Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 1. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 1)

a)

M	US(M)	OS(M)	$\min M$	$\max M$	$\inf M$	$\sup M$
$\mathbb{R}_+^*$	$(-\infty, 0]$	$\emptyset$	$\nexists$	$\nexists$	0	∞
$(-3, 0] \cup \{7\}$	$(-\infty, -3]$	$[7, \infty)$	$\nexists$	7	-3	7
$(-\sqrt{7}, \infty) \cap \mathbb{Z}$	$(-\infty, -2]$	$\emptyset$	-2	$\nexists$	-2	∞
$[\pi, 10] \cap \mathbb{Q}$	$(-\infty, \pi]$	$[10, \infty)$	$\nexists$	10	π	10
$\{x \in \mathbb{R} \mid x^8 + 2x^4 \leq -1\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\nexists$	$\nexists$	∞	$-\infty$
$\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - x^2 - 6x \geq 0\}$	$(-\infty, -2]$	$\emptyset$	-2	$\nexists$	-2	∞
$\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x+1}{x^2+1} < 1\right\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\nexists$	$\nexists$	$-\infty$	∞

Für die letzten drei Mengen beachte man, dass

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^8 + 2x^4 \leq -1\} = \emptyset, \text{ weil } x^8 + 2x^4 \geq 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

$$x^3 - x^2 - 6x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-3)(x+2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-2, 0] \cup [3, \infty)$$

und

$$\frac{x+1}{x^2+1} < 1 \Leftrightarrow x - x^2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

b) Z. B. $M = (-3, 0] \cup (2, \infty)$.

(A 2)

1) a) $(-1, 2] \in \mathcal{U}(1)$, da $B_1(1) = (0, 2) \subseteq (-1, 2]$.

b) $\mathbb{N} \notin \mathcal{U}(1)$, weil $\nexists\, r > 0$ mit $B_r(1) = (-r+1, r+1) \subseteq \mathbb{N}$, da, für alle $r > 0$, die r-Umgebung $B_r(1)$ von 1 (wegen der Dichtheitseigenschaft von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) auch irrationale Zahlen enthält, also $B_r(1) \nsubseteq \mathbb{N}$.

c) $\mathbb{R} \setminus \{1\} \notin \mathcal{U}(1)$, da $1 \notin \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

d) $(-\infty, -1) \cup [0, 5] \in \mathcal{U}(1)$, da $B_1(1) = (0, 2) \subseteq (-\infty, -1) \cup [0, 5]$.

e) $[1, \infty) \notin \mathcal{U}(1)$, weil $\nexists\, r > 0$ mit $B_r(1) = (-r+1, r+1) \subseteq [1, \infty)$, da, für alle $r > 0$, die r-Umgebung $B_r(1)$ von 1 auch Zahlen enthält, die < 1 sind, also $B_r(1) \nsubseteq [1, \infty)$.

2) a) $[-1, \infty) \notin \mathcal{U}(-\infty)$, da $\nexists\, a \in \mathbb{R}$ so, dass $(-\infty, a) \subseteq [-1, \infty)$ gilt.

b) $(-\infty, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \notin \mathcal{U}(-\infty)$, weil $\nexists\, a \in \mathbb{R}$ mit $(-\infty, a) \subseteq (-\infty, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, da, für alle $a \in \mathbb{R}$, das Intervall $(-\infty, a)$ (wegen der Dichtheitseigenschaft von $\mathbb{Q}$) auch rationale Zahlen enthält, also $(-\infty, a) \nsubseteq (-\infty, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

c) $\mathbb{Z} \notin \mathcal{U}(-\infty)$, weil $\nexists\, a \in \mathbb{R}$ mit $(-\infty, a) \subseteq \mathbb{Z}$, da, für alle $a \in \mathbb{R}$, das Intervall $(-\infty, a)$ (wegen der Dichtheitseigenschaft von $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) auch irrationale Zahlen enthält, also $(-\infty, a) \nsubseteq \mathbb{Z}$.

(A 3)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

a) Für $x \in \mathrm{OS}(M)$ ist auch $[x, \infty) \subseteq \mathrm{OS}(M)$, also hat $\mathrm{OS}(M)$ unendlich viele Elemente.

b) Hat M kein größtes Element, dann stimmt offensichtlich die Aussage. Wir nehmen an, $m_1 \in M$ und $m_2 \in M$ wären beide größte Elemente von M.

Da m_1 ein größtes Element von M und $m_2 \in M$ ist, erhält man

$$m_2 \leq m_1. \tag{1}$$

Da m_2 ein größtes Element von M und $m_1 \in M$ ist, erhält man

$$m_1 \leq m_2. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt nun $m_1 = m_2$.

c) Ist $M = \emptyset$, dann ist, laut Definition, $-\infty$ das Supremum von M. Ist M nach oben unbeschränkt, dann ist ∞ das Supremum von M. In diesem Fall kann das Supremum von M keine reelle Zahl sein, weil das die Beschränktheit nach oben von M zur Folge hätte.

Es sei nun M nichtleer und nach oben beschränkt. In diesem Fall kann also das Supremum von M weder ∞ noch $-\infty$ sein. Wir nehmen an, die reellen Zahlen a und b wären beide Suprema von M. Insbesondere sind also a und b obere Schranken von M. Da a eine kleinste obere Schranke von M und b eine obere Schranke von M ist, folgt, dass $a \leq b$. Daraus, dass b eine kleinste obere Schranke von M und a eine obere Schranke von M ist, folgt $b \leq a$. Also ist $a = b$.

Also ist das Supremum einer Menge eindeutig bestimmt.

d) Da M ein größtes Element hat, ist M nichtleer und nach oben beschränkt, also ist $\sup M \in \mathbb{R}$. Aus $\max M \in M$ und $\sup M \in \mathrm{OS}(M)$ folgt

$$\max M \leq \sup M. \tag{3}$$

Außerdem ist $\max M \in M \cap \mathrm{OS}(M)$. Da $\sup M$ die kleinste obere Schranke und $\max M \in \mathrm{OS}(M)$ ist, folgt

$$\sup M \leq \max M. \tag{4}$$

Aus (3) and (4) erhält man nun die zu zeigende Gleichheit $\max M = \sup M$.

(A 4)

Die Beweise sind analog zu denen aus (A 3).

(A 5)

F4: Sei S eine nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und M eine nichtleere Teilmenge von S. Dann ist M ebenfalls nach unten beschränkt und es gilt $\inf S \leq \inf M$.

Beweis: Aus $\emptyset \neq M \subseteq S \Rightarrow S \neq \emptyset$. Da S nichtleer und nach unten beschränkt ist, folgt aus **Th3** in der ersten Vorlesung, dass $\exists \inf S \in \mathbb{R}$. Aus $\inf S \in \mathrm{US}(S)$ folgt, dass $\inf S \leq a, \forall\, a \in S$, also, da $M \subseteq S$ ist, gilt auch $\inf S \leq a, \forall\, s \in M$. Also ist $\inf S \in \mathrm{US}(M)$, was zur Folge hat, dass M nach unten beschränkt ist. **Th3** in der ersten Vorlesung impliziert nun, dass $\exists \inf M \in \mathbb{R}$. Da $\inf S \in \mathrm{US}(M)$ ist, erhält man schließlich die zu zeigende Ungleichung $\inf S \leq \inf M$.