$\mathbb{R}^{2\times 2}$ 上的行列式函数 $\delta(A)=\delta([\vec{a}\ \ \vec{b}])=\delta(\vec{a},\vec{b})$.

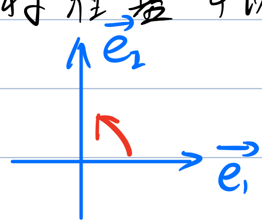
Abstract:

使用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 构造一个平行四边形. 我们将通过类似于向量夹角的基变换/坐标系变换,来解释:

平行四边形的有向面积 $S=\delta(\vec{a},\vec{b})$.

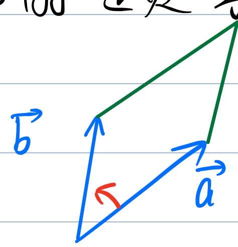
这个表达式也可以通过初等几何来得到.

1. 标准基可以说是个"绝对"参考系.

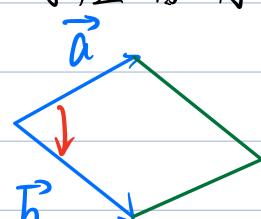


$\vec{e}_1$ 到 $\vec{e}_2$ 的逆时针方向是 $\mathbb{R}^2$ 上的正向;顺时针方向是负向.

平行四边形可以用一个 2x2 矩阵 $A=[\vec{a}\ \ \vec{b}]$ 来表示. $\vec{a}$ 到 $\vec{b}$ 的旋转方向对应着有向面积 S 的正负号.



$S>0$



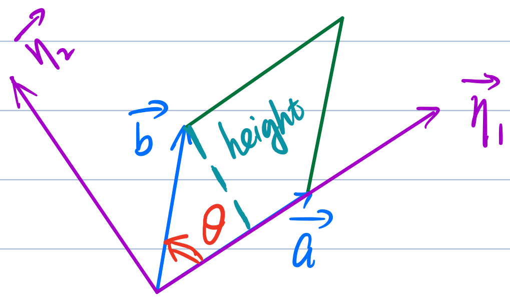
$S<0$.

2. 有向面积 $S=\delta(A)=\delta(\vec{a},\vec{b})$.

类似于向量夹角的讨论,我们使用 A 的第1列 $\vec{a}$ 构造出一个新的直角坐标系,记为 $(\vec{\tau}_1,\vec{\tau}_2)$:

$\vec{\eta}_1 = \dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$. 取 $\vec{\eta}_2$，使得 $\vec{\eta}_2$ 和 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 的同侧.

Remark: 取 $\vec{\eta}_2$,使得 $\vec{\eta}_2$ 和 $\vec{b}$ 分别在 $\vec{a}$ 的两侧, 可通过类似的讨论得到相同的结果.



$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ 与 $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)$ 之间, 有个正交矩阵 Q:

$$(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\, Q.$$

在新坐标系下:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{\eta}_1 + \alpha_2 \vec{\eta}_2 = (\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix} = (\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)\,\hat{\alpha}$$

$$= (\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)\begin{bmatrix}\|\vec{a}\|\\ 0\end{bmatrix}.$$

$$\vec{b} = \beta_1 \vec{\eta}_1 + \beta_2 \vec{\eta}_2 = (\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix} = (\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)\,\hat{\beta}$$

$$= (\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)\begin{bmatrix}\|\vec{b}\|\cos\theta\\ \|\vec{b}\|\sin\theta\end{bmatrix}.$$ height.

所以绝对面积 $|S| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \sin\theta$.

而行列式 $\delta(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \begin{vmatrix}\|\vec{a}\| & \|\vec{b}\|\cos\theta\\ 0 & \|\vec{b}\|\sin\theta\end{vmatrix} = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\sin\theta$

所以有 $|S| = \delta(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$.

接下来讨论 有向面积 S 的 正负号.

根据我们取 $\vec{\eta}_2$ 的原则，$\vec{a}$ 到 $\vec{b}$ 的旋转方向和 $\vec{\eta}_1$ 到 $\vec{\eta}_2$ 的旋转方向是一致的.

而 $\vec{\eta}_1$ 到 $\vec{\eta}_2$ 的旋转方向对应着基变换中的正交矩阵 Q 的行列式取值.

请自行验证下列情形:

$$(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\, Q.$$

$$\det(Q) \begin{cases} >0: & \vec{\eta}_1 \text{ 到 } \vec{\eta}_2 \text{ 是逆时针.} \\ <0: & \quad \text{〃} \quad \text{顺时针.} \end{cases}$$

所以 有向面积 $S = \det(Q)\,|S|$

$$= \det(Q)\, \delta(\underbrace{\hat{\alpha}, \hat{\beta}}_{\text{看作一个矩阵}}).$$

矩阵乘法与行列式运算可交换.

$$= \det(Q[\hat{\alpha}\ \ \hat{\beta}])$$

$$= \det([Q\hat{\alpha}\quad Q\hat{\beta}]).$$

注意到 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 在两套坐标系 $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ 和 $(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)$ 下的坐标关联:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \alpha_1\vec{\eta}_1 + \alpha_2\vec{\eta}_2 = \underline{\underline{(\vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2)}}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)\, Q}}\, \hat{\alpha}.$$

类似的 $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\, Q\, \hat{\beta}.$

所以有 $\delta(\vec{a}, \vec{b}) = \delta(\underbrace{(\vec{e}_1, \vec{e}_2)}_{\text{当作单位矩阵 } I_2} Q\hat{\alpha}, (\vec{e}_1, \vec{e}_2) Q\hat{\beta})$

$$= \delta(Q\hat{\alpha}, Q\hat{\beta}).$$

从而得到有向面积 $S = \delta(\vec{a}, \vec{b}) = \delta(A)$.

$\boxed{3}$ $\mathbb{R}^n$ for $n \geq 3$ 中的有向"体积"有类似的结论，可自行讨论.