



Università  
di Catania

Dipartimento  
di Fisica  
e Astronomia  
*"Ettore Majorana"*



CORSO DI LAUREA IN FISICA

---

Appunti di  
**OSCILLAZIONI E ONDE**

---

Abstract

---

---

Anno Accademico 2023/2024

# Prefazione

[BOZZA] Ho deciso di stendere questa trascrizione in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X degli appunti del corso Oscillazioni e Onde tenuto dal prof. Fabio Siringo durante l'A.A. 2023/2024 con l'intento di avere una raccolta organica e quanto più chiara possibile del materiale, vista l'attuale assenza di un libro di testo per il programma svolto. Nel corso della scrittura ho voluto prendermi la libertà di approfondire, ove lo ritenessi necessario ai fini della completezza e della chiarezza, con materiale preso da testi di Meccanica e di Matematica.

Tengo particolarmente a sottolineare la natura personale degli appunti che non vogliono sostituirsi alle lezioni tenute dal docente o ai libri di testo, tuttavia invito chiunque lo ritenesse utile a farne un libero uso con la consapevolezza di quanto appena detto.

A tal proposito, in caso il lettore dovesse riscontrare errori o volesse suggerire delle modifiche, è pregato di contattarmi presso:

`pappalardoaurelio@gmail.com`

Al seguente link è possibile accedere alla versione più aggiornata degli appunti:

`https://github.com/ImAure/appunti-onde/blob/main/main.pdf`

Ultima modifica: 8 maggio 2024



# Programma del Corso

[BOZZA] Ciao, qui andrà il programma



# Indice

<b>I</b>	<b>Richiami di Matematica</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Numeri Complessi</b>	<b>3</b>
1	Costruzione di $\mathbb{C}$ . . . . .	3
1.1	Forme e proprietà dei numeri complessi . . . . .	3
2	Formula di De Moivre e radici in $\mathbb{C}$ . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Cenni di Analisi Complessa</b>	<b>7</b>
<b>II</b>	<b>Oscillazioni e Onde</b>	<b>9</b>
<b>3</b>	<b>L'Oscillatore Armonico</b>	<b>11</b>
1	Introduzione . . . . .	11
2	Oscillatore armonico unidimensionale . . . . .	12
3	Oscillatore armonico bidimensionale . . . . .	12
3.1	Oscillatore isotropo . . . . .	13
3.2	Oscillatore anisotropo . . . . .	13
4	Oscillatore a tre gradi di libertà . . . . .	15
4.1	Tre masse a estremi liberi . . . . .	16
4.2	Tre masse con condizioni periodiche al contorno . . . . .	17
5	Oscillatore a $N$ gradi di libertà . . . . .	18
5.1	Ricerca dei modi normali di oscillazione . . . . .	18
5.2	Energia cinetica e Lagrangiana . . . . .	22
5.3	Risoluzione delle equazioni del moto . . . . .	23
5.4	NAPOLI NAPOLI NAPOLI . . . . .	23
6	Il caso continuo . . . . .	24
6.1	Relazioni di trasformazione . . . . .	25
6.2	Relazione di dispersione . . . . .	25
6.3	L'equazione differenziale delle onde . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Onde Elastiche</b>	<b>27</b>
1	L'Equazione di D'Alembert unidimensionale . . . . .	27
1.1	Soluzioni dell'equazione di D'Alembert . . . . .	27
1.2	Onde piane monocromatiche . . . . .	28

2	Esempi di derivazione di onde elastiche . . . . .	28
2.1	Onde in una corda tesa . . . . .	29

## Parte I

# Richiami di Matematica





# Capitolo 1

## Numeri Complessi

I numeri complessi sono la naturale estensione del campo reale  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  che, pur sacrificando la relazione d'ordine, permettono di avere una struttura algebricamente chiusa.

I contenuti di questo capitolo fanno prevalentemente riferimento alle fonti [1, 2], con alcune modifiche e aggiunte personali.

### 1 Costruzione di $\mathbb{C}$

Sia  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ , poniamo  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$  e siano definite le operazioni:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & (z_1, z_2) &\mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & (z_1, z_2) &\mapsto (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

Chiamiamo  $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  la struttura così costruita, che si dimostra facilmente essere un campo.

#### 1.1 Forme e proprietà dei numeri complessi

Definiamo **modulo** di un numero complesso  $z$  la quantità:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}.$$

#### Forma algebrica

Osserviamo che l'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$  è isomorfo a  $\mathbb{R}$ , per cui poniamo  $x = (x, 0)$ . Sia inoltre  $i = (0, 1)$ , da cui:

$$\begin{aligned} y \cdot i &= (y, 0) \cdot (0, 1) = (0, y) \\ i^2 &= (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \end{aligned}$$

Facendo la posizione  $iy = (0, y)$ , ogni numero complesso  $z = (x, y)$  può essere scritto nella sua **forma algebrica**  $z = x + iy$ , infatti:

$$x + iy = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

Dato un numero complesso  $z = x + iy$ , definiamo:

- $\operatorname{Re} z = x$ , detta **parte reale** di  $z$ ;
- $\operatorname{Im} z = iy$ , detta **parte immaginaria** di  $z$ ;
- $\bar{z} = x - iy$ , detto **complesso coniugato** di  $z$ .

Vale inoltre la proprietà  $|z| = z\bar{z}$ .

### Forma trigonometrica ed esponenziale

Come noto, è possibile rappresentare i punti del piano  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , escluso  $(0, 0)$  in coordinate polari, fissando le due coordinate  $\rho$  e  $\theta$ , detti rispettivamente **raggio** e **angolo polare**.

Pensando ai numeri complessi come punti del piano, si osserva:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

da cui:

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

che viene detta **forma trigonometrica** di  $z$ . Segue naturalmente che:

- $\rho = |z|$ ;
- $\theta$  è l'angolo che risolve  $x = \rho \cos \theta$  e  $y = \rho \sin \theta$ ;
- $\bar{z} = \rho(\cos \theta - i \sin \theta) = \rho[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)]$ .

Consideriamo ora la quantità  $e^{i\theta}$  e dimostriamo che rappresenta ancora un numero complesso. È possibile interpretare l'esponenziale come una somma infinita di termini, esprimendo la funzione  $e^z$  come serie di Taylor centrata in 0:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{\theta^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

dove è evidente la presenza degli sviluppi di seno e coseno, da cui:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \tag{1.1}$$

la quale prende il nome di **formula di Eulero**.<sup>1</sup> Segue che qualunque numero complesso  $z \neq 0$  può essere espresso come:

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta},$$

---

<sup>1</sup>Da cui la più popolare **identità di Eulero**:  $e^{i\pi} + 1 = 0$

che viene detta **forma esponenziale** del numero complesso.

