Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 5. Hausaufgabe

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(H 8)

Wir stellen fest, dass die bei a)–d) auftretenden Reihen positive Glieder haben.

a) Es sei $x_n := \sum_{n\geq 1} \frac{n4^n}{(n+4)!}$, für $n \geq 1$. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4(n+1)}{n(n+1)} = 0 < 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium ist also die gegebene Reihe konvergent.

b) Wir stellen fest, dass für alle $n \geq 1$

$$x_n := \frac{\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^3+1}} = \frac{2}{\sqrt{n^3+1}(\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+2})} = \frac{2}{n^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)}$$

ist. Es sei $y_n := \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$. Dann ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1.$$

Somit folgt nach dem zweiten Vergleichskriterium, dass die gegebene Reihe äquivalent zur verallgemeinerten harmonischen Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ ist. Also ist die Reihe konvergent.

c) Da

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^4+1}\right)^{5n^4+n^3+n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^4+1}\right)^{n^4+1}\right]^{\frac{5n^4+n^3+n}{n^4+1}} = e^5 \neq 0$$

ist, folgt, anhand der notwendigen Konvergenzbedingung, die Divergenz der Reihe.

d) Aus

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\cdot a\right)^n} = a$$

folgt, anhand des Wurzelkriteriums, dass für $a < 1$ die Reihe konvergent, und für $a > 1$ die Reihe divergent ist. Für $a = 1$ folgt aus

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n = e \neq 0$$

die Divergenz der Reihe.

(H 9)

a) Sei $x_n := (-1)^n \frac{\pi^n}{\cos^2(n^2+2)+5^n}$, für $n \geq 1$. Die Ungleichungen

$$|x_n| \leq \left(\frac{\pi}{5}\right)^n, \ \forall\, n \geq 1,$$

haben zur Folge, dass $\sum |x_n| \ll \sum \left(\frac{\pi}{5}\right)^n$ ist. Die Reihe $\sum \left(\frac{\pi}{5}\right)^n$ ist als geometrische Reihe mit $q := \frac{\pi}{5} \in (-1, 1)$ konvergent. Nach dem ersten Vergleichskriterium ist also auch die Reihe $\sum |x_n|$ konvergent. Es folgt, dass die Reihe $\sum x_n$ absolut konvergent, also auch konvergent ist.

b) Es gilt

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2}) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{2}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2}}.$$

Die Folge $\left(\frac{2}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}\right)_{n\geq 1}$ ist fallend und hat den Grenzwert 0. Das Leibniz-Kriterium impliziert nun die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+2})$.

Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2}} = 1$$

folgt, nach dem zweiten Vergleichskriterium, dass die Reihe

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+2}} \sim \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

also divergent ist. Also ist die gegebene Reihe nicht absolut konvergent.