



IEL – protokol k projektu

Ivan Onufriienko
xonufr00

7. září 2023

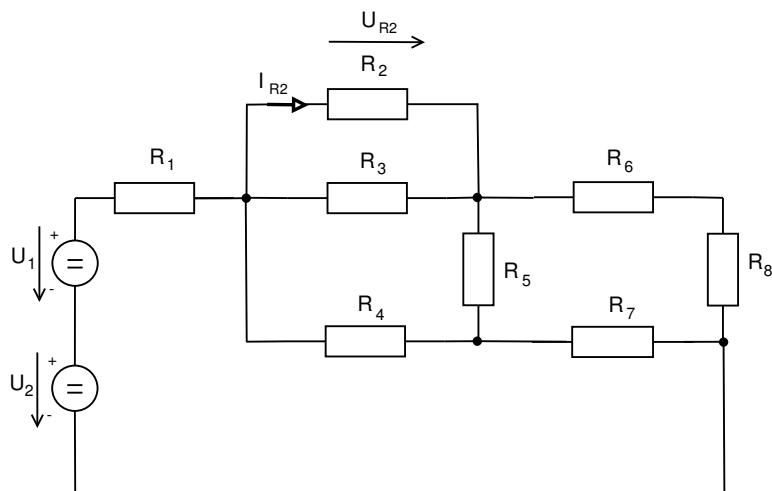
Obsah

1	Příklad 1	2
1.1	Výpočet R_{ekv}	2
1.2	Výpočet U_{R2}	4
2	Příklad 2	7
2.1	Výpočet R_e	7
2.2	Výpočet U_e	9
2.3	Výpočet U_{R5} a I_{R5}	9
3	Příklad 3	10
4	Příklad 4	12
4.1	Výpočet napětí a fázového posunu L_2	13
4.2	Dosazení	13
5	Příklad 5	15
5.1	Řešení: Sestavení diferenciální rovnice	15
5.2	Kontrola	17
6	Shrnutí výsledků	18

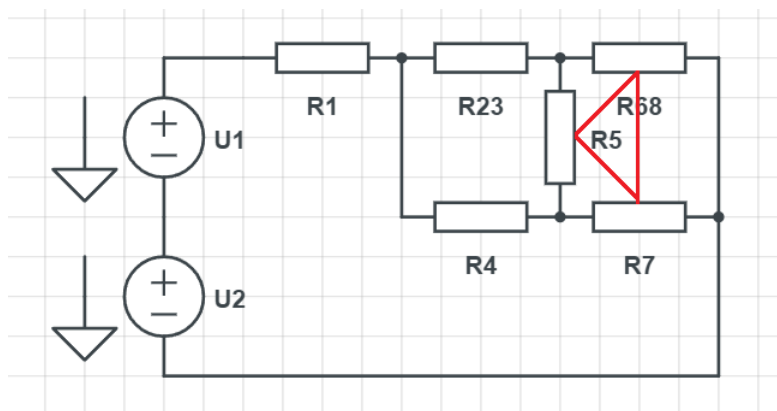
Příklad 1

Stanovte napětí U_{R2} a proud I_{R2} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
H	135	80	680	600	260	310	575	870	355	265



Výpočet R_{ekv}



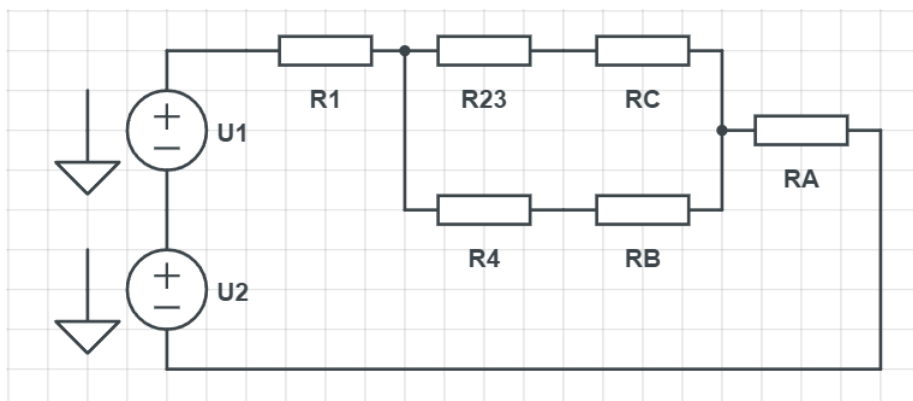
Obrázek 1: $R_2 + R_3$

$$R_{23} = \frac{R_2 * R_3}{R_2 + R_3}$$

$$R_{23} = \frac{600\Omega * 260\Omega}{600\Omega + 260\Omega} = \frac{156000\Omega}{860\Omega} = 181.3953\Omega$$

