GEOMETRIE - S2

Thursday, February 25, 2021 2:57 PM

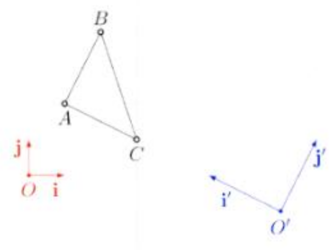
1. Es werden zwei Koordinatensysteme gegeben: $\mathcal{K} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ und $\mathcal{K}' = (O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ (Abb. 1) mit

$$[O']_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{i}']_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{j}']_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Matrix der Basisänderung von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$ und die Koordinaten der Punkte

$$[A]_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad [B]_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad [C]_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

im Koordinatensystem $\mathcal{K}'$. Bestimme die Matrix der Basisänderung von $\mathcal{K}'$ nach $\mathcal{K}$ und verwende die zuvor berechneten Koordinaten um $[A]_{\mathcal{K}}$, $[B]_{\mathcal{K}}$ und $[C]_{\mathcal{K}}$ zu berechnen.



Die Matrix der Basisänderung von K nach K':

$$M = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad M^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\forall P \in E^2 \quad [P]_{K'} = M^{-1}([P]_K - [O']_K)$

$\Leftrightarrow \quad M[[P]_{K'}] = [P]_K - [O']_K$

$\Leftrightarrow [P]_K = M[P]_{K'} + [O']_K = M([P]_{K'} - [O]_{K'})$

$$[A]_K = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[B]_{K'} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -10 - 5 \\ 5 - 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -15 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$[C]_{K'} = \dots$

$$\left.\begin{matrix} i' = -2i + j \\ \dots \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} i = -\frac{2}{5}i' + \frac{1}{5}j' \\ j = \frac{1}{5}i' + \frac{2}{5}j' \end{matrix}$$

$[i]_{K'} = ?$

L JK

$[i]_{K'} = ?$

$[j]_{K'} = ?$

$$\left.\begin{aligned} i' &= -2i + j \\ j' &= i + 2j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} i &= -\tfrac{2}{5} i' + \tfrac{1}{5} j' \\ j &= \tfrac{1}{5} i' + \tfrac{2}{5} j' \end{aligned}$$

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = M^{-1}$$

Basisänderungsmatrix von K' nach K

$$[O]_{K'} = -M^{-1}[O']_K \iff [O']_K = -M[O]_{K'}$$

$$[P]_K = \tilde{M}^{-1}\left([P]_{K'} - [O]_{K'}\right)$$

$$\tilde{M} = M^{-1}$$

$$[A]_K = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. Es werden zwei Koordinatensysteme gegeben: $\mathcal{K} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ und $\mathcal{K}' = (O', \mathbf{i}', \mathbf{j}')$ (Abb. 2) mit

$$[O']_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{i}']_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{j}']_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Matrix der Basisänderung von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$ und die Koordinaten des Punktes

$$[A]_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} + 1 \end{bmatrix}.$$

im Koordinatensystem $\mathcal{K}'$. Bestimme die Matrix der Basisänderung von $\mathcal{K}'$ nach $\mathcal{K}$ und verwende die zuvor berechneten Koordinaten um $[A]_{\mathcal{K}}$ zu berechnen.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \qquad \det M = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \frac{2}{\ldots} \Big[\; \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad +\frac{1}{2} \; \Big]$$

$$\Rightarrow M^{-1} = \frac{2}{1+\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & +\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$[P]_K = M^{-1}([P]_K - [O']_K)$$

$$[A]_K = \frac{2}{1+\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & +\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3\\ \sqrt{3}+1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}7\\ 1\end{bmatrix}\right)$$

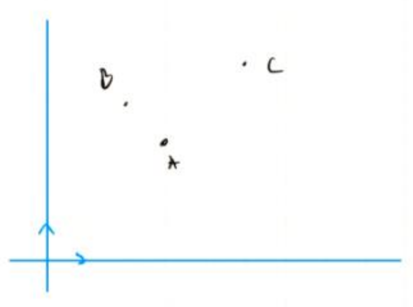
$$= \frac{2}{1+\sqrt{3}}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{1+\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-\frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -4\end{bmatrix}$$

$$= \dots$$

3. In einem Koordinatensystem $\mathcal{K}$ werden die Punkte $A(3,3)$, $B(2,4)$ und $C(5,5)$ gegeben. Bestimme das Koordinatensystem $\mathcal{K}'$ so, dass

$$[A]_{\mathcal{K}'} = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}, \quad [B]_{\mathcal{K}'} = \begin{bmatrix}0\\-2\end{bmatrix}, \quad [C]_{\mathcal{K}'} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$



$K' = (O', i', j')$

$[O']_K =$

$[i']_K =$

$[j']_K =$

$$[A]_{K'} = M^{-1}\left([A]_K - [O']_K\right)$$

$$\begin{cases} M[A]_{K'} = [A]_K - [O']_K \\ M[B]_{K'} = [B]_K - [O']_K \\ M[C]_{K'} = [C]_K - [O']_K \end{cases}$$

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \quad [O']_K = \begin{bmatrix} o_1' \\ o_2' \end{bmatrix}$$

