Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

6. Übung zur Vorlesung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 20) (Reihen)

Man untersuche das Konvergenzverhalten der Reihe $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n^3+n^2+1}}{\sqrt[3]{n^{12}+n^2}}$ und gebe an, welches Kriterium verwendet wird.

(A 21) (Häufungspunkte)

Man bestimme A' in den folgenden Fällen

a) $A = (-\infty, 5) \cup (10, \infty)$, b) $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

(A 22) (Stetigkeit und Grenzwerte)

Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ (mit $D \subseteq \mathbb{R}$ maximaler Definitionsbereich) definiert durch $f(x) = e^{1+\frac{2}{|x-1|}}$.

a) Man bestimme D und D'.

b) Man untersuche die Stetigkeit von f.

c) Hat f einen Grenzwert in 1?

(A 23) (Der Zwischenwertsatz)

a) Es sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{falls } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

definierte Funktion. Dann sind $f(-1) = -2$ und $f(1) = 2$, also $f(-1)f(1) < 0$. Die Funktion f hat jedoch keine Nullstelle im Intervall $[-1,1]$. Widerspricht das dem Nullstellensatz?

b) Man zeige, dass die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mindestens eine Nullstelle in den angegebenen Mengen A haben:

b1) $f(x) = (x^2+1)(x-b) + (x^4+1)(x-a)$, $A = (a,b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$),

b2) $f =$ eine Polynomfunktion ungeraden Grades, $A = \mathbb{R}$.

(A 24) (Stetigkeit)

Man untersuche die Stetigkeit der folgenden Funktionen ($n \in \mathbb{N}$) und bestimme die Art ihrer Unstetigkeitsstellen:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}, \quad \text{und} \quad g\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n + x}{x^{2n}+1}.$$

(A 25) (Für Schlaufüchse)

1) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f\colon [a,b] \to [a,b]$ eine stetige Funktion. Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt, d.h. es gibt $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

2) Man gebe ein Beispiel für eine Funktion $g\colon [0,1] \to [0,1]$, die keinen Fixpunkt hat.

(A 26) (Grenzwerte)

Man bestimme: (1) $\lim\limits_{x\to 4}(-x^3+5x)$, (2) $\lim\limits_{x\to -\infty}(-x^3+2x)$, (3) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{(x+3)^2}$,

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+4x+x^2}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$, (5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$, (6) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2-1})$, (7) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^k+5}{8x^3-2}$, mit $k\in\mathbb{N}$, (9) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{x^3-1}\right)$, (10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$, (12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$, (13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{|x|}$, (14) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$,

(15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(-1)^{[x]}}{x}$, wobei $[x]$ die größte ganze Zahl $\leq x$ ist,

(16) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{|x|+1}{x-1}}$, (17) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\sqrt{-x}}$, (18) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.