$$R_{68} = R_6 + R_8$$

$$R_{68} = 870\Omega + 265\Omega = 1135\Omega$$



Obrázek 2: *Trojuhelník hvězda*

$$R_A = \frac{R_{68} * R_7}{R_5 + R_{68} + R_7}$$

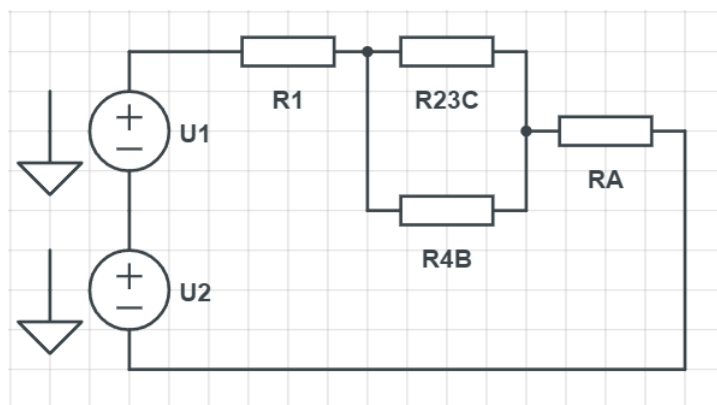
$$R_B = \frac{R_7 * R_5}{R_5 + R_{68} + R_7}$$

$$R_C = \frac{R_5 * R_{68}}{R_5 + R_{68} + R_7}$$

$$R_A = \frac{1135\Omega * 355\Omega}{575\Omega + 1135\Omega + 355\Omega} = \frac{402925\Omega}{2065\Omega} = 195.1210\Omega$$

$$R_B = \frac{355\Omega * 575\Omega}{575\Omega + 1135\Omega + 355\Omega} = \frac{204125\Omega}{2065\Omega} = 98.8498\Omega$$

$$R_C = \frac{575\Omega * 1135\Omega}{575\Omega + 1135\Omega + 355\Omega} = \frac{652625\Omega}{2065\Omega} = 316.0411\Omega$$



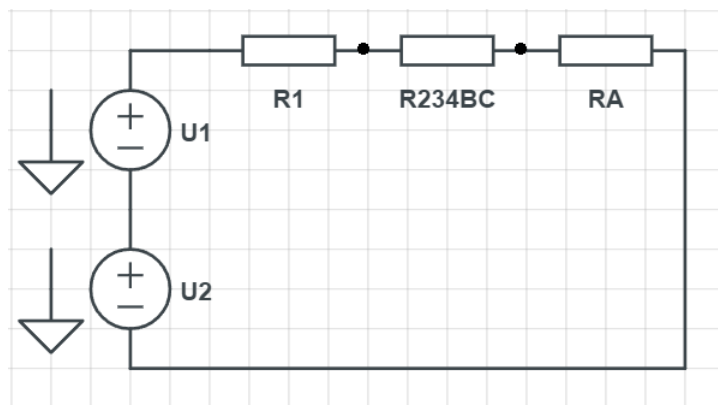
Obrázek 3: *Seriové zapojení $R_{23} + R_C$ a $R_4 + R_B$*

$$R_{23C} = R_{23} + R_C$$

$$R_{4B} = R_4 + R_B$$

$$R_{23C} = 181.3953\Omega + 316.0411\Omega = 497.4364\Omega$$

$$R_{4B} = 310\Omega + 98.8498\Omega = 408.8498\Omega$$



Obrázek 4: Paralelně zapojené R_{23C} a R_{4B} a Zjednodušení do R_{ekv}

$$R_{234BC} = \frac{R_{23C} * R_{4B}}{R_{23C} + R_{4B}}$$

$$R_{234BC} = \frac{497.4364\Omega * 408.8498\Omega}{497.4364\Omega + 408.8498\Omega} = \frac{203376.7726\Omega}{906.2862\Omega} = 224.4067\Omega$$

$$R_{ekv} = R_{1234ABC} = R_1 + R_{234BC} + R_A$$

$$R_{ekv} = R_{1234ABC} = 680\Omega + 224.4067\Omega + 195.1210\Omega = 1099.5279\Omega$$

