Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

9. Übung zur Vorlesung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 36)

Man entscheide, ob die Folgen $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ im $\mathbb{R}^n$ konvergent sind oder nicht, und bestimme im Fall von Konvergenz deren Grenzwert:

a) $n=2$ und $x^k=\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^k,(-1)^k\right)$, b) $n=3$ und $x^k=\left(\frac{2^k}{k!},\frac{1-4k^7}{k^7+12k},\frac{\sqrt{k}}{e^{3k}}\right)$,

c) $n=2$ und $x^k=\left(\frac{\sin k}{k},-k^3+k\right)$,

d) $n=4$ und $x^k=\left(\frac{2^{2k}}{\left(2+\frac{1}{k}\right)^{2k}},\frac{1}{\sqrt[k]{k!}},(e^k+k)^{\frac{1}{k}},\frac{\alpha^k}{k}\right)$, wobei $\alpha\in\mathbb{R}_+$ fest ist.

(A 37) (Häufungspunkte)

Es sei $A\subseteq\mathbb{R}^2$. Man bestimme A' in den folgenden Fällen:

a) $A=\mathbb{Q}\times\{1\}$, b) $A=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

(A 38) (Stetigkeit reellwertiger Funktionen von mehreren Variablen)

Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4-y^4}{2(x^4+y^4)}, & (x,y)\neq 0_2\\ 0, & (x,y)=0_2.\end{cases}$$

(A 39) (Grenzwerte reellwertiger Funktionen von mehreren Variablen)

Gegeben seien die Funktionen $f,\ g\colon\mathbb{R}^2\setminus\{0_2\}\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y)=\frac{y^2}{x^2+y^2}\text{ und }g(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}.$$

a) Man zeige, dass die Funktion f keinen Grenzwert in 0_2 hat.

b) Man zeige, dass die Funktion g einen Grenzwert in 0_2 hat und bestimme diesen Grenzwert.

(A 40) (Für Schlaufüchse)

Man beweise **TH3** in der 9. Vorlesung über die Eindeutigkeit des Grenzwertes einer konvergenten Folge im $\mathbb{R}^n$.