

Review

Thm. (Cauchy-Picard) 设 $f(x, y)$ 在矩形

$$D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

中连续, 并且关于变元 y 满足 Lipschitz 条件, 则存在正数 h , 使得一阶常微分方程的初值问题

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

在 $[x_0 - h, x_0 + h]$ 上存在唯一的解. 其中,

$$h = \min\{a, b/M\}, \quad |f(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in D.$$



- 解的存在唯一性定理的几何解释

Thm. 设 $p(x), q(x)$ 在区间 I 上连续, $x_0 \in I$, 则对任意 $y_0 \in \mathbb{R}$, 一阶线性常微分方程的初值问题

$$\begin{cases} y'(x) = p(x)y + q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

在**整个区间** I 上存在唯一解.



Thm. 设函数 $a_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 和 $f(t)$ 都在区间 I 上连续, $t_0 \in I$, 则对任意实数 ξ_k ($k = 0, 1, \dots, n-1$), 定解问题

$$\begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = f(t) \\ x(t_0) = \xi_0, x'(t_0) = \xi_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = \xi_{n-1} \end{cases}$$

在区间 I 上存在唯一解 $x(t)$.



§ 2. 一阶ODE的初等解法

Leibnitz曾经专门从事利用变量替换的办法来解决一阶微分方程的求解问题, 而Euler则试图利用积分因子的办法统一处理这一问题. 但实践证明, 单纯采用一种方法各有其不便和困难. 因此必须对具体问题具体分析.

有初等解法的微分方程是很有限的, 例如形式上很简单的Riccati方程 $\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$ 一般就没有初等解法. 法国数学家Liouville在1841年证明了这一事实, 这就促使人们寻求别的方法来研究微分方程的求解问题.

目的与要求

- 熟悉各种类型方程的解法,正确而又敏捷地判断一个给定的方程属于何种类型,从而循法求解.
- 学习解题技巧,总结经验,培养机智与灵活性.
- 善于根据方程的特点,引进适宜的变换,将方程化为能求解的新类型.



1.变量分离方程 -----形如 $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx, \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$$

此外, 若 $g(c) = 0$, 方程还有常数解 $y \equiv c$.

Question. 若 f, g 连续, 是否存在这样的解, s.t.

$$y(x_0) = c, y \not\equiv c, g(c) = 0?$$

不存在! 由解的存在唯一性定理可证.



Ex. 求解初值问题 $\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x, y(0) = 1$.

解: 分离变量, 得 $\frac{1}{y^2} dy = \cos x dx$.

两边积分, 得 $-\frac{1}{y} = \sin x + c$. 通解为 $y = -\frac{1}{\sin x + c}$.

令 $x = 0, y = 1$ 得 $c = -1$. 故所求特解为 $y = 1/(1 - \sin x)$.

此外, 方程还有解 $y \equiv 0$, 但不满足初值条件. \square



2.可化为变量分离方程的类型

1)齐次方程 $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$

令 $u = \frac{y}{x},$

则 $y = ux, \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx},$

代入原方程得 $u + x \frac{du}{dx} = g(u)$

即 $\frac{du}{dx} = \frac{g(u) - u}{x}$



例: $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan \frac{y}{x}.$

解: 令 $u = \frac{y}{x}$, 代入原方程得 $x \frac{du}{dx} = \tan u.$

分离变量得 $\frac{\cos u du}{\sin u} = \frac{dx}{x}.$

两边积分得 $\ln |\sin u| = \ln |x| + c_1.$

$$\sin u = cx, c = \pm e^{c_1} \neq 0.$$

此外, 方程还有解 $\sin u = 0$. 故通解中允许 $c = 0$.

原方程的通解为 $\sin \frac{y}{x} = cx, c \in \mathbb{R}. \square$

2)形如 $\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$ 的方程

Case1. $c_1 = c_2 = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y} = \frac{a_1 + b_1 \frac{y}{x}}{a_2 + b_2 \frac{y}{x}} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

Case2. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, 即 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2} = f(a_2x + b_2y)$$

令 $u = a_2x + b_2y$, 则方程化为 $\frac{du}{dx} = a_2 + b_2f(u)$.

