



Review

- 无穷大量与无穷小量 (同阶, 等价, 高阶)
- 重要结论 **Thm.** 当 $x \rightarrow 0$ 时:

$$(1) \sin x \sim \tan x \sim x;$$

$$(2) 1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2;$$

$$(3) \ln(1+x) \sim x;$$

$$(4) e^x - 1 \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0);$$

$$(5) (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$



- 求函数极限的技巧

极限的四则运算

极限典式

指数-对数变换

复合函数的极限(变量替换)

等价因子替换

$o(\cdot)$ 的运用

夹挤原理



§ 5. 函数的连续与间断

Def.(1)若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在点 x_0 处连续;

(2)若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在点 x_0 处右连续;

(3)若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在点 x_0 处左连续;

Remark. f 在点 x_0 处连续, 即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall |x - x_0| < \delta.$$

Thm. f 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow f$ 在点 x_0 处左、右连续.



Def. f 在点 x_0 处不连续, 则称 f 在点 x_0 处间断.

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 f 在点 x_0 处无定义或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$,

则称 x_0 为 f 的可去间断点.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$,

则称 x_0 为 f 的跳跃间断点. 可去间断点与跳跃间断点统称为第一类间断点.

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ 至少有一个不存在, 则称 x_0 为 f 的第二类间断点.



Ex. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ 在每个整数点处右连续, 但不左连续, 左、右极限存在但不相等(跳跃间断点); 在其它点处连续.

Ex. $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ 在任一点 x_0 处既不左连续, 又不右连续, 左、右极限均不存在(第二类间断点).

Ex. $x_0 = 0$ 是 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 可去点断点.

Ex. $x_0 = 0$ 是 $\sin \frac{1}{x}$ 和 $e^{1/x}$ 的第二类间断点.



Ex. (a, b) 上的单调函数的间断点都是跳跃间断点.

Proof. 不妨设 $f(a, b)$ 上单增, $x_0 \in (a, b)$ 为 f 的间断点.

由于单调函数在每一点处的左右极限都存在, 必有

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) \neq f(x_0) \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) \neq f(x_0),$$

否则 f 在 x_0 连续. f 单增, 由函数极限的保序性, 有

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x).$$

进而有 $\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x)$ (否则 $\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = f(x_0)$

$= \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x)$, f 在 x_0 处连续), 故 x_0 为跳跃间断点. \square



Ex. $\sin x, \cos x, \ln x, e^x$ 在其定义域中任一点 x_0 处连续.

Thm. f, g 在点 x_0 处连续, $c \in \mathbb{R}$, 则

(1) $cf, f \pm g, f \cdot g$ 在点 x_0 处连续;

(2) 若 $g(x_0) \neq 0$, 则 $\frac{f}{g}$ 在点 x_0 处连续.

Ex. $\tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 在其定义域中任一点 x_0 处连续.

Thm. g 在 t_0 处连续, f 在 $x_0 = g(t_0)$ 处连续, 则 $f \circ g$ 在 t_0 处连续.

Ex. $a > 0, a \neq 1, a^x = e^{x \ln a}$ 在其定义域中任一点 x_0 处连续.

Ex. $a \in \mathbb{R}, x^a = e^{a \ln x}$ 在其定义域中任一点 x_0 处连续.



Ex. Riemann函数 $R(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1/q & x = p/q, p, q \text{互质}, q > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}. (\text{无理点连续, 有理点间断})$$

Proof. $\forall \varepsilon > 0, \exists N, s.t. 1/N < \varepsilon$. 在 $U(x_0, 1)$ 中仅存在有限个有理数 p/q 满足: p, q 互质, $0 < q \leq N$. 记这有限个有理数到 x_0 的最小距离为 δ , 则 $\delta > 0$, 且对 $U(x_0, \delta)$ 中任意有理数 x , 有 $R(x) < 1/N < \varepsilon$. 而对 $U(x_0, \delta)$ 中任意无理数 x , 有 $R(x) = 0$. 故 $0 \leq R(x) < \varepsilon, \forall x \in U(x_0, \delta)$. 从而有 $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0. \square$



§ 6. 闭区间上连续函数的性质

- 零点定理
- 介值定理
- 有界性定理
- 最大最小值定理
- 一致连续



Def. 若 f 在 (a, b) 上任一点处连续, 则称 f 在 (a, b) 上连续, 记作 $f \in C(a, b)$. 若 $f \in C(a, b)$, 且 f 在点 a 右连续, 在点 b 左连续, 则称 f 在 $[a, b]$ 上连续, 记作 $f \in C[a, b]$.

