Department für Informatik
Dr. Christian Săcărea

Babes–Bolyai Universität
Cluj-Napoca

14. Januar 2021

Schriftliche Prüfung zur Logik für Inf
WS 20/21

Bitte alle Blätter mit *Namen* versehen, fortlaufend numerieren, am Schluss der Klausur in die einmal gefalteten Aufgabenblätter legen. *Alle* Ergebnisse sind zu *begründen*. Insbesondere werden Lösungswege bewertet.

Bitte in Blockschrift ausfüllen
Name:..............................
Vorname:...........................

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Mögl. Punktzahl	16	8	5	7	14	8	8	15	81
Err. Punktzahl									

Note:

Die Klausur gilt als **bestanden**, falls mindestens 37 Punkte erreicht werden. Die Zusatzaufgabe ist eine Bonusaufgabe.

Aufgabe 1. (16 Punkte)
Seien $\Pi = \{P, Q, R\}$ eine Menge von Aussagenvariablen und F folgende Formel über Π:

$$F = \big(P \to (Q \lor \neg R)\big) \to \Big((R \land P) \leftrightarrow \big(Q \lor (P \to Q)\big)\Big).$$

a) Man gebe die Wahrheitstabelle an. (3 Punkte)

b) Man gebe die Definition der Erfüllbarkeit, Unerfüllbarkeit und Allgemeingültigkeit einer aussagenlogischen Formel an. (2 Punkte)

c) Gegeben seien die Formeln $G = P \lor R$, $H = \neg Q \lor R$ und $K = (P \lor \neg Q) \land (P \lor R)$ über Π.

1. Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, welche Eigenschaften G, H und K haben. (2 Punkte)

G	erfüllbar	unerfüllbar	allgemeingültig
ja	☐	☐	☐
nein	☐	☐	☐

H	erfüllbar	unerfüllbar	allgemeingültig
ja	☐	☐	☐
nein	☐	☐	☐

K	erfüllbar	unerfüllbar	allgemeingültig
ja	☐	☐	☐
nein	☐	☐	☐

2. Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, welche Beziehungen zwischen gelten. (2 Punkte)

	$F \models G$	$G \models F$	$F \equiv G$	$F \models H$	$H \models F$	$F \equiv H$	$F \models K$	$K \models F$	$F \equiv K$
ja	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
nein	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

3. Geben Sie mit Hilfe der Wahrheitstabelle von F eine disjunktive Normalform von F an. (1 Punkt)

4. Geben Sie mit Hilfe der Wahrheitstabelle von F eine konjunktive Normalform von F an. (1 Punkt)

d) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen zutreffen oder nicht zutreffen. Pro korrektem Kreuz werden 0.5 Punkte vergeben. Pro inkorrektem Kreuz werden 0.5 Punkte abgezogen. (max. 4 Punkte)

- Seien F und G zwei beliebige Formeln. $F \models G$ genau dann, wenn

	wahr	falsch
$F \rightarrow G$ erfüllbar ist.	☐	☐
$\neg(\neg F \land G)$ erfüllbar ist.	☐	☐
$\neg(F \rightarrow G)$ unerfüllbar ist.	☐	☐
mit Resolution die leere Klausel aus $F \rightarrow G$ hergeleitet werden kann.	☐	☐

- Sei F eine beliebige Formel. F ist allgemeingültig genau dann, wenn

	wahr	falsch
es eine allgemeingültige Formel G gibt, mit $G \models F$.	☐	☐
die leere Klausel aus F durch Resolution nicht hergeleitet werden kann.	☐	☐
$F \lor \neg F$ allgemeingültig ist.	☐	☐
$\neg F \models F$	☐	☐

Aufgabe 2. (8 Punkte)

Seien $\Pi = \{a, b, c, d, e, f\}$ eine Menge von propositionalen Konstanten und $\phi = (\neg f \lor a) \land (\neg c \lor \neg d \lor b) \land (\neg d \lor \neg e \lor c) \land (\neg d \lor e) \land (\neg d \lor \neg f \lor c) \land (\neg b \lor \neg e \lor f) \land (\neg b \lor \neg f) \land d$ eine Formel über Π.

a) Entscheiden Sie, ob F eine Hornformel ist und begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

b) Verwenden Sie den Markierungsalgorithmus, um die Erfüllbarkeit von F zu untersuchen. Geben Sie explizit jeden Schritt an, welche Atome markiert werden und wieso die Markierung zustande kommt. (5 Punkte)

c) Verwenden Sie voriges Ergebnis, um zu begründen ob die Formel F erfüllbar ist oder nicht. Geben Sie im Fall der Erfüllbarkeit das Modell an, das aus dem Markierungsalgorithmus hergeleitet wurde. (2 Punkte)