Case3. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 且 $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$

两直线 $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ 相交于一点 $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$

即 $\begin{cases} a_1(x - \alpha) + b_1(y - \beta) = 0 \\ a_2(x - \alpha) + b_2(y - \beta) = 0 \end{cases}$

令 $X = x - \alpha, Y = y - \beta$, 则

$$\frac{dY}{dX} = \frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y} = g\left(\frac{Y}{X}\right)$$



例: $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+1}{x+y-3}$

解: 由 $\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$ 得 $x=1, y=2$. 令 $\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-2 \end{cases}$, 则 $\frac{dY}{dX} = \frac{X-Y}{X+Y}$.

令 $u = \frac{Y}{X}$, 即 $Y = uX$, 则 $X \frac{du}{dX} = \frac{1-2u-u^2}{1+u} \quad (*)$,

分离变量得 $\frac{dX}{X} = \frac{1+u}{1-2u-u^2} du$

两边积分得 $\ln X^2 = -\ln|u^2 + 2u - 1| + c_1$,
 $X^2(u^2 + 2u - 1) = c, c = \pm e^{c_1} \neq 0$.

此外, 容易验证 $u^2 + 2u - 1 = 0$, 也是 $(*)$ 的解. 故通解中 c 可取任意常数. 代回原变量得原方程的通解

$$y^2 + 2xy - x^2 - 6y - 2x = c, c \in \mathbb{R}. \square$$

3.一阶隐方程

$$1)y = f(x, y')$$

$$2)x = f(y, y')$$

$$3)F(x, y') = 0$$

$$4)F(y, y') = 0$$

$$1)y = f(x, y')(\text{微分法})$$

$$\text{令 } p = y', \text{ 则 } y = f(x, p)$$

两边对 x 求导, 得到关于 $p'(x), p, x$ 的方程.

若求得其通解

$$p = u(x, c),$$

则原方程的通解为

$$y = f(x, u(x, c)).$$



例: $x(y')^2 - 2yy' + 9x = 0$

解: 令 $p = y'$, 则 $y = \frac{9x}{2p} + \frac{xp}{2} \quad (*)$

两边对 x 求导, 整理得

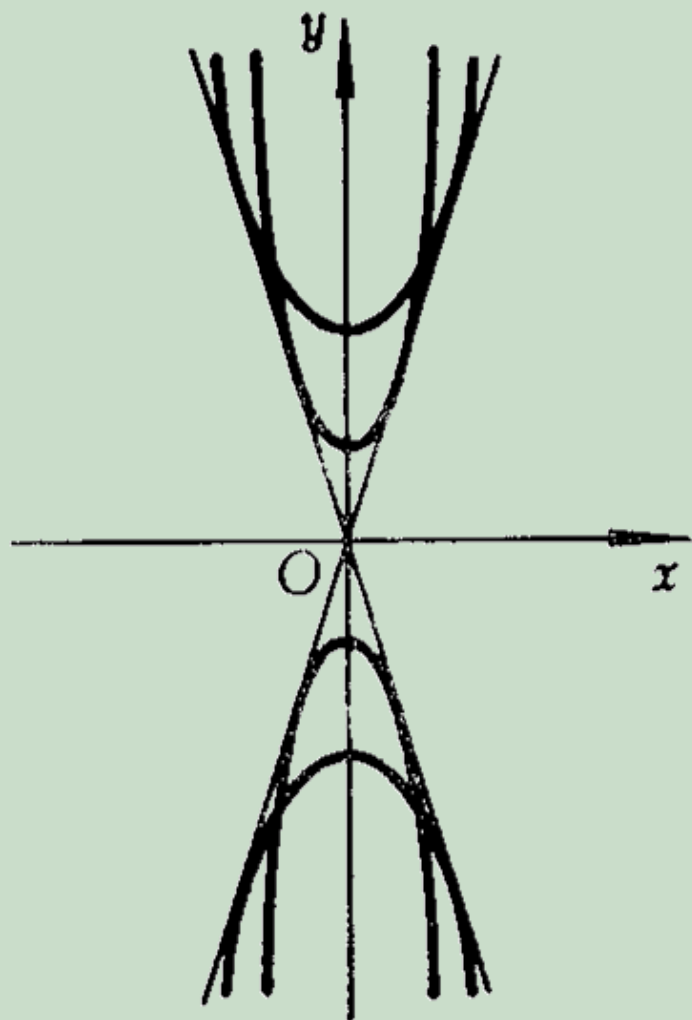
$$\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2p^2} \right) \left(p - x \frac{dp}{dx} \right) = 0 \quad (**)$$

