Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 2. Hausaufgabe

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(H 2)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-3}{3n^3-4n+4} = 0.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+n)^{-\frac{n}{n+1}} = \infty^{-1} = 0.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-5)^{n+1}+(-7)^{2n}}{8^{2n}+(-3)^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{49}{64}\right)^n \cdot \dfrac{-5\cdot\left(-\frac{5}{49}\right)^n+1}{1-3\cdot\left(-\frac{3}{64}\right)^n} = 0.$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = \lim\limits_{n\to\infty} p^{\frac{1}{n}} = p^0 = 1.$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{25n^6+n^3} - 5n^3 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{\sqrt{25n^6+n^3}+5n^3} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{n^3\left(\sqrt{25+\frac{1}{n^3}}+5\right)} = \dfrac{1}{10}.$

(H 3)

a) Für $n \geq 2$ ist $x_n = 1 + \frac{1}{n^3-1}$. Da die Folge $(n^3-1)_{n\geq 2}$ streng wachsend ist, ist die Folge $(\frac{1}{n^3-1})_{n\geq 2}$ streng fallend. Also ist $(x_n)_{n\geq 2}$ streng fallend und damit nach oben beschränkt. Da $x_n > 0$, $\forall\, n \geq 2$, ist die Folge auch nach unten beschränkt, also beschränkt.

b) Für $n \geq 4$ gelten

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{2^n}{\sqrt{n!}} \cdot \frac{\sqrt{(n+1)!}}{2^{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1}}{2} > 1.$$

Da $y_n > 0$, $\forall\, n \geq 4$, ist, folgt, dass die Folge $(y_n)_{n\geq 4}$ nach unten beschränkt und streng fallend ist. Damit ist die Folge auch nach oben beschränkt, also beschränkt.