1. 记所给线性方程组为 $\begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix} \Longleftrightarrow A\vec{x}=\vec{b}$.

所以直线 $\mathcal{L}$ = 线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的解集. 注意 $\mathcal{L}$ 不包含零向量, 所以无法构成子空间, 不能定义正交投影.

我们先求出 $\mathcal{L}$ 的具体表述.

将增广矩阵 $[A\,|\,\vec{b}]$ 化为行简化阶梯形, 求得 $\mathcal{L}$.

$$[A|\vec{b}]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & -3 & 5\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-2R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & -3 & 3 & 3\end{array}\right]\xrightarrow{R_2(-\frac{1}{3})}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 1 & -1 & -1\end{array}\right].$$

主列　自由列.

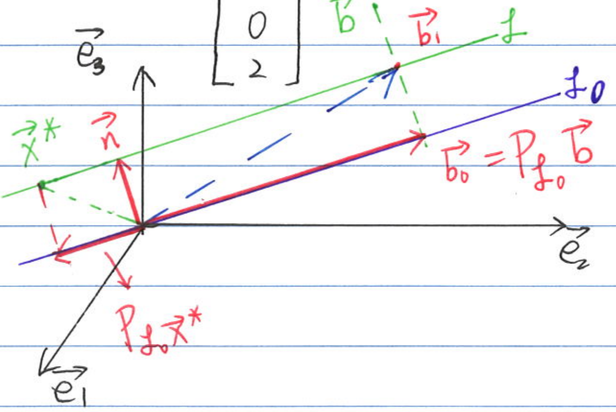
可取 x_3 为自由变量, x_1 和 x_2 为主变量. 得到

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=G\,[x_3]+\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\rightarrow \text{源于右端项} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}[x_3]+\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}.$$

分别取 $[x_3]=[0]$ 和 $[1]$, 得到解集中的一个特解 $\vec{x}^*$ 和 $N(A)$ 的一组基 $\{\vec{k}\}$: $\vec{x}^*=\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{k}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$.

所以 $\mathcal{L}$ = 集合 $\{\vec{x}^*+\alpha\underbrace{\vec{k}}_{\text{直线}\mathcal{L}\text{的方向}}\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}\}$ = 集合 $\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix},\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\right\}$.

考察点 $\vec{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ 到直线 $\mathcal{L}$ 上的投影, 仅作图示, 并非准确的坐标示意图.



构造直线 $\mathcal{L}_0$, s.t. $\mathcal{L}_0$ 与 $\mathcal{L}$ 平行, 且过原点. 注意到 $\mathcal{L}$ 的方向与 $\vec{k}$ 共线, 所以 $\mathcal{L}_0=\{\alpha\vec{k}\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}\}$ $=\text{span}(\vec{k})$.

图中所有向量默认起点在原点.

求 $\mathcal{L}_0$ 的正交投影变换/矩阵 $P_{\mathcal{L}_0}$:

因为 $\mathcal{L}_0=\text{span}(\vec{k})=\text{span}\left(\vec{q}_1=\dfrac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right)$,

所以有 $P_{\mathcal{L}_0} = [\vec{q_1}][\vec{q_1}]^T = \vec{q_1}\,\vec{q_1}^T = \frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}2&1&1\end{bmatrix}$

$$= \frac16\begin{bmatrix}4&2&2\\2&1&1\\2&1&1\end{bmatrix}.$$

$\mathcal{L}$与$\mathcal{L}_0$的联系：二者平行，则法向量共线。并且二者上的点可通过法向量平移得到. 注意到 $\vec{x}^*$，它关于$\mathcal{L}_0$的正交分解可构造出一个过原点的法向量 $\vec{n}$： $\vec{x}^* = \cancel{P_{\mathcal{L}_0}\vec{x}}\ P_{\mathcal{L}_0}\vec{x}^* + \vec{n}$

$$\Rightarrow \vec{n} = \vec{x}^* - P_{\mathcal{L}_0}\vec{x}^* = \vec{x}^* - \frac16\begin{bmatrix}4&2&2\\2&1&1\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} = \vec{x}^* - \frac12\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$= \vec{x}^* - \frac12\vec{k}.$$

$\vec{b}$在$\mathcal{L}_0$上的正交投影记为 $\vec{b}_0 = P_{\mathcal{L}_0}\vec{b} = \frac16\begin{bmatrix}4&2&2\\2&1&1\\2&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} = \frac23\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} = \frac23\vec{k}.$

