1.(a) 关于矩阵正定.

我们选择考察 $A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&d&4\\2&4&5\end{bmatrix}$ 的所有顺序主子式.

$\det(A_1)=\det([1])=1>0.$

$\det(A_2)=\det\left(\begin{bmatrix}1&2\\2&d\end{bmatrix}\right)=d-4>0. \iff d>4.$

$$\det(A_3=A)=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&d&4\\2&4&5\end{vmatrix}\overset{R_3-R_2}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1&2&2\\2&d&4\\0&4-d&1\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}d&4\\4-d&1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}2&2\\4-d&1\end{vmatrix}$$

$$=d-4(4-d)-2[2-2(4-d)]=d-4(4-d)-4+4(4-d)=d-4>0$$

$\iff d>4.$

综上所述, A正定 $\iff d>4.$

(b) 关于矩阵半正定.

我们计算 $\forall$ 给定 $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$, $\vec{x}^TA\vec{x}=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j$, 所以

~~因~~ $\vec{x}^TA\vec{x}=dx_2^2+x_1^2+5x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3.$

分两种情形:

(i) $x_2=0.$

$\forall$非零$\vec{x}$, 则有 $\vec{x}^TA\vec{x}=x_1^2+5x_3^2+4x_1x_3=(x_1+2x_3)^2+x_3^2>0$ 总是成立的.

所以对 d 无任何取值限制.

(ii) $x_2\neq 0.$

由前一部分(a)的结论可知, 仍有 $\vec{x}^TA\vec{x}>0$ for $d>4$, $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ with $x_2\neq0$.

所以我们只需考察 $d=4$ 和 $d<4$ 的情形.

固定$\vec{x}$, $\vec{x}^TA\vec{x}$ 是关于 d 的一次函数, 又因为 $x_2\neq0$, 所以$\vec{x}^TA\vec{x}$关于 d 严格单调递增. 不妨记函数 $f_{\vec{x}}(d)=\vec{x}^TA\vec{x}$, 记

$f_{\vec{x}}(d)=x_2^2d+x_1^2+5x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3.$

所以有 $f_{\vec{x}}(d)>0$ for any $d>4$, $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ with $x_2\neq0.$

考察向量 $\vec{x}^*=[1\ \ -\frac{1}{2}\ \ 0]^T$, 则有

$$f_{\vec{x}^*}(4)=4x_2^2+x_1^2+4x_1x_2=1+1+4\cdot1(-\tfrac{1}{2})=0.$$

~~由~~由 $f_{\vec{x}^*}(d)$ 关于 d 的单格递增和连续性可知

$$f_{\vec{x}^*}(d)<0 \quad \text{for any } d<4.$$

又由 $f_{\vec{x}}(d)=\vec{x}^TA\vec{x}$ 的定义可知,

$\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$ for any $d \geq 4$, any $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ with $x_2 \neq 0$,
且存在非零向量 $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^3$，使得
$$\vec{x}^{*T} A \vec{x}^* < 0 \quad \text{for any } d < 4.$$
ie. 矩阵 A with $d<4$ 是不定矩阵，而矩阵 A 半正定 $\Leftrightarrow d \geq 4$. ▢

2. 因为 A 实对称，所以 A 有谱~~分~~分解 $A = Q\Lambda Q^T$，其中 Q 是正交矩阵，Λ 是由 A 的特征值（记重数）构成的对角矩阵，$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

$$tI_n + A = tI_n + Q\Lambda Q^T = Q(tI_n)Q^T + Q\Lambda Q^T$$
数量矩阵可与任何矩阵交换
$$= Q(tI_n + \Lambda)Q^T =: QDQ^T.$$
取 $t > \max\limits_{1\le i\le n}(-\lambda_i)$，则 $tI_n + \Lambda = D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ where

for $1 \le j \le n$, $d_j = t + \lambda_j > \max\limits_{1\le i\le n}(-\lambda_i) + \lambda_j > -\lambda_j + \lambda_j = 0$.

所以 D 是对角元素~~严格~~大于 0 的对角矩阵，从而是正定的。
而 $tI_n + A$ 与 D 正交相似，所以也正定。 ▢

3. 使用 A 的谱分解：$A = Q\Lambda Q^T$，其中 Q 是正交矩阵，Λ 是由 A 的特征值（记重数）构成的对角矩阵，$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$，有 $\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{x}^T Q \Lambda Q^T \vec{x} = \vec{y}^T \Lambda \vec{y}$，其中 $\vec{y} = Q^T \vec{x}$
$$= \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \lambda_{max} \sum_{i=1}^n y_i^2 = \lambda_{max} \|\vec{y}\|^2 = \lambda_{max} \|\vec{x}\|^2,$$
正交矩阵保距

其中 $\lambda_{max} = \max\limits_{1\le j\le n} \lambda_j$.

