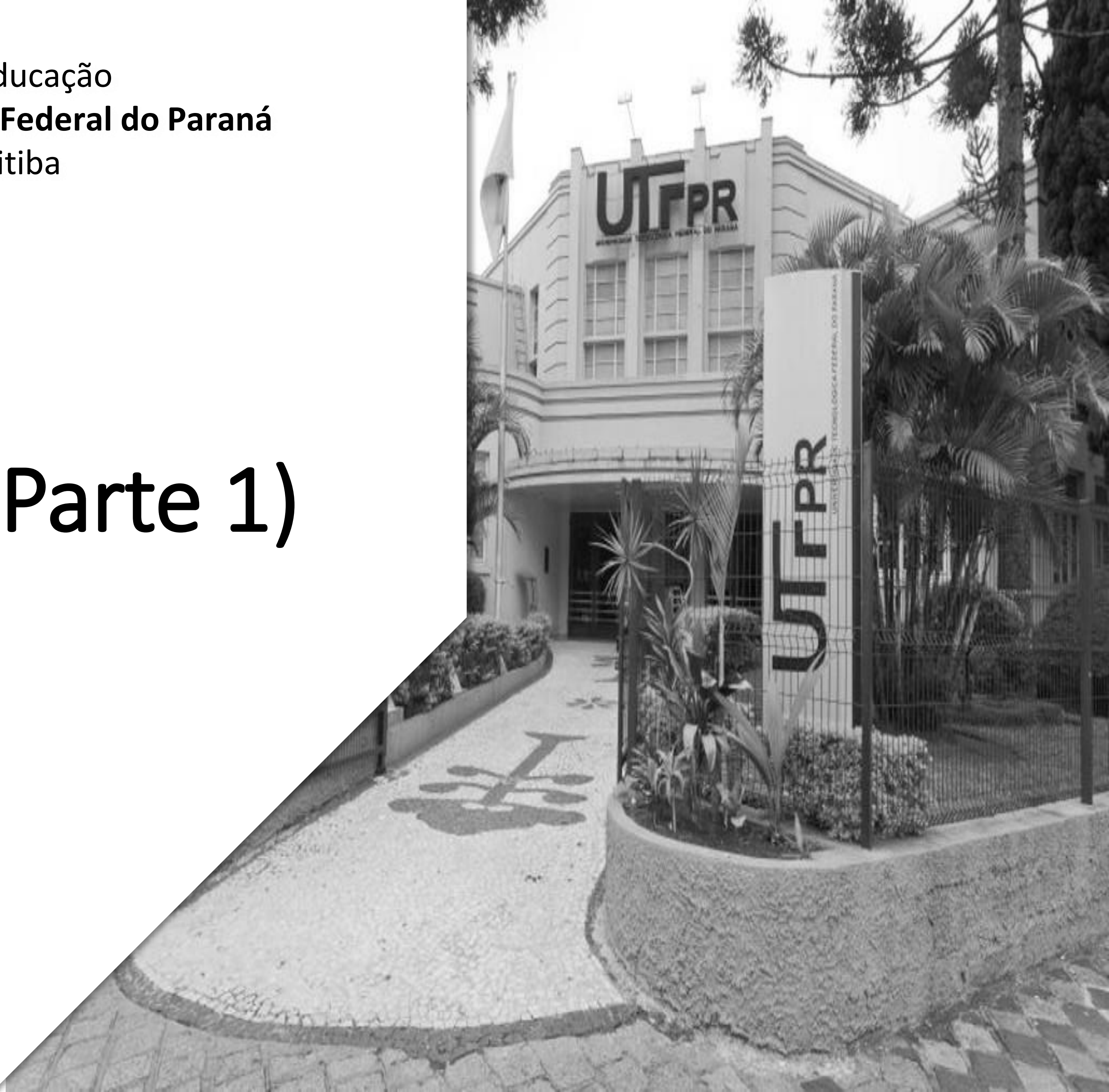
Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba

Dedução Natural (Parte 1)



Professor: Thiago do Nascimento Ferreira

E-mail: thiagoferreira@utfpr.edu.br

Sala: 6 DAINF

Atendimento: Terças e Sextas 15:50

Introdução

- Em busca de uma forma de dedução mais próxima do que uma pessoa costuma fazer, foi criado o método de **Dedução Natural**.
- O método usa:
  - Duas regras por conectivo (uma para introduzir o conectivo e outra para removê-lo);
  - Introdução de **hipóteses** que devem ser oportunamente *descartadas*.

