Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 14. Übung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 53)

Die zu integrierenden Funktionen sind stetig. Also kann die Aussage 2° von **Th1** aus der 14. Vorlesung angewandt werden, um das entsprechende mehrfache Integral, das wir mit I bezeichnen, zu berechnen.

a) Es ist $I = \int_0^3 dy \int_0^2 \frac{y}{1+xy} dx$. Da für alle $y \in [0,3]$

$$\int_0^2 \frac{y}{1+xy} dx = \ln(1+xy)\big|_0^2 = \ln(1+2y)$$

ist, erhält man für das zu berechnende Integral den Wert

$$I = \int_0^3 \ln(1+2y)dy = \left(y\ln(1+2y) - y + \frac{\ln(1+2y)}{2} \right)\Bigg|_0^3 = \frac{7}{2}\ln 7 - 3.$$

b) Es ist $I = \int_1^2 dx \int_2^3 dy \int_0^2 \frac{2z}{(x+y)^2} dz = \int_1^2 dx \int_2^3 \frac{4}{(x+y)^2} dy$. Da für alle $x \in [1,2]$

$$\int_2^3 \frac{4}{(x+y)^2} dy = -\left.\frac{4}{x+y}\right|_2^3 = \frac{4}{x+2} - \frac{4}{x+3}$$

ist, erhält man schließlich für das Integral den Wert $I = \int_1^2 (\frac{4}{x+2} - \frac{4}{x+3})dx = 4\,\ln \frac{x+2}{x+3}\Big|_1^2 = 4\ln\frac{16}{15}$.

c) Es ist $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dy$. Da für alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y)dy = -\cos(x+y)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos(x+\frac{\pi}{2}) + \cos(x+0) = \sin x + \cos x$$

ist, erhält man

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)dx = (-\cos x + \sin x)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

d) Es ist $I = \int_a^b dx \int_c^d \frac{1}{(x+y)^2} dy$. Da für alle $x \in [a,b]$

$$\int_c^d (x+y)^{-2} \cdot (x+y)'_y dy = \left.\frac{(x+y)^{-1}}{-1}\right|_c^d = -\left(\frac{1}{x+d} - \frac{1}{x+c} \right)$$

ist, folgt $I = \int_a^b \left(\frac{1}{x+c} - \frac{1}{x+d} \right) dx = (\ln(x+c) - \ln(x+d))\big|_a^b$. Somit ist also

$$I = \ln(b+c) - \ln(b+d) - (\ln(a+c) - \ln(a+d)) = \ln\frac{(a+d)(b+c)}{(a+c)(b+d)}.$$

e) Es ist $I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+y+z+1}} dz$. Für alle $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$ ist

$$\int_0^1 (x+y+z+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (x+y+z+1)'_z dz = 2\,(x+y+z+1)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 2(x+y+2)^{\frac{1}{2}} - 2(x+y+1)^{\frac{1}{2}}.$$

Nun berechnen wir für alle $x \in [0,1]$,

$$\int_0^1 \left(2(x+y+2)^{\frac{1}{2}} - 2(x+y+1)^{\frac{1}{2}}\right) dy = 2\left(\frac{(x+y+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(x+y+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3}\left((x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\right).$$

Man erhält also

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\int_0^1 \frac{4}{3}\left((x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\right) dx = \frac{4}{3}\left(\frac{(x+3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\frac{(x+2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \textstyle\frac{8}{15}\left(31 + 12\sqrt{2} - 27\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

f) Es ist $I = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x^2 z^3}{1+y^2} dz = \frac{1}{4}\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy$. Da für alle $x \in [0,1]$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+y^2} dy = x^2 \operatorname{arctg} y\big|_0^1 = \frac{\pi}{4} x^2$$

ist, erhält man $I = \frac{\pi}{16}\int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{48}$.

(A 54)

a) Die Funktion $f\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$, ist stetig und fallend. Auch gilt $f(x) > 0$, für alle $x \geq 2$. Es ist

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int (\ln x)^{-2} \cdot (\ln x)' dx = -\frac{1}{\ln x} + \mathcal{C}.$$

Somit ist $F\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = -\frac{1}{\ln x}$, eine Stammfunktion von f. Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to\infty} -\dfrac{1}{\ln x} = 0$ impliziert die Formel von Leibniz-Newton für uneigentliche Integrale (siehe **Th2** aus der 12. Übung), dass f auf $[2,\infty)$ uneigentlich integrierbar ist. Das Integralkriterium für Reihen hat nun die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ zur Folge.

b) Die Funktion $f\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, ist stetig und fallend (da f' auf $[2,\infty)$ negativ ist). Auch gilt $f(x) > 0$, für alle $x \geq 2$. Es ist

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \frac{1}{x} + \mathcal{C}.$$

Also ist $F\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = -\frac{1}{x} \cdot \ln x - \frac{1}{x}$, eine Stammfunktion von$f$. L'Hopitals Regel einsetzend, erhält man

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} -\frac{\ln x + 1}{x} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Nach der Formel von Leibniz-Newton für uneigentliche Integrale (siehe **Th2** aus der 12. Übung) folgt nun, dass f auf $[2,\infty)$ uneigentlich integrierbar ist. Das Integralkriterium für Reihen impliziert schließlich die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\ln n}{n^2}$.

(A 55)

a) Die Funktion $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$, ist eine Stammfunktion von f. Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ impliziert die Aussage 1° von **Th4** aus der 12. Übung, dass f auf $\mathbb{R}$ nicht uneigentlich integrierbar ist.

b) Die Funktion $F\colon [2,\infty) \to \mathbb{R}$, definiert, für alle $x \geq 2$, durch

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(\ln x)^{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \\ \\ \ln(\ln x), & \alpha = 1, \end{cases}$$

ist eine Stammfunktion von f. Da

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \begin{cases} \infty, & 1 \geq \alpha \\ 0, & \alpha > 1, \end{cases}$$

ist, impliziert die Aussage 1° von **Th2** aus der 12. Übung, dass f auf $[2,\infty)$ genau dann uneigentlich integrierbar ist, falls $\alpha > 1$ ist. In diesem Fall folgt aus der Aussage 2° des gleichen Theorems, dass $\int_2^\infty f(x)dx = \frac{1}{(\alpha-1)(\ln 2)^{\alpha-1}}$ ist.