微积分复习讲座

罗承扬

目 录

contents

知识点	学习目标
数列极限的概念	了解
数列极限的基本性质	理解
单调有界原理、夹挤原理、四则运算定理	运用
Stolz定理	理解
柯西收敛原理、闭区间套定理、确界原理	了解
由数列极限定义的常数e	理解

§ 1. 数列的极限

Def. 数列极限的定义

$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, s.t. 当$n > \mathrm{N}$时,有$|a_n - \mathrm{A}| < \varepsilon$,

则称$\{a_n\}$有极限A,也称$\{a_n\}$收敛到A,

记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \mathrm{A}$ 或 $a_n \to \mathrm{A}\ (n \to \infty)$.

若$\{a_n\}$没有极限,则称$\{a_n\}$发散.

§ 1. 数列的极限

Prop1. 收敛列的极限唯一.

Prop2. 在数列中添加、删除有限项, 或者改变有限项的值, 不改变数列的敛散性与极限值.

Prop3. (收敛列的任意子列具有相同的极限)

$$\lim_{k\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

Corollary.(具有不同极限子列的数列发散.)

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a \neq b = \lim_{k\to\infty} a_{m_k} \Rightarrow \{a_n\}\text{发散}.$$

Ex. $\{(-1)^n\}$发散.

§ 1. 数列的极限

Prop4. 收敛列一定有界.

Question. 有界列是否必为收敛列？ Ex. $\{(-1)^n\}$ 发散.

Prop5. (极限的保序性) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

(1)若$a < b$,则$\exists N$,当$n > N$时有$a_n < b_n$.

(2)若$\exists N$,当$n > N$时有$a_n \le b_n$,则$a \le b$.

§ 1. 数列的极限

求数列极限的工具：单调收敛原理、夹挤原理、四则运算

Prop6. (极限的四则运算) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b.$

(1) $\forall c \in \mathbb{R}, \lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ca;$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b;$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = ab;$

(4) $b \neq 0$时, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{a}{b}.$

§ 1. 数列的极限

求数列极限的工具：单调收敛原理、夹挤原理、四则运算

Prop7. (夹挤原理) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, 且 $\exists n_0, s.t.$

$$a_n \le x_n \le b_n, \quad \forall n > n_0.$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a.$

§ 1. 数列的极限

求数列极限的工具：单调收敛原理、夹挤原理、四则运算

1. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n}$

$3=\sqrt[n]{3^n}\le\sqrt[n]{2^n+3^n}\le 3\sqrt[n]{2}$

Review. (重要极限) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1, \forall a>0$

2. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+2}$

$\left|\dfrac{\sqrt{n}\cos n}{n+2}\right|\le\dfrac{\sqrt{n}}{n+2}$ Review. $\sin x, \cos x$的有界性

§ 1. 数列的极限

求数列极限的工具：单调收敛原理、夹挤原理、四则运算

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n)^2}=0$

$$\frac{1}{4n}=\frac{n}{(2n)^2}\le\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2}\le\frac{n}{(n+1)^2}$$

§ 1. 数列的极限

求数列极限的工具：单调收敛原理、夹挤原理、四则运算

4. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{n}{(2n)^2}$$

$$\frac{n}{n+1}-\frac{n}{2n+1}=\frac{n}{(n+1)(n+2)}+\ldots+\frac{n}{(2n+1)2n}\le$$

$$\frac{n}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{n}{(2n)^2}\le\frac{n}{n(n+1)}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)2n}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^2}+\ldots+\frac{n}{(2n)^2}=\frac{1}{2}.$$

§ 1. 数列的极限

求数列极限的工具：单调收敛原理、夹挤原理、四则运算

Thm.(单调收敛原理)

(1) 单调递增且有上界的数列必收敛;

(2) 单调递减且有下界的数列必收敛.

Question. 单调递增, 无上界的数列?

Ex. $a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{2}{a_{n-1}}\right), a_1=2$, 证明$a_n$收敛.并求极限.

