清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 **微积分 A（1）**

系名________________ **班级**______________ **姓名**______________ **学号**_______________

一．填空题（每个空 3 分，共 10 题）（**请将答案写在横线上，严禁写在答卷纸上！**）

1. 常微分方程 $y'=1+2x+y^2+2xy^2$ 的通解为__________________________。

2. 常微分方程 $y''-2y'+y=2$ 的通解为__________________________。

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+3k}=$______________。

4. $\int_0^2|1-x|\,\mathrm{d}x=$______________。

5. 设 $f(x)=\sin(x^3)$，则 $f^{(15)}(0)=$______________。

6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=$__________________________。

7. $\int_0^{\pi}x(\sin x)^2\mathrm{d}x=$______________。

8. 常微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}$ 满足 $y(0)=0$ 的解 $y=y(x)$ 的拐点的横坐标为______________。

9. 曲线段 $y=2x^{\frac{3}{2}}\quad(0\le x\le 1)$ 的弧长为______________。

10. 设当 $x\to 0$ 时，函数 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{3}}$ 为 p 阶无穷小，则 $p=$______________。

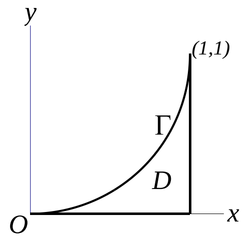
二．　解答题（共 8 题）（**请写出详细的计算过程和必要的根据！**）

11.（10 分）讨论 p 取何值时，广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^p\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ 收敛。

12. （10 分）求数列 $\{n^{1/n}\}$（$n=1,2,3,\cdots$）的最大项的值。

13. （13 分）设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0 \end{cases}$，讨论函数 $f(x)$ 的连续性，并求 $f(x)$ 的单调区间、极值点与极值、凸性区间、拐点和渐近线。

14.（12 分）设曲线段 Γ 为圆心在点 $(0,1)$ 的单位圆周位于正方形 $0\le x\le 1, 0\le y\le 1$ 的部分，平面区域 D 为由 Γ，x 轴以及直线 $x=1$ 围成的有界区域。
（I）求区域 D 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体体积；
（II）求曲线段 Γ 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转面面积。



15. （10 分）求常微分方程的初值问题 $\begin{cases} \sqrt{1+(y')^2}=(1-x)y'', \\ y(0)=0, \\ y'(0)=0 \end{cases}$ 的解 $(x<1)$。

16.（5 分）设 $f\in C(0,+\infty)$，并且 $\forall a>0,\ b>1$，都有积分值 $\int_a^{ab} f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关，求证：存在常数 C，使得 $f(x)=\dfrac{C}{x}$，$x\in(0,+\infty)$。

17.（5 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，且满足 $\left(f(x)\right)^2\le 1+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\ x\in[0,1]$，证明：$f(x)\le 1+x,\ x\in[0,1]$。

18. （5 分）设 $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为实系数 n 次多项式。若 $p(x)\ge 0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，证明：$p(x)+p'(x)+\cdots+p^{(n)}(x)\ge 0,\ x\in(-\infty,+\infty)$，这里 $p'(x), p''(x),\cdots, p^{(n)}(x)$ 表示 $p(x)$ 的一阶，二阶，以及 n 阶导数。

三. 附加题（本题全对才给分，其分数不计入总评，仅用于评判 A+）

设 $h>0$，$f(x)$ 为闭区间 $[-h,h]$ 上的无穷可导函数，且 $\forall x\in[0,h]$，以及任意的非负整数 n，都有 $f^{(n)}(x)\ge 0$。记 $r_n(x)=\dfrac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$，求证：$\forall x\in(0,h)$，均有 $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x)=0$。