

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждения высшего образования
«Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»

Кафедра инженерной кибернетики

Лабораторная работа №3
Исследование математических моделей

по дисциплине
«Математическое моделирование»

Направление подготовки:

01.03.04 Прикладная математика

Выполнил:
Студент группы БПМ-19-2
Антонов Илья Андреевич

Проверил:
Доцент кафедры ИК
Добриборщ Дмитрий Эдуардович

Москва, 2021

Простой цилиндрический резервуар с жидкостью

Перед выводом математической модели введем следующие обозначения:

V – объем жидкости, S – площадь основания цилиндрического резервуара (площадь поверхности жидкости), x – высота столба жидкости, F – площадь отверстия сливной трубы, Q_1 – объемный расход жидкости (слив), Q_2 – объемный расход жидкости (приток).

Покажем эти обозначения на рисунке цилиндрического резервуара с жидкостью (рис. 1).

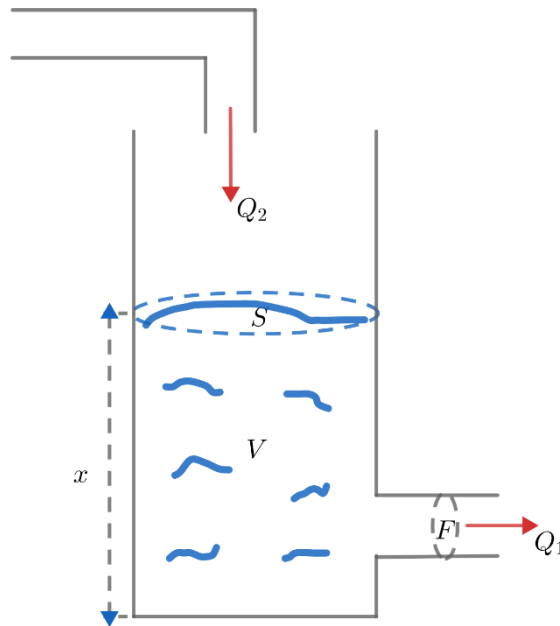


Рис. 1. Цилиндрический резервуар с жидкостью

Уравнение материального баланса имеет вид:

$$\Delta V + Q_1 \Delta t = Q_2 \Delta t$$

Это уравнение показывает, что приток жидкости Q_2 за время Δt уравнивается расходом жидкости Q_1 и приращением объема ΔV .

Предполагая, что $\Delta t \rightarrow 0$ и $\Delta V \rightarrow 0$, поделим обе части уравнения на Δt :

$$\frac{dV}{dt} + Q_1 = Q_2$$

Так как $V = Sx$, то $\frac{dV}{dt} = S \frac{dx}{dt}$. Подставим:

$$S \frac{dx}{dt} + Q_1 = Q_2$$

Уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho v_0^2}{2} + \rho g x + p_1 = \frac{\rho v^2}{2} + \rho g x_0 + p_2$$

где ρ – плотность жидкости, v_0 – скорость изменения уровня жидкости в резервуаре, $\frac{\rho v_0^2}{2}$ – динамическое (скоростное) давление, g – ускорение свободного падения, p_1 – статическое давление над жидкостью в резервуаре, v – скорость истечения жидкости из сливного отверстия, x_0 – начальное значение высоты столба жидкости, p_2 – статическое давление за сливным отверстием.

Упростим данное уравнение:

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2g} = \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (x - x_0)$$

Где $\gamma = \rho g$ – удельный вес жидкости.

Предположим, что $v \gg v_0$, $x_0 = 0$, $p_1 = p_2$, тогда получим формулу Торричелли скорости истечения жидкости из сосуда:

$$v = \sqrt{2gx}$$

Умножив обе части этого уравнения на F , получим

$$Fv = Q_1 = F\sqrt{2gx}$$

Учитывая форму и состояние поверхности сливного отверстия

$$Q_1 = \mu F\sqrt{2gx}$$

где μ – поправочный коэффициент.

