Dr. Christian Săcărea

"Babeş–Bolyai" Universität, Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Wintersemester 2020/2021

Lösungshinweise zur 11. Übung

Logik für Informatiker

GRUPPENÜBUNGEN:

(G 1)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei

- $\Omega = \{a/0\}$, und
- $\Pi = \{p/2\}$.

Sei X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$. Markieren Sie durch Ankreuzen, welche der folgenden Formeln über Σ und X in NNF, bereinigt, in Pränexnormalform, in Skolemnormalform sind.

Hinweis: Es können mehre Spalten zutreffen, d.h. es ist erlaubt mehr als nur 1 Kreuz pro Zeile zu setzen.

	NNF	bereinigt	Pränexnormalform	Skolemnormalform
$(\exists xp(x,y)) \rightarrow (\forall yp(y,a))$				
$(\forall xp(a,x)) \wedge (\exists yp(y,a))$	X	X		
$(\forall xp(x,y)) \vee (\exists yp(y,y))$	X			
$\forall x\exists y(p(a,x) \wedge p(x,y))$	X	X	X	
$\forall x\exists z\forall y\neg(p(x,y) \vee p(x,z))$				
$\forall x\forall y(p(x,a) \vee \neg p(x,y))$	X	X	X	X
$\neg(p(x,x) \wedge p(x,y))$				
$\neg p(y,x) \vee p(x,y)$	X	X	X	X

(G 2)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0\}$ und $\Pi = \{p/3\}$. Ferner sei Xeine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$. Gegeben sei die folgende Formel über Σ und X:

$$F = \forall x\exists y(p(y,a,x) \leftrightarrow \neg\exists zp(z,y,x)).$$

Transformieren Sie F in der Pränexnormalform und geben Sie dabei alle Zwischenschritte explizit an (Negationsnormalform, bereinigte Form, Pränexnormalform).

LÖSUNG:

Wir bringen zuerst die Formel in NNF durch Elimination der Implikationen und Schieben der Negation bis vor den Atomen:

$\forall x\exists y\ (((p(y,a,x) \rightarrow \neg\exists z\ p(z,y,x)) \wedge ((\neg\exists z\ p(z,y,x) \rightarrow p(y,a,x)))$

Diese Formel ist äquivalent mit

$\forall x \exists y\ ((\neg p(y,a,x) \vee \forall z \neg p(z,y,x)) \wedge (\exists z p(z,y,x) \vee p(y,a,x)).$

Nach Bereiningung erhalten wir

$\forall x \exists y\ ((\neg p(y,a,x) \vee \forall u_1 \neg p(u_1,y,x)) \wedge (\exists u_2 p(u_2,y,x) \vee p(y,a,x)).$

Die Pränexnormalform ist

$\forall x \exists y \forall u_1 \exists u_2\ ((\neg p(y,a,x) \vee \neg p(u_1,y,x)) \wedge (p(u_2,y,x) \vee p(y,a,x)).$

(G 3)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur mit $\Omega = \{a/0, f/1\}$ und $\Pi = \{p/1, q/2, r/3\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $u, u', w, x, y, z \in X$.

a) Man gebe für die folgende Formel über X und Σ eine äquivalente Formel in Negationsnormalform an.

$$\neg \forall x \exists y (p(y) \rightarrow (\neg q(a,x) \wedge \neg q(x,y))).$$

b) Man gebe für die folgende Formel über X und Σ eine äquivalente Formel in bereinigter Form an.

$$\forall x \exists y ((\exists z \exists x (q(a,x) \rightarrow r(z,w,y))) \leftrightarrow (q(a,z) \wedge \neg(\exists w \exists z r(x,w,z)))).$$

c) Man gebe für die folgende Formel über X und Σ eine äquivalente Formel in Pränexnormalform an.

$$(\forall w q(a,w)) \vee (\exists x \forall y (\neg r(a,x,y) \wedge \exists z \neg r(x,y,z))).$$

d) Man bringe die folgende Formel über Σ und X in Skolemnormalform:

$$\exists u \forall u' \exists w \exists x \forall y \exists z (\neg r(f(u'),x,y) \wedge r(w,a,z) \wedge r(y,x,u)).$$

