Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 3. Hausaufgabe

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(H 4)

a) $\lim_{n\to\infty}(3n^3+2n+5)\ln\left(1+\frac{1}{n^3-2n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^3-2n+2}\right)^{3n^3+2n+5}$. Aus

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3-2n+2}\right)^{3n^3+2n+5}=\left(\left(1+\frac{1}{n^3-2n+2}\right)^{n^3-2n+2}\right)^{\frac{3n^3+2n+5}{n^3-2n+2}}=e^3$$

folgt, dass $\lim_{n\to\infty}(3n^3+2n+5)\ln\left(1+\frac{1}{n^3-2n+2}\right)=3$ ist.

b) Da $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}=0$ ist, impliziert die Aussage 1° der Folgerung **F12** aus der 3. Vorlesung, dass auch

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{n}=0$$

ist.

c) Da die Folge $(\cos(\sqrt{n}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ beschränkt ist, folgt aus b) mittels der Folgerung **F6** aus der 3. Vorlesung, dass

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{n}\cos(\sqrt{n})=0$$

ist.

d) Für $n\in\mathbb{N}$ seien $a_n=x_0+2^1x_1+2^2x_2+\cdots+2^nx_n$ und $b_n=2^{n+1}$. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng wachsend und hat den Grenzwert ∞. Aus

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}x_{n+1}}{2^{n+2}-2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x$$

schließen wir, anhand des Stolz-Cesàro Theorems, dass $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=x$ ist.

(H 5)

a) Wir beweisen durch Induktion, dass die Aussage

$$P(n)=\text{„}5^n<(n+3)!\text{“}$$

für alle $n\in\mathbb{N}^*$ wahr ist.

I. $P(1)=$ „$5<4!$“ ist wahr.

II. Wir nehmen an, dass $P(k)$, für $k\in\mathbb{N}^*$, wahr ist und zeigen, dass auch $P(k+1)$ wahr ist. Wir wissen, dass $5^k<(k+3)!$ ist. Hieraus folgt $5^{k+1}<5(k+3)!$. Da $5\le k+4$ ist, erhält man $5(k+3)!\le(k+4)!$. Somit ist $5^k<(k+4)!$, also ist $P(k+1)$ wahr.

Aus I und II folgt nun a).

b) Wegen a) gilt

$$\frac{4^n}{(n+3)!} < \frac{4^n}{5^n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

also

$$0 < \frac{4^n}{(n+3)!} < \left(\frac{4}{5}\right)^n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Das Sandwich-Theorem impliziert nun, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n}{(n+3)!} = 0$ ist.

(H 6)

a) Wir beweisen durch Induktion, dass die Aussage

$$P(n) = „x_n \in [1,2)“$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$ wahr ist.

I. $P(1) = „x_1 \in [1,2)“$ ist wahr (anhand der Voraussetzung).

II. Wir nehmen an, dass $P(k)$, für $k \in \mathbb{N}^*$, wahr ist und zeigen, dass auch $P(k+1)$ wahr ist. Also wissen wir, dass $x_k \in [1,2)$ ist. Aus

$$1 \leq x_{k+1} \Leftrightarrow 1 \leq x_k^2 - 2x_k + 2 \Leftrightarrow 0 \leq (x_k - 1)^2$$

und

$$x_{k+1} < 2 \Leftrightarrow x_k^2 - 2x_k + 2 < 2 \Leftrightarrow x_k(x_k - 2) < 0$$

folgt, dass $x_{k+1} \in [1,2)$ ist. Somit ist gezeigt, dass $P(k+1)$ wahr ist.

Aus I und II folgt nun a).

b) Die Aussage a) verwendend, erhält man für alle $n \in \mathbb{N}^*$

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - 3x_n + 2 = (x_n - 2)(x_n - 1) \leq 0,$$

also ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ fallend.

c) Aus a) und b) schließen wir, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ beschränkt und monoton, also konvergent ist. Wir bezeichnen mit $x \in \mathbb{R}$ ihren Grenzwert. Dann ist

$$x = x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) = 0.$$

Da $x_n \leq x_1 = a < 2$, für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist, folgt, dass $x \neq 2$, also ist $x = 1$.