Question. 如何定义 $f \in C(a, b]$ 和 $f \in C[a, b)$?

Thm.(零点定理) $f \in C[a, b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f(\xi) = 0$.

Proof. 不妨设 $f(a) < 0 < f(b)$. 二分区间 $[a, b]$, 若 $f(\frac{a+b}{2}) \geq 0$, 记 $[a_1, b_1] = [a, \frac{a+b}{2}]$; 若 $f((a+b)/2) < 0$, 记 $[a_1, b_1] = [\frac{a+b}{2}, b]$. 于是 $f(a_1) < 0, f(b_1) \geq 0, b_1 - a_1 = (b - a)/2$.



同理,再二分区间 $[a_1, b_1]$,构造 $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, s.t.

$$f(a_2) < 0, f(b_2) \geq 0, b_2 - a_2 = (b - a)/2^2.$$

继续下去,构造 $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$, s.t.

$$f(a_n) < 0, f(b_n) \geq 0, b_n - a_n = (b - a)/2^n.$$

由闭区间套定理, $\exists \xi \in \bigcap_{n \geq 1} [a_n, b_n] \subset [a, b]$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi$.

$f \in C[a, b]$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$.

而 $f(a_n) < 0 \leq f(b_n)$, 由极限的保序性得 $f(\xi) = 0$. 又 $f(a) < 0 < f(b)$, 因此 $\xi \neq a, b, \xi \in (a, b)$. \square



Thm.(介值定理) $f \in C[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$, 则对任意介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的 c , $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f(\xi) = c$.

Proof. 令 $g(x) = f(x) - c$, 则 $g \in C[a, b]$, $g(a) \cdot g(b) < 0$.

由零点定理, $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $g(\xi) = 0$, $f(\xi) = c$. \square

Ex. $m > 0$ 为奇数, $f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m$ 至少有一个实根, 其中 a_1, a_2, \cdots, a_m 为实数.

Proof. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^m} = 1$, $\exists M > 0$, s.t. $\frac{f(x)}{x^m} > \frac{1}{2}$, $\forall |x| \geq M$. 于是,

$$f(M) > \frac{1}{2} M^m > 0, \quad f(-M) < \frac{1}{2} (-M)^m < 0.$$

由介值定理, $\exists \xi \in (-M, M)$, s.t. $f(\xi) = 0$. \square



Thm. f 在 (a, b) 上单调, J 为 f 的值域, 则

$$f \in C(a, b) \Leftrightarrow J \text{ 为区间.}$$

Proof. 不妨设 f 单增.

必要性. 设 $f \in C(a, b)$. 若 J 为单点集, 则 J 为退化的区间.

若 J 不为单点集, 任取 $y_1, y_2 \in J, y_1 < y_2$. $\exists a < x_1 < x_2 < b, s.t.$

$$y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), f \in C[x_1, x_2].$$

由介值定理, $\forall y_0 \in (y_1, y_2), \exists x_0 \in (x_1, x_2), s.t.$

$$f(x_0) = y_0.$$

$y_0 \in J$. 因此 $\forall y_1, y_2 \in J, y_1 < y_2$, 有 $[y_1, y_2] \subset J$, J 为区间.



充分性. 设 J 为区间. 若 $f \notin C(a, b)$, 则 \exists 跳跃间断点 $x_0 \in (a, b)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

则必有 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0)$ 或 $f(x_0) < \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

不妨设 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0)$. 于是,

$$f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) < f(x_0), \quad \forall a < x < x_0;$$

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \geq x_0.$$

因而, $\forall y \in (\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x), f(x_0))$, 不存在 $x \in (a, b)$, s.t. $f(x) = y$.

与 J 为区间矛盾. \square



Remark. 以上定理中 (a, b) 可以取为无穷区间. 也可替换为 $[a, b], [a, b)$ 和 $(a, b]$.

记 $\langle a, b \rangle$ 为 $(a, b), [a, b], [a, b)$ 或 $(a, b]$.

Thm. f 在 $\langle a, b \rangle$ 上连续且严格单调, 则 f 的值域为一区间 $\langle c, d \rangle$, 且反函数 f^{-1} 在 $\langle c, d \rangle$ 上连续.

Proof. 此定理可以视为上一定理的推论. \square

Ex. $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \dots$ 在各自定义域中连续.

Thm. 初等函数, 即由基本初等函数(常数、幂、三角、反三角、指数、对数)经过**有限次**四则运算和**有限次**复合运算得到的函数, 在其定义域中连续.



