《线性代数》作业 2

截止时间：10月8日18:00。
纸质版。请写出完整的计算等解题过程。提交于课堂或近春园西楼入口处我的信箱。

1. 设 $\mathbb{R}^2$ 上的变换 $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y+2 \\ x-5 \end{bmatrix}$.

   (a) 证明 f 不是线性变换。

   (b) 构造分解 $f = g \circ h$, 其中 g 是 $\mathbb{R}^2$ 上的平移变换，h 是 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换。（这种平移与线性变换的复合称为仿射变换。）

2. 给定向量 $\boldsymbol{b} = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 0.5 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$, 其中 $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ 是线性变换，满足 $f(\boldsymbol{e}_k) = k\boldsymbol{e}_{6-k}, k = 1, \ldots, 5$. 将向量 $\boldsymbol{b}$ 写成矩阵和向量乘积的形式。

3. 设线性变换 f 的矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) 令 $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A\boldsymbol{x}$. 将 y_1, y_2, y_3 分别用 x_1, x_2, x_3 表达出来。

   (b) 将 x_1, x_2, x_3 分别用 y_1, y_2, y_3 表达出来。

   (c) 找到矩阵 B, 使得 $\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{y}$.

   (d) 设 g 是由矩阵 B 决定的线性变换，证明 f 和 g 互为逆变换。

   (e) 猜测 AB 和 BA 的结果，并进行计算验证。

4. 下列方程组有解时，找到所有解；方程组无解时，对方程组做初等行变换，得到矛盾表达式 $0 = 1$。

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

   (c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5. 已知 $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$。计算 $AB, BA, AB - BA$.

6. 设 $\boldsymbol{H}_\theta(\boldsymbol{x}) = H_\theta \boldsymbol{x}$，其中 $H_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$。而 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的向量。求证:

   (a) $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} = 0, \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w} = 1$. $H_\theta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, H_\theta\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w}$. 分析变换 $\boldsymbol{H}_\theta$ 的几何意义。

   (b) $H_\theta^2 = I_2, H_\theta = I_2 - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}$.

   (c) $R_{-\phi}H_\theta R_\phi = H_{\theta-\phi}, H_\theta R_\phi H_\theta = R_{-\phi}$, 其中 R_ϕ 是绕原点逆时针旋转角度 ϕ 的变换的表示矩阵。分析前述等式的几何意义。

7. 求证:

   (a) 任意方阵 A 都能唯一的表示为 $A = B + C$，其中 B 是对称矩阵，C 是反对称矩阵。

   (b) n 阶方阵 A 是反对称矩阵当且仅当对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = 0$.

   (c) 设 A, B 是 n 阶对称方阵。则 $A = B$ 当且仅当对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}B\boldsymbol{x}$.

8. 对 $[A \quad I_n]$ 做初等行变换，求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵。

9. 设矩阵 A 和 B 左相抵。求证:

   (a) 如果 A 的所有列都相同，则 B 的所有列都相同。

   (b) 如果 A 的第一列是第二列和第三列的和，则 B 的第一列也是第二列和第三列的和。