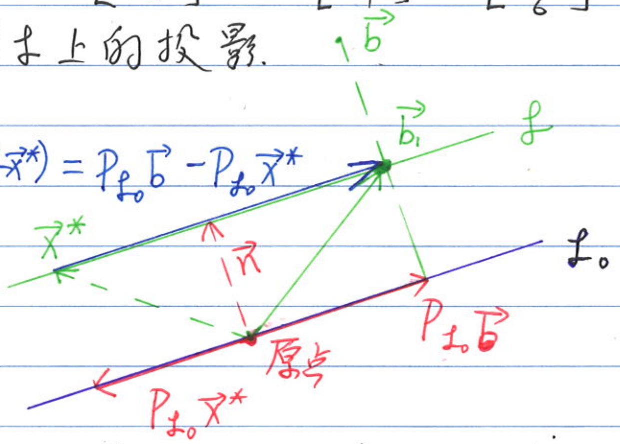
而 $\vec{b}$ 在$\mathcal{L}$上的投影记为 $\vec{b}_1$，可通过将 $\vec{b}_0$ 沿法向量 $\vec{n}$ 平移在$\mathcal{L}$上得到，i.e.

$$\vec{b}_1 = \vec{b}_0 + \overset{\vec{x}^* - P_{\mathcal{L}_0}\vec{x}^*}{\underline{\vec{n}}} = \frac23\vec{k} + \left(\vec{x}^* - \frac12\vec{k}\right)$$

$$= \vec{x}^* + \frac16\vec{k} = \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix} + \frac16\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac73\\-\frac56\\\frac16\end{bmatrix} = \frac16\begin{bmatrix}14\\-5\\1\end{bmatrix}.$$

可验证 $\vec{b}_1$ 在$\mathcal{L}$上，且是 $\vec{b}$ 到$\mathcal{L}$上的投影.

Remark: 整理上述过程: $P_{\mathcal{L}_0}(\vec{b} - \vec{x}^*) = P_{\mathcal{L}_0}\vec{b} - P_{\mathcal{L}_0}\vec{x}^*$



① 将给定直线$\mathcal{L}$表示成 $\{\vec{x}^* + \alpha\underbrace{\vec{k}}_{\text{直线}\mathcal{L}\text{的方向}}\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}\}$ 的形式.

② 定义平行于$\mathcal{L}$且过原点的直线 $\mathcal{L}_0 = \{\alpha\vec{k}\ \ \forall\alpha\in\mathbb{R}\} = \mathrm{span}(\vec{k})$

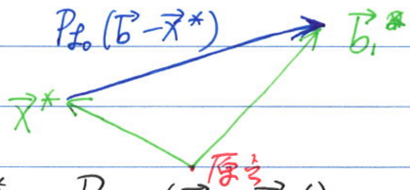
$= \mathrm{span}\left(\vec{q} = \dfrac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}\right)$.

得到关于 $\mathcal{L}_0$ 的正交投影变换/矩阵:

$$P_{\mathcal{L}_0} = P_{\vec{k}} = P_{\vec{q}} = \vec{q}\,\vec{q}^{\,T} = \left(\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}\right)\left(\frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}\right)^T = \frac{\vec{k}\vec{k}^T}{\|\vec{k}\|^2} = \frac{\vec{k}\vec{k}^T}{\vec{k}^T\vec{k}}.$$

一种常用的关于向量的正交投影表述法

③ 给定点 $\vec{b}$ 到直线 $\mathcal{L}$ 上的投影为



$$\vec{b}_1 = P_{\mathcal{L}_0}\vec{b} + (\vec{x}^* - P_{\mathcal{L}_0}\vec{x}^*)$$

$$= \vec{x}^* + P_{\mathcal{L}_0}\vec{b} - P_{\mathcal{L}_0}\vec{x}^* = \vec{x}^* + P_{\mathcal{L}_0}(\vec{b}-\vec{x}^*). \quad \boxed{///}$$

2.(a) 可选择做倍加变~~换~~换化为上三角矩阵，或使用代数余子式展开.
因为A是3X3矩阵，一般来说，代数余子式会比较快.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot[2\cdot4 - 1\cdot3] - 5[(-1)\cdot4 - 1\cdot2] + 0 = 5 - 5(-6) = 35.$$

(b) $$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \xlongequal{C_3 - C_1} \begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x+y & x-y \\ x+y & x & -x \end{vmatrix} \xlongequal{C_3 - C_2} \begin{vmatrix} x & y & 0 \\ y & x+y & -2y \\ x+y & x & -2x \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} x+y & -2y \\ x & -2x \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} y & -2y \\ x+y & -2x \end{vmatrix} = x[(x+y)(-2x) + 2xy] - y[-2xy + 2y(x+y)]$$

$$= x(-2x^2) - y(2y^2) = -2x^3 - 2y^3.$$

(c) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$= -(c_1d_2 - c_2d_1)(a_3b_4 - a_4b_3).$$

(d) $A = [i+j]_{n\times n} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & 1+n \\ \vdots & & & & \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & n+n \end{bmatrix}$: 分情形讨论.