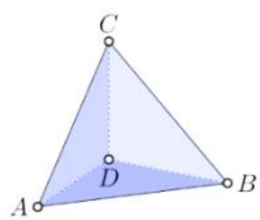
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o_1' \\ o_2' \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o_1' \\ o_2' \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} o_1' \\ o_2' \end{bmatrix} \end{cases}$$

4. Es sei $ABCD$ ein Tetraeder (Abb. 3) und die Koordinatensysteme

$$\mathcal{K}_A = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}), \quad \mathcal{K}'_A = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}), \quad \mathcal{K}_B = (B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}).$$

Bestimme

(a) Die Koordinaten der Ecken in den drei Koordinatensystemen
(b) Die Matrix der Basisänderung von $\mathcal{K}_A$ nach $\mathcal{K}'_A$
(c) Die Matrix der Basisänderung von $\mathcal{K}_B$ nach $\mathcal{K}_A$



a) $[C]_{K'_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$[C]_{K'_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A]_{K_B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[B]_{K_B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[C]_{K_B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

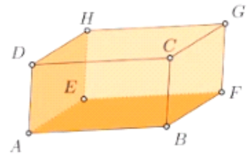
c) $$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Es sei $ABCDEFGH$ ein Parallelepiped mit Seiten, die Parallelogramme $ABCD$, $ABFE$ und $EFGH$ (Abb. 4). Für folgende Koordinatensysteme

$$\mathcal{K}_A = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}), \quad \mathcal{K}'_A = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}), \quad \mathcal{K}_F = (F, \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}).$$

bestimme

(a) Die Koordinaten der Ecken in den drei Koordinatensystemen
(b) Die Matrix der Basisänderung von $\mathcal{K}_A$ nach $\mathcal{K}'_A$
(c) Die Matrix der Basisänderung von $\mathcal{K}_F$ nach $\mathcal{K}_A$



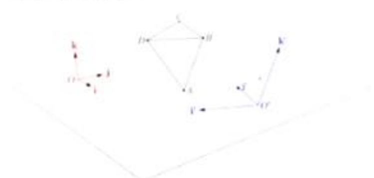
6. Es werden zwei Koordinatensysteme gegeben: $\mathcal{K} = (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ und $\mathcal{K}' = (O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$ (Abb. 5) mit

$$[O']_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{i}']_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{j}']_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{k}']_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Matrix der Basisänderung von $\mathcal{K}$ nach $\mathcal{K}'$ und die Koordinaten der Punkte

$$[A]_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad [B]_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [C]_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [D]_{\mathcal{K}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

im Koordinatensystem $\mathcal{K}'$. Bestimme die Matrix der Basisänderung von $\mathcal{K}'$ nach $\mathcal{K}$ und verwende die zuvor berechneten Koordinaten um $[A]_{\mathcal{K}}$, $[B]_{\mathcal{K}}$, $[C]_{\mathcal{K}}$ und $[D]_{\mathcal{K}}$ zu berechnen.



$$M = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$[A]_{K'} = M^{-1}\left([A]_K - [O']_K\right)$$

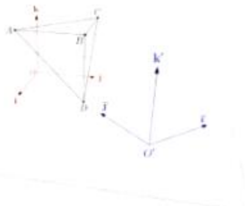
7. Bob erhält von Alice die Ecken eines Tetraeders $ABCD$:

$$A = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{K}}, \quad B = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{K}}, \quad C = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{K}}, \quad D = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}_{\mathcal{K}},$$

wobei $\mathcal{K} = (O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ das Koordinatensystem ist, aus dem Alice das Tetraeder betrachtet (Abb. 6). Bob möchte dasselbe Tetraeder aus seiner Perspektive betrachten (das heißt, aus seinem Koordinatensystem $\mathcal{K}' = (O', \mathbf{e}'_x, \mathbf{e}'_y \mathbf{e}'_z)$). Er weiß wie er $\mathcal{K}$ anhand von $\mathcal{K}'$ beschreiben kann:

$$O = \begin{bmatrix}0\\2\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}_{\mathcal{K}'}, \quad \mathbf{e}_x = \begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}_{\mathcal{K}'}, \quad \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\end{bmatrix}_{\mathcal{K}'}, \quad \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}_{\mathcal{K}'}.$$

Welche Koordinaten haben die Ecken des Tetraeders aus Bobs Perspektive? Nachdem er diese Koordinaten berechnet hat, schickt er sie an Alice. Alice möchte nun überprüfen dass die erhaltenen Koordinaten tatsächlich die Koordinaten ihres Tetraeders sind. Überprüfe das anhand der entsprechenden Koordinatentransformation.



$[P]_{K'} = M^{-1}([P]_K - [O']_K)$

$= M^{-1}[P]_K - M^{-1}[O']_K$

$= M^{-1}[P]_K + [O]_{K'}$

$\tilde{M}$ die Matrix der Basisänderung von K' nach K

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M = \tilde{M}^{-1}$

$\tilde{M} = M^{-1}$

$$\begin{cases} e_x = -\frac{1}{\sqrt{2}} e_x' - \frac{1}{\sqrt{2}} e_y' \\ e_y = e'_x \quad e'_y \\ e_z = e'_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e'_x = \\ e'_y = \\ e'_z = \end{cases}$$