Review

- $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right).$
- $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$
- Taylor多项式的唯一性
- 间接展开法求Taylor公式.
- Taylor公式的应用.
- $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\alpha, (1\pm x)^{-1}$的Taylor公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0.$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^{2}+\cdots$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+o(x^{n}),\quad x\to 0.$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^{2}+\cdots+(-1)^{n}x^{n}+o(x^{n}),\quad x\to 0.$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^{2}+\cdots+x^{n}+o(x^{n}),\quad x\to 0.$$

清華大學

§ 4.函数的增减与极值问题

设f在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可导.

(1)若f在$[a,b]$上单调递增, 则$\forall x\in(a,b)$,有

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0.$$

(2)若$\forall x\in(a,b)$,有$f'(x)\geq 0$,则由Lagrange中值定理,

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(\xi)\geq 0,\quad \forall x_1,x_2\in[a,b],x_1\neq x_2.$$

即$f(x)$在$[a,b]$上单调递增.

Question.光滑的严格单调函数,其导函数有什么特点?

是否必有 $f'(x)>0$? No!例如$f(x)=x^3$.

清華大學

Thm. f在$[a,b]$上连续, 在(a,b)上可导, 则

(1) f在$[a,b]$上单调递增(减) $\Leftrightarrow$ 在(a,b)上$f'(x)\ge(\le)0$;

(2) f在$[a,b]$上严格单调递增(减) $\Leftrightarrow$ 在(a,b)上$f'(x)\ge(\le)0$,

且在(a,b)的任意子区间(c,d)上$f'(x)$不恒为0.

Proof. (1)略. (2) $\Rightarrow$:设f在$[a,b]$上严格单增, 由(1)知, 在(a,b)上$f'(x)\ge 0$.若在(a,b)的某个子区间(c,d)上$f'(x)\equiv 0$, 则$f(x)$在(c,d)上 为常数, 与f严格单增矛盾.

$\Leftarrow$: $f'(x)\ge 0(x\in(a,b))$, 由(1)知, f在$[a,b]$上单增. 若存在$a\le c<d\le b, s.t. f(c)=f(d)$, 则 $f(x)=f(c)(\forall x\in[c,d])$, 从而在$(c,d)$上 $f'(x)\equiv 0$, 矛盾.□

Ex.(1) $\dfrac{1}{1+x} < \ln(1+\dfrac{1}{x}) < \dfrac{1}{x} \quad (x>0)$, (2) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \uparrow \quad (x>0)$

Proof.(1) $\ln(1+\dfrac{1}{x}) = \dfrac{\ln(1+x)-\ln x}{(1+x)-x} = \dfrac{1/\xi}{1}, \xi \in (x, x+1).$

故 $\dfrac{1}{1+x} < \ln(1+\dfrac{1}{x}) < \dfrac{1}{x}, \quad \forall x>0.$

$$(2)\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)' = \left(e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}\right)' = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\ln(1+\frac{1}{x}) + x(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x})\right)$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}\right) > 0, \forall x>0.$$ 故 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \uparrow.$

Ex. 求证:$x>0$时, $\dfrac{1-x}{1+x}<e^{-2x}$.

Proof. 令$f(x)=(1+x)e^{-2x}-1+x$,只要证$f(x)>0,\forall x>0$.

$$f'(x)=-(1+2x)e^{-2x}+1,\quad f'(0)=0,$$

$$f''(x)=4xe^{-2x}>0,\quad \forall x>0.$$

故$x>0$时, $f'(x)$严格↑, $f'(x)>f'(0)=0$, 从而$f(x)$严格↑,

$f(x)>f(0)=0,\forall x>0.$□

Ex. 求$f(x)=|x|^{2/3}(x-1)$的极值点.

解:($x=0$处f不可导, $f(0)=0$, $f(x)<0, \forall x\in U(0,1/2)$,

因此$x=0$是f的极大值点.)

$$x>0\text{时}, f(x)=x^{5/3}-x^{2/3}, f'(x)=\frac{5}{3}x^{2/3}-\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{5x-2}{3x^{1/3}}.$$

$x<0$时, $f(x)=(-x)^{2/3}(x-1)$,

$$f'(x)=(-x)^{2/3}-\frac{2}{3}(-x)^{-1/3}(x-1)=\frac{2-5x}{3(-x)^{1/3}},$$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,2/5)$	$2/5$	$(2/5,+\infty)$
$f'(x)$	>0	不存在	<0	0	>0
$f(x)$	$\uparrow$	极大	$\downarrow$	极小	$\uparrow$

清華大學

Question. $f\in C[a,b]$, 在(a,b)上可导, 如何求f在$[a,b]$上的最值？

Case1. f在端点a或b取得最值.

Case2. f在$x_0\in(a,b)$取得最值,则$f'(x_0)=0$.

结论:

Step1. 求 f在(a,b)上的所有驻点$x_1,x_2,\cdots,x_m$.

Step2. 比较 $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2),\cdots, f(x_m)$求最值.