$n=1$: $\det(A) = \left|\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}\right| = 2$

$n=2$: $\det(A) = \left|\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right| = 2\cdot 4 - 3\cdot 3 = -1.$

$n\geq 3$: $\det(A) \underset{R_3-R_1}{\overset{R_2-R_1}{=\!=\!=}} \left|\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & 1+n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & n+n \end{bmatrix}\right| = 0.$ 线性相关

(e) 令 $A = [ij]_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & n^2 \end{bmatrix}$

$n=1$: $\det(A) = \det([1]) = 1.$

$n\geq 2$: $\det(A) \overset{R_2-R_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 2n & 3n & & n^2 \end{vmatrix} = 0.$ 线性相关

∎

3. (a) $B = 2A$: $\det(B) = 2^3 \det(A) = 2^3\cdot 5 = 40.$ 每一列因为列多线性性得到一个系数2.

$B = -A$: $\det(B) = \det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -5.$

$B = A^2$: $\det(B) = \det(A^2) = (\det(A))^2 = 5^2 = 25.$

(b) 我会选择计算 B^T 的行列式取值.

$\det(B^T) = \det([\vec{a}_1 - \vec{a}_3 \quad \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \quad \vec{a}_3 - \vec{a}_2])$

根据列多线性展开，有~~表~~相同~~邻接~~列的行列式取值为0,舍去.

$= \det([\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \quad \vec{a}_3 - \vec{a}_2]) - \det([\vec{a}_3 \quad \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \quad \vec{a}_3 - \vec{a}_2])$

$= \det([\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3 - \vec{a}_2]) + \det([\vec{a}_3 \quad \vec{a}_2 - \vec{a}_1 \quad \vec{a}_2])$

$= \det([\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3]) + \det([\vec{a}_3 \quad -\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2])$

$= \det(A^T) - \det([\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3])$ 对换列

$= \det(A^T) - \det(A^T) = 0.$

或者做倍加行变换:

$\det(B) = \det\left(\begin{bmatrix} \vec{a}_1^T - \vec{a}_3^T \\ \vec{a}_2^T - \vec{a}_1^T \\ \vec{a}_3^T - \vec{a}_2^T \end{bmatrix}\right) \overset{R_2+R_1}{=\!=\!=} \det\left(\begin{bmatrix} \vec{a}_1 - \vec{a}_3^T \\ \vec{a}_2^T - \vec{a}_3^T \\ \vec{a}_3^T - \vec{a}_2^T \end{bmatrix}\right) = 0.$ 线性相关

∎

4. $A_x=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -6 & 4\end{bmatrix}+xI_2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -6 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+x & 1\\ -6 & 4+x\end{bmatrix}$.

所以 $\det(A_x)=(-1+x)(4+x)+6=x^2+3x-4+6=x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$.

(a) $\det(A_0)=(0+1)(0+2)=2$. $\det(A_1)=(1+1)(1+2)=6$.

$\det(A_2)=(2+1)(2+2)=12$, $\det(A_3)=(3+1)(3+2)=\cancel{8}20$.

(b) 由前述讨论可知 $\det(A_x)=(x+1)(x+2)$, 其中 $a=1$, $b=2$.

(c) $\det(A_0^2)=(\det(A_0))^2=2^2=4$.

$\det(A_0^2+I_2)=\det((A_0+iI_2)(A_0-iI_2))=\det(A_i A_{(-i)})$
$=\det(A_i)\det(A_{(-i)})$
$=(i+1)(i+2)(-i+1)(-i+2)=10$.

$\det(A_0^2+3A_0+2I_2)=\det((A_0+I_2)(A_0+2I_2))=\det(A_1A_2)$
$=\det(A_1)\det(A_2)=6\cdot 12=72$.

$\det(A_0^3-2A_0^2+3A_0-4I_2)=\det(?)$ 没有直接的分解式.

