GEOMETRIE - S1

Thursday, February 25, 2021 2:17 PM

1. Es sei $ABCD$ ein Tetraeder (Abb. 1). Bestimme die Vektoren
   (a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$, $=\overrightarrow{AD}$
   (b) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DB}$, $=\overrightarrow{AC}$
   (c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$. $=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

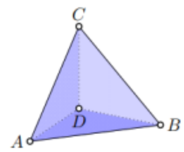
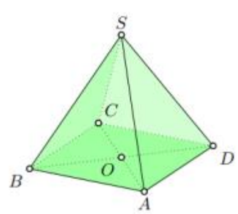


Abbildung 1: Tetraeder

2. Es sei $SABCD$ eine Pyramide mit Spitze S und Basis ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich in O schneiden (Abb. 2). Zeige, dass

$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\overrightarrow{SO}.$$

oder: $\underbrace{(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC})}_{2\overrightarrow{SO}}+\underbrace{(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD})}_{2\overrightarrow{SO}}$



$\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}$
$\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB}$
$\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}$
$\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OD}$

$\Sigma = 4\overrightarrow{SO}+\cancel{\overrightarrow{OA}}+\cancel{\overrightarrow{OB}}+\cancel{\overrightarrow{OC}}+\ldots$

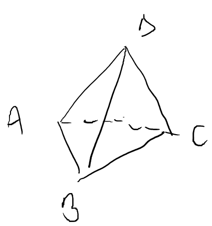
$\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Abbildung 2: Pyramide

3. Es sei $ABCD$ ein Tetraeder (Abb. 1). Zeige, dass

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}.$$



I) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$

$\underbrace{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}}_{\overrightarrow{AB}} = \underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}}_{\overrightarrow{AB}}$

II) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

4. Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Hexagon mit Mittelpunkt O (Abb. 3). Drücke $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD}$ andhand der Vektoren $\mathbf{e}=\overrightarrow{OE}$ und $\mathbf{f}=\overrightarrow{OF}$ aus.

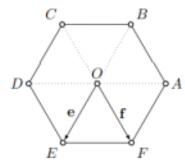
$\vec{OA} = \alpha e + \beta f \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\vec{OA} = f + \underset{\vec{EO} = -e}{\overset{}{\vec{FA}}} = f - e$

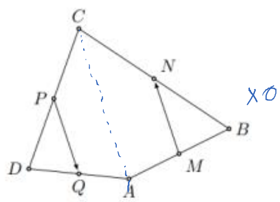
$\vec{OB} = -e$

$\vec{OC} = -f$

$\vec{OD} = -\vec{OA} = e - f$



5. Es seien M, N, P und Q die Mittelpunkte der Seiten (im Gegenuhrzeigersinn) eines Vierecks (Abb. 4). Zeige, dass $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = 0$.



I) ΔABC $\qquad \Delta ADC$

MN - Mittellinie $\qquad$ PQ - Mittellinie

$\left[\begin{array}{ll} |PQ| = \frac{1}{2}|CA| = |MN| \\ MN \parallel CA \quad PQ \parallel CA \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{PQ} = \vec{NM} \Rightarrow \vec{PQ} + \vec{MN} = 0$

II) rein vektoriell

$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC})$ weil $\quad \vec{MN} = \vec{MB} + \vec{BN}$
$\qquad \vec{MB} + \vec{BN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC})$

$\vec{QP} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{DC})$ weil ...

