HSG 13 - RAZVAN POSTESCU

Wednesday, January 13, 2021 11:12 PM

H13.

a) $f:(2,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-8}}$

Wir benutzen Tabel 2:

$L = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)^p \cdot \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3-8}} \underset{p=\frac{1}{3}}{=}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x^2 \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}} =$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x^2 \cdot \cancel{\sqrt[3]{x-2}}}{\cancel{\sqrt[3]{(x-2)}}\cdot\sqrt[3]{(x^2+2x+4)}}$

$= \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2+2x+4}} = \frac{4}{\sqrt[3]{4+4+4}} = \frac{4}{\sqrt[3]{12}}$

$(x-2)(ax^2+bx+c) = x^3-8$

$\underset{\sim}{ax^3} + \underline{bx^2} + cx - \underline{2ax^2} - 2bx - 2c = x^3-8$

$ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c =$
$= x^3-8$

$\begin{cases} a = 1 \\ b-2a=0 \Rightarrow 2-2a=0 \Rightarrow a=1 \\ c-2b=0 \Rightarrow 4=2b \Rightarrow b=2 \\ -2c=-8 \Rightarrow c=4 \end{cases}$

$\Rightarrow x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

$\sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{12} < \sqrt[3]{27} = 3$

$\Rightarrow \sqrt[3]{12} < 3 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt[3]{12}} > 1$

$\Rightarrow \begin{cases} L > 1 \\ p = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow f$ - uneigentlich integrierbar

b) $f:[1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2x+1}}$

$\lim\limits_{x\to\infty} x^p \cdot \frac{x^3}{\sqrt[5]{x^4+2x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty} x^p \cdot \frac{x^3}{x^{\frac{4}{5}}\sqrt[5]{1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}}} \underset{p=-\frac{11}{5}}{=}$

$p + 3 - \frac{4}{5} = 0$

$\frac{5p+15-4}{5} = 0$

$5p = -11$

$p = -\frac{11}{5}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} x^{-\frac{11}{5}} \cdot \frac{x^3}{x^{\frac{4}{5}}\sqrt[5]{1+\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}}} = 1$

$\Rightarrow \begin{cases} L < \infty \\ p < 1 \end{cases} \Rightarrow f$ - uneig. integr.

c) $f:(0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sin x \cdot \sqrt{1-x}}$

Wir untersuchen die uneig. integr. von f auf $(0,\frac{1}{2}]$ und auf $[\frac{1}{2}, 1)$

- auf $(0,\frac{1}{2}]$

T2: $L = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^p \cdot f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{-1} \cdot \frac{x}{\sin x \cdot \sqrt{1-x}} \underset{p=-1}{=}$

$[(1-x)^{-\frac{1}{2}}]'$
$= -\frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-1)$
$= +\frac{(1-x)^{-\frac{3}{2}}}{2}$

$= \lim \frac{1}{\quad} = \lim \frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{\quad} \overset{l'H}{=} \lim \frac{\frac{(1-x)^{-\frac{3}{2}}}{2}}{\quad} =$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \qquad \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \quad \sin x \cdot \sqrt{1-x} \underset{p=-1}{\downarrow}$

$$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sin x \cdot \sqrt{1-x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{\sin x} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{(1-x)^{-\frac{3}{2}}}{2}}{\cos x} =$$

$$= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{(1-x)^{-\frac{3}{2}}}{2\cos x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} L < \infty \\ p < 1 \end{array}\right. \Rightarrow \text{uneig. integrierbar auf } (0, \tfrac{1}{2}] \quad (1)$$

- auf $[\frac{1}{2}, 1)$

$$L = \lim\limits_{x\to 1} (1-x)^{p} \cdot \frac{x}{\sin x \cdot \sqrt{1-x}} \underset{p=\frac{1}{2}}{=} \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \cancel{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{x}{\sin x \cdot \cancel{\sqrt{1-x}}} =$$

$$= \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\sin 1}$$

$\sin \in [-1, 1]$

$1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin$ ist positiv

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} L > 0 \\ p \le 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ - nicht uneig. integrierbar auf } [\tfrac{1}{2}, 1) \quad (2)$$

Von (1), (2) $\Rightarrow$ f - nicht uneig. integrierbar auf $(0, 1)$