Задание 3.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\vec{n},\vec{m}} A^{\alpha\beta}(\vec{n}-\vec{m})\, u^{\alpha}_{\vec{n}} u^{\beta}_{\vec{n}}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\vec{n},\vec{m}} A^{\alpha\beta}(\vec{n}-\vec{m}) \left(u^{\alpha}_{\vec{n}} - u^{\alpha}_{\vec{m}}\right)\left(u^{\beta}_{\vec{n}} - u^{\beta}_{\vec{m}}\right)$$

$$= - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n},\vec{m}} A^{\alpha\beta}(\vec{n}-\vec{m})\, u^{\alpha}_{\vec{n}} u^{\beta}_{\vec{n}} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\vec{n},\vec{m}} A^{\alpha\beta}(\vec{n}-\vec{m})\, u^{\alpha}_{\vec{m}} u^{\beta}_{\vec{m}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n},\vec{m}} A^{\alpha\beta}(\vec{n}-\vec{m})\, u^{\alpha}_{\vec{n}} u^{\beta}_{\vec{m}}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\vec{n},\vec{m}} A^{\alpha\beta}(\vec{n}-\vec{m})\, u^{\alpha}_{\vec{m}} u^{\beta}_{\vec{n}} =$$

$$= \sum_{\vec{n},\vec{m}} A^{\alpha\beta}(\vec{n}-\vec{m})\, u^{\alpha}_{\vec{n}} u^{\beta}_{\vec{m}}$$

Таким образом,

$$U = - \frac{1}{4} \sum_{\vec{n},\vec{m}} A^{\alpha\beta}(\vec{n}-\vec{m}) \left(u^{\alpha}_{\vec{n}} - u^{\alpha}_{\vec{m}}\right)\left(u^{\beta}_{\vec{n}} - u^{\beta}_{\vec{n}}\right)$$

$$u^{\alpha}_{\vec{n}} - u^{\alpha}_{\vec{m}} \approx \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial R^{\gamma}}(\vec{R}_{\vec{m}})\left(R^{\gamma}_{\vec{n}} - R^{\gamma}_{\vec{m}}\right)$$

— это верно, если $|\vec{R}_{\vec{n}} - \vec{R}_{\vec{m}}| \ll \lambda$, где λ – длина волны.

При суммировании по $\vec{m}, \vec{n}$ можно учитывать только соседние точки, что $|\vec{R}_{\vec{n}} - \vec{R}_{\vec{m}}| \leq b$, где b – характерный радиус взаимодействия (в приближении ближайших соседей $b = a$).

Поэтому получаем условие

$$b \ll \lambda$$

То есть длина волны должна быть достаточно большой.

$$U = -\frac{1}{4}\sum_{\vec{n}\vec{m}} A^{\alpha\beta}(\vec{n}-\vec{m})\left(R^{\gamma}_{\vec{n}} - R^{\gamma}_{\vec{m}}\right)\left(R^{\delta}_{\vec{n}} - R^{\delta}_{\vec{m}}\right)$$

$$\cdot \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial R^{\gamma}}(\vec{R}_{\vec{m}}) \frac{\partial u^{\beta}}{\partial R^{\delta}}(\vec{R}_{\vec{m}})$$

Суммирование по $\vec{m}$ можем заменить интегрированием по $\vec{R}_{\vec{m}}$

$$U = -\frac{1}{4V_0}\int d^3\vec{R}\,\frac{\partial u^\alpha}{\partial R^\gamma}\frac{\partial u^\beta}{\partial R^\delta}\,\cdot$$

$$\cdot \sum_{\vec{n}\vec{m}}{}' A^{\alpha\beta}(\vec{n}-\vec{m})\left(\vec{R}_{\vec{n}}-\vec{R}_{\vec{m}}\right)^\gamma\left(\vec{R}_{\vec{n}}-\vec{R}_{\vec{m}}\right)^\delta$$

Заметим, что $\sum_{\vec{n}\vec{m}}{}' A^{\alpha\beta}(\vec{n}-\vec{m})\left(R^\gamma_{\vec{n}}-R^\gamma_{\vec{m}}\right)\left(R^\delta_{\vec{n}}-R^\delta_{\vec{m}}\right)$

не зависит от $\vec{m}$ в силу трансляционной симметрии.