Dr. Christian Săcărea

"Babeş–Bolyai" Universität, Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Wintersemester 2020/2021

Lösungshinweise zur 10. Übung

Logik für Informatiker

Gruppenübungen:

(G 1)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{0/0, s/1, +/2\}$ und $\Pi = \{p/1, = /2\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$. Gegeben sind die Struktur $\mathcal{A}$ und die Belegung β, wobei $\{a, b, c\}^*$ die Menge aller Wörter über dem Alphabet $\{a, b, c\}$ ist (inklusive des leeren Wortes ε). Worte werden durch Verknüpfung von Buchstaben des Alphabetes gebildet. Beispiele für Worte über dem gegebenen Alphabet sind: $a, b, c, aa, cb, ac, cb, aaaaaaaacaa$.

$\mathcal{A} = (\{a, b, c\}^*, \{0_\mathcal{A}, s_\mathcal{A} \colon \{a, b, c, \}^* \to \{a, b, c\}^*, +_\mathcal{A} \colon \{a, b, c\}^* \times \{a, b, c\}^* \to \{a, b, c\}^*\}, \{p_\mathcal{A}, =_\mathcal{A} \})$ mit

- $0_\mathcal{A} = a \in \{a, b, c\}^*$
- $s_\mathcal{A}(w) = ww \in \{a, b, c\}^*$ (Konkatenation mit sich selbst)
- $+_\mathcal{A}(w_1, w_2) = w_1 w_2 \in \{a, b, c\}^*$ (Konkatenation)
- $p_\mathcal{A} = \{w \mid$ Die Anzahl von a in w ist gerade$\}$
- $=_\mathcal{A}$ ist die Gleichheit, d.h. $=_\mathcal{A} = \{(w, w) \mid w \in \{a, b, c\}\}$.

und $\beta \colon X \to \{a, b, c\}^*$ ist definiert durch $\beta(x) = ba, \beta(y) = b$.

Evaluieren Sie

a) $\mathcal{A}(\beta)(s(x) + y + s(x))$,
b) $\mathcal{A}(\beta)(x = y + 0)$,
c) $\mathcal{A}(\beta)(\exists x \forall y (x + y = s(x) + y))$,
d) $\mathcal{A}(\beta)(\exists y p(x + y))$,
e) $\mathcal{A}(\beta)(\forall x \forall y ((p(x) \land \neg p(y)) \to p(x + y)))$.

Lösung:

a) bababbaba
b) Wahr
c) Wahr (mit $\beta(x) = a$)
d) Wahr (mit $\beta(y) = a$)
e) Falsch

(G 2)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{0/0, 1/0, p/1, +/2\}$ und $\Pi = \{p/1, = /2\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$. Gegeben sind die Struktur $\mathcal{A}$ und die Belegungen β_1, β_2, mit $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, \{0_\mathcal{A}, 1_\mathcal{A}, p_\mathcal{A} \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, +_\mathcal{A} \colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}, \{=_\mathcal{A}\})$ mit

- $0_\mathcal{A} = 1 \in \mathbb{Z}$
- $1_\mathcal{A} = 0 \in \mathbb{Z}$
- $p_\mathcal{A}(n_1) = n_1 - 1 \in \mathbb{Z}$
- $+_\mathcal{A}(n_1 + n_2) = n_1 + n_2 \in \mathbb{Z}$
- $=_\mathcal{A}$ ist die Gleichheit
- $\beta_1 \colon X \to \mathbb{Z}$. definiert durch $\beta_1(x) = 7, \beta_1(y) = 5$
- $\beta_2 \colon X \to \mathbb{Z}$, definiert durch $\beta_2(x) = 0, \beta_2(y) = 3$

Evaluieren Sie

a) $\mathcal{A}(\beta)(p(1) + p(p(x) + 0))$,

b) $\mathcal{A}(\beta)(x + 0 = p(y) + p(1))$, und

c) $\mathcal{A}(\beta)(p(0) + p(0) = p(p(0)))$, für

$\beta = \beta_1$ und $\beta = \beta_2$.

LÖSUNG:

a) $\mathcal{A}(\beta_1)(p(1)+p(p(x)+0)) = p_\mathcal{A}(1_\mathcal{A}) +_\mathcal{A} p_\mathcal{A}(p_\mathcal{A}(\beta_1(x)) +_\mathcal{A} 0_\mathcal{A}) = 5$ und $\mathcal{A}(\beta_2)(p(1)+p(p(x)+0)) = p_\mathcal{A}(1_\mathcal{A}) +_\mathcal{A} p_\mathcal{A}(p_\mathcal{A}(\beta_2(x)) +_\mathcal{A} 0_\mathcal{A}) = -1$.

b) $\mathcal{A}(\beta_1)(x + 0 = p(y) + p(1)) =$ falsch wegen $8 \neq 3$ und $\mathcal{A}(\beta_2)(x + 0 = p(y) + p(1)) =$ wahr.

c) $\mathcal{A}(\beta_1)(p(0) + p(0) = p(p(0))) = \mathcal{A}(\beta_2)(p(0) + p(0) = p(p(0))) =$ falsch.

(G 3)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{1/0, s/1, */2\}$ und $\Pi = \{p/1, = /2\}$. Sei X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$. Gegeben sind die Struktur $\mathcal{A}$ und die Belegung β mit $\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, \{1_\mathcal{A}, s_\mathcal{A} \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, *_\mathcal{A} \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\}, \{p_\mathcal{A}, =_\mathcal{A}\})$ und

- $1_\mathcal{A} = 1 \in \mathbb{Q}$
- $s_\mathcal{A}(q_1) = q_1 + 1 \in \mathbb{Q}$
- $*_\mathcal{A}(q_1, q_2) = q_1 + q_2 \in \mathbb{Q}$
- $p_\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Q}, n \in p_\mathcal{A}$ genau dann, wenn n gerade ist
- $=_\mathcal{A}$ ist die Gleichheit
- $\beta \colon X \to \mathbb{Q}$, definiert durch $\beta(x) = 11, \beta(y) = 7$

Evaluieren Sie

a) $\mathcal{A}(\beta)(s(s(x) * 1 * y)$

b) $\mathcal{A}(\beta)(s(x * y) = s(x) * 1)$

c) $\mathcal{A}(\beta)(\forall x \forall y(s(x * y) = s(x) * y))$

d) $\mathcal{A}(\beta)(\exists y p(y * x))$

e) $\mathcal{A}(\beta)((\forall x \exists y((x = s(y) \wedge \neg p(x)) \to p(y))$.

LÖSUNG:

a) $\mathcal{A}(\beta)(s(s(x) * 1 * y) = 21$.
b) $\mathcal{A}(\beta)(s(x * y) = s(x) * 1) =$ falsch.
c) $\mathcal{A}(\beta)(\forall x \forall y(s(x * y) = s(x) * y)) =$ wahr.
d) $\mathcal{A}(\beta)(\exists y p(y * x)) =$ wahr.
e) Wahr in $\mathbb{Z}$ aber falsch in $\mathbb{Q}$.