Dr. Christian Săcărea

“Babeş–Bolyai” Universität, Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Wintersemester 2020/2021

12. Übung zur Vorlesung

Logik für Informatiker

Gruppenübungen:

(G 1)

a) Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Die allgemeine Form der prädikatenlogischen Resolutionsregel und Faktorisierungsregel (für Klauseln in Mengennotation) ist:
   - Resolutionsregel: Seien L_1, L_2 Literale und seien D_1, D_2 Klauseln, wobei die Variablenmengen von $D_1 \cup \{L_1\}$ und $D_2 \cup \{\neg L_2\}$ disjunkt sind.
   $$\frac{D_1 \cup \{L_1\} \qquad D_2 \cup \{\neg L_2\}}{(D_1 \cup D_2)\sigma}$$
   mit $\sigma = \mathrm{mgu}(L_1, L_2)$.
   - Faktorisierungsregel: Seien L_1, L_2 Literale und D eine Klausel.
   $$\frac{D \cup \{L_1\} \cup \{L_2\}}{(D \cup \{L_1\})\sigma}$$
   mit $\sigma = \mathrm{mgu}(L_1, L_2)$.

b) Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei
   - $\Omega = \{a/0, b/0, c/0, f/1\}$, und
   - $\Pi = \{p/1, q/3\}$.

   Ferner seien X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$. Es seien die folgenden Klauseln über Σ und X gegeben:
   $\{q(x, y, a), q(x, f(x), x), \neg p(x)\}$
   $\{p(a), \neg q(x, y, a), \neg q(b, y, x)\}$
   $\{p(x), p(f(x)), q(x, f(x), x)\}$.
   Geben Sie sämtliche Faktoren an, die sich mit der Faktorisierungsregel aus den gegebenen Klauseln bilden lassen und geben Sie bei der Faktorisierung explizit die verwendeten Unifikatoren an.
   Sollte eine Faktorisierung nicht möglich sein, begründen Sie jeweils kurz, warum dem so ist. Dass eine Faktorisierung nicht möglich ist, weil Literale verschiedene Prädikatensymbole haben, brauchen Sie nicht zu erwähnen.

c) Es seien die folgenden Klauseln über Σ und X gegeben:
   (1) $\{q(x, y, b), \neg p(f(x)), \neg p(y)\}$
   (2) $\{p(f(y)), q(x, y, a)\}$
   (3) $\{\neg q(f(x), b, a), \neg q(x, f(y), f(x))\}$.
   Bilden Sie sämtliche Resolventen, die sich aus den Klauseln:

- (1) und (2),
- (1) und (3),
- (2) und (3)

mit der Resolutionsregel bilden lassen und geben Sie dabei explizit die verwendeten Unifikatoren und durchgeführten Umbenennungen an.

(G 2)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0, b/0, c/0\}$ und $\Pi = \{p/3, q/3\}$. Ferner sei X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$. Gegeben sei die folgende Klauselmenge über Σ und X:

$N = \{\{p(b, x, y), \neg q(y, b, z)\}, \{\neg p(x, c, a), \neg q(a, x, z)\}, \{q(x, b, y), q(a, z, y)\}\}$ Verwenden Sie den Resolutionskalkül, um zu begründen, dass N unerfüllbar ist. Geben Sie dabei explizit alle Unifikatoren, Umbenennungen und Faktoren an. Führen Sie keine Vereinfachungen an der gegebenen Klauselmenge durch.

(G 3)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0, b/0, c/0\}$ und $\Pi = \{p/3, q/3\}$. Ferner sei X eine Menge von Variablen und $x, y, z \in X$. Gegeben sei die folgende Formel über Σ und X:

$F = \exists x \exists y \exists z((q(b, z, x)) \vee (\neg q(a, z, x) \wedge \neg q(x, z, y)) \vee (q(x, z, x) \wedge \neg p(b, x, c)) \vee (\neg q(y, z, x) \wedge q(x, z, x) \wedge p(y, a, c))$.

Verwenden Sie den Resolutionskalkül, um zu zeigen, dass F allgemeingültig ist. Geben Sie dabei explizit alle Unifikatoren, Umbenennungen und Faktoren an. Führen Sie keine Vereinfachungen an den gegebenen Formeln durch.

(G 4)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur, wobei $\Omega = \{a/0, b/0, c/0, d/0\}$ und $\Pi = \{p/2, q/2\}$. Ferner sei X eine Menge von Variablen und $x, y \in X$. Gegeben seien die folgenden Formeln über Σ und X: $F = p(d, b) \wedge p(c, a) \wedge (\forall x(\neg p(d, x) \vee q(a, x))) \wedge (\forall x \forall y(\neg p(c, x) \vee \neg p(d, y) \vee \neg p(b, y) \vee \neg q(x, y)))$ und $G = \neg p(b, b)$.

Verwenden Sie den Resolutionskalkül, um zu begründen, dass $F \models G$. Geben Sie dabei explizit alle Unifikatoren, Umbenennungen und Faktoren an. Führen Sie keine Vereinfachungen an der gegebenen Klauselmenge durch.