1. Es sei $ABCD$ ein Tetraeder (Abb. 1). Bestimme die Vektoren
   (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$,
   (b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}$,
   (c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$.

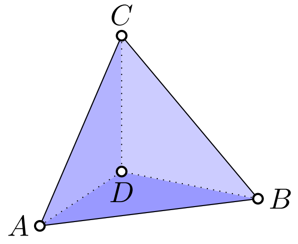

Abbildung 1: Tetraeder

2. Es sei $SABCD$ eine Pyramide mit Spitze S und Basis ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich in O schneiden (Abb. 2). Zeige, dass

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}.$$

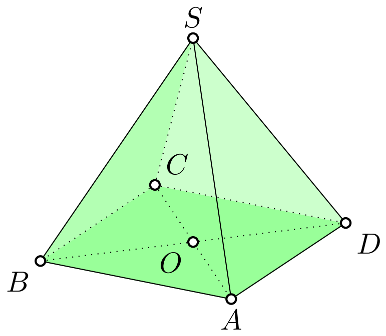

Abbildung 2: Pyramide

3. Es sei $ABCD$ ein Tetraeder (Abb. 1). Zeige, dass

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}.$$

4. Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Hexagon mit Mittelpunkt O (Abb. 3). Drücke $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ andhand der Vektoren $\mathbf{e} = \overrightarrow{OE}$ und $\mathbf{f} = \overrightarrow{OF}$ aus.

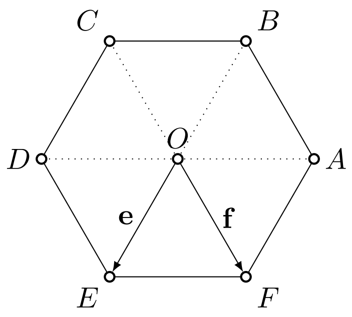

Abbildung 3: regelmäßiges Hexagon

5. Es seien M, N, P und Q die Mittelpunkte der Seiten (im Gegenuhrzeigersinn) eines Vierecks (Abb. 4). Zeige, dass $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = 0$.

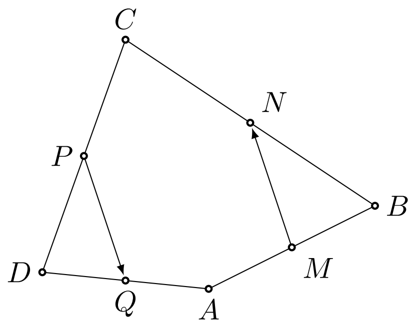

Abbildung 4: ein Viereck

6. Es sei $ABCD$ ein Viereck, E der Mittelpunkt der Diagonale AC und F der Mittelpunkt von BD (Abb. 5). Zeige, dass

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$

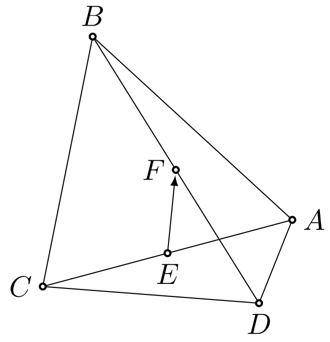

Abbildung 5: ein Viereck

7. Es sei $ABCD$ ein Viereck, E der Mittelpunkt der Seite AB und F der Mittelpunkt der Seite CD. Prüfe die Gleichung $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ und beweise, dass die Länge der Mittellinie im Trapez das arithmetische Mittel der Längen der Grundseiten ist.

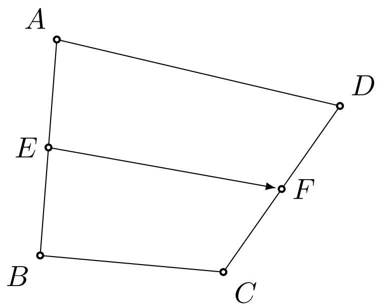

Abbildung 6: ein Viereck

8. Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Hexagon (Abb. 3). Prüfe die Gleichung

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}.$$

9. Es sei ABC ein Dreieck und $D \in BC$ so, dass AD die Winkelhalbierende des Winkels $\angle BAC$ ist (Abb. 7). Drücke $\overrightarrow{AD}$ andhand der Vektoren $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ und $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$ aus.

