

Lösungshinweise zur 5. Übung

Logik für Informatiker

GRUPPENÜBUNGEN:

(G 1)

Sei $\Pi = \{P, Q\}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Formeln über Π erfüllbar, unerfüllbar, tautologisch sind:

- a) $(P \wedge Q) \vee \neg Q$
- b) $\neg(\neg\neg P \wedge \neg P)$
- c) $\neg(P \vee Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$
- d) $(P \rightarrow Q) \wedge P$
- e) $\neg(P \wedge \neg\neg P)$
- f) $((\neg P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)) \rightarrow P$

Benutzen Sie dazu

- a) Die Wahrheitstafelmethode.
- b) Die Umformungsregeln, die in der Vorlesung vorgestellt wurden. Geben Sie dabei für jeden Schritt, den Namen der verwendeten Regel an.

Hinweis: Bei Verwendung der Wahrheitstafelmethode ist es nicht gestattet die beteiligten Formeln umzuformen.

LÖSUNG:

- a) Formel ist erfüllbar:

Q	P	value
False	False	True
False	True	False
True	False	True
True	True	True

- b) Formel ist tautologisch

P	value
False	True
True	True

- c) Formel ist unerfüllbar

Q	P	value
False	False	False
False	True	False
True	False	False
True	True	False

d) Formel ist erfüllbar

Q	P	value
False	False	False
False	True	False
True	False	False
True	True	True

e) Formel ist erfüllbar

P	value
False	True
True	False

f) Formel ist tautologisch

Q	P	value
False	False	True
False	True	True
True	False	True
True	True	True

(G 2)KNF und DNF

Bringen Sie folgende Formeln in kanonischer KNF und DNF mit und ohne Wahrheitstafel:

a) $((P \rightarrow Q) \wedge (R \leftrightarrow Q)) \rightarrow (P \wedge Q)$

b) $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (R \rightarrow Q)$

LÖSUNG:

a) Wir berechnen zuerst die Wahrheitstafel:

R	Q	P	value
False	False	False	False
False	False	True	True
False	True	False	True
False	True	True	False
True	False	False	True
True	False	True	True
True	True	False	True
True	True	True	True

Die konjunktive Normalform ist $(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R)$. Für die DNF gehen wir ähnlich vor und erhalten $(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$.

b) Die KNF ist $(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee R)$ wegen

R	Q	P	value
False	False	False	True
False	False	True	False
False	True	False	True
False	True	True	True
True	False	False	False
True	False	True	True
True	True	False	True
True	True	True	True

HINWEIS: Gehe auf <http://sagemath.org>, rufe **sage** auf und benutze folgende Befehle um die Wahrheitstafel und die KNF zu berechnen:

```
sage: import sage.logic.propcalc as propcalc
```

```
sage: f = propcalc.formula(' (~ P|Q) <-> (R- > Q)')
```

```
sage: f.truthtable()
```

bzw.

```
sage: f.convert_cnf_table()
```

```
sage: f
```

Die DNF wird nicht automatisch berechnet, dafür musst du zuerst die Formel negieren, die KNF der Negation berechnen und danach die berechnete KNF erneut negieren, um die DNF zu erhalten.

(G 3)

Betrachten Sie die folgenden Aussagen. *Wenn es regnet, dann ist es kalt. Wenn es nicht regnet, dann ist es nicht kalt und die Sonne scheint. Wenn es nicht regnet oder die Sonne scheint, dann hat Anna Lust auf ein Eis. Wenn Anna Lust auf ein Eis hat, dann isst sie auch ein Eis.*

- a) Formalisieren Sie diese Aussagen in Aussagenlogik. Verwenden Sie hierzu geeignete Propositionen.
- b) Bringen Sie die resultierende Formeln aus in KNF und DNF. Verwenden Sie hierzu die logischen Äquivalenzen aus der Vorlesung. Wenden Sie dabei in jedem Schritt nur eine solche Äquivalenzumformung an.
- c) *Für Tüftler:* Überlegen Sie sich wie man beweisen könnte, dass die Aussage *Es ist kalt oder Anna isst ein Eis* aus den obigen Aussagen logisch folgt.