Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

7. Übung zur Vorlesung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 27)

1) Man bestimme die Polynomfunktion 3. Grades $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(-1) = -2$, $f'(-1) = 0$, $f''(-1) = 1$ und $f^{(3)}(-1) = -5$.

2) Man bestimme die folgenden Ableitungen höherer Ordnung:

a) $(e^{5x})^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, b) $(x^2 \sin 2x)^{(100)}$, c) $\left((x^3 + 2x - 1)e^{2x}\right)^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

3) Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{2x} \sin x$. Man bestimme:

a) das Taylorpolynom $T_2(x, 0)$,

b) das Restglied $R_2(x, 0)$, für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, nach der Taylorschen Formel.

(A 28)

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \cos x$.

a) Man bestimme $f^{(n)}$, für $n \in \mathbb{N}$.

b) Man gebe das n-te Taylorpolynom $T_n(x, 0)$, für $n \in \mathbb{N}$, an.

c) Man gebe das Restglied $R_n(x, 0)$, für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, nach der Taylorschen Formel an.

d) Man zeige, dass f eine Taylorentwicklung an der Stelle $x_0 = 0$ hat und bestimme diese.

(A 29)

Es sei $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \ln(1 + x)$.

a) Man bestimme $f^{(n)}$, für $n \in \mathbb{N}$.

b) Man gebe das n-te Taylorpolynom $T_n(x, 0)$, für $n \in \mathbb{N}$, an.

c) Man gebe das Restglied $R_n(x, 0)$, für $x \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$, nach der Taylorschen Formel an.

d) Man zeige, dass f eine Taylorentwicklung (auf $[0, 1]$) an der Stelle $x_0 = 0$ hat und bestimme diese.

e) Das bei d) erhaltene Ergebnis verwendend, bestimme man die Summe der alternierenden harmonischen Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

(A 30) (Ableitungen höherer Ordnung)

a) Man zeige, dass die folgenden Gleichheiten für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gelten

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

b) Man bestimme $(e^x \sin x)^{(n)}$ und $(e^{-2x} \cos x)^{(n)}$, für $n \in \mathbb{N}$.

(A 31) (Die Regel von L'Hospital)

Seien α, $\beta > 0$. Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$, e) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \ln x$, f) $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$.