解. 由数学归纳法可得, $a_n\ge 0$

$$\therefore a_n=\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{2}{a_{n-1}}\right)\ge\frac{1}{2}\left(2\sqrt{a_{n-1}\bullet\frac{2}{a_{n-1}}}\right)\ge\sqrt{2}\ ,\forall n\ge 2\quad \because a_1=2\quad \therefore a_n\ge\sqrt{2}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}\left(a_{n-1}+\frac{2}{a_{n-1}}\right)}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a_{n-1}^{\ 2}}\le\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\qquad \therefore a_n\downarrow\ \ge\sqrt{2}$$

$\therefore a_n$有极限, 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)\quad\therefore a=\pm\sqrt{2}$

$\because a_n\ge 0,\therefore$ 舍去负根. $\quad\therefore a=\sqrt{2}\qquad$ 即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\sqrt{2}$

Ex. $a_n \in (0,1), (1-a_n)a_{n+1} > \frac{1}{4}$, 证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

解. $\because (1-a_n)a_n \le \frac{1}{4} < (1-a_n)a_{n+1}$

$\therefore a_n < a_{n+1} \qquad \therefore a_n \uparrow, a_n < 1, \forall n$

$\therefore a_n$收敛, 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

$\because (1-a_n)a_{n+1} > \frac{1}{4}$ 由极限的保序性(不等号两边取极限)

$\therefore (1-a)a \ge \frac{1}{4} \qquad \therefore a - a^2 \ge \frac{1}{4}$

$\therefore a^2 - a + \frac{1}{4} \le 0 \quad \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$

Thm. (*Stolz*定理)

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l} \{b_n\}\text{严格}\uparrow \\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \mathrm{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \mathrm{A};$$

$$(2)\quad \left.\begin{array}{l} \{b_n\}\text{严格}\downarrow \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \mathrm{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \mathrm{A}.$$

Ex. 计算： $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=2$

解. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)=2$

Ex. $a_n \in (0,1), a_{n+1} = a_n(1-a_n)$, 计算$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$和$\lim\limits_{n\to\infty} na_n$

解. $\because a_n \in (0,1), a_{n+1} = a_n(1-a_n) \le a_n$

$\therefore a_n \downarrow \ge 0$

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 在等式$a_{n+1} = a_n(1-a_n)$两边同时取极限, 得到

$a = a(1-a) \quad \therefore a = 0 \quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0. \quad \because a_n \downarrow 0, \therefore a_n \uparrow +\infty$

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{1-a_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \left(1-a_{n-1}\right) = 1.$$

$\because a_{n+1} = a_n(1-a_n), \therefore \dfrac{1}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{a_n(1-a_n)} = \dfrac{1}{a_n} + \dfrac{1}{1-a_n} \quad \therefore \dfrac{1}{a_{n+1}} - \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{1-a_n}$

Def.(Cauchy列)

$\{x_n\}$为Cauchy列

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n > N, p > 0, 有 \left| x_{n+p} - x_n \right| < \varepsilon$$

Thm.(Cauchy收敛原理) 收敛列 $\Leftrightarrow$ Cauchy列.

Thm.(有界收敛定理)若$\{x_n\}$有界,则必然存在收敛子列

Thm.(闭区间套定理) 若闭区间列$[a_n, b_n]$满足条件:

(1) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] (n = 1, 2, \cdots)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$,

则$\exists! \xi \in \mathbb{R}, s.t.\ \xi \in \bigcap\limits_{n\geq 1}[a_n, b_n]; \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \xi.$

知识点	学习目标
函数极限的概念与性质	了解
无穷小的概念与比较	运用
等价无穷小代换	运用

§ 3. 无穷小与无穷大、无穷小的比较

Def.（无穷小量与无穷大量）

(1)若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, 则称$x \to x_0$时, $f(x)$是无穷小量, 记作

$$f(x) \to 0 (x \to x_0);$$

(2)若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, 则称$x \to x_0$时, $f(x)$是无穷大量, 记作

$$f(x) \to \infty (x \to x_0);$$

例：$f(x)=x$, 是x趋于0时的无穷小，不是x趋于1时的无穷小

$f(x)=x(x-1)$, 是x趋于0时的无穷小，也是x趋于1时的无穷小

在谈论$f(x)$是无穷小时，必须指出x趋于谁.

当x趋于x_0时,无穷小量都趋于0, 但是趋于0的速度有所不同

例如 $g(x)=x$, $f(x)=x^2$, 均是x趋于0时的无穷小, 谁趋于0的速度更快?

