Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 6. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 20)

Wir vergleichen das allgemeine Glied der Reihe mit dem allgemeinen Glied der harmonischen Reihe für ein geeignetes α, das gleich bestimmt wird. Seien $x_n := \frac{\sqrt{2n-1}}{n^2+1}$ und $y_n := \frac{1}{n^\alpha}$, für $n \geq 1$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha \cdot \sqrt{n^3+n^2+1}}{\sqrt[3]{n^{12}+n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha \cdot n^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}}{n^4 \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^{10}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}}{n^{\frac{5}{2}} \cdot \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^{10}}}}.$$

Damit dieser Grenzwert eine positive reelle Zahl ist, setzen wir $\alpha := \frac{5}{2}$, und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^{10}}}} = 1.$$

Nach dem zweiten Vergleichskriterium ist die Reihe äquivalent zur verallgemeinerten harmonischen Reihe mit $\alpha = \frac{5}{2} > 1$. Also ist die Reihe konvergent.

(A 21)

a) $A' = (-\infty, 5] \cup [10, +\infty) \cup \{-\infty, \infty\}$, b) $A' = \overline{\mathbb{R}}$.

(A 22)

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $D' = \overline{\mathbb{R}}$.

b) Die Funktion f ist als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig.

c) Für die einseitigen Grenzwerte von f in 1 erhält man

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} e^{1+\frac{2}{|x-1|}} = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} e^{1+\frac{2}{|x-1|}} = \infty,$$

also ist $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$.

(A 23)

a) Es besteht kein Widerspruch zum Nullstellensatz, da f in 0 nicht stetig ist (weil $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2}{x} = \infty$ ist).

b1) Wegen $f(a) = (a^2+1)(a-b) < 0$ und $f(b) = (b^4+1)(b-a) > 0$ folgt aus dem Nullstellensatz (wegen der Stetigkeit von f) die Existenz mindestens einer Nullstelle von f im Intervall (a, b).

b2) Da f eine Polynomfunktion ungeraden Grades ist, gilt entweder

$$\left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty\right) \text{ oder } \left(\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \text{ und } \lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\right).$$

Also gibt es $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_1) < 0$ und $f(x_2) > 0$. Aus dem Nullstellensatz folgt nun (wegen der Stetigkeit von f) die Existenz mindestens einer Nullstelle von f zwischen x_1 und x_2.

(A 24)

Es gilt

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } x > 0 \\ \frac{1}{2}, \text{ falls } x = 0 \\ 0, \text{ falls } x < 0. \end{cases}$$

Also ist f in allen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig und 0 ist eine Unstetigkeitsstelle erster Art (eine Sprungstelle).

Es gilt

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ falls } x > 1 \\ x, \text{ falls } -1 < x \leq 1 \\ 0, \text{ falls } x < -1. \end{cases}$$

Also ist g in allen Punkten $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ stetig und 1 ist eine Unstetigkeitsstelle erster Art (eine Sprungstelle).

(A 25)

1) Ist $f(a) = a$ oder $f(b) = b$, dann besitzt f offensichtlich mindestens einen Fixpunkt. Wir nehmen an, es sind $f(a) \neq a$ und $f(b) \neq b$, also ist $f(a) > a$ und $f(b) < b$. Für die stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x$, gilt dann $g(a) > 0$ und $g(b) < 0$. Also gibt es nach dem Nullstellensatz mindestens einen Punkt $x_0 \in (a,b)$, für den $g(x_0) = 0$, d.h. $f(x_0) = x_0$ ist.

2) Es sei $g\colon [0,1] \to [0,1]$ definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0, \text{ falls } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Die Funktion g besitzt keinen Fixpunkt (und ist in $\frac{1}{2}$ nicht stetig).

(A 26)

(1) $\lim\limits_{x \to 4} (-x^3 + 5x) = -44$.

(2) $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3 + 2x) = \infty$.

(3) Es ist $\frac{x^2-9}{(x+3)^2} = \frac{x-3}{x+3}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Da

$$\lim_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} \frac{x-3}{x+3} = -\infty \text{ und } \lim_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} \frac{x-3}{x+3} = \infty$$

ist, folgt, dass es den Grenzwert $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - 9}{(x+3)^2}$ nicht gibt.

(4) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1 + 4x + x^2}{1 + x} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \left(1 + \dfrac{3x + x^2}{1 + x} \right)^{\frac{1}{x}} = e^3$.

(5) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{2}{3}$.

(6) $\lim\limits_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$.

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1.$

(8) $L := \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^k+5}{8x^3-2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^k}{8x^3}$, also

$$L = \begin{cases} 0, & \text{falls } k<3 \\ \infty, & \text{falls } k>3 \\ \frac{3}{8}, & \text{falls } k=3. \end{cases}$$

(9) $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{x^3-1}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-x^3}\right) = -\infty.$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$

(11) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{x(x^2-1)+x^2-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to1}(x+1) = 2.$

(12) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{(1+\sqrt{1-x^2})(1-\sqrt{1-x^2})}{(1+\sqrt{1-x^2})x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{(1+\sqrt{1-x^2})x^2} = \dfrac{1}{2}.$

(13) Da $\left|\frac{x^2}{|x|}\right| = |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}^*$ ist, folgt $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{|x|} = 0$. Das gleiche Ergebnis ergibt sich aus der Tatsache, dass

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{x^2}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x = 0 \text{ und } \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{x^2}{|x|} = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{x^2}{-x} = \lim_{\substack{x\to0\\x<0}} -x = 0$$

ist.

(14) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})} =$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \dfrac{1}{2}.$

(15) Aus

$$\left|\frac{(-1)^{[x]}}{x}\right| = \frac{1}{x}, \text{ für alle } x>0,$$

folgt, dass $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(-1)^{[x]}}{x} = 0$ ist.

(16) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{|x|+1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{\frac{-x+1}{x-1}} = \dfrac{1}{e}.$

(17) Es gilt

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\sqrt{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{2x}{x^2-x+1}\right)^{\sqrt{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \left(\left(1+\frac{2x}{x^2-x+1}\right)^{\frac{x^2-x+1}{2x}}\right)^{\frac{2x\sqrt{-x}}{x^2-x+1}}$$

$= e^0 = 1.$

(18) Es gilt

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{(\sqrt[3]{1+x}-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{x(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)} =$$
$$= \lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1} = \frac{1}{3}.$$