Dalla formula di Eulero seguono altre importanti relazioni. Consideriamo ancora  $z = e^{i\theta}$  e il suo coniugato, che per le precedenti è naturalmente  $\bar{z} = e^{-i\theta}$ :

$$z + \bar{z} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta \iff \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (1.2)$$

$$z - \bar{z} = e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta \iff \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (1.3)$$

Inoltre, per qualunque  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  si ha:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

da cui:

$$\overline{z_1 z_2} = \rho_1 \rho_2 e^{-i(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_1 e^{-i\theta_1} \rho_2 e^{-i\theta_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \quad (1.4)$$

## 2 Formula di De Moivre e radici in $\mathbb{C}$

Per poter operare al meglio coi numeri complessi, introduciamo dei metodi per eseguire con facilità le operazioni di elevamento a potenza ed estrazione di radice. Consideriamo due numeri  $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$  e il loro prodotto:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Da questa scrittura possiamo intuire che per qualunque  $z \neq 0$  e  $k \in \mathbb{Z}$ , possiamo scrivere:

$$z^k = \rho^k e^{ik\theta} = \rho^k (\cos k\theta + i \sin k\theta) \quad (1.5)$$

che viene detta formula di De Moivre e può essere dimostrata per induzione su  $k$ .

Il lettore potrebbe essere indotto a pensare che una scrittura simile sia corretta anche per gli esponenti razionali, come nel caso dell'estrazione di radice. Tuttavia è necessario tenere a mente che estrarre la radice  $n$ -esima, con  $n \in \mathbb{N}$ , di un numero complesso  $a$  vuol dire risolvere l'equazione:

$$z^n = a,$$

che in  $\mathbb{C}$  ha  $n$  soluzioni distinte, in virtù del teorema fondamentale dell'algebra. Per tali soluzioni è ancora una volta possibile fare riferimento alla forma esponenziale e trigonometrica dei numeri complessi, infatti ricordando che per la periodicità di seno e coseno  $a = \rho e^{i(\theta + 2m\pi)}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  deve essere:

$$z^n = \rho e^{i(\theta + 2m\pi)} \iff z = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta + 2m\pi}{n}\right)}, \quad m = 0, \dots, n-1.$$



## Capitolo 2

# Cenni di Analisi Complessa

Il proposito di questo capitolo è quello di fornire nozioni utili al calcolo di funzioni complesse di variabile complessa dal punto di vista più pratico che teorico.

**Definizione 2.1** (Intorno di un punto).



Parte II

Oscillazioni e Onde





## Capitolo 3

# L'Oscillatore Armonico

### 1 Introduzione

Dato un sistema fisico le cui configurazioni sono identificate dalle coordinate pure  $q^\alpha$ , dalla meccanica è noto che le configurazioni di equilibrio stabile si hanno in corrispondenza dei minimi del potenziale  $V(q^\alpha)$ . Assumendo che  $V$  sia una funzione almeno di classe  $C^2$  e che ammetta minimo, è possibile effettuare una traslazione che ponga l'origine del S.d.R.<sup>1</sup> coincidente col punto di minimo e sviluppare in serie di Taylor/Mac Laurin il potenziale, arrestandosi al termine di secondo grado. Si ottiene dunque:

$$V(q^\alpha) = V(\mathbf{0}) + \left. \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} \right|_{\mathbf{0}} q^\alpha + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \right|_{\mathbf{0}} q^\alpha q^\beta + R(q^\alpha).$$

Ricordando che il potenziale è definito a meno di una costante additiva e che all'equilibrio  $\left. \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} \right|_{\mathbf{0}} = 0$ , e trascurando il termine infinitesimo, si può riscrivere il potenziale come:

$$V(q^\alpha) = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \right|_{\mathbf{0}} q^\alpha q^\beta, \quad (3.1)$$

che non è altro che una forma quadratica del tipo  $\frac{1}{2} \underline{x}^\top H_V(\mathbf{0}) \underline{x}$ , con  $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$  un punto e  $H_V(\mathbf{0})$  la matrice Hessiana di  $V$  calcolata in  $\mathbf{0}$ .

Ovviamente questo è soltanto un modello approssimato che può essere applicato in un intorno del minimo. Se ci si allontana troppo, le discordanze tra il modello e le misure che si riscontrano prendono il nome di **effetti anarmonici**.

---

<sup>1</sup>Sistema di riferimento

## 2 Oscillatore armonico unidimensionale

Applichiamo quanto detto al caso unidimensionale. Siano  $A \subseteq \mathbb{R}$  un aperto,  $V : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  e  $x_0 \in A$  un punto di minimo per  $V$ . La (3.1) diventa:

$$V(x - x_0) = \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2;$$

ponendo  $u = x - x_0$ , si effettua la traslazione che pone il punto di minimo nell'origine, per cui si ottiene:

$$V(u) = \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_0 u^2.$$

A questo punto risulta evidente la somiglianza con il potenziale della forza elastica. Ponendo  $k = \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x_0}$  e prendendone il "gradiente" (derivata prima) cambiato di segno, si ottiene l'espressione della forza elastica tramite la legge di Hooke:

$$V(u) = \frac{1}{2} k u^2 \implies \mathbf{F}(\mathbf{u}) = -\frac{dV}{dx} \hat{\mathbf{i}} = -k \mathbf{u},$$

da cui l'equazione del moto:  $m\ddot{u} = -ku$ , che è lineare omogenea del secondo ordine.

Ponendo  $\frac{k}{m} = \omega^2$ , si può scrivere  $\ddot{u} = -\omega^2 u$ , di cui due soluzioni linearmente indipendenti sono  $\cos(\omega t)$  e  $\sin(\omega t)$ . L'integrale generale è quindi

$$u(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

con  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , o alternativamente, ponendo  $c_1 = A \cos \phi$  e  $c_2 = -A \sin \phi$ , ancora con  $A, \phi \in \mathbb{R}$ ,

$$u(t) = A \cos(\omega t + \phi).$$

In tal caso,  $A$  si dice **ampiezza**,  $\omega$  si dice **pulsazione** o **frequenza angolare** e  $\omega t + \phi$  si dice **fase**.

## 3 Oscillatore armonico bidimensionale

Proviamo ora passo passo ad aumentare il numero di dimensioni, per semplicità iniziamo da 2. Quando vi è più di un grado di libertà, è importante distinguere i casi in base alle simmetrie che il sistema presenta. Se il potenziale è invariante per rotazioni, diciamo che l'oscillatore armonico è **isotropo**, altrimenti lo diciamo **anisotropo**.

### 3.1 Oscillatore isotropo

Come prima, supponiamo di avere  $V : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definito dalla legge:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2),$$

ove si è usata la relazione  $k = m\omega^2$ . Notiamo subito che il potenziale è invariante per rotazioni in quanto le curve equipotenziiali sono circonferenze centrate nell'origine<sup>2</sup>. Di conseguenza  $V$  si spezza facilmente in:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2y^2$$

e derivando si ottengono quindi le due equazioni del moto già disaccoppiate.

