



Università
di Catania

Dipartimento
di Fisica
e Astronomia
"Ettore Majorana"



CORSO DI LAUREA IN FISICA

Appunti di
OSCILLAZIONI E ONDE

Abstract

Anno Accademico 2023/2024

Prefazione

[BOZZA] Ho deciso di stendere questa trascrizione in L^AT_EX degli appunti del corso Oscillazioni e Onde tenuto dal prof. Fabio Siringo durante l'A.A. 2023/2024 con l'intento di avere una raccolta organica e quanto più chiara possibile del materiale, vista l'attuale assenza di un libro di testo per il programma svolto. Nel corso della scrittura ho voluto prendermi la libertà di approfondire, ove lo ritenessi necessario ai fini della completezza e della chiarezza, con materiale preso da testi di Meccanica e di Matematica.

Tengo particolarmente a sottolineare la natura personale degli appunti che non vogliono sostituirsi alle lezioni tenute dal docente o ai libri di testo, tuttavia invito chiunque lo ritenesse utile a farne un libero uso con la consapevolezza di quanto appena detto.

A tal proposito, in caso il lettore dovesse riscontrare errori o volesse suggerire delle modifiche, è pregato di contattarmi presso:

`pappalardoaurelio@gmail.com`

Al seguente link è possibile accedere alla versione più aggiornata degli appunti:

`https://github.com/ImAure/appunti-onde/blob/main/main.pdf`

Ultima modifica: 8 aprile 2024

Programma del Corso

[BOZZA] Ciao, qui andrà il programma

Indice

1	L'Oscillatore Armonico	1
1	Introduzione	1
2	Oscillatore Armonico Unidimensionale	2
3	Oscillatore Armonico Bidimensionale	2
3.1	Oscillatore isotropo	3
3.2	Oscillatore anisotropo	3
4	Oscillatore a tre Gradi di Libertà	5
4.1	Tre masse a estremi liberi	6
4.2	Tre masse con condizioni periodiche al contorno	7
5	Oscillatore a N Gradi di Libertà	8
5.1	Ricerca dei modi normali di oscillazione	8
5.2	Risoluzione delle equazioni del moto	12
5.3	Onde piane monocromatiche	13
5.4	Relazione di dispersione	13
A	Cenni sui Numeri Complessi	15
1	Costruzione di \mathbb{C}	15
1.1	Forme e proprietà dei numeri complessi	15
1.2	Forma trigonometrica ed esponenziale	16
2	Operazioni in \mathbb{C}	17

Capitolo 1

L'Oscillatore Armonico

1 Introduzione

Dato un sistema fisico le cui configurazioni sono identificate dalle coordinate pure q^α , dalla meccanica è noto che le configurazioni di equilibrio stabile si hanno in corrispondenza dei minimi del potenziale $V(q^\alpha)$. Assumendo che V sia una funzione almeno di classe C^2 e che ammetta minimo, è possibile effettuare una traslazione che ponga l'origine del S.d.R.¹ coincidente col punto di minimo e sviluppare in serie di Taylor/Mac Laurin il potenziale, arrestandosi al termine di secondo grado. Si ottiene dunque:

$$V(q^\alpha) = V(\mathbf{0}) + \left. \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} \right|_{\mathbf{0}} q^\alpha + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \right|_{\mathbf{0}} q^\alpha q^\beta + R(q^\alpha).$$

Ricordando che il potenziale è definito a meno di una costante additiva e che all'equilibrio $\left. \frac{\partial V}{\partial q^\alpha} \right|_{\mathbf{0}} = 0$, e trascurando il termine infinitesimo, si può riscrivere il potenziale come[2]:

$$V(q^\alpha) = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q^\alpha \partial q^\beta} \right|_{\mathbf{0}} q^\alpha q^\beta, \quad (1.1)$$

che non è altro che una forma quadratica del tipo $\frac{1}{2} [\underline{x}^\top H_V(\mathbf{0}) \underline{x}]$, con $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ un punto e $H_V(\mathbf{0})$ la matrice Hessiana di V calcolata in $\mathbf{0}$.

Ovviamente questo è soltanto un modello approssimato che può essere applicato in un intorno del minimo. Se ci si allontana troppo, le discordanze tra il modello e le misure che si riscontrano prendono il nome di *effetti anarmonici*.

