Dr. Christian Săcărea

"Babeş–Bolyai" Universität, Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Wintersemester 2020/2021

Lösungshinweise zur 12. Übung

Logik für Informatiker

GRUPPENÜBUNGEN:

(G 1)

a) Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Die allgemeine Form der prädikatenlogischen Resolutionsregel und Faktorisierungsregel (für Klauseln in Mengennotation) ist:

- Resolutionsregel: Seien L_1, L_2 Literale und seien D_1, D_2 Klauseln, wobei die Variablenmengen von $D_1 \cup \{L_1\}$ und $D_2 \cup \{\neg L_2\}$ disjunkt sind.

$$\frac{D_1 \cup \{L_1\} \qquad D_2 \cup \{\neg L_2\}}{(D_1 \cup D_2)\sigma}$$

  mit $\sigma = \mathrm{mgu}(L_1, L_2)$.

- Faktorisierungsregel: Seien L_1, L_2 Literale und D eine Klausel.

$$\frac{D \cup \{L_1\} \cup \{L_2\}}{(D \cup \{L_1\})\sigma}$$

  mit $\sigma = \mathrm{mgu}(L_1, L_2)$.

b) Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei

- $\Omega = \{a/0, b/0, c/0, f/1\}$, und
- $\Pi = \{p/1, q/3\}$.

Ferner seien X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$. Es seien die folgenden Klauseln über Σ und X gegeben:

$\{q(x, y, a), q(x, f(x), x), \neg p(x)\}$
$\{p(a), \neg q(x, y, a), \neg q(b, y, x)\}$
$\{p(x), p(f(x)), q(x, f(x), x)\}$.

Geben Sie sämtliche Faktoren an, die sich mit der Faktorisierungsregel aus den gegebenen Klauseln bilden lassen und geben Sie bei der Faktorisierung explizit die verwendeten Unifikatoren an.

Sollte eine Faktorisierung nicht möglich sein, begründen Sie jeweils kurz, warum dem so ist. Dass eine Faktorisierung nicht möglich ist, weil Literale verschiedene Prädikatensymbole haben, brauchen Sie nicht zu erwähnen.

c) Es seien die folgenden Klauseln über Σ und X gegeben:

(1) $\{q(x, y, b), \neg p(f(x)), \neg p(y)\}$
(2) $\{p(f(y)), q(x, y, a)\}$
(3) $\{\neg q(f(x), b, a), \neg q(x, f(y), f(x))\}$.

Bilden Sie sämtliche Resolventen, die sich aus den Klauseln:

- (1) und (2),
- (1) und (3),
- (2) und (3)

mit der Resolutionsregel bilden lassen und geben Sie dabei explizit die verwendeten Unifikatoren und durchgeführten Umbenennungen an.

LÖSUNG:

a) Nix zu zeigen, da nur Wiederholung.

b)
- $\{q(x, y, a), q(x, f(x), x), \neg p(x)\}$ Faktorisieren bedeutet Literale, die mit demselben Buchstabe anfangen zu unifizieren (falls möglich). HIer geht es darum für $g(x, y, a)$ und $q(x, f(x), x)$ einen mgu zu berechnen, d.h. folgendes Unifikationsproblem zu lösen:

$$\{q(x, y, a) \stackrel{?}{=} q(x, f(x), x)\}.$$

  Der mgu ist $[y/f(x), x/a]$.
- Geht nicht, wegen `Clash Failure`.
- `Occur Failure`

c)
- Nach der Unifizierung mit $[y/f(x)]$ wird die erste Klausel zu $\{q(x, f(x), b), \neg p(f(x))\}$. Um die Resolvente mit (2) zu bilden, müssen wir folgendes Unifikationsproblem lösen: $p(f(x)) \stackrel{?}{=} p(f(y))$ lösen. Die sgeht einfach über den mgu $[y/x]$. Die Resolvente ist

$$\{q(x, f(x), b), q(x, x, a)\}.$$

- In (3) können wir keine Faktorisierung durchführen. Die Faktoren mit deren Hilfe wir die Resolvente berechnen können Wir können keine Resolvente bilden, da wir kein mgu berechnen können.
- Wir können keine Resolvente bilden, da wir kein mgu berechnen können.

(G 2)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0, b/0, c/0\}$ und $\Pi = \{p/3, q/3\}$. Ferner sei X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$. Gegeben sei die folgende Klauselmenge über Σ und X:

$N = \{\{p(b, x, y), \neg q(y, b, z)\}, \{\neg p(x, c, a), \neg q(a, x, z)\}, \{q(x, b, y), q(a, z, y)\}\}$ Verwenden Sie den Resolutionskalkül, um zu begründen, dass N unerfüllbar ist. Geben Sie dabei explizit alle Unifikatoren, Umbenennungen und Faktoren an. Führen Sie keine Vereinfachungen an der gegebenen Klauselmenge durch.

