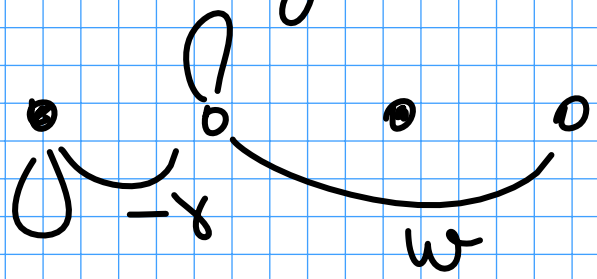
Контрольная работа по теоретической физике твёрдого тела



Масса иона: M

Масса электрона: m

$$A_{12}(0) = -\gamma, \quad A_{12}(-a) = -\gamma$$

$$A_{21}(0) = -\gamma, \quad A_{21}(a) = -\gamma$$

$$A_{22}(a) = w, \quad A_{22}(-a) = w$$

Известно, что $\sum_{jn} A_{ji}(n) = 0$

$$\sum_{jn} A_{j1}(n) = \sum_{n} A_{11}(n) + \sum_{n} A_{21}(n) = 0$$

$$A_{11}(0) + A_{21}(0) + A_{21}(a) = 0$$

$$A_{11}(0) = -A_{21}(0) - A_{21}(a) = 2\gamma$$

$$\sum_{jn} A_{j2}(n) = \sum_{n} A_{12}(n) + \sum_{n} A_{22}(n) =$$

$$= 0$$

$$A_{12}(0) + A_{12}(-a) + A_{22}(0) + A_{22}(a) +$$

$$+ A_{22}(-a) = 0$$

$$A_{22}(0) = 2\gamma - 2w$$

$$C_{ij} = \frac{1}{\sqrt{M_i M_j}} \sum_n A_{ij}(n) e^{-inkl}$$

$$C_{11} = \frac{1}{M} \cdot A_{11}(0) = \frac{2\gamma}{M}$$

$$C_{22} = \frac{1}{m} \left(A_{22}(0) + A_{22}(a) e^{-ikal} + A_{22}(-a) e^{ikla} \right)$$

$$= \frac{1}{m} (2\gamma - 2w + 2w \cos kla) =$$

$$= \frac{2\gamma}{m} \left(1 - 2\alpha \sin^2 \frac{kla}{2} \right),$$

где $\alpha = \frac{w}{\gamma}$

$$C_{12} = \frac{1}{\sqrt{Mm}} \left(A_{12}(0) + A_{12}(-a) e^{ikla} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{Mm}} (-\gamma - \gamma e^{ikla}) = -\frac{\gamma}{\sqrt{Mm}} (1 + e^{ikla})$$

$$C_{21} = \frac{1}{\sqrt{Mm}} \left(A_{21}(0) + A_{21}(a) e^{-ikla} \right) =$$

$$= -\frac{\gamma}{\sqrt{Mm}} (1 + e^{-ikla})$$

Полные формулы,

$$C_{11} = \frac{2\gamma}{M}, \quad C_{22} = \frac{2\gamma}{m} \left(1 - 2\alpha \sin^2 \frac{kla}{2} \right)$$

$$C_{12} = -\frac{\gamma}{\sqrt{Mm}} (1 + e^{ikla}), \quad C_{21} = -\frac{\gamma}{\sqrt{Mm}} (1 + e^{-ikla})$$

Найдем собственные числа матрицы C, то если ω^2:

$$\begin{vmatrix} C_{11}-\omega^2 & C_{12} \\ C_{21} & C_{22}-\omega^2 \end{vmatrix} = (C_{11}-\omega^2)(C_{22}-\omega^2)$$

$$-C_{12}C_{21} = \omega^4 - \omega^2(C_{11}+C_{22}) +$$

$$+ C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = 0$$

Получим:

$$\omega^2 = \frac{C_{11}+C_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{C_{11}+C_{22}}{2}\right)^2 - (C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21})}$$

Подставим C_{ij}.

