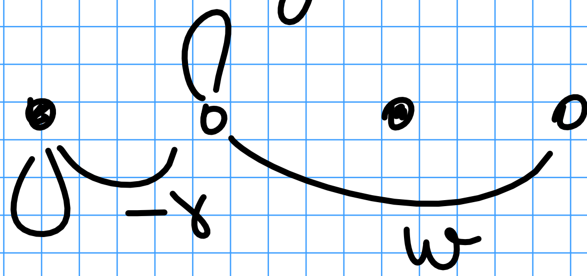
# Контрольная работа по теоретической физике твёрдого тела




Масса иона: $M$
Масса электрона: $m$

$$A_{12}(0) = -\gamma, \quad A_{12}(-a) = -\gamma$$
$$A_{21}(0) = -\gamma, \quad A_{21}(a) = -\gamma$$
$$A_{22}(a) = w, \quad A_{22}(-a) = w$$

Известно, что $\sum\limits_{jn} A_{ji}(n) = 0$

$$\sum_{jn} A_{j1}(n) = \sum_{n} A_{11}(n) + \sum_{n} A_{21}(n) = 0$$

$$A_{11}(0) + A_{21}(0) + A_{21}(a) = 0$$

$$A_{11}(0) = -A_{21}(0) - A_{21}(a) = 2\gamma$$

$$\sum_{jn} A_{j2}(n) = \sum_{n} A_{12}(n) + \sum_{n} A_{22}(n) =$$
$$= 0$$

$$A_{12}(0) + A_{12}(-a) + A_{22}(0) + A_{22}(a) +$$
$$+ A_{22}(-a) = 0$$
$$A_{22}(0) = 2\gamma - 2w$$
$$C_{ij} = \frac{1}{\sqrt{M_i M_j}} \sum_n A_{ij}(n) e^{-inf}$$
$$C_{11} = \frac{1}{M} \cdot A_{11}(0) = \frac{2\gamma}{M}$$
$$C_{22} = \frac{1}{m} \left( A_{22}(0) + A_{22}(a) e^{-iaf} + A_{22}(-a) e^{ifa} \right)$$
$$= \frac{1}{m} (2\gamma - 2w + 2w \cos fa) =$$
$$= \frac{2\gamma}{m} \left( 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{fa}{2} \right),$$
где $\alpha = \frac{w}{\gamma}$
$$C_{12} = \frac{1}{\sqrt{Mm}} \left( A_{12}(0) + A_{12}(-a) e^{ifa} \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{Mm}} (-\gamma - \gamma e^{ifa}) = -\frac{\gamma}{\sqrt{Mm}} (1 + e^{ifa})$$
$$C_{21} = \frac{1}{\sqrt{Mm}} \left( A_{21}(0) + A_{21}(a) e^{-ifa} \right) =$$
$$= -\frac{\gamma}{\sqrt{Mm}} (1 + e^{-ifa})$$
Таким образом,
$$C_{11} = \frac{2\gamma}{M}, \quad C_{22} = \frac{2\gamma}{m} \left( 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{fa}{2} \right)$$
$$C_{12} = -\frac{\gamma}{\sqrt{Mm}} (1 + e^{ifa}), \quad C_{21} = -\frac{\gamma}{\sqrt{Mm}} (1 + e^{-ifa})$$

Найдем собственные числа матрицы $C$, то есть $\omega^2$:

$$\begin{vmatrix} C_{11}-\omega^2 & C_{12} \\ C_{21} & C_{22}-\omega^2 \end{vmatrix} = (C_{11}-\omega^2)(C_{22}-\omega^2)$$

$$-C_{12}C_{21} = \omega^4 - \omega^2(C_{11}+C_{22}) +$$

$$+C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = 0$$

Получим:

$$\omega^2 = \frac{C_{11}+C_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{C_{11}+C_{22}}{2}\right)^2 - (C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21})}$$

Подставим $C_{ij}$.

$$C_{12}C_{21} = \frac{1}{Mm}\gamma^2(1+e^{ifa})(1+e^{-ifa}) =$$

$$= \frac{1}{Mm}\gamma^2(2+e^{ifa}+e^{-ifa}) = \frac{1}{Mm}\gamma^2(2+$$

$$+2\cos fa) = \frac{4\gamma^2}{Mm}\cos^2\frac{fa}{2}$$

$$C_{11}C_{22} = \frac{4\gamma^2}{Mm}\left(1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)$$