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2x \\ \ddot{y} = -\omega^2y \end{cases}$$

le cui soluzioni sono nuovamente le funzioni  $x(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$  e  $y(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$ , definite a meno di quattro costanti arbitrarie. Fissando le condizioni iniziali:  $x(0)$ ,  $\dot{x}(0)$ ,  $y(0)$  e  $\dot{y}(0)$ , è possibile trovare l'unica soluzione del problema di Cauchy.

### 3.2 Oscillatore anisotropo

Affrontiamo adesso il caso di un potenziale che non presenti simmetrie per rotazione, ad esempio:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2y^2 + 2\gamma xy, \quad \gamma > 0.$$

#### Diagonalizzazione del potenziale

Come è noto dalla (3.1), è possibile riscrivere il potenziale come forma quadratica:

$$\frac{1}{2}m\omega^2 \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma}{m\omega^2} \\ \frac{\gamma}{m\omega^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Poichè la matrice dei coefficienti è simmetrica, per il teorema spettrale è diagonalizzabile ed esiste quindi un cambio di coordinate che pone la forma quadratica in forma canonica, disaccoppiando di conseguenza le equazioni del moto.

---

<sup>2</sup>Immaginiamo di trovarci già nel sistema di riferimento scelto in modo da collocare un punto di minimo di  $V$  nell'origine, se così non fosse, è sempre possibile ricondursi a quel caso con una traslazione

Le nuove coordinate sono quelle identificate da una base (ortonormale) di autovettori della matrice, cerchiamo quindi gli zeri del polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & \frac{\gamma}{m\omega^2} \\ \frac{\gamma}{m\omega^2} & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 - \frac{\gamma^2}{m^2\omega^4} = 0 \implies \lambda_{\pm} = 1 \pm \frac{\gamma}{m\omega^2}.$$

Calcoliamo ora gli autovettori<sup>3</sup>  $Q_{\pm}$  associati agli autovalori  $\lambda_{\pm}$ , risolvendo i due sistemi:

$$\begin{cases} (1 - \lambda_{\pm})x + \frac{\gamma}{m\omega^2}y = 0 \\ (1 - \lambda_{\pm})y + \frac{\gamma}{m\omega^2}x = 0 \end{cases}$$

e ottenendo quindi le componenti degli autovettori,  $[Q_{\pm}] = [x, \pm x]$ . Scegliamo quindi due autovettori normalizzati:

$$Q_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e la conseguente matrice di rotazione:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{tale che} \quad \begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma}{m\omega^2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\gamma}{m\omega^2} \end{bmatrix} = P^{\top} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma}{m\omega^2} \\ \frac{\gamma}{m\omega^2} & 1 \end{bmatrix} P.$$

Troviamo ora  $e_1$  ed  $e_2$  nelle nuove coordinate tramite i due sistemi vettoriali:

$$e_1 = xQ_+ + yQ_- \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$e_2 = xQ_+ + yQ_- \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

da cui  $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_+ + Q_-)$ ,  $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_+ - Q_-)$ . Trasformando le coordinate si ottiene il nuovo potenziale:

$$V(Q_+, Q_-) = \frac{1}{2}m\omega^2(Q_+^2 + Q_-^2) + \frac{\gamma}{2}(Q_+^2 - Q_-^2),$$

che si spezza facilmente in:

$$V(Q_+, Q_-) = \frac{1}{2}m\Omega_+^2 Q_+^2 + \frac{1}{2}m\Omega_-^2 Q_-^2,$$

avendo fatto la posizione  $\Omega_{\pm}^2 = \omega^2(1 \pm \frac{\gamma}{m\omega^2})$ .

---

<sup>3</sup>O meglio, le loro componenti rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^2$ :  $\{e_1, e_2\}$

### Equazioni del moto

A questo punto trovare e risolvere le equazioni del moto è banale:

$$\ddot{Q}_{\pm} = -\Omega_{\pm}^2 Q_{\pm} \implies Q_{\pm}(t) = A_{\pm} \cos(\Omega_{\pm} t + \phi_{\pm}),$$

e attraverso la trasformazione inversa è possibile ricavare le  $x(t)$ ,  $y(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{Q_+(t) + Q_-(t)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_+ \cos(\Omega_+ t + \phi_+) + A_- \cos(\Omega_- t + \phi_-)] \\ y(t) &= \frac{Q_+(t) - Q_-(t)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_+ \cos(\Omega_+ t + \phi_+) - A_- \cos(\Omega_- t + \phi_-)] \end{aligned}$$

Dove, come ci aspettavamo,  $A_{\pm}$  e  $\phi_{\pm}$  sono quattro costanti reali determinabili conoscendo le condizioni iniziali.

### Energia cinetica

Avendo operato una rotazione che non altera la metrica, ci aspettiamo che l'energia cinetica  $T$  resti invariata da un S.d.R. all'altro.

Dalla definizione  $T = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2$ , sviluppando il prodotto scalare otteniamo:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Derivando le equazioni di trasformazione invece troviamo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{Q_+ + Q_-}{\sqrt{2}} = \frac{\dot{Q}_+ + \dot{Q}_-}{\sqrt{2}} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{Q_+ - Q_-}{\sqrt{2}} = \frac{\dot{Q}_+ - \dot{Q}_-}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

e sostituendo nell'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m \left[ \frac{(\dot{Q}_+ + \dot{Q}_-)^2}{2} + \frac{(\dot{Q}_+ - \dot{Q}_-)^2}{2} \right] = \frac{1}{2} m (\dot{Q}_+^2 + \dot{Q}_-^2),$$

che prova quanto affermato.

## 4 Oscillatore a tre gradi di libertà

Proviamo ora a generalizzare ulteriormente quanto detto fin'ora per sistemi che abbiano più di due gradi di libertà. Iniziamo considerando il caso di tre masse legate da molle ideali con estremi liberi, per poi affrontare il caso con condizioni armoniche al contorno e successivamente generalizzare a  $n$  masse.

#### 4.1 Tre masse a estremi liberi

Prendiamo in esame un sistema fisico formato da tre masse uguali  $m$  vincolate a muoversi sull'asse  $x$ , collegate da due molle di costante  $k = m\omega^2$ .

