

Lösungshinweise zur 5. Übung

## Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 17)

1) Wir stellen fest, dass die bei a)–1) auftretenden Reihen positive Glieder haben.

a) Aus den Ungleichungen  $\frac{2^n}{7^n + 10^n} < \frac{2^n}{7^n} = \left(\frac{2}{7}\right)^n$ , für alle  $n \geq 0$ , folgt

$$\sum \frac{2^n}{7^n + 10^n} \ll \sum \left(\frac{2}{7}\right)^n.$$

Die Konvergenz der geometrischen Reihe  $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{2}{7}\right)^n$  hat nun, aufgrund des ersten Vergleichskriteriums, die Konvergenz der gegebenen Reihe zur Folge.

b) Es sei  $x_n$  das allgemeine Glied der Reihe. Aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

folgt, nach dem Wurzelkriterium, die Konvergenz der Reihe.

c) Es sei  $x_n := \frac{x^n}{n^p}$ , für  $n \geq 1$ . Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x \left( \frac{n}{n+1} \right)^p = x.$$

Nach dem Quotientenkriterium ist für  $x < 1$  die Reihe konvergent, und für  $x > 1$  divergent. Für  $x = 1$  erhält man die verallgemeinerte harmonische Reihe  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p}$ , die für  $p > 1$  konvergent und für  $p \leq 1$  divergent ist.

d) Wir vergleichen das allgemeine Glied der Reihe mit dem allgemeinen Glied der harmonischen Reihe für ein geeignetes  $\alpha$ , das gleich bestimmt wird. Seien  $x_n := \frac{\sqrt{2n-1}}{n^2+1}$  und  $y_n := \frac{1}{n^\alpha}$ , für  $n \geq 1$ . Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n-1}}{n^2+1} \cdot n^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} \sqrt{2 - \frac{1}{n}}}{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} \cdot n^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{n}}}{n^{\frac{3}{2}}(1 + \frac{1}{n^2})} \cdot n^\alpha.$$

Damit dieser Grenzwert eine positive reelle Zahl ist, setzen wir  $\alpha := \frac{3}{2}$ , und erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{n}}}{n^{\frac{3}{2}}(1 + \frac{1}{n^2})} \cdot n^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2} \in (0, \infty).$$

Nach dem zweiten Vergleichskriterium ist die Reihe äquivalent zur verallgemeinerten harmonischen Reihe mit  $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ . Also ist die Reihe konvergent.

e) Sei  $x_n := \frac{3n}{(4 + \frac{5}{n})^n}$ , für  $n \geq 1$ . Die Relationen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{(4 + \frac{5}{n})^n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{n}}}{4 + \frac{5}{n}} = \frac{1}{4} < 1$$

implizieren, anhand des Wurzelkriteriums, die Konvergenz der Reihe.

f) Wir vergleichen das allgemeine Glied der Reihe mit dem allgemeinen Glied  $\frac{1}{n^\alpha}$  der verallgemeinerten harmonischen Reihe, wobei  $\alpha \in \mathbb{R}$  geeignet gewählt wird. Aus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{n^{\frac{3}{4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) n^{\frac{3}{4}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right) n^{\frac{5}{4}}}$$

folgt, dass für  $\alpha = \frac{5}{4}$  der obige Grenzwert gleich  $\frac{1}{2}$  ist. Nach dem zweiten Vergleichskriterium ist also die gegebene Reihe äquivalent zur Reihe  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$ , also ist sie konvergent.

g) Sei  $x_n$ ,  $n \geq 1$ , das allgemeine Glied der Reihe. Es ist  $C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!(n)!}$ . Wir wenden das Quotientenkriterium an und berechnen

$$D_n := \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2^{\alpha(n+1)}} \cdot \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot 2^{\alpha n} \cdot \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{\alpha-1}}.$$

Also ist  $D = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \frac{1}{2^{\alpha-2}}$ . Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe konvergent für  $\alpha > 2$ , und divergent für  $\alpha < 2$ . Ist  $\alpha = 2$ , wenden wir das Kriterium von Raabe an. Aus

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \frac{2(n+1)}{2n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

folgt, anhand des Kriteriums von Raabe, die Divergenz der Reihe.

h) Sei  $x_n := \frac{n^2}{2^{n^2}}$ , für  $n \geq 1$ . Die Relationen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2^n} = 0 < 1$$

implizieren, anhand des Wurzelkriteriums, die Konvergenz der Reihe.

