Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba

Lógica Proposicional (Sintaxe)

Professor: Thiago do Nascimento Ferreira

E-mail: thiagoferreira@utfpr.edu.br

Sala: 6 DAINF

Atendimento: Terças e Sextas 15:50

Definição...

É um ramo da lógica clássica que estuda as variáveis proposicionais ou sentenças lógicas, suas possíveis implicações, avaliações de verdade e em alguns casos seu nível absoluto de verdade. Alguns autores também a identificam com a lógica matemática ou a lógica simbólica, já que utiliza uma serie de símbolos especiais que a deixam perto da linguagem matemática

Introdução

- Linguagem proposicional: envolve proposições e conectivos, formando fórmulas complexas;
- Proposição: enunciado ao qual se pode atribuir um valor verdade (verdadeiro ou falso);
- Uma frase declarativa p é uma sentença gramaticalmente correta que pode ser substituída na seguinte frase: "é *verdade que p?*".

Proposição

- Sentenças Declarativas
  - *A soma dos números 3 e 5 e igual a 8.*
  - *Jane reagiu violentamente as acusações de Jack*
  - *Todo número natural par maior que dois é a soma de dois números primos*

Proposição

- Sentenças **não** declarativas
  - *Você pode me passar o sal, por favor?*
  - *Atenção, preparar, já!*
  - *Que a sorte lhe sorria.*

Proposição

- A partir das frases atómicas, podemos formar frases mais complexas usando operações de conjunção
  - Conjunção (E)
  - Disjunção (OU)
  - Negação (NÃO)
  - Implicação (SE … ENTÃO…)
- **Não** trata de relações sobre elementos de um conjunto, como "todos", "algum", o que será visto mais adiante, no estudo da lógica predicativa.

Proposição

- A partir das frases atómicas, podemos formar frases mais complexas usando operações de conjunção
  - Conjunção (E)
  - Disjunção (OU)
  - Negação (NÃO)
  - Implicação (SE … ENTÃO…)
- **Não** trata de relações sobre elementos de um conjunto, como “todos”, “algum”, o que será visto mais adiante, no estudo da lógica predicativa.

Sintaxe

- O alfabeto da lógica proposicional é composto por:
  - Um conjunto de variáveis proposicionais (átomos), tais como P = ($P\downarrow 1$,$P\downarrow 2$, $P\downarrow 3$,...).
  - Conectivos:
    - Unário: ¬ (negação).
    - Binários: ∧ (conjunção), ∨ (disjunção) e → (implicação).
  - Símbolos de pontuação: “(“ e “)”.

Definição 1

- **Fórmulas** (fórmulas bem formadas, fbf): definidas indutivamente como o menor conjunto $L\downarrow LP$ com as seguintes regras de formação:
  - Caso básico: todos os símbolos proposicionais são fbf, isto é: $P \subseteq L\downarrow LP$;
  - Caso indutivo 1: Se $A \in L\downarrow LP$ então $\neg A \in L\downarrow LP$;
  - Caso indutivo 2: Se $A, B \in L\downarrow LP$ então $(A \wedge B) \in L\downarrow LP$, $(A \vee B) \in L\downarrow LP$, e $(A \rightarrow B) \in L\downarrow LP$.

Exemplo de Fórmulas bem formadas

a) p

b) $p \rightarrow q$

c) $(p \wedge (\neg q))$

d) $((p \wedge q) \rightarrow r)$

Exemplo de Fórmulas mal formadas

a) $QP\wedge$

b) true$\rightarrow$

c) P$\neg$

Exemplo 01

a) p

$fórmula$	$regra$
p	$(base)$

p e trivialmente uma formula pela base.

Exemplo 02

b) $p \rightarrow q$

fórmula	regra
p	$(base)$
q	$(base)$
$(p \rightarrow q)$	$(A \rightarrow B)(passo)$

p e q são formulas pelas base. Podemos usar o passo recursivo $A \rightarrow B$ para construir uma implicação de formulas A e B já definidas. Mas para isso basta fazer A = p e B = q e formamos $p \rightarrow q$.