S R_{ekv} nyní můžeme vypočítat celkový proud v obvodu Ohmovým zákonem: $I = \frac{U}{R_{ekv}}$

$$U = U_1 + U_2$$

$$U = 135V + 80V = 215V$$

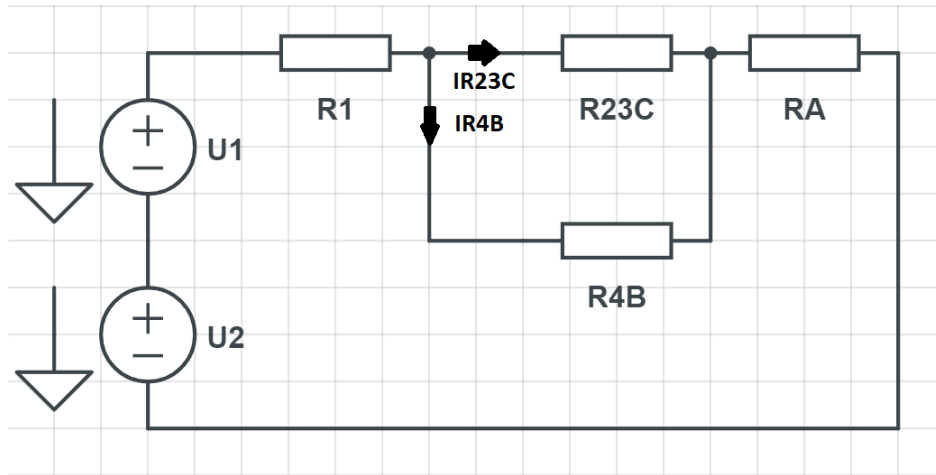
$$I = \frac{215V}{1099.5279\Omega} = 0.0266A$$

Výpočet U_{R2}

Rozložíme zpětně obvod

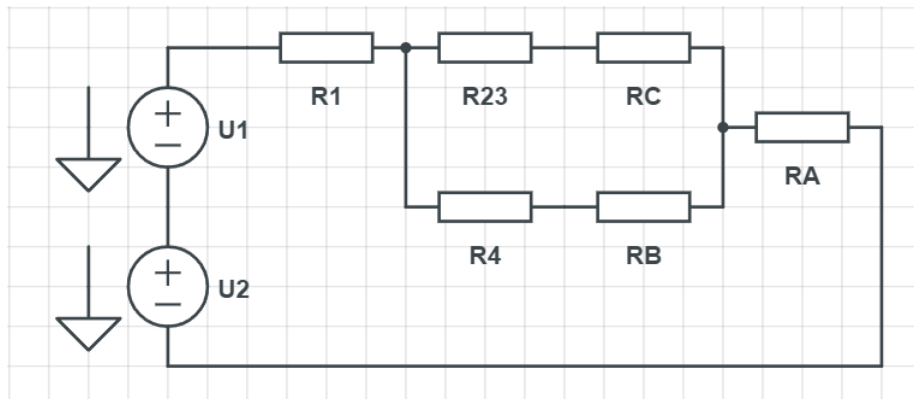
$$U_{R234BC} = I * R_{234BC}$$

$$U_{R234BC} = 0.0266A * 224.4067\Omega = 43.8801V$$



$$I_{R23C} = \frac{U_{R2346BC}}{R_{23C}}$$

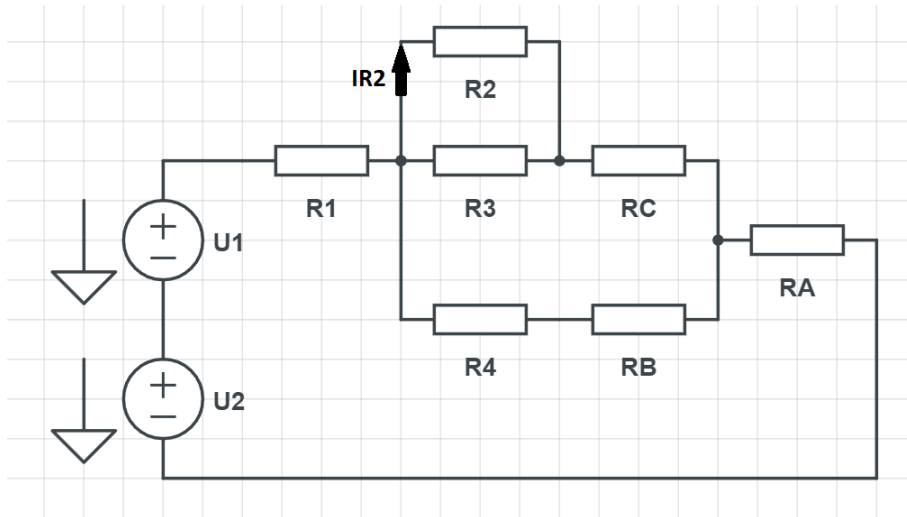
$$I_{R23C} = \frac{43.8801V}{497.4364\Omega} = 0.0882A$$



