UTFPR
UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba

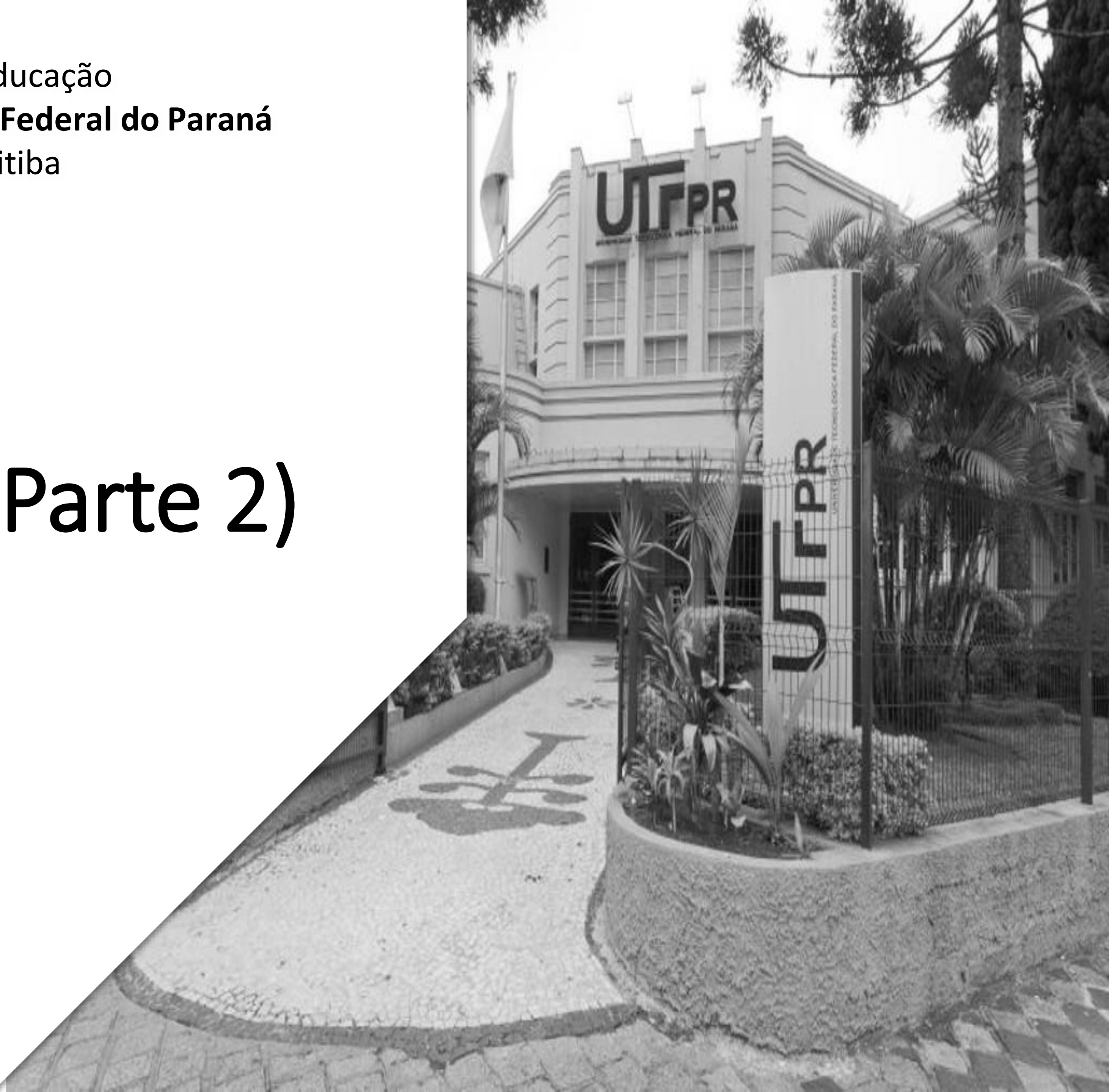
Dedução Natural (Parte 2)