Le configurazioni di questo sistema fisico sono identificate dalle coordinate generalizzate  $q^\alpha = \{x, y, z\}$  che indicano la posizione delle tre masse rispetto all'origine. Sul sistema agiscono due forze, entrambe forze elastiche, che dipendono dalle due distanze  $(y - x)$  e  $(z - y)$ . Possiamo facilmente calcolare il potenziale elastico delle molle:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \frac{1}{2}m\omega^2(x - y)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(y - z)^2 = \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2), \end{aligned}$$

la cui matrice associata è  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ . Procediamo come precedentemente per diagonalizzare il potenziale:

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda(1 - \lambda)(\lambda - 3).$$

Gli autovalori sono  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_3 = 3$ . Dal calcolo degli autovettori associati otteniamo le componenti dei vettori normalizzati:

$$q_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con cui possiamo costruire la matrice di rotazione  $P$  tale che  $\det P = 1$  contenente  $q_3$ ,  $q_1$  e  $q_0$  sulle colonne, che diagonalizza il potenziale:

$$D = P^\top B P \iff P D P^\top = B.$$

Sostituendo  $B$  nella forma quadratica:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2 \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} P B P^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

dove, come prima è stato mostrato in maniera più esplicita,  $P^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  trasforma le coordinate, il potenziale assume la forma:

$$V(q_3, q_1, q_0) = \frac{1}{2}m\omega^2 \begin{pmatrix} q_3 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_3 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}m\omega^2 (3q_3^2 + q_1^2)$$

e, ponendo di nuovo  $\Omega_3^2 = 3\omega^2$  e  $\Omega_1^2 = \omega^2$ , otteniamo le equazioni del moto:

$$\begin{cases} \ddot{q}_0 = 0 \\ \ddot{q}_1 = -\Omega_1^2 q_1 \\ \ddot{q}_3 = -\Omega_3^2 q_3 \end{cases} \iff \begin{cases} q_0(t) = v_0 t + s_0 \\ q_1(t) = A_1 \cos(\Omega_1 t + \phi_1) \\ q_3(t) = A_3 \cos(\Omega_3 t + \phi_3) \end{cases}$$

Applicando la trasformazione di coordinate inversa data da  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} q_3 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix}$

possiamo trovare  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v_0 t + s_0) + \frac{A_1}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_1 t + \phi_1) + \frac{A_3}{\sqrt{6}} \cos(\Omega_3 t + \phi_3) \\ y(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v_0 t + s_0) - \frac{2A_3}{\sqrt{6}} \cos(\Omega_3 t + \phi_3) \\ z(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v_0 t + s_0) - \frac{A_1}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_1 t + \phi_1) + \frac{A_3}{\sqrt{3}} \cos(\Omega_3 t + \phi_3) \end{aligned}$$

Come ci potevamo aspettare dalla presenza di tre equazioni lineari del secondo ordine, le equazioni del moto sono definite a meno di sei costanti arbitrarie:  $v_0$ ,  $s_0$ ,  $A_1$ ,  $\phi_1$ ,  $A_3$  e  $\phi_3$ . È inoltre importante sottolineare il significato fisico legato alla presenza di  $\lambda_0 = 0$  tra gli autovalori: possiamo notare che l'equazione del moto associata alla coordinata  $q_0$  costituisce un moto rettilineo uniforme, e non oscillatorio, che suggerisce una simmetria del sistema per traslazioni.

A questo punto risulta utile introdurre il concetto di **modi normali di oscillazione**.

## 4.2 Tre masse con condizioni periodiche al contorno

Supponiamo adesso di avere tre masse disposte come nell'esempio precedente ma con l'ulteriore condizione che la prima e la terza massa interagiscano per mezzo di una terza molla di caratteristiche uguali alle altre due. Questa situazione fisica può essere meglio visualizzata come se sia le masse che le molle fossero vincolate a scorrere su di una circonferenza rigida  $\gamma$  priva di attrito.

Anche in questo caso possiamo ricorrere alle coordinate pure  $x$ ,  $y$  e  $z$  che stavolta rappresentano le ascisse curvilinee condotte da un arbitrario punto  $O \in \gamma$  fino a individuare la posizione delle tre masse. Il potenziale, similmente a prima, si presenta come:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\omega^2[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] = \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}m\omega^2 \underline{x}^\top B \underline{x}. \end{aligned}$$



Eseguiamo il solito procedimento per diagonalizzare  $B$ :

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda-3)^2 = 0,$$

che dà gli autovalori  $\lambda_0 = 0$  e  $\lambda_3 = 3$  doppio. Gli autovettori normalizzati che se ne ricavano sono:

$$q_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad q_{3,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 5 Oscillatore a $N$ gradi di libertà

Generalizziamo definitivamente il problema considerando il caso di una catena di  $N$  masse  $\mu$  collegate a due a due da molle di costante elastica  $k = \mu\omega^2$  con condizioni periodiche al contorno.

Supponiamo per comodità  $N$  dispari, denotiamo con  $a$  il passo reticolare, con  $x_n = na$  la posizione di equilibrio dell' $n$ -esima massa ( $n = 0, \dots, N-1$ ), con  $L = Na$  la lunghezza della catena e con  $M = N\mu$  la massa totale. Sia inoltre la funzioni  $\zeta_n$  la dislocazione dell' $n$ -esima massa dalla posizione di equilibrio  $x_n$ . Richiedere che le condizioni al contorno siano periodiche vuol dire supporre che l'ultima massa possa interagire con la prima, come se la catena formasse un cerchio. In termini matematici questo si traduce in:

$$x_{n+N} = x_n + L \equiv x_n \quad (3.2)$$

$$\zeta_{n+N} \equiv \zeta_n \quad (3.3)$$

Il potenziale di un tale sistema ha forma:

$$V = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \sum_n (\zeta_{n+1} - \zeta_n)^2. \quad (3.4)$$

### 5.1 Ricerca dei modi normali di oscillazione

A questo punto desideriamo provare che le seguenti relazioni costituiscono il cambio di coordinate che permette di passare dalle  $\zeta_n$  alle  $Q_q$  ove il potenziale è diagonalizzato:

$$\zeta_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m e^{iq_m x_n} Q_{q_m} \quad (3.5)$$

$$Q_{q_m} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{-iq_m x_n} \zeta_n \quad (3.6)$$

Allo scopo di dileguare eventuali perplessità, vorrei giustificare rapidamente la presenza di esponenziali complessi nelle relazioni appena enunciate. Ci

si potrebbe aspettare infatti, che le trasformazioni da cercare siano simili a quelle viste nei casi semplificati a due e tre dimensioni: somme di funzioni trigonometriche con opportuni coefficienti. Volendo, potremmo affrontare questo problema proprio in questo modo, se non fosse che ciò renderebbe i calcoli ben più tedious, quando invece operare con gli esponenziali complessi elimina questo problema. Infatti, basta tenere a mente che  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  e che di conseguenza ci basterà prendere la parte reale della soluzione per raggiungere il nostro obiettivo. Sostanzialmente stiamo affrontando un problema di moto armonico in  $\mathbb{R}$  risolvendo il corrispettivo problema di ‘moto circolare’ in  $\mathbb{C}$  e ‘proiettandolo’ su  $\mathbb{R}$ . Si rimanda all’Appendice 1 per qualche cenno in più ai numeri complessi.

Osserviamo subito che da (3.2) e (3.5) è possibile conoscere l’intervallo in cui variano le  $q_m$ :

$$e^{iq_{n+N}} = e^{iq_n} \iff e^{iq_m n a} e^{iq_m L} = e^{iq_m n a} \iff e^{iq_m L} = 1,$$

per cui deve essere  $q_m L = 2m\pi$ , con  $m \in \mathbb{Z}$ . Sostituendo  $L$  otteniamo:

$$q_m = \frac{2m\pi}{L} = \frac{2\pi}{a} \frac{m}{N} \quad (3.7)$$

Dal momento che i gradi di libertà sono  $N$ , prevediamo che siano presenti proprio  $N$  modi normali al variare di  $q_m$ , per cui possiamo scegliere  $N$  diversi valori di  $q_m$  al variare di  $m \in \mathbb{Z}$ . Risulta opportuna la scelta di un intervallo simmetrico  $m \in \left[-\frac{N-1}{2}; \frac{N-1}{2}\right]$ , in modo che si abbia  $q_m \in \left[-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a}\right]$ . Per compattezza della notazione, questo fatto sarà omesso nella scrittura degli indici della sommatoria laddove ciò non possa causare ambiguità.