也需讨论它们与 a,b 的关系. 这一部分和下一章的特征值及对角化相关.

由 $\det(A_x)=(x+1)(x+2)=(x+a)(x+b)$ 可知, 当 $x=-a,-b$ 时, 有

$\det(A_x)=\cancel{0}\ \det(A_0-aI_2)=\det(A_0-bI_2)=0$.

对应的齐次线性方程组 $(A_0-aI_2)\vec{x}_a=\vec{0}_2$, $(A_0-bI_2)\vec{x}_b=\vec{0}_2$ 有非零解 $\vec{x}_a,\vec{x}_b$,
$(a,\vec{x}_a)$ 和 $(b,\vec{x}_b)$ ~~分别~~是 A_0 ~~的~~ 由特征值和对应特征向量构成的特征对. 之后我们可以证明, 存在可逆矩阵 P, s.t.

$$A_0=P\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}P^{-1}=P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}P^{-1}=P\Lambda P^{-1}$$

对角矩阵

所以 $A_0^2=\left(P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}P^{-1}\right)^2=P\Lambda \underbrace{P^{-1}P}\Lambda P^{-1}=P\Lambda^2P^{-1}$.

$\Rightarrow \det(A_0^2)=\det(P\Lambda^2P^{-1})=\det(P)\det(\Lambda^2)\det(P^{-1})$

互为倒数

$=\det(\Lambda^2)=\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^2\right)=\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}\right)=4$

$=a^2b^2$.

$\det(A_0^2+I_0)=\det(P\Lambda^2P^{-1}+I_0)=\det(P\Lambda^2P^{-1}+PP^{-1})$
$=\det(P(\Lambda^2+I_2)P^{-1})=\det(\Lambda^2+I_2)$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} a^2+1 & 0 \\ 0 & b^2+1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (a^2+1)(b^2+1) = (1^2+1)(2^2+1) = 10.$$

$$\det(A_0^2+3A_0+2I_2) = \det(P\Lambda^2P^{-1}+3P\Lambda P^{-1}+2PP^{-1})$$
$$= \det(P(\Lambda^2+3\Lambda+2)P^{-1})$$
$$= \det(\Lambda^2+3\Lambda+2)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} a^2+3a+2 & 0 \\ 0 & b^2+3b+2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= (a^2+3a+2)(b^2+3b+2)$$
$$= (1+3+2)(2^2+3\cdot2+2) = 72.$$

$$\det(A_0^3-2A_0^2+3A_0-4I_2) = \det(P\Lambda^3P^{-1}-2P\Lambda^2P^{-1}+3P\Lambda P^{-1}-4PP^{-1})$$
$$= \det(P(\Lambda^3-2\Lambda^2+3\Lambda-4I_2)P^{-1})$$
$$= \det(\Lambda^3-2\Lambda^2+3\Lambda-4I_2)$$
$$= \det\left(\begin{bmatrix} a^3-2a^2+3a-4 & 0 \\ 0 & b^3-2b^2+3b-4 \end{bmatrix}\right)$$
$$= (a^3-2a^2+3a-4)(b^3-2b^2+3b-4)$$
$$= (1-2+3-4)(2^3-2\cdot2^2+3\cdot2-4)$$
$$= \cancel{20}(-2)\cdot 2 = -4.$$ ▥

5. $\det(A) = \det(QR) = \det(Q)\det(R) = \det(Q)\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right)$

$= \det(Q)\,1\cdot4\cdot6 = \det(Q)24 = \pm 24,$

因为Q是正交矩阵，所以 $\det(Q)=\pm1$. ▥

6. 因为 $\text{rank}(A)=n$，所以 A^TA 可逆，可得到~~正交~~正交投影矩阵 $P=A(A^TA)^{-1}A^T$.
然~~而~~而 A 不是方阵，没有办法定义其~~其~~行列式函数，i.e.
$\det(A)$，$\det(A^T)$ 不存在.
所以这种交换行列式运算和矩阵乘法的顺序是不对的. ▥

7. 因为A可逆，基本上会利用A做引块消元，得到引块上/下三角矩阵.

使用引块倍加矩阵 $E=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}$，有

$$E\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

而倍加变换不改变行列式取值，所以有

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{bmatrix}\right)=\det(A)\det(D-CA^{-1}B).$$

証

8. $$\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\xrightarrow[\text{并非行，而是引块形式的行}]{R_1+R_2}\begin{bmatrix} A+B & A+B \\ B & A \end{bmatrix}\xrightarrow{C_2-C_1}\begin{bmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{bmatrix}$$

倍加变换不改变行列式取值，所以有

$$\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{bmatrix}\right)=\det(A+B)\det(A-B).$$

証

9. (a) 可以先算 $n=1,2,3$，找一下规律.

