Differential- und Integralrechnung, Wintersemester 2020-2021

2. Übung

Reelle Zahlenfolgen

Theorem 1 (Th1)

Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge und $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0.$$

Insbesondere ist

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0.$$

Satz 2 (S2)

Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann gilt für den Grenzwert der Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

$$\lim_{n\to\infty} q^n \begin{cases} = \infty, & \text{falls} \quad q > 1 \\ = 1, & \text{falls} \quad q = 1 \\ = 0, & \text{falls} \quad q \in (-1, 1) \\ \nexists, & \text{falls} \quad q \leq -1. \end{cases}$$

Bew.: Zur Erinnerung

(1)
$$x^\infty = \begin{cases} \infty, \text{ falls } x \in (1, \infty) \\ 0, \text{ falls } x \in [0, 1). \end{cases}$$

1. Fall: $q > 1$. Aus (1) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

2. Fall: $q = 1$. $\Rightarrow q^n = 1, \forall\ n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 1$.

$$(1) \qquad x^{\infty} = \begin{cases} \infty, & \text{falls } x \in (1,\infty) \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1). \end{cases}$$

3. Fall: $q \in (-1,1)$. $\Rightarrow |q| \in [0,1)$. Aus (1) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = 0$. Da $|q^n| = |q|^n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$. Aus **Th1** $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

4. Fall: $q = -1$. $\hookrightarrow$ wurde in der Vorlesung behandelt.

5. Fall: $q < -1$. $\Rightarrow q^2 > 1$. Aus (1) $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} q^{2n} = \lim_{n\to\infty} (q^2)^n = \infty, \quad \lim_{n\to\infty} q^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} q \cdot q^{2n} = -\infty.$$

Aus **Th3** (2. Vorlesung) $\Rightarrow \nexists \lim\limits_{n\to\infty} q^n$. $\square$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ muss x_n mit x_{n+1} verglichen werden.

Satz 3 (S3)

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wachsend $\Leftrightarrow 0 \leq x_{n+1} - x_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng wachsend $\Leftrightarrow 0 < x_{n+1} - x_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist fallend $\Leftrightarrow 0 \geq x_{n+1} - x_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng fallend$\Leftrightarrow 0 > x_{n+1} - x_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 4 (S4)

Sei $x_n > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wachsend $\Leftrightarrow 1 \leq \frac{x_{n+1}}{x_n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng wachsend $\Leftrightarrow 1 < \frac{x_{n+1}}{x_n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist fallend $\Leftrightarrow 1 \geq \frac{x_{n+1}}{x_n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng fallend $\Leftrightarrow 1 > \frac{x_{n+1}}{x_n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 5 (S5)

Sei $x_n < 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist wachsend $\Leftrightarrow 1 \geq \frac{x_{n+1}}{x_n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng wachsend $\Leftrightarrow 1 > \frac{x_{n+1}}{x_n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist fallend $\Leftrightarrow 1 \leq \frac{x_{n+1}}{x_n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng fallend $\Leftrightarrow 1 < \frac{x_{n+1}}{x_n}$, für alle $n \in \mathbb{N}$.