$$C_{12}C_{21} = \frac{1}{Mm}\gamma^2(1+e^{ifa})(1+e^{-ifa}) =$$

$$= \frac{1}{Mm}\gamma^2(2+e^{ifa}+e^{-ifa}) = \frac{1}{Mm}\gamma^2(2+$$

$$+2\cos fa) = \frac{4\gamma^2}{Mm}\cos^2\frac{fa}{2}$$

$$C_{11}C_{22} = \frac{4\gamma^2}{Mm}\left(1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)$$

$$C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = \frac{4\gamma^2}{Mm}\left(1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}-\cos^2\frac{fa}{2}\right)$$

$$= \frac{4\gamma^2}{Mm}(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}$$

$$\frac{C_{11}+C_{22}}{2} = \frac{\gamma}{M}+\frac{\gamma}{m}-\frac{2\alpha\gamma}{m}\sin^2\frac{fa}{2} =$$

$$= \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)$$

Итак,

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right) \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{\gamma^2}{m^2}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)^2 - \frac{4\gamma^2}{Mm}(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}}$$

Можно записать в таком форме:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{m/M\,(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}}{\left(m/M + 1 - 2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)^2}}\right)$$

Приступим ко второй части задания

Пусть $fa \ll 1$. Имеем:

$$\sin^2\frac{fa}{2} \approx \left(\frac{fa}{2}\right)^2$$

$$\omega^2 \approx \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\left(\frac{fa}{2}\right)^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{(m/M)(1-2\alpha)\left(\frac{fa}{2}\right)^2}{\left(\frac{m}{M}+1\right)^2}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\left(\frac{fa}{2}\right)^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1\pm\left(1-\frac{1}{2}(1-2\alpha)\frac{mM}{(m+M)^2}(fa)^2\right)\right.$$

$$\omega_1^2 = \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+1\right)\cdot\frac{1}{2}(1-2\alpha)\frac{mM}{(m+M)^2}(fa)^2 =$$

$$= (1-2\alpha)\frac{\gamma}{2(m+M)}(fa)^2$$

$$\omega_2^2 \approx \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\left(\frac{fa}{2}\right)^2\right)\cdot$$

$$\cdot\left(2-\frac{1}{2}(1-2\alpha)\frac{mM}{(m+M)^2}(fa)^2\right)\approx$$

$$\approx \frac{\gamma}{m}\left(2\frac{m}{M}+2-\alpha(fa)^2-\left(\frac{m}{M}+1\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{1}{2}(1-2\alpha)\frac{mM}{(m+M)^2}(fa)^2\Big) =$$

$$= \frac{\gamma}{m}\left(2\frac{m+M}{M}-\alpha(fa)^2-\frac{m}{m+M}\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)(fa)^2\right)$$

$$= \frac{\gamma}{m}\left(2\frac{m+M}{M}-\frac{M\alpha+m/2}{m+M}(fa)^2\right) =$$

$$= 2\gamma\frac{m+M}{mM}\left(1-\frac{M\left(M\alpha+\frac{m}{2}\right)}{2(m+M)^2}(fa)^2\right)$$

$$\omega_2 = \sqrt{2\gamma\frac{m+M}{mM}}\left(1-\frac{1}{4}\frac{M(M\alpha+m/2)}{(m+M)^2}(fa)^2\right)$$

Итак, получили:

$$\omega_1 \approx \sqrt{(1-2\alpha)\frac{\gamma}{2(m+M)}} \cdot |fa|$$

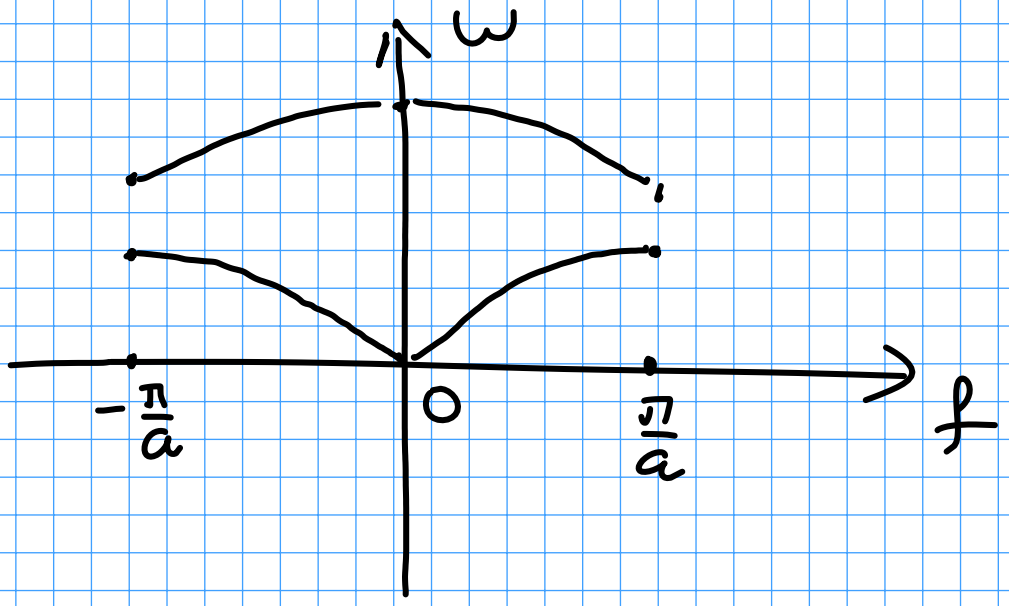
$$\omega_2 \approx \sqrt{2\gamma\frac{m+M}{mM}}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{M\left(M\alpha+\frac{m}{2}\right)}{(m+M)^2}(fa)^2\right)$$

