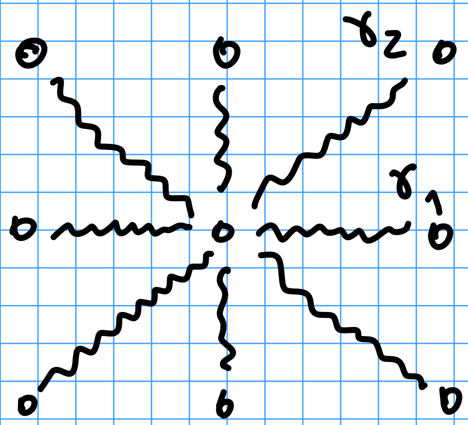
Задание 7



Найти спектр решётки.

$$A^{xx}(\pm a, 0) = A^{yy}(0, \pm a) = -\gamma_1$$

$$A^{xy}(\pm a, 0) = A^{xy}(0, \pm a) = 0$$

$$A^{\alpha\beta}(a, a) = A^{\alpha\beta}(-a, -a) = -\gamma_2$$

$$A^{xx}(a, -a) = A^{xx}(-a, a) = -\gamma_2$$

$$A^{yy}(a, -a) = A^{yy}(-a, a) = -\gamma_2$$

$$A^{xy}(a, -a) = A^{xy}(-a, a) = \gamma_2$$

$$A^{yx}(a, -a) = A^{yx}(-a, a) = \gamma_2$$

Известно, что $\sum\limits_{\vec{n}} A^{\alpha\beta}(\vec{n}) = 0$

$$A^{xx}(0,0) + A^{xx}(a,0) + A^{xx}(-a,0) +$$
$$+ A^{xx}(a,a) + A^{xx}(a,-a) + A^{xx}(-a,a)$$
$$+ A^{xx}(-a,-a) = 0$$

Получим:

$$A^{xx}(0,0) = 2\gamma_1 + 4\gamma_2$$

Аналогично,

$$A^{yy}(0,0) = 2\gamma_1 + 4\gamma_2$$

$$A^{xy}(0,0) + A^{xy}(a,a) + A^{xy}(-a,a) +$$
$$+ A^{xy}(-a,-a) + A^{xy}(a,-a) = 0$$

Получим:

$$A^{xy}(0,0) = 0$$

Аналогично,

$$A^{yx}(0,0) = 0$$

$$C^{\alpha\beta} = \frac{1}{m} \sum_{\vec{n}} A^{\alpha\beta}(\vec{n}) e^{-i\vec{n}\cdot\vec{f}}$$

$$C^{xx} = \frac{1}{m} \Big(A^{xx}(0,0) + A^{xx}(a,0) \cdot$$
$$\cdot e^{-if_1 a} +$$

$$+ A^{xx}(-a,0)\, e^{if_1 a} + A^{xx}(a,a) \cdot$$

$$\cdot\, e^{-if_1 a - if_2 a} + A^{xx}(-a,a)\, e^{if_1 a - if_2 a}$$

$$+ A^{xx}(a,-a)\, e^{-if_1 a + if_2 a} +$$

$$+ A^{xx}(-a,-a)\, e^{if_1 a + if_2 a} \Big) =$$

$$= \frac{1}{m}\Big(2\gamma_1 + 4\gamma_2 - 2\gamma_1 \cos(f_1 a) -$$

$$- 2\gamma_2 \cos((f_1 - f_2)a) - 2\gamma_2 \cos((f_1 + f_2)a)\Big)$$

$$= \frac{1}{m}\Big(4\gamma_1 \sin^2 \frac{f_1 a}{2} + 4\gamma_2 \sin^2 \frac{(f_1 - f_2)a}{2} +$$

$$+ 4\gamma_2 \sin^2 \frac{(f_1 + f_2)a}{2}\Big)$$

Аналогично,

$$C^{yy} = \frac{1}{m}\Big(4\gamma_1 \sin^2 \frac{f_2 a}{2} + 4\gamma_2 \sin^2 \frac{(f_1 - f_2)a}{2}$$

$$+ 4\gamma_2 \sin^2 \frac{(f_1 + f_2)a}{2}\Big)$$

$$C^{xy} = \frac{1}{m}\Big(A^{xy}(a,a)\, e^{-if_1 a - if_2 a} +$$

$$+ A^{xy}(-a,a)\, e^{if_1 a - if_2 a} +$$

$$+ A^{xy}(a_1 - a)\, e^{-if_1 a + if_2 a} +$$
$$+ A^{xy}(-a_1 - a)\, e^{if_1 a + if_2 a} \Big) =$$
$$= \frac{\gamma_2}{m} \Big(2\cos(f_1 + f_2)a - 2\cos(f_1 - f_2)a \Big) =$$
$$= \frac{4\gamma_2}{m} \left(\sin^2 \frac{(f_1 - f_2)a}{2} - \sin^2 \frac{(f_1 + f_2)a}{2} \right)$$

Таким образом, мы нашли матрицу C. Найдём её собственные числа.

$$\begin{vmatrix} C_{xx} - \omega^2 & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{C_{xx} + C_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{C_{xx} + C_{yy}}{2} \right)^2 - (C_{xx}C_{yy} - C_{xy}C_{yx})},$$