$\det(B_1)=\det([1])=1$

$\det(B_2)=\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)=2-1=1.$

$$\det(B_3)=\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\right)=(-1)^{3+2}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}\cdot 2\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}_{\det(B_2)}$$

需要找规律，保持 B_n 的结构，选择从最后一行或最后一列展开.

$=-1+2\det(B_2)=-1+2=1.$

考察 B_n: $$\det(B_n)=\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$=(-1)^{n+(n-1)}(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}+(-1)^{n+n}2\det(B_{n-1})$$

展开

$$=(-1)^{n-1+n-1}(-1)\det(B_{n-2})+2\det(B_{n-1})$$

$= 2\det(B_{n-1}) - \det(B_{n-2})$.

$\Rightarrow \det(B_n) - \det(B_{n-1}) = \det(B_{n-1}) - \det(B_{n-2}) = \cdots = \det(B_2) - \det(B_1)$.

由 $\det(B_1) = \det(B_2) = 1$ 可知，$\det(B_n) \equiv 1$ for $n \geq 1$.

(b) $\det(A_n) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & & \\ 0 & 2 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{vmatrix} + \det(B_n)$

展开

$= \begin{vmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{vmatrix}_{(n-1\text{阶})} + \det(B_n)$

$= \det(A_{n-1}) + \det(B_n) = \det(A_{n-1}) + 1$.

所以 $\det(A_n) = \det(A_{n-1}) + 1$.

又由 $\det(A_1) = \det([2]) = 2$ 可知

$\det(A_n) = n+1$, for $n \geq 1$. ▯

10. ~~反证法~~仿照题目4，定义形如 $A + tI_n$ 的矩阵，从而定由行列式函数定义关于t的函数 $f(t) = \det(A + tI_n)$，是一个关于t的多项式，连续且可导。由行列式的完全展开式可知 $f(t)$ 的最高次项为 t^n，并且系数为1.

所以 $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.

而 $\det(A) < 0$，所以有 $f(0) = \det(A) < 0$.

由中值定理可知，存在 $t_0 \in (0, +\infty)$，s.t.

$$f(t_0) = \det(A + t_0 I_n) = 0.$$

所以 $A + t_0 I_n$ 不可逆，则存在非零向量 $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$，s.t.

$$(A + t_0 I_n)\vec{x} = \vec{0}_n \Rightarrow A\vec{x} = -t_0\vec{x}.$$

因为 A 是正交矩阵，所以保距，记

$$\|\vec{x}\|^2 = \|A\vec{x}\|^2 = \|-t_0\vec{x}\|^2 = t_0^2\|\vec{x}\|.$$

所以 $t_0 = \pm 1$. 又因为 $t_0 \in (0, +\infty)$，所以 $t_0 = 1$.

综上可得 $A + I_n$ 不可逆，从而存在非零向量 $\vec{x}$，s.t. $A\vec{x} = -\vec{x}$.

之后我们会讲到，非零 $\vec{x}$ 是 A 对应特征值 -1 的特征向量. ▯

11. 写成矩阵与向量乘积的形式有

$$\begin{bmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & -2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\sin t \\ t\cos t \end{bmatrix}$$

直接应用 Cramer 法则

$$x_1 = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} 3\sin t & e^{-2t} \\ t\cos t & -2e^{-2t} \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & -2e^{-2t} \end{bmatrix}\right)} = \frac{-6e^{-2t}\sin t - e^{-2t}t\cos t}{-3e^{-t}} = \frac{6e^{-t}\sin t + e^{-t}t\cos t}{3}$$

$$= \frac{6\sin t + t\cos t}{3e^t}.$$

$$x_2 = \frac{\det\left(\begin{bmatrix} e^t & 3\sin t \\ e^t & t\cos t \end{bmatrix}\right)}{\det\left(\begin{bmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & -2e^{-2t} \end{bmatrix}\right)} = \frac{e^t t\cos t - 3e^t\sin t}{-3e^{-t}} = \frac{e^{2t}(3\sin t - t\cos t)}{3}.$$

$\boxed{///}$

Cramer 法则对于解2×2 和 3×3 矩阵的问题较为方便.