ALGEBRA HSG - RAZVAN POSTESCU

Thursday, December 10, 2020   1:06 PM

Exercițiu 3.2.41. Să se arate că $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3, b_4]^t$ unde

$$b_1 = [1, 2, -1, 2], b_2 = [1, 2, 1, 4], b_3 = [2, 3, 0, -1], b_4 = [1, 3, -1, 0]$$

este o bază a lui $\mathbb{R}^4$ și să se determine coordonatele lui $x = [2, 3, 2, 10]$ în raport cu acea bază.

Utilizăm propoziția 3.2.12:

Propoziție 3.2.12. *Fie V un K-spațiu vectorial și $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \ldots, b_n]^t \in V^{n\times 1}$. Următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) $\mathbf{b}$ *este o listă de vectori maximal liniar independentă, i. e.* $\mathbf{b}$ *este liniar independentă și pentru orice $x \in V$ lista $\mathbf{b}' = [b_1, b_2, \ldots, b_n, x]$ nu mai are aceeași proprietate.*

(ii) $\mathbf{b}$ *este o listă minimală cu proprietatea că generează V, i. e. $\langle \mathbf{b} \rangle = V$ și pentru oricare $i \in \{1, \ldots, n\}$, avem $\langle \mathbf{b}^{\setminus i} \rangle \neq V$.*

(iii) $\mathbf{b}$ *este o bază a lui V.*

(iii) b - este bază a unui spatiu vectorial $V \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \text{(i) – b liniar independentă} \\ \text{(ii) – b listă minimală: } \langle b \rangle = V \end{cases}$

Folosim acum definiția independenței liniare:

Definiție 3.2.1. Fie V un K-spațiu vectorial. Se numește *listă de vectori* un element $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^t$ din $V^{n\times 1}$, unde $n \in \mathbb{N}$ este arbitrar. O listă de vectori $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^t$ se zice *liniar independentă* dacă pentru $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ scalari avem $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. O listă se zice *liniar dependentă* dacă nu este liniar independentă. În acest caz o relație de dependență liniară este o egalitate de forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ cu scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ nu toți nuli.

b - liniar independentă $\Rightarrow$

$$\alpha_1 \cdot b_1 + \alpha_2 \cdot b_2 + \alpha_3 \cdot b_3 + \alpha_4 \cdot b_4 = 0 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

Rescriem (1) pentru a forma un sistem:
(transpunem vectorii)

$$\Rightarrow \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ \ldots \end{vmatrix} + (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ \ldots \end{vmatrix} + (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \ldots \end{vmatrix} + (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \ldots \end{vmatrix} \ldots (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ \ldots \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^7 \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^7 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^8 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (0-3-12-2-0-2-0) - (3-6-2) + (-12-4-6+8) -$$
$$-(-2-12+0-6-2) - (-1-8-1) + (1-4-1) - (-4-2-2+4) +$$
$$+(-1-8-4-1) + (-2+24-12+3) - (-2+12-6+3) + (8+6-3-12) - (-2+16+6-8-12+2) -$$
$$-(-3+6+3+4) + (-3-6+3+4) - (-2+2-3+2-1+2) + (4-3+4-3)$$
$$= -19+5-14+22+10-\cancel{4}+\cancel{4}-14+13-7-2-2-4-\cancel{2}+\cancel{2}$$
$$= \ldots = -18 \neq 0$$

$\Rightarrow$ rang $A = 4 \Rightarrow$ sistem comp. det.
sistem admite sol. nulă $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \Rightarrow b$ - liniar independentă

$\Rightarrow b$ - bază a lui $\mathbb{R}^4$

coordonate lui $X = [2, 3, 2, 10]$ în rap. cu b.

– II –

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4 = 2 & (1) \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 3\alpha_4 = 3 & (2) \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 = 2 & (3) \\ 2\alpha_1 + 4\alpha_2 - \alpha_3 = 10 & (4) \end{cases}$$

sistem comp. det

$\Rightarrow (1)+(3) \Rightarrow 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 4 \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \quad (5)$

$2(3) + (2) \Rightarrow 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 7 \quad (6)$

$(4) \Rightarrow \underline{4\alpha_2 - \alpha_3} = 10 - 2\alpha_1 \overset{(3)}{=} 10 - 2(\alpha_1 - \alpha_4 - 2) \overset{(6)}{=}$

$= 10 - 2\alpha_2 + 4 + 2(7 - 4\alpha_2 - 3\alpha_3) =$

$= \underline{-10\alpha_2 - 6\alpha_3 + 28}$

$\Rightarrow 4\alpha_2 - \alpha_3 = -10\alpha_2 - 6\alpha_3 + 28 \Rightarrow$

$\Rightarrow 14\alpha_2 + 5\alpha_3 = 28$

$$\begin{cases} 14\alpha_2 + 5\alpha_3 = 28 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \;\; | \cdot 5 \end{cases} \; -$$

$9\alpha_2 = 18 \quad \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = 2 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = \frac{1}{2}(10 + \alpha_3 - 4\alpha_2) = 1 \\ \alpha_4 = -\alpha_1 + \alpha_2 - 2 = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Coordonatele lui X în baza b:

e) $x_B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$

$x_B = [1, 2, 0, -1]$