Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 7. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 27)

1) $f(x) = -2 + \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{5}{6}(x+1)^3$.

2) a) $(e^{5x})^{(n)} = 5^n e^{5x}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Wir wenden die Leibnizsche Regel für $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin 2x$ an und erhalten, unter Berücksichtigung der Tatsache, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Gleichheiten gelten $(\sin 2x)^{(4n)} = 2^{4n} \sin 2x$, $(\sin 2x)^{(4n+1)} = 2^{4n+1} \cos 2x$, $(\sin 2x)^{(4n+2)} = -2^{4n+2} \sin 2x$, $(\sin 2x)^{(4n+3)} = -2^{4n+3} \cos 2x$,

$$\begin{aligned}(x^2 \sin 2x)^{(100)} &= -2^{99} C_{100}^{98} \sin 2x - 2^{100} C_{100}^{99} x \cos 2x + 2^{100} x^2 \sin 2x \\ &= 2^{100}(-2475 \sin 2x - 100x \cos 2x + x^2 \sin 2x).\end{aligned}$$

c) Wir wenden die Leibnizsche Regel für $f(x) = x^3 + 2x - 1$, $g(x) = e^{2x}$ an. Daher bestimmen wir $f'(x) = 3x^2 + 2$, $f''(x) = 6x$, $f^{(3)}(x) = 6$, $f^{(4)}(x) = 0$ und $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $n \geq 4$. Analog wie bei Punkt a), gilt $(e^{2x})^{(n)} = 2^n e^{2x}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ist $n \geq 3$, so erhält man

$$\begin{aligned}\left((x^3 + 2x - 1)e^{2x}\right)^{(n)} &= C_n^{n-3} 6 \cdot 2^{n-3} \cdot e^{2x} + C_n^{n-2} 6x \cdot 2^{n-2} \cdot e^{2x} + C_n^{n-1}(3x^2 + 2) \cdot 2^{n-1} \cdot e^{2x} \\ &+ C_n^n (x^3 + 2x - 1) \cdot 2^n \cdot e^{2x} = \\ &= 2^{n-3} e^{2x} \left(n(n-1)(n-2) + n(n-1)6x + n(3x^2+2)4 + (x^3 + 2x - 1)8\right) = \\ &= 2^{n-3} e^{2x} \left(8x^3 + 12nx^2 + (6n(n-1) + 16)\, x + n(n-1)(n-2) + 8n - 8\right).\end{aligned}$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ erhalten wir:

$$\left((x^3 + 2x - 1)e^{2x}\right)' = (2x^3 + 3x^2 + 4x)e^{2x} \text{ und } \left((x^3 + 2x - 1)e^{2x}\right)'' = (4x^3 + 12x^2 + 14x + 4)e^{2x}.$$

3) a) Man stelle fest, dass $f(0) = 0$ ist. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = e^{2x}(2 \sin x + \cos x) \text{ und } f''(x) = e^{2x}(3 \sin x + 4 \cos x),$$

also ist $f'(0) = 1$ und $f''(0) = 4$. Es folgt, dass $T_2(x, 0) = x + 2x^2$ ist.

b) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f^{(3)}(x) = e^{2x}(2 \sin x + 11 \cos x)$. Laut der Taylorschen Formel gibt es einen Punkt c echt zwischen x und 0 mit der Eigenschaft, dass $R_2(x, 0) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!} x^3$ ist.

(A 28)

a) Wir erhalten $\cos^{(2n)} = (-1)^n \cos$ und $\cos^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin$, für jedes $n \in \mathbb{N}$.

b) Aus a) folgt, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, $\cos^{(2n)}(0) = (-1)^n$ und $\cos^{(2n+1)}(0) = 0$ ist. Demzufolge ist

$$T_{2n}(x, 0) = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \forall\, n \in \mathbb{N}, \text{ und } T_{2n+1}(x, 0) = T_{2n}(x, 0), \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

c) Sei $x \in \mathbb{R}$. Aus der Taylorschen Formel folgt die Existenz eines c zwischen 0 und x mit der Eigenschaft, dass

$$R_n(x,0) = \frac{\cos^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

ist.

d) Aus c) folgt

$$|R_n(x,0)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Unter Berücksichtigung von $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, erhalten wir, dass $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0$ ist. Laut des Theorems 8 aus der 7. Vorlesung erhält man nun die folgende Taylorentwicklung

$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}, \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

(A 29)

a) Mittels mathematischer Induktion folgt, dass für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und alle $x \in [0,1]$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

ist.

