Задача 2.

$$U = \exp\left(\frac{1}{2} \sum_p \left(a_p a_{-p} - a_p^+ a_{-p}^+ \right) \varphi_p \right)$$

Докажем, что

$$U a_p U^+ = \operatorname{ch} \varphi_p \, a_p + \operatorname{sh} \varphi_p \, a_{-p}$$

$$[a_p a_{-p} - a_p^+ a_{-p}^+ , a_q a_{-q} - a_q^+ a_{-q}] =$$

$$= -[a_p a_{-p}, a_q^+ a_{-q}^+] - [a_p^+ a_{-p}^+, a_q a_{-q}] =$$

$$= -a_p [a_{-p}, a_q^+ a_{-q}^+] - [a_p, a_q^+ a_{-q}^+] a_{-p} -$$

$$- a_p^+ [a_{-p}^+, a_q a_{-q}] - [a_p^+, a_q a_{-q}] a_{-p}^+ =$$

$$= -a_p a_q^+ \delta_{pq} - a_p a_{-q}^+ \delta_{-pq} - a_q^+ a_{-p} \delta_{-pq} -$$

$$- a_{-q}^+ a_{-p} \delta_{pq} + a_p^+ a_q \delta_{pq} + a_p^+ a_{-q} \delta_{-pq} +$$

$$+ a_q a_{-p}^+ \delta_{-pq} + a_{-q} a_{-p}^+ \delta_{pq} =$$

$$= \delta_{pq} (a_p^+ a_p - a_p a_p^+) + \delta_{-pq} (a_p^+ a_p - a_p a_p^+)$$

$$+ \delta_{-pq} (a_{-p} a_{-p}^+ - a_{-p}^+ a_{-p}) + \delta_{pq} (a_{-p} a_{-p}^+ -$$

$$- a_{-p}^+ a_{-p}) = - \delta_{pq} - \delta_{-pq} + \delta_{-pq} + \delta_{pq} =$$

$$= 0$$

Отсюда

$$U = \prod_p \exp\left(\frac{\varphi_p}{2}\left(a_p a_{-p} - a_p^+ a_{-p}\right)\right)$$

$\exp\left(\frac{\varphi_q}{2}\left(a_q a_{-q} - a_q^+ a_{-q}^+\right)\right)$ коммутирует с a_p, если $q \neq \pm p$, и сокращается с $\exp\left(-\frac{\varphi_q}{2}\left(a_q a_{-q} - a_{-q}^+ a_{-q}^+\right)\right)$.

Поэтому

$$U a_p U^+ = \exp\left(\varphi_p\left(a_p a_{-p} - a_p^+ a_{-p}^+\right)\right) \cdot a_p \cdot$$
$$\cdot \exp\left(-\varphi_p\left(a_p a_{-p} - a_p^+ a_{-p}^+\right)\right)$$

Воспользуемся формулой:

$$e^A B e^{-B} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A,[A,B]] + \frac{1}{3!}[A,[A,[A,B]]] + \ldots$$

В нашем случае:

$$A = \varphi_p\left(a_p a_{-p} - a_p^+ a_{-p}^+\right)$$

$$B = a_p$$

$$[A, B] = \varphi_p [a_p a_{-p} - a_p^+ a_{-p}^+, a_p] =$$

$$= -\varphi_p [a_p^+ a_{-p}^+, a_p] = \varphi_p a_{-p}^+$$

$$[A, [A, B]] = \varphi_p^2 [a_p a_{-p} - a_p^+ a_{-p}^+, a_{-p}^+] =$$

$$= \varphi_p^2 [a_p a_{-p}, a_{-p}^+] = \varphi_p^2 a_p$$

И так далее.

Получим

$$U a_p U^+ = a_p + \varphi_p a_{-p}^+ + \frac{\varphi_p^2}{2!} a_p +$$

$$+ \frac{\varphi_p^3}{3!} a_{-p}^+ + \ldots = \operatorname{ch}\varphi_p \, a_p + \operatorname{sh}\varphi_p \, a_{-p}^+$$

Таким образом, мы доказали.