Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

3. Hausaufgabe zur Vorlesung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(H 4)

Man bestimme die folgenden Grenzwerte von Folgen:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (3n^3 + 2n + 5) \ln \left(1 + \dfrac{1}{n^3 - 2n + 2}\right)$, b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{n}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{n} \cos(\sqrt{n})$, d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_0 + 2^1 x_1 + 2^2 x_2 + \cdots + 2^n x_n}{2^{n+1}}$, wobei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergierende Folge ist.

(H 5)

a) Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass $5^n < (n+3)!$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, ist.

b) Die Ungleichung von a) verwendend, bestimme man $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n}{(n+3)!}$.

(H 6)

Sei $a \in [1, 2)$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ die wie folgt definierte Folge

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Man zeige mittels vollständiger Induktion, dass $x_n \in [1, 2)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, ist.

b) Man zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ fallend ist.

c) Man begründe, weshalb die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ konvergent ist und bestimme ihren Grenzwert.