它蕴含 $\frac{dp}{dx} = \frac{p}{x}$ 或 $p^2 = 9$

由此得 (**) 的通解 $p = cx$ 和两个特解 $p = 3, p = -3$.

代入 (*) 得原方程的特解 $y = 3x, y = -3x$, 及通解

$$y = \frac{9x}{2p} + \frac{xp}{2} = \frac{9}{2c} + \frac{c}{2}x^2, \quad 0 \neq c \in \mathbb{R}. \square$$



$$y = \frac{9}{2c} + \frac{c}{2}x^2,$$

$$y = 3x,$$

$$y = -3x,$$

包络



2) $x = f(y, y')$ (微分法)

令 $p = y'$, 则

$$x = f(y, p)$$

两边对 y 求微分, 得到关于 $p'(y), y, p$ 的方程.

若求得其通解

$$p = u(y, c),$$

则原方程的通解为

$$x = f(y, u(y, c)).$$



3) $F(x, y') = 0$ (参数法)

令 $p = y'$, 则 $F(x, p) = 0$. 令 $x = g(t)$, $p = h(t)$, 则

$$dy = p dx = h(t) g'(t) dt$$

因此原方程有通解

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = \int h(t) g'(t) dt + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

4) $F(y, y') = 0$ (参数法) 处理方法同 3)



例: $y^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$

解: 设 $y = \cos t$, $p = \frac{dy}{dx} = \sin t$, $(-\infty < t < \infty)$. 则

$$dx = \frac{1}{\sin t} dy = \frac{1}{\sin t} d \cos t = -dt \quad (*)$$

因此, $x = -t + c, y = \cos t$.

消去 t , 得原方程通解 $y = \cos(c - x), c \in \mathbb{R}$.

此外, 原方程还有两个特解 $y = \pm 1$. \square

Remark: 此方程满足初值条件 $y(0) = 1$ 的解不唯一, 为 $y = 1$ 或 $y = \cos x$. 是否与解的存在唯一性定理矛盾?

4.恰当方程

例: $y \cos x dx + \sin x dy = 0$

解: 视 $y = y(x)$, 则

$$y d \sin x + \sin x dy = 0.$$

$$d(y \sin x) = 0.$$

通解为: $y \sin x = C.$ \square



Remark.

$$ydx + xdy = d(xy)$$

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{ydx - xdy}{xy} = d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)$$

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d\left(\arctan \frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2} d\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$$

Remark. 分项组合.



例: $\left(\cos x + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0$

解: 把方程分项组合, 得 $\cos x dx + \frac{1}{y} dy + \frac{y dx - x dy}{y^2} = 0.$

即 $d \sin x + d \ln |y| + d \left(\frac{x}{y} \right) = 0,$

$$d \left(\sin x + \ln |y| + \frac{x}{y} \right) = 0.$$

于是方程的通解为 $\sin x + \ln |y| + \frac{x}{y} = c, c \in \mathbb{R}. \square$



5. 积分因子

例: $(x + y)dx + (y - x)dy = 0$

解: 原方程等价于 $(xdx + ydy) + (ydx - xdy) = 0$.