可取 $C = \max\{\lambda_{max}, 1\}$，则有 $\vec{x}^T A \vec{x} \leq C\|\vec{x}\|^2 = C\vec{x}^T\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
保证 C 为正实数.

4. 结合习题中关于 A 矩阵半正定的等价结论
A 半~~负~~正定 $\Leftrightarrow$ A 的所有主子式都非负。

取 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. ~~$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$，计算 $\vec{x}^T A \vec{x} = 1\cdot x_1^2 + 1\cdot x_1x_2 + 1\cdot x_2x_1 + 0\cdot x_2^2$~~
$\cancel{= -x_1^2 + 2x_1x_2}$
$\cancel{= x_1(2x_2 - x_1)}$.

~~不妨取 $x_1 = 4, x_2 = 1$，则有 $\vec{x}^T A \vec{x} = 4\cdot(2\cdot 1 - 4) = -8 < 0$.~~

计算 $\vec{x}^T A\vec{x} = 2x_1x_2 - x_2x_1 = x_1x_2$，会随着 $\vec{x}$ 的变化而变号. 所以 A 不是半正定矩阵. 另一方面, 考察 A 的顺序主子式:

$$\det(A_1) = \det([0]) = 0 \geq 0.$$

$$\det(A_2 = A) = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1)\cdot 2 = 2 > 0.$$

所以 A 的顺序主子式都非负. 综上所述,

A 半定 $\not\Leftrightarrow$ A 的所有顺序主子式都非负. 只有"$\Rightarrow$"成立.

5. $\forall$ 非零 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x}^T A \vec{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \Big(\underbrace{a_{ii}}_{>0} x_i^2 + \sum_{j\neq i} a_{ij} x_i x_j \Big)$

$$> \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j\neq i} |a_{ij}| x_i^2 + \sum_{j\neq i} a_{ij} x_i x_j \Big)$$

x_i 不全为零, 所以 "$>$" 总是成立的.

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} \left(|a_{ij}| x_i^2 + a_{ij} x_i x_j \right) =: I.$$

讨论 I, 我们交换指标 i 和 j:

$$I = \sum_{j=1}^n \sum_{i\neq j} \left(|a_{ji}| x_j^2 + a_{ji} x_j x_i \right)$$ 对换 i 和 j

交换求和顺序

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} \left(|a_{ji}| x_j^2 + a_{ji} x_j x_i \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} \left(|a_{ij}| x_i^2 + a_{ij} x_i x_j + |a_{ji}| x_j^2 + a_{ji} x_j x_i \right).$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} \left(|a_{ij}| (x_i^2 + x_j^2) + 2 a_{ij} x_i x_j \right)$$ 因为 A 对称.

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} \left(|a_{ij}| (x_i^2 + x_j^2) - 2 |a_{ij}| \cdot |x_i| \cdot |x_j| \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \left(x_i^2 + x_j^2 - 2|x_i| |x_j| \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \left(|x_i| - |x_j| \right)^2 \geq 0.$$

所以 $\forall$ 非零 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, 有 $\vec{x}^T A \vec{x} > I \geq 0$, 即 A 正定. $\square$

Remark: 数学归纳法去证也可以给出一个证明.

6. 因为 $A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = -A$，所以 A 反对称，则有 $\vec{x}^T A \vec{x} = 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

所以 $\max\limits_{\vec{x} \neq \vec{0}_2} \dfrac{\vec{x}^T A \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} = 0$.

$\boxed{}$

7. 利用 $\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{x}^T A^s \vec{x}$，其中 $A^s = \dfrac{A + A^T}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}\right)$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

因为 A^s 是对称矩阵，有 $\lambda_1 = \max\limits_{\vec{x} \neq \vec{0}_2} \dfrac{\vec{x}^T A^s \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}}$，其中 λ_1 是 A^s 的最大特征值.

计算 A^s 的特征多项式 $p_{A^s}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -4 \\ -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2) - 16 = \lambda^2 - 4 - 16 = \lambda^2 - 20$.

由 $p_{A^s}(\lambda) = 0$ 可知 $\lambda = \pm\sqrt{20} = \pm 2\sqrt{5}$.

所以 $\max\limits_{\vec{x} \neq \vec{0}_2} \dfrac{\vec{x}^T A \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} = \max\limits_{\vec{x} \neq \vec{0}_2} \dfrac{\vec{x}^T A^s \vec{x}}{\vec{x}^T \vec{x}} = 2\sqrt{5}$.

