Задача - 1:

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2}$, а $\|x\|_\infty = \max(x_i;\ i = 1, 2, \dots, m) = x_{max}$

Оценим $\|x\|_2$ сверху: $\|x\|_2 \leq \sqrt{m \cdot x_{max}^2} = x_{max}\sqrt{m}$

Значит $\|x\|_2 \leq \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$ ☒

$\underset{m\times n}{A} = U \Sigma V^T$ - сингулярное разложение матрицы A

$U \in C^{m\times m}$ - унитарная матрица и $V \in C^{n\times n}$ - унитарная матрица

$$\Sigma = \begin{bmatrix} s_1 & & & & 0 \\ & s_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & s_r & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$$

Матрицы U и V^T - отвечает за поворот

Матрица Σ - масштабирует

Матрицы U и V^T - ортогональны

$$\underset{m\times n}{\|A\|_\infty} = \|U\Sigma V^T\|_\infty \leq \underset{m\times m}{\|U\|_\infty} \cdot \underset{m\times n}{\|\Sigma\|_\infty} \cdot \underset{n\times n}{\|V^T\|} = \underset{m\times n}{\|U\|_\infty} \cdot \underset{n\times n}{\|V^T\|_\infty} \cdot \underset{m\times n}{\|A\|_2}$$

Тогда $\underset{m\times n}{\|A\|_\infty} \leq \underset{m\times n}{\|U\|_\infty} \cdot \underset{n\times n}{\|V^T\|_\infty} \cdot \underset{m\times n}{\|A\|_2}$