$\Rightarrow \vec{MN} = \vec{QP} \Rightarrow \vec{MN} + \vec{PQ} = 0$

III) $\vec{MN} = \vec{MO} + \vec{ON} = \vec{ON} - \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \cancel{\vec{OB}} - \vec{OA} - \cancel{\vec{OB}}) \quad \forall O \in E^2$

$\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\cancel{\vec{OD}} + \vec{OA} - \vec{OC} - \cancel{\vec{OD}})$

$+ \overline{\qquad} = 0$

6. Es sei $ABCD$ ein Viereck, E der Mittelpunkt der Diagonale AC und F der Mittelpunkt von BD (Abb. 5). Zeige, dass

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}).$$

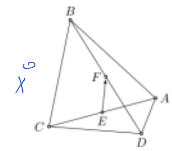
I) $\vec{EF} = \vec{ED} + \vec{DF}$

$= -\frac{1}{2}(\vec{DC} + \vec{DA}) + \vec{DF}$

$= \frac{1}{2}(\vec{CD} + \vec{AD}) + \vec{DF}$

$= \frac{1}{2}(\vec{CD} + \vec{AD} + \vec{DB}) = \frac{1}{2}(\vec{CD} + \vec{AB})$

$= \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{CB})$



II) $\vec{EF} = \vec{OF} - \vec{OE}$

$= \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OD} - \vec{OA} - \vec{OC}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{CD})$

$= \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{CB})$

15. Beweise, dass die Seitenhalbierenden eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden (Abb. 13). Zeige, dass die Summe der Vektoren vom Schnittpunkt zu den Eckpunkten des Dreiecks der Nullvektor ist.

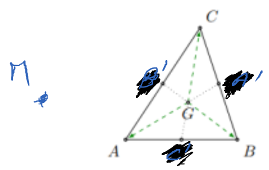


Abbildung 13: Ein Dreieck

$\forall M \in E^2 \quad v = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \overset{i)}{=} (\vec{MA} + \vec{MB}) + \vec{MC} = 2\vec{MC'} + \vec{MC}$ (*)

$\overset{ii)}{=} (\vec{MA} + \vec{MC}) + \vec{MB} = 2\vec{MB'} + \vec{MB}$ (*)

$\overset{iii)}{=} (\vec{MB} + \vec{MC}) + \vec{MA} = 2\vec{MA'} + \vec{MA}$ (*)

$M \in CC' \Rightarrow v \parallel CC' \quad (v \parallel \vec{CC'})$

$M \in BB' \Rightarrow v \parallel \vec{BB'}$

$CC' \cap BB' = M$

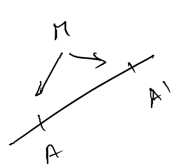
$v = \lambda \vec{BB'} \quad v = \alpha \vec{CC'}$

$v \parallel \vec{BB'} \quad v \parallel \vec{CC'}$

$\vec{BB'} \nparallel \vec{CC'}$

$\Rightarrow v = 0$

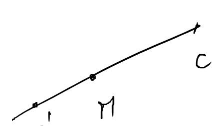
(*) $\Rightarrow 2\vec{MA'} + \vec{MA} = 0 \Rightarrow M \in AA'$ also $M \in CC' \cap BB' \cap AA'$



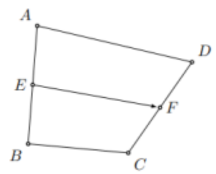
M, C', C – kollinear

(*) $2\vec{MC'} + \vec{MC} = 0 \Rightarrow 2\vec{MC'} = -\vec{MC}$ $\Rightarrow \|2\vec{MC'}\| = \|\vec{MC}\|$

$\Rightarrow 2|MC'| = |MC|$



7. Es sei $ABCD$ ein Viereck, E der Mittelpunkt der Seite AB und F der Mittelpunkt der Seite CD. Prüfe die Gleichung $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ und beweise, dass die Länge der Mittellinie im Trapez das arithmetische Mittel der Längen der Grundseiten ist.



O

Abbildung 6: ein Viereck

I)

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$$
$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} \quad +$$
$$2\overrightarrow{EF} = 0 + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + 0$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

II)

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) =$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

$$|EF| = \frac{|AD| + |BC|}{2}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) \Rightarrow \|\overrightarrow{EF}\| = \left\|\frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\|$$

Trapez $\Rightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{BC}$

a, b Vektoren $\|a+b\| = \|a\| + \|b\|$ wenn $a \parallel b$ $\|\overrightarrow{EF}\| = \ldots = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{DC}\|\right)$