Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

2. Übung zur Vorlesung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 6)

Die Rechenregeln für Grenzwerte verwendend, bestimme man die folgenden Grenzwerte von Folgen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2-(-2)^n}{3^n+7}$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(8 - \dfrac{5n^4+1}{n^2-2n^5}\right)^2$, c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\cos(2020))^n$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{9n^6+2n+1} - 3n^3$, e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^3+1}$, f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+5n+1}{n^2-1}\right)^{\frac{1-5n^4}{6n^4+1}}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(2 + \dfrac{4^n+(-5)^n}{7^n+1}\right)^{2n^3-n^2}$, h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$, i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+4n+1}{2n^3+5}\right)^{\frac{-2n^4+1}{n^4+3n+1}}$,
j) $\left(\frac{n^5+3n+1}{2n^5-n^4+3}\right)^{\frac{3n-n^4}{n^3+1}}$.

(A 7)

Man untersuche die Monotonie, die Beschränktheit sowie die Konvergenz der Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ in jedem der folgenden Fälle und begründe die jeweilige Antwort:
a) $x_n = \frac{n^2}{n^2+1}$, b) $x_n = \frac{4^n}{(n+3)!}$, c) $x_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n$.

(A 8)

Man beende den Beweis zu **S7** aus der 2. Vorlesung, d.h., man zeige, dass es für x, $y \in \overline{\mathbb{R}}$, mit $x \neq y$, Umgebungen $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$ gibt. **Bemerkung:** Der Fall x, $y \in \mathbb{R}$ wurde in der Vorlesung bewiesen. Es sollen die anderen Fälle behandelt werden.

(A 9) (Für Schlaufüchse)

Die Dichtheitseigenschaft von $\mathbb{Q}$ (siehe **Th6** in der ersten Vorlesung) verwendend, beweise man, dasss jede reelle Zahl der Grenzwert einer Folge von rationalen Zahlen ist. Außerdem zeige man, dass man diese Folge monoton wachsend (bzw. fallend) wählen kann.