Prima di proseguire oltre con la risoluzione del problema, antepriamo dei risultati utili:

**Lemma 3.1.** *Sotto le ipotesi del problema valgono le seguenti relazioni:*

$$\sum_n e^{iq_m x_n} = N \delta_{q_m, 0} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (3.8)$$

$$\sum_m e^{-iq_m x_n} = N \delta_{n, 0} \quad m \in \left[-\frac{N-1}{2}; \frac{N-1}{2}\right] \quad (3.9)$$

ove  $\delta_{\alpha, \beta}$  è la Delta di Kronecker.

*Dimostrazione.* Proviamo la (3.8).

Se  $q_m = 0$ , banalmente:

$$\sum_{n=0}^{N-1} 1 = N.$$

Se  $q_m \neq 0$ , osserviamo che si può scrivere:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{iq_m x_n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{iq_m n a} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{iq_m a})^n = \frac{1 - e^{iq_m N a}}{1 - e^{iq_m a}}$$

essendo il termine generale della successione delle somme parziali di una serie geometrica di ragione  $e^{iq_m a}$ . Sostituendo la (3.7) si vede subito che tale somma risulta 0.

Allo stesso modo si prova la (3.9).  $\square$

### Invertibilità

Verifichiamo adesso che le trasformazioni (3.5) e (3.6) sono l'una l'inversa dell'altra mostrando che la loro composizione restituisce l'identità:

$$\zeta_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m e^{iq_m x_n} \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^{N-1} e^{-iq_m x_p} \zeta_p \right) = \frac{1}{N} \sum_{p,m} e^{iq_m(x_n - x_p)} \zeta_p.$$

Poiché  $\zeta_p$  non dipende da  $q$ , è possibile estrarlo dalla rispettiva sommatoria:

$$\zeta_n = \frac{1}{N} \sum_p \zeta_p \left[ \sum_m e^{iq_m(x_n - x_p)} \right]$$

dove per il Lemma 3.1 si può scrivere:

$$\zeta_n = \frac{1}{N} \sum_p \zeta_p \delta_{n,p} = \zeta_n$$

che è appunto l'identità.

### Diagonalizzazione del potenziale

Ci chiediamo adesso se questo cambio di coordinate ci fornisca i modi normali di oscillazione del sistema, diagonalizzando il potenziale (3.4). Studiamo la seguente quantità:

$$\begin{aligned} \zeta_n^2 &= \frac{1}{N} \left( \sum_m e^{iq_m x_n} Q_{q_m} \right)^2 = \frac{1}{N} \left( \sum_m e^{iq_m x_n} Q_{q_m} \right) \left( \sum_m e^{iq_{m'} x_n} Q_{q_{m'}} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m,m'} Q_{q_m} Q_{q_{m'}} e^{i(q_m + q_{m'})x_n}, \end{aligned}$$

sommiamo quindi su  $n$  e applichiamo ancora il Lemma 3.1 dopo aver raccolto i termini comuni:

$$\begin{aligned} \sum_n \zeta_n^2 &= \frac{1}{N} \sum_{m,m'} Q_{q_m} Q_{q_{m'}} \sum_n e^{i(q_m + q_{m'})x_n} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m,m'} Q_{q_m} Q_{q_{m'}} N \delta_{q_m, -q_{m'}} = \sum_m Q_{q_m} Q_{-q_{m'}}. \end{aligned}$$

Prima di proseguire ulteriormente, facciamo delle considerazioni utili. Ricordiamo che le  $\zeta_n$  sono funzioni reali e quindi deve essere  $\zeta_n^* = \zeta_n$ .<sup>4</sup> Inoltre, dalla (3.5), possiamo ricavare  $\zeta_n^*$  tenendo a mente che l'indice  $m$  è saturato dalla sommatoria e quindi nulla vieta di 'cambiargli il nome' in  $-m$ . Inoltre, per la definizione di  $q_m$  (3.7) si evince che  $q_{-m} = -q_m$ . Per cui:

$$\zeta_n^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m e^{-iq_m x_n} Q_{q_m}^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{-m} e^{iq_m x_n} Q_{-q_m}^*,$$

dove, nello scrivere la seconda uguaglianza, è stato sfruttato il fatto che l'indice  $m$  e che dalla Segue naturalmente:

$$\zeta_n = \zeta_n^* \iff Q_{q_m} = Q_{-q_m}^* \iff Q_{-q_m} = Q_{q_m}^*. \quad (3.10)$$

A questo punto possiamo scrivere per esteso il potenziale, richiamando la (3.4):

$$V = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \sum_n (\zeta_{n+1} - \zeta_n)^2$$

Valutiamo la quantità tra parentesi:

$$\zeta_{n+1} - \zeta_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m Q_{q_m} (e^{iq_m x_{n+1}} - e^{iq_m x_n}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m Q_{q_m} e^{iq_m x_n} (e^{iq_m a} - 1)$$

e inseriamola nel potenziale  $V$  che, una volta sviluppato il quadrato similmente a prima e applicata la (3.10), diventa:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \frac{\mu \omega^2}{N} \sum_n \sum_{m, m'} e^{iq_m x_n} (e^{iq_m a} - 1) e^{iq_{m'} x_n} (e^{iq_{m'} a} - 1) Q_{q_m} Q_{q_{m'}} = \\ &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 \sum_{m, m'} \delta_{m, -q_{m'}} (e^{iq_m a} - 1) (e^{iq_{m'} a} - 1) Q_{q_m} Q_{q_{m'}} = \\ &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 \sum_m (e^{iq_m a} - 1) (e^{-iq_m a} - 1) Q_{q_m} Q_{-q_m} = \\ &= \frac{1}{2} \mu \omega^2 \sum_m (e^{iq_m a} - 1) (e^{-iq_m a} - 1) Q_{q_m} Q_{q_m}^* \end{aligned}$$

Da cui la nuova espressione di  $V$ :

$$V = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \sum_m (e^{iq_m a} - 1) (e^{-iq_m a} - 1) \|Q_{q_m}\|^2 \quad (3.11)$$

che non è altro che una forma quadratica nelle variabili  $Q_{q_m}$  la cui matrice dei coefficienti è diagonale e contiene gli autovalori  $(e^{iq_m a} - 1)(e^{-iq_m a} - 1)$ , ciascuno associato all'autovettore  $Q_{q_m}$  corrispondente. Chiamiamo i vettori

---

<sup>4</sup>Con  $\zeta_n^*$  indichiamo il complesso coniugato di  $\zeta_n$

di base di queste nuove coordinate  $Q_{q_m}$ , **modi normali di oscillazione** del sistema. Queste coordinate in cui il potenziale è diagonale costituiscono diversi 'modi' di oscillare del sistema fisico, ciascuno linearmente indipendente dagli altri. Di conseguenza qualunque moto periodico del sistema può essere espresso come combinazione lineare dei modi normali.

