ALGEBRA - FINAL TEST - POSTESCU RĂZVAN - IOAN 713

Friday, January 15, 2021
7:53 AM

1.

a) O funcție $f: A \to B$ se numește injectivă dacă pentru $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$

Fie A o mulțime. O relație de echivalență pe A este o preordine care este de asemenea simetrică, adică o relație omogenă pe A care este reflexivă, tranzitivă și simetrică.

Fie $(R, +, \cdot)$ un inel. Un subinel al lui R este o submulțime $S \subseteq R$ cu proprietatea că operațiile + și · din R induc operații bine definite pe S (adică $x, y \in S \Rightarrow x+y, xy \in S$, se mai spune că S este o parte stabilă în raport cu + și ·), iar cu operațiile induse S formează un inel. Se scrie $S \leq R$.

O listă se zice liniar dependentă dacă nu este liniar independentă. În acest caz o relație de dependență liniară este o egalitate de forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ cu scalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ nu toți nuli

Valoare proprie a aceluiași vector.

Fie $T: V \to V$, T endomorfism. Un vector $\lambda \in K$ este valoare proprie pentru T dacă $\exists\, v \in V$, $v \neq 0$ a.î. $T(v) = \lambda \cdot v$

b) $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = e^x$ - inversabilă

-

-

- $S = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ - subspațiu generat de un singur vector

$(1, 0)$ - coord. lui v în $B = [(2,1), (-1,0)] \Rightarrow v = 1 \cdot (2,1) + 0(-1,0) = (2,1)$

3. $\mathbb{Q} + i\sqrt{p}\,\mathbb{Q} = \{a + i\sqrt{p}\, b \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \overset{not}{=} M$

a) $a = b = 0 \Rightarrow 0 \in M \Rightarrow M \neq \emptyset$ (1) $\quad x, y \in M$

$\Rightarrow x = a_1 + i\sqrt{p}\, b_1$

$y = a_2 + i\sqrt{p}\, b_2$

$$x \cdot y = \underbrace{a_1 a_2 - p b_1 b_2}_{\in \mathbb{Q}} + i\sqrt{p}\,\underbrace{(a_1 b_2 + a_2 b_1)}_{\in \mathbb{Q}}$$

$\Rightarrow X \cdot y \in H(2)$

$X \cdot e = X, \ \forall x \in H$

$a e + i e \sqrt{p} b = a i + \sqrt{p} b, \ \forall a, b \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow e = 1$

$X \cdot X^{-1} = e$

$$X^{-1} = \frac{1}{X} = \frac{1}{a + i\sqrt{p}\, b} = \frac{a - i\sqrt{p}\, b}{a^2 + p b^2} = \underbrace{\frac{a}{a^2 + p b^2}}_{\in \mathbb{Q}} - \underbrace{\frac{\sqrt{p}\, b}{a^2 + p b^2}}_{\in \mathbb{Q}} i$$

$\Rightarrow X^{-1} \in H(3)$

Din (1), (2), (3)

$\Rightarrow (H, \cdot)$ - subinel $(\mathbb{C}, \cdot)$

b) $f((a + i\sqrt{p} b) + (x + i\sqrt{p} y)) = f((a+x) + i\sqrt{p}(b+y)) = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ -p(b+y) & a+x \end{bmatrix}$

$f(a + i\sqrt{p} b) + f(x + i\sqrt{p} y) = \begin{bmatrix} a & b \\ -pb & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ -py & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+y \\ -p(b+y) & a+x \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f((a + i\sqrt{p} b) + (x + i\sqrt{p} y)) = f(a + i\sqrt{p} b) + f(x + i\sqrt{p} y), \ \forall a, b, x \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow f$ - morfism

$X_1, X_2 \in H$

$f(X_1) = f(X_2) \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -p_1 b_1 & a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -p_2 b_2 & a_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \\ p_1 b_1 = p_2 b_2 \end{cases}$

$\Rightarrow X_1 = X_2 \Rightarrow f$ - inj.

2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g: [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \in (-\infty, 1] \\ 2x, & x \in (1, \infty) \end{cases}$ und $g(x) = x^2 + 3x + 2$

a) $f(1) = f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow f$ - nu e inj.

$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Im} f|_{(-\infty, 1]} = (-\infty, 3] \\ \operatorname{Im} f|_{(1, +\infty)} = (2, +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Im} f = (-\infty, 3] \cup (2, +\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R} \Rightarrow f$ - surj.