¹Sistema di riferimento

2 Oscillatore Armonico Unidimensionale

Applichiamo quanto detto al caso unidimensionale. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto, $V : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $x_0 \in A$ un punto di minimo per V . La (1.1) diventa:

$$V(x - x_0) = \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x_0} (x - x_0)^2;$$

ponendo $u = x - x_0$, si effettua la traslazione che pone il punto di minimo nell'origine, per cui si ottiene:

$$V(u) = \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_0 u^2.$$

A questo punto risulta evidente la somiglianza con il potenziale della forza elastica. Ponendo $k = \frac{d^2 V}{dx^2} \Big|_{x_0}$ e prendendone il "gradiente" (derivata prima) cambiato di segno, si ottiene l'espressione della forza elastica tramite la legge di Hooke:

$$V(u) = \frac{1}{2} k u^2 \implies \mathbf{F}(\mathbf{u}) = -\frac{dV}{dx} \hat{\mathbf{i}} = -k \mathbf{u},$$

da cui l'equazione del moto: $m\ddot{u} = -ku$, che è lineare omogenea del secondo ordine.

Ponendo $\frac{k}{m} = \omega^2$, si può scrivere $\ddot{u} = -\omega^2 u$, di cui due soluzioni linearmente indipendenti sono $\cos(\omega t)$ e $\sin(\omega t)$. L'integrale generale è quindi

$$u(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, o alternativamente, ponendo $c_1 = A \cos \phi$ e $c_2 = -A \sin \phi$, ancora con $A, \phi \in \mathbb{R}$,

$$u(t) = A \cos(\omega t + \phi).$$

In tal caso, A si dice *ampiezza*, ω si dice *pulsazione* o *frequenza angolare* e $\omega t + \phi$ si dice *fase*.

3 Oscillatore Armonico Bidimensionale

Proviamo ora passo passo ad aumentare il numero di dimensioni, per semplicità iniziamo da 2. Quando vi è più di un grado di libertà, è importante distinguere i casi in base alle simmetrie che il sistema presenta. Se il potenziale è invariante per rotazioni, diciamo che l'oscillatore armonico è *isotropo*, altrimenti lo diciamo *anisotropo*.

3.1 Oscillatore isotropo

Come prima, supponiamo di avere $V : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definito dalla legge:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2),$$

ove si è usata la relazione $k = m\omega^2$. Notiamo subito che il potenziale è invariante per rotazioni in quanto le curve equipotenziali sono circonferenze centrate nell'origine². Di conseguenza V si spezza facilmente in:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2y^2$$

e derivando si ottengono quindi le due equazioni del moto già disaccoppiate.

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2x \\ \ddot{y} = -\omega^2y \end{cases}$$

le cui soluzioni sono nuovamente le funzioni $x(t) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$ e $y(t) = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$, definite a meno di quattro costanti arbitrarie. Fissando le condizioni iniziali: $x(0)$, $\dot{x}(0)$, $y(0)$ e $\dot{y}(0)$, è possibile trovare l'unica soluzione del problema di Cauchy.

3.2 Oscillatore anisotropo

Affrontiamo adesso il caso di un potenziale che non presenti simmetrie per rotazione, ad esempio:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{1}{2}m\omega^2y^2 + 2\gamma xy, \quad \gamma > 0.$$

Diagonalizzazione del potenziale

Come è noto dalla (1.1), è possibile riscrivere il potenziale come forma quadratica:

$$\frac{1}{2}m\omega^2 \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma}{m\omega^2} \\ \frac{\gamma}{m\omega^2} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Poichè la matrice dei coefficienti è simmetrica, per il teorema spettrale è diagonalizzabile ed esiste quindi un cambio di coordinate che pone la forma quadratica in forma canonica, disaccoppiando di conseguenza le equazioni del moto.

²Immaginiamo di trovarci già nel sistema di riferimento scelto in modo da collocare un punto di minimo di V nell'origine, se così non fosse, è sempre possibile ricondursi a quel caso con una traslazione

Le nuove coordinate sono quelle identificate da una base (ortonormale) di autovettori della matrice, cerchiamo quindi gli zeri del polinomio caratteristico:

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & \frac{\gamma}{m\omega^2} \\ \frac{\gamma}{m\omega^2} & 1 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 - \frac{\gamma^2}{m^2\omega^4} = 0 \implies \lambda_{\pm} = 1 \pm \frac{\gamma}{m\omega^2}.$$