Exemplo 03

c) $(p \wedge (\neg q))$

fórmula	regra
p	$(base)$
q	$(base)$
$(\neg q)$	$(\neg A)(passo)$
$(p \wedge (\neg q))$	$(A \wedge B)(passo)$

Exemplo 04

d) ((p∧q)→r)

fórmula	regra
p	$(base)$
q	$(base)$
r	$(base)$
$(p \wedge q)$	$(A \wedge B)(passo)$
$((p \wedge q) \rightarrow r)$	$(A \rightarrow B)(passo)$

Pergunta

- A sequencia de símbolos p$\wedge$ $\vee$q é uma forma proposional?

Não. Porque não pode ser construída pelas regras da Definição 1

Parênteses e Operadores

- *Parênteses mais externos podem ser omitidos.*
- O uso repetitivo dos conectivos $\wedge$ e $\vee$ dispensa o uso de parênteses
- Podemos escrever $p \wedge q \wedge r$ ao invés de $(p \wedge q) \wedge r$.
- Precedência de Operadores
  - $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$
- Reescrever as fórmulas do exemplo 01

Exemplo

- Vamor reescrever as formulas abaixo com parênteses:
    1. $\neg p \wedge q$
    2. $p \vee q \wedge$ r
    3. $p \vee \neg q \rightarrow$ r

Exemplo 05

1. $\neg \mathrm{p} \wedge q$

Exemplo 05

1. $\neg p \wedge q$

$$\begin{aligned} \neg p \wedge q &= (\neg p) \wedge q \\ &= ((\neg p) \wedge q) \end{aligned}$$

Exemplo 06

2. $p \vee q \wedge r$

Exemplo 06

2. $p \lor q \land r$

$$\begin{aligned} p \lor q \land r &= p \lor (q \land r) \\ &= (p \lor (q \land r)) \end{aligned}$$

Exemplo 07

3. $p \lor \neg q \rightarrow r$

Exemplo 07

3. $p \vee \neg q \rightarrow r$

$$
\begin{aligned}
p \vee \neg q \rightarrow r &= p \vee (\neg q) \rightarrow r \\
&= (p \vee (\neg q)) \rightarrow r \\
&= ((p \vee (\neg q)) \rightarrow r)
\end{aligned}
$$

Definição 2

- O conjunto de subfórmulas de uma fórmula A, Subf(A), é definido como:
  - Base: $A = p$. $\mathrm{Subf}(A) = \{p\}$.
  - Passo 1: Caso $A = \neg B$. $\mathrm{Subf}(\neg B) = \{\neg B\} \cup \mathrm{Subf}(B)$.
  - Passo 2: Caso $A = B \wedge C$. $\mathrm{Subf}(B \wedge C) = \{B \wedge C\} \cup \mathrm{Subf}(B) \cup \mathrm{Subf}(C)$.
  - Passo 3: Caso $A = B \vee C$. $\mathrm{Subf}(B \vee C) = \{B \vee C\} \cup \mathrm{Subf}(B) \cup \mathrm{Subf}(C)$.
  - Passo4: CasoA = $B \rightarrow C$. $\mathrm{Subf}(B \rightarrow C) = \{B \rightarrow C\} \cup \mathrm{Subf}(B) \cup \mathrm{Subf}(C)$.

Exemplo 08

- As subfórmulas de $p \lor \neg q \rightarrow r \land q$ são:

Exemplo 08

- As subfórmulas de p ∨ ¬q → r ∧ q são:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Subf}(p \vee \neg q \to r \wedge q) &= \{p \vee \neg q \to r \wedge q\} \cup \mathrm{Subf}(p \vee \neg q) \cup \mathrm{Subf}(r \wedge q) \\
&= \{p \vee \neg q \to r \wedge q\} \cup \{p \vee \neg q\} \cup \mathrm{Subf}(p) \cup \mathrm{Subf}(\neg q) \cup \mathrm{Subf}(r \wedge q) \\
&= \{p \vee \neg q \to r \wedge q\} \cup \{p \vee \neg q\} \cup \{p\} \cup \mathrm{Subf}(\neg q) \cup \mathrm{Subf}(r \wedge q) \\
&= \{p \vee \neg q \to r \wedge q\} \cup \{p \vee \neg q\} \cup \{p\} \cup \{\neg q\} \cup \mathrm{Subf}(q) \cup \mathrm{Subf}(r \wedge q) \\
&= \{p \vee \neg q \to r \wedge q\} \cup \{p \vee \neg q\} \cup \{p\} \cup \{\neg q\} \cup \{q\} \cup \mathrm{Subf}(r \wedge q) \\
&= \{p \vee \neg q \to r \wedge q\} \cup \{p \vee \neg q\} \cup \{p\} \cup \{\neg q\} \cup \{q\} \cup \{r \wedge q\} \cup \mathrm{Subf}(r) \cup \mathrm{Subf}(q) \\
&= \{p \vee \neg q \to r \wedge q\} \cup \{p \vee \neg q\} \cup \{p\} \cup \{\neg q\} \cup \{q\} \cup \{r \wedge q\} \cup \{r\} \cup \mathrm{Subf}(q) \\
&= \{p \vee \neg q \to r \wedge q, p \vee \neg q, p, \neg q, q, r \wedge q, r\}.
\end{aligned}
$$

Definição 3

- O tamanho de uma fórmula A, denotado |A|, e definido como:
  - Base: |p| = 1 para toda variável proposicional (átomos)
  - Passo 1: $|\neg A| = 1 + |A|$
  - Passo 2: $|A \wedge B| = 1 + |A| + |B|$
  - Passo 3: $|A \vee B| = 1 + |A| + |B|$
  - Passo 4: $|A \rightarrow B| = 1 + |A| + |B|$
- Também pode ser chamado de complexidade de uma fórmula

Exemplo 09

- Dada a fórmula $p \lor \neg q \rightarrow r \land q$, seu tamanho é:

Exemplo 09

- Dada a fórmula $p \vee \neg q \rightarrow r \wedge q$, seu tamanho é:

$$\begin{aligned}
|p \vee \neg q \rightarrow r \wedge q| &= 1 + |p \vee \neg q| + |r \wedge q| \\
&= 1 + 1 + |p| + |\neg q| + 1 + |r| + |q| \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 + |q| + 1 + 1 + 1 \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
&= 8
\end{aligned}$$

Representação

- *"Uma criança não é jovem"*
- *"Uma criança não é jovem, nem adulto, nem idoso"*
- *"Se adulto é trabalhador então ele não está aposentado"*

Representação

- *"Uma criança não é jovem"*
- *"Uma criança não é jovem, nem adulto, nem idoso"*
- *"Se adulto é trabalhador então ele não está aposentado"*
  - criança $\rightarrow \neg$ jovem
  - criança $\rightarrow \neg$ (jovem $\vee$ adulto $\vee$ idoso)
  - (adulto $\wedge$ trabalhador) $\rightarrow \neg$ aposentado

Exemplo 10

- Represente

Se Edgar apresentar uma queixa, então Fulton investigará e Greville será desqualificado

Exemplo 10

- Represente

Se Edgar apresentar uma queixa, então Fulton investigará e Greville será desqualificado

- Solução
  - **E** é Edgar apresentar uma queixa
  - **F** é Fulton investigará
  - **G** é Greville será desqualificado

$E \rightarrow (F \wedge G)$

Para fazer em casa

1) Adicione parênteses:

$p \land \neg (p \rightarrow \neg q) \lor \neg q$

2) Represente:

Se Edgar apresentar uma queixa, então, ou Fulton investigará, ou Greville será desqualificado.

Créditos

Estes slides foram feitos baseados nos slides da disciplina “Lógica para Computação”, ministrada pelos seguintes professores:

Prof. Celso Antônio Alves Kaestner
kaestner@dainf.ct.utfpr.edu.br

Prof. Adolfo Neto
adolfo@utfpr.edu.br