Professor: Thiago do Nascimento Ferreira

E-mail: thiagoferreira@utfpr.edu.br

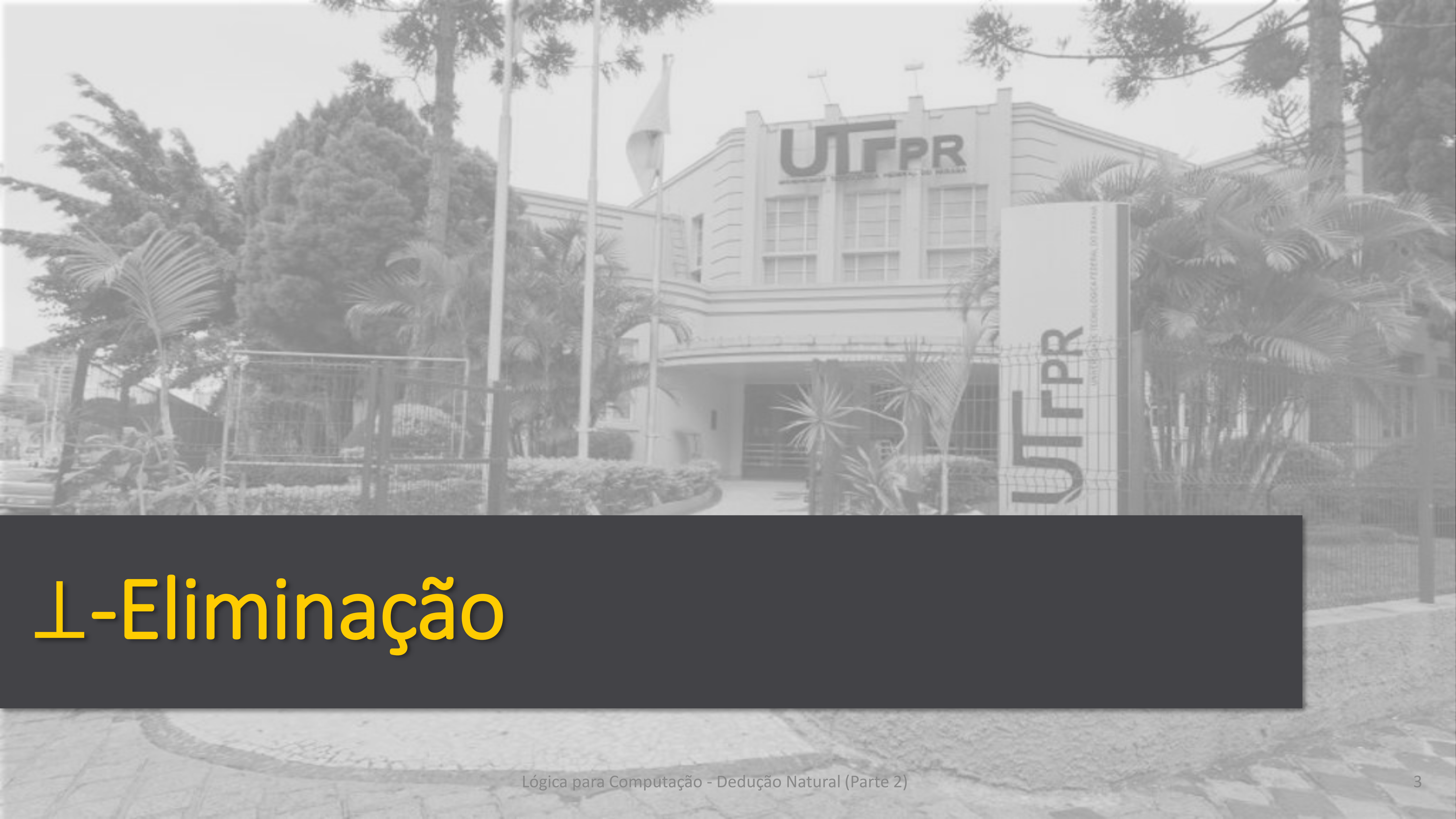
Sala: 6 DAINF

Atendimento: Terças e Sextas 15:50



Fórmulas Insatisfazíveis

- Denotaremos contradições pela constante lógica $\bot$, que não é satisfeita por nenhuma valoração.
- Qualquer fórmula pode ser derivada de uma contradição
  - basta recordarmos a definição de consequência lógica para verificar que, seja A uma fórmula qualquer, $\bot \vDash A$.