同乘(积分因子) $\frac{1}{x^2 + y^2}$, 得 $\frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2} + \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = 0$.

即 $\frac{1}{2}d\ln(x^2 + y^2) + d\arctan\frac{x}{y} = 0$.

原方程的通解为 $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \arctan\frac{x}{y} = C, C \in \mathbb{R}.$ \square

Remark: 先分组, 再找公共的积分因子, 往往能简化计算.

例: $(3x^3 + y)dx + (2x^2y - x)dy = 0$

解: 分组得 $(3x^3dx + 2x^2ydy) + (ydx - xdy) = 0$.

第二组有积分因子 $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{x^2 + y^2}$. 如果同时照顾到第一组, 则 $\frac{1}{x^2}$ 是两组公共的积分因子, 从而

$$(3xdx + 2ydy) + \frac{ydx - xdy}{x^2} = 0.$$

即 $d\left(\frac{3}{2}x^2 + y^2\right) - d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$.

于是原方程的通积分为 $\frac{3}{2}x^2 + y^2 - \frac{y}{x} = C, C \in \mathbb{R}.$ \square

6. 常数变易法

$$y' = p(x)y + q(x) \quad (1)$$

用分离变量法求得 $y' = p(x)y$ 的解为 $y(x) = Ce^{\int p(x)dx}$.

设(1)的解为 $y(x) = C(x)e^{\int p(x)dx}$,

代入(1)得 $C'(x)e^{\int p(x)dx} = q(x)$.

因此(1)的通解为 $y = e^{\int p(x)dx} \left(\int q(x)e^{\int -p(x)dx} dx + C \right)$. \square

Remark. 本质上是变量替换 $C(x) = y(x)e^{-\int p(x)dx}$.

Remark. 积分因子法求解 $y' = p(x)y + q(x)$ 更直接.

例: $ydx + (y - x)dy = 0$

解法一: 将方程改写为 $ydx - xdy = -ydy$.

左端有积分因子 $\frac{1}{y^2}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{xy}, \frac{1}{x^2 \pm y^2}$, 但考虑到右端只与

y 有关, 故取 $\mu = \frac{1}{y^2}$. 方程两边同乘 $\frac{1}{y^2}$, 得

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} + \frac{dy}{y} = 0.$$

因而原方程的通解为

$$\frac{x}{y} + \ln|y| = c, c \in \mathbb{R}.$$

此外方程有特解

$$y \equiv 0.$$



解法二: 将方程改写为 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x-y}$, 这是齐次方程.

令 $u = \frac{y}{x}$, 得 $\frac{1-u}{u^2} du = \frac{dx}{x}$.

通解为 $-\frac{1}{u} - \ln|u| = \ln|x| - c, c \in \mathbb{R}.$

代回原来的变量即得 $\frac{x}{y} + \ln|y| = c, c \in \mathbb{R}.$

此外方程有特解 $y \equiv 0.$



解法三(常数变易法): 将方程改写为 $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - 1$.

齐次方程 $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$ 的通解为 $x = cy$.

设非齐次方程 $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - 1$ 的通解为 $x = c(y)y$, 代入得

$$c'(y)y + c(y) = c(y) - 1, \quad c'(y) = \frac{-1}{y},$$

$$c(y) = -\ln|y| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

故原方程的通解为 $x = y(-\ln|y| + c), \quad c \in \mathbb{R}.$

此外方程有特解

$$y \equiv 0. \square$$



7. Bernoulli方程

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^n, n \neq 0, 1$$

方程两边同乘 y^{-n} , 得

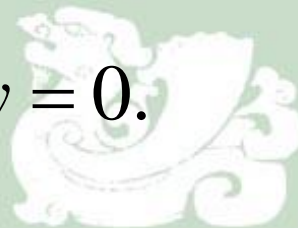
$$y^{-n} \frac{dy}{dx} = p(x)y^{1-n} + q(x),$$

令 $z = y^{1-n}$, 则

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)p(x)z + (1-n)q(x),$$

这是关于 z 的一阶线性ODE, 求出 z , 从而得 y .