Possiamo maneggiare ulteriormente la forma del potenziale moltiplicando e dividendo il risultato ottenuto per  $4i^2 e^{i\frac{q_m a}{2}}$ :

$$V = \frac{-4}{2} \mu \omega^2 \sum_m \frac{e^{i\frac{q_m a}{2}} - e^{-i\frac{q_m a}{2}}}{2i} \frac{e^{-i\frac{q_m a}{2}} - e^{i\frac{q_m a}{2}}}{2i} Q_{q_m}^2,$$

dove riconosciamo le formule di Eulero per il seno:

$$V = 2\mu\omega^2 \sum_m \sin^2\left(\frac{q_m a}{2}\right) Q_{q_m}^2.$$

Notiamo infine che ponendo:

$$\Omega_{q_m} = 2\omega \sin\left(\frac{q_m a}{2}\right), \quad (3.12)$$

il potenziale assume la forma più compatta ed elegante:

$$V = \frac{1}{2} \mu \sum_m \Omega_{q_m}^2 Q_{q_m}^2. \quad (3.13)$$

### Relazione di dispersione

È opportuno soffermarsi un istante a osservare la posizione (3.12). Essa prende il nome di **relazione di dispersione** e ci permette di esprimere la frequenza di oscillazione di ciascun modo normale in funzione del vettore d'onda  $q_m$  associato. In questo caso notiamo che la relazione non è lineare, ma può essere approssimata come tale per i  $q_m$  prossimi allo 0 o se il passo  $a$  è sufficientemente piccolo da rendere infinitesimo l'argomento del seno. Qualora ciò fosse possibile, la relazione di dispersione assumerebbe la forma  $\Omega_{q_m} = \omega a q_m$ , dove la quantità  $\omega a$  ha le dimensioni di una velocità.

L'argomento sarà ripreso più approfonditamente nel paragrafo 6 sullo studio del limite per  $a \rightarrow 0$ .

## 5.2 Energia cinetica e Lagrangiana

Applichiamo al sistema la definizione di energia cinetica che, essendo invariante per rototraslazioni, deve risultare uguale sia nelle  $\dot{\zeta}_n$  che nelle  $\dot{Q}_{q_m}$ . Consideriamo:

$$\dot{\zeta}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m e^{iq_m x_n} \dot{Q}_{q_m}.$$

Con passaggi del tutto analoghi ai precedenti, troviamo:

$$T = \frac{1}{2}\mu \sum_n \dot{\zeta}_n^2 = \frac{1}{2}\mu \sum_m \dot{Q}_{q_m} \dot{Q}_{q_m}^* = \frac{1}{2}\mu \sum_m \dot{Q}_{q_m}^2$$

La Lagrangiana risulta quindi:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}\mu \sum_m \left( \dot{Q}_{q_m}^2 - \Omega_{q_m}^2 Q_{q_m}^2 \right). \quad (3.14)$$

### 5.3 Risoluzione delle equazioni del moto

Scriviamo ora le  $N$  equazioni del moto sostituendo la (3.14) nelle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_{q_m}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_{q_m}} = 0 \implies \ddot{Q}_{q_m} = -\Omega_{q_m}^2 Q_{q_m}, \quad (3.15)$$

le cui soluzioni sono del tipo  $Q_{q_m}(t) = e^{\pm i\Omega_{q_m} t}$ .

#### Integrale generale

Le generiche soluzioni di (3.15) dipenderanno da due costati arbitrarie  $A_{q_m}^{\pm} \in \mathbb{C}$  determinate dalle condizioni iniziali e avranno forma:

$$Q_{q_m}(t) = A_{q_m}^+ e^{i\Omega_{q_m} t} + A_{q_m}^- e^{-i\Omega_{q_m} t}.$$

Dal momento che le  $A_{q_m}^{\pm}$  sono complesse, possiamo esprimerle in forma esponenziale come  $A_{q_m}^{\pm} = \rho_{q_m}^{\pm} e^{i\phi_{q_m}^{\pm}}$ , da cui:

$$Q_{q_m}(t) = \rho_{q_m}^+ e^{i(\Omega_{q_m} t + \phi_{q_m}^+)} + \rho_{q_m}^- e^{i(-\Omega_{q_m} t + \phi_{q_m}^-)},$$

### 5.4 NAPOLI NAPOLI NAPOLI

Scriviamo ora le  $N$  equazioni del moto sostituendo la (3.14) nelle equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_q} = 0 \implies \ddot{Q}_q = -\Omega_q^2 Q_q,$$

che ammettono soluzioni del tipo  $Q_q(t) = e^{\pm i\Omega_q t}$ . Le generiche soluzioni, presi  $A_q^{\pm} \in \mathbb{C}$ , possono essere scritte come:  $Q_q(t) = A_q^+ e^{i\Omega_q t} + A_q^- e^{-i\Omega_q t}$  e, ponendo  $A_q^{\pm} = \rho_q^{\pm} e^{i\phi_q^{\pm}}$ :

$$Q_q(t) = \rho_q^+ e^{i(\Omega_q t + \phi_q^+)} + \rho_q^- e^{i(-\Omega_q t + \phi_q^-)}.$$

Proviamo a sostituire quest'ultima relazione nella (3.5):

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \left[ \rho_q^+ e^{i(qx_n + \Omega_q t + \phi_q^+)} + \rho_q^- e^{i(qx_n - \Omega_q t + \phi_q^-)} \right].$$

Ricordiamo adesso che stiamo sommando su un intervallo simmetrico e quindi a ogni valore di  $q$  corrisponde un  $-q$ . Per la (3.10), possiamo riscrivere la somma per  $q \geq 0$ , e tenere conto dei termini con indice  $-q$  separatamente. Tuttavia facendo ciò:

- $\rho_{-q}^\pm = \rho_q^\pm$  in quanto è il modulo di un numero complesso ed è uguale al modulo del suo coniugato;
- $\phi_{-q}^\pm = -\phi_q^\pm$  in quanto l'argomento di un numero complesso cambia segno passando al coniugato;
- $\Omega_{-q} = -\Omega_q$  in quanto  $\Omega_q$  dipende dal seno di  $q$ , che è una funzione dispari.