Подставим найденное выражение в дифференциальное уравнение изменения объема жидкости:

$$S \frac{dx}{dt} + \mu F\sqrt{2gx} = Q_2$$

Итак, математическая модель данной системы:

$$S\dot{x} + \mu F\sqrt{2gx} = Q_2$$

Взяв в качестве переменных состояния $v_1 = Q_2$, $v_2 = x$, получим уравнение системы в форме вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = b_1 u \\ \dot{v}_2 = \frac{1}{S} v_1 - \frac{\mu F \sqrt{2g}}{S} \sqrt{v_2} \\ y = v_2 \end{cases}$$

Структурная схема данной модели представлена на рис. 2.

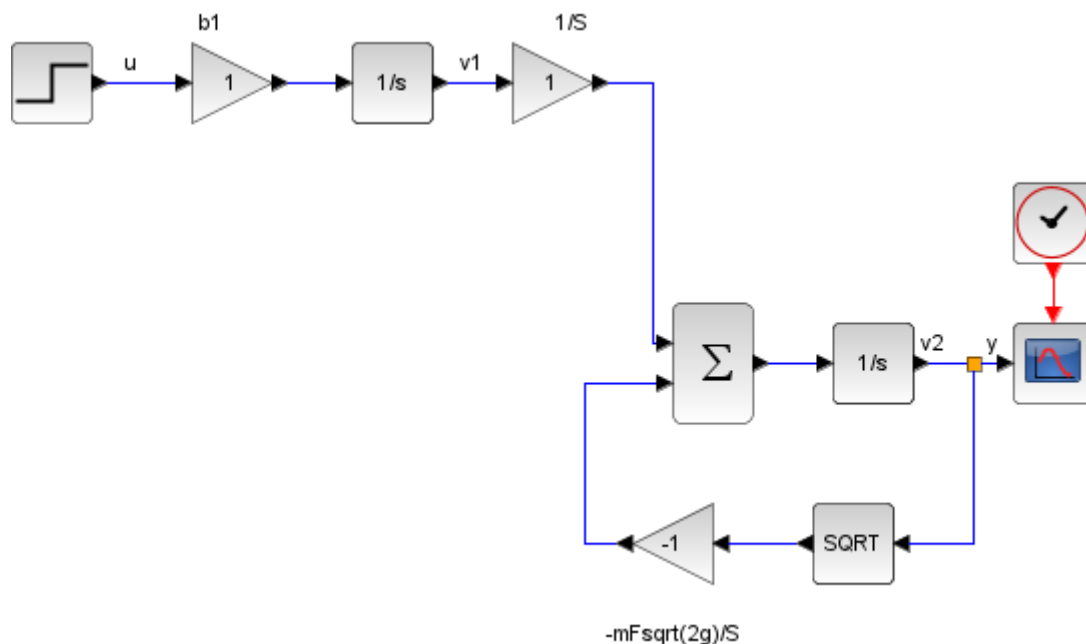


Рис. 2. Структурная схема модели простого цилиндрического резервуара с жидкостью

Примем следующие значения величин, участвующих в процессе: $Q_2 = 0,016 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$, $S = 2 \text{ м}^2$, $F = 0,02 \text{ м}^2$, $g = 9,82 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\mu = 0,8$.

Подставим значения параметров и получим следующую схему моделирования (рис. 3).

