

Задание №1

Найти аналитические стационарные точки проверить их на экстремальность, а также определить все локальные и глобальные минимумы и максимумы в приведенных ниже примерах и подтвердить их характер графиками функции:

8) $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^4$

Найдем производные функции

In [1]:

```
#sympy - библиотека для символьных вычислений
from sympy import *
from IPython.display import display

x1, x2 = symbols('x1 x2')
f = x1**4 + x2**4 - (x1 + x2)**4

dif_x1 = diff(f, x1)
dif_x2 = diff(f, x2)

print("Функция f:")
display(f)
print('Производная f по x1:')
display(dif_x1)
print('Производная f по x2:')
display(dif_x2)
```

Функция f:

$$x_1^4 + x_2^4 - (x_1 + x_2)^4$$

Производная f по x1:

$$4x_1^3 - 4(x_1 + x_2)^3$$

Производная f по x2:

$$4x_2^3 - 4(x_1 + x_2)^3$$

Решим систему уравнений для поиска стационарных точек

In [2]:

```
eq1 = Eq(dif_x1, 0)
eq2 = Eq(dif_x2, 0)
eqs = [eq1, eq2]

stat_p = solve(eqs, (x1, x2))

print('Стационарная точка: (x1, x2) = ', stat_p[0])
```

Стационарная точка: $(x_1, x_2) = (0, 0)$

Проверим стационарную точку на экстремальность, для чего возьмем 2ю производную по каждой переменной и проверим их на достаточное условие экстремума функции двух переменных

In [3]:

```
dif_x1x1 = diff(dif_x1, x1)
dif_x1x2 = diff(dif_x1, x2)
dif_x2x2 = diff(dif_x2, x2)

print("Вторые производные функции f:")
```

```

print('-----')
display(dif_x1x1)
display(dif_x1x2)
display(dif_x2x2)
print('-----')

A = dif_x1x1.subs([(x1, stat_p[0][0]), (x2, stat_p[0][1])])
B = dif_x1x2.subs([(x1, stat_p[0][0]), (x2, stat_p[0][1])])
C = dif_x2x2.subs([(x1, stat_p[0][0]), (x2, stat_p[0][1])])

extreme_indicator = A*C - B**2

if(extreme_indicator > 0):
    if(A > 0):
        print('Локальный минимум в точке: (x1, x2) =', stat_p[0])
    if(A < 0):
        print('Локальный максимум в точке: (x1, x2) =', stat_p[0])
elif(extreme_indicator < 0):
    print('В точке (x1, x2) =', stat_p, 'экстремум отсутствует')
else:
    print('Четкий экстремум отсутствует, нужны дополнительные исследования')
    print('Вероятно, точка является седловой')

```

Вторые производные функции f :

$$12x_1^2 - 12(x_1 + x_2)^2$$

$$-12(x_1 + x_2)^2$$

$$12x_2^2 - 12(x_1 + x_2)^2$$

Четкий экстремум отсутствует, нужны дополнительные исследования
Вероятно, точка является седловой

Подтвердим характер статической точки, построив график функции

In [4]:

```

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

#Инициализируем систему координат
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(1, 1, 1, projection = "3d")

#Задаем количество точек на ось границы
vals_quantity = 10
vals_range = np.linspace(-1, 1, vals_quantity)

#Генерируем значения сетки для  $x_1$  и  $x_2$ 
x1_vals, x2_vals = np.meshgrid(vals_range, vals_range)

#Инициализация пустого двумерного массива значений функции
f_vals = np.empty((vals_quantity, vals_quantity), dtype="float32")

#Подстановка значений  $x_1$ ,  $x_2$  в функцию  $f$ 
i = 0
while(i < vals_quantity):
    j = 0

    while(j < vals_quantity):
        f_vals[i][j] = f.subs([(x1, x1_vals[i][j]), (x2, x2_vals[i][j])])
        j = j + 1

    i = i + 1

```

```
#Отрисовка графика по точкам  
ax.plot_surface(x1_vals, x2_vals, f_vals, cmap = 'inferno')
```

Out[4]: <mpl_toolkits.mplot3d.art3d.Poly3DCollection at 0x7f36ca8f3ba8>