$g'(x) = 2x + 3$

$g'(x) = 2x + 3$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \quad g(-\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$

x	$-\infty$ $-\frac{3}{2}$ 0 $+\infty$
$g'(x)$	$- - - 0 + + + + + + + + + + + +$
$g(x)$	$\searrow -\frac{1}{4} \nearrow$

$g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} g \nearrow \Rightarrow g\text{-inj} \\ g(x) \geq -\frac{1}{4}, \\ \forall x \in [0, +\infty) \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow Im\, g \subset [-\frac{1}{4}, +\infty) \Rightarrow g$-nu este surj.

b) Funcțiile nu sunt bij $\Rightarrow \nexists f^{-1}, g^{-1}$

c) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} g(x) + 2, & g(x) \in (-\infty, 1] \\ 2 \cdot g(x), & g(x) \in (1, +\infty) \end{cases}$

$g(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 + 3x + 2 = 1 \Rightarrow x^3 + 3x + 1 = 0$

$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{5} - 3}{2} \\ x_2 = \frac{-\sqrt{5} - 3}{2} \\ x \in [0, +\infty) \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} - 3}{2}$

$\Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} g(x) + 2, & x \in [0, \frac{\sqrt{5} - 3}{2}] \\ 2 \cdot g(x), & x \in [\frac{\sqrt{5} - 3}{2}, +\infty) \end{cases} =$

$\begin{cases} x^2 + 3x + 4, & x \in [0, \frac{\sqrt{5} - 3}{2}] \\ 2x^2 + 6x + 4, & x \in (\frac{\sqrt{5} - 3}{2}, +\infty) \end{cases}$

$\lfloor\ 2x^2+6x+4, \quad x \in \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}, +\infty\right)$

4) $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1\}$, $T = <(1,1,1)>_{\mathbb{R}}$

a) S - subspațiu $\mathbb{R}^3$

$S \neq \emptyset$ (1)

$(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in S$

$$\left.\begin{array}{l} (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \\ x_1+y_1 - 3(x_2+y_2) + 2(x_3+y_3) = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + y_1 - 3y_2 + 2y_3 = 0+0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) \in S, \ \forall (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in S$ (2)

$k \in \mathbb{R}, \ (x_1, x_2, x_3) \in S$

$k \cdot (x_1, x_2, x_3) \in S$?

$k \cdot (x_1, x_2, x_3) = (kx_1, kx_2, kx_3), \quad kx_1 - 3kx_2 + 2kx_3 =$

$= k(x_1 - 3x_2 + 2x_3) =$

$= k \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{R}, \forall (x_1, x_2, x_3) \in S, \ k(x_1, x_2, x_3) \in S$ (3)

Din (1), (2), (3) $\Rightarrow$ S - subspațiu $\mathbb{R}_3$

b) $T = <(1,1,1)>_{\mathbb{R}} = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}_3\}$

$S + T = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\} + \{(x, x, x) \in \mathbb{R}_3\}$

$= \{(x_1 + x, x_2 + x, x_3 + x) \in \mathbb{R}_3 \mid x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, x \in \mathbb{R}\}$

$S \cap T = ?$

Verif. dacă $\exists (x, x, x) \in S$

$$\left.\begin{array}{l}(x, x, x) \in S \Rightarrow \quad x - 3x + 2x = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (x, x, x) \in S$$

$\Rightarrow S \cap T = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3\}$

$S = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\} =$

$= \{\langle 1,0,0\rangle, \langle 0,-3,0\rangle, \langle 0,0,2\rangle\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \Rightarrow \text{lin. indep.}$$

$\Rightarrow \dim S = 3$

$E = (e_1, e_2, e_3)$ - baza canonică în $\mathbb{R}^3$ este bază pt S

$T = \langle (1,1,1) \rangle \Rightarrow \dim T = 1$

5. $[f]_e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) $f(x) = X \cdot [f]_{e'} \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$

$f(X) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} = (x_1 - x_2 - x_3, 2x_1 + x_3, 2x_2 + \cancel{x_3}),$

$\forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

b) $\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1 - x_2 - x_3,$

$2x_1 + x_3, 2x_2 + 3x_3) = (0,0,0)\} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_3 = -2x_1$

$x_3 = -\frac{2}{3} x_2$

$\Rightarrow -2x_1 = -\frac{2}{3} x_2 = x_3$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_1 = -\frac{2}{3} x_2 = x_3\} =$

$= \{(-1, -\frac{2}{3}, 1) \cdot x_3 \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$

$= \{<-1, -\frac{2}{3}, 1>\}$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 1$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f =$

$= 3 - 1 = 2$

c) $b = \{(1,2,1), (1,1,2), (1,1,0)\}$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 4 - 1 - 0 - 2 = 2$

$\Rightarrow$ lin indep.

$\Rightarrow b$ - bază $\mathbb{R}^3$