Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 3. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 10)

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{n-2n^2}{n^4+1}\right)^{5n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{n-2n^2}{n^4+1}\right)^{\frac{n^4+1}{n-2n^2}}\right)^{\frac{5n^2(n-2n^2)}{n^4+1}} = e^{-10}.$

b) Für $n \geq 1$ seien $x_n = 1+\sqrt[2]{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}$ und $y_n = n^2$. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng wachsend und hat den Grenzwert ∞. Aus

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{2n+1} = 0$$

schließen wir, anhand des Stolz-Cesàro Theorems, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = 0$ ist.

c) Es sei $a_n = n^3+2n$, für $n\in\mathbb{N}^*$. Aus

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+2(n+1)}{n^3+2n} = 1$$

ergibt sich, anhand der Aussage 3° der Folgerung **F12** aus der 3. Vorlesung, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$ ist.

d) Es sei $a_n = \frac{1}{n}$, für $n\in\mathbb{N}^*$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ist, impliziert die Aussage 1° der Folgerung **F12** aus der 3. Vorlesung, dass auch

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = 0$$

ist.

e) Für $n\geq 1$ seien $x_n = n^n$ und $y_n = 1+2^2+3^3+\cdots+n^n$. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist streng wachsend und hat den Grenzwert ∞. Aus

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}-n^n}{(n+1)^{n+1}} = 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\cdot\frac{1}{n+1} = 1$$

schließen wir, anhand des Stolz-Cesàro Theorems, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = 1$ ist.

f) Es sei $a_n = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, für $n\in\mathbb{N}^*$. Aus

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1$$

ergibt sich, anhand der Aussage 3° der Folgerung **F12** aus der 3. Vorlesung, dass $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = 1$ ist.

g) Für $n \in \mathbb{N}^*$ seien $x_n = a_1 + 2^5 a_2 + 3^5 a_3 + \cdots + n^5 a_n$ und $y_n = n^6$. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng wachsend und hat den Grenzwert ∞. Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^5 a_{n+1}}{(n+1)^6 - n^6} = \frac{a}{6}$$

schließen wir, anhand des Stolz-Cesàro Theorems, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{6}$ ist.

(A 11)

a) Wir beweisen durch Induktion, dass die Aussage

$$P(n) = „x_n > 0“$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

I. $P(0) =$ „$x_0 > 0$“ ist wahr (anhand der Voraussetzung).

II. Wir nehmen an, dass $P(k)$, für $k \in \mathbb{N}$, wahr ist und zeigen, dass auch $P(k+1)$ wahr ist. Also wissen wir, dass $x_k > 0$ ist. Laut (1) ist dann

$$x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 4}{2x_k} > 0,$$

also ist $P(k+1)$ wahr.

Aus I und II folgt nun a).

b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Aus a) weiß man, dass $x_{n+1} > 0$ ist. Also ist die zu zeigende Ungleichung äquivalent zu $x_{n+1} \geq 2$. Die Formel (1) und a) anwendend, erhält man

$$x_{n+1} - 2 = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n} - 2 = \frac{x_n^2 + 4 - 4x_n}{2x_n} = \frac{(x_n - 2)^2}{2x_n} \geq 0,$$

also ist $x_{n+1} \geq 2$.

c) Sei $n \in \mathbb{N}^*$. Aus (1), a) und b) folgt

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 + 4}{2x_n} = \frac{x_n^2 - 4}{2x_n} \geq 0.$$

Also ist $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, d.h. die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ist fallend.

d) Die Tatsache, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ fallend und $x_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, ist, hat zur Folge, dass diese Folge beschränkt und damit auch konvergent ist. Es sei $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Da $x_n \geq 4$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, ist auch $x \geq 4$. Durch Grenzwertübergang in (1) erhält man $x = \frac{x^2+4}{2x}$, also $x^2 = 4$. Da $x > 0$ ist, schließt man, dass $x = 2$ ist.