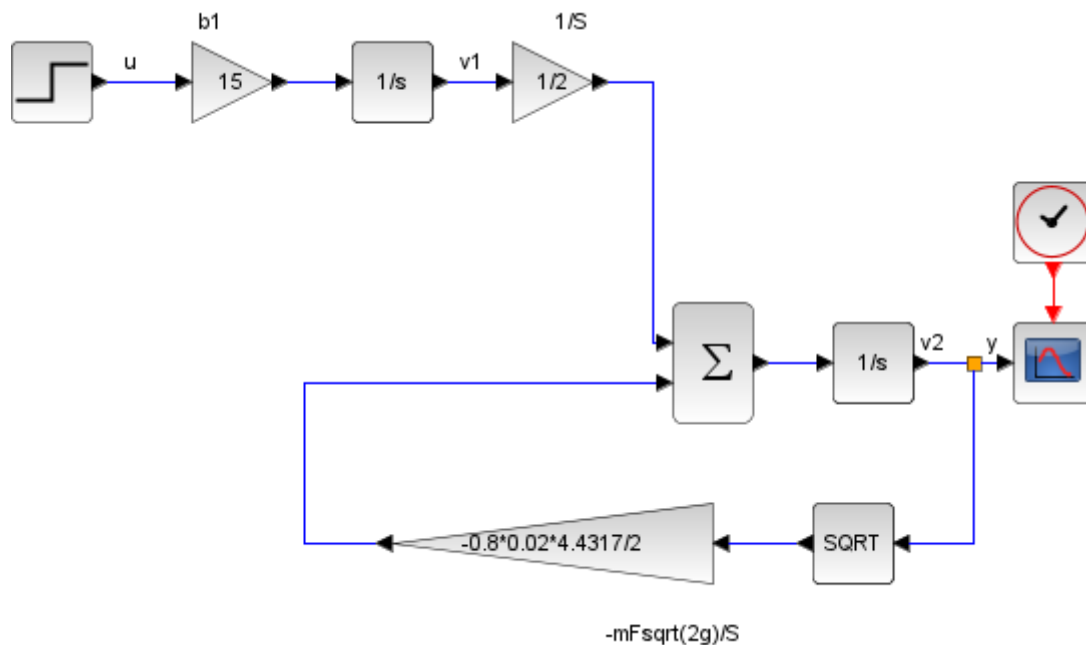


Рис. 3. Схема моделирования простого цилиндрического резервуара с жидкостью с подставленными числовыми значениями

В результате, получен график зависимости высоты столба жидкости x от времени t (рис. 4).

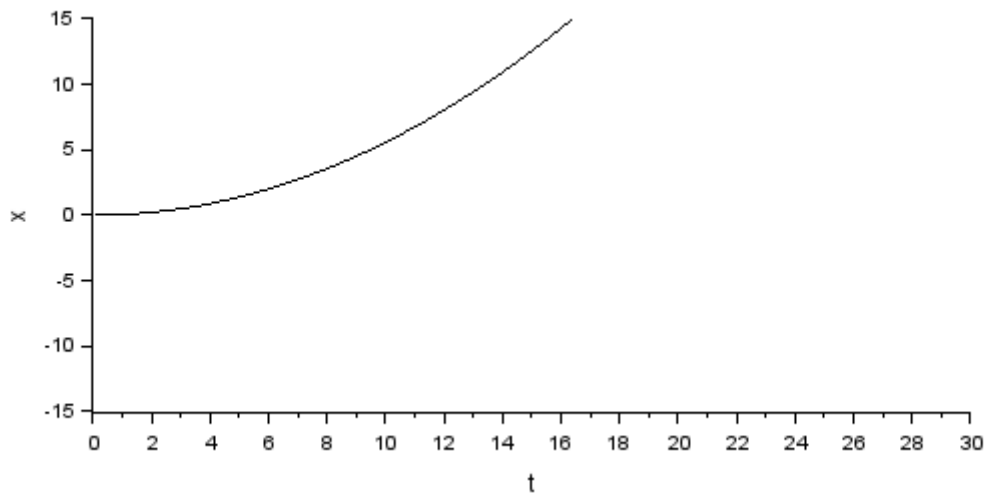


Рис. 4. График зависимости высоты столба жидкости x от времени t

Резервуар, имеющий форму усеченного конуса

Схема резервуара, имеющего форму усеченного конуса, представлена на рис. 5.