Thm. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$.

Proof.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 1,$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\tan y} = 1.$$

Remark.

$$\arcsin x \sim x (x \rightarrow 0) \quad \Rightarrow \quad \arcsin x = x + o(x) (x \rightarrow 0)$$

$$\arctan x \sim x (x \rightarrow 0) \quad \Rightarrow \quad \arctan x = x + o(x) (x \rightarrow 0)$$



Thm.(有界性定理) $f \in C[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

Proof. 若 f 在 $[a,b]$ 上无上界, 则 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a,b], s.t.$

$$f(x_n) > n.$$

由列紧性定理, $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 设 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0$. 则

$x_0 \in [a,b]$. f 在点 x_0 连续, 则

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

$\{f(x_{n_k})\}$ 为收敛列, 有界, 与 $f(x_{n_k}) > n_k$ 矛盾. \square



Thm. (最大最小值定理) $f \in C[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上有最大、最小值, 即 $\exists \xi, \eta \in [a, b], s.t.$

$$f(\xi) = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}, \quad f(\eta) = \min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}.$$

Pf. $f \in C[a, b]$, f 在 $[a, b]$ 上有界, 从而有上确界 $M = \sup_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$.

由上确界定义, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b], s.t. M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M$. 有界列 $\{x_n\}$ 有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$,

$\xi \in [a, b]$. f 在 ξ 连续, 则

$$f(\xi) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}.$$

同理, $\exists \eta \in [a, b], s.t. f(\eta) = \min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}$. \square



Ex. $f \in C[0,1]$, $f(0) = f(1)$, 则对任意正整数 n , $\exists \xi \in [0,1]$,
 $s.t.$ $f(\xi) = f(\xi + 1/n)$.

Proof. 令 $g(x) = f(x) - f(x + 1/n)$, 则 $g \in C[0, 1 - 1/n]$.

$$g(0) + g(1/n) + \cdots + g((n-1)/n) = f(0) - f(1) = 0.$$

$$0 = \frac{1}{n} (g(0) + g(1/n) + \cdots + g((n-1)/n)) \\ \in [\min_{0 \leq x \leq 1-1/n} g(x), \max_{0 \leq x \leq 1-1/n} g(x)].$$

由介值定理, $\exists \xi \in [0, (n-1)/n] \subset [0,1]$, $s.t.$

$$g(\xi) = 0, \text{ 即 } f(\xi) = f(\xi + 1/n). \square$$

Question. $\forall c \in (0,1)$, $\exists \xi \in [0,1]$, $s.t.$ $f(\xi) = f(\xi + c)$? (×)



Remark. $\forall c \in (0,1), \exists \xi \in [0,1], s.t.$

$$f(\xi) = f(\xi + c) \text{ 或 } f(\xi) = f(\xi + c - 1).$$

(周期延拓, 最大最小值)

Def. (一致连续) f 在区间 I 上有定义, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon, \quad \forall |u - v| < \delta, u, v \in I,$$

则称 f 在区间 I 上一致连续.