(A 12)

a) Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert, für $n \in \mathbb{N}$, durch

$$x_n = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ n, & n = 2k+1 \end{cases}$$

ist nach oben unbeschränkt und hat eine konvergente Teilfolge.

Ein anderes Beispiel liefert die Folge $y_n = n^{(-1)^n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist

$$y_{2n} = 2n \text{ und } y_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Teilfolge $(y_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben unbeschränkt und die Teilfolge $(y_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.

b) Die Folge $(-n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat als Grenzwert $-\infty$. Sie ist also nach unten unbeschränkt und jede ihrer Teilfolgen hat den gleichen Grenzwert. Also hat diese Folge keine konvergente Teilfolge.

(A 13)

a) Die Gleichheiten folgen mittels direkter Rechnung.

b) Es gelten für $n \geq 2$

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 < e < \left(1+\frac{1}{1}\right)^2,$$

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 < e < \left(1+\frac{1}{2}\right)^3,$$

$$\ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e < \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Alle in den obigen Ungleichungen auftretenden Zahlen sind positiv, also ergibt sich durch Multiplikation

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e^{n-1} < \left(1+\frac{1}{1}\right)^2 \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Durch Anwendung von a) erhält man nun

$$\frac{n^n}{n!} < e^{n-1} < \frac{n^n}{(n-1)!} \Longleftrightarrow e\frac{n^n}{n!} < e^n < e\frac{n^n}{(n-1)!} \Longleftrightarrow e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

c) Aus b) folgt

$$\frac{n^n}{n!} \leq e^{n-1} \text{ und } e^{n-1} \leq n\frac{n^n}{n!}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

also

$$\frac{e^{n-1}}{n} \leq \frac{n^n}{n!} \leq e^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Da alle in den obigen Ungleichungen auftretenden Zahlen positiv sind, erhält man, durch Anwendung der n-ten Wurzel,

$$\frac{e^{\frac{n-1}{n}}}{\sqrt[n]{n}} \leq \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \leq e^{\frac{n-1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Durch Grenzwertübergang folgt nun (berücksichtigend, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{n-1}{n}} = e$ ist), mittels des Sandwich-Theorems, die zu zeigende Gleichheit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

d) Es sei $a_n = \frac{n^n}{n!}$, für $n \in \mathbb{N}^*$. Aus

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

ergibt sich, anhand der Aussage 3° der Folgerung **F12** aus der 3. Vorlesung, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = e$ ist.

(A 14)

Es sei daran erinnert, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$, falls

$$\forall\ U \in \mathcal{U}(x)\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \text{so dass } x_n \in U,\ \forall\ n \geq n_0.$$

1. Fall: Die Menge X ist nach oben unbeschränkt. Also ist $\sup X = \infty$. Sei $U \in \mathcal{U}(\infty)$. Dann gibt es ein $a \in \mathbb{R}$ mit $(a, \infty) \subseteq U$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt ist, gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} > a$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend ist, gilt $x_n \geq x_{n_0} > a$, für alle $n \geq n_0$. Somit ist also $x_n \in U$, für alle $n \geq n_0$, was zeigt, dass $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty = \sup X$ ist.

2. Fall: Die Menge X ist nach oben beschränkt. Nach dem Supremumsprinzip gibt es $\sup X \in \mathbb{R}$. Es seien $x := \sup X$ und $U \in \mathcal{U}(x)$. Dann gibt es eine positive reelle Zahl r mit $B_r(x) \subseteq U$. Die Ungleichung $x - r < x$ impliziert, dass $x - r$ keine obere Schranke von X ist. Somit gibt es einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_{n_0} > x - r$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend ist, gilt $x_n \geq x_{n_0} > x - r$, für alle $n \geq n_0$. Andererseits ist jedoch x eine obere Schranke von X, also gilt $x_n \leq x$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $x_n \in B_r(x) \subseteq U$, für alle $n \geq n_0$, was die zu zeigende Gleichheit $\lim_{n\to\infty} x_n = x = \sup X$ impliziert.