《线性代数》作业 9

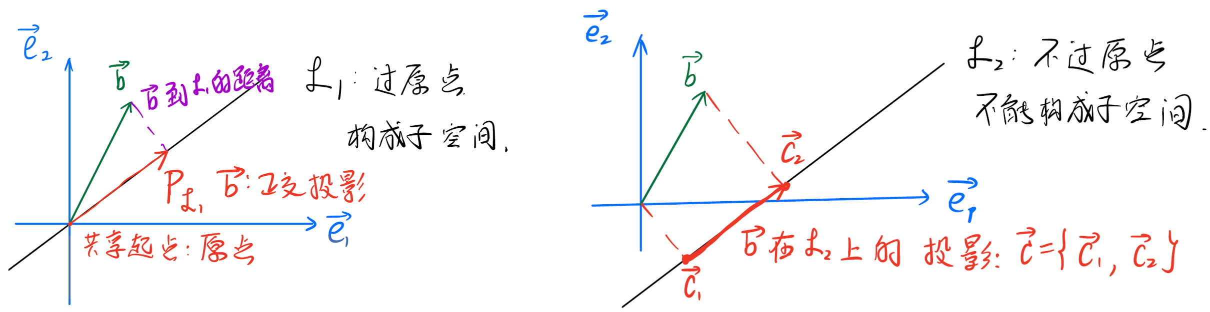
截止时间：11 月 26 日 18:00。注明姓名，学号和组号。
纸质。请写出完整的计算等解题过程。提交于课堂或近春园西楼入口处我的信箱。

1. 证明：设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的直线：

$$\mathcal{L}:\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

求 $\mathbb{R}^3$ 中一点 $\boldsymbol{b} = [1 \quad 0 \quad 2]^{\mathrm{T}}$ 到直线 $\mathcal{L}$ 上的投影。

注：当直线 $\mathcal{L}_1$ 经过原点时，可以自然的定义一个向量 $\boldsymbol{b}$ 在直线 $\mathcal{L}_1$ 上的正交投影，因为直线 $\mathcal{L}_1$ 构成一个子空间，其中的任意向量都以原点为起点。注意到 $\boldsymbol{b}$ 及其投影共享一个起点，即原点。构造出的直角三角形对应着 $\boldsymbol{b}$ 关于 $\mathcal{L}_1$ 的正交分解。



(a) $\mathcal{L}_1$ 经过原点.

(b) $\mathcal{L}_2$ 不经过原点.

当直线 $\mathcal{L}_2$ 不经过原点时，会讨论一点或一个向量 $\boldsymbol{b}$ 到这条直线的投影，而不是正交投影。注意到这个投影是落在直线 $\mathcal{L}_2$ 上，需要同时记录起点和终点，记为 $\vec{c} = \{\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2\}$。即使将 $\vec{c}$ 平移到原点，应得到 $\boldsymbol{c}_3 = \boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{c}_1$，和 $\boldsymbol{b}$ 构造出一个直角三角形。另一个直角边长度 $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}_3\|$ 也失去了 $\boldsymbol{b}$ 到 $\mathcal{L}_2$ 的距离这一解释。简单来说，因为 $\mathcal{L}_2$ 不包含零向量，不能构成子空间，所以无法定义其正交投影。

2. 计算下列行列式。

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $A = [i+j]_{n\times n}$. (e) $A = [ij]_{n\times n}$.

3. 设 A 是 3 阶方阵，$\det(A) = 5$. 求下列矩阵 B 的行列式。

(a) $B = 2A, -A, A^2$.

(b) $B=\begin{bmatrix} a_1^{\mathrm{T}}-a_3^{\mathrm{T}} \\ a_2^{\mathrm{T}}-a_1^{\mathrm{T}} \\ a_3^{\mathrm{T}}-a_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$，其中 $A=\begin{bmatrix} a_1^{\mathrm{T}} \\ a_2^{\mathrm{T}} \\ a_3^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$.

4. 设 $A_x=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}+xI_2$.

   (a) 求 A_0, A_1, A_2, A_3 的行列式。

   (b) 求 A_x 的行列式，并将其写成 $(x+a)(x+b)$ 的形式。

   (c) 分别求 A_0^2, $A_0^2+I_2$, $A_0^2+3A_0+2I_2$, $A_0^3-2A_0^2+3A_0-4I_2$ 的行列式，并分析它们与 a, b 的关系。

5. 设方阵 A 具有 QR 分解 $A=Q\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. 求 $\det(A)$ 的所有可能值。

6. 给定一个 $m\times n$ 矩阵 A, 且 $m>n, \operatorname{rank}(A)=n$. 计算其正交投影矩阵 P 的行列式：

$$\det(P)=\det\left(A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\right)=\frac{\det(A)\det(A^{\mathrm{T}})}{\det(A^{\mathrm{T}}A)}=1.$$

   然而正交投影矩阵常常不可逆。错误在哪里？

7. 设 A 可逆，D 是方阵。B, C 是相应阶数的矩阵。证明：$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right)=\det(A)\det(D-CA^{-1}B)$.

8. 设 A, B 是 n 阶方阵。证明：$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\right)=\det(A+B)\det(A-B)$.

9. 给定方阵 $A_n=\begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\quad B_n=\begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) 利用展开式得到 $\det(B_n)$ 关于 n 的递推关系，并计算 $\det(B_n)$.

   (b) 利用 A_n 和 B_n 的关系，计算 $\det(A_n)$.

10. 设 A 是正交矩阵，且 $\det(A) < 0$. 证明：$I_n + A$ 不可逆。由此可得，存在非零向量 $\boldsymbol{x}$，使得 $A\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.

11. 利用 Cramer 法则把未知数 x_1, x_2 表示成 t 的函数：

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} e^t x_1 & + & e^{-2t} x_2 & = & 3\sin t, \\ e^t x_1 & - & 2e^{-2t} x_2 & = & t\cos t. \end{array}\right.$$