Introdução

- Em geral, as regras serão apresentadas com o formato abaixo.

$$\frac{A_1 \qquad \ldots \qquad A_n}{B} \text{ (nome)}$$

- Acima da barra horizontal: premissas
- Abaixo da barra horizontal: conclusão
- Parênteses: nome da fórmula
  - "i" de Introdução do Conectivo
  - "e" de Eliminação do Conectivo

$\wedge$-Introdução

∧-Introdução

- Permite concluir A ∧ B dado que A e B já foram concluídas. A regra é escrita como:

$$\frac{A \qquad B}{A \wedge B}\ (\wedge\mathrm{i})$$

- "∧ i" – Introdução da Conjunção

∧-Eliminação

∧- Eliminação

- Temos duas regras para eliminar a conjunção:

$$\frac{A \wedge B}{A} \; (\wedge e1)$$

$$\frac{A \wedge B}{B} \; (\wedge e2)$$

- Uma regra diz que se temos uma prova de A ∧ B então podemos concluir A, a outra, nas mesmas condições, diz que podemos concluir B

Exemplo

- Provar que $p \land q, r \vdash q \land r$ é correta

Exemplo

- Provar que $p \land q, r \vdash q \land r$ é correta

1	$p \land q$	premissa
2	r	premissa
3	q	$\land e21$
4	$q \land r$	$\land i3,2$

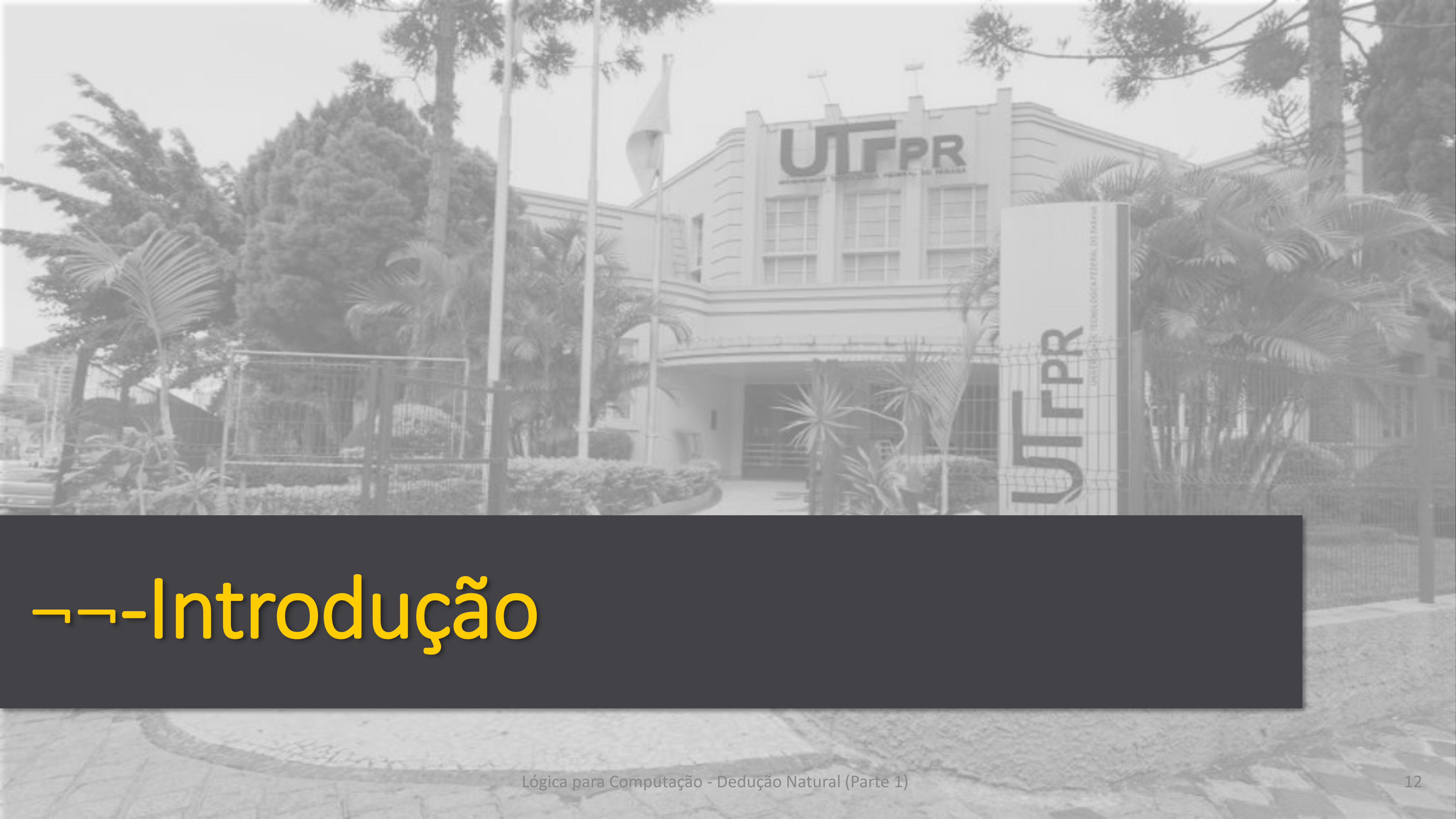
Vamos Fazer

- Provar que $(p \land q) \land r, s \land t \vdash q \land s$ é correta

Vamos Fazer

- Provar que $(p \land q) \land r, s \land t \vdash q \land s$ é correta

1	$(p \land q) \land r$	premissa
2	$s \land t$	premissa
3	$p \land q$	$\land$e1 1
4	q	$\land$e2 3
5	s	$\land$e1 2
6	$q \land s$	$\land$i 4,5