Def. 设$x \to x_0$时, $f(x)$与$g(x)$都是无穷小量.

(1)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 则称$x \to x_0$时, $f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小量, 记作 $f(x)=o(g(x))\ (x \to x_0)$;

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c \neq 0$, 则称$x \to x_0$时, $f(x)$与$g(x)$是同阶无穷小量;特别地, 当$c=1$时, 称$x \to x_0$时, $f(x)$与$g(x)$是等价无穷小量, 记作 $f(x) \sim g(x)\ \ (x \to x_0)$;

Thm.（等价无穷小替换）

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在, $f(x)$和$h(x)$是等价无穷小$(x\to x_0)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}$

(2)若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$存在, $f(x)$和$h(x)$是等价无穷小$(x\to x_0)$,

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)g(x)$

Proof. 只证(2)　$\because$ $f(x)$和$h(x)$是等价无穷小$(x\to x_0)$, $\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{h(x)}=1$

$$\therefore \lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}h(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{h(x)}\lim_{x\to x_0}h(x)g(x)=\lim_{x\to x_0}h(x)g(x).$$

(1)与(2)完全类似

Thm.(等价无穷小—请记住！)当$x\to 0$时：

(1) $\sin x\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,\quad \arctan x\sim x;$

(2) $1-\cos x\sim \frac{1}{2}x^2;\qquad$ (3) $\ln(1+x)\sim x;$

(4) $e^x-1\sim x,\ a^x-1\sim x\ln a(a>0);$

(5) $(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x.$

问：以下解法是否正确？ ——不是乘法，不可代换，必须先做变形

计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$ $\quad(\because \sin x\sim x,\tan x\sim x)$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^3}=0$

正解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(1-\dfrac{1}{\cos x}\right)}{x^3}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1-\dfrac{1}{\cos x}\right)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\dfrac{1}{\cos x}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos x}(\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

当$x \to x_0$时，若$f(x) \to 0$，则

$$\sin f(x) \sim f(x); \tan f(x) \sim f(x); 1-\cos f(x) \sim \frac{1}{2} f^2(x);$$

$$\arcsin f(x) \sim f(x); \arctan f(x) \sim f(x)$$

——整体代换法

Note.等价无穷小代换需要注意的点

1.可以做整体代换,但是需要保证"整体"是趋于0的

计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x+1)}{x+1}\cancel{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to0}1=1$

$x\to0$时,$(x+1)\to1$.

2.等价无穷小代换是"因子代换",只可以代换乘除法中的因子,不可以代换加减法

计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}$ $\quad(\because \sin x\sim x,\tan x\sim x)$

解: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-\tan x}{x^3}\cancel{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{0}{x^3}=0$

——遇到加减法,一般需要先进行代数变形

Ex. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\sin(1/x)}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$ $\qquad 0/0$

解. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\sin(1/x)}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\sin(1/x)}{2\ln(1+x)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x + x^2\sin(1/x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{2x} + \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(1/x)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{2x} + \lim_{x\to 0} x\sin(1/x) = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}$$

Ex.求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)$

解. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}-1\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 2x}{x^2\cos 2x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1+1-\cos 2x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{3}{2}$$

$\infty-\infty$型

方法:设法转化为$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}\ldots$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}=\frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=1, \lim_{x\to x_0} h(x)=+\infty, \lim_{x\to x_0} g(x)^{h(x)}$$

1^∞

指数－对数变换公式：$g(x)^{h(x)}=e^{h(x)\ln(g(x))}$

Ex. $\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/x^2}$ $\quad\cos x\to 1$, 当$x\to 0$时 $\quad\dfrac{1}{x^2}\to+\infty, x\to 0$时

解.

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos x\right)^{1/x^2}=\lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}$$

下面计算$\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x-1+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

(3) $\ln(1+x)\sim x;\left(x\to 0\right)$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{n} \text{与} \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^{n}+b^{n}}{2}\right)^{\frac{1}{n}}, a>b>0$$

$a^{x}-1\sim x\ln a(a>0);$

$$\text{解}: \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^{n} = \exp\left(\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\right) = \sqrt{ab}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1+b^{\frac{1}{n}}-1}{2}\right) =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1+b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right) + \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{b^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{2}\ln a+\frac{1}{2}\ln b = \ln\sqrt{ab}$$

知识点	学习目标
连续性的概念	理解
不连续点的分类	理解
闭区间上连续函数的性质	运用

§ 4. 函数的连续性和间断点

我们经常用图像来表示函数.