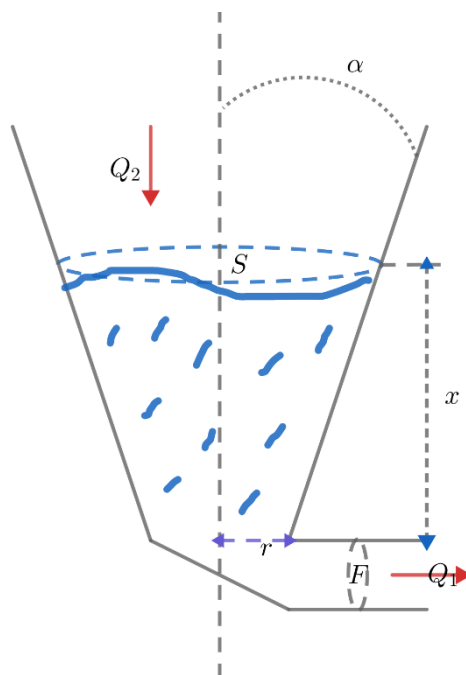


Рис. 5. Резервуар, имеющий форму усеченного конуса

Запишем уравнение зависимости площади поверхности жидкости от высоты ее столба для резервуара, имеющего форму усеченного конуса:

$$S(x) = \pi(r^2 + 2rxtg\alpha + x^2tg^2\alpha)$$

Аналогично ситуации с цилиндрическим резервуаром, дифференциальное уравнение изменения объема жидкости в данном случае имеет вид:

$$S \frac{dx}{dt} + Q_1 = Q_2$$

где, с учетом формулы Торричелли,

$$Q_1 = \mu F \sqrt{2gx}$$

Таким образом, математическая модель резервуара, имеющего форму усеченного конуса, имеет вид:

$$\pi(r^2 + 2rx \operatorname{tg} \alpha + x^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \dot{x} + \mu F \sqrt{2gx} = Q_2$$

Взяв в качестве переменных состояния $v_1 = Q_2$, $v_2 = x$, получим уравнение системы в форме вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = b_1 u \\ \dot{v}_2 = \frac{v_1}{\pi(r^2 + 2rv_2 \operatorname{tg} \alpha + v_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)} - \frac{\mu F \sqrt{2g}}{\pi(r^2 + 2rv_2 \operatorname{tg} \alpha + v_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha)} \sqrt{v_2} \\ y = v_2 \end{cases}$$

Структурная схема данной модели представлена на рис. 6.