$$I_{R23} = I_{R23C}$$

$$U_{R23} = I_{R23} * R_{23}$$

$$U_{R23} = 0.0882A * 181.3953\Omega = 16.0016V$$



$$U_2 = U_{23} = 16.0016\text{V}$$

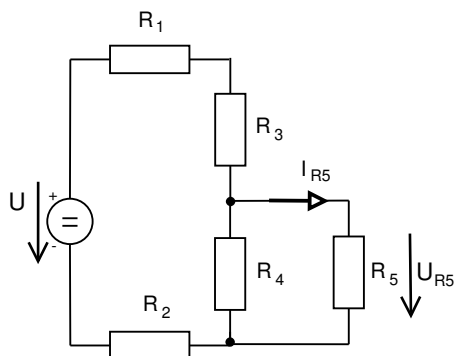
$$I_{R2} = \frac{U_{R23}}{R_2}$$

$$I_{R2} = \frac{16.0016\text{V}}{600\Omega} = 0.0266\text{A}$$

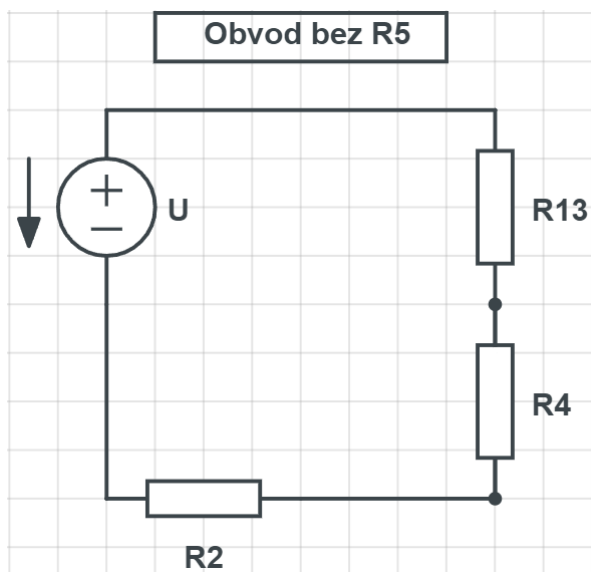
Příklad 2

Stanovte napětí U_{R5} a proud I_{R5} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
G	180	250	315	615	180	460



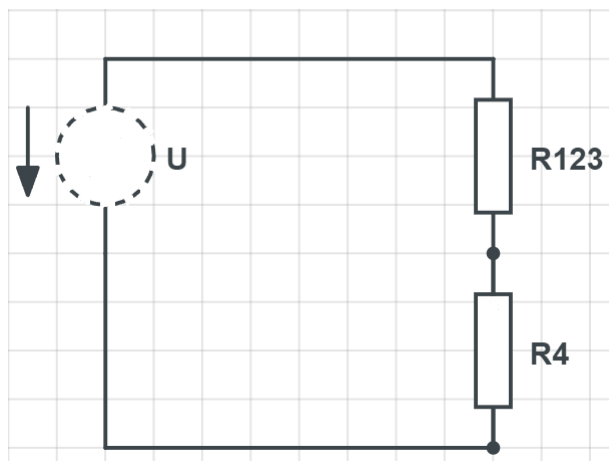
Výpočet R_e



Obrázek 5: Seriove zapojení R_1 a R_3

$$R_{13} = R_1 + R_3$$

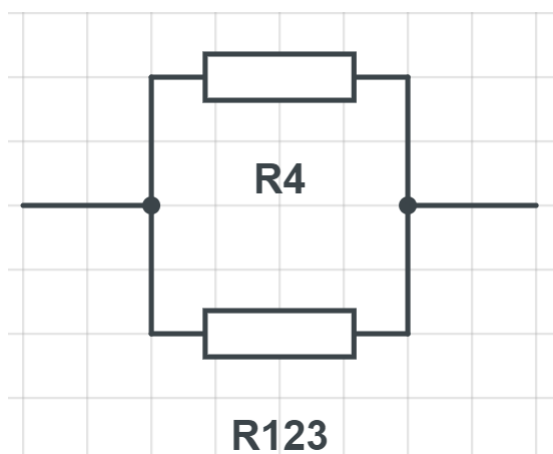
$$R_{13} = 250\Omega + 615\Omega = 865\Omega$$



Obrázek 6: Seriove zapojení R_{13} a R_2

$$R_{345} = R_{13} + R_2$$

$$R_{345} = 865\Omega + 250\Omega = 1180\Omega$$

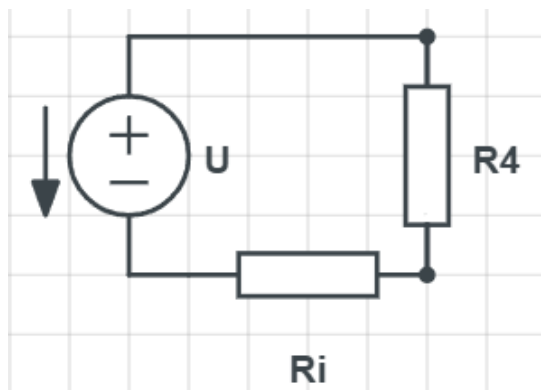


Obrázek 7: Paralelní zapojení R_{123} a R_4

$$R_e = R_{1234} = \frac{R_{123} * R_4}{R_{123} + R_4}$$

$$R_e = \frac{1180\Omega * 180\Omega}{1180\Omega + 180\Omega} = \frac{212400\Omega}{1360\Omega} = 156.1764\Omega$$

