《线性代数》作业 6

截止时间：11 月 5 日 18:00。

纸质。请写出完整的计算等解题过程。提交于课堂或近春园西楼入口处我的信箱。

1. 给定 $m \times n$ 矩阵 A, B. 证明：

   (a) 对任意 $k \neq 0$, 有 $\operatorname{rank}(kA) = \operatorname{rank}(A)$.

   (b) $\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

2. 给定 $l \times m$ 矩阵 A，$l \times n$ 矩阵 B 和分块矩阵 $C = [A \quad B]$, 证明：

$$\max\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\} \leq \operatorname{rank}(C) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

3. 给定 $l \times m$ 矩阵 A 和 $n \times k$ 矩阵 B.

   (a) 对分块对角矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$, 证明：$\operatorname{rank}(C) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$.

   (b) 对分块上三角矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & X \\ O & B \end{bmatrix}$, 证明：$\operatorname{rank}(C) \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$. 进一步证明：当 A, B 可逆时，C 也可逆。

4. (a) 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 1. 证明: 存在非零向量 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, 使得 $A = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}$.

   (b) 求向量 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$，使得 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -6 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 8 & -8 \end{bmatrix}$.

5. 求下列方程组的解集：

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1. \end{cases}$$

6. 令 $\lambda \in \mathbb{R}$. 求解齐次线性方程组 $\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}_2$.

7. 线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ 的全部解是 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, 其中 c 为任意实数。求矩阵 A.

8. 设 3×4 矩阵 A 的零空间的一组基为 $\boldsymbol{k}_1=[2\quad 4\quad 1\quad 0]^{\mathrm{T}}$.

   (a) 求 $\operatorname{rank}(A)$.

   (b) 写出 A 的行简化阶梯形 R。

   (c) 线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 对哪些 $\boldsymbol{b}$ 有解？

9. 根据下列思路证明在例 2.4.7 中的结论：$\operatorname{rank}\left(M_G^{\mathrm{T}}R^{-1}M_G\right)=\operatorname{rank}(M_G)$, 其中 R^{-1} 为对角元素都大于零的对角矩阵。

   (a) 若 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}R^{-1}\boldsymbol{y}=0$, 则 $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$.

   (b) $M_G\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 当且仅当 $M_G^{\mathrm{T}}R^{-1}M_G\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

   (c) $\operatorname{rank}\left(M_G^{\mathrm{T}}R^{-1}M_G\right)=\operatorname{rank}(M_G)$.

10. 证明命题 3.1.3：向量内积满足如下性质：

    (a) 对称性：$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{a}$.

    (b) 双线性性：$\boldsymbol{a}^T(k_1\boldsymbol{b_1}+k_2\boldsymbol{b_2})=k_1\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b_1}+k_2\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b_2}$, $(k_1\boldsymbol{a_1}+k_2\boldsymbol{a_2})^T\boldsymbol{b}=k_1\boldsymbol{a_1}^T\boldsymbol{b}+k_2\boldsymbol{a_2}^T\boldsymbol{b}$.

    (c) 正定性：$\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}\geq 0$, 且 $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

11. 证明：

    (a) $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角为 0, 当且仅当存在 $k>0$, 使得 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b}$.

    (b) $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 正交, 当且仅当对任意实数 t, 有 $\|\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}\|\geq\|\boldsymbol{a}\|$.

    (c) $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 正交, 当且仅当 $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|=\|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$.

12. 证明：上三角矩阵是正交矩阵时，必是对角矩阵，且对角元素是 ± 1.

13. 证明：分块上三角矩阵 $\begin{bmatrix}c & \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{0} & Q\end{bmatrix}$ 是正交矩阵时，必有 $c=\pm 1$, $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, 且 Q 是正交矩阵。