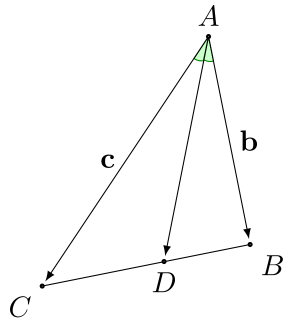

Abbildung 7: Eine Winkelhalbierende im Dreieck

10. Man betrachtet zwei aufeinander senkrechte Sehnen $[AB]$ und $[CD]$ (Abb. 8). Zeige, dass $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OM}$.

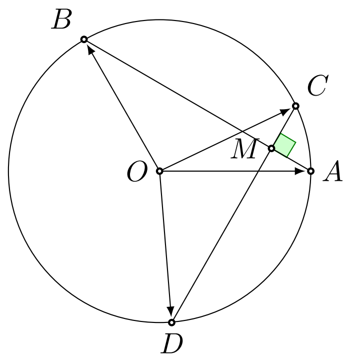

Abbildung 8: Aufeinander senkrechte Sehnen

11. Es sei $ABCD$ ein Trapez mit der großen Grundseite $[AB]$, k-mal größer als die kleine Grundseite $[CD]$ (Abb. 9). Mit M und N die Mittelpunkte der Seiten $[AB]$ und beziehungsweise $[CD]$, drücke die Vektoren $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN}$ und $\overrightarrow{BC}$ anhand der Vektoren $\mathbf{p} = \overrightarrow{AB}$ und $\mathbf{q} = \overrightarrow{AD}$ aus.

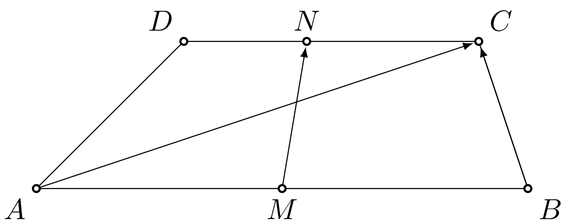

Abbildung 9: Ein Trapez

12. Es seien A', B', C' die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks ABC (Abb. 10). Zeige, dass

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

für einen beliebigen Punkt O.

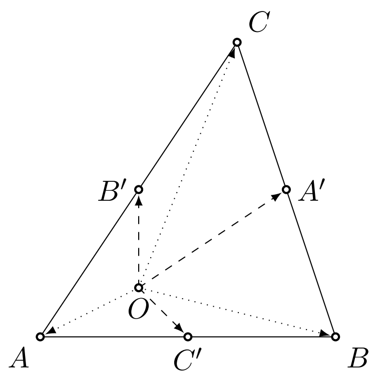

Abbildung 10: Ein Dreieck

13. Es seien M, N, P die Mittelpunkte der Seiten $[AB]$, $[BC]$ bzw $[CA]$ eines Dreiecks ABC (Abb. 11). Drücke die Vektoren $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{CM}$ mit Hilfe der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ aus.

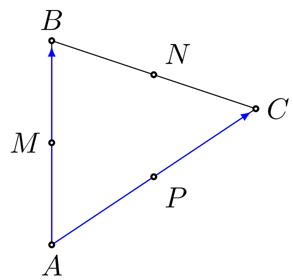

Abbildung 11: Ein Dreieck

14. Es sei $ABCDEFGH$ ein Parallelepiped mit Seiten, die Parallelogramme $ABCD$, $ABFE$ und $EFGH$ (Abb. 12). Anhand der Vektoren $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$ und $\mathbf{w} = \overrightarrow{AE}$, zerlege die Vektoren $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{HB}$ und $\overrightarrow{DF}$.

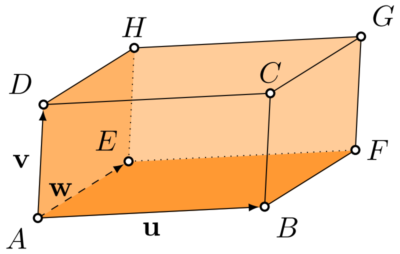

Abbildung 12: Parallelepiped

15. Beweise, dass die Seitenhalbierenden eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden (Abb. 13). Zeige, dass die Summe der Vektoren vom Schnittpunkt zu den Eckpunkten des Dreiecks der Nullvektor ist.