$\boxed{}$

8.(a) $A = [3 \quad 5 \quad 0] = U \Sigma V^T$，其中 U 是 1 阶正交矩阵，则必为 $U = [1]$，

$\Sigma = [\Sigma_1 \quad 0 \quad 0] = [\sigma_1 \quad 0 \quad 0]$，$V$ 是 3 阶正交矩阵.

因为 A 较小，可直接求解 $V = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3]$.

由 A 的简化 SVD ~~可知~~ $A = U \Sigma_1 \vec{v}_1^T$ 可知

$$[3 \quad 5 \quad 0] = [1][\sigma_1]\vec{v}_1^T = \sigma_1 \vec{v}_1^T.$$

因为 $\vec{v}_1$ 是单位向量，所以 $\sigma_1 = \left\| \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 0^2} = \sqrt{34}$.

从而有 $\vec{v}_1^T = \dfrac{1}{\sigma_1}[3 \quad 5 \quad 0] = \dfrac{1}{\sqrt{34}}[3 \quad 5 \quad 0]$.

由 $\vec{v}_1$ 扩充出 $\vec{v}_2$ 和 $\vec{v}_3$，从而得到 V. 因为现在只有一个向量，且 $\vec{v}_1$ 的第 3 个元素为 0.

由经验可选择 $\vec{v}_2^T = \dfrac{1}{\sqrt{34}}[-5 \quad 3 \quad 0]$，和 $\vec{v}_3^T = \vec{e}_3^T$.

所以 $V = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{34}} & -\frac{5}{\sqrt{34}} & 0 \\ \frac{5}{\sqrt{34}} & \frac{3}{\sqrt{34}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，和 $A = U \Sigma V^T$.

$\boxed{}$

(b) $B = AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2-1$. 由 $p_B(\lambda)=0$ 可得 $\lambda-2=\pm1 \Rightarrow \lambda_1=3,\ \lambda_2=1$.

$\lambda_1=3$: $\lambda_1 I_2 - B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, 可取特征向量 $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_1 = \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2=1$: $\lambda_2 I_2 - B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, 可取特征向量 $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \frac{\vec{x}_2}{\|\vec{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

所以 $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\Sigma = [\Sigma_2 \quad \vec{0}_2] = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

由A的简化SVD: $A = U\Sigma_2 V_1^T$ 可知 $V_1^T = \Sigma_2^{-1} U^T A$, 所以有

$$[\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

我们需要用 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 扩充出 $\vec{v}_3$. 事实上, $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 有一定特点, 容易验证: 向量 $\vec{x}_3^T = [-1 \quad 1 \quad 1]$ 与 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 都正交. 可取 $\vec{v}_3 = \frac{\vec{x}_3}{\|\vec{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

所以 $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$, 和

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}^T \qquad \square$$

(c) 记 $B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ~~不妨~~ 三个分块零矩阵可匹配成任意大小. 不妨设 $\begin{cases} B \in \mathbb{R}^{p\times q} \\ A \in \mathbb{R}^{m\times n} \end{cases}$

记B的SVD为 $B = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^T \cancel{= [\tilde{U}_1 \quad \tilde{U}_2]\begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{V}_1^T \\ \tilde{V}_2^T \end{bmatrix}}$,

B与 $\tilde{\Sigma}$ 相抵, 可引入下列分块:

~~所以~~ $\cancel{B = \tilde{U}_1 \Sigma \tilde{V}_1^T = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [U\Sigma}$

$B = \begin{bmatrix} \tilde{U}_{11} & \tilde{U}_{12} \\ \tilde{U}_{21} & \tilde{U}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V}_{11} & \tilde{V}_{12} \\ \tilde{V}_{21} & \tilde{V}_{22} \end{bmatrix}^T$, 其中 $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\tilde{U}$ 和 $\tilde{V}$

作对应的分块，则有

$$B=\begin{bmatrix}\tilde{U}_{11}\Sigma_{11} & 0\\ \tilde{U}_{21}\Sigma_{11} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{V}_{11}^T & \tilde{V}_{21}^T\\ \tilde{V}_{12}^T & \tilde{V}_{22}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{U}_{11}\Sigma_{11}\tilde{V}_{11}^T & \tilde{U}_{11}\Sigma_{11}\tilde{V}_{21}^T\\ \tilde{U}_{21}\Sigma_{11}\tilde{\Sigma}_{12}^T & \tilde{U}_{21}\Sigma_{11}\tilde{V}_{21}^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

所以应有 $\tilde{U}_{11}\Sigma_{11}\tilde{V}_{11}^T=A=U\Sigma V^T$，$\tilde{U}_{11}\Sigma_{11}\tilde{V}_{21}^T=0$，$\tilde{U}_{21}\Sigma_{11}\tilde{V}_{12}^T=0$，$\tilde{U}_{21}\Sigma_{11}\tilde{V}_{21}^T=0$.