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = \frac{4\gamma^2}{Mm}\left(1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}-\cos^2\frac{fa}{2}\right)$$

$$= \frac{4\gamma^2}{Mm}(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}$$

$$\frac{C_{11}+C_{22}}{2} = \frac{\gamma}{M} + \frac{\gamma}{m} - \frac{2\alpha\gamma}{m}\sin^2\frac{fa}{2} =$$

$$= \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2\frac{fa}{2}\right)$$

Итак,

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2\frac{fa}{2}\right) \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2\frac{fa}{2}\right)^2 - \frac{4\gamma^2}{Mm}(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}}$$

Можно записать в такой форме:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2\frac{fa}{2}\right) \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{m/M\,(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}}{\left(m/M + 1 - 2\alpha \sin^2\frac{fa}{2}\right)^2}}\right)}$$

Приступим ко второй части задания

Пусть $fa \ll 1$. Имеем:

$$\sin^2\frac{fa}{2} \approx \left(\frac{fa}{2}\right)^2$$

$$\omega^2 \approx \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\left(\frac{fa}{2}\right)^2\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{(m/M)(1-2\alpha)\left(\frac{fa}{2}\right)^2}{\left(\frac{m}{M}+1\right)^2}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\left(\frac{fa}{2}\right)^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1 \pm \left(1-\frac{1}{2}(1-2\alpha)\frac{m/M}{(1+\frac{m}{M})^2}(fa)^2\right)\right)$$

$$\omega_1^2 = \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+1\right)\cdot\frac{1}{2}(1-2\alpha)\frac{m/M}{(1+\frac{m}{M})^2}(fa)^2 =$$

$$= (1-2\alpha)\frac{\gamma}{m}\frac{(fa)^2}{1+m/M}$$

$$\omega_2^2 \approx \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\left(\frac{fa}{2}\right)^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(2-\frac{1}{2}(1-2\alpha)\frac{m/M}{(1+\frac{m}{M})^2}(fa)^2\right) \approx$$

$$\approx \frac{\gamma}{m}\left(2\frac{m}{M}+2-\alpha(fa)^2-\left(\frac{m}{M}+1\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{2}(1-2\alpha)\frac{m/M}{(1+\frac{m}{M})^2}(fa)^2\right) =$$

$$= \frac{\gamma}{m}\left(2\cdot\left(1+\frac{m}{M}\right)-\alpha(fa)^2-\frac{m/M}{1+\frac{m}{M}}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(fa)^2\right)$$

$$= \frac{\gamma}{m}\left(2\left(1+\frac{m}{M}\right)-\frac{M\alpha+m/2}{m+M}(fa)^2\right) =$$

$$= 2\gamma\frac{\frac{m}{M}+1}{m}\left(1-\frac{1}{4}\frac{2\alpha+\frac{m}{M}}{(1+\frac{m}{M})^2}(fa)^2\right)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2\gamma(\frac{m}{M}+1)}{m}}\left(1-\frac{1}{8}\frac{2\alpha+\frac{m}{M}}{(1+\frac{m}{M})^2}(fa)^2\right)$$

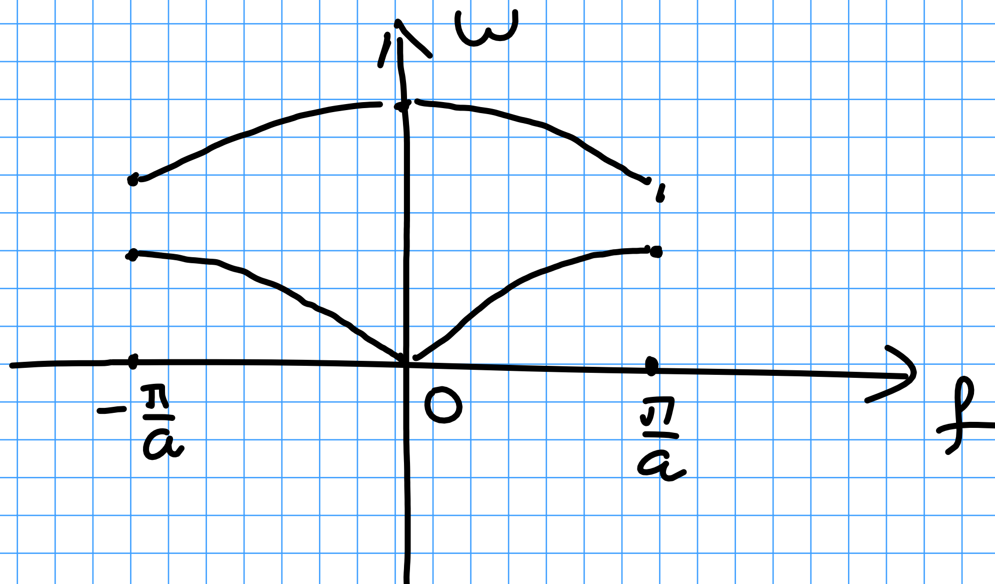
Итак, получили:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1 &\approx \sqrt{\frac{\gamma}{2M}\frac{(1-2\alpha)}{1+\frac{m}{M}}}\cdot|fa| \\ \omega_2 &\approx \sqrt{\frac{2\gamma}{m}\left(1+\frac{m}{M}\right)}\left(1-\frac{1}{8}\,\frac{2\alpha+\frac{m}{M}}{\left(1+\frac{m}{M}\right)^2}(fa)^2\right) \end{aligned}}$$

