Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 12. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 49)

In allen Fällen verwenden wir die Formel von Leibniz-Newton für uneigentliche Integrale.

a) Die Funktion $F\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = \arcsin x$, ist eine Stammfunktion von f. Aus

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \arcsin x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$$

folgt, dass f auf $(-1,1)$ uneigentlich integrierbar und $\int_{-1+}^{1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi$ ist.

b) Wir bestimmen zuerst eine Stammfunktion F von f auf $[1,\infty)$. Da

$$\int \frac{1}{x(1+x)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \ln x - \ln(1+x) + \mathcal{C},$$

folgt, dass $F\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = \ln \frac{x}{1+x}$, eine Stammfunktion von f ist. Aus

$$\lim_{x\to\infty} \ln \frac{x}{1+x} = 0,$$

folgt, dass f uneigentlich integrierbar auf $[1,\infty)$ und $\int_1^{\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx = \ln 2$ ist.

c) Wir bestimmen zuerst eine Stammfunktion F von f auf $(0,1]$. Da

$$\int \ln x dx = \int (x)' \ln x dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + \mathcal{C},$$

folgt, dass $F\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = x \ln x - x$, eine Stammfunktion von f ist. Aus

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x \ln x - x) = - \lim_{y\to\infty} \frac{\ln y}{y} = 0,$$

folgt, dass f uneigentlich integrierbar auf $(0,1]$ und $\int_{0+}^{1} \ln x dx = -1$ ist.

d) Wir bestimmen zuerst eine Stammfunktion F von f auf $[0,1)$. Da

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \arcsin x (\arcsin x)' dx = \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + \mathcal{C},$$

folgt, dass $F\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2$, eine Stammfunktion von f ist. Aus

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (\arcsin x)^2 = \left(\frac{\pi}{2} \right)^2,$$

folgt, dass f uneigentlich integrierbar auf $[0,1)$ und $\int_0^{1-} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{(\pi)^2}{8}$ ist.

e) Wir bestimmen zuerst eine Stammfunktion F von f auf $(0,1]$. Da

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = 2\int (\sqrt{x})' \ln x dx = 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + \mathcal{C},$$

folgt, dass $F\colon (0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}$, eine Stammfunktion von f ist. Aus

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x}\right) = -2\lim_{y\to\infty} \frac{\ln y}{\sqrt{y}} = 0,$$

folgt, dass f uneigentlich integrierbar auf $(0,1]$ und $\int_{0+}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = -4$ ist.

f) Wir bestimmen zuerst eine Stammfunktion F von f auf $[e,\infty)$. Da

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^3}dx = \int \frac{(\ln x)'}{(\ln x)^3}dx = -\frac{1}{2(\ln x)^2} + \mathcal{C},$$

folgt, dass $F\colon [e,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = -\frac{1}{2(\ln x)^2}$, eine Stammfunktion von f ist. Aus

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{1}{2(\ln x)^2} = 0,$$

folgt, dass f uneigentlich integrierbar auf $[e,\infty)$ und $\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3}dx = \frac{1}{2}$ ist.

g) Die Lösungen der Gleichung $2x^2 - 2x - 1 = 0$ sind $x_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ und $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$. Wir bestimmen zuerst eine Stammfunktion F von f auf $(x_2, 2]$. Da

$$\int \frac{1}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}dx = \int \frac{1}{x^2\sqrt{2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}dx = -\int \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\sqrt{3-\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}}dx = -\arcsin\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{3}} + \mathcal{C},$$

folgt, dass $F\colon (x_2, 2] \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = -\arcsin\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{3}}$, eine Stammfunktion von f ist. Aus

$$\lim_{\substack{x\to x_2\\ x>x_2}} \arcsin\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{3}} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \quad \text{and} \quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3},$$

folgt, dass f uneigentlich integrierbar auf $(x_2, 2]$ und $\int_{x_2+}^{2} \frac{1}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}dx = \frac{\pi}{6}$ ist.

h) Wir bestimmen zuerst eine Stammfunktion F von f auf $[0,\infty)$. Da

$$\int \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) dx = \frac{\pi}{2}x - \int (x)'\operatorname{arctg} x dx = \frac{\pi}{2}x - x\operatorname{arctg} x + \int \frac{x}{1+x^2}dx =$$
$$= x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \mathcal{C} = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) + \ln(\sqrt{1+x^2}) + \mathcal{C},$$

folgt, dass $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) + \ln(\sqrt{1+x^2})$, eine Stammfunktion von f ist. Aus

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{y}}{y} = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{1}{y^2+1} = 1$$

(beim Bestimmen des Grenzwertes wurde L'Hospitals Regel verwendet) folgt

$$\lim_{x\to\infty} \left(x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) + \ln(\sqrt{1+x^2}\right) = \infty,$$

also ist f auf $[0,\infty)$ nicht uneigentlich integrierbar.