Calcoliamo ora gli autovettori³ Q_{\pm} associati agli autovalori λ_{\pm} , risolvendo i due sistemi:

$$\begin{cases} (1 - \lambda_{\pm})x + \frac{\gamma}{m\omega^2}y = 0 \\ (1 - \lambda_{\pm})y + \frac{\gamma}{m\omega^2}x = 0 \end{cases}$$

e ottenendo quindi le componenti degli autovettori, $[Q_{\pm}] = [x, \pm x]$. Scegliamo quindi due autovettori normalizzati:

$$Q_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Q_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e la conseguente matrice di rotazione

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{tale che} \quad \begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma}{m\omega^2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\gamma}{m\omega^2} \end{bmatrix} = P^{\top} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\gamma}{m\omega^2} \\ \frac{\gamma}{m\omega^2} & 1 \end{bmatrix} P.$$

Troviamo ora e_1 ed e_2 nelle nuove coordinate tramite i due sistemi vettoriali:

$$e_1 = xQ_+ + yQ_- \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$e_2 = xQ_+ + yQ_- \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

da cui $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_+ + Q_-)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_+ - Q_-)$. Trasformando le coordinate si ottiene il nuovo potenziale:

$$V(Q_+, Q_-) = \frac{1}{2}m\omega^2(Q_+^2 + Q_-^2) + \frac{\gamma}{2}(Q_+^2 - Q_-^2),$$

che si spezza facilmente in:

$$V(Q_+, Q_-) = \frac{1}{2}m\Omega_+^2 Q_+^2 + \frac{1}{2}m\Omega_-^2 Q_-^2,$$

avendo fatto la posizione $\Omega_{\pm}^2 = \omega^2(1 \pm \frac{\gamma}{m\omega^2})$.

³O meglio, le loro componenti rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^2 : $\{e_1, e_2\}$

Equazioni del moto

A questo punto trovare e risolvere le equazioni del moto è banale:

$$\ddot{Q}_{\pm} = -\Omega_{\pm}^2 Q_{\pm} \implies Q_{\pm}(t) = A_{\pm} \cos(\Omega_{\pm} t + \phi_{\pm}),$$

e attraverso la trasformazione inversa è possibile ricavare le $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{Q_+(t) + Q_-(t)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_+ \cos(\Omega_+ t + \phi_+) + A_- \cos(\Omega_- t + \phi_-)] \\ y(t) &= \frac{Q_+(t) - Q_-(t)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_+ \cos(\Omega_+ t + \phi_+) - A_- \cos(\Omega_- t + \phi_-)] \end{aligned}$$

Dove, come ci aspettavamo, A_{\pm} e ϕ_{\pm} sono quattro costanti reali determinabili conoscendo le condizioni iniziali.

Energia cinetica

Avendo operato una rotazione che non altera la metrica, ci aspettiamo che l'energia cinetica T resti invariata da un S.d.R. all'altro.

Dalla definizione $T = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}\|^2$, sviluppando il prodotto scalare otteniamo:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

Derivando le equazioni di trasformazione invece troviamo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{Q_+ + Q_-}{\sqrt{2}} = \frac{\dot{Q}_+ + \dot{Q}_-}{\sqrt{2}} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{Q_+ - Q_-}{\sqrt{2}} = \frac{\dot{Q}_+ - \dot{Q}_-}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

e sostituendo nell'energia cinetica:

$$T = \frac{1}{2} m \left[\frac{(\dot{Q}_+ + \dot{Q}_-)^2}{2} + \frac{(\dot{Q}_+ - \dot{Q}_-)^2}{2} \right] = \frac{1}{2} m (\dot{Q}_+^2 + \dot{Q}_-^2),$$

che prova quanto affermato.

4 Oscillatore a tre Gradi di Libertà

Proviamo ora a generalizzare ulteriormente quanto detto fin'ora per sistemi che abbiano più di due gradi di libertà. Iniziamo considerando il caso di tre masse legate da molle ideali con estremi liberi, per poi affrontare il caso con condizioni armoniche al contorno e successivamente generalizzare a n masse.

4.1 Tre masse a estremi liberi

Prendiamo in esame un sistema fisico formato da tre masse uguali m vincolate a muoversi sull'asse x , collegate da due molle di costante $k = m\omega^2$.