Výpočet U_e

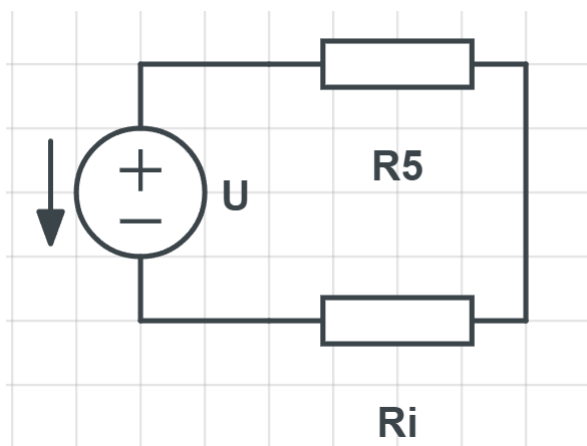


Vypočítáme pomocí napěťové děliče

$$U_e = U * \frac{R_4}{R_4 + R_{123}}$$

$$U_e = 180V * \frac{180\Omega}{180\Omega + 1180\Omega} = 180V * \frac{180\Omega}{1360\Omega} = 23.8235V$$

Výpočet U_{R5} a I_{R5}



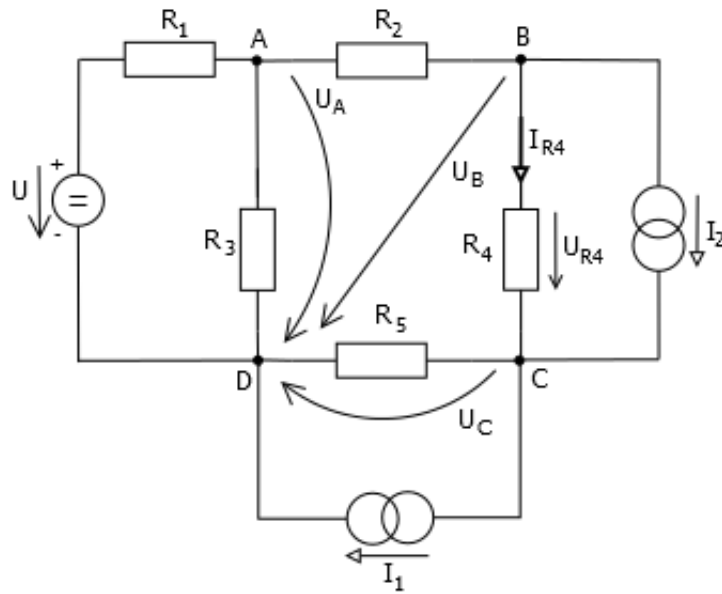
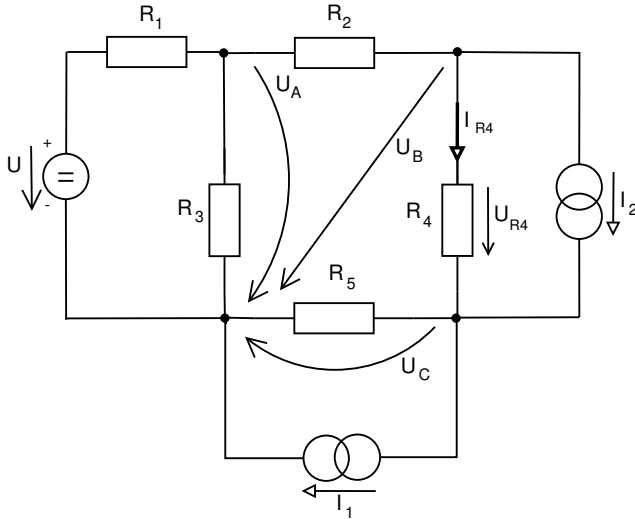
$$I_{R5} = \frac{U_e}{R_5 + R_e} = \frac{23.8235V}{460\Omega + 156.1764\Omega} = \frac{23.8235V}{616.1764\Omega} = 0.0386635A$$

$$U_{R5} = R_5 * I_{R5} = 460\Omega * 0.0386635A = 17.7852V$$

Příklad 3

Stanovte napětí U_{R4} a proud I_{R4} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A, U_B, U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
H	130	0.95	0.50	47	39	58	28	25



