Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 10. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 41)

a) Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{z^2 e^y}{x^2},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{z^2 e^y}{x} \text{ und } \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2ze^y}{x}.$$

b) Sei $(x, y, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ beliebig. Dann sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2\frac{z^2 e^y}{x^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{z^2 e^y}{x} \text{ und } \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{2e^y}{x}.$$

Die gemischten partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = -\frac{z^2 e^y}{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{2ze^y}{x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = -\frac{2ze^y}{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z).$$

c) Es sei daran erinnert, dass für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

ist. Somit erhalten wir

$$u = \nabla f(1,0,2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0,2), \frac{\partial f}{\partial z}(1,0,2)\right) = (-4, 4, 4)$$

und

$$v = \nabla f(2,1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,1,1), \frac{\partial f}{\partial z}(2,1,1)\right) = (-\frac{1}{4}e, \frac{1}{2}e, e),$$

also ist

$$\langle u, v \rangle = -4 \cdot \left(-\frac{1}{4}e\right) + 4 \cdot \frac{1}{2}e + 4 \cdot e = 7e.$$

(A 42)

Wir untersuchen zuerst die partielle Differenzierbarkeit von f in 0_2 nach x:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4 - 0}{2(x^4) + 0} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2x}.$$

Wegen $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{2x} = -\infty$ und $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{2x} = +\infty$ folgt, dass $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$ nicht existiert. Also ist f in 0_2 nach x nicht partiell differenzierbar.

Wir untersuchen nun die partielle Differenzierbarkeit von f in 0_2 nach y:

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0-y^4}{2(0+y^4)} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} -\frac{1}{2y}.$$

Wegen $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y<0}} -\frac{1}{2y} = +\infty$ und $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} -\frac{1}{2y} = -\infty$ folgt, dass $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$ nicht existiert. Also ist f in 0_2 nach y nicht partiell differenzierbar.

(A 43)

a) Wir untersuchen zuerst die partielle Differenzierbarkeit von f in 0_2 nach x:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Somit gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,$$

also ist f in 0_2 nach x partiell differenzierbar.

Wir untersuchen nun die partielle Differenzierbarkeit von f in 0_2 nach y:

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0\cdot y}{0^2+y^2}}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Somit gilt

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

also ist f in 0_2 nach y partiell differenzierbar.

Ist $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\}$, dann sind die partiellen Ableitungen von f in (x,y) nach x, bzw. y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\,(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x\,(x^2+y^2) - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Somit sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq 0_2 \\ 0, & (x,y) = 0_2 \end{cases} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq 0_2 \\ 0, & (x,y) = 0_2 \end{cases}.$$

b) Die partielle Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt impliziert **nicht** die Stetigkeit der Funktion in dem betreffenden Punkt (im Unterschied zu dem, was wir über reellwertige Funktionen einer Variablen kennen). In diesem Fall ist f partiell differenzierbar in 0_2, jedoch nicht stetig in 0_2. Um das zu begründen, betrachte man die Folge $(a^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ mit dem allgemeinen Glied

$$a^k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right), k \in \mathbb{N}^*.$$

Dann ist
$$\lim_{k\to\infty} a^k = 0_2, \text{ während } \lim_{k\to\infty} f(a^k) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \neq f(0_2).$$
Nach **Th3** (Charakterisierungen für die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt) in der 9. Vorlesung schließen wir, dass f nicht stetig in 0_2 ist.

(A 44)

a) Sei $(x,y) \in M$ beliebig. Dann sind
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x(x+y)-(x^2+y^2)}{(x+y)^2} = \frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2}$$
und
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y(x+y)-(x^2+y^2)}{(x+y)^2} = \frac{y^2+2xy-x^2}{(x+y)^2}.$$
Da $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$ ist, schließen wir, dass
$$u := \nabla f(1,2) = \left(\frac{1^2+2\cdot 1\cdot 2-2^2}{(1+2)^2}, \frac{2^2+2\cdot 1\cdot 2-1^2}{(1+2)^2}\right) = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}\right),$$
und
$$v := \nabla f(2,-1) = \left(\frac{2^2+2\cdot 2\cdot(-1)-(-1)^2}{(2-1)^2}, \frac{(-1)^2+2\cdot 2\cdot(-1)-2^2}{(2-1)^2}\right) = (-1,-7)$$
ist. Das Skalarprodukt der beiden Vektoren beträgt
$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{9}\cdot(-1) + \frac{7}{9}\cdot(-7) = -\frac{50}{9}$$
und der euklidische Abstand
$$||u-v|| = ||(10/9, 70/9)|| = \frac{50}{9}\sqrt{2}.$$

b) Die bei a) bestimmten partiellen Ableitungen erster Ordnung von f verwendend, erhält man für alle $(x,y) \in M$
$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\frac{x^2+2xy-y^2}{(x+y)^2} + y\frac{y^2+2xy-x^2}{(x+y)^2} \\ &= \frac{x^3+2x^2y-xy^2+y^3+2xy^2-x^2y}{(x+y)^2} \\ &= \frac{x^3+x^2y+y^3+xy^2}{(x+y)^2} = f(x,y). \end{aligned}$$

(A 45)

Sei $x \in \operatorname{int} S$. Dann gibt es eine reelle Zahl $r > 0$ mit $B(x,r) \subseteq S$. Da $x \in B(x,r)$ ist, muss auch $x \in S$ sein.

Ist nun $V \in \mathcal{U}(x)$, dann gibt es eine reelle Zahl $r' > 0$, so dass $B(x,r') \subseteq V$ ist. Für $r_0 := \min\{r, r'\}$ ist dann
$$B(x,r_0) \setminus \{x\} \subseteq (V \setminus \{x\}) \cap S,$$
also ist $(V\setminus\{x\}) \cap S \neq \emptyset$, d.h. $x \in S'$.

Somit gelten die Inklusionen $\operatorname{int} S \subseteq S$ und $\operatorname{int} S \subseteq S'$.