Le configurazioni di questo sistema fisico sono identificate dalle coordinate generalizzate $q^\alpha = \{x, y, z\}$ che indicano la posizione delle tre masse rispetto all'origine. Sul sistema agiscono due forze, entrambe forze elastiche, che dipendono dalle due distanze $(y - x)$ e $(z - y)$. Possiamo facilmente calcolare il potenziale elastico delle molle:

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &= \frac{1}{2}m\omega^2(x - y)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(y - z)^2 = \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 - 2xy + 2y^2 - 2yz + z^2), \end{aligned}$$

la cui matrice associata è $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Procediamo come precedentemente per diagonalizzare il potenziale:

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda(1 - \lambda)(\lambda - 3).$$

Gli autovalori sono $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_3 = 3$. Dal calcolo degli autovettori associati otteniamo le componenti dei vettori normalizzati

$$q_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con cui possiamo costruire la matrice di rotazione P tale che $\det P = 1$ contenente q_3 , q_1 e q_0 sulle colonne, che diagonalizza il potenziale:

$$D = P^\top B P \iff P D P^\top = B.$$

Sostituendo B nella forma quadratica:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2}m\omega^2 \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} P B P^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

dove, come prima è stato mostrato in maniera più esplicita, $P^\top \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ trasforma le coordinate, il potenziale assume la forma:

$$V(q_3, q_1, q_0) = \frac{1}{2}m\omega^2 \begin{pmatrix} q_3 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_3 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}m\omega^2(3q_3^2 + q_1^2)$$

e, ponendo di nuovo $\Omega_3^2 = 3\omega^2$ e $\Omega_1^2 = \omega^2$, otteniamo le equazioni del moto:

$$\begin{cases} \ddot{q}_0 = 0 \\ \ddot{q}_1 = -\Omega_1^2 q_1 \\ \ddot{q}_3 = -\Omega_3^2 q_3 \end{cases} \iff \begin{cases} q_0(t) = v_0 t + s_0 \\ q_1(t) = A_1 \cos(\Omega_1 t + \phi_1) \\ q_3(t) = A_3 \cos(\Omega_3 t + \phi_3) \end{cases}$$

Applicando la trasformazione di coordinate inversa data da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} q_3 \\ q_1 \\ q_0 \end{pmatrix}$

possiamo trovare $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v_0 t + s_0) + \frac{A_1}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_1 t + \phi_1) + \frac{A_3}{\sqrt{6}} \cos(\Omega_3 t + \phi_3) \\ y(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v_0 t + s_0) - \frac{2A_3}{\sqrt{6}} \cos(\Omega_3 t + \phi_3) \\ z(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}(v_0 t + s_0) - \frac{A_1}{\sqrt{2}} \cos(\Omega_1 t + \phi_1) + \frac{A_3}{\sqrt{3}} \cos(\Omega_3 t + \phi_3) \end{aligned}$$

Come ci potevamo aspettare dalla presenza di tre equazioni lineari del secondo ordine, le equazioni del moto sono definite a meno di sei costanti arbitrarie: v_0 , s_0 , A_1 , ϕ_1 , A_3 e ϕ_3 . È inoltre importante sottolineare il significato fisico legato alla presenza di $\lambda_0 = 0$ tra gli autovalori: possiamo notare che l'equazione del moto associata alla coordinata q_0 costituisce un moto rettilineo uniforme, e non oscillatorio, che suggerisce una simmetria del sistema per traslazioni.

A questo punto risulta utile introdurre il concetto di *modi normali di oscillazione*.

4.2 Tre masse con condizioni periodiche al contorno

Supponiamo adesso di avere tre masse disposte come nell'esempio precedente ma con l'ulteriore condizione che la prima e la terza massa interagiscano per mezzo di una terza molla di caratteristiche uguali alle altre due. Questa situazione fisica può essere meglio visualizzata come se sia le masse che le molle fossero vincolate a scorrere su di una circonferenza rigida γ priva di attrito.

Anche in questo caso possiamo ricorrere alle coordinate pure x , y e z che stavolta rappresentano le ascisse curvilinee condotte da un arbitrario punto $O \in \gamma$ fino a individuare la posizione delle tre masse. Il potenziale, similmente a prima, si presenta come:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\omega^2[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] = \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}m\omega^2 \underline{x}^\top B \underline{x}. \end{aligned}$$

Eseguiamo il solito procedimento per diagonalizzare B :

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda-3)^2 = 0,$$

che dà gli autovalori $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_3 = 3$ doppio. Gli autovettori normalizzati che se ne ricavano sono:

$$q_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad q_{3,1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5 Oscillatore a N Gradi di Libertà

Generalizziamo definitivamente il problema considerando il caso di una catena di N masse collegate a due a due da molle di costante elastica $k = m\omega^2$ con condizioni periodiche al contorno.