有的函数的图像是连续不断的，像一根“没有断开的线”

有的函数的图像却是断开的，例如$f(x) = [x]$

——函数的连续性

研究方式：先关注函数在某一点处的连续性.

函数在x_0处连续, 也就是其图像在x_0附近“不断”.

用极限语言：当x趋近于x_0时, $f(x)$应当趋近于_______?

Def. (1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, 则称 f 在点 x_0 处连续;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, 则称 f 在点 x_0 处右连续;

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$, 则称 f 在点 x_0 处左连续;

Thm. f 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ f 在点 x_0 处左、右连续.

Note. f 在点 x_0 处连续的几何意义？左连续的几何意义？右连续的几何意义？

Ex. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}, x>0\\ b, x=0\\ \dfrac{1-\cos ax}{x^2}, x<0\end{cases}$ 在$x=0$处连续, 则$a=$ __± 2__, $b=$ __2__.

Def. f在点x_0处不连续, 则称f在点x_0处间断.

下面给出不连续点的分类.

(1)若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,但$f$在点$x_0$处无定义或$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$,

则称x_0为f的可去间断点.

Ex. $x_0=0$是$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$可去间断点.

(2)若$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$存在,但$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$,

则称x_0为f的跳跃间断点.可去间断点与跳跃间断点统称为第一类间断点.

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$或 $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$至少有一个不存在,则称$x_0$为 f的第二类间断点.

Ex. $F(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在0处即不左连续, 又不右连续, 左、右极限均不存在(第二类间断点).

§ 6. 闭区间上的连续函数的性质

Def. 若f在(a,b)上任一点处连续, 则称f在(a,b)上连续,
记作$f \in C(a,b)$.

Def. 若$f \in C(a,b)$, 且f在点a右连续, 在点b左连续, 则称f在$[a,b]$上连续, 记作$f \in C[a,b]$.

Thm.(零点定理) $f \in C[a,b]$, $f(a)\cdot f(b) < 0$, 则$\exists \xi \in (a,b)$, $s.t.$ $f(\xi) = 0$.

Thm.(零点定理) $f \in C[a,b], f(a)\cdot f(b)<0$, 则 $\exists \xi \in (a,b), s.t. f(\xi)=0.$

Question. $f(x) \in C[a,b], f(a)\cdot f(b)<0,$

(1)是否能保证$[a,b]$上函数的零点唯一？

(2)给$f(x)$加上什么条件，就可以保证$[a,b]$上函数的零点唯一？

Ex. $f(x)=x^n+nx-1$, n为正整数

(1)求证: $f(x)$在$[0,1]$上有且只有一个零点;

(2)记$f(x)$在$[0,1]$上的零点为x_n(显然,这个零点和n的取值有关)

试计算$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$和$\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$

解(2)

$$f(0)=-1,\quad f(1)=n$$

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^n},\quad \Rightarrow 0\le x_n\le\frac{1}{n}\qquad \therefore \lim_{n\to\infty} x_n=0$$

$$f(0)=-1,\quad f(1)=n$$

$$\because x_n{}^n+nx_n-1=0\qquad 1-\frac{1}{n^n}\le nx_n=1-x_n^n\le 1\qquad \therefore \lim_{n\to\infty} nx_n=1$$

Thm.(介值定理) $f\in C[a,b], f(a)<f(b)$,则$\forall c\in(f(a),f(b))$,

$\exists\xi\in(a,b), s.t. f(\xi)=c.$

Proof.令$g(x)=f(x)-c$, 则$g\in C[a,b], g(a)<0<g(b).$

由前面的定理,$\exists\xi\in(a,b), s.t. g(\xi)=0,\quad f(\xi)=c.$□

Ex.$f\in C[a,b]$,

求证:$\forall x_1,\dots,x_n\in[a,b], \exists y\in[a,b], s.t. f(y)=\dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}$