Пусть $f=\frac{\pi}{a}$.

$$\sin^2\frac{fa}{2}=1$$

$$\boxed{\omega_{1,2}^2=\frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\right)\cdot\left(1\pm\sqrt{1-4\,\frac{m/M\,(1-2\alpha)}{\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\right)^2}}\right)}$$



Определим условие устойчивости.

$\omega^2 \geqslant 0$, если $\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2\frac{fa}{2} \geqslant 0$

и если $1 \geq \sqrt{1 - 4\frac{m/M\,(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)^2}}$

при любом $f$

Это имеет место при $\alpha \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{m}{M}\right)$

и при $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Таким образом:

$$\boxed{\alpha \leq \frac{1}{2}}$$

Пусть $\frac{m}{M} \ll 1$

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{m}{M}\,\frac{(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)^2}}\right)$$

При любых допустимых $\alpha$

$$\frac{(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}}{\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)^2} \le \frac{1}{1-2\alpha}$$

Потребуем:

$$\frac{m}{M} \ll 1-2\alpha$$

Тогда можно разложить корень:

$$\omega^2 \approx \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1 \pm \left(1-2\frac{m}{M}\frac{(1-2\alpha)\sin^2\left(\frac{fa}{2}\right)}{\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)^2}\right)\right)$$

Получим:

$$\boxed{\omega_1^2 \approx \frac{2\gamma}{M}\frac{(1-2\alpha)\sin^2\left(\frac{fa}{2}\right)}{1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}}}$$

$$\omega_2^2 \approx \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(2-2\frac{m}{M}\frac{(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}}{\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)^2}\right) \approx$$

$$\approx \frac{2\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}-\right.$$
$$\left.-\frac{m}{M}\cdot\frac{(1-2\alpha)\sin^2(fa/2)}{1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}}\right)=$$
$$=\frac{2\gamma}{m}\left(1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}+\frac{m}{M}\frac{\cos^2\frac{fa}{2}}{1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}}\right.$$

$$\boxed{\omega_2^2\approx\frac{2\gamma}{m}\left(1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}+\frac{m}{M}\frac{\cos^2\frac{fa}{2}}{1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}}\right)}$$

При $fa \ll 1$:

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_1&\approx\sqrt{\frac{\gamma}{M}\frac{1-2\alpha}{2}}\,fa\\ \omega_2&\approx\sqrt{\frac{2\gamma}{m}}\left(1-\frac{1}{4}\alpha(fa)^2+\frac{1}{2}\frac{m}{M}\right)\end{aligned}}$$

Здесь мы считаем, что $(fa)^2\frac{m}{M}$ очень мало, поэтому мы отбросили слагаемые с этим выражением.

Результаты совпадают с предыдущими.

Пусть $\alpha \approx \frac{1}{2}$, то есть $\alpha$ близко к предельному значению

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi \;, \quad \xi \ll 1$$

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m}\left(1 + \frac{m}{M} - (1-\xi)\sin^2\frac{fa}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{\xi\, {}^{m}/_{M} \sin^2\frac{fa}{2}}{\left(\frac{m}{M} - (1-\xi)\sin^2\frac{fa}{2}\right)^2}}\right)$$

Рассмотрим 2 случая:

$$\frac{m}{M} \ll \xi \;, \quad \frac{m}{M} \gg \xi$$

Первый случай мы рассмотрели выше. Осталось подставить $\alpha$.

