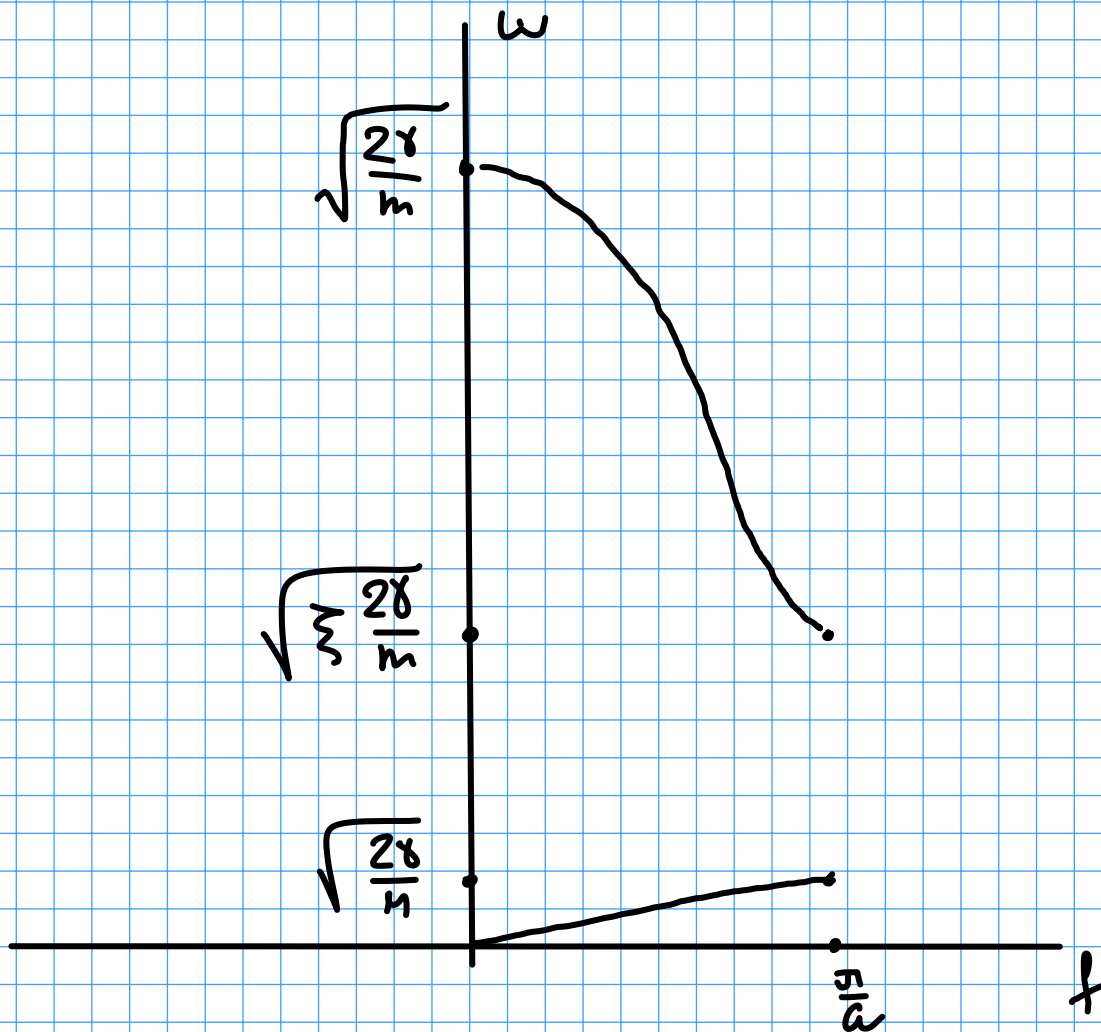
$$= \frac{2\gamma}{m} \cos^2 \frac{\varphi_a}{2}$$

При $\varphi_a = \frac{\pi}{2}$ получаем

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma}{M}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{m} \xi$$

При этом $\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{m}{M} / \xi \ll 1$



Мы видим, что расстояние отныне -
 ресной ветви сильно превосходит
 расстояние звуковой ветви.

Рассмотрим случай $\frac{m}{M} \gg \xi$

Ещё раз напишем:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{\theta_a}{2} \right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 \pm \left(1 - 4 \frac{\frac{m}{M} (1-2\alpha) \sin^2 \frac{\theta_a}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{\theta_a}{2} \right)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Для определенности скажем, что
 $\frac{m}{M} \ll 1$, что соответствует
 акустической ветви.

$$\frac{\frac{m}{M} (1-2\alpha) \sin^2 \frac{\theta_a}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{\theta_a}{2} \right)^2} \leq \frac{\frac{m}{M} \cdot (1-2\alpha)}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{m}{M} \cdot \xi}{\left(\frac{m}{M} + \xi \right)^2} \approx \frac{\frac{m}{M} \cdot \xi}{\left(\frac{m}{M} \right)^2} =$$

$$= \sum \cdot \frac{M}{m} \ll 1$$

По этой причине можно разложить корень.

$$\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{f_a}{2} =$$

$$= \frac{m}{M} + 1 - \sin^2 \frac{f_a}{2} + \sum \sin^2 \frac{f_a}{2} \approx$$

$$\approx \frac{m}{M} + \cos^2 \frac{f_a}{2}$$

$$\omega^2 \approx \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + \cos^2 \left(\frac{f_a}{2} \right) \right) \circ$$

$$\circ \left(1 \pm \left(1 - 2 \cdot \frac{m/M \cdot \sum \sin^2 \frac{f_a}{2}}{\left(\frac{m}{M} + \cos^2 \left(\frac{f_a}{2} \right) \right)^2} \right) \right)$$

$$\omega_1^2 \approx \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + \cos^2 \frac{f_a}{2} \right) \circ 2 \frac{m}{M} \frac{\sum \sin^2 \frac{f_a}{2}}{\left(\frac{m}{M} + \cos^2 \frac{f_a}{2} \right)^2}$$

$$= \frac{2\gamma}{M} \frac{\sum \sin^2 \frac{f_a}{2}}{\frac{m}{M} + \cos^2 \frac{f_a}{2}}$$

$$\omega_2^2 \approx \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + \cos^2 \frac{\varphi_a}{2} \right) \cdot 2 =$$

$$= \frac{2\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + \cos^2 \frac{\varphi_a}{2} \right)$$

Тангенс:

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma}{M} \cdot \frac{\xi \sin^2 \frac{\varphi_a}{2}}{\frac{m}{M} + \cos^2 \frac{\varphi_a}{2}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + \cos^2 \frac{\varphi_a}{2} \right)$$

При $\varphi_a = \pi$:

$$\omega_1^2 = \xi \cdot \frac{2\gamma}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{M}$$

По-прежнему, $\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} < 1$.

Конечно, поиграем мы не картинку.

Далее вывод, что при малых значениях ξ , масса при $\alpha \approx \frac{1}{2}$ интересная вещь сильно выше акустической.