$$\phi D = 0$$

$$I_{R1} - I_{R3} - I_{R2} = 0$$

$$I_{R2} - I_{R4} - I_2 = 0$$

$$I_{R4} + I_2 - I_{R5} - I_1 = 0$$

$$I_{R1} = \frac{(\phi D - \phi A + U)}{R_1} = \frac{U - \phi A}{R_1}$$

$$I_{R2} = \frac{(\phi A - \phi B)}{R_2}$$

$$I_{R3} = \frac{(\phi A - \phi D)}{R_3} = \frac{\phi A}{R_3}$$

$$I_{R4} = \frac{(\phi B - \phi C)}{R_4}$$

$$I_{R5} = \frac{(\phi C - \phi D)}{R_5} = \frac{\phi C}{R_5}$$

$$\frac{U}{R_1} - \frac{\phi A}{R_1} - \frac{\phi A}{R_3} - \frac{\phi A}{R_2} + \frac{\phi B}{R_2} = 0$$

$$\frac{\phi A}{R_2} - \frac{\phi B}{R_2} - \frac{\phi B}{R_4} + \frac{\phi C}{R_4} - I_2 = 0$$

$$\frac{\phi B}{R_4} - \frac{\phi C}{R_4} + I_2 - \frac{\phi C}{R_5} - I_1 = 0$$

$$-\phi A * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) + \phi B * \left(\frac{1}{R_2}\right) = -\frac{U}{R_1}$$

$$\phi A * \left(\frac{1}{R_2}\right) - \phi B * \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) + \phi C * \left(\frac{1}{R_4}\right) = I_2$$

$$\phi B * \left(\frac{1}{R_4}\right) - \phi C * \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) = I_1 - I_2$$

$$\begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{47} + \frac{1}{39} + \frac{1}{58}\right) & \frac{1}{39} & 0 \\ \frac{1}{39} & -\left(\frac{1}{39} + \frac{1}{28}\right) & \frac{1}{28} \\ 0 & \frac{1}{28} & -\left(\frac{1}{28} + \frac{1}{25}\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \phi A \\ \phi B \\ \phi C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{130}{47} \\ 0.5 \\ 0.45 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \phi A \\ \phi B \\ \phi C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20,2480 & -11,6646 & -5,5022 \\ -11,6646 & -29,1872 & -13,7676 \\ -5,5022 & -13,7676 & -19,7017 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{130}{47} \\ 0.5 \\ 0.45 \end{pmatrix}$$

$$\phi A = 47.6969V$$

$$\phi B = 11.4748V$$

$$\phi C = -0.5307V$$

$$I_{R4} = \frac{(\phi B - \phi C)}{R_4} = \frac{(11.4748V + 0.5307V)}{28\Omega} = 0.4287A$$

$$U_{R4} = \phi B - \phi C = 11.4748V + 0.5307V = 12.006V$$

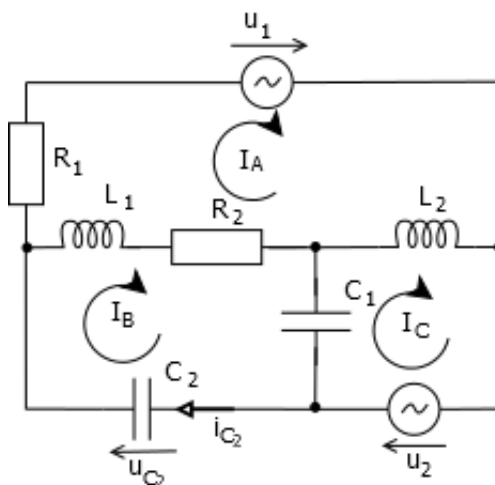
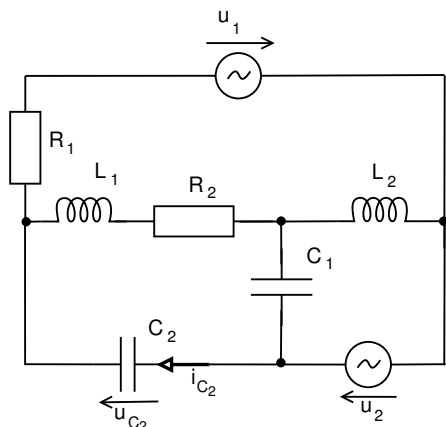
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

Ve vztahu pro napětí $u_{C_2} = U_{C_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{C_2})$ určete $|U_{C_2}|$ a φ_{C_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
H	5	6	10	10	160	75	155	70	95



Obrázek 8: Smyčkové proudy

U střídavého napětí využijeme stejné ohmovy zákony jako jsme využívali dosud. Jen s rozdílem, že nám zde přibyli impedance nelineárních součástek. Pro metodu smyčkových využijeme matici podobně jako v příkladu 3 jen se změnou, že nyní počítáme proudy smyček narozdíl od uzlových napětí.