⊥-Eliminação

⊥-Eliminação

- Dada uma contradição ⊥, podemos derivar qualquer fórmula A.

$$\frac{\bot}{A}\ (\bot e)$$

⊥-Introdução

$\perp$-Introdução

- Suponha que as fórmulas A e ¬A foram concluídas, obviamente existe uma contradição. Esse fato gera a regra abaixo

$$\frac{A \qquad \neg A}{\perp}\ (\perp i)$$

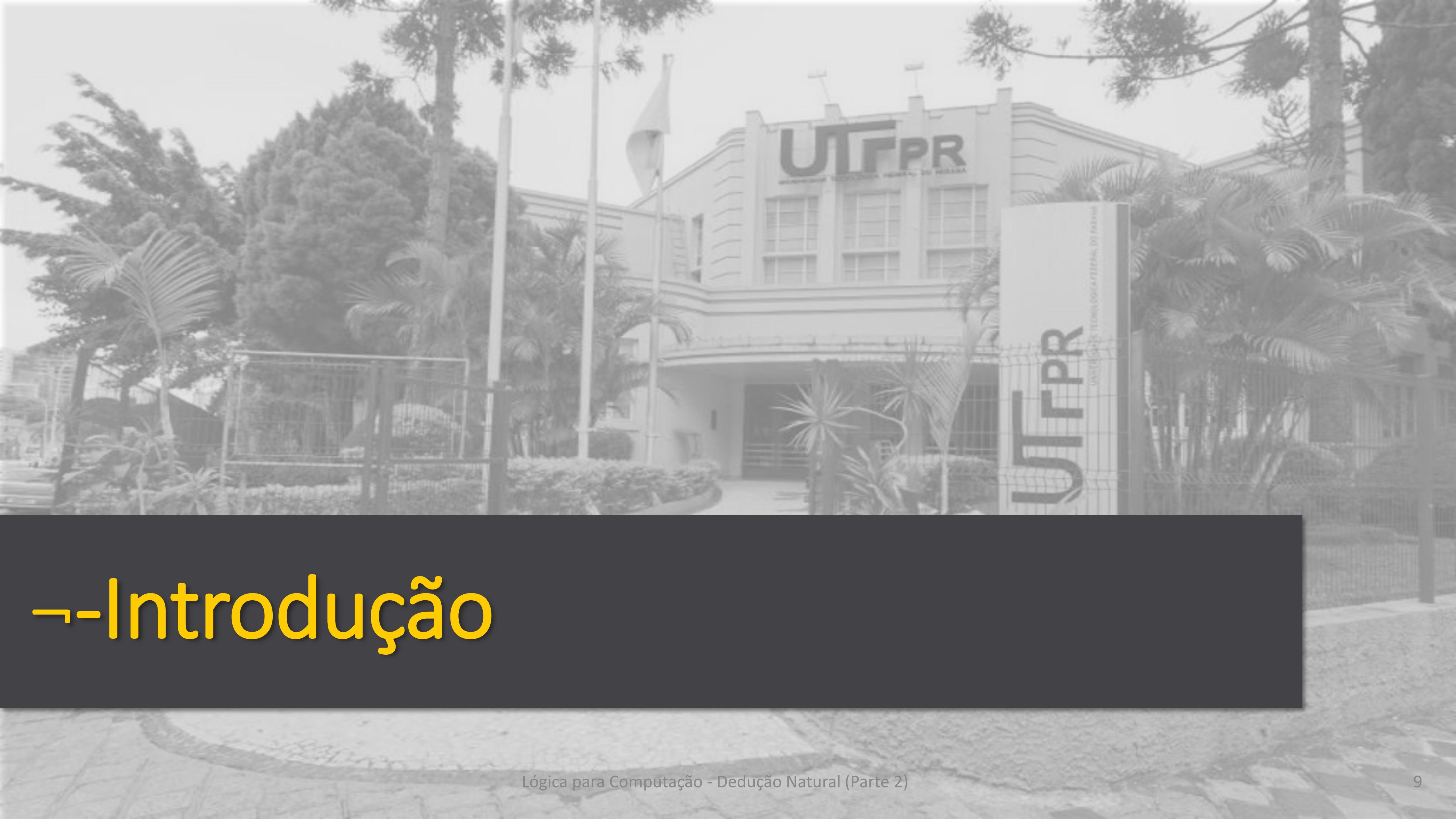
Exemplo

- Prove $\neg p \vee q \vdash p \rightarrow q$

Exemplo

- Prove $\neg p \vee q \vdash p \to q$

1.	$\neg p \vee q$	*premissa*
2.	$\neg p$	*hipótese*
3.	p	*hipótese*
4.	$\perp$	$\perp i$ *3,2*
5.	q	$\perp e$ *4*
6.	$p \to q$	$\to i$ *3-5*
7.	q	*hipótese*
8.	p	*hipótese*
9.	q	*Cópia 7*
10.	$p \to q$	$\to i$ *8-9*
11.	$p \to q$	$\vee e$ *1,2-6,7-10*



¬-Introdução

¬-Introdução

- Para introduzir uma negação assumimos uma hipótese A e geramos uma contradição, ⊥.
- Como a hipótese não pode ser verdadeira, então ela deve ser falsa

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]^i \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\ (\neg\mathrm{i})^i$$

Exemplo

- Prove $p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$

Exemplo

- Prove $p \to q, p \to \neg q \vdash \neg p$

1.	$p \to q$	*premissa*
2.	$p \to \neg q$	*premissa*
3.	p	*hipótese*
4.	q	$\to$*e 1,3*
5.	$\neg q$	$\to$*e 2,3*
6.	$\bot$	$\bot$*i 4,5*
7.	$\neg p$	$\neg$*i 3-6*

Vamos Fazer

- Prove $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

Vamos Fazer

- Prove $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$

1.	$p \rightarrow \neg p$	*premissa*
2.	p	*hipótese*
3.	$\neg p$	$\rightarrow$*e 1,2*
4.	$\bot$	$\bot$*i 2,3*
5.	$\neg p$	$\neg$*i 2-4*

Vamos Fazer

- Prove $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$

Vamos Fazer

- Prove $p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premissa
2.	p	premissa
3.	$\neg r$	premissa
4.	q	hipótese
5.	$q \rightarrow r$	$\rightarrow$e 1,2
6.	r	$\rightarrow$e 4,5
7.	$\perp$	$\perp$i 3,6
8.	$\neg q$	$\neg$i 4-7

Vamos Fazer

- Derivação do modus tolens $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$