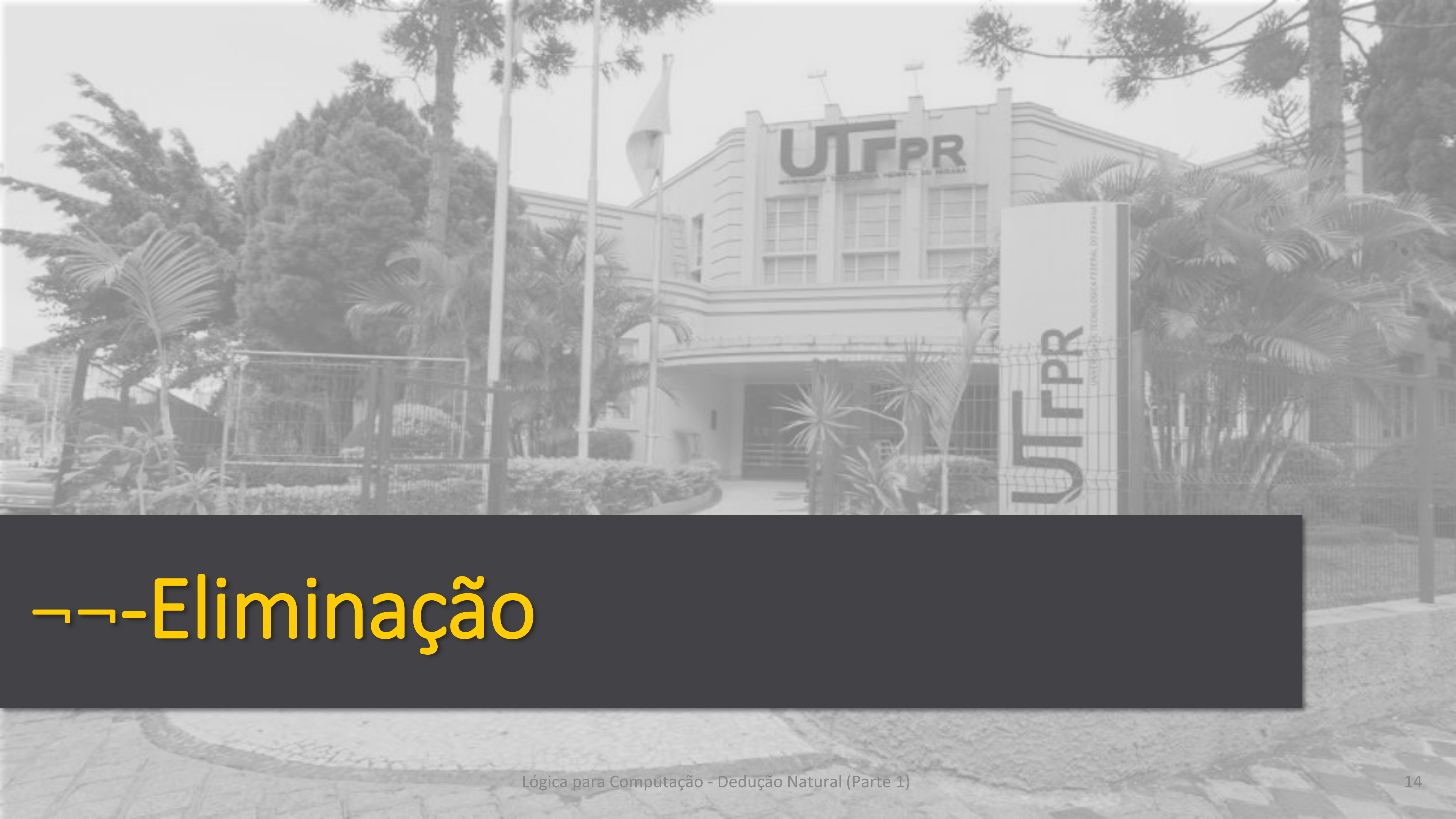


¬¬-Introdução

¬¬-Introdução

- Sabemos que A ≡ ¬¬A. Logo, se temos A, podemos concluir ¬¬A

$$\frac{A}{\neg\neg A}\ (\neg\neg\mathrm{i})$$



¬¬-Eliminação

¬¬-Eliminação

- De forma similar, podemos concluir A caso tenhamos ¬¬A

$$\frac{\neg\neg A}{A}\ (\neg\neg\mathrm{e})$$

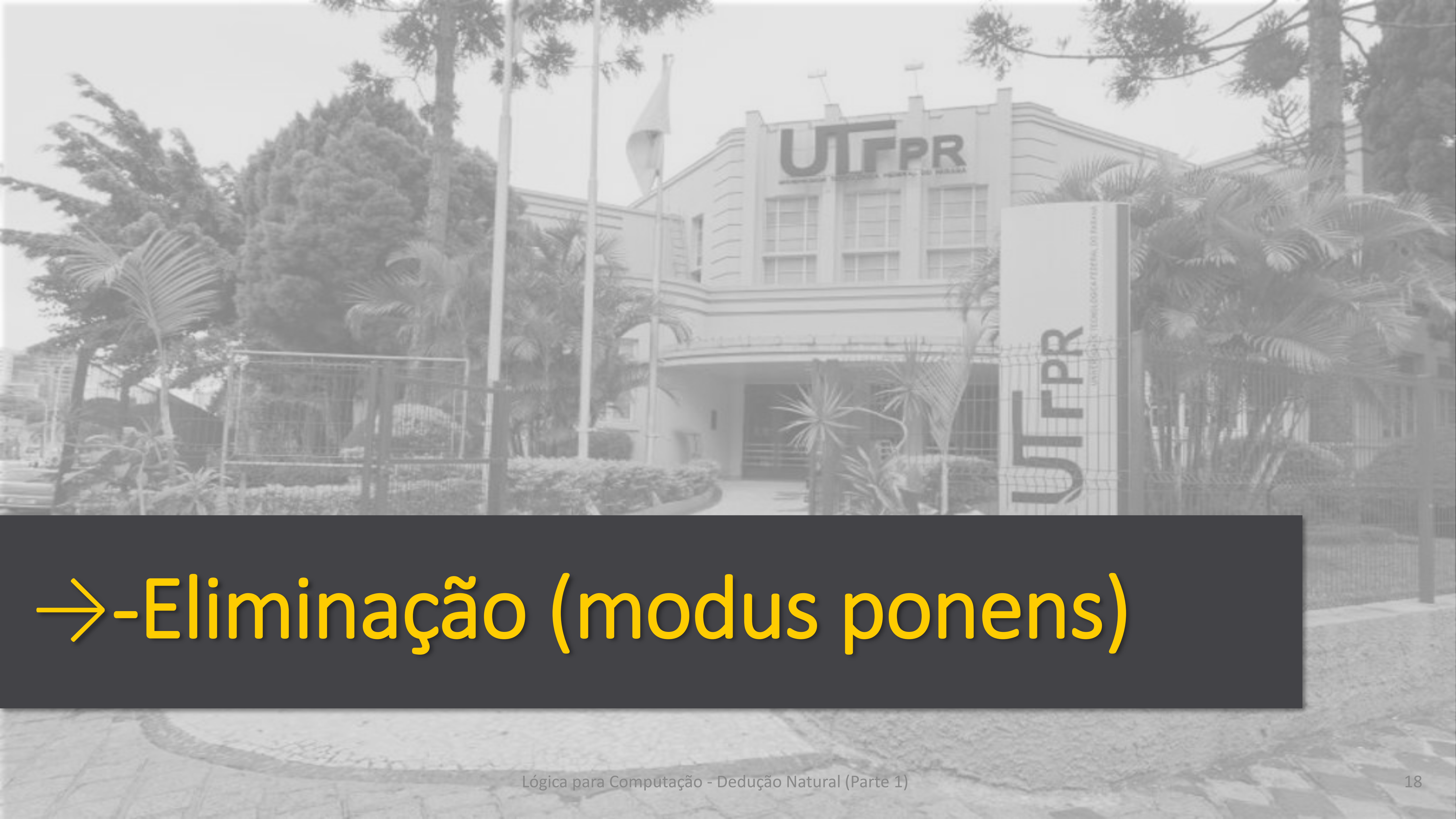
Exemplo

- Provar que provar p, $\neg\neg(p \land r) \vdash \neg\neg p \land r$ é correta

Exemplo

- Provar que provar p, ¬¬(p ∧ r) ⊢ ¬¬p ∧ r é correta

1	p	premissa
2	¬¬(p ∧ r)	premissa
3	¬¬p	¬¬i 1
4	p ∧ r	¬¬e 2
5	r	∧e2 4
6	¬¬p ∧ r	∧i 3,5



$\rightarrow$-Eliminação (modus ponens)

→-Eliminação (modus ponens)

- Dado que A → B e A já foram concluídas, podemos concluir B

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}\ (\to\text{e}/\text{MP})$$

