《线性代数》作业 13

截止时间：NA。答案会在 12 月 24 日上传到网络学堂。

1. 给定一个 $m \times n$ 阶实矩阵 A, 定义实矩阵 $S = \begin{bmatrix} O & A \\ A^{\mathrm{T}} & O \end{bmatrix}$.

   (a) 证明：$S\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, 当且仅当向量 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{bmatrix}$ 满足 $A\boldsymbol{z} = \lambda\boldsymbol{y}, A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \lambda\boldsymbol{z}$.

   (b) 证明：如果 λ 是 S 的特征值，则 $-\lambda$ 也是 S 的特征值。

   (c) 证明：如果 $\lambda \neq 0$ 是 S 的特征值，则 λ^2 同时是 AA^{T} 和 $A^{\mathrm{T}}A$ 的特征值。

   (d) 证明：AA^{T} 和 $A^{\mathrm{T}}A$ 的非零特征值相同，且有相同的代数和几何重数。

   (e) 取 $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求对应 S 的谱分解。

2. 在所有正实数构成的集合 $\mathbb{R}^+$ 上，定义加法和数乘运算：

$$a \oplus b := ab, \qquad k \odot a := a^k \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}^+,\ k \in \mathbb{R}.$$

   判断 $\mathbb{R}^+$ 对这两个运算是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

3. 给定一个数域 $\mathbb{F}$, 设 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 是矩阵空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 中所有迹为零的矩阵构成的子集。

   (a) 证明：$\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 是 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的子空间。

   (b) 求子空间 $\mathbb{F}_0^{n\times n}$ 和 $\mathrm{span}(I_n)$ 的交与和。

   (c) 证明：$\mathbb{F}^{n\times n} = \mathbb{F}_0^{n\times n} \oplus \mathrm{span}(I_n)$.

4. 对 n 阶方阵 A, 令 $P(A) = \{f(A) | f(x) \in \mathbb{F}(x)\}$, 其中 $\mathbb{F}[x]$ 为系数在数域 $\mathbb{F}$ 中的多项式构成的集合。

   (a) 证明：$P(A)$ 关于矩阵的加法和数乘构成 $\mathbb{F}$ 上的线性空间。

   (b) 判断 $P(A)$ 的维数是否有限。

   (c) 令 $A = \mathrm{diag}(1, \omega, \omega^2)$, 其中 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 求 $P(A)$ 的维数和一组基。

5. 判断数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $C\big([-\pi,\pi]\big)$ 中的下列向量组是否线性相关，并求其秩。

   (a) $\cos^2 x$, $\sin^2 x$, 1.

   (b) 1, $\sin x$, $\ldots$, $\sin nx$.

6. 给定 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\mathbb{R}^{3\times 3}$ 上的线性变换 $f: X \mapsto AX$, 分别求 $\mathcal{N}(f)$ 和 $\mathcal{R}(f)$ 的维数和一组基。

7. 定义 $\mathbb{F}[x]$ 上的变换：$\boldsymbol{A}\big(f(x)\big) = xf(x) \quad \forall f(x) \in \mathbb{F}[x]$.

   (1) 证明：$\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{F}[x]$ 上的一个线性变换。

   (2) 设 $\boldsymbol{D}$ 是求导算子，证明: $\boldsymbol{DA} - \boldsymbol{AD} = \boldsymbol{I}$.

8. 考虑函数空间的子空间 $\operatorname{span}(\sin^2 x, \cos^2 x)$.

   (1) 证明：$\{\sin^2 x, \cos^2 x\}$ 和 $\{1, \cos 2x\}$ 分别是子空间的一组基。

   (2) 分别求从 $\{\sin^2 x, \cos^2 x\}$ 到 $\{1, \cos 2x\}$，和从 $\{1, \cos 2x\}$ 到 $\{\sin^2 x, \cos^2 x\}$ 的过渡矩阵。

   (3) 分别求 1 和 $\sin^2 x$ 在两组基下的坐标。

9. 设 $\mathcal{V} = \operatorname{span}(f_1, f_2)$ 是函数空间的子空间，其中 $f_1(x) = e^{ax}\cos bx$, $f_2(x) = e^{ax}\sin bx$. 证明：求导算子 $\boldsymbol{D}$ 是 $\mathcal{V}$ 上的线性变换，并求其在基 f_1, f_2 下的矩阵。

10. 设 $\mathcal{V}$ 是所有 2 阶对称矩阵构成的线性空间，f 是其上的线性变换：$f(X) = A^{\mathrm{T}}XA$, 其中 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. 求 f 在基 E_{11}, E_{22}, $E_{12}+E_{21}$ 下的矩阵。

11. 设 $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, 在 $\mathbb{F}^{2\times 2}$ 中定义如下变换：

$$f(X) = B^{-1}XB \qquad \forall X \in \mathbb{F}^{2\times 2}.$$

   (a) 证明：f 是线性变换。

   (b) 求 f 的全部特征值和特征向量。