Supponiamo per comodità N pari, denotiamo con a il passo reticolare, con $x_n = na$ la posizione di equilibrio dell' n -esima massa ($n = 0, \dots, N-1$) e con $L = Na$ la lunghezza della catena. Siano inoltre le funzioni ζ_n la dislocazione dell' n -esima massa dalla posizione di equilibrio x_n . Richiedere che le condizioni al contorno siano periodiche vuol dire supporre che l'ultima massa possa interagire con la prima, come se la catena formasse un cerchio. In termini matematici questo si traduce in:

$$x_{n+N} = x_n + L \equiv x_n \quad (1.2)$$

$$\zeta_{n+N} \equiv \zeta_n \quad (1.3)$$

Il potenziale di un tale sistema ha forma:

$$V = \frac{1}{2} m\omega^2 \sum_n (\zeta_{n+1} - \zeta_n)^2. \quad (1.4)$$

5.1 Ricerca dei modi normali di oscillazione

A questo punto desideriamo provare che le seguenti relazioni costituiscono il cambio di coordinate che permette di passare dalle ζ_n alle Q_q ove il potenziale è diagonalizzato:

$$\zeta_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{iqx_n} Q_q \quad (1.5)$$

$$Q_q = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{-iqx_n} \zeta_n \quad (1.6)$$

Allo scopo di dileguare eventuali perplessità, vorrei giustificare rapidamente la presenza di esponenziali complessi nelle relazioni appena enunciate. Ci

si potrebbe aspettare infatti, che le trasformazioni da cercare siano simili a quelle viste nei casi semplificati a due e tre dimensioni: somme di funzioni trigonometriche con opportuni coefficienti. Volendo, potremmo affrontare questo problema proprio in questo modo, se non fosse che ciò renderebbe i calcoli ben più tedious, quando invece operare con gli esponenziali complessi elimina questo problema. Infatti, basta tenere a mente che $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ e che di conseguenza ci basterà prendere la parte reale della soluzione per raggiungere il nostro obiettivo. Sostanzialmente stiamo affrontando un problema di moto armonico in \mathbb{R} risolvendo il corrispettivo problema di ‘moto circolare’ in \mathbb{C} e ‘proiettandolo’ su \mathbb{R} . Si rimanda all’appendice A per qualche cenno in più ai numeri complessi.

Osserviamo subito che da (1.2) e (1.5) è possibile conoscere l’intervallo in cui variano le q :

$$e^{iqx_{n+N}} = e^{iqx_n} \iff e^{iqna} e^{iqL} = e^{iqna} \iff e^{iqL} = 1,$$

per cui deve essere $qL = 2m\pi$, con $m \in \mathbb{Z}$. Sostituendo L otteniamo:

$$q = \frac{2m\pi}{L} = \frac{2\pi}{a} \frac{m}{N} \quad (1.7)$$

Dal momento che i gradi di libertà sono N , prevediamo che siano presenti proprio N modi normali al variare di q , per cui possiamo scegliere N diversi valori di q al variare di $m \in \mathbb{Z}$. Risulta opportuna la scelta di un intervallo simmetrico $m \in \left[-\frac{N}{2}; \frac{N}{2}\right]$, in modo che si abbia $q \in \left[-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a}\right]$. Per compattezza della notazione, questo fatto sarà omesso nella scrittura degli indici della sommatoria laddove ciò non possa causare ambiguità.

Prima di proseguire oltre con la risoluzione del problema, antepriamo dei risultati utili:

Lemma 1.1. *Sotto le ipotesi del problema valgono le seguenti relazioni:*

$$\sum_n e^{iqx_n} = N\delta_{q,0} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (1.8)$$

$$\sum_q e^{-iqx_n} = N\delta_{n,0} \quad q \in \left[-\frac{\pi}{a}; \frac{\pi}{a}\right] \quad (1.9)$$

ove $\delta_{\alpha,\beta}$ è la Delta di Kronecker.

Dimostrazione. Proviamo la (1.8).

Se $q = 0$, banalmente:

$$\sum_{n=0}^{N-1} 1 = N.$$

Se $q \neq 0$, osserviamo che si può scrivere:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{iqx_n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{iqna} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{iqa})^n = \frac{1 - e^{iqNa}}{1 - e^{iqa}}$$

essendo il termine generale della successione delle somme parziali di una serie geometrica di ragione e^{iqa} . Sostituendo la (1.7) si vede subito che tale somma risulta 0.