Impedance pro cívku a kondenzátor spočteme následovně:

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi f \\ Z_C &= \frac{-j}{\omega C} \\ Z_L &= j\omega L\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_A : \quad & U_1 + U_{R1} + U_{L2} + U_{R2} + U_{L1} = 0 \\
I_B : \quad & U_{L1} + U_{R2} + U_{C2} + U_{C1} = 0 \\
I_C : \quad & U_{L2} + U_2 + U_{C1} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_A : \quad & I_A(Z_{L1} + Z_{L2} + R_1 + R_2) - I_B(Z_{L1} + R_2) - I_C Z_{L2} = -U_1 \\
I_B : \quad & -I_A(Z_{L1} + R_2) + I_B(R_2 + Z_{L1} + Z_{C1} + Z_{C2}) - I_C Z_{C1} = 0 \\
I_C : \quad & -I_A Z_{L2} - I_B Z_{C1} + I_C(Z_{C1} + Z_{L2}) = -U_2
\end{aligned}$$

Matice pro proudové smyčky:

$$\begin{pmatrix} Z_{L2} + Z_{L1} + R_1 + R_2 & -Z_{L1} - R_2 & -Z_{L2} \\ -Z_{L1} - R_2 & R_2 + Z_{L1} + Z_{C1} + Z_{C2} & -Z_{C1} \\ -Z_{L2} & -Z_{C1} & Z_{C1} + Z_{L2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ 0 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

Výpočet napětí a fázového posunu L_2

Pro výpočet U_{C2} využijeme Ohmův zákon. Nesmíme zapomenout že se zde pracujeme s množinou imaginárních čísel, takže pro náš výsledek musíme využít vzorec pro absolutní hodnotu imaginárního čísla:

$$\begin{aligned}
U_{C2} &= I_B \times j\omega C_2 \\
|U_{C2}| &= \sqrt{\text{Re}(U_{C2})^2 + \text{Im}(U_{C2})^2}
\end{aligned}$$

Fázový posun vypočítáme jako arkus tangens, kde x je reálná část imaginárního čísla a y je imaginární část imaginárního čísla.

$$\varphi_{C2} = \arctan\left(\frac{\text{Im}(U_{C2})}{\text{Re}(U_{C2})}\right)$$

Dosazení

Impedance:

$$\begin{aligned}
\omega &= 2\pi f \\
Z_{C1} &= \frac{-j}{\omega C_1} \\
Z_{C2} &= \frac{-j}{\omega C_2} \\
Z_{L1} &= j\omega L_1 \\
Z_{L2} &= j\omega L_2
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 20 + 95.5016 * j + 44.766375 * j & -10 - 95.5016 * j & -44.766375 * j \\ -10 - 95.5016 * j & 10 + 95.5016 * j - 10.8088 * j - 23.93378 * j & 10.8088 * j \\ -44.766375 * j & 10.8088 * j & 44.766375 * j - 10.8088 * j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ 0 \\ -U_2 \end{pmatrix}$$

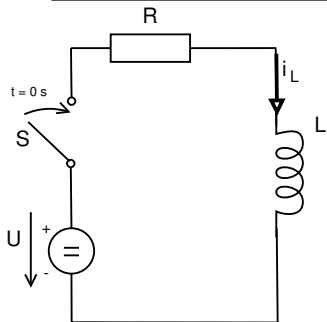
$$\begin{aligned}
I_A &= (-0,0979 - 0,27j) \text{ A} \\
I_B &= (-0,1128 - 0,4187j) \text{ A} \\
I_C &= (-0,0931 - 0,046j) \text{ A}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{C2} &= I_B = (-0,1128 - 0,4187j) \text{ A} \\
U_{C2} &= I_{C2} \times Z_{C2} = (-10,02107 + 2,69973j) \text{ V} \\
\varphi_{C2} &= \arctan\left(\frac{\text{Im}(U_{C2})}{\text{Re}(U_{C2})}\right) = \arctan \frac{2,69973}{-10,37837} = -0,254491\text{rad} = 165,41874^\circ \\
|U_{C2}| &= \sqrt{\text{Re}(U_{C2})^2 + \text{Im}(U_{C2})^2} = \sqrt{(-10,02107)^2 + 2,69973^2} = 10,37837 \text{ V}
\end{aligned}$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $i_L = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	L [H]	R [Ω]	$i_L(0)$ [A]
G	10	50	25	7



Řešení: Sestavení diferenciální rovnice

Sestavíme rovnici pro proud na cívce i_L :

$$i'_L = \frac{U_L}{L}$$

Napětí na cívce si můžeme vyjádřit za pomoci 2. Kirchhoffova zákona:

$$U = U_R + U_L$$

$$U_L = U - U_R$$

Vzniklou diferenciální rovnici upravíme:

$$i'_L = \frac{U - U_R}{L}$$

$$i'_L = \frac{U - Ri_L}{L}$$

$$Li'_L + Ri_L = U$$

Dosadíme naše hodnoty:

$$50i'_L + 25i_L = 10$$

Podívejme se na obecný tvar pro cívku, jestli už máme co potřebujeme:

$$i_L(t) = K(t) \times e^{\lambda t}$$

Chybí nám λ a $K(t)$, tak ty proměnné musíme najít a vypočítat.