i) Sei  $x_n := \frac{2^n n!}{n^n}$ , für  $n \geq 1$ . Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1.$$

Nach dem Quotientenkriterium ist also die gegebene Reihe konvergent.

j) Wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{(2n+1)^\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha$  ist, nach dem zweiten Vergleichskriterium, die gegebene Reihe äquivalent zur verallgemeinerten harmonischen Reihe  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ , also ist sie für  $\alpha > 1$  konvergent und für  $\alpha \leq 1$  divergent.

k) Es sei  $x_n$ ,  $n \geq 1$ , das allgemeine Glied der Reihe. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{n^4 e^{2n+1}} = 0 < 1$$

ist, nach dem Quotientenkriterium, die gegebene Reihe konvergent.

l) Aus der im Hinweis erwähnten Gleichheit folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Nach dem zweiten Vergleichskriterium ist die gegebene Reihe äquivalent zur harmonischen Reihe  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ , also divergent.

(A 18)

a) Sei  $x_n := (-1)^n \frac{e^n}{n+3^n}$ , für  $n \geq 1$ . Die Ungleichungen

$$|x_n| \leq \left(\frac{e}{3}\right)^n, \quad \forall n \geq 1,$$

haben zur Folge, dass  $\sum |x_n| \ll \sum \left(\frac{e}{3}\right)^n$  ist. Nach dem ersten Vergleichskriterium ist also die Reihe  $\sum |x_n|$  konvergent. Es folgt, dass die Reihe  $\sum x_n$  absolut konvergent, also, nach **S10** aus der 5. Vorlesung, auch konvergent ist.

b) **1. Methode:** Wir untersuchen zuerst die absolute Konvergenz, d.h. wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n \geq 0} |(-1)^n (1 - a_n)| = \sum_{n \geq 0} \left| 1 - \frac{n^5}{n^5 + 1} \right| = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^5 + 1}.$$

Wegen

$$\frac{1}{n^5 + 1} < \frac{1}{n^5}, \quad \text{für alle } n \geq 1,$$

ist  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^5 + 1} \ll \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^5}$ . Das erste Vergleichskriterium liefert nun die Konvergenz der Reihe  $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^5 + 1}$ . Also ist die Reihe  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n (1 - a_n)$  absolut konvergent, und deswegen, nach **S10** aus der 5. Vorlesung, auch konvergent.

**2. Methode:** Wir untersuchen zuerst die Konvergenz der Reihe mittels des Leibniz-Kriteriums. Es sei  $x_n := 1 - a_n = \frac{1}{n^5 + 1}$ ,  $n \geq 0$ . Da  $(n^5 + 1)_{n \in \mathbb{N}}$  eine streng wachsende Folge ist, folgt, dass  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  streng fallend ist. Außerdem ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5 + 1} = 0.$$

Das Leibniz-Kriterium impliziert nun die Konvergenz der Reihe  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n (1 - a_n)$ .

Die absolute Konvergenz wird wie in der **1. Methode** beschrieben untersucht.

c) Es sei  $x_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \geq 1$ . Diese Folge ist eine fallende gegen Null konvergierende Folge (weil die Folge  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  eine gegen  $e$  konvergierende wachsende Folge ist). Das Kriterium von Leibniz sichert nun die Konvergenz der gegebenen Reihe. Wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}} = \frac{e}{2}$$

(man beachte dafür den Hinweis), ist, nach dem zweiten Vergleichskriterium, die Reihe  $\sum_{n \geq 1} \left( e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right)$  äquivalent zur harmonischen Reihe, also ist sie divergent. Somit ist die gegebene Reihe nicht absolut konvergent.

(A 19)

Wir bezeichnen mit  $x_n$ ,  $n \geq 1$ , das allgemeine (positive) Glied der Reihe. Aus

$$D_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = x \frac{n^n}{(n+1)^n} = x \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n}{e} = \frac{x}{e}$ . Nach dem Quotientenkriterium ist also die Reihe für  $x < e$  konvergent, und für  $x > e$  divergent. Für  $x = e$  wenden wir das Kriterium von Raabe an. Es ist

$$R_n = n \left( \frac{1}{D_n} - 1 \right) = \frac{n}{e} \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right).$$

Wegen der im Hinweis zu (A 18) erwähnten Gleichheit (\*) erhält man  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = -\frac{1}{2} < 1$ . Das Kriterium von Raabe impliziert nun die Divergenz der Reihe.

Somit ist also die Reihe genau dann konvergent, wenn  $x \in (0, e)$  ist.