Allo stesso modo si prova la (1.9). \square

Verifichiamo adesso che le trasformazioni (1.5) e (1.6) sono l'una l'inversa dell'altra mostrando che la loro composizione restituisce l'identità:

$$\zeta_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{iqx_n} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=0}^e N - 1 e^{-iqx_p} \zeta_p \right) = \frac{1}{N} \sum_{p,q} e^{iq(x_n - x_p)} \zeta_p.$$

Poiché ζ_p non dipende da q , è possibile estrarlo dalla rispettiva sommatoria:

$$\zeta_n = \frac{1}{N} \sum_p \zeta_p \left[\sum_q e^{iq(x_n - x_p)} \right]$$

dove per il Lemma 1.1 si può scrivere:

$$\zeta_n = \frac{1}{N} \sum_p \zeta_p \delta_{n,p} = \zeta_n$$

che è appunto l'identità.

Ci chiediamo quindi se questo cambio di coordinate ci fornisca i modi normali di oscillazione del sistema, diagonalizzando (1.4). Studiamo la seguente quantità:

$$\begin{aligned} \zeta_n^2 &= \frac{1}{N} \left(\sum_q e^{iqx_n} Q_q \right)^2 = \frac{1}{N} \left(\sum_q e^{iqx_n} Q_q \right) \left(\sum_{q'} e^{iq'x_n} Q_{q'} \right) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{q,q'} Q_q Q_{q'} e^{i(q+q')x_n}, \end{aligned}$$

sommiamo quindi su n e applichiamo ancora il Lemma 1.1 dopo aver raccolto i termini comuni:

$$\sum_n \zeta_n^2 = \frac{1}{N} \sum_{q,q'} Q_q Q_{q'} \sum_n e^{i(q+q')x_n} = \frac{1}{N} \sum_{q,q'} Q_q Q_{q'} N \delta_{q,-q'} = \sum_q Q_q Q_{-q}.$$

Prima di proseguire ulteriormente, facciamo delle considerazioni utili. Ricordiamo che le ζ_n sono funzioni reali e quindi deve essere $\zeta_n^* = \zeta_n$.⁴ Inoltre, dalla (1.5), possiamo ricavare che ζ_n^* ha forma:

$$\zeta_n^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q e^{iqx_n} Q_q^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{-q} e^{iqx_n} Q_{-q}^*,$$

⁴Con ζ_n^* indichiamo il complesso coniugato di ζ_n

dove, nello scrivere la seconda uguaglianza, è stato sfruttato il fatto che l'indice q è saturato e quindi nulla vieta di 'cambiargli il nome' in $-q$. Segue naturalmente:

$$\zeta_n = \zeta_n^* \iff Q_q = Q_{-q}^* \iff Q_{-q} = Q_q^*. \quad (1.10)$$

Supponendo $Q = \alpha(q) + i\beta(q)$ e sostituendo quanto trovato nei conti precedenti si ottiene:

$$\sum_n \zeta_n^2 = \sum_q Q_q Q_q^* = \sum_q [\alpha^2(q) + \beta^2(q)] \quad (1.11)$$

A questo punto possiamo scrivere per esteso il potenziale, richiamando la (1.4):

$$V = \frac{1}{2} m \omega^2 \sum_n (\zeta_{n+1} - \zeta_n)^2$$

Valutiamo la quantità tra parentesi:

$$\zeta_{n+1} - \zeta_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q Q_q (e^{iqx_{n+1}} - e^{iqx_n}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q Q_q e^{iqx_n} (e^{iqa} - 1)$$

e inseriamola nel potenziale V che, una volta sviluppato il quadrato similmente a prima e applicata la (1.10), diventa:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \frac{m \omega^2}{N} \sum_n \sum_{q, q'} e^{iqx_n} (e^{iqa} - 1) e^{iq'x_n} (e^{iq'a} - 1) Q_q Q_{q'} = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 \sum_{q, q'} \delta_{q, -q'} (e^{iqa} - 1) (e^{iq'a} - 1) Q_q Q_{q'} = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 \sum_q (e^{iqa} - 1) (e^{-iqa} - 1) Q_q Q_{-q} = \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 \sum_q (e^{iqa} - 1) (e^{-iqa} - 1) Q_q Q_q^* \end{aligned}$$