Lösung:

a) Nach dem *Kochrezept*, müssen wir zuerst die Implikation eliminieren. D.h., die ursprüngliche Formel wird zu

$$\neg \forall x \exists y (\neg p(y) \vee (\neg q(a,x) \wedge \neg q(x,y))).$$

Jetzt schieben wir die Negation bis vor dem Prädikat und benutzen dabei sowohl die Regeln für die Negation der Quantoren, als auch die deMorganschen Regeln. Somit haben wir als Ergebnis

$$\exists x \forall y (p(y) \wedge (q(a,x) \vee q(x,y))).$$

b) Zuerst müssen wir ausfindig machen welche Variablen sind frei, welche gebunden, bzw. die Bindungsbereiche festlegen. Die ursprüngliche Formel wird zu

$$\forall x \exists y \Bigg(\bigg(\exists z \exists x \Big(q(a,x) \rightarrow r(z,w,y) \Big) \bigg) \leftrightarrow \bigg(q(a,z) \wedge \neg \Big(\exists w \exists z r(x,w,z) \Big) \bigg) \Bigg).$$

Jetzt sieht man klarer, dass x und y global gebunden sind, wegen den ganz großen Klammern, dann ist x nochmals gebunden in der ersten Hälfte der Formel. D.h. wir brauchen die xe umzubennen, um die Formel zu bereinigen. Die Variabel z hat drei verschiedene Bedeutungen. Zum einen ist sie gebunden, in der ersten Hälfte der Formel, zum anderen kommt z in der zweiten Hälfte der Formel sowohl frei (in $q(a,z)$) als auch gebunden vor. Dementsprechend brauchen wir drei verschiedene Instanzen von z um die Formel zu bereinigen. Abschließend, kommt auch w sowohl frei als auch gebunden vor, d.h. wir brauchen auch davon zwei verschiedene Instanzen um die Formel zu bereinigen.

Merke dir dabei, dass um eine Formel in bereinigter Form zu bringen, musst du diese Formel nicht in NNF zu bringen, falls dies nicht explizit verlang ist!!!

Die bereinigte Formel sieht nun so aus:

$$\forall x_1 \exists y \Bigg(\Big(\exists z_1 \exists x_2 \big(q(a, x_2) \to r(z_1, w_1, y) \big) \Big) \leftrightarrow \Big(q(a, z_3) \land \neg \big(\exists w_2 \exists z_2 r(x_1, w_2, z_2) \big) \Big) \Bigg).$$

c) Zuerst müssen wir feststellen, ob die Formel bereinigt ist und in NNF:

$$\big(\forall w q(a, w)\big) \lor \Big(\exists x \forall y \big(\neg r(a, x, y) \land \exists z \neg r(x, y, z) \big) \Big).$$

Weil dies stimmt, können wir problemlos die Quantoren vorziehen und erhalten die Pränexnormalform:

$$\forall w \exists x \forall y \exists z \big(q(a, w) \lor (\neg r(a, x, y) \land \neg r(x, y, z) \big).$$

d)

$$\exists u \forall u' \exists w \exists x \forall y \exists z \big(\neg r(f(u'), x, y) \land r(w, a, z) \land r(y, x, u) \big).$$

Die Formel ist in Pränexnormalform, d.h. wir müssen nur die Skolemfunktionen einführen und entsprechend die Variablen substituieren. Die Variable u wird mit der Konstantenfunktion sk_u substituiert, da es keine allquantifizierte Variablen vor sich hat. Die Variable w wird mit der Funktion $sk_w(u')$ substituiert, analog für x haben wir $sk_x(u')$. Schließlich wird z durch $sk_z(u', y)$ substituiert.

Wir erhalten nun die Skolemnormalform:

$$\forall u' \forall y \big(\neg r(f(u'), sk_x(u', y) \land r(sk_w(u'), a, sk_z(u', y)) \land r(y, sk_x(u', sk_u) \big).$$