Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

5. Übung zur Vorlesung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 17)

Man untersuche das Konvergenzverhalten der folgenden Reihen und gebe jedes Mal an, welches Kriterium verwendet wird.

a) $\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{7^n + 10^n}$, b) $\sum_{n\geq 2} \frac{n}{(\ln n)^n}$, c) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^p}$, mit $x > 0$ und $p \in \mathbb{R}$, d) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{2n-1}}{n^2+1}$,

e) $\sum_{n\geq 1} \frac{3n}{(4+\frac{5}{n})^n}$, f) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{4}}}$, g) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{\alpha\cdot n}} C_{2n}^n$, mit $\alpha \in \mathbb{R}$ (es ist $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$),

h) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{2^{n^2}}$, i) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n n!}{n^n}$, j) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^\alpha}$, mit $\alpha \in \mathbb{R}$, k) $\sum_{n\geq 1} n^4 e^{-n^2}$, l) $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n}$.

Hinweis für l): Ist $(x_n)_n$ eine gegen 0 konvergierende Folge von Null verschiedener Zahlen, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1$.

(A 18)

Man untersuche die Konvergenz und die absolute Konvergenz der folgenden Reihen.

a) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{e^n}{n+3^n}$, b) $\sum_{n\geq 0} (-1)^n (1-a_n)$, wobei $a_n = \frac{n^5}{n^5+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist,

c) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$.

Hinweis für c): Für die absolute Konvergenz verwende man die Gleichheit

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} n\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = \frac{e}{2}.$$

(A 19)

Gegeben sei die Reihe $\sum_{n\geq 1} n! \left(\frac{x}{n}\right)^n$, mit $x > 0$. Die als Hinweis für Aufgabe (A 18) c) gegebene Gleichheit $(*)$ berücksichtigend, bestimme man alle Zahlen x mit der Eigenschaft, dass die Reihe konvergent ist.