Aufgabe 3. (5 Punkte)

Seien $\Pi = \{Q, R, S, T, U, W\}$ eine Menge von propositionalen Konstanten und N folgende Klauselmenge über Π:

$$N = \{\{R\}, \{\neg S, U\}, \{R, \neg Q\}, \{Q, \neg R\}, \{\neg T, S\}, \{W, \neg U\}, \{S, T\}, \{\neg U, \neg W\}\}.$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Resolutionskalküls, dass F allgemeingültig ist. (4 Punkte)

b) Verwenden Sie das vorige Ergebnis, um eine begründete Aussage zur Erfüllbarkeit von F zu machen. (1 Punkt)

Aufgabe 4. (7 Punkte)

Seien $\Pi = \{P, Q, R\}$ eine Menge von Aussagenvariablen und F folgende Formel über Π:

$$F = \big(P \rightarrow (Q \lor \neg R)\big) \rightarrow \Big((R \land P) \leftrightarrow \big(Q \lor (P \rightarrow Q)\big)\Big).$$

a) Verwenden Sie den DPLL-Algorithmus, um die Erfüllbarkeit von F zu untersuchen. (5 Punkte)

b) Verwenden Sie das vorige Ergebnis, um eine begründete Aussage zur Erfüllbarkeit von F zu machen. (2 Punkte)

Aufgabe 5. (14 Punkte)

a) Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0, b/0, f/1, g/2\}$ und $\Pi = \{p/1, = /2\}$. Ferner sei X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$. Markieren Sie durch Ankreuzen, welche der folgenden Formeln über Σ und X in NNF, bereinigt, in Pränexnormalform, in Skolemnormalform sind. (4 Punkte)

	Ausdruck	Term	Atom	Literal	Klausel	Formel	NNF	PNF	SNF
$\big(\forall x x = f(b)\big) \vee p(a)$									
$\neg\exists y\big(p(g(f(a), y))\big)$									
$g(f(b), y)$									
$\big(g(y, a) = b\big) \vee \big(p(f(z))\big)$									
$\neg(y = f(f(a)))$									
$\exists x\neg(f(b) = g(a, x))$									
$p(g(x, f(b)))$									
$f(g(x, b))$									
$\neg(x = b \wedge p(f(f(x)))$									
$\forall x\exists y\neg(y = x)$									
$g(b, z) = z$									
$\forall x(p(g(b, x)) \to p(f(x)))$									

b) Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/3, r/4\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $u, v, w, x, y, z \in X$.

1. Geben Sie für die folgende Formel über Σ und X eine äquivalente Formel in NNF an. (2 Punkte)
$$\neg\exists x((\forall y\neg q(x, y, b)) \to (r(x, y, a, b))).$$

2. Geben Sie für die folgende Formel über Σ und X eine äquivalente Formel in bereinigter Form an. (2 Punkte)
$$\forall x\forall y(\neg r(a, y, z, x) \wedge (\exists y\neg q(z, x, y)) \vee (\forall z r(a, z, x, y))).$$

3. Geben Sie für die folgende Formel über Σ und X eine äquivalente Formel in Pränexnormalform an. (1 Punkt)
$$(\forall x((\exists y q(y, x, a)) \wedge \neg p(x, a))) \vee (\forall u\forall w r(w, a, u, b)).$$

4. Bringen Sie die folgende Formel über Σ und X in Skolemnormalform. (2 Punkte)
$$\exists u\forall x\exists w\forall y\exists z((q(a, z, u) \vee \neg p(x, y)) \wedge r(z, w, a, v) \wedge \neg p(u, x)).$$

5. Geben Sie für die folgende Formel über Σ und X eine äquivalente Formel in KNF an. (2 Punkte)
$$\forall x\forall y(((\neg p(x, y) \wedge q(x, x, y)) \vee (\neg p(a, b) \wedge q(x, y, a))) \wedge p(x, y))$$

6. Stellen Sie die folgende Formel über Σ und X als Klauselmenge dar. (1 Punkt)
$$\forall x\forall y(q(a, x, y) \wedge (p(a, x) \vee r(b, a, y, x) \vee \neg q(a, a, a)) \wedge p(y, y)).$$