Da cui l'espressione più sintetica ed elegante del potenziale:

$$V = \frac{1}{2} m \omega^2 \sum_q (e^{iqa} - 1) (e^{-iqa} - 1) \|Q_q\|^2 \quad (1.12)$$

che non è altro che una forma quadratica nelle variabili Q_q la cui matrice dei coefficienti è diagonale e contiene gli autovalori $(e^{iqa} - 1)(e^{-iqa} - 1)$, ciascuno associato all'autovettore Q_q corrispondente. Chiamiamo i vettori di base di queste nuove coordinate, Q_q , *modi normali di oscillazione* del sistema. Queste coordinate in cui il potenziale è diagonale costituiscono diversi 'modi' di oscillare del sistema fisico, ciascuno linearmente indipendente dagli altri. Conseguenza di ciò è che qualunque moto periodico del sistema può essere espresso come combinazione lineare dei modi normali.

5.2 Risoluzione delle equazioni del moto

Per semplificare la forma del potenziale, moltiplichiamo e dividiamo il risultato ottenuto per $4i^2 e^{i\frac{qa}{2}}$. Applicando le formule di Eulero otteniamo:

$$V = \frac{-4}{2} m\omega^2 \sum_q \frac{e^{i\frac{qa}{2}} - e^{-i\frac{qa}{2}}}{2i} \frac{e^{-i\frac{qa}{2}} - e^{i\frac{qa}{2}}}{2i} \|Q_q\|^2 = 2m\omega^2 \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right) \|Q_q\|^2$$

da cui le N equazioni del moto:

$$-\frac{\partial V}{\partial Q_q} = m\ddot{Q}_q \iff \ddot{Q}_q = 4\omega^2 \sin^2\left(\frac{qa}{2}\right) Q_q = -\Omega_q^2 Q_q,$$

ponendo $\Omega_q = 2\omega \sin\left(\frac{qa}{2}\right)$, che hanno soluzioni del tipo $Q_q(t) = e^{\pm i\Omega_q t}$. Le generiche soluzioni, presi $A_q^\pm \in \mathbb{C}$, possono essere scritte come: $Q_q(t) = A_q^+ e^{i\Omega_q t} + A_q^- e^{-i\Omega_q t}$ e, ponendo $A_q^\pm = \rho_q^\pm e^{i\phi_q^\pm}$:

$$Q_q(t) = \rho_q^+ e^{i(\Omega_q t + \phi_q^+)} + \rho_q^- e^{i(-\Omega_q t + \phi_q^-)}.$$

Proviamo a sostituire quest'ultima relazione nella (1.5):

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \left[\rho_q^+ e^{i(qx_n + \Omega_q t + \phi_q^+)} + \rho_q^- e^{i(qx_n - \Omega_q t + \phi_q^-)} \right].$$

Ricordiamo adesso che stiamo sommando su un intervallo simmetrico e quindi a ogni valore di q corrisponde un $-q$. Per la (1.10), possiamo riscrivere la somma per $q \geq 0$, e tenere conto dei termini con indice $-q$ separatamente. Tuttavia facendo ciò:

- $\rho_{-q}^\pm = \rho_q^\pm$ in quanto è il modulo di un numero complesso ed è uguale al modulo del suo coniugato;
- $\phi_{-q}^- = -\phi_q^-$ in quanto l'argomento di un numero complesso cambia segno passando al coniugato;
- $\Omega_{-q} = -\Omega_q$ in quanto Ω_q dipende dal seno di q , che è una funzione dispari.

Segue che ognuno dei due esponenziali della sommatoria si spezza in:

$$\rho_q^\pm e^{i(qx_n \pm \Omega_q t + \phi_q^\pm)} + \rho_q^\pm e^{i(-qx_n \mp \Omega_q t - \phi_q^\pm)},$$

che non è altro che la somma di due complessi coniugati, la quale restituisce la parte reale del numero complesso. In definitiva, tenuto conto di ciò, la (1.5) diventa:

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \left[\rho_q^+ \cos(qx_n + \Omega_q t + \phi_q^+) + \rho_q^- \cos(qx_n - \Omega_q t + \phi_q^-) \right] \quad (1.13)$$

5.3 Onde piane monocromatiche

Le funzioni coseno che compaiono nel risultato precedente appartengono a una classe di funzioni particolari che meritano qualche parola in più. Chiamiamo le funzioni $A \cos(qx \pm \omega t + \phi)$ *onde piane monocromatiche*, le quali vengono dette *progressive* nel caso del segno $-$ e *regressive* nel caso del segno $+$. Introduciamo anche della nomenclatura utile[1]:

- q è il modulo del *vettore d'onda*;
- ω è la *frequenza angolare* o *pulsazione* dell'onda;
- A è l'*ampiezza* dell'onda;
- $qx \pm \omega t + \phi$ è la *fase* dell'onda.

