Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2020-2021

2. Vorlesung

Th2 (Rechenregeln für konvergente Folgen)

Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen, dann gelten:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(t \cdot a_n) = t \cdot \lim_{n\to\infty} a_n, \ \forall\ t \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n),$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}, \ \text{falls} \ \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0.$$

Die Addition betreffend

- $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x + \infty = \infty + x = \infty,$
- $\forall x \in \mathbb{R}: \quad x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,$
- $\infty + \infty = \infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty.$

Nicht definiert

$$\infty + (-\infty), \quad (-\infty) + \infty.$$

Rechenregeln für Grenzwerte

Die Multiplikation betreffend

- $x \cdot \infty = \infty \cdot x = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x \in (0, \infty) \\ -\infty, & \text{falls } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$
- $x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = \begin{cases} -\infty, & \text{falls } x \in (0, \infty) \\ \infty, & \text{falls } x \in (-\infty, 0), \end{cases}$
- $\infty \cdot \infty = \infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty,$
- $\infty \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \infty = -\infty.$

Nicht definiert

$$0 \cdot \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad 0 \cdot (-\infty), \quad (-\infty) \cdot 0.$$

Die Division betreffend

- $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0,$
- $\frac{1}{0+} = \infty, \quad \frac{1}{0-} = -\infty.$

Nicht definiert

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{-\infty}{-\infty}, \quad \frac{\infty}{-\infty}, \quad \frac{-\infty}{\infty}.$$

Potenzen betreffend

- $x^{\infty} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x \in (1,\infty) \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1), \end{cases}$
- $x^{-\infty} = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (1,\infty) \\ \infty, & \text{falls } x \in (0,1), \end{cases}$
- $(\infty)^{x} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x \in (0,\infty) \\ 0, & \text{falls } x \in (-\infty,0), \end{cases}$
- $\infty^{\infty} = \infty, \quad \infty^{-\infty} = 0.$

Nicht definiert

$$1^{\infty}, \quad 0^{0}, \quad \infty^{0}, \quad 1^{-\infty}.$$

Def.: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Ist $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen (d.h. $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \dots$), dann nennt man $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bsp.: $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (x_0, x_2, x_4, \dots)$ ist die Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die den geraden Indizes, und $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (x_1, x_3, x_5, \dots)$ die Teilfolge, die den ungeraden Indizes entspricht.

Th3 (Teilfolgen und Grenzwerte)

Hat die Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $x \in \overline{\mathbb{R}}$, so hat auch jede Teilfolge von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert x.

Bem.: **Th3** kann verwendet werden, um zu begründen, dass bestimmte Folgen keinen Grenzwert haben. Z. B.: $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat keinen Grenzwert, weil die Teilfolgen $((-1)^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $((-1)^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ verschiedene Grenzwerte haben.