где ещё раз

$$C_{xx} = \frac{1}{m} \Big(4\gamma_1 \sin^2 \frac{f_1 a}{2} + 4\gamma_2 \sin^2 \frac{(f_1 - f_2)a}{2} + 4\gamma_2 \sin^2 \frac{(f_1 + f_2)a}{2} \Big)$$

$$C_{yy} = \frac{1}{m}\left(4\gamma_1 \sin^2\frac{f_2 a}{2} + 4\gamma_2 \sin^2\frac{(f_1 - f_2)a}{2} + 4\gamma_2 \sin^2\frac{(f_1+f_2)a}{2}\right)$$

$$C_{xy} = C_{yx} = \frac{4\gamma_2}{m}\left(\sin^2\frac{(f_1-f_2)a}{2} - \sin^2\frac{(f_1+f_2)a}{2}\right)$$

Найдем акустическое приближение.

$f_1 a,\ f_2 a \ll 1$

$$C_{xx} \approx \frac{1}{m}\left(\gamma_1 (f_1 a)^2 + \gamma_2 (f_1 - f_2)^2 a^2 + \gamma_2 (f_1 + f_2)^2 a^2\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\left(\gamma_1 (f_1 a)^2 + 2\gamma_2 (f_1 a)^2 + 2\gamma_2 (f_2 a)^2\right)$$

$$C_{yy} = \frac{1}{m}\left(\gamma_1 (f_2 a)^2 + 2\gamma_2 (f_1 a)^2 + 2\gamma_2 (f_2 a)^2\right)$$

$$\frac{C_{xx} + C_{yy}}{2} = \frac{1}{2m}\left(\gamma_1 + 4\gamma_2\right) f^2 a^2$$

$$C_{xx} C_{yy} = \frac{1}{m^2}\left(\gamma_1 (f_1 a)^2 + 2\gamma_2 f^2 a^2\right) \cdot$$

$$\cdot \left(\gamma_1 f_2^2 a^2 + 2\gamma_2 f^2 a^2\right) =$$

$$= \frac{1}{m^2}\Big(\gamma_1\gamma_2 f_1^2 f_2^2 a^4 + 2\gamma_1\gamma_2 f_1^2 f^2 a^4 +$$

$$+ 2\gamma_1\gamma_2 f_2^2 f^2 a^2 + 4\gamma_2^2 f^4 a^2 \Big) =$$

$$= \frac{1}{m^2}\Big(\gamma_1\gamma_2 f_1^2 f_2^2 a^4 + \left(2\gamma_1\gamma_2 + 4\gamma_2^2\right) f^4 a^4 \Big)$$

$$C_{xy} C_{yx} = \frac{\gamma_2^2}{m^2}\left(a^2 (f_1 - f_2)^2 - a^2 (f_1 + f_2)^2 \right)^2$$

$$= \frac{\gamma_2^2}{m^2}\, 16\, a^4 f_1^2 f_2^2$$

$$C_{xx} C_{yy} - C_{xy} C_{yx} =$$

$$= \frac{a^4}{m^2}\Big(f_1^2 f_2^2 (\gamma_1\gamma_2 - 16\gamma_2^2) + (2\gamma_1\gamma_2 + 4\gamma_2^2) f^4 \Big)$$

$$4\,\frac{C_{xx} C_{yy} - C_{xy} C_{yx}}{(C_{xx} + C_{yy})^2} =$$

$$= 4\,\frac{\cos^2\alpha \sin^2\alpha (\gamma_1\gamma_2 - 16\gamma_2^2) + (2\gamma_1\gamma_2 + 4\gamma_2^2)}{(\gamma_1 + 4\gamma_2)^2}$$

Мы считали, что $\vec{f} = f(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$$\omega^2 = \frac{C_{xx}+C_{yy}}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-4\frac{C_{xx}C_{yy}-C_{xy}C_{yx}}{(C_{xx}+C_{yy})^2}}\right)$$

$$= \frac{\gamma_1+4\gamma_2}{2m}(fa)^2\left(1 \pm \frac{\sqrt{\gamma_1^2-4(\gamma_1\gamma_2-16\gamma_2^2)\cos^2\alpha\sin^2\alpha}}{\gamma_1+4\gamma_2}\right)$$

Видим, что скорости звука зависят от направления вектора $\vec{f}$

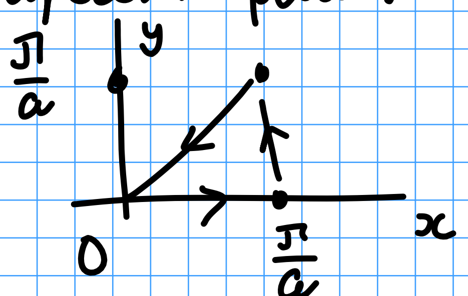
Построим график.

Считаем, что $\gamma_2 = \frac{\gamma_1}{2\sqrt{2}}$

ω будем измерять в $\sqrt{\gamma_1/m}$,

f в $\frac{1}{a}$.

Строим графики вдоль следующей траектории:



Используем python, пакеты: numpy, matplotlib.

Графики в файле graph7.png