Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 1. Hausaufgabe

# Differential- und Integralrechnung für Informatiker

**(H 1)**

a)

| A | US($A$) | OS($A$) | min $A$ | max $A$ | inf $A$ | sup $A$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $(-\infty, 1) \cup \{10\}$ | $\emptyset$ | $[10, \infty)$ | $\nexists$ | 10 | $-\infty$ | 10 |
| $\mathbb{Q}$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $-\infty$ | $\infty$ |
| $(\sqrt{10}, \infty) \cap \mathbb{N}$ | $(-\infty, 4]$ | $\emptyset$ | 4 | $\nexists$ | 4 | $\infty$ |
| $(-\infty, \sqrt{5}) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ | $\emptyset$ | $[\sqrt{5}, \infty)$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $-\infty$ | $\sqrt{5}$ |
| $(-\sqrt{30}, \sqrt{30}) \cap \mathbb{Z}$ | $(-\infty, -5]$ | $[5, \infty)$ | -5 | 5 | -5 | 5 |
| $[\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$ | $(-\infty, \sqrt{2}]$ | $\emptyset$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\sqrt{2}$ | $\infty$ |
| $(-\infty, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}$ | $\emptyset$ | $[1, \infty)$ | $\nexists$ | 1 | $-\infty$ | 1 |
| $[\sqrt{6}, \infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ | $(-\infty, \sqrt{6}]$ | $\emptyset$ | $\sqrt{6}$ | $\nexists$ | $\sqrt{6}$ | $\infty$ |
| $\{x \in \mathbb{R} \mid x^6 + 4x^3 + 4 \leq 0\}$ | $(-\infty, -\sqrt[3]{2}]$ | $[-\sqrt[3]{2}, \infty)$ | $-\sqrt[3]{2}$ | $-\sqrt[3]{2}$ | $-\sqrt[3]{2}$ | $-\sqrt[3]{2}$ |

Für die letzte Mengen beachte man, dass

$$x^6 + 4x^3 + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (x^3 + 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^3 = -2 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}.$$

b) Z. B. $M = (-\infty, 0] \cup (1, \pi)$ oder $M = (-\infty, \pi) \cap \mathbb{Q}$.

c1) $[1, 7] \notin \mathcal{U}(7)$, weil $\nexists r > 0$ mit $B_r(7) = (-r + 7, r + 7) \subseteq [1, 7]$, da, für alle $r > 0$, die $r$-Umgebung $B_r(7)$ von 7 auch Zahlen enthält, die $> 7$ sind, also $B_r(7) \not\subseteq [1, 7]$.

c2) $[6, \infty) \cap \mathbb{N} \notin \mathcal{U}(7)$, weil $\nexists r > 0$ mit $B_r(7) = (-r + 7, r + 7) \subseteq [6, \infty) \cap \mathbb{N}$, da, für alle $r > 0$, die $r$-Umgebung $B_r(7)$ von 7 (wegen der Dichtheitseigenschaft von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) auch irrationale Zahlen enthält, also $B_r(7) \not\subseteq [6, \infty) \cap \mathbb{N}$.

c3) $\mathbb{Q} \cup (5, 8) \in \mathcal{U}(7)$, weil $B_1(7) = (6, 8) \subseteq \mathbb{Q} \cup (5, 8)$.

c4) $\mathbb{Q} \notin \mathcal{U}(7)$, weil $\nexists r > 0$ mit $B_r(7) = (-r + 7, r + 7) \subseteq \mathbb{Q}$, da, für alle $r > 0$, die $r$-Umgebung $B_r(7)$ von 7 (wegen der Dichtheitseigenschaft von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) auch irrationale Zahlen enthält, also $B_r(7) \not\subseteq \mathbb{Q}$.