Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2020-2021

3. Übung

Reelle Zahlenfolgen

Versteckte Anwendungen der Folgen in der Informatik

Tatsache

Jedes Mal, wenn wir etwas approximieren, verwenden wir eigentlich Folgen.

Ein Beispiel

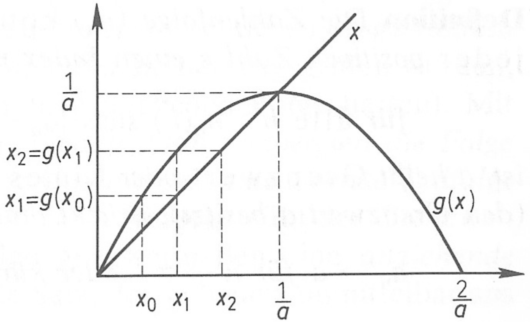
Aufgabe (für den Computer): bestimme (näherungsweise) $\frac{1}{a}$, wobei $a > 0$ gegeben ist.
Beachte:

- $\frac{1}{a}$ ist die Lösung der Gleichung $ax = 1$,
- also ist $\frac{1}{a}$ die von Null verschiedene Lösung der Gleichung $x = 2x - ax^2$ ($\Leftrightarrow ax^2 = x$).

Geometrische Deutung

Man bestimme die x-Koordinate des Schnittpunktes (verschieden von $(0,0)$) der Gerade $y = x$ mit der Parabel $y = 2x - ax^2$.

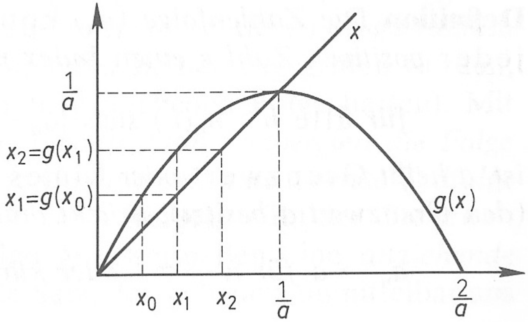
Sei $g(x) = 2x - ax^2$.



Iterative Methode

- man starte mit einer beliebigen Zahl x_0 s.d. $0 < x_0 < \frac{1}{a}$,
- definiere rekursiv $x_{n+1} = g(x_n) = 2x_n - ax_n^2$, für $n \in \mathbb{N}$.

Versteckte Anwendungen der Folgen in der Informatik



Was sagt unsere Intuition:

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng wachsend,
- je größer n, desto näher ist x_n zu $\frac{1}{a}$ (d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{a}$).

$\hookrightarrow$ Das werden wir genau begründen.

Eine $\frac{1}{a}$ approximierende Folge

AUFGABE:

Seien $a > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $0 < x_0 < \frac{1}{a}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird rekursiv wie folgt erklärt

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(i) Man zeige (durch vollständige Induktion), dass $x_n < \frac{1}{a}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ist.

(ii) Man zeige (durch vollständige Induktion), dass $0 < x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, ist.

(iii) Aus (i) und (ii) schließe man, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng wachsend ist.

(iv) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{a}$ ist.

Eine $\frac{1}{a}$ approximierende Folge

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(i) Wir beweisen durch Induktion, dass die Aussage

$$P(n) = \text{„}x_n < \frac{1}{a}\text{“}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

I. $P(0) = \text{„}x_0 < \frac{1}{a}\text{“}$ ist wahr (anhand der Voraussetzung).

II. Wir nehmen an, dass $P(k)$, für $k \in \mathbb{N}$, wahr ist und zeigen, dass auch $P(k+1)$ wahr ist. Also wissen wir, dass $x_k < \frac{1}{a}$ ist. Wegen $a > 0$ gelten die folgenden Relationen

$$x_{k+1} < \frac{1}{a} \Longleftrightarrow 2x_k - ax_k^2 < \frac{1}{a} \Longleftrightarrow 2ax_k - a^2x_k^2 < 1 \Longleftrightarrow (ax_k - 1)^2 > 0.$$

Also ist $P(k+1)$ wahr, da $ax_k - 1 \neq 0$ ist (laut $P(k)$).

Aus I und II $\Rightarrow$ (i).

$$x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass die Aussage

$$Q(n) = „x_n > 0“$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

I. $Q(0) = „x_0 > 0“$ ist wahr (anhand der Voraussetzung).

II. Wir nehmen an, dass $Q(k)$, für $k \in \mathbb{N}$, wahr ist und zeigen, dass auch $Q(k+1)$ wahr ist. Also wissen wir, dass $x_k > 0$ ist. Es gelten die folgenden Relationen

$$x_{k+1} > 0 \iff 2x_k - ax_k^2 > 0 \iff x_k(2 - ax_k) > 0.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass $x_k > 0$ ist, und (i) impliziert $x_k < \frac{1}{a} < \frac{2}{a}$. Somit ist $Q(k+1)$ wahr.

Aus I und II $\Rightarrow$ (ii).

(iii) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Aus (i) und (ii) folgt nun

$$x_{n+1} - x_n = x_n - ax_n^2 = x_n(1 - ax_n) > 0.$$

Somit ist also $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng wachsend.

(iv) Aus (i), (ii) und (iii) folgt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowohl streng monoton als auch beschränkt ist. Nach dem Theorem von Weierstrass ist also diese Folge konvergent. Es sei $l := \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. Durch Grenzwertübergang in der Relation $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$ erhält man

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (2x_n - ax_n^2) \Longleftrightarrow l = 2l - al^2 \Longleftrightarrow l(1 - al) = 0$$

$$\Longleftrightarrow l = 0 \text{ oder } l = \frac{1}{a}.$$

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng wachsende Folge positiver Zahlen ist, folgt $l = \frac{1}{a}$. $\square$