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma}{M}\,\frac{\xi\sin^2\frac{fa}{2}}{1-(1-\xi)\sin^2\frac{fa}{2}} =$$

$$= \frac{2\gamma}{M}\,\xi\,\frac{\sin^2\frac{fa}{2}}{\cos^2\frac{fa}{2} + \xi\sin^2\frac{fa}{2}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{m}\Bigg(1-(1-\xi)\sin^2\frac{fa}{2} + \frac{m}{M}\,\frac{\cos^2\frac{fa}{2}}{1-(1-\xi)\sin^2\frac{fa}{2}}\Bigg) \approx$$

$$\approx \frac{2\gamma}{m}\left(\cos^2\frac{fa}{2} + \xi\sin^2\frac{fa}{2}\right)$$

Здесь мы учли, что $\frac{m}{M} \ll \xi$

Итого,

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{2\gamma}{M}\,\xi\,\frac{\sin^2\frac{fa}{2}}{\cos^2\frac{fa}{2}+\xi\sin^2\frac{fa}{2}} \\ \omega_2^2 &= \frac{2\gamma}{m}\left(\cos^2\frac{fa}{2}+\xi\sin^2\frac{fa}{2}\right)\end{aligned}}$$

Т.к. $\xi \ll 1$, то при $fa \neq \frac{\pi}{2}$

$$\underline{\omega_1^2} = \frac{2\gamma}{M}\,\frac{\xi\sin^2\left(\frac{fa}{2}\right)}{\cos^2\frac{fa}{2}} =$$

$$= \underline{\frac{2\gamma}{M}\,\xi\,\mathrm{tg}^2\frac{fa}{2}}$$

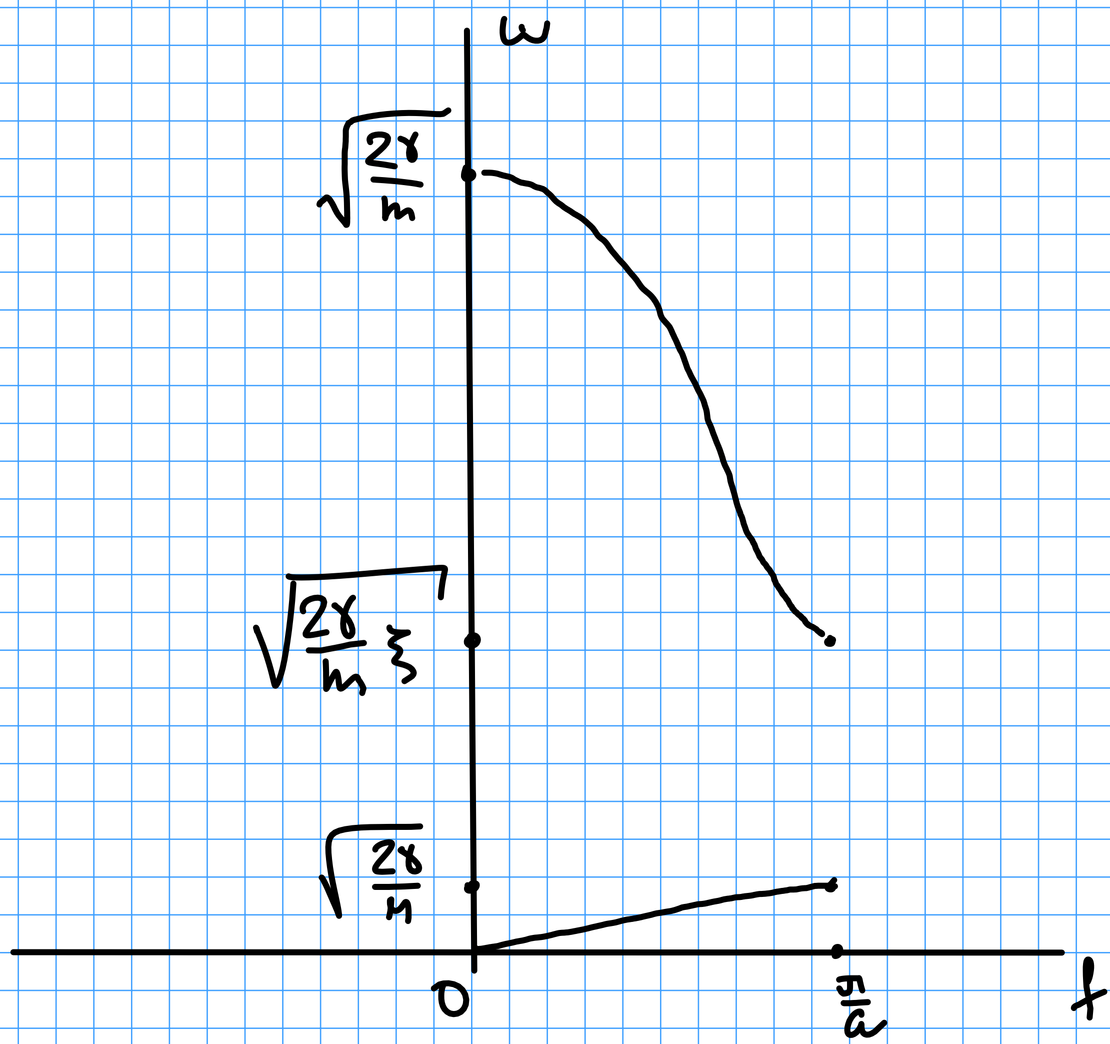
$$\omega^2 = \frac{2\gamma}{m}\cos^2\frac{fa}{2}$$

