Babeş–Bolyai Universität Cluj-Napoca
Fakultät für Mathematik und Informatik

8. Übung zur Vorlesung

Differential- und Integralrechnung für Informatiker

(A 32)

Es seien $u,\, v \in \mathbb{R}^n$. Man bezeichne mit $\alpha := \langle u, v \rangle$, $\beta := ||u||$ und $\gamma := ||v||$.

a) Die Eigenschaften des Skalarproduktes sowie die Definition der euklidischen Norm verwendend, bestimme man, in Abhängigkeit von α, β und γ, die Zahlen $\langle u + v, v \rangle$, $\langle u, 2u - 3v \rangle$ und $||u - v||$.

b) Sind $n = 3$, $u = (-1, 2, 3)$ und $v = (-2, 1, -3)$, bestimme man:

b1) α, β und γ,

b2) alle reellen Zahlen $r > 0$ mit der Eigenschaft, dass die offene Kugel $B(u, r)$ den Punkt v nicht enthält,

b3) alle reellen Zahlen t mit der Eigenschaft, dass die abgeschlossene Kugel $\overline{B}(u, 5)$ den Vektor $(1, -1, t)$ enthält.

(A 33) (Der Satz des Pythagoras im $\mathbb{R}^n$)

Man beweise die folgende Äquivalenz für die Vektoren $x,\, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \perp y \Longleftrightarrow ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

(A 34) (Die Parallelogrammidentität)

Seien $x,\, y \in \mathbb{R}^n$. Die Definition der euklidischen Norm sowie die Eigenschaften des Skalarproduktes verwendend, zeige man die als *Parallelogrammidentität* bekannte Gleichheit

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Bemerkung. Der Spezialfall $n = 2$ der obigen Gleichheit ist ein Ergebnis aus der elementaren Geometrie. Es besagt, dass die Summe der Quadrate der Längen der Seiten eines Parallelogramms mit der Summe der Quadrate der Längen der Diagonalen übereinstimmt.

(A 35)

Es seien $a \in \mathbb{R}$ sowie $u = (1, a, -3)$, $v = (2, -2, -6) \in \mathbb{R}^3$. Man bestimme alle Zahlen a, für die $\langle u, v \rangle = ||u|| \cdot ||v||$ ist.