Aufgabe 6. (8 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{0/0, 1/0, f/2, g/3, h/1\}$ und $\Pi = \{= /2\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$. Gegeben sind die Struktur $\mathcal{A}$ und die Belegung β mit $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, \{0_{\mathcal{A}} \in \mathbb{Q}, 1_{\mathcal{A}} \in \mathbb{Q}, f_{\mathcal{A}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, g_{\mathcal{A}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, h_{\mathcal{A}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\}$, so dass

- $0_{\mathcal{A}} = 2 \in \mathbb{Z}$, $1_{\mathcal{A}} = -1 \in \mathbb{Q}$
- $f_{\mathcal{A}}(q_1, q_2) = q_1 - q_2 \in \mathbb{Q}$ für alle $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$
- $g_{\mathcal{A}}(q_1, q_2, q_3) = (q_1 + q_2 - q_3^2) \in \mathbb{Q}$ für alle $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Q}$
- $h_{\mathcal{A}}(q) = (q + 1)^2 \in \mathbb{Q}$ für alle $q \in \mathbb{Q}$

- $=_\mathcal{A}= \{(r,r) \mid r \in \mathbb{Q}\}$ ist die Gleichheitsrelation und
- $\beta\colon X \to \mathbb{Z}$ definiert durch $\beta(x) = 0, \beta(y) = 1, \beta(z) = 1$.

Evaluieren Sie die folgenden Terme und Formeln:

a) $\mathcal{A}(\beta)\Big(g\big(h(y), h(x), f(0, h(1))\big)\Big)$ (2 Punkte)

b) $\mathcal{A}(\beta)\Big(\forall x \forall y\big(h(g(x,y,z)) = f(h(x), h(y))\big)\Big)$ (3 Punkte)

c) $\mathcal{A}(\beta)\Big(\forall z \exists y \exists x\big(h(z) = h(1) \to g(z,y,x) = h(1)\big)\Big)$. (3 Punkte)

Aufgabe 7. (8 Punkte)
Seien $\Omega = \{a/0, h/1, f/3, g/2\}$ eine Menge von Funktionensymbolen, X eine Menge von Variablen und $u, w, x, y, z \in X$. Verwenden Sie den Martelli-Montanari-Algorithmus an, um die Unifizierbarkeit der folgenden Unifikationsprobleme über Ω und X zu untersuchen. Geben Sie explizit den allgemeinsten Unifikator an (mgu).

a) $\{f(x, z, h(w)) \stackrel{?}{=} f(h(u), u, h(h(u))), g(x, h(y)) \stackrel{?}{=} g(w, h(h(x)))\}$. (2+2 Punkte)

b) $\{f(w, g(w, x), x) \stackrel{?}{=} f(y, g(y, f(a, y, z)), y)\}$. (2+2 Punkte)

Aufgabe 8. (15 Punkte)
Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0, b/0\}$ und $\Pi = \{p/3, q/2\}$. Seien X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$.

a) Geben Sie die allgemeine Form der prädikatenlogischen Faktorisierungsregel (für Klauseln in Mengennotation) an. (3 Punkte)

b) Geben Sie die allgemeine Form der prädikatenlogischen Resolutionsregel (für Klauseln in Mengennotation) an. (4 Punkte)

c) Untersuchen Sie, welche der folgenden Klauseln über Σ und X faktorisierbar sind. Ist eine Klausel faktorisierbar, geben Sie den Faktor und den verwendeten Unifikator an. Ist eine Klausel nicht faktorisierbar, begründen Sie, warum dem so ist. (4 Punkte)

1. $\{q(f(f(x)), y, x), q(z, y, z), p(f(x), y, z)\}$
2. $\{q(f(f(x)), y, f(y)), q(f(z), a, z), q(x, b, b), \neg q(x, z, y)\}$
3. $\{q(y, b, f(y)), q(z, y, f(a)), p(x, y, z)\}$

d) Bilden Sie sämtliche Resolventen, die sich mit der Resolutionsregel aus den folgenden Klauseln über Σ und X bilden lassen: (4 Punkte)

- (1) $\{\neg p(f(a), y, x), p(z, z, f(a))\}$ und (2) $\{\neg p(a, c, x), p(z, y, f(z))\}$,
- (1) $\{\neg p(f(a), y, x), p(z, z, f(a))\}$ und (3) $\{\neg p(y, y, a), p(a, z, x)\}$,
- (2) $\{\neg p(a, c, x), p(z, y, f(z))\}$ und (3) $\{\neg p(y, y, a), p(a, z, x)\}$.