Exemplo

- Provar que $\neg p \land q, \neg p \land q \rightarrow r \lor \neg p \vdash r \lor \neg p$ é correta

Exemplo

- Provar que $\neg p \land q, \neg p \land q \rightarrow r \lor \neg p \vdash r \lor \neg p$ é correta

1	$\neg p \land q$	premissa
2	$\neg p \land q \rightarrow r \lor \neg p$	premissa
3	$r \lor \neg p$	$\rightarrow$e 1,2

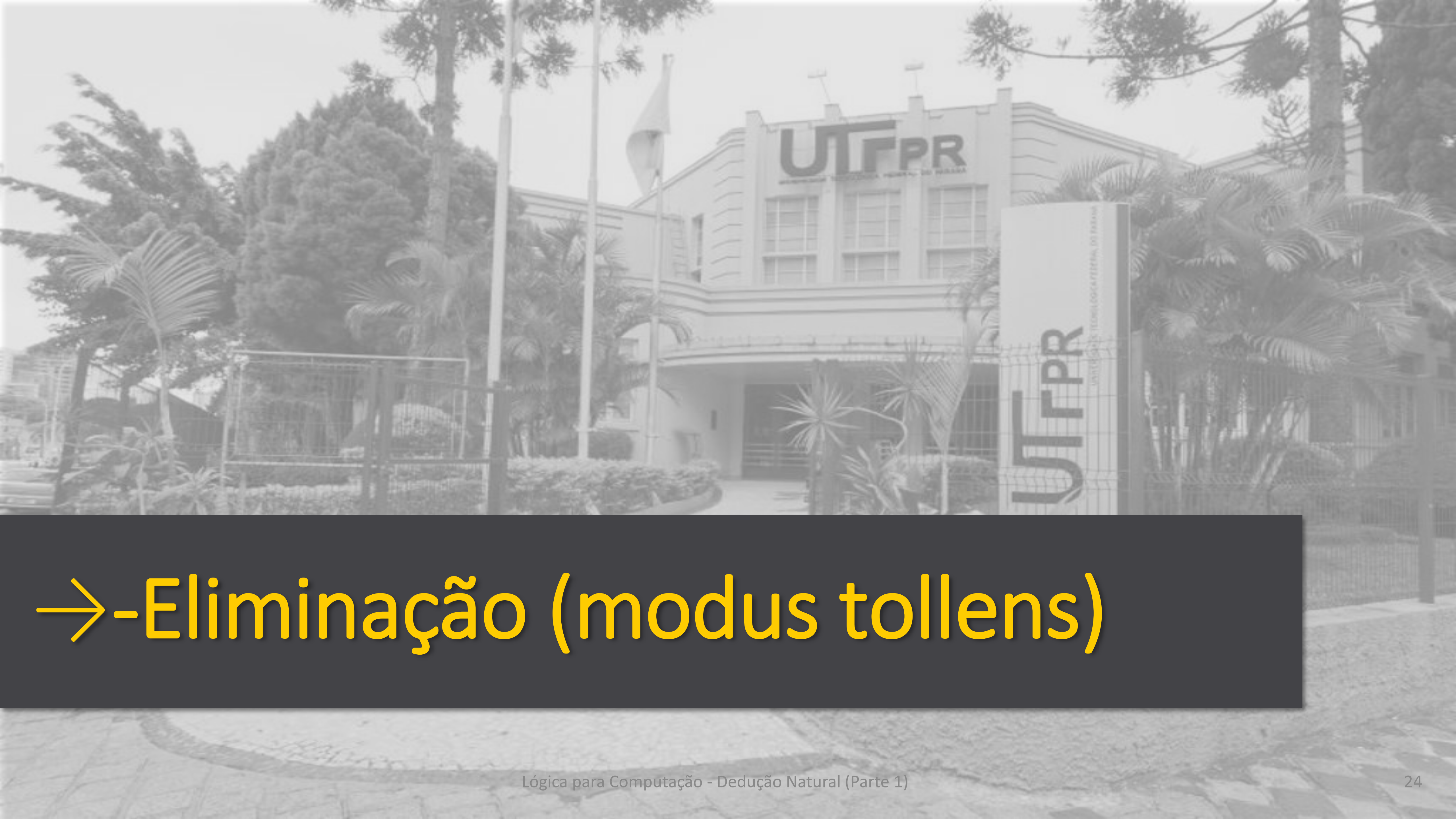
Vamos Fazer

- Provar que $p, p \to q, p \to (q \to r) \vdash r$ é correta

Vamos Fazer

- Provar que p, p → q, p → (q → r) ⊢ r é correta

1	p	premissa
2	p → q	premissa
3	p → (q → r)	premissa
4	q	→e 1,2
5	q → r	→e 1,3
6	r	→e 4,5