LÖSUNG: Wir haben folgende Klauseln:

$(1)\{p(b, x, y), \neg q(y, b, z)\}$

$(2)\{\neg p(x, c, a), \neg q(a, x, z)\}$

$(3)\{q(x, b, y), q(a, z, y)\}$.

Mit dem mgu $[x/a]$ wird die Klausel (3) faktorisert und wir erhalten

$(3a)\{q(a, b, y)\}$.

Aus (2) und (3) erhalten wir mit dem mgu $[x/b, z/y]$ die Resolvente $(4)\{\neg p(b, c, a)\}$. Aus (1) und (4) erhalten wir mit dem mgu $[x/c, y/a]$ die Resolvente $(5)\{\neg q(a, b, z\}$. Aus (5) und (3) erhalten wir die Leere Klausel mit dem mgu $[z/y]$.

(G 3)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0, b/0, c/0\}$ und $\Pi = \{p/3, q/3\}$. Ferner sei X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$. Gegeben sei die folgende Formel über Σ und X:

$F = \exists x \exists y \exists z((q(b,z,x)) \vee (\neg q(a,z,x) \wedge \neg q(x,z,y)) \vee (q(x,z,x) \wedge \neg p(b,x,c)) \vee (\neg q(y,z,x) \wedge q(x,z,x) \wedge p(y,a,c))$.

Verwenden Sie den Resolutionskalkül, um zu zeigen, dass F allgemeingültig ist. Geben Sie dabei explizit alle Unifikatoren, Umbenennungen und Faktoren an. Führen Sie keine Vereinfachungen an den gegebenen Formeln durch.

LÖSUNG:

Mit dem Resolutionskalkül können wir nur die Unerfüllbarkeit einer Formel beweisen. Um die Allgemeingültigekeit von F zu beweisen, müssen wir die Unerfüllbarkeit von $\neg F$ beweisen.

Wir erhalten somit folgende Formel $\neg F = \forall x \forall y \forall z((\neg q(b,z,x)) \wedge (q(a,z,x) \vee q(x,z,y)) \wedge (\neg q(x,z,x) \vee \neg p(b,x,c)) \wedge (q(y,z,x) \vee \neg q(x,z,x) \vee p(y,a,c))$. Diese Formel ist in Skolennormalform, d.h. wir können auch die Klauselnormalform angeben:

$$\{\{\neg q(b,z,x)\}, \{q(a,z,x), q(x,z,y)\}, \{\neg q(x,z,x), p(b,x,c)\}, \{q(y,z,x), \neg q(x,z,x), \neg p(y,a,c)\}\}.$$

Wir erhalten folgende Klauseln:

$(1)\{\neg q(b,z,x)\}$,

$(2)\{q(a,z,x), q(x,z,y)\}$,

$(3)\{\neg q(x,z,x), p(b,x,c)\}$,

$(4)\{q(y,z,x), \neg q(x,z,x), \neg p(y,a,c)\}$.

Klausel (2) wird nach Faktorisieren zu $(2a)q(a,z,a)$ mit dem mgu $[x/a, y/a]$. Aus (3) und (4) erhalten wir mit dem mgu $[y/b, x/a]$ die Resolvente $(5)\{\neg q(a,b,a), q(b,z,a), \neg q(b,z,a)$. Nach Faktorisieren erhalten wir $(5a)\{\neg q(a,b,a), q(b,z,a)\}$ mit dem mgu $[z/b]$.

(5a) mit (2a) ergibt die Resolvente $(6)\{q(b,b,a)$, welche mit (1) die leere Klausel ergibt mit dem mgu $[z/b, x/a]$.

(G 4)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0, b/0, c/0, d/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/2\}$. Ferner sei X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$. Gegeben seien die folgenden Formeln über Σ und X: $F = p(d,b) \wedge p(c,a) \wedge (\forall x(\neg p(d,x) \vee q(a,x))) \wedge (\forall x \forall y(\neg p(c,x) \vee \neg p(d,y) \vee \neg p(b,y) \vee \neg q(x,y)))$ und $G = \neg p(b,b)$.

Verwenden Sie den Resolutionskalkül, um zu begründen, dass $F \models G$. Geben Sie dabei explizit alle Unifikatoren, Umbenennungen und Faktoren an. Führen Sie keine Vereinfachungen an der gegebenen Klauselmenge durch.