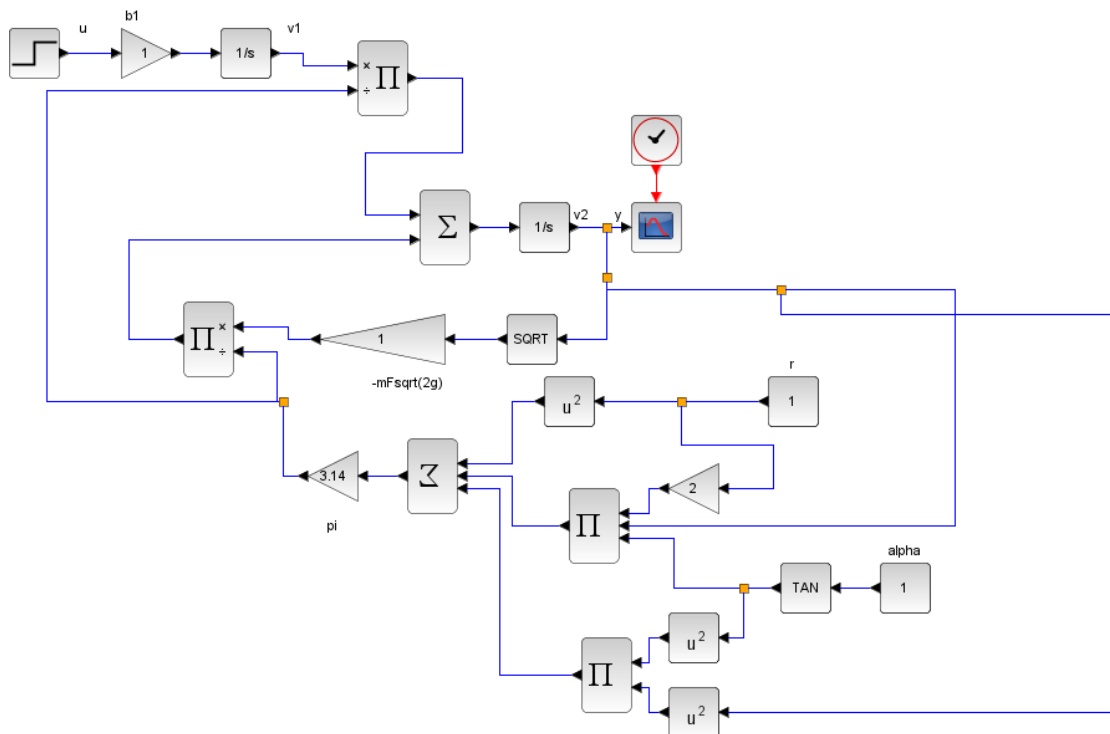


Рис. 6. Структурная схема модели резервуара с жидкостью, имеющего форму усеченного конуса

Примем следующие значения величин, участвующих в процессе: $Q_2 = 0,016 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$, $F = 0,02 \text{ м}^2$, $g = 9,82 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\mu = 0,8$, $\alpha = 0,5 \text{ рад}$, $r = 0,5 \text{ м}$.

Подставим значения параметров и получим следующую схему моделирования (рис. 7).

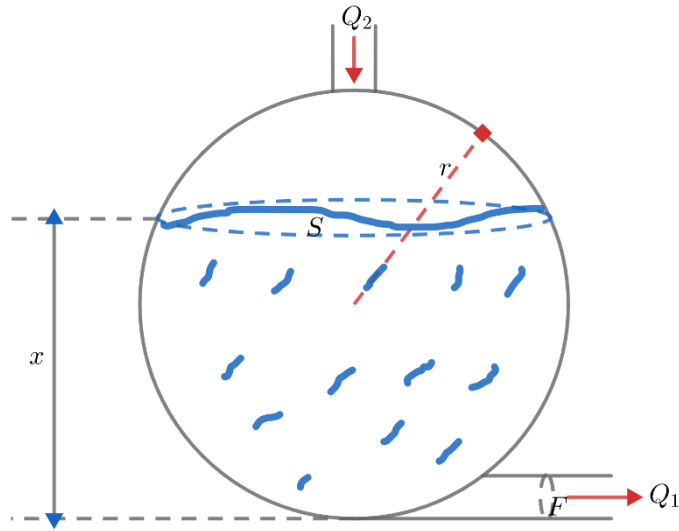


Рис. 9. Сферический резервуар с жидкостью

Запишем уравнение зависимости площади поверхности жидкости от высоты ее столба для резервуара, имеющего сферическую форму:

$$S(x) = \pi(2rx - x^2)$$

Аналогично случаям, описанным выше, дифференциальное уравнение изменения объема жидкости имеет вид:

$$S \frac{dx}{dt} + Q_1 = Q_2$$

где, с учетом формулы Торричелли,

$$Q_1 = \mu F \sqrt{2gx}$$

Таким образом, математическая модель резервуара, имеющего сферическую форму, имеет вид:

$$\pi(2rx - x^2)\dot{x} + \mu F \sqrt{2gx} = Q_2$$

Взяв в качестве переменных состояния $v_1 = Q_2$, $v_2 = x$, получим уравнение системы в форме вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = b_1 u \\ v_2 = \frac{v_1}{\pi(2rv_2 - v_2^2)} - \frac{\mu F \sqrt{2g}}{\pi(2rv_2 - v_2^2)} \sqrt{v_2} \\ y = v_2 \end{cases}$$

Структурная схема данной модели представлена на рис. 10.