→-Eliminação (modus tollens)

→-Eliminação (modus tollens)

- Suponha que tenhamos A → B e ¬B. Se A for verdade então, por modus ponens, concluímos B. Neste caso temos B e ¬B, o que é impossível. Então A só pode ser falso e ¬A verdadeiro. Com isso podemos concluir a seguinte regra

$$\frac{A \to B \qquad \neg B}{\neg A} \; (MT)$$

Exemplo

- Provar que provar $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$ é correta

Exemplo

- Provar que provar $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$ é correta

1	$p \to (q \to r)$	premissa
2	p	premissa
3	$\neg r$	premissa
4	$q \to r$	$\to$e 2,1
5	$\neg q$	MT 4,3

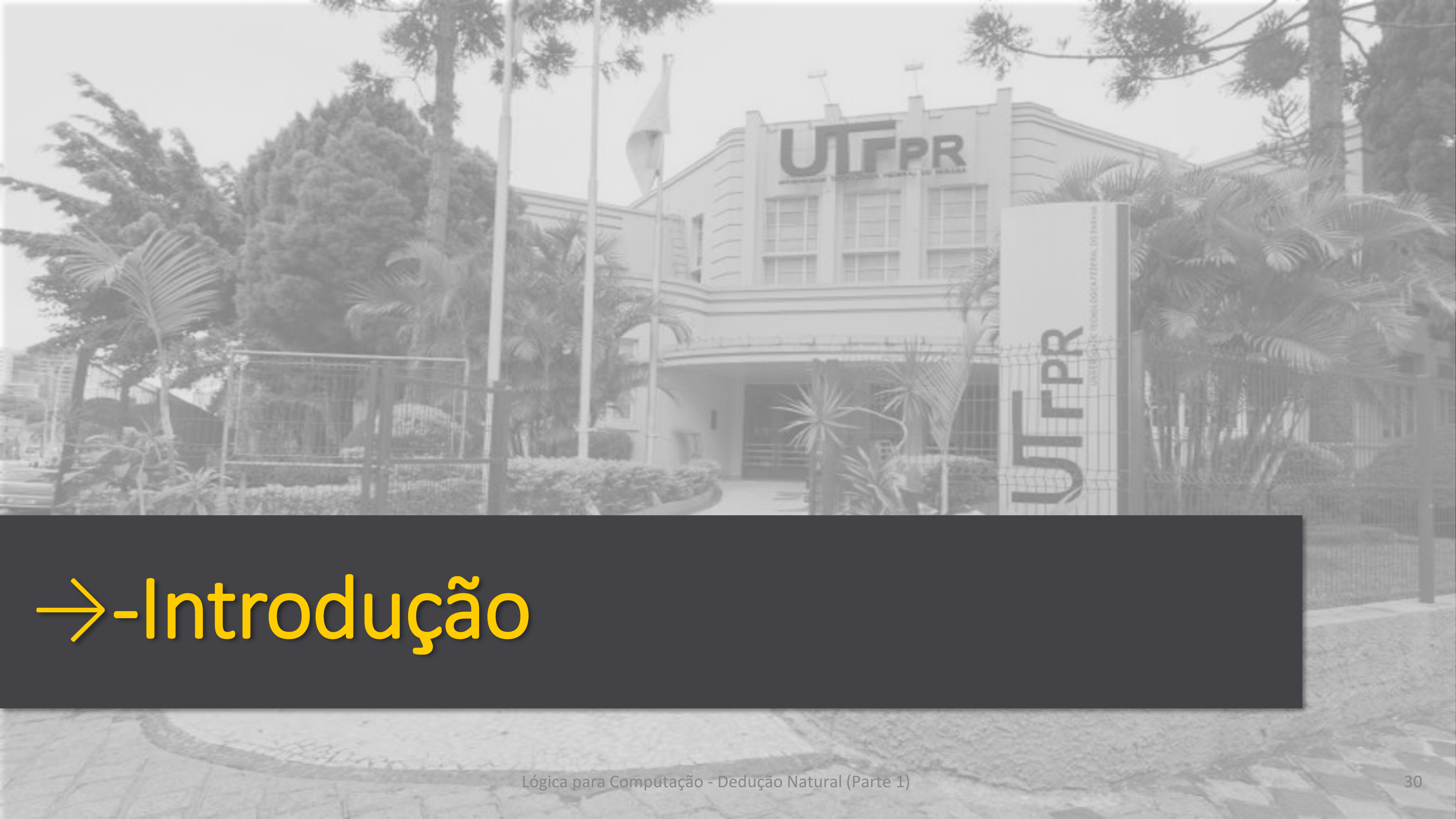
Vamos Fazer

- Provar que $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$ é correta

Vamos Fazer

- Provar que $\neg p \rightarrow q, \neg q \vdash p$ é correta

1	$\neg p \rightarrow q$	premissa
2	$\neg q$	premissa
3	$\neg\neg p$	MT 1,2
4	p	$\neg\neg$e 3