我们可选取 $\tilde{U}_{11}=U$，$\Sigma_{11}=\Sigma$，$\tilde{V}_{11}=V$，$\tilde{U}_{12}=0$，$\tilde{U}_{21}=0$，$\tilde{V}_{12}=0$，$\tilde{V}_{21}=0$.

从而有 $\tilde{U}=\begin{bmatrix}U & 0\\ 0 & \tilde{U}_{22}\end{bmatrix}$，$\tilde{\Sigma}=\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$\tilde{V}=\begin{bmatrix}V & 0\\ 0 & \tilde{V}_{22}\end{bmatrix}$.

注意到 $\tilde{U}_{22}\in\mathbb{R}^{(p-m)\times(p-m)}$，$\tilde{V}_{22}\in\mathbb{R}^{(q-n)\times(q-n)}$，不妨取 $\tilde{U}_{22}=I_{p-m}$，$\tilde{V}_{22}=I_{q-n}$.

则有 $B=\begin{bmatrix}U & 0\\ 0 & I_{p-m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V & 0\\ 0 & I_{q-n}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}U\Sigma V^T & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. ▥

9. 不妨设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，则 $B=\begin{bmatrix}0 & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$.

记 A 的 SVD 为 $A=U\Sigma V^T=[\vec{u}_1\ \cdots\ \vec{u}_m]\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{v}_1^T\\ \vdots\\ \vec{v}_n^T\end{bmatrix}$.

取 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中的向量 $\vec{x}_i=\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \vec{u}_i\end{bmatrix}$ for $1\le i\le r$. 有

$$B\vec{x}_i=\begin{bmatrix}0 & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \vec{u}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^T\vec{u}_i\\ A\vec{v}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_i\vec{v}_i\\ \sigma_i\vec{u}_i\end{bmatrix}=\sigma_i\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \vec{u}_i\end{bmatrix}=\sigma_i\vec{x}_i.$$

所以 $(\sigma_i,\vec{x}_i)$ for $1\le i\le r$ 是 B 的特征对.

考虑向量 $\vec{y}_i=\begin{bmatrix}-\vec{v}_i\\ \vec{u}_i\end{bmatrix}$ for $1\le i\le r$，则有

$$B\vec{y}_i=\begin{bmatrix}0 & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\vec{v}_i\\ \vec{u}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^T\vec{u}_i\\ -A\vec{v}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_i\vec{v}_i\\ -\sigma_i\vec{u}_i\end{bmatrix}=-\sigma_i\begin{bmatrix}-\vec{v}_i\\ \vec{u}_i\end{bmatrix}=-\sigma_i\vec{y}_i.$$

所以 $(-\sigma_i,\vec{y}_i)$ for $1\le i\le r$ 也是 B 的特征对.

考虑向量 $\vec{x}_i=\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \vec{0}_m\end{bmatrix}$ for $r+1\le i\le n$，则有

$$B\vec{x}_i=\begin{bmatrix}0 & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \vec{0}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{0}_n\\ A\vec{v}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{0}_n\\ \vec{0}_m\end{bmatrix}=0\cdot\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \vec{0}_m\end{bmatrix}.$$

所以 $(0,\vec{x}_i)$ for $r+1\le i\le n$ 是 B 的特征对.

考虑向量 $\vec{y}_i=\begin{bmatrix}\vec{0}_n\\ \vec{u}_i\end{bmatrix}$ for $r+1\le i\le m$，则有

$$B\vec{y_i} = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{0}_n\\ \vec{u}_i\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A^T\vec{u}_i\\ \vec{0}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\vec 0_n \\ \vec 0_m\end{bmatrix} = 0\cdot\begin{bmatrix}\vec 0_n\\ \vec u_i\end{bmatrix} = 0\,\vec{y_i}.$$

所以 $(0, \vec{y_i})$ for $r+1\le i\le m$ 是 B 的特征对.

综上所述, 由 $\{\vec{u_i}\}_{i=1}^{m}$ 和 $\{\vec{v_i}\}_{i=1}^{n}$ 各自的线性无关性可知, 我们可得到可逆矩阵 $X = [\vec x_1 \cdots \vec x_r \ \ \vec y_1 \cdots \vec y_r \ \ \vec x_{r+1}\cdots \vec x_n \ \ \vec y_{r+1} \ \ \vec y_m]$,

和 对角矩阵 $\Lambda = diag(\sigma_1,\cdots,\sigma_r,-\sigma_1,\cdots,-\sigma_r,0,\cdots,0)$, 从而有 B 的谱分解:

$$B = X\Lambda X^{-1}.$$ □

10.(a) A 是下三角矩阵, 且对角元素均非零, 所以 A 可逆. 所以 $(AA^T)^{-1}$ 是有定义的.