Proof. 不妨设$f(x_1)\le f(x_2)\le\dots\le f(x_n)$,

$$\because f(x_1)\le\frac{f(x_1)+\dots+f(x_n)}{n}\le f(x_n)$$

$$\therefore \exists y\text{介于}x_1,x_n\text{之间}, s.t. f(y)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)}{n}$$

Thm.(最大最小值定理) $f \in C[a,b]$,则f在$[a,b]$上可以取到最大、最小值, 即$\exists \xi,\eta \in [a,b], s.t.$

$$f(\xi)=\max_{a\le x\le b}\{f(x)\},\quad f(\eta)=\min_{a\le x\le b}\{f(x)\}.$$

Ex. $f \in C[a,b], \forall x \in [a,b], \exists y \in [a,b], s.t. \left|f(y)\right| \le \frac{1}{2}\left|f(x)\right|$

证明: $f(x)$有零点.

Proof. 假设$f(x)$无零点.由于$f(x)$为连续函数, 故 $f(x)$不变号,

不失一般性, 设$f(x)>0$

$\because$ f在$[a,b]$上存在最大值和最小值

设 $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(x_0)$ $\exists y_0, s.t. \left|f(y_0)\right| \le \frac{1}{2}\left|f(x_0)\right| < \left|f(x_0)\right|$

——与$f(x)$在$x = x_0$处取得$[a,b]$上的最小值矛盾

知识点	学习目标
导数的概念性质	运用
高阶导数的求算	运用
隐函数求导和参数函数求导	运用

Def.（导数）

若极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，称 $f(x)$ 在 x_0 可导

称 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记作 $f'(x_0)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Question. $\underbrace{\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}_{\text{割线斜率}}$ 与 $\underbrace{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}_{\text{切线斜率}}$ 的几何意义是什么？

Note. 导数的值和所研究的点 x_0 有关，反映的是 x_0 附近函数值的增长速度

Def. （左、右导数）

$$f'_-(x_0) \triangleq \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0};$$

$$f'_+(x_0) \triangleq \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Thm. 可导 $\Leftrightarrow$ 左右导数存在且相等

Ex. $f(x)=\begin{cases}|x|^{a}, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$, $a>0$.已知$f(x)$在0处可导，求a的取值范围.

Answer.$a>1$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|^{a}}{x}$ 存在

1° $a>1$ $\quad \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{|x|^{a}}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{x^{a}}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}x^{a-1}=0.$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|x|^{a}}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{(-x)^{a}}{x}=-\lim_{x\to 0-}\frac{(-x)^{a}}{-x}=-\lim_{x\to 0-}(-x)^{a-1}=0.$$

2° $a<1$, 左/右导数不存在

3° $a=1$, 左导数$=-1$, 右导数$=1$.

Thm. (导数与四则运算) f,g 在 x_0 可导, $c\in\mathbb{R}$, 则

(1) $(f+g)'(x_0)=\quad f'(x_0)+g'(x_0)$;

(2) $(cf)'(x_0)=\quad cf'(x_0)$;

(3) $(f\times g)'(x_0)=\quad f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$; (前导后不导+后导前不导)

(4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\quad \dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$. $\left(\dfrac{\text{分子求导*分母}-\text{分母求导*分子}}{\text{分母}^2}\right)$

Thm.(复合函数求导的链式法则)$\varphi(x)$在x_0可导, $f(u)$在

$u_0=\varphi(x_0)$可导,则$h(x)=f(\varphi(x))$在x_0可导, 且

$$h'(x_0)=f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0).$$

$c'=0,$ $\qquad$ $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},$

$(\sin x)'=\cos x,$ $\qquad$ $(\cos x)'=-\sin x,$

$(\tan x)'=\sec^2 x,$ $\qquad$ $(\cot x)'=-\csc^2 x,$

$(\sec x)'=\sec x\tan x,$ $\qquad$ $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$ $\qquad$ $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\arccos x)'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$ $\qquad$ $(\operatorname{arc}\cot x)'=\dfrac{-1}{1+x^2}$

Ex. $f(x)=u(x)^{v(x)}, u(x)>0, u(x), v(x)$可导，求$f'(x)$.

