Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 9. Übung

# Differential- und Integralrechnung für Informatiker

**(A 36)**

a) Aus der Divergenz der Folge $((-1)^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ergibt sich die Divergenz der Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

b) Die Gleichheiten $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{2^k}{k!} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1-4k^7}{k^7+12k} = -4$ und $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\sqrt{k}}{e^{3k}} = 0$ implizieren, dass $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ gegen $(0,-4,0)$ konvergiert.

c) Die Divergenz der Folge $(-k^3+k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ impliziert auch die Divergenz von $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

d) Es gelten

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{2k}}{\left(2+\frac{1}{k}\right)^{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{2k}} = \frac{1}{e} \text{ und } \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k!}} = 0.$$

Man bezeichne mit $a_k := (e^k+k)^{\frac{1}{k}}$, für $k \in \mathbb{N}^*$. Dann ist $\ln a_k = \frac{\ln(e^k+k)}{k}$. L'Hospitals Regel verwendend, erhält man

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x+x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x+1}{e^x+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 1.$$

Also ist $\lim\limits_{k\to\infty} \ln a_k = 1$, was $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = e$ zur Folge hat. Außerdem ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha^k}{k} = \begin{cases} 0, & \text{falls } \alpha \in [0,1] \\ \infty, & \text{falls } \alpha > 1. \end{cases}$$

Wir schließen also, dass, für $\alpha > 1$, die Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ divergent ist, und sie, für $\alpha \in [0,1]$, gegen $\left(\frac{1}{e}, 0, e, 0\right)$ konvergiert.

**(A 37)**

a) $A' = \mathbb{R} \times \{1\}$, b) $A' = \emptyset$.

**(A 38)**

Als rationale Funktion ist $f$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\}$ stetig. Wir untersuchen die Existenz des Grenzwertes von $f$ in $0_2$. Für die Folge mit dem allgemeinen Glied $a^k = (\frac{1}{k}, 0)$, $k \in \mathbb{N}^*$, gelten $\lim\limits_{k\to\infty} a^k = 0_2$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f(a^k) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{k}\right)^4 - 0}{2\left(\left(\frac{1}{k}\right)^4 + 0\right)} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$. Für die Folge mit dem allgemeinen Glied $b^k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ $k \in \mathbb{N}^*$, gelten $\lim\limits_{k\to\infty} b^k = 0_2$ und $\lim\limits_{k\to\infty} f(b^k) = 0$. Nach **Th2** aus der 9. Vorlesung folgt nun, dass $f$ keinen Grenzwert bei $0_2$ hat. **Th3** (Charakterisierungen für die Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt) aus der 9. Vorlesung impliziert, dass $f$ in $0_2$ nicht stetig ist.

**(A 39)**

a) Aus $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{1}{n}, 0\right) = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(0, \dfrac{1}{n}\right) = 1$ folgt, aufgrund von **Th2** aus der 9. Vorlesung, dass $f$ keinen Grenzwert bei $0_2$ hat.

b) **1. Methode:** Es ist $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Also gilt $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, woraus

$$0 \leq g(xy) = \frac{|xy| \cdot |xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{|xy|}{2}, \ \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\},$$

folgt. Wegen

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} |xy| = 0$$

impliziert das Sandwich-Theorem, dass $\lim\limits_{(x,y) \to 0_2} g(x, y) = 0$ ist.

**2. Methode:** Es ist $(x^2 - y^2)^2 \geq 0$, für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Also ist $(x^2 + y^2)^2 \geq 4x^2y^2$, woraus

$$0 \leq g(xy) = \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{x^2 + y^2}{4}, \ \forall \ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_2\},$$

folgt. Wegen

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{4} = 0$$

impliziert das Sandwich-Theorem, dass $\lim\limits_{(x,y) \to 0_2} g(x, y) = 0$ ist.

**(A 40)**

Sei $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, die einen Grenzwert hat. Wir nehmen widerspruchshalber an, $x$, $y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, wären beide Grenzwerte dieser Folge. Nach **L1** in der 8. Übung gibt es $U \in \mathcal{U}(x)$ und $V \in \mathcal{U}(y)$ mit $U \cap V = \emptyset$. Zweimal die Definition des Grenzwertes einer Folge verwendend, erhält man die Indizes $k_1$, $k_2 \in \mathbb{N}$, so dass $x^k \in U$, für alle $k \geq k_1$, und $x^k \in V$, für alle $k \geq k_2$. Für $k := \max\{k_1, k_2\}$ ist also $x^k \in U \cap V$, was einen Widerspruch darstellt. Also hat die Folge $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ genau einen Grenzwert.