Пусть $f = \frac{\pi}{a}$.

$$\sin^2\frac{fa}{2} = 1$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\right)\cdot\left(1 \pm \right.$$

$$\left. \pm \sqrt{1 - 4\frac{mM(1-2\alpha)}{(m+M-2\alpha M)^2}}\right)$$



Определим условие устойчивости.

$\omega^2 \geq 0$, если $\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{fa}{2} \geq 0$

и если $1 \geq \sqrt{1 - 4 \frac{m/M\,(1-2\alpha)\sin^2 \frac{fa}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{fa}{2}\right)^2}}$

при любых f

Это имеет место при $\alpha \leq \frac{1}{2} \frac{m+M}{M}$

и при $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Поэтому окончательно:

$$\boxed{\alpha \leq \frac{1}{2}}$$

Пусть $\frac{m}{M} \ll 1$

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{fa}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{m}{M} \frac{(1-2\alpha)\sin^2 \frac{fa}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{fa}{2}\right)^2}}\right)$$

При любых допустимых α

$$\frac{(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}}{\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{1-2\alpha}$$

Потребуем:

$$\frac{m}{M} \ll 1-2\alpha$$

Тогда можно разложить корни:

$$\omega^2 \approx \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1 \pm \left(1-2\frac{m}{M}\frac{(1-2\alpha)\sin^2\left(\frac{fa}{2}\right)}{\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)^2}\right)\right)$$

Получаем:

$$\omega_1^2 \approx \frac{2\gamma}{M}\frac{(1-2\alpha)\sin^2\left(\frac{fa}{2}\right)}{1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}}$$

$$\omega_2^2 \approx \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(2-2\frac{m}{M}\frac{(1-2\alpha)\sin^2\frac{fa}{2}}{\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}\right)^2}\right) \approx$$

$$\approx \frac{2\gamma}{m}\left(\frac{m}{M}+1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{m}{M}\cdot\frac{(1-2\alpha)\sin^2(fa/2)}{1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}}\right)=$$

$$=\frac{2\gamma}{M}\left(1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}-\frac{m}{M}\cdot\frac{\cos^2\frac{fa}{2}}{1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}}\right.$$

$$\omega_2^2\approx\frac{2\gamma}{M}\left(1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}-\frac{m}{M}\cdot\frac{\cos^2\frac{fa}{2}}{1-2\alpha\sin^2\frac{fa}{2}}\right)$$

При $fa \ll 1$ имеем:

$$\omega_1\approx\sqrt{\frac{2\gamma}{M}(1-2\alpha)}\,fa$$

$$\omega_2\approx\sqrt{\frac{2\gamma}{m}}\left(1-\frac{\alpha M+m/2}{4M}(fa)^2\right)$$

Это находится в согласии с теми асимптотиками, что мы нашли ранее.

Пусть $\alpha \approx \frac{1}{2}$, то есть α близко к предельному значению

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\xi, \quad \xi \ll 1$$

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m}\left(1 + \frac{m}{M} - (1-\xi)\sin^2\frac{\varphi_a}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{\xi\, m M \sin^2\frac{\varphi_a}{2}}{\left(\frac{m}{M} - (1-\xi)\sin^2\frac{\varphi_a}{2}\right)^2}}\right)$$

Рассмотрим 2 случая:

$$\frac{m}{M} \ll \xi, \quad \frac{m}{M} \gg \xi$$

Первый случай мы рассмотрели выше. Осталось подставить α.