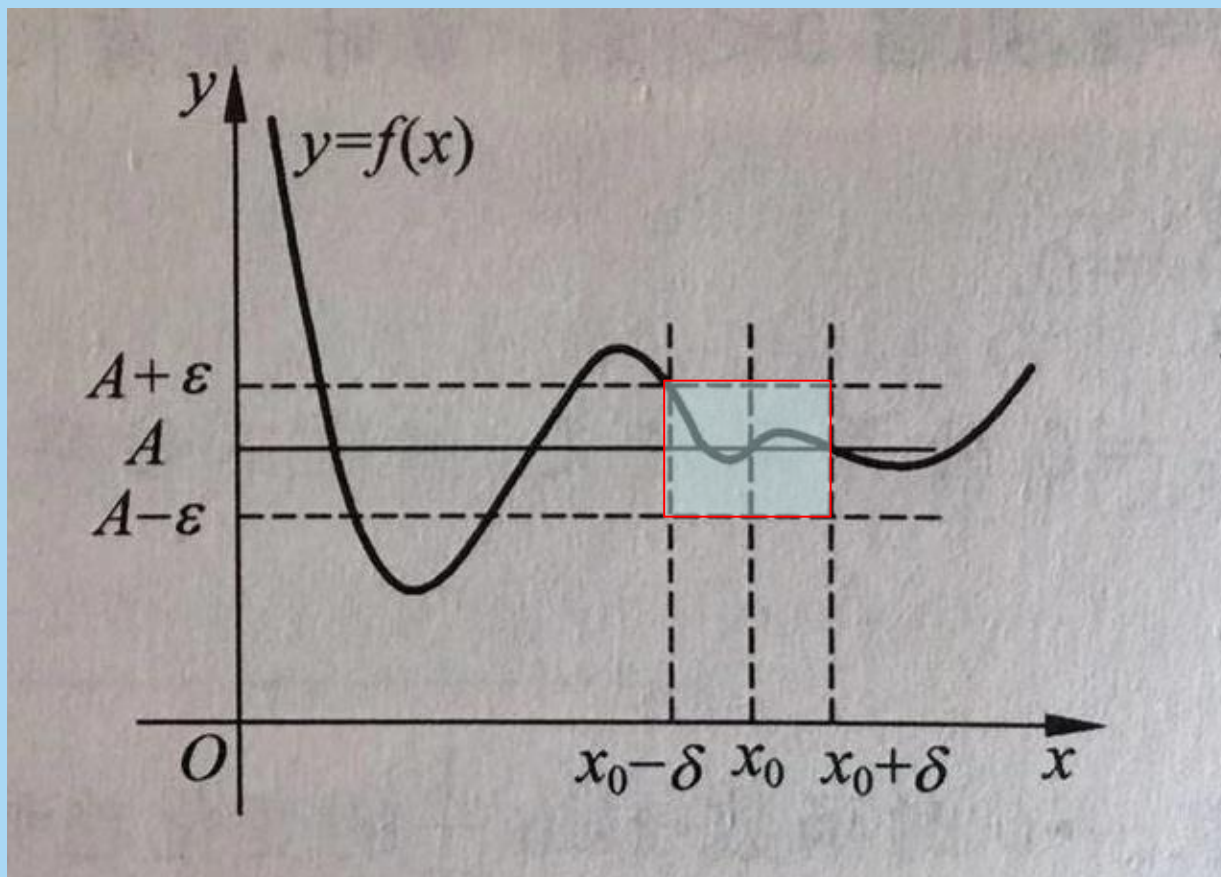
Ex. $f(x) = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续.

Poof. $\forall x, y \in \mathbb{R},$

$$|\sin x - \sin y| = 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leq |x - y|. \square$$



Remark.连续函数的“十字架”与一致连续的“十字架”.





Question. 如何描述 f 在区间 I 上不一致连续?

Thm. f 在 I 上不一致连续

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists u, v \in I, s.t. |u - v| < \delta, |f(u) - f(v)| > \varepsilon_0.$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n, v_n \in I, s.t.$$

$$|u_n - v_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(u_n) - f(v_n)| > \varepsilon_0.$$

$$\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \exists I \text{ 中点列 } \{u_n\}, \{v_n\}, s.t.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0, \quad |f(u_n) - f(v_n)| > \varepsilon_0.$$



Ex. $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 不一致连续.

Proof. 法一: $\exists \varepsilon_0 = 1, \forall \delta \in (0, 1), \exists x = \delta, y = \delta / 2, s.t.$

$$|x - y| = \delta / 2 < \delta, \quad \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{xy} = \frac{1}{\delta} > 1.$$

法二: $\exists \varepsilon_0 = 1, x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{2n}, s.t.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0, \quad \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \right| = n \geq \varepsilon_0. \square$$



Thm. (一致连续性) $f \in C[a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 上一致连续.

Proof. 反证法. 假设 f 在 $[a, b]$ 上不一致连续, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ 及 $[a, b]$ 中点列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, s.t.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0, \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon_0, \quad \forall n. (*)$$

由列紧性定理(Bolzano-Weierstrass定理), $\{x_n\}$ 有收敛子列,

设 $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j} = \xi \in [a, b]$. 而 $\lim_{j \rightarrow \infty} (x_{n_j} - y_{n_j}) = 0$, 所以 $\lim_{j \rightarrow \infty} y_{n_j} = \xi$.

由 f 的连续性得 $\lim_{j \rightarrow \infty} f(x_{n_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(y_{n_j}) = f(\xi)$, 与 $(*)$ 矛盾. \square



Ex. $f, g \in C[a, b], \{x_n\} \subset [a, b], g(x_n) = f(x_{n+1}), \forall n \in \mathbb{N}$,
且 $f(x_1) \leq g(x_1)$. 证明: $\exists \xi \in [a, b], s.t. f(\xi) = g(\xi)$.

