Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

Lösungshinweise zur 8. Übung

# Differential- und Integralrechnung für Informatiker

**(A 32)**

a) Es gelten

$\langle u+v, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = \alpha + \gamma^2$,

$\langle u, 2u-3v\rangle = \langle u, 2u\rangle - \langle u, 3v\rangle = 2\langle u, u\rangle - 3\langle u, v\rangle = 2\beta^2 - 3\alpha$,

$$\begin{aligned} \|u-v\| &= \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle} = \sqrt{\langle u-v, u\rangle - \langle u-v, v\rangle} = \sqrt{\langle u, u\rangle - \langle v, u\rangle - \langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle} \\ &= \sqrt{\langle u, u\rangle - 2\langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle} = \sqrt{\beta^2 - 2\alpha + \gamma^2}. \end{aligned}$$

b1) Es sind

$\alpha = \langle(-1,2,3),(-2,1,-3)\rangle = (-1)(-2) + 2\cdot 1 + 3\cdot(-3) = 2+2-9 = -5$,

$\beta = \sqrt{\langle(-1,2,3),(-1,2,3)\rangle} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$,

$\gamma = \sqrt{\langle(-2,1,-3),(-2,1,-3)\rangle} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$.

b2) Es gelten

$$v \notin B(u,r) \Longleftrightarrow \|u-v\| \geq r.$$

Unter Zuhilfenahme von a) und b1) erhält man $\|u-v\| = \sqrt{\beta^2 - 2\alpha + \gamma^2} = \sqrt{14+10+14} = \sqrt{38}$. Es folgt also, dass $r \in (0, \sqrt{38}]$ ist.

b3) Wegen

$$(1,-1,t) \in \overline{B}(u,5) \Longleftrightarrow \|(1,-1,t) - u\| \leq 5$$

und

$$\|(1,-1,t) - u\| = \|(1,-1,t) - (-1,2,3)\| = \|(2,-3,t-3)\| = \sqrt{4+9+(t-3)^2}$$

folgt $\|u - (1,-1,t)\| \leq 5 \Leftrightarrow \sqrt{13+(t-3)^2} \leq 5 \Leftrightarrow (t-3)^2 \leq 12 \Leftrightarrow t \in [3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3}]$.

**(A 33)**

Die Definition der euklidischen Norm sowie die Eigenschaften des Skalarproduktes berücksichtigend, erhält man

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle.$$

Also gelten die Äquivalenzen

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle = 0 \Longleftrightarrow x \perp y.$$

**(A 34)**

Es ist

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

und

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2.$$

Durch Addieren dieser beiden Gleichheiten erhält man die Parallelogrammidentität.

**(A 35)**

a) Es gelten

$$\langle u, v \rangle = 20 - 2a, \ ||u|| = \sqrt{10 + a^2} \text{ und } ||v|| = 2\sqrt{11}.$$

Aus $\langle u, v \rangle = ||u|| \cdot ||v||$ ergibt sich die Gleichung

$$20 - 2a = 2\sqrt{11 \cdot (10 + a^2)},$$

also $10 - a = \sqrt{11 \cdot (10 + a^2)}$. Es folgt, dass $a \leq 10$ und dass $(10 - a)^2 = 11 \cdot (10 + a^2)$ sein muss. Diese letzte Gleichung ist äquivalent zu $(a + 1)^2 = 0$, also ist $a = -1$.