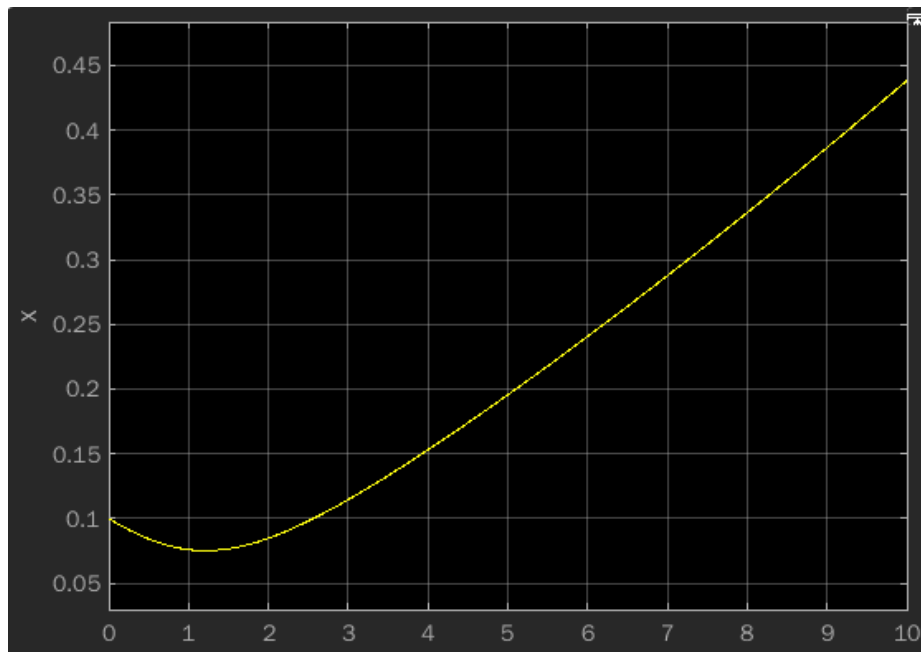


Рис. 12. График зависимости высоты столба жидкости x от времени t

Флотационная машина

Флотацией называется процесс разделения тонкоизмельченных полезных ископаемых, осуществляемый в водной среде и основанный на различии их способности, естественной или искусственно создаваемой, смачиваться водой, что определяет избирательное прилипание частиц минералов к поверхности раздела двух фаз.

Схема флотационной машины представлена на рис. 13.

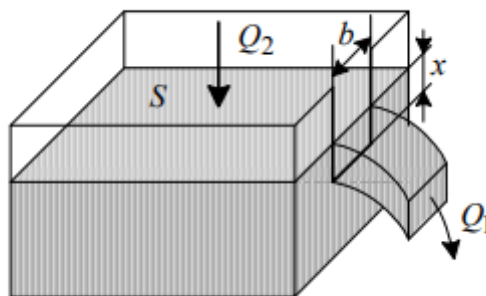


Рис. 13. Камера флотационной машины

Представим математическую модель флотационной машины:

$$S\dot{x} + \left(0,465 + \frac{0,003}{x}\right)bx\sqrt{2gx} = Q_2$$

В качестве переменных состояния выберем $v_1 = Q_2$, $v_2 = x$. Получим уравнение системы в форме вход-состояние-выход:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = b_1 u \\ v_2 = \frac{1}{S} v_1 - \sqrt{v_2} \frac{b \sqrt{2g}}{S} (0,465 v_2 + 0,003) \\ y = v_2 \end{cases}$$

Структурная схема флотационной машины представлена на рис. 14.

