Задача 2:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = A^T$ $\quad A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 9 \\ \lambda_2 = 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \delta_1 = 3 \\ \delta_2 = 2 \end{matrix}$

Собственные векторы для $A^T \cdot A$: $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $V^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Тогда $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A = U \Sigma V^T \Rightarrow AV = U\Sigma$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u_{11} & 2u_{12} \\ 3u_{21} & 2u_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_{11} = 1 \\ u_{22} = -1 \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \delta_1 = 2$

Собственные векторы $A^T A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = V^T$ и $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{11} & 0 \\ 2u_{21} & 0 \\ 2u_{31} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A^T \quad A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \delta_1 = 2$

Собственные вектора $A^T A$: $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$V_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2U_{11} & 0U_{12} \\ 2U_{21} & 0U_{22} \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$