Segue che ognuno dei due esponenziali della sommatoria si spezza in:

$$\rho_q^\pm e^{i(qx_n \pm \Omega_q t + \phi_q^\pm)} + \rho_q^\pm e^{i(-qx_n \mp \Omega_q t - \phi_q^\pm)},$$

che non è altro che la somma di due complessi coniugati, la quale restituisce due volte la parte reale del numero complesso. In definitiva la (3.5) diventa:

$$\zeta_n(t) = \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_q \left[ \rho_q^+ \cos(qx_n + \Omega_q t + \phi_q^+) + \rho_q^- \cos(qx_n - \Omega_q t + \phi_q^-) \right] \quad (3.16)$$

Possiamo notare che la soluzione delle equazioni del moto è formata da una sovrapposizione di **onde piane monocromatiche**, a cui verrà prestata più attenzioni nel corso del Capitolo 4.

## 6 Il caso continuo

Fino ad ora non abbiamo fatto altro che cercare di risolvere la Fisica di sistemi contenenti un numero  $N$  finito di masse. Tuttavia, pur tenendo a mente che la natura ha carattere discreto, in quanto di fatto gli atomi che compongono la materia sono entità a loro volta discrete, può essere utile estendere questo studio al caso continuo, in quanto gli strumenti matematici forniti dall'analisi possono talvolta permetterci di risolvere con più facilità i problemi che ci vengono posti.

È tuttavia opportuno tenere a mente che l'approssimazione continua può essere sfruttata al meglio solo in una scala adeguata, ad esempio quando le dimensioni del sistema fisico considerato sono molto maggiori del passo tra gli enti discreti che lo compongono, avendo allo stesso tempo la cura di trattare 'unità infinitesime' che contengano un numero sufficientemente elevato di particelle da poter essere a loro volta considerate continue.

### 6.1 Relazioni di trasformazione

Nel paragrafo 5 avevamo posto  $L = Na$ . Vediamo cosa succede per  $a \rightarrow 0$  e  $N \rightarrow +\infty$ . A tale scopo è utile definire la nuova quantità  $\tilde{Q}_q$ , a partire dalla (3.6):

$$\tilde{Q}_q = \frac{Q_q}{\sqrt{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{-iqx_n} \zeta_n,$$

Moltiplicando e dividendo per  $a$  e passando al limite quello che otteniamo è:

$$\tilde{Q}_q = \frac{1}{Na} \sum_{n=1}^N e^{-iqx_n} \zeta_n a \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{a \rightarrow 0} \tilde{Q}_q = \frac{1}{L} \int_0^L e^{-iqx} \zeta(x) dx. \quad (3.17)$$

Per quanto riguarda la trasformazione inversa facciamo riferimento alla (3.5), riscrivendola in funzione delle  $\tilde{Q}_q$ :

$$\zeta_n = \sum_q e^{iqx_n} \tilde{Q}_q.$$

Ricordando che le  $q$  dipendono da  $m$  per la (3.7) e per  $N \rightarrow +\infty$  anche il numero di  $m$  su cui sommare diventa infinito, la somma diventa una serie di Fourier:

$$\zeta(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{iq_m x} \tilde{Q}_{q_m} \quad (3.18)$$

### 6.2 Relazione di dispersione

Riprendiamo quanto accennato precedentemente richiamando la relazione di dispersione per il caso di  $N$  masse:

$$\Omega_q = 2\omega \sin\left(\frac{qa}{2}\right). \quad (3.12)$$

Osserviamo che essendo il seno una funzione limitata ciò pone un limite ai valori che le  $\Omega_q$  possono assumere, coerentemente col numero limitato dei possibili modi normali di oscillazione del sistema.

Al limite per  $a \rightarrow 0$  tuttavia l'argomento del seno diventa infinitesimo e può essere ragionevolmente approssimato col primo termine della sua serie di Maclaurin:

$$\Omega_q = \omega a q = v_0 q$$

restituendoci una relazione lineare in cui il coefficiente angolare ha tutte le carte in regola per essere una velocità, motivo per cui. I mezzi fisici in cui la relazione di dispersione ha forma lineare vengono detti **mezzi non dispersivi**, e si distinguono dai mezzi dispersivi per il fatto che la funzione d'onda che si propaga in essi è data da onde monocromatiche che si propagano con la medesima velocità di fase coincidente con  $v_0$ .



### 6.3 L'equazione differenziale delle onde

Se riprendiamo la considerazione la catena di molle introdotta nel paragrafo 5 possiamo ricavare da essa una equazione differenziale alle derivate parziali di notevole importanza.

Consideriamo la massa della catena associata alla posizione di equilibrio  $x_n$ . Su di essa agiranno in generale due forze dovute alla deformazione delle molle che la collegano alle masse in  $x_{n-1}$  e in  $x_{n+1}$ . Denominiamole rispettivamente  $F_{n-1}$  e  $F_{n+1}$ . Dalle equazioni di Newton risulta:

$$\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{F}_{n+1} = m\ddot{\zeta}_n \hat{\mathbf{i}}$$

Passiamo ai moduli e, ricordando che la quantità  $F_{n-1} - F_{n+1}$  può essere scritta come  $k[(\zeta_{n+1} - \zeta_n) - (\zeta_n - \zeta_{n-1})]$ , dividiamo ambo i membri per  $a^2$  e portiamo  $k$  a secondo membro:

$$\frac{1}{a} \left[ \frac{(\zeta_{n+1} - \zeta_n)}{a} - \frac{(\zeta_n - \zeta_{n-1})}{a} \right] = \frac{m}{ka^2} \ddot{\zeta}_n. \quad (3.19)$$

Prima di passare al limite per  $a \rightarrow 0$  ricordiamo che la  $\mu$  che compare rappresenta la singola massa di ogni punto che forma la catena. Ponendo la massa totale  $M = N\mu$  otteniamo  $\frac{m}{a} = \frac{M}{Na} = \frac{M}{L} = \rho$ , con  $\rho$  densità media della catena che non dipende da  $a$ . Analogamente richiamiamo la definizione del modulo di compressibilità  $\beta$  come il fattore di proporzionalità che mette in relazione la forza esercitata da un mezzo continuo alla sua deformazione. Nel caso unidimensionale di un'asta di lunghezza  $l_0$  si avrebbe  $F = \beta \frac{\delta l}{l_0}$  da

cui, nel caso della catena,  $F = \beta \frac{\zeta_n}{a} = k\zeta_n$ . Poiché  $\beta$  è una costante del mezzo, segue  $ka = \beta$ .

Dalla sostituzione di entrambe nella (3.19) e passando al limite si ottiene:

$$\frac{1}{a} \left[ \frac{(\zeta_{n+1} - \zeta_n)}{a} - \frac{(\zeta_n - \zeta_{n-1})}{a} \right] = \frac{\rho}{\beta} \ddot{\zeta}_n \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{\rho}{\beta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \quad (3.20)$$

Questa equazione differenziale lineare del secondo ordine alle derivate parziali prende il nome di **Equazione di D'Alembert** o **delle Onde** e sarà l'oggetto di studio del prossimo capitolo.

## Capitolo 4

# Onde Elastiche

In questo capitolo approfondiamo l'equazione differenziale trovata alla fine del Capitolo 3 e vedremo alcuni esempi di sistemi fisici in cui la propagazione di un qualche tipo di perturbazione soddisfa proprio tale equazione.