此外, 若 $n > 0$, Bernoulli方程还有特解 $y = 0$.



例: $\frac{dy}{dx} = 6\frac{y}{x} - xy^2$

解: 令 $z = y^{-1}$, 则 $\frac{dz}{dx} = \frac{d(y^{-1})}{dx} = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx}$.

代入原方程, 得 $\frac{dz}{dx} = -\frac{6}{x}z + x$.

这是线性方程, 其通解为 $z = \frac{c}{x^6} + \frac{x^2}{8}, c \in \mathbb{R}$.

原方程的通解为 $\frac{1}{y} = \frac{c}{x^6} + \frac{x^2}{8}, c \in \mathbb{R}$.

此外, $y = 0$ 也是原方程的解. \square



8. Riccati方程 $\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + q(x)y + r(x)$

若我们有办法找到Riccati方程的一个特解 $\varphi(x)$,则经过变换 $y = z + \varphi(x)$ 后,方程就变为Bernoulli方程,因而可解. 事实上, 将 $y = z + \varphi(x)$ 带入方程,得

$$z' + \varphi' = pz^2 + 2p\varphi z + p\varphi^2(x) + qz + q\varphi + r.$$

由于 $\varphi' = p\varphi^2(x) + q\varphi + r$,我们得到 z 的Bernoulli方程

$$z' = pz^2 + (2p\varphi + q)z.$$

求出 z ,即得Riccati方程的通解 $y = z + \varphi(x)$.

找Riccati方程的特解时,通常尝试指数函数,幂函数,三角函数,常数函数等简单函数.

例: $y' + y^2 - 2y \sin x = \cos x - \sin^2 x$

解: 方程有特解 $y = \sin x$. 令 $y = z + \sin x$, 代入方程, 得

$$z' + z^2 = 0.$$

解得 $z = \frac{1}{x + c}, c \in \mathbb{R},$ 或 $z = 0.$

于是原方程的通解为 $y = \sin x + \frac{1}{x + c}, c \in \mathbb{R}.$

另有特解 $y = \sin x.$ \square



9.变量替换法

例*: $\frac{dy}{dx} + \frac{1+xy^3}{1+x^3y} = 0$

解: 令 $u = x + y, v = xy$, 则

$$\frac{du}{dv} = \frac{dx + dy}{x dy + y dx} = \frac{1 + \frac{dy}{dx}}{y + x \frac{dy}{dx}} = \frac{uv}{v^2 - 1}$$

$$\frac{2du}{u} = \frac{2v dv}{v^2 - 1} = \frac{d(v^2 - 1)}{v^2 - 1}, \quad u^2 = c(v^2 - 1), c \neq 0.$$

此外, $u = 0$ 也是解. 故原方程的通解为

$$(x + y)^2 = c(x^2 y^2 - 1), c \in \mathbb{R}. \square$$

例: $x''(t) + x(t) = 0$

解: 令 $y(t) = -x'(t)$, 则原方程化为 $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$.

再令 $x = r(t) \cos \theta(t)$, $y = r(t) \sin \theta(t)$. 则

$$\begin{cases} r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta = -r \sin \theta \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta = r \cos \theta \end{cases} \quad (2)$$

$$(1) \times \cos \theta + (2) \sin \theta, \text{ 得} \quad r' = 0,$$

$$(2) \times \cos \theta - (1) \sin \theta, \text{ 得} \quad r\theta' = r.$$

于是, $r = c_1 \neq 0, \theta = t + c_2$, 或 $r = 0, \theta = c$.