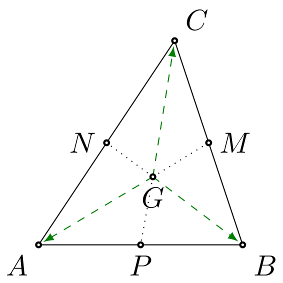

Abbildung 13: Ein Dreieck

16. Es seien $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ Parallelogramme im Raum. Wir bezeichnen mit M_i den Mittelpunkt von $[A_iB_i]$ $(i \in \{1,2,3,4\})$. Zeige, dass
   (a) $2\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}$ und $2\overrightarrow{M_3M_4} = \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{B_3B_4}$;
   (b) $M_1M_2M_3M_4$ ist ein Parallelogramm.

17. Es sei $A_1A_2A_3A_4$ ein Tetraeder und A_{ij} die Mittelpunkte der Segmente $[A_iA_j]$ $(i \leq j)$. Zeige, dass
   (a) $A_{12}A_{34}$, $A_{13}A_{24}$ und $A_{14}A_{23}$ sich in einem Punkt G schneiden;
   (b) bestimme das Verhältnis in welchem G die Mediane des Tetraeders einteilt. (Ein Median des Tetraeders verbindet einen Eckpunkt mit dem geometrischen Schwerpunkt der entgegengesetzten Seite);
   (c) die Mediane des Tetraeders schneiden sich in G;
   (d) $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} + \overrightarrow{GA_4} = 0$;
   (e) für einen beliebigen Punkt M, gilt $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} = 4\overrightarrow{MG}$.

18. Es seien $A_iB_iC_i$, $i \in \{1, 2\}$ zwei Dreiecke im Raum mit geometrischen Schwerpunkten G_i. Zeige, dass
$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = 3\overrightarrow{G_1G_2}.$$

19. Es sei das Dreieck ABC mit $C' \in [A, B]$ und $B' \in [A, C]$ so, dass $\overrightarrow{AC'} = \lambda\overrightarrow{BC'}$ und $\overrightarrow{AB'} = \mu\overrightarrow{CB'}$. Wenn M der Schnittpunkt der Geraden BB' und CC' ist, zeige dass
$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - \lambda\overrightarrow{OB} - \mu\overrightarrow{OC}}{1 - \lambda - \mu}$$

20. Es sei das Dreieck ABC mit Schwerpunkt G, Orthozentrum H, Inkreismittelpunkt I und Umkreismittelpunkt Q. Zeige, dass
    (a) $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$
    (b) $\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}}{a+b+c}$
    (c) $\overrightarrow{OH} = \frac{\tan(\hat{A})\overrightarrow{OA}+\tan(\hat{B})\overrightarrow{OB}+\tan(\hat{C})\overrightarrow{OC}}{\tan(\hat{A})+\tan(\hat{B})+\tan(\hat{C})}$
    (d) $\overrightarrow{OQ} = \frac{\sin(2\hat{A})\overrightarrow{OA}+\sin(2\hat{B})\overrightarrow{OB}+\sin(2\hat{C})\overrightarrow{OC}}{\sin(2\hat{A})+\sin(2\hat{B})+\sin(2\hat{C})}$

21. Es sei der Winkel BOB' mit $A \in [O, B]$, $A' \in [O, B']$ und $m, n \in \mathbb{R}$ so, dass $\overrightarrow{OB} = m\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB'} = n\overrightarrow{OA'}$. Mit $M = AB' \cap A'B$ und $N = AA' \cap BB'$ zeige, dass
$$\overrightarrow{OM} = m\frac{1-n}{1-mn}\overrightarrow{OA} + n\frac{1-m}{1-mn}\overrightarrow{OA'}$$
und
$$\overrightarrow{ON} = m\frac{n-1}{n-m}\overrightarrow{OA} + n\frac{m-1}{m-n}\overrightarrow{OA'}$$

22. Es sei $OAEBDC$ ein kompleter Viereck mit M, N und P die Mittelpunkte der Diagonalen $[OB]$, $[AC]$ und beziehungsweise $[ED]$. Zeige, dass die Punkte M, N und P kollinear sind.