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma}{M}\,\frac{\xi \sin^2\frac{\varphi_a}{2}}{1 - (1-\xi)\sin^2\frac{\varphi_a}{2}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{m}\left(1 - (1-\xi)\sin^2\frac{\varphi a}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{m}{M}\frac{\xi \sin^2\frac{\varphi a}{2}}{1-(1-\xi)\sin^2\frac{\varphi a}{2}}\right) \approx$$

$$\approx \frac{2\gamma}{m}\left(1 - (1-\xi)\sin^2\left(\frac{\varphi a}{2}\right)\right)$$

Член с $\frac{m}{M}$ мы отбросили, тоже как он много меньше единицы. Ранее мы его оставляли, чтобы получить правильную асимптотику.

Итак,

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma}{M}\frac{\xi \sin^2\frac{\varphi a}{2}}{1-(1-\xi)\sin^2\frac{\varphi a}{2}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{m}\left(1 - (1-\xi)\sin^2\frac{\varphi a}{2}\right)$$

Т.к. $\xi \ll 1$, то при $\varphi a \neq \frac{\pi}{2}$

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma}{M}\frac{\xi \sin^2\left(\frac{\varphi a}{2}\right)}{1-\sin^2\frac{\varphi a}{2}} =$$

$$= \frac{2\gamma}{M}\xi \operatorname{tg}^2\frac{\varphi a}{2}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{m}\left(1 - \sin^2\frac{fa}{2}\right) =$$

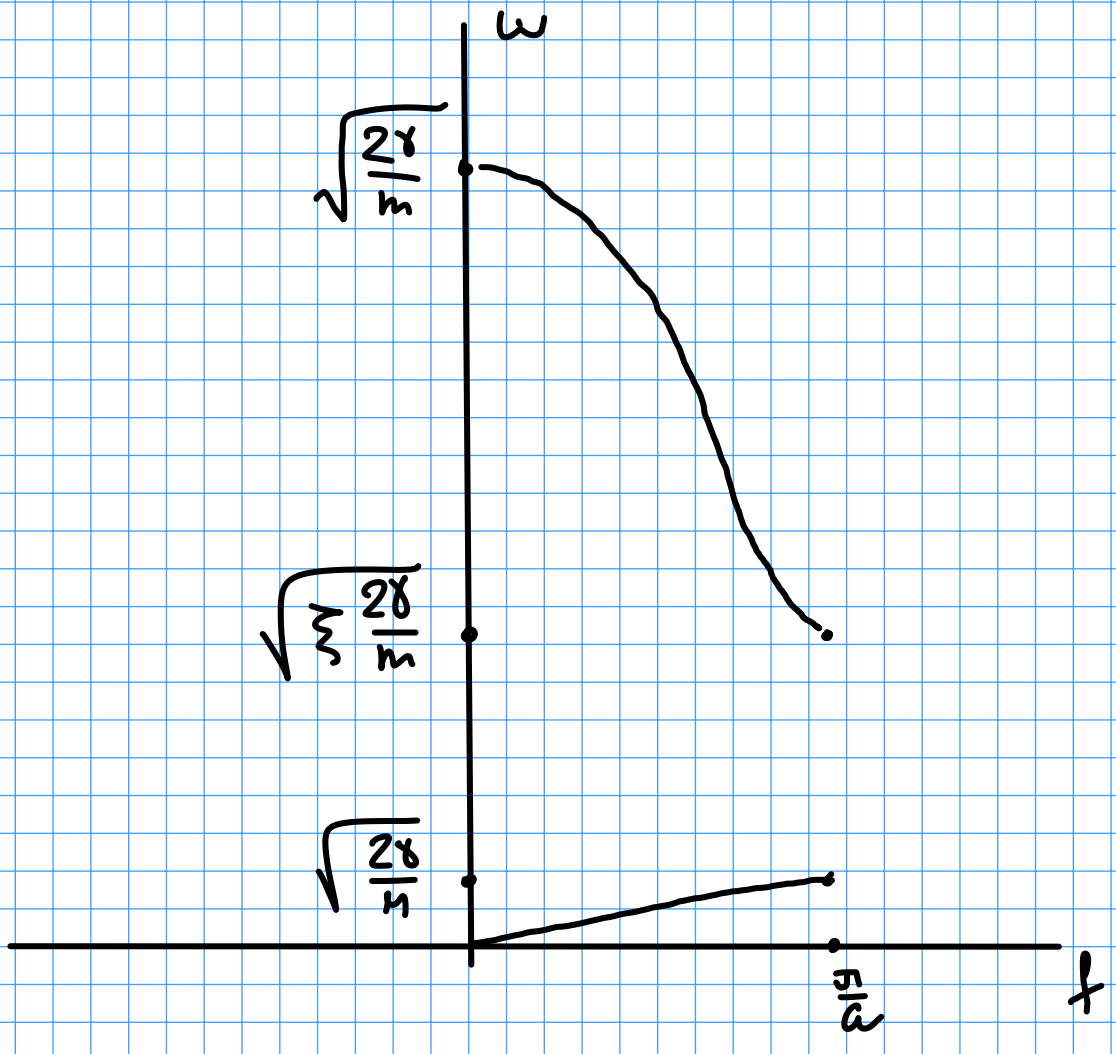
$$= \frac{2\gamma}{m}\cos^2\frac{fa}{2}$$

