# 《线性代数》作业 4

**截止时间：10月22日18:00。**
**纸质。请写出完整的计算等解题过程。提交于课堂或近春园西楼入口处我的信箱。**

1. 求下列矩阵的$LU$或$PLU$分解，其中$L$为单位下三角矩阵。

   (a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.　(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.　(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2. 判断下列子集是否是$\mathbb{R}^m$的子空间。如果是子空间，是否可以写成线性生成的子空间，是否可以写出一组生成向量。

   (a) $\left\{ [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]^T \,\middle|\, \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{bmatrix} \text{是对称矩阵} \right\}$.
   (b) $\left\{ [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T \,\middle|\, a_1 \geq a_2 \geq a_3 \right\}$.
   (c) $\left\{ [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T \,\middle|\, a_1 a_2 = 0 \right\}$.
   (d) $\left\{ [a_1 \quad \cdots \quad a_m]^T \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m} a_i^2 = 0 \right\}$.
   (e) $\left\{ [a_1 \quad \cdots \quad a_m]^T \,\middle|\, a_2 = 0 \right\}$.
   (f) $\left\{ [a_1 \quad \cdots \quad a_m]^T \,\middle|\, a_1 = a_2 \right\}$.

3. 给定一个非空向量组$S$. 证明：

   (a) 子集$\mathrm{span}(S)$ 是$\mathbb{R}^m$ 的子空间；
   (b) 如果$S$ 中向量都在$\mathbb{R}^m$ 的某个子空间$\mathcal{M}$ 中，则$\mathrm{span}(S)$ 中的向量也都在$\mathcal{M}$ 中。

4. 把$\mathbb{R}^4$ 中的向量$\boldsymbol{b}$ 表示成向量$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$ 的线性组合。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

5. 设$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ 为$\mathbb{R}^m$ 中的向量，存在实数$k_1, k_2, k_3$ 且$k_1 k_2 \neq 0$，使得

$$k_1 \boldsymbol{a}_1 + k_2 \boldsymbol{a}_2 + k_3 \boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}_m.$$

   证明$\mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3) = \mathrm{span}(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$.

6. 设$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 为$\mathbb{R}^m$ 中的一组向量。给定正整数$r < m$，去掉每个向量的第$i_1, \cdots, i_r$ 个分量，得到$\mathbb{R}^{m-r}$ 中的向量组$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$. 证明：

   (a) 如果$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性相关，则$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ 线性相关。
   (b) 如果$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ 线性无关，则$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 线性无关。

7. 求下列向量组的极大线性无关部分组和秩。

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

8. 给定线性无关的向量组 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$，求向量组 $\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1$ 所有的极大线性无关部分组。

9. 考虑空间 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x - y = 0$ 与平面 $x + y - 2z = 0$的交集，记为 $\mathcal{M}$. 证明 $\mathcal{M}$是一个子空间，求出它的基和维数。

10. 给定 $r$ 阶方阵 $P$ 和子空间 $\mathcal{M}$ 的一组基 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r$。令

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \cdots & \boldsymbol{b}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_r \end{bmatrix} P.$$

证明：$\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_r$ 是 $\mathcal{M}$ 的一组基当且仅当矩阵 $P$ 可逆。