### 1 L'Equazione di D'Alembert unidimensionale

L'equazione differenziale del secondo ordine alle derivate parziali (3.20) che abbiamo ricavato passando dalla catena di  $N$  molle passando al limite del continuo è il caso particolare di un'equazione che nella forma più generale, seppur sempre nel caso unidimensionale, appare come:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (4.1)$$

Come già accennato in precedenza, essa prende il nome di **Equazione di D'Alembert** o **Equazione delle Onde** e descrive il comportamento di una funzione che mantiene il proprio 'aspetto' invariato propagandosi lungo  $x$  con velocità  $v$ .

#### 1.1 Soluzioni dell'equazione di D'Alembert

Si può dimostrare che le soluzioni di questa equazione sono delle funzioni  $\xi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  che assumono la forma  $\xi(x, t) = f(x \mp vt)$ , verifichiamolo. Posto  $z = x \mp vt$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{df}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{df}{dz} & \implies & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{df}{dz} \right) \frac{dz}{dx} = \frac{d^2 f}{dz^2} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{df}{dz} \frac{dz}{dt} = \mp v \frac{df}{dz} & \implies & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{d}{dz} \left( \mp v \frac{df}{dz} \right) \frac{dz}{dt} = v^2 \frac{d^2 f}{dz^2} \end{aligned}$$

Da cui:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

che è l'Equazione di D'Alembert. In generale, poiché la combinazione lineare di soluzioni di un'equazione lineare è ancora una soluzione, possiamo dire che la soluzione generale della (4.1) è del tipo:  $\xi(x, t) = f(x - vt) + g(x + vt)$

Proviamo ora a cercare, tra le soluzioni della (4.1), delle funzioni fattorizzabili in funzioni delle sole variabili  $x$  e  $t$ , cioè del tipo  $\xi(x, t) = \psi(x)\chi(t)$ . Inserendo un tale tipo di funzione nell'equazione delle Onde si ottiene:

$$\psi''(x)\chi(t) = \frac{1}{v^2}\psi(x)\chi''(t),$$

da cui si evince che ciascuna delle due funzioni debba essere direttamente proporzionale alla propria derivata seconda. Infatti, imponendo che questa uguaglianza valga  $\forall x, t$ , se per esempio fissiamo la  $x$ , si deve avere una proporzionalità diretta tra  $\chi(t)$  e  $\chi''(t)$ , e viceversa.

Abbiamo quindi le due equazioni differenziali<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}\psi''(x) &= -k^2\psi(x) \implies \psi(x) = e^{\pm ikx} \\ \chi''(t) &= -\omega^2\chi(t) \implies \chi(t) = e^{\pm i\omega t}\end{aligned}$$

Il che significa che le soluzioni fattorizzabili dell'equazione delle onde hanno forma:

$$\xi(x, t) = e^{i(kx \pm \omega t)}. \quad (4.2)$$

Avendo escluso a priori le soluzioni identicamente nulle, osserviamo che deve valere la seguente catena di uguaglianze:

$$\frac{-\omega^2}{v^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\chi''(t)}{\chi(t)} = \frac{\psi''(x)}{\psi(x)} = -k^2,$$

da cui segue  $\omega^2 = v^2 k^2$ , ossia  $\omega = \pm vk$ , che è la relazione di dispersione per l'equazione di D'Alembert.

## 1.2 Onde piane monocromatiche

## 2 Esempi di derivazione di onde elastiche

Andiamo ora a vedere quattro sistemi fisici in cui una perturbazione esterna induce nel sistema fisico un comportamento ben descritto dall'equazione di D'Alembert.

---

<sup>1</sup>La soluzione generale di ciascuna equazione differenziale è data, come di consueto da una combinazione lineare con coefficienti complessi arbitrari, come  $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$  (analogamente per l'equazione in  $t$ ), ma questo dettaglio è stato omissso per semplicità.

### 2.1 Onde in una corda tesa

Per cominciare osserviamo che una corda tesa può essere trattata in maniera simile a una catena di molle e masse di passo  $a$  come quella del capitolo precedente, seppur di lunghezza infinita e posta preventivamente in tensione. Infatti, se il sistema non fosse in tensione, piccole perturbazioni trasversali avrebbero effetti trascurabili sul sistema. Disponiamo la catena lungo l'asse  $x$  del piano  $Oxy$  e supponiamo di sollevare l' $n$ -esima massa a una quota  $y_n \ll a$  l'allungamento della molla sarà  $l - a$ , con  $l = \sqrt{a^2 + y_n^2}$ . Sfruttando lo sviluppo binomiale di Maclaurin troviamo:

$$l - a = a\sqrt{1 + \frac{y_n^2}{a^2}} - a \simeq a\left(1 + \frac{y_n^2}{2a^2}\right) - a = \frac{y_n^2}{2a},$$

quantità che va quadraticamente a 0 per  $y_n \rightarrow 0$ . Di conseguenza il contributo di forza perpendicolare dovuto alla forza elastica sarà trascurabile se confrontato con quello longitudinale, che dipende linearmente dallo spostamento lungo  $x$ .

Vediamo invece che succede se la catena di molle viene tesa uniformemente con una tensione di modulo  $T$ . Ogni massa occuperà una posizione  $(x_n, y_n)$ , con  $x_n = na$  fissata, concidente con la posizione di equilibrio, e  $y_n$  funzione del tempo<sup>2</sup>. Al variare delle  $y_n$ , la forza che agisce su ogni massa non sarà più, in generale, parallela all'asse  $x$ . Indicando con  $\theta$  l'angolo che il segmento unente l' $n$ -esima massa alla successiva stacca dall'asse  $x$ , la forza si scompone in una componente lungo  $x$ , di modulo  $F_{n,x}^+ = T \cos \theta$ , e una componente lungo  $y$ , pari a  $F_{n,y}^+ = T \sin \theta$ .

Se supponiamo di trattare solo piccole perturbazioni possiamo linearizzare seno e coseno tramite le rispettive serie di Maclaurin. Si ottiene quindi  $F_{n,x}^+ \simeq T$  e  $F_{n,y}^+ \simeq T\theta$ , da cui, tenendo conto del fatto che al primo ordine  $\sin \theta \simeq \theta \simeq \tan \theta$ :

$$F_{n,y}^+ \simeq T \frac{y_{n+1} - y_n}{a}$$

---

<sup>2</sup>Le  $y_n$  sono anche funzione della posizione lungo  $x$ , ma ciò è implicitamente contenuto nel fatto che a ogni massa corrisponde una  $x_n$  fissata e quindi ogni  $y_n$  è associata a una posizione costante tramite l'indice  $n$ .



# Bibliografia

- [1] Giuseppe Di Fazio e Pietro Zamboni. *Analisi matematica Uno*. it. 2013, pp. 60–65.
- [2] Carlo Presilla. *Elementi Di Analisi Complessa*. it. 2<sup>a</sup> ed. Unitext / La Matematica Per Il 3+2. Milan, Italy: Springer, ott. 2013.