Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 2. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 6)

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-(-2)^n}{3^n+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3^n+7} - \left(-\dfrac{2}{3}\right)^n \cdot \dfrac{1}{1+\frac{7}{3^n}} \right) = 0.$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(8 - \dfrac{5n^4+1}{n^2-2n^5} \right)^2 = 64.$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos(2020))^n = 0$, da $q := \cos(2020) \in (-1,1)$.

d) Es gelten

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{9n^6+2n+1} - 3n^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{9n^6+2n+1}+3n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n^5}+\frac{1}{n^6}}+3} = 0.$$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^3+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3+1} \cdot \left(\sqrt{\dfrac{n^2+3}{n^3+1}} - 1 \right) = -\infty.$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+5n+1}{n^2-1} \right)^{\frac{1-5n^4}{6n^4+1}} = \infty^{-\frac{5}{6}} = 0.$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \dfrac{4^n+(-5)^n}{7^n+1} \right)^{2n^3-n^2} = 2^\infty = \infty.$

h) Aus $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+4n+1}{2n^3+5} \right)^{\frac{-2n^4+1}{n^4+3n+1}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = 4.$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^5+3n+1}{2n^5-n^4+3} \right)^{\frac{3n-n^4}{n^3+1}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\infty} = \infty.$

(A 7)

a) Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist $x_n = 1 - \frac{1}{n^2+1}$. Daraus, dass die Folge $(n^2+1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ streng wachsend ist, schließt man, dass die Folge $\left(-\frac{1}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ebenfalls streng wachsend ist. Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ streng wachsend. Es folgt, dass diese Folge nach unten beschränkt ist. Aus $x_n < 1$, für alle $n \in \mathbb{N}^*$, ergibt sich, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ auch nach oben beschränkt, also beschränkt ist. Die Folge konvergiert gegen 1.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ ist

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{4^n}{(n+3)!} \cdot \frac{(n+4)!}{4^{n+1}} = \frac{n+4}{4} > 1,$$

also ist die Folge streng fallend. Somit ist sie nach oben beschränt. Da alle Folgenglieder positiv sind, ist die Folge auch nach unten beschränkt, und somit beschränkt. Als monotone und beschränkte Folge ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergent. Wir bezeichnen mit $\ell \in \mathbb{R}$ ihren Grenzwert. Durch Grenzwertübergang in der Gleichheit

$$x_{n+1} = \frac{4}{n+4} \cdot x_n, \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

folgt $\ell = 0 \cdot \ell = 0$, also konvergiert die gegebene Folge gegen 0.

c) Die Folge ist nicht monoton, da $x_1 < x_2$ und $x_2 > x_3$ ist. Die Folge ist beschränkt, da $x_n \in (-1, 1)$, für alle $n \in \mathbb{N}^*$. Die Folge konvergiert gegen 0.

(A 8)

Wir beenden den Beweis zu **S7** aus der zweiten Vorlesung.

2. Fall: $x = -\infty$, $y \in \mathbb{R}$. Setze $U := (-\infty, y-1) \in \mathcal{U}(-\infty)$ und $V := (y-1, y+1) \in \mathcal{U}(y)$. Dann ist $U \cap V = \emptyset$.

3. Fall: $x \in \mathbb{R}$, $y = \infty$. Setze $U := (x-1, x+1) \in \mathcal{U}(x)$ und $V := (x+1, \infty) \in \mathcal{U}(\infty)$. Dann ist $U \cap V = \emptyset$.

4. Fall: $x = -\infty$, $y = \infty$. Setze $U := (-\infty, -1) \in \mathcal{U}(-\infty)$ und $V := (1, \infty) \in \mathcal{U}(\infty)$. Dann ist $U \cap V = \emptyset$.

(A 9)

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir beweisen, dass x der Grenzwert einer fallenden Folge rationaler Zahlen ist. Nach der Dichtheitseigenschaft von $\mathbb{Q}$ gibt es eine rationale Zahl $x_1 \in (x, x+1)$. Die gleiche Eigenschaft nochmals anwendend, gibt es eine rationale Zahl $x_2 \in (x, \min\{x_1, x + \frac{1}{2}\})$. Also ist $x < x_2 < x_1$ und $x_2 < x + \frac{1}{2}$. Wir setzen diesen Vorgang induktiv fort: Angenommen, dass $x_n \in \mathbb{Q}$, $n \geq 2$, so gewählt wurde, dass $x < x_n < x_{n-1}$ und $x_n < x + \frac{1}{n}$ ist, gibt es (nach der Dichtheitseigenschaft von $\mathbb{Q}$) eine rationale Zahl x_{n+1} mit $x_{n+1} \in (x, \min\{x_n, x + \frac{1}{n+1}\})$. Also ist $x < x_{n+1} < x_n$ und $x_{n+1} < x + \frac{1}{n+1}$. Auf diese Weise erhält man eine streng fallende Folge rationaler Zahlen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mit der Eigenschaft, dass

$$x < x_n < x + \frac{1}{n}, \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Das Sandwich-Theorem (aus der 3. Vorlesung) impliziert nun, dass $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ist. Somit ist also jede reelle Zahl der Grenzwert einer fallenden Folge rationaler Zahlen.

Um zu beweisen, dass jede reelle Zahl auch der Grenzwert einer wachsenden Folge rationaler Zahlen ist, wähle man $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Nach dem eben Bewiesenen wissen wir, dass $-x$ der Grenzwert einer fallenden Folge rationaler Zahlen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist. Dann ist $(-y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ eine wachsende Folge rationaler gegen x konvergierender Zahlen.