Dr. Christian Săcărea

"Babeş–Bolyai" Universität, Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Wintersemester 2020/2021

Lösungshinweise zur 9. Übung

Logik für Informatiker

GRUPPENÜBUNGEN:

(G 1)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{f/1, g/2, c/0\}$ und $\Pi = \{p/1, q/3, = /2\}$. Ferner sei X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$. Markiere durch Ankreuzen, welcher der folgenden Ausdrücke über Σ und X zu welchem der genannten Konzepten gehört.

Hinweis: Es können mehre Spalten zutreffen, d.h. es ist erlaubt mehr als nur 1 Kreuz pro Zeile zu setzen.

Ausdruck	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	Nichts
$\exists x \forall y q(c, y, x)$					X	
$\exists x c = x = y$						X
$\exists x p\,(p(x))$						X
$\forall x g(c, x)$						X
$\forall x \forall y\,(p(x, y) \vee q(x, y, c))$						X
$\neg \exists x c = c$					X	
$\neg f(x)$						X
$\neg\,(g\,(x, f(x)))$						X
$c = cf(x) \wedge q(c, c, x)$						X
c	X					
$f(c) = c$		X	X	X	X	
$f(c) = p\,(f(c))$						X
$g\,(g\,(c, f(x))\,, f((f(y)))$	X					
$p(x) \wedge \neg x = a$					X	
$q(c, f(c), x)$		X	X	X	X	
$x = f(x) \vee q(x, x, x)$				X	X	

Bilde selbst Terme, Atome, Literale und Formeln über diese Signatur. Begründe die Konstruktion in jedem einzelnen Fall.

(G 2)

Sei $\sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{vater/1, mutter/1\}$ und $\Pi = \{detektiv/1, verbrecher/1, schlau/1, frustriert/1, traurig/1, verfolgt/2, stolzAuf/2, fängt/2\}$. Ferner sei X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$.

Die Bedeutung der Prädikate entspricht dem normalen Sprachgebrauch. Formalisieren Sie mithilfe der Prädikatenlogik:

a) Jeder Detektiv verfolgt einen Verbrecher.

b) Es gibt schlaue Verbrecher.

c) Jeder Detektiv ist schlau.

d) Kein Detektiv kann einen schlauen Verbrecher fangen.

e) Jeder Detektiv, der einen Verbrecher verfolgt, aber nicht fängt, ist frustriert.

f) Wenn alle Verbrecher schlau sind, dann sind alle Detektive frustriert.

g) Jeder Verbrecher hat eine traurige Mutter und einen traurigen Vater.

h) Jeder Detektiv, der einen Verbrecher fängt, erfüllt seinen Vater mit Stolz.

LÖSUNG:

a) $\forall x(detektiv(x) \wedge \exists y(verbrecher(y) \wedge (verflogt(x, y))))$.

b) $\exists y(verbrecher(y) \wedge schlau(y))$.

c) $\forall x(detektiv(x) \wedge schlau(x))$.

d) $\neg\forall x(detektiv(x) \wedge \exists y(verbrecher(y) \wedge fängt(x, y)))$.

e) $\forall x(detektiv(x) \wedge \exists y(verbrecher(y) \wedge \neg fängt(x, y)) \rightarrow frustriet(x))$.

f) $\forall y verbrecher(y) \rightarrow (\forall x(detektiv(x) \wedge frustriert(x))$.

g) $\forall y(verbrecher(y) \wedge traurig(mutter(y)) \wedge traurig(vater(y)))$.

h) $\forall x(detektiv(x) \wedge \exists y(verbrecher(y) \wedge fängt(x, y) \rightarrow stolzAuf(vater(x), x)))$.

(G 3)Freie Variablen

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \emptyset$ und $\Pi = \{p/1, q/2, r/3\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$. Gegeben sind die folgenden Prädikatenlogischen Formeln:

a) $F_1 = (\forall x\,(r(y, z, x))) \wedge (\exists y\,(p(y) \vee \forall z\,(\neg q(z, y) \vee p(x))))$.

b) $F_2 = (\exists x\,(q(y, x) \vee \forall y \neg\,(p(x) \vee r(y, x, z)) \vee \neg\,(\forall z(p(z) \vee p(x)))) \vee r(y, z, x))$.

Gib für jedes Vorkommen einer Variablen in F_1 und F_2 an, ob die Variable dort frei oder gebunden ist.

LÖSUNG:

a) Die Variable x ist in $(\forall x\,(r(y, z, x)))$ gebunden, gier sind die Variablen y, z frei. Die Variable y ist in $(\exists y\,(p(y) \vee \forall z\,(\neg q(z, y) \vee p(x))))$ gebunden, x ist hier frei und z ist gebunden in $\forall z\,(\neg q(z, y) \vee p(x))$.

b) Analog.

(G 4)Freie Variablen

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0, f/1\}$ und $\Pi = \{p/1, q/3\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$. Gegeben sind die folgenden Prädikatenlogischen Formeln:

a) $F_1 = (\exists x\,(q(z, a, z \vee \forall z\,(\neg q(x, z, y)) \vee \neg\,(\exists y(p(f(y)) \vee p(x))))) \vee q(y, z, x)$.

b) $F_2 = (\forall x\,((\exists x q(x, y, f(a))) \wedge (\exists y q(f(z), x, y)))) \wedge \exists z\,(q(y, f(z), x) \wedge q(f(z), a, z))$.

Gib für jedes Vorkommen einer Variablen in F_1 und F_2 an, ob die Variable dort frei oder gebunden ist.

(G 5)Substitution

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei

- $\Omega = \{a/0, b/0, f/1, g/2\}$, und
- $\Pi = \{p/1, q/2, = /2\}$.

Sei X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$.

Berechnen Sie die Ergebnisse der folgenden Substitutionen:

a) $g\left(g(x,b), g(a,x)\right)[f(a)/x]$

b) $g\left(x, g(z,y)\right) = g\left(g(a,y), x\right)[y/x, x/y]$

c) $\exists x\left(q\left(g(x,a), g(b,y)\right)\right)[x/y]$

d) $\exists x\left(g\left(f(x), f(y)\right) = g\left(g(y,x), g(z,x)\right)\right)[f(y)/x, a/y]$

e) $((\forall x\left(q(z, f(a)) \vee (x = g(y,b))\right) \vee \exists z\left(p(z)\right)[x/y, f(a)/z]$

f) $((\exists x g(y,z) = g(a,x)) \vee \forall y\left(q\left(q(z,y), f(x)\right)\right))[a/x, x/b, b/z]$

Lösung:

a) $g\left(g(f(a), b), g(a, f(a))\right)$.

b) $g\left(x, g(z,x)\right) = g\left(g(a,x), x\right)$.

c) $\exists x\left(q\left(g(x,a), g(b,z)\right)\right)$.

d) $\exists t\left(g\left(f(t), f(a)\right) = g\left(g(a,t), g(z,t)\right)\right)$.

e) $((\forall t\left(q(f(a), f(a)) \vee (t = g(x,b))\right) \vee \exists u\left(p(u)\right)$.

f) $((\exists t g(y,b) = g(a,t)) \vee \forall u\left(q\left(q(b,u), f(a)\right)\right))$.