

# 清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A (1)

系名\_\_\_\_\_ 班级\_\_\_\_\_ 姓名\_\_\_\_\_ 学号\_\_\_\_\_

一. 填空题 (每个空 3 分, 共 10 题) (请将答案写在横线上, 严禁写在答卷纸上!)

1. 常微分方程  $y' = 1 + 2x + y^2 + 2xy^2$  的通解为\_\_\_\_\_。

2. 常微分方程  $y'' - 2y' + y = 2$  的通解为\_\_\_\_\_。

3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+3k} =$ \_\_\_\_\_。

4.  $\int_0^2 |1-x| dx =$ \_\_\_\_\_。

5. 设  $f(x) = \sin(x^3)$ , 则  $f^{(15)}(0) =$ \_\_\_\_\_。

6.  $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt =$ \_\_\_\_\_。

7.  $\int_0^\pi x(\sin x)^2 dx =$ \_\_\_\_\_。

8. 常微分方程  $y' + y = e^{-x}$  满足  $y(0) = 0$  的解  $y = y(x)$  的拐点的横坐标为\_\_\_\_\_。

9. 曲线段  $y = 2x^{\frac{3}{2}}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 的弧长为\_\_\_\_\_。

10. 设当  $x \rightarrow 0$  时, 函数  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{x^2}{3}}$  为  $p$  阶无穷小, 则  $p =$ \_\_\_\_\_。

二. 解答题 (共 8 题) (请写出详细的计算过程和必要的根据!)

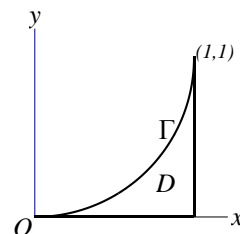
11. (10 分) 讨论  $p$  取何值时, 广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \ln x}{(1+x^2)^2} dx$  收敛。

12. (10 分) 求数列  $\{n^{1/n}\}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) 的最大项的值。

13. (13 分) 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 讨论函数  $f(x)$  的连续性, 并求  $f(x)$  的单调区间、极值点与极值、凸性区间、拐点和渐近线。

14. (12 分) 设曲线段  $\Gamma$  为圆心在点  $(0,1)$  的单位圆周位于正方形  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  的部分, 平面区域  $D$  为由  $\Gamma$ ,  $x$  轴以及直线  $x=1$  围成的有界区域。

- (I) 求区域  $D$  绕  $x$  轴旋转一周所产生的旋转体体积;  
(II) 求曲线段  $\Gamma$  绕  $x$  轴旋转一周所产生的旋转面面积。



15. (10 分) 求常微分方程的初值问题  $\begin{cases} \sqrt{1+(y')^2} = (1-x)y'', \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$  的解 ( $x < 1$ )。

16. (5 分) 设  $f \in C(0, +\infty)$ , 并且  $\forall a > 0, b > 1$ , 都有积分值  $\int_a^{ab} f(x)dx$  与  $a$  无关, 求证: 存在常数  $C$ , 使得  $f(x) = \frac{C}{x}, x \in (0, +\infty)$ 。

17. (5 分) 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上非负连续, 且满足  $(f(x))^2 \leq 1 + 2 \int_0^x f(t)dt, x \in [0,1]$ , 证明:  $f(x) \leq 1+x, x \in [0,1]$ 。

18. (5 分) 设  $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$  为实系数  $n$  次多项式。若  $p(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$ , 证明:  $p(x) + p'(x) + \cdots + p^{(n)}(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$ , 这里  $p'(x), p''(x), \cdots, p^{(n)}(x)$  表示  $p(x)$  的一阶, 二阶, 以及  $n$  阶导数。

### 三. 附加题 (本题全对才给分, 其分数不计入总评, 仅用于评判 A+)

设  $h > 0$ ,  $f(x)$  为闭区间  $[-h, h]$  上的无穷可导函数, 且  $\forall x \in [0, h]$ , 以及任意的非负整数  $n$ ,

都有  $f^{(n)}(x) \geq 0$ 。记  $r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ , 求证:  $\forall x \in (0, h)$ , 均有  $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0$ 。