$\rightarrow$-Introdução

→-Introdução

- Incluir a implicação é uma tarefa um pouco mais complicada do que vimos, até agora, para os outros conectivos. A regra de introdução da implicação é mostrada a seguir.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^j \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \rightarrow B}\ (\rightarrow i)^j$$

→-Introdução

- A primeira linha da regra, [A], é uma hipótese.
  - Uma suposição temporária de que uma fórmula A é verdadeira.
- A hipótese A e todas as regras derivadas dela até B podem ser usadas até o momento em que B é encontrada
- A partir do momento que concluímos A → B, nenhuma das fórmulas entre A e B, incluindo estas, pode ser usada mais

Exemplo

- Provar que provar $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$ é correta

Exemplo

- Provar que provar $p \rightarrow q \vdash \neg q \rightarrow \neg p$ é correta

1.	$p \rightarrow q$	*premissa*
2.	$\neg q$	*hipótese*
3.	$\neg p$	*MT 1,2*
4.	$\neg q \rightarrow \neg p$	$\rightarrow i$ 2-3

Vamos Fazer

- Provar que $\neg q \rightarrow \neg p \vdash p \rightarrow \neg\neg q$ é correta

Vamos Fazer

- Provar que ¬q → ¬p ⊢ p → ¬¬q é correta

1.	$\neg q \to \neg p$	*premissa*
2.	p	*hipótese*
3.	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 2
4.	$\neg\neg q$	*MT* 1,3
5.	$p \to \neg\neg q$	$\to i$ 2-4

Definição

- Caso o sequente $\Gamma \vdash A$ possua teoria vazia, então este é denotado $\vdash A$ e chamado de teorema.

Exemplo

- Provar $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

Exemplo

- Provar $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$

1.	$q \rightarrow r$	*hipótese*
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	*hipótese*
3.	p	*hipótese*
4.	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 3
5.	$\neg\neg q$	*MT* 2,4
6.	q	$\neg\neg e$ 6
7.	r	$\rightarrow e$ 1,6
8.	$p \rightarrow r$	$\rightarrow i$ 3-7
9.	$(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$	$\rightarrow i$ 2-8
10.	$(q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$	$\rightarrow i$ 1-9

Exemplo

- Provar $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$ pode ser reescrito, conforme o teorema da dedução

Exemplo

- Provar $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$ pode ser reescrito, conforme o teorema da dedução

$$q \rightarrow r \vdash (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$q \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg p \vdash (p \rightarrow r)$$

$$q \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg p, p \vdash r$$

Exemplo

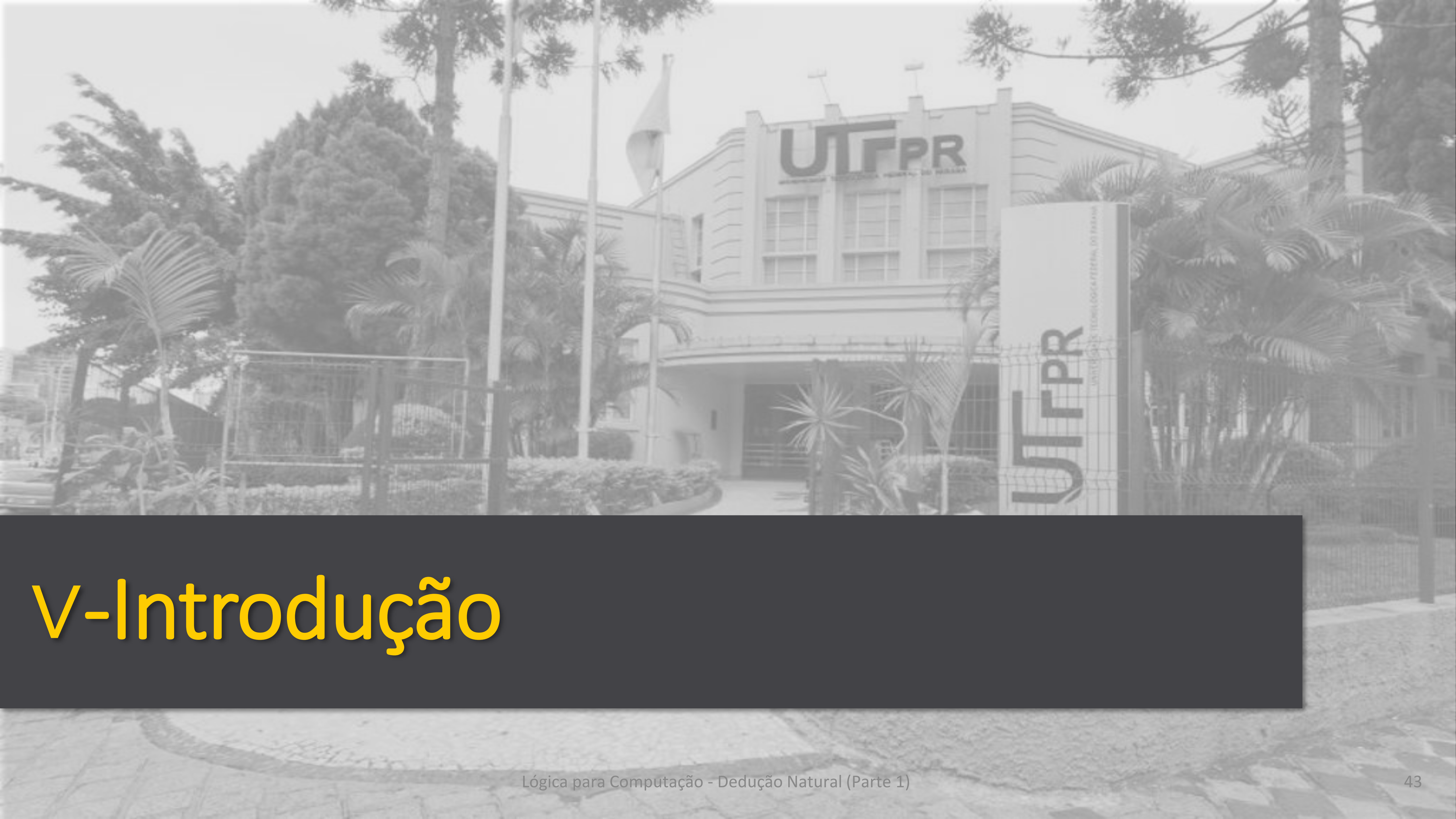
- Provar $\vdash (q \rightarrow r) \rightarrow ((\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r))$ pode ser reescrito, conforme o teorema da dedução