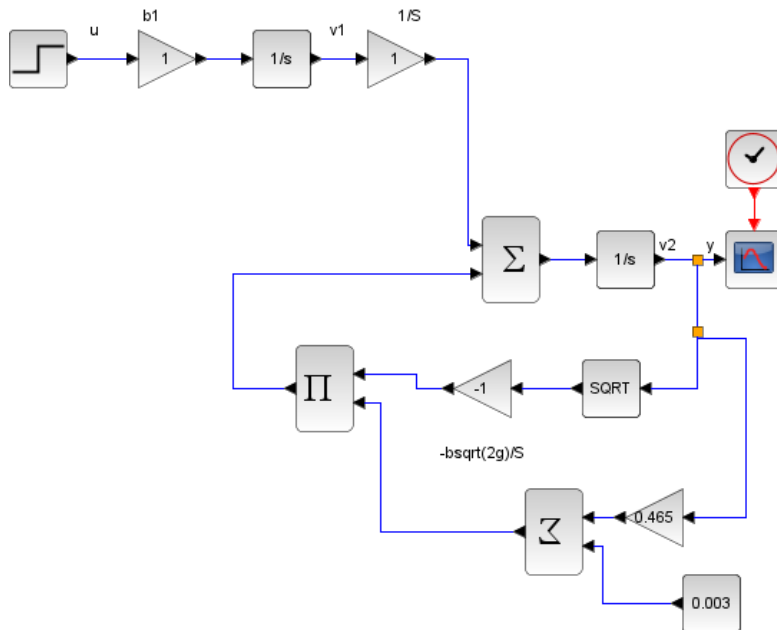


Рис. 14. Структурная схема флотационной машины

Примем следующие значения величин, участвующих в процессе: $Q_2 = 0,016 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}$, $S = 2 \text{ м}^2$, $b = 0,25 \text{ м}$, $g = 9,82 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Подставим значения параметров и получим следующую схему моделирования (рис. 15).

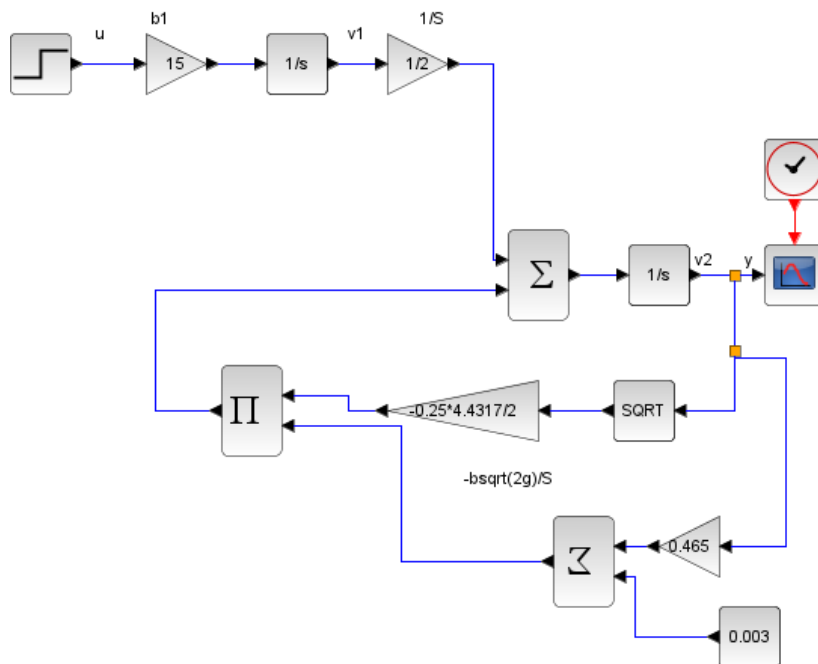


Рис. 15. Схема моделирования флотационной машины с подставленными значениями

В результате, получен график зависимости высоты столба жидкости x от времени t (рис. 16).

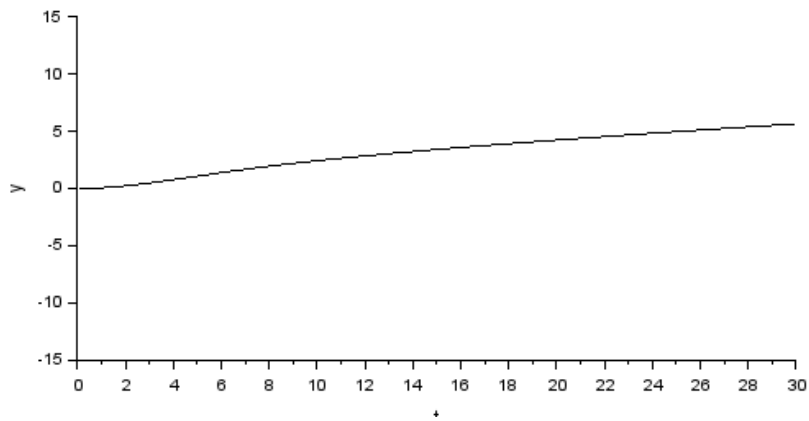


Рис. 16. График зависимости высоты столба жидкости x от времени t

Вывод: в ходе работы я исследовал математические модели, полученные методом балансовых соотношений при помощи Simulink и Xcos.