Question. f在$\mathbb{R}$上可导, 如何求 f 的极值和最值？

Ex. 讨论 $2x^3-3x^2-12x+1$ 在 $\mathbb{R}$ 上和 $[-3,3]$ 上的极值与最值.

解: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1,\ f'(x)=6(x-2)(x+1).$

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	>0	0	<0	0	>0
$f(x)$	$\uparrow$	8, 极大	$\downarrow$	-19, 极小	$\uparrow$

1) $\mathbb{R}$ 上, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, 无最值, $f(-1)=8$ 极大, $f(2)=-19$ 极小.

2) $[-3,3]$ 上, $f(-1)=8,\ f(2)=-19,\ f(-3)=-44,\ f(3)=-8.$

$f(-1)=8$ 极大, $f(2)=-19$ 极小.

$\max\limits_{x\in[-3,3]} f(x)=f(-1)=8,\ \min\limits_{x\in[-3,3]} f(x)=f(-3)=-44.\square$

Ex. $f(x)=xe^{-2x^2}$ 在$\mathbb{R}$上的极值与最值.

解: $f'(x)=(1-4x^2)e^{-2x^2}$. $f'(x)=0 \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$.

x	$(-\infty,-1/2)$	$-1/2$	$(-1/2,1/2)$	$1/2$	$(1/2,+\infty)$
$f'(x)$	<0	0	>0	0	<0
$f(x)$	$\downarrow$	$\dfrac{-1}{2\sqrt{e}}$ 极小	$\uparrow$	$\dfrac{1}{2\sqrt{e}}$ 极大	$\downarrow$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0,\ \exists M>1, 使得\forall |x|\geq M 有 |f(x)|<\frac{1}{4\sqrt{e}}.$$

$$\max_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(1/2)=\frac{1}{2\sqrt{e}},\ \min_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(-1/2)=\frac{-1}{2\sqrt{e}}.\square$$

Ex. $\dfrac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1, \quad x \in [0,1], p > 1.$

解: 令$f(x) = x^p + (1-x)^p$, 则 $f(0) = f(1) = 1.$

$$f'(x) = px^{p-1} - p(1-x)^{p-1}.$$

若$f'(x_0) = 0$,则$x_0 = 1/2$. $p > 1$,则$f(1/2) = \dfrac{1}{2^{p-1}} \in (0,1).$

$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$上可导,因此f在$[0,1]$上的最值必在$f(0), f(1), f(1/2)$中取得,于是

$$\max_{x\in[0,1]} f(x) = f(0) = f(1) = 1, \min_{x\in[0,1]} f(x) = f(1/2) = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

即 $\dfrac{1}{2^{p-1}} \le x^p + (1-x)^p \le 1, \quad \forall x \in [0,1], p > 1.$ □

Thm. $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(2n-1)}(x_0)=0$,则

$$f^{(2n)}(x_0)>(<)\,0\Rightarrow x_0\text{为}f\text{的极小(大)值点.}$$

Proof. $f(x)=f(x_0)+\dfrac{1}{(2n)!}f^{(2n)}(x_0)(x-x_0)^{2n}+o((x-x_0)^{2n})$,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(2n)!(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^{2n}}=f^{(2n)}(x_0)>(<)\,0.$$

由函数极限的保序性,$\exists\delta>0, s.t.$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2n}}>(<)\,0,\qquad \forall x\in U(x_0,\delta).$$

因此 $f(x_0)$极小(大).□

Thm. $f'(x_0)=\cdots=f^{(2n)}(x_0)=0,\ f^{(2n+1)}(x_0)\neq 0$则$x_0$不是极值点.

Proof. 不妨设 $f^{(2n+1)}(x_0)>0.$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(x_0)(x-x_0)^{2n+1}+o((x-x_0)^{2n+1})$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{(2n+1)!(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)^{2n+1}}=f^{(2n+1)}(x_0)>0.$$

由函数极限的保序性,$\exists\delta>0, s.t.$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2n+1}}>0,\qquad \forall x\in U(x_0,\delta).$$

因此 $f(x_0)$不是极值.□

Thm. $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(2n)}(x_0)=0$, $f^{(2n)}(x)$在x_0连续，$f^{(2n+1)}(x)$在x_0的两侧异号($f^{(2n)}(x)$在x_0不一定可导)，则

$$f^{(2n+1)}(x)\begin{cases}\le(<)0, & x<x_0\\ \ge(>)0, & x>x_0\end{cases}\Rightarrow x_0是f的(严格)极小值点;$$

$$f^{(2n+1)}(x)\begin{cases}\ge(>)0, & x<x_0\\ \le(<)0, & x>x_0\end{cases}\Rightarrow x_0是f的(严格)极大值点.$$

Proof. 由带Lagrange余项的Taylor公式，$\exists$介于x_0与x之间的ξ, s.t.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2n+1}}=\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}.\square$$

Question. $n=0$时，如何理解上面定理?

作业：习题4.4

No.4(8),5(5),6(3),9