(A 50)

a) Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 8(x-y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 8(x-y)$. Die stationären Punkte von f sind die Lösungen des folgenden Systems

$$\begin{cases} 4x^3 - 8(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 8(x-y) = 0. \end{cases}$$

Durch Addieren der beiden Gleichungen folgt $x^3 = -y^3$, also $x = -y$. Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhält man $x^3 - 4x = 0$, also $x \in \{-2, 0, 2\}$. Die stationären Punkte von f sind somit $(-2,2)$, $(0,0)$ und $(2,-2)$.

Für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gelten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 8.$$

Die Hesse-Matrizen in den den stationären Punkten sind

$$H_f(-2,2) = H_f(2,-2) = \begin{pmatrix} 40 & 8 \\ 8 & 40 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}.$$

Da $H_f(-2,2) = H_f(2,-2)$ positiv definit ist, sind $(-2,2)$ und $(2,-2)$ lokale Minimalstellen von f. Die dazugehörigen lokalen Extremwerte sind $f(-2,2) = -32$ und $f(2,-2) = -32$.

Da die Determinante der Matrix $H_f(0,0)$ Null beträgt (genauer gesagt, ist diese Matrix negativ semidefinit, was aus Betrachtung der dazugehörigen quadratischen Form sofort ersichtlich ist), liefert der Algorithmus zur Bestimmung der lokalen Extremstellen keinerlei Information zu dem Punkt $(0,0)$. Trotzdem stellen wir fest, dass $f(0,0) = 0$, $f(x,x) = 2x^4$ und $f(x,0) = x^2(x^2-4)$, für alle $x \in \mathbb{R}$, ist. Es folgt, dass in jeder Umgebung von $(0,0)$ die Funktion f sowohl positive als auch negative Werte annimmt (z.B. gilt $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) > 0$ und $f(\frac{1}{n}, 0) < 0$, für alle $n \in \mathbb{N}^*$). Also ist $(0,0)$ keine lokale Extremstelle von f.

b) Sei $(x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$ beliebig. Dann sind

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x + \cos(x+y) \text{ and } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cos y + \cos(x+y).$$

Die stationären Punkte von f sind die Lösungen des Systems

$$\begin{cases} \cos x + \cos(x+y) = 0 \\ \cos y + \cos(x+y) = 0. \end{cases}$$

Durch Subtrahieren der beiden Gleichungen erhält man $\cos x = \cos y$. Den Definitionsbereich von f berücksichtigend, folgt nun $x = y$. Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhält man

$$\cos x + \cos 2x = 0 \Longleftrightarrow \cos x + 2(\cos x)^2 - 1 = 0.$$

Wir setzen $t := \cos x$ und erhalten somit $2t^2 + t - 1 = 0$, deren Lösungen $t_1 = -1$ und $t_2 = \frac{1}{2}$ sind. Wir erhalten also $\cos x \in \{-1, \frac{1}{2}\}$. Da jedoch $x \in (0,\pi)$ ist, kann nur $\cos x = \frac{1}{2}$, d.h. $x = \frac{\pi}{3}$ in Frage kommen. Also ist $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ der einzige stationäre Punkt von f. Wir bestimmen nun die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung. Für alle $(x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi)$ sind

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\sin x - \sin(x+y), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\sin y - \sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -\sin(x+y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y),$$

also ist

$$H_f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Wegen $\Delta_1=-\sqrt{3}<0$ und $\Delta_2=\frac{3}{2}>0$ schließen wir, dass $H_f(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ negativ definit ist. Also ist $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$ eine lokale Maximalstelle von f. Der dazugehörige lokale Extremwert beträgt

$$f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

c) Für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x(1-y)^3$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y-3x^2(1-y)^2$. Die stationären Punkte von f sind die Lösungen des folgenden Systems

$$\begin{cases} 2x(1-y)^3=0 \\ 2y-3x^2(1-y)^2=0. \end{cases}$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich $x=0$ oder $y=1$. Ist $x=0$, dann impliziert die zweite Gleichung, dass $y=0$ ist. Man beachte, dass $y=1$ die zweite Gleichung nicht erfüllt, also kann $y=1$ ausgeschlossen werden. Somit ist $(0,0)$ der einzige stationäre Punkt von f.

Für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ gelten

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2(1-y)^3,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=-6x(1-y)^2,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2+6x^2(1-y),$$

also ist

$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Ungleichungen $2>0$ und $4>0$ implizieren, dass $H_f(0,0)$ positiv definit, also, dass $(0,0)$ eine lokale Minimalstelle von f ist. Außerdem gilt $f(0,0)=0$.