因为 $\vec w \in A(C)$, 所以存在单位向量 $\vec v$, s.t. $A\vec v = \vec w$.

计算 $\vec w^T (AA^T)^{-1}\vec w = (A\vec v)^T A^{-T}(A^{-1}A)\vec v = \vec v^T(A^TA^{-T})\vec v = \vec v^T\vec v = \|\vec v\|^2 = 1$.

(b) $B = A^TA = \begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\-1&1\end{bmatrix}$.

$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda-2 & 1\\ 1 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-1)-1 = \lambda^2-3\lambda+2-1=\lambda^2-3\lambda+1$.

由 $p_B(\lambda)=0$ 可知 $\lambda = \frac{3\pm\sqrt{3^2-4}}{2} = \frac{3\pm\sqrt5}{2}$.

所以 $\sigma_1 = \sqrt{\frac{3+\sqrt5}{2}}$, $\sigma_2 = \sqrt{\frac{3-\sqrt5}{2}}$.

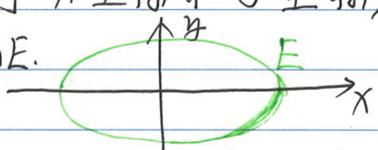
我不想算了. 可以文字说明求解SVD的过程, 或使用数学软件得到一个结果. 这个计算结果其实和(c)的讨论无关, 但可以使用画图软件给出一个视觉化的结果.

(c). V^T 也是二阶正交矩阵, 对应旋转或反射. 而 C 是一个圆, 它代表的从原点出发的向量, 无论进行任何旋转或反射, 都还在这个圆上. 所以

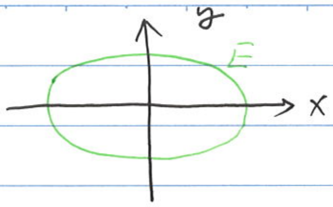
$$V^T(C) = C.$$

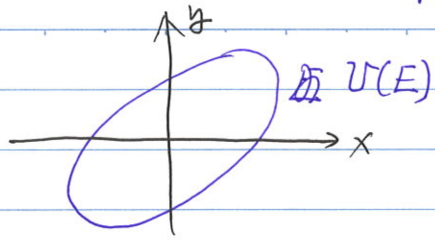
从而有 $\Sigma V^T(C) = \Sigma(C) = \begin{bmatrix}\sigma_1&0\\0&\sigma_2\end{bmatrix}(C)$, 且 $\sigma_1\ne\sigma_2$.

对 C 上的向量, 分别伸缩了 x 坐标和 y 坐标, 从而得到一个椭圆. 由于 $\sigma_1>\sigma_2$, 应有一个横着的椭圆, 记为E.



所以 $U\Sigma V^T(C) = U(E)$, U 是正交矩阵, 只代表旋转或反射, 所以椭圆 E 被绕着原点转动. 转动的角度由 U 的具体取值决定.





11. 用微积分知识证明 $\lim\limits_{x,y\to 0} \frac{4x^2+2xy+4y^2}{x^2+y^2}$ 不存在.

我们只考虑非零向量 $\vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. 则有

$$4x^2+2xy+4y^2 = \vec{x}^T A \vec{x} \quad \text{with} \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

另一方面 $x^2+y^2 = \vec{x}^T\vec{x}$.

所以
$$\max_{x,y\text{不同时为零}} \frac{4x^2+2xy+4y^2}{x^2+y^2} = \max_{\vec{x}\neq\vec{0}_2} \frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}} = \lambda_{max}(A),$$

$$\min_{x,y\text{不同时为零}} \frac{4x^2+2xy+4y^2}{x^2+y^2} = \min_{\vec{x}\neq\vec{0}_2} \frac{\vec{x}^T A\vec{x}}{\vec{x}^T\vec{x}} = \lambda_{min}(A).$$

而 $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2-1=0$ 得到 $\lambda-4=\pm 1$, $\lambda_1=5$, $\lambda_2=3$.

所以 $\lambda_{max}(A)=5$, $\lambda_{min}(A)=3$.

所以 x,y 不同时为零时, $\frac{4x^2+2xy+4y^2}{x^2+y^2}$ 的最大值和最小值分别为5和3.