Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

3. Übung zur Vorlesung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 10)

Man bestimme die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{n-2n^2}{n^4+1}\right)^{5n^2}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n^2}$, c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+2n}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$, e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{1+2^2+3^3+\cdots+n^n}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+2+\cdots+n}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2^5a_2+3^5a_3+\cdots+n^5a_n}{n^6}$, wobei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine gegen $a\in\mathbb{R}$ konvergierende Folge ist.

(A 11)

Sei $x_0>0$. Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ wird wie folgt definiert

(1) $$x_{n+1}=\frac{x_n^2+4}{2x_n}, \forall\ n\geq 0.$$

a) Man zeige mittels Induktion, dass $x_n>0$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$, ist.

b) Indem man (1) verwendet, zeige man, dass $x_{n+1}^2\geq 4$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$, ist.

c) Man zeige, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ fallend ist.

d) Man begründe, weshalb die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergent ist und bestimme ihren Grenzwert.

(A 12) (Beispiele)

a) Man gebe ein Beispiel für eine nach oben unbeschränkte Folge, die eine konvergente Teilfolge hat.

b) Man gebe ein Beispiel für eine nach unten unbeschränkte Folge, die keine konvergente Teilfolge hat.

(A 13)

a) Man zeige (entweder durch direkte Rechnung oder induktiv), dass die folgenden Gleichheiten für alle natürlichen Zahlen $n\geq 2$ gelten

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1\left(1+\frac{1}{2}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)^3\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{n^n}{n!},$$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}\right)^3\left(1+\frac{1}{3}\right)^4\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}=\frac{n^n}{(n-1)!}.$$

b) Unter Verwendung von a) und der folgenden (in der dritten Vorlesung bewiesenen) Ungleichungen

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \ \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

beweise man, dass

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Man schließe aus b) und dem Sandwich-Theorem, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ ist.

d) Man zeige die Gleichheit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$ unter Zuhilfenahme der Aussage 3° der Folgerung **F12** aus der 3. Vorlesung.

(A 14) (Für Schlaufüchse)

Man beweise die Aussage 2° des Theorems **Th9** in der dritten Vorlesung: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine wachsende Folge und X die Menge gebildet aus allen Folgengliedern, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup X$.