b) Es ist $f(0) = 0$. Aus a) folgt, dass $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$, für alle $k \in \mathbb{N}^*$, ist. Damit ist $T_0(x,0) = 0$ und

$$T_n(x,0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k, \text{ für } n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Nach der Taylorschen Formel gibt es ein $c \in [0,x]$ mit

$$R_n(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{1+c}\right)^{n+1}.$$

d) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Aus c) folgt, unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\frac{x}{1+c} \leq 1$ (wegen $x \leq 1$ und $\frac{1}{1+c} \leq 1$) ist,

$$|R_n(x,0)| = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{1+c}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Daraus schließen wir nun aufgrund des Sandwich-Theorems, dass $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0$ ist. Das Theorem von Taylor impliziert nun, dass f eine Taylorentwicklung (auf $[0,1]$) an der Stelle $x_0 = 0$ hat und diese wie folgt lautet

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n, \text{ für alle } x \in [0,1]. \tag{1}$$

e) Setzt man $x = 1$ erhält man aus (1) die Summe der alternierenden harmonischen Reihe

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(A 30)

a) Wir erinnern an die folgenden Eigenschaften der Winkelfunktionen:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\cos x=\cos x$$

und

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{2}-\sin x\sin\frac{\pi}{2}=-\sin x.$$

Wir beweisen die zu zeigenden Gleichheiten mittels mathematischer Induktion. Dafür erklären wir für $n\in\mathbb{N}$ den folgenden Satz:

$$P(n):\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\text{ für alle } x\in\mathbb{R}.$$

I. P(0): $\sin^{(0)} x=\sin x=\sin(x+0\cdot\frac{\pi}{2})$, und somit ist $P(0)$ wahr.

II. $P(k)\Longrightarrow P(k+1)$. Laut Induktionsvoraussetzung ist $\sin^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$, für alle $x\in\mathbb{R}$. Dann gelten für $x\in\mathbb{R}$

$$\sin^{(k+1)}(x)=\left(\sin^{(k)}(x)\right)'=\sin'\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Damit ist auch $P(k+1)$ wahr.

Wir zeigen nun ebenfalls mittels vollständiger Induktion den für $n\in\mathbb{N}$ erklärten Satz:

$$Q(n):\cos^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right),\text{ für alle } x\in\mathbb{R}.$$

I. Q(0): $\cos^{(0)} x=\cos x=\cos(x+0\cdot\frac{\pi}{2})$, also ist $Q(0)$ wahr.

II. $Q(k)\Longrightarrow Q(k+1)$. Laut Induktionsvoraussetzung ist $\cos^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$, für alle $x\in\mathbb{R}$. Also ist für $x\in\mathbb{R}$

$$\cos^{(k+1)}(x)=\left(\cos^{(k)}(x)\right)'=\cos'\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+(k+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

und damit gilt auch $Q(k+1)$.

b) Wir werden die Leibnizsche Formel anwenden. Wir erinnern daran, dass $(e^x)^{(n)}=e^x$ und $e^{(-2x)}=(-2)^n e^x$, für alle $n\in\mathbb{N}$, ist. Es folgen

$$(e^x\sin x)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^x)^{(n-k)}(\sin x)^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^x\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)=e^x\sum_{k=0}^{n}C_n^k\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)$$

und

$$\begin{aligned}(e^{-2x}\cos x)^{(n)}&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^{-2x})^{(n-k)}(\cos x)^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-2)^{n-k}e^x\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right)\\&=e^x\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-2)^{n-k}\cos\left(x+k\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

(A 31)

a) Wegen $\lim_{x\to\infty} e^{\alpha x} = \lim_{x\to\infty} x = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} \frac{(e^{\alpha x})'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \alpha e^{\alpha x} = \infty$ impliziert L'Hospitals Regel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} = \infty.$$

b) Weil die Grenzwerte aus a) für alle positiven α gelten, erhält man

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{\frac{\alpha}{\beta} x}}{x} \right)^\beta = \infty.$$

c) Da $\lim_{x\to\infty} \ln x = \lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$ und $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$ ist, folgt, die L'Hospitalsche Regel anwendend, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0$$

ist.

d) Die Grenzwerte aus c) gelten für alle positiven α, und somit ist

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}} \right)^\beta = 0.$$

e) Sei $x = \frac{1}{y}$. Mit Hilfe der Ergebnisse aus c), erhält man

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \ln x = \lim_{y\to\infty} \frac{-\ln y}{y^\alpha} = 0.$$

f) Wegen e), erhält man

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{\ln x^x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{x \ln x} = e^0 = 1.$$