Vzhledem k tomu, že neznáme λ ani $K(t)$, tak si je musíme spočítat, začneme s λ :

$$\begin{aligned} 50\lambda + 25 &= 0 \\ \lambda &= -\frac{25}{50} \\ \lambda &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Nyní můžeme λ dosadit do obecného tvaru, který pak zderivujeme, abychom měli diferenciální tvar rovnice naší cívky, pro dosažení do rovnice která nám vyšla předtím.

Nejprve tedy obecný tvar a jeho derivace:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= K(t) \times e^{\lambda t} \\ i_L(t) &= K(t) \times e^{-\frac{1}{2}t} \\ i_L(t)' &= K(t)' \times e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}K(t)e^{-\frac{1}{2}t} \end{aligned}$$

Nyní můžeme tedy dosadit do naší diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} 50(K(t)' \times e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2}K(t) \times e^{-\frac{1}{2}t}) + 25(K(t) \times e^{-\frac{1}{2}t}) &= 10 \\ 50K(t)' \times e^{-\frac{1}{2}t} - 25K(t) \times e^{-\frac{1}{2}t} + 25K(t) \times e^{-\frac{1}{2}t} &= 10 \\ 50K(t)' \times e^{-\frac{1}{2}t} &= 10 \\ K(t)' \times e^{-\frac{1}{2}t} &= \frac{10}{50} \\ K(t)' \times e^{-\frac{1}{2}t} &= \frac{1}{5} \\ K(t)' &= \frac{1}{5} \times e^{\frac{1}{2}t} \end{aligned}$$

Máme $K(t)$. Teda skoro máme, v obecném tvaru to není derivace, takže to musíme ještě zintegrovat:

$$\begin{aligned} K(t) &= \int \frac{1}{5} \times e^{\frac{1}{2}t} dt \\ K(t) &= \frac{2}{5}e^{\frac{1}{2}t} + C \end{aligned}$$

Nyní už máme co potřebujeme, tak dosadíme do analytické rovnice a pak provedeme kontrolu:

$$\begin{aligned} i_L(t) &= K(t) \times e^{\lambda t} \\ i_L(t) &= \left(\frac{2}{5}e^{\frac{1}{2}t} + C\right) \times e^{-\frac{1}{2}t} \\ i_L(t) &= \frac{2}{5} + C \times e^{-\frac{1}{2}t} \end{aligned}$$

Nyní si vypočítáme C dle počáteční podmínky v čase $t = 0$:

$$\begin{aligned} i_L(0) &= \frac{2}{5} + C \times e^{-\frac{1}{2} \times 0} \\ 7 &= \frac{2}{5} + C \\ C &= 7 - \frac{2}{5} = \frac{33}{5} \end{aligned}$$

Konečná rovnice má tento tvar:

$$i_L(t) = \frac{2}{5} + \frac{33}{5} \times e^{-\frac{1}{2}t}$$

Kontrola

Ještě si zkontrolujeme výpočet dosazením do diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned} i_L(t)' &= \frac{1}{5} \times e^{\frac{1}{2}t} \times e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} e^{\frac{1}{2}t} + \frac{33}{5} \right) e^{-\frac{1}{2}t} \\ i_L &= \frac{2}{5} + \frac{33}{5} \times e^{-\frac{1}{2}t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 50i_L' + 25i_L &= 10 \\ 50 \left(\frac{1}{5} \times e^{\frac{1}{2}t} \times e^{-\frac{1}{2}t} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} e^{\frac{1}{2}t} + \frac{33}{5} \right) e^{-\frac{1}{2}t} \right) + 25 \left(\frac{2}{5} + \frac{33}{5} \times e^{-\frac{1}{2}t} \right) &= 10 \\ -165e^{-\frac{t}{2}} + 25 \left(\frac{33}{5} e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{2}{5} \right) &= 10 \\ -165e^{-\frac{t}{2}} + 7 + 165e^{-\frac{t}{2}} &= 10 \\ \mathbf{10} &= \mathbf{10} \end{aligned}$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky
1	H	$U_{R2} = 16.0016\text{V}$ $I_{R2} = 0.0266\text{A}$
2	G	$U_{R5} = 17.7852\text{V}$ $I_{R5} = 0.0386635\text{A}$
3	H	$U_{R4} = 12.006\text{V}$ $I_{R4} = 0.4287\text{A}$
4	H	$ U_{C2} = 10.37837\text{V}$ $\varphi_{C2} = 165.41874^\circ$
5	G	$i_L = \frac{2}{5} + \frac{33}{5} \times e^{-\frac{1}{2}t}$