При $fa = \frac{\pi}{2}$ получаем однако

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma}{M}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{m}\xi$$

При этом $\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = \frac{m}{M}/\xi \ll 1$



Мы видим, что частоты оптической ветви сильно превосходят частоты звуковой ветви.

Рассмотрим случай $\frac{m}{M} \gg \xi$

Ещё раз напомним:

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2\frac{ka}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot\left(1 \pm \left(1 - 4\frac{m/M\,(1-2\alpha)\sin^2\frac{ka}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\sin^2\frac{ka}{2}\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Для определённости считаем, что $\frac{m}{M} \ll 1$, что соответствует оптической ветви.

$$\frac{m}{M}\frac{(1-2\alpha)\sin^2\frac{ka}{2}}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\sin^2\frac{ka}{2}\right)^2} \leq \frac{m}{M}\cdot\frac{(1-2\alpha)}{\left(\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{m}{M}\frac{\xi}{\left(\frac{m}{M} + \xi\right)^2} \approx \frac{m}{M}\cdot\frac{\xi}{\left(\frac{m}{M}\right)^2} =$$

$$= \xi \cdot \frac{M}{m} \ll 1$$

По этой причине можно разложить корень.

$$\frac{m}{M} + 1 - 2\alpha \sin^2 \frac{fa}{2} =$$

$$= \frac{m}{M} + 1 - \sin^2 \frac{fa}{2} + \xi \sin^2 \frac{fa}{2} \approx$$

$$\approx \frac{m}{M} + \cos^2 \frac{fa}{2}$$

$$\omega^2 \approx \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + \cos^2 \left(\frac{fa}{2} \right) \right) \circ$$

$$\circ \left(1 \pm \left(1 - 2 \cdot \frac{m/M \cdot \xi \sin^2 \frac{fa}{2}}{\left(\frac{m}{M} + \cos^2 \left(\frac{fa}{2} \right) \right)^2} \right) \right)$$

$$\omega_1^2 \approx \frac{\gamma}{m} \left(\frac{m}{M} + \cos^2 \frac{fa}{2} \right) \circ 2 \frac{m}{M} \frac{\xi \cdot \sin^2 \frac{fa}{2}}{\left(\frac{m}{M} + \cos^2 \frac{fa}{2} \right)^2}$$

$$= \frac{2\gamma}{M} \frac{\xi \sin^2 \frac{fa}{2}}{\frac{m}{M} + \cos^2 \frac{fa}{2}}$$

$$\omega_2^2 \approx \frac{\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + \cos^2\frac{\varphi a}{2}\right)\cdot 2 =$$

$$= \frac{2\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + \cos^2\frac{\varphi a}{2}\right)$$

Получили:

$$\omega_1^2 = \frac{2\gamma}{M}\cdot\frac{\xi\sin^2\frac{\varphi a}{2}}{\frac{m}{M}+\cos^2\frac{\varphi a}{2}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{m}\left(\frac{m}{M} + \cos^2\frac{\varphi a}{2}\right)$$

При $\varphi a = \pi$:

$$\omega_1^2 = \xi\cdot\frac{2\gamma}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2\gamma}{M}$$

То-противному, $\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \ll 1$.

Качественно получаем ту же картину.

Делаем вывод, что при малых значениях ξ, т.е. при $\alpha \approx \frac{1}{2}$ энергетическая ёмкость сильно выше акустической.