При $fa = \frac{\pi}{2}$ получаем однако

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma}{M}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{m}\xi$$

При тём $\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{m}{M}/\xi \ll 1$



Мы видим, что частоты оптической ветви сильно превосходят частоты звуковой ветви.

Рассмотрим случай $\frac{m}{M} \gg \xi$

Ещё раз напомним:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2\frac{fa}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot\left(1 \pm \left(1 - 4\frac{m/M\,(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Для определённости считаем, что $\frac{m}{M} \ll 1$, что соответствует физической картине.

$$\frac{m}{M}\,\frac{(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\sin\frac{fa}{2}\right)^2} \leq \frac{m}{M}\cdot\frac{(1-2\alpha)}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{m}{M}\,\frac{\xi}{\left(\frac{m}{M} + \xi\right)^2} \approx \frac{m}{M}\cdot\frac{\xi}{\left(\frac{m}{M}\right)^2} =$$

$$= \xi \cdot \frac{M}{m} \ll 1$$

По этой причине можно разложить корень.

$$\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{fa}{2} =$$

$$= \frac{m}{M} + 1 - \sin^2 \frac{fa}{2} + \xi \sin^2 \frac{fa}{2} \approx$$

$$\approx \frac{m}{M} + \cos^2 \frac{fa}{2}$$

$$\omega^2 \approx \frac{\gamma}{m} \left( \frac{m}{M} + \cos^2\left(\frac{fa}{2}\right) \right) \cdot$$

$$\cdot \left( 1 \pm \left( 1 - 2 \cdot \frac{m/M \cdot \xi \sin^2 \frac{fa}{2}}{\left( \frac{m}{M} + \cos^2\left(\frac{fa}{2}\right) \right)^2} \right) \right)$$

$$\omega_1^2 \approx \frac{\gamma}{m} \left( \frac{m}{M} + \cos^2 \frac{fa}{2} \right) \cdot 2 \frac{m}{M} \frac{\xi \cdot \sin^2 \frac{fa}{2}}{\left( \frac{m}{M} + \cos^2 \frac{fa}{2} \right)^2}$$

$$= \frac{2\gamma}{M} \frac{\xi \sin^2 \frac{fa}{2}}{\frac{m}{M} + \cos^2 \frac{fa}{2}}$$

$$\omega_2^2 \approx \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + \cos^2\frac{fa}{2}\right)\cdot 2 =$$

$$= \frac{2\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + \cos^2\frac{fa}{2}\right)$$

Получим:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{2\gamma}{M}\cdot\frac{\xi\sin^2\frac{fa}{2}}{\frac{m}{M}+\cos^2\frac{fa}{2}} \\ \omega_2^2 &= \frac{2\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+\cos^2\frac{fa}{2}\right) \end{aligned}}$$

Как и в прошлый раз, при $fa \neq \pi$ имеем:

$$\omega_1^2 \approx \frac{2\gamma}{M}\xi\,\mathrm{tg}^2\frac{fa}{2}$$

$$\omega_2^2 \approx \frac{2\gamma}{m}\cos^2\frac{fa}{2}$$

При $fa = \pi$:

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma}{m}\cdot\xi$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{M}$$

$$\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{M}{m}\frac{1}{\xi} \ll 1$$

Таким образом, при $f \neq \frac{\pi}{a}$ поведение $\omega^2(f)$ одинаково для обоих случаев $\frac{m}{M} \ll \xi$ и $\frac{m}{M} \gg \xi$.

В обоих случаях:

$$\omega_1 \approx \sqrt{\frac{2\gamma}{M}\xi}\ \operatorname{tg}\frac{fa}{2}$$

$$\omega_2 \approx \sqrt{\frac{2\gamma}{m}}\cos\frac{fa}{2}$$

При $f = \frac{\pi}{a}$ в случае $\frac{m}{M} \ll \xi$ имеем:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\gamma}{M}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{m}\xi}$$

при $\frac{m}{M} \gg \xi$:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2\gamma}{m}\xi}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{M}}$$

В обоих случаях оптическая ветвь много выше акустической и пробегает больший интервал значений.