Proof. 若 $\exists x_{n_0}, s.t. f(x_{n_0}) > g(x_{n_0})$, 令 $h(x) = f(x) - g(x)$, 则

$h \in C[a, b]$, 且

$$h(x_1) = f(x_1) - g(x_1) \leq 0,$$

$$h(x_{n_0}) = f(x_{n_0}) - g(x_{n_0}) > 0,$$

由介值定理, $\exists \xi \in [a, b], s.t. h(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = g(\xi)$.

若 $\forall n, f(x_n) \leq g(x_n)$, 由已知条件得

$$f(x_n) \leq g(x_n) = f(x_{n+1}) \leq g(x_{n+1}), \quad \forall n.$$



$\{f(x_n)\}, \{g(x_n)\}$ 均为单增数列. 由闭区间上连续函数的有界性定理, $\{f(x_n)\}, \{g(x_n)\}$ 均为有界列, 从而均收敛.

设 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{n+1}) = a$.

$\{x_n\} \subset [a, b]$ 为有界列, 有收敛子列 x_{n_k} , 设 $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{n_k} = \xi$,

则 $\xi \in [a, b]$. 由 f, g 的连续性得

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n) = \lim_{k \rightarrow +\infty} g(x_{n_k}) = g(\xi). \square \end{aligned}$$



**作业：习题2.5 No. 2(4),6,
习题2.6 No. 4,9,10,14
习题5.1 No.15(3)**



Thm. (Weirstrass第一逼近定理) $f \in C[a, b]$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$, s.t.

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b].$$

Proof. 不失一般性, 设 $[a, b] = [0, 1]$.

记 $X = C[0, 1]$, Y 为 $[0, 1]$ 上多项式构成的集合, 定义映射

$$B_n : X \rightarrow Y$$

$$g(t) \mapsto B_n(g)(x) = \sum_{k=0}^n g\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

$B_n(g)$ 是 $g \in X$ 在映射 B_n 下的像, $B_n(g)(x)$ 是以 x 为自变量的 n 次多项式, 称为 **Bernstein** 多项式.



映射 B_n 有如下性质:

(1) B_n 是线性映射, 即对任意 $g, h \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 有

$$B_n(\alpha g + \beta h) = \alpha B_n(g) + \beta B_n(h);$$

(2) B_n 具有单调性, 即 $g, h \in X, g \leq h$, 有 $B_n(g) \leq B_n(h)$;

(3) $B_n(1)(x) = 1, B_n(t)(x) = x, B_n(t^2)(x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}$. 事实上

$$B_n(1)(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1,$$

$$\begin{aligned} B_n(t)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = x \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_n^k x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = x[(x + (1-x))]^{n-1} = x, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} B_n(t^2)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{n-1} C_{n-1}^{k-1} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{x}{n} = x^2 + \frac{x-x^2}{n}. \end{aligned}$$



由 B_n 的性质, 给定 $s \in [0, 1]$, 函数 $(t-s)^2$ 在 B_n 映射下的像为

$$\begin{aligned} B_n((t-s)^2)(x) &= B_n(t^2)(x) - 2sB_n(t)(x) + s^2B_n(1)(x) \\ &= x^2 + \frac{x-x^2}{n} - 2sx + s^2 = \frac{x-x^2}{n} + (x-s)^2. \end{aligned}$$

现在可以利用 B_n 完成定理证明了. $f \in C[0, 1]$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, s.t. $|f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall |t-s| < \delta, t, s \in [0, 1]$.

$f \in C[0, 1]$, 则 $\exists M > 0$, s.t. $|f(t)| < M$, $\forall t \in [0, 1]$. 从而

$$|f(t) - f(s)| < 2M \leq \frac{2M}{\delta^2} (t-s)^2, \quad \forall |t-s| \geq \delta, t, s \in [0, 1].$$



因此 $\forall t, s \in [0, 1]$, 有

$$-\frac{\varepsilon}{2} - \frac{2M}{\delta^2} (t-s)^2 < f(t) - f(s) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} (t-s)^2.$$

任意固定 $s \in [0, 1]$, 由 B_n 的性质, 有

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{2M}{\delta^2} \left[\frac{x-x^2}{n} + (x-s)^2 \right] &< B_n(f)(x) - f(s) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{\delta^2} \left[\frac{x-x^2}{n} + (x-s)^2 \right]. \end{aligned}$$

令 $s = x$, 得

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\delta^2} (x-x^2) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}, \forall x \in [0, 1].$$



任意取定 $n > \frac{M}{\delta^2 \varepsilon}$, 有

$$\left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall x \in [0, 1]. \square$$