Vamos Fazer

- Derivação do modus tolens A → B, ¬B ⊢ ¬A

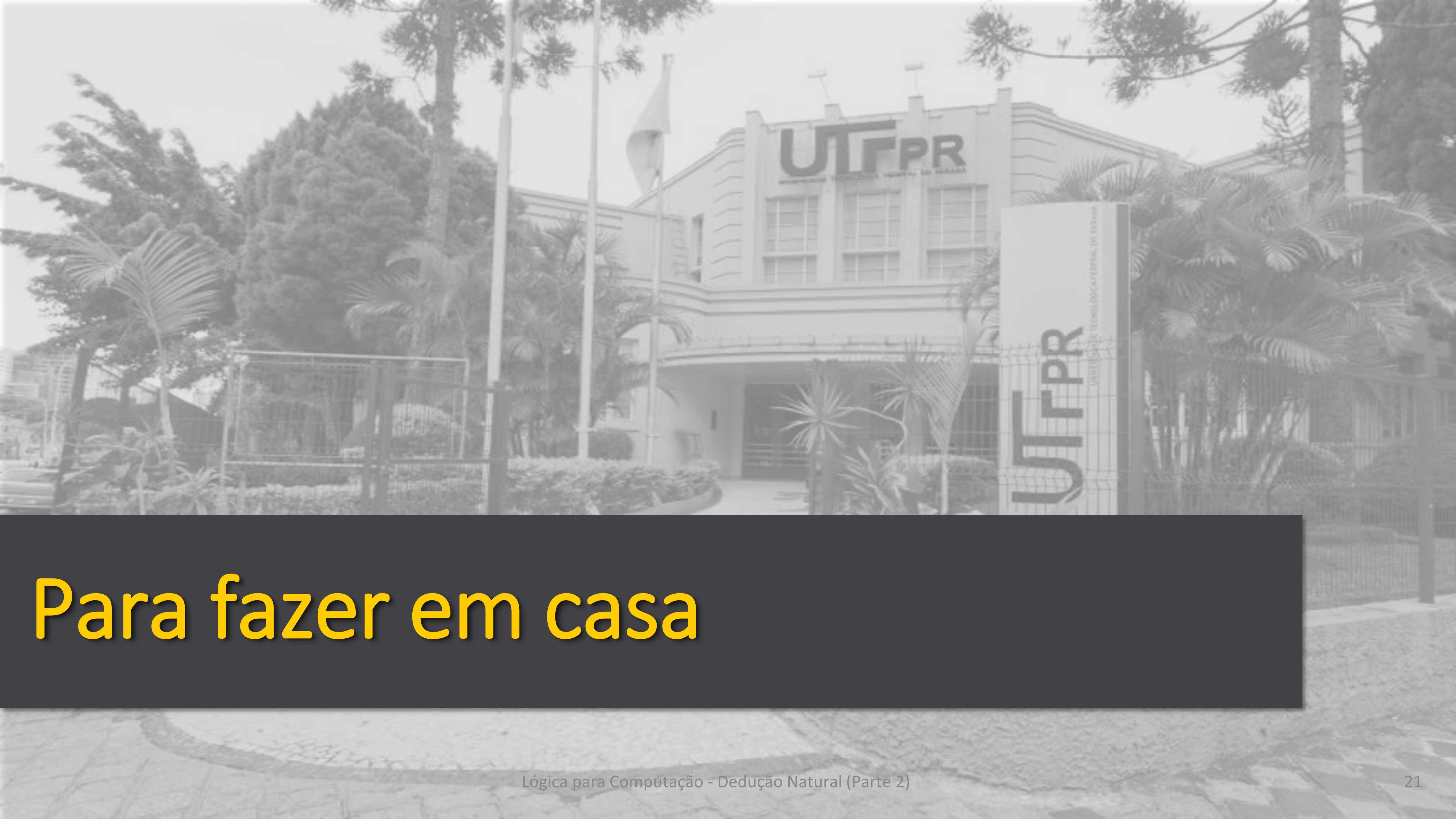
1.	$A \to B$	*premissa*
2.	$\neg B$	*premissa*
3.	A	*hipótese*
4.	B	$\to$*e 1,3*
5.	$\perp$	$\perp$*i 2,4*
6.	$\neg A$	$\neg$*i 3-5*

Vamos Fazer

- Provar que $(p \land q) \land r \vdash p \land (q \land r)$.

Vamos Fazer

- Provar que $\vdash \neg(p \land \neg p)$



Para fazer em casa

Para fazer em casa

1. Provar que $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow q)$
2. Provar que $p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Créditos

Estes slides foram feitos baseados nos slides da disciplina “Lógica para Computação”, ministrada pelos seguintes professores:

Prof. Celso Antônio Alves Kaestner
kaestner@dainf.ct.utfpr.edu.br

Prof. Adolfo Neto
adolfo@utfpr.edu.br