$$q \rightarrow r \vdash (\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$q \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg p \vdash (p \rightarrow r)$$

$$q \rightarrow r, \neg q \rightarrow \neg p, p \vdash r$$

1.	$q \rightarrow r$	*premissa*
2.	$\neg q \rightarrow \neg p$	*premissa*
3.	p	*premissa*
4.	$\neg\neg p$	$\neg\neg i$ 3
5.	$\neg\neg q$	*MT* 2,4
6.	q	$\neg\neg e$ 5
7.	r	$\rightarrow e$ 1,6



V-Introdução

∨-Introdução

- Dada uma premissa A, nós podemos concluir A ∨ B para qualquer fórmula B.

$$\frac{A}{A \vee B}\ (\vee i1)$$

$$\frac{B}{A \vee B}\ (\vee i2)$$

∨-Eliminação

∨-Eliminação

- A exclusão da disjunção é uma regra mais complicada
- Como usar uma fórmula A ∨ B em uma prova?
- Sabemos que pelo menos umas das duas subfórmulas é verdadeira, A ou B. No entanto, não sabemos qual.
- A solução é fornecer duas provas separadas para um mesmo argumento

$$\dfrac{A \vee B \qquad \begin{matrix}[A] \\ \vdots \\ C\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[B] \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ (\vee e)$$

Exemplo

- Provar o sequente $p \vee q \vdash q \vee p$

Exemplo

- Provar o sequente $p \vee q \vdash q \vee p$

1.	$p \vee q$	*premissa*
2.	p	*hipótese*
3.	$q \vee p$	$\vee i2$ *2*
4.	q	*hipótese*
5.	$q \vee p$	$\vee i1$ *4*
6.	$q \vee p$	$\vee e$ *1,2-3,4-5*

Vamor fazer

- Provar $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

Vamor fazer

- Provar $q \rightarrow r \vdash (p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$

1.	$q \rightarrow r$	*premissa*
2.	$p \vee q$	*hipótese*
3.	p	*hipótese*
4.	$p \vee r$	$\vee i1$ *3*
5.	q	*hipótese*
6.	r	$\rightarrow e$ *1,5*
7.	$p \vee r$	$\vee i2$ *6*
8.	$p \vee r$	$\vee e$ *2,3-4,5-7*
9.	$(p \vee q) \rightarrow (p \vee r)$	$\rightarrow i$ *2-8*

Para fazer em casa

Para fazer em casa

1. Provar $(p \lor q) \lor r \vdash p \lor (q \lor r)$

Créditos

Estes slides foram feitos baseados nos slides da disciplina “Lógica para Computação”, ministrada pelos seguintes professores:

Prof. Celso Antônio Alves Kaestner
kaestner@dainf.ct.utfpr.edu.br

Prof. Adolfo Neto
adolfo@utfpr.edu.br