Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2020-2021

5. Vorlesung

Reihen

Zur Langsamkeit von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},\; n \in \mathbb{N}^*.$$

Gezeigt wurde $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
Man beobachte die „Geschwindigkeit“ dieser Folge:

n	$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
100	5,1873775
1 000	7,4854708
2 000	8,1783680
3 000	8,5837497
4 000	8,8713901
5 000	9,0945086
10 000	9,7876055

Approximierungen für $e = 2,718281828...$

n	$s_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$	$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
2	2,5	2,25
4	2,7083333333	2,4414062500
6	2,7180555555	2,5216263717
8	2,7182787698	2,5657845139
10	2,7182818011	2,5937424600
12	2,7182818282	2,6130352901

Die Folge (s_n) konvergiert *sehr rasch*, dagegen (a_n) *außerordentlich langsam* gegen e.
Zur Langsamkeit von (a_n):

$$a_{10000} = 2,7181459268..., \quad a_{10000000} = 2,7182816925...$$

Die Allgegenwart der Reihen

Die Dezimalbruchdarstellung der positiven reellen Zahlen

$$a = A, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

mit $A \in \mathbb{N},\ a_n \in \{0, \ldots, 9\}$
kann wie folgt aufgefasst werden

$$a = A + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}.$$

Die Konvergenz der obigen Reihe

Da $a_n \leq 9,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, gilt

$$\sum \frac{a_n}{10^n} << \sum \frac{1}{10^n}.$$

Die Konvergenz der Reihe folgt nun aus dem 1. Vergleichskriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe ($q = \frac{1}{10}$).

Wichtige Bemerkungen

Zur Summe/Differenz von zwei Reihen

Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = a - b$$

nur, falls $a - b$ definiert ist. Sind $a = b = \infty$ oder $a = b = -\infty$, dann ist $a - b$ nicht definiert.

Bsp.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \text{ (Teleskopreihe).}$$

So nicht:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty - \infty.$$

Wichtige Bemerkungen

Zum Produkt von zwei Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot b_n) \neq \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Bsp.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{3^n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{6^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

also

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}\right) = 3 \neq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{3^n}\right).$$

Wichtige Bemerkungen

Zum Grenzwertübergang

Wenn man den Grenzwert einer Folge ausrechnet, dann darf man nur einmal (zum Schluss) zum Grenzwert übergehen.

Bsp.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n^2}-n^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n^4+n^2}+n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}.$$

So nicht:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+n^2}-n^2) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}-n^2\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^4}-n^2) = \lim_{n\to\infty}(n^2-n^2) = 0.$$