Definiamo inoltre delle quantità utili al resto della trattazione:

- $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è detto *periodo* e rappresenta il tempo necessario a un punto fissato nello spazio affinché si ripeta la stessa fase;
- $\lambda = \frac{2\pi}{q}$ è la *lunghezza d'onda* e, fissato il tempo, rappresenta la distanza tra due punti con la stessa fase;
- $v = \frac{\omega}{q} = \frac{\lambda}{T}$ è detta *velocità di propagazione* e rappresenta la velocità con cui un punto a fase fissata si sposta nello spazio.

5.4 Relazione di dispersione

Appendice A

Cenni sui Numeri Complessi

I numeri complessi sono la naturale estensione del campo reale $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ che pur sacrificando la relazione d'ordine permettono di avere una struttura algebricamente chiusa.

1 Costruzione di \mathbb{C}

Sia $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, poniamo $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ e siano definite le operazioni:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & (z_1, z_2) &\mapsto (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & (z_1, z_2) &\mapsto (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

Chiamiamo $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ la struttura così costruita, che si dimostra facilmente essere un campo.

1.1 Forme e proprietà dei numeri complessi

Definiamo *modulo* di un numero complesso z la quantità:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}.$$

Forma algebrica

Osserviamo inoltre che l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ è isomorfo ad \mathbb{R} , per cui poniamo $x = (x, 0)$. Sia inoltre $i = (0, 1)$, da cui:

$$\begin{aligned} y \cdot i &= (y, 0) \cdot (0, 1) = (0, y) := iy \\ i^2 &= (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1 \end{aligned}$$

In questo modo ogni numero complesso $z = (x, y)$ può essere scritto nella sua *forma algebrica* $z = x + iy$, infatti:

$$x + iy = (x, 0) + (0, y) = (x, y)$$

Dato un numero complesso $z = x + iy$, definiamo:

- $\operatorname{Re} z = x$, detta *parte reale* di z ;
- $\operatorname{Im} z = iy$, detta *parte immaginaria* di z ;
- $\bar{z} = x - iy$, detto *complesso coniugato* di z .

Vale inoltre la proprietà $|z| = z\bar{z}$.

1.2 Forma trigonometrica ed esponenziale

Come noto, è possibile rappresentare i punti del piano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, escluso $(0, 0)$ in coordinate polari, fissando le due coordinate ρ , detto *raggio polare*, e θ , detto *angolo polare*.

Pensando ai numeri complessi come punti del piano, si osserva:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta,$$

da cui:

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

che viene detta *forma trigonometrica* di z . Segue naturalmente che:

- $\rho = |z|$;
- θ è l'angolo che risolve $x = \rho \cos \theta$ e $y = \rho \sin \theta$;
- $\bar{z} = \rho[\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)] = \rho(\cos \theta - i \sin \theta)$.

Consideriamo ora la quantità $e^{i\theta}$ e dimostriamo che rappresenta ancora un numero complesso. È possibile interpretare l'esponenziale come una somma infinita di termini, esprimendo la funzione e^z come serie di Taylor centrata in 0:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} i^n \frac{\theta^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

dove è evidente la presenza degli sviluppi di seno e coseno, per cui:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Segue che qualunque numero complesso $z \neq 0$ può essere espresso come:

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}$$

che viene detta *forma esponenziale* del numero complesso.

Segue dalle precedenti la proprietà $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$.

2 Operazioni in \mathbb{C}

Per poter operare al meglio coi numeri complessi, introduciamo dei metodi per eseguire con facilità le operazioni di elevamento a potenza ed estrazione di radice. Consideriamo due numeri $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$. Il loro prodotto è:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Da ciò deduciamo che per qualunque $z \neq 0$ e $k \in \mathbb{Z}$, possiamo scrivere:

$$z^k = \rho^k e^{ik\theta} = \rho^k (\cos k\theta + i \sin k\theta)$$

Bibliografia

- [1] Sergio Focardi et al. *Fisica generale. Meccanica e termodinamica*. it. Gen. 2014.
- [2] Herbert Goldstein, Charles Poole e John Safko. *Meccanica classica*. it. 2005.