Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 4. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 15)

a) Die Rechenregeln für konvergente Reihen sowie die Formel für die Summe der geometrischen Reihe anwendend (für $k = 1$ und $q = \frac{1}{7}$), erhält man $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{7^n} = 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 5 \cdot \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{5}{6}$.

b) Die Formel für die Summe der geometrischen Reihe anwendend (für $q = -\frac{2}{7}$ und $k = 1$), folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{7^{n+1}} = \frac{1}{7} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{7}\right)^n = \frac{1}{7} \cdot \frac{-\frac{2}{7}}{1 + \frac{2}{7}} = -\frac{2}{63}.$$

Die Summe der e-Reihe berücksichtigend, erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+1)!} = 3 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m!} = 3 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} \right) = 3e - 6.$$

Die Rechenregeln für konvergente Reihen anwendend, schließen wir, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-2)^n}{7^{n+1}} - \frac{3}{(n+1)!} \right) = -\frac{2}{63} - 3e + 6$$

ist.

c) Die folgenden Gleichheiten gelten für alle $n \geq 1$

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Sei $a_n := \frac{1}{n^2}$ für $n \geq 1$. Die Formel für die Summe einer Teleskopreihe anwendend, erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

d) Für $n \geq 0$ ist $\frac{2n+3}{(n+1)!} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)!}$, also ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m+1}{m!}.$$

Für alle $m \geq 1$ ist

$$\frac{2m+1}{m!} = \frac{2}{(m-1)!} + \frac{1}{m!}.$$

Aus

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m}{m!} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2e \quad \text{und} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} = e - 1$$

erhält man nach den Rechenregeln für konvergente Reihen

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m+1}{m!} = 2e + e - 1 = 3e - 1.$$

e) Die folgenden Gleichheiten gelten für alle $n \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})} = \sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}.$$

Sei $a_n := \sqrt{n+1}$ für $n \geq 1$. Die Formel für die Summe einer Teleskopreihe anwendend, erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - a_1 = \infty.$$

f) Die folgenden Gleichheiten gelten für alle $n \geq 1$

$$\frac{1}{n!+(n+1)!} = \frac{1}{n!(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}.$$

Sei $a_n := \frac{1}{(n+1)!}$ für $n \geq 0$. Die Formel für die Summe einer Teleskopreihe anwendend, erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!+(n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_0 - \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

g) Aus

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{(n+1)!}\right) = (-3)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!} = -3(e-1) \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{3^{n+2}} = -\frac{2}{3^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = -\frac{2}{15}$$

erhält man nach den Rechenregeln für konvergente Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{(n+1)!} + \frac{(-2)^{n+1}}{3^{n+2}}\right) = -3(e-1) + \frac{2}{15}.$$

(A 16)

a) Die folgenden Gleichheiten gelten für alle $n \geq 0$

$$\frac{1}{(n+p)(n+1+p)} = \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}.$$

Sei $a_n := \frac{1}{n+p}$ für $n \geq 0$. Die Formel für die Summe einer Teleskopreihe anwendend, erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+p)(n+1+p)} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_0 - \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{p}.$$

b) Die folgenden Gleichheiten gelten für alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\frac{2n+1}{(n-1)n(n+1)(n+2)} &= \frac{n^2-n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^2+2n-(n^2-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)-(n-1)(n+1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} - \frac{1}{n(n+2)}.\end{aligned}$$

Sei $a_n := \frac{1}{(n-1)(n+1)}$ für $n \geq 2$. Die Formel für die Summe einer Teleskopreihe anwendend, erhält man

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_2 - \lim_{n\to\infty} a_n = a_2 - 0 = \frac{1}{3}.$$

c) Die folgenden Gleichheiten gelten für alle $n \geq 1$

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

Sei $a_n := \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n(n+1)}$ für $n \geq 1$. Die Formel für die Summe einer Teleskopreihe anwendend, erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}.$$

d) Die folgenden Gleichheiten gelten für alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} &= \frac{n+1-1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\ &= \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.\end{aligned}$$

Sei $a_n := \frac{1}{n+2}$ für $n \geq 1$. Die Rechenregeln für konvergente Reihen, c) sowie die Formel für die Summe einer Teleskopreihe anwendend, erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{4}.$$

e) Die folgenden Gleichheiten gelten für alle $n \geq 2$

$$\begin{aligned}\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) &= \ln(n^2-1) - \ln n^2 = \ln(n+1)(n-1) - 2\ln n = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n \\ &= (\ln(n+1) - \ln n) - (\ln n - \ln(n-1)).\end{aligned}$$

Sei $a_n := \ln n - \ln(n-1) = \ln \frac{n}{n-1}$ für $n \geq 2$. Die Formel für die Summe einer Teleskopreihe anwendend, erhält man

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - a_2 = -\ln 2.$$

f) Die folgenden Gleichheiten gelten für alle $n \geq 2$

$$\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln\left(n^{\ln(n+1)}\right)} = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n \cdot \ln(n+1)} = \frac{1}{\ln n} - \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Sei $a_n := \frac{1}{\ln n}$ für $n \geq 2$. Die Formel für die Summe einer Teleskopreihe anwendend, erhält man

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln\left(n^{\ln(n+1)}\right)} = \sum_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n+1}) = a_2 - \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{\ln 2}.$$