故原方程的通解为 $x = c_1 \cos(t + c_2), c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,

也即 $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$ \square

10.综合例题

例. $f \in C^1[0, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + f'(x)) = 0$, 求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

解法一: 令 $g(x) = f(x) + f'(x)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0, \text{ 且 } f(x) = e^{-x} \left(c + \int_0^x g(t) e^t dt \right).$$

由L'Hospital法则

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c + \int_0^x g(t) e^t dt}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) e^x}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0. \end{aligned}$$

解法二:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x (f(x) + f'(x))}{e^x} = 0. \square$$

例: 设 $f(x)$, $g(x)$ 和 $y(x)$ 为 $[a, b]$ 上的连续函数, $f(x) > 0$, 且

$$y(x) \leq g(x) + \int_a^x f(t)y(t)dt, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1)$$

证明: $y(x) \leq g(x) + \int_a^x f(t)g(t)e^{\int_t^x f(s)ds}dt, \quad \forall x \in [a, b].$

解: 令 $h(x) = \int_a^x f(t)y(t)dt$, 则 $h(a) = 0, h'(x) = f(x)y(x)$.

再由(1)及 $f(x) > 0$ 得, $h'(x) \leq f(x)g(x) + f(x)h(x)$. 即

$$h'(x) - f(x)h(x) \leq f(x)g(x).$$

两边同乘非负函数 $e^{\int_a^x -f(s)ds}$, 得

$$\left(h(x)e^{\int_a^x -f(s)ds} \right)' \leq f(x)g(x)e^{\int_a^x -f(s)ds}.$$

$$\left(h(\boldsymbol{t}) e^{\int_a^{\boldsymbol{t}} -f(s) \mathrm{d}s} \right)' \leq f(\boldsymbol{t}) g(\boldsymbol{t}) e^{\int_a^{\boldsymbol{t}} -f(s) \mathrm{d}s}.$$

两边在 $[a, x]$ 上积分, 并利用 $h(a) = 0$, 得

$$h(x) e^{\int_a^x -f(s) \mathrm{d}s} \leq \int_a^x f(t) g(t) e^{\int_a^t -f(s) \mathrm{d}s} \mathrm{d}t,$$

即
$$h(x) \leq \int_a^x f(t) g(t) e^{\int_t^x f(s) \mathrm{d}s} \mathrm{d}t.$$

于是
$$y(x) \leq g(t) + h(t)$$

$$\leq g(t) + \int_a^x f(t) g(t) e^{\int_t^x f(s) \mathrm{d}s} \mathrm{d}t. \square$$

例. (Gronwall不等式) 已知 $\alpha(t) \geq 0$ 及 $u(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上连续, C, K 为非负实数, 且

$$u(t) \leq C + \int_{t_0}^t [\alpha(s)u(s) + K] ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

证明: $u(t) \leq [C + K(t - t_0)]e^{\int_{t_0}^t \alpha(s) ds}, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$

Hint: Let $h(t) = C + \int_{t_0}^t [\alpha(s)u(s) + K] ds$, then

$$h'(t) = \alpha(t)u(t) + K \leq \alpha(t)h(t) + K.$$

作业：习题7.2

No. 1 (10), 2 (4),

3 (1, 2, 7, 12, 13, 14)



补充题(不交):

$$1.(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$$

$$2.(e^x + 3y^2)dx + 2xydy = 0$$

$$3.x(4ydx + 2xdy) + y^3(3ydx + 5xdy) = 0$$

$$4.(y - 1 - xy)dx + xdy = 0$$

$$5.y' = (x - 1)y^2 + (1 - 2x)y + x$$

$$6.x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$$

$$7.y^2(xdx + ydy) + x(ydx - xdy) = 0$$

(提示:令 $x = r(t)\cos\theta(t)$, $y = r(t)\sin\theta(t)$)

答案:

$$1. x^3 + y^4 + 3x^2y^2 = C;$$

$$2. (x^2 - 2x + 2)e^x + x^3y^2 = C;$$

$$3. x^4y^2 + x^3y^5 = C;$$

$$4. (xy + 1)e^{-x} = C;$$

$$5. y = \frac{1}{x + Ce^x} + 1, y = 1;$$

$$6. y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{x^3 + C}, y = \frac{1}{x};$$

$$7. 1 + \frac{1}{y} + \frac{C}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, y = 0.$$