解. $f'(x)=\left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)'=e^{v(x)\ln u(x)}\cdot\left(v(x)\ln u(x)\right)'$

$$=u(x)^{v(x)}\cdot\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

$$=u(x)^{v(x)}\ln u(x)v'(x)+v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x).\square$$

Ex. $f(x)=f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$, 求 $f'(x)$.

解: $\ln|f(x)|=\ln|f_1(x)|+\ln|f_2(x)|+\cdots+\ln|f_n(x)|$,

两边对 x 求导, 得

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\cdots+\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}.$$

$$f'(x)=f(x)\left(\frac{f_1'(x)}{f_1(x)}+\frac{f_2'(x)}{f_2(x)}+\cdots+\frac{f_n'(x)}{f_n(x)}\right).$$

$$=f_1'f_2\ldots f_n+f_1f_2'\ldots f_n+\ldots+f_1f_2\ldots f_n' \square$$

Remark. 多个因子连乘的函数求导时先取对数再两端求导可简化计算.

§ 3. 高阶导数

Thm. 设$f(x)$与$g(x)$在点x处有n阶导数,$c\in\mathbb{R}$,则

(1)$(f+g)^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$;

(2)$(cf)^{(n)}(x)=c\cdot f^{(n)}(x)$;

Ex. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, 求$y^{(10)}$.

解. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{2+x-1}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{2-(1-x)}{\sqrt{1-x}}=\dfrac{2}{\sqrt{1-x}}-\sqrt{1-x}$

$$=2(1-x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$y^{(10)}=\left(2(1-x)^{-\frac{1}{2}}-(1-x)^{\frac{1}{2}}\right)^{(10)}$$

$$=\left(2(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)^{(10)}-\left((1-x)^{\frac{1}{2}}\right)^{(10)}$$

$$=\left(2\left(\frac{1}{2}\right)\ldots(\frac{1}{2}+9)(1-x)^{-\frac{1}{2}-10}\right)+\left(\left(\frac{1}{2}\right)\ldots(\frac{1}{2}+9)(1-x)^{\frac{1}{2}-10}\right)$$

Review. $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$$(fg)''(x)=\big(f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\big)'$$

$$=\big(f'(x)g(x)\big)'+\big(f(x)g'(x)\big)'$$

$$=f''(x)g'(x)+f'(x)g'(x)+f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$$

$$=f''(x)g'(x)+2f'(x)g'(x)+f(x)g''(x)$$

Thm.(Leibniz公式)设$f(x)$与$g(x)$在点x处有n阶导数,$c\in\mathbb{R}$,则

$$(f\cdot g)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

Ex. $f(x)=x^2e^{2x}$，求$f(x)$的n阶导数

Question. Leibniz公式适合怎样的场景？

解. $f^{(n)}(x)=\left(x^2e^{2x}\right)^{(n)}$

$$=x^2\left(e^{2x}\right)^{(n)}+C_n^1\left(x^2\right)'\left(e^{2x}\right)^{(n-1)}+C_n^2\left(x^2\right)''\left(e^{2x}\right)^{(n-2)}+$$

$$C_n^3\left(x^2\right)^{(3)}\left(e^{2x}\right)^{(n-3)}+\ldots+C_n^n\left(x^2\right)^{(n)}e^{2x}$$

$$=x^2\left(e^{2x}\right)^{(n)}+C_n^1\left(x^2\right)'\left(e^{2x}\right)^{(n-1)}+C_n^2\left(x^2\right)''\left(e^{2x}\right)^{(n-2)}$$

$$=2^n x^2e^{2x}+n\times 2x\times 2^{n-1}e^{2x}+\frac{n(n-1)}{2}\times 2x\times 2^{n-2}e^{2x}$$

$$=2^n x^2e^{2x}+nx2^n e^{2x}+n(n-1)x2^{n-2}e^{2x}$$

Ex. $y=(\arcsin x)^2$, 求$y^{(n)}(0)$.

Ex. $y=\arctan x$, 求$y^{(n)}(0)$.

解： $y'=\dfrac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sqrt{1-x^2}\,y'=2\arcsin x$,

两边对x求导,得 $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}y'+\sqrt{1-x^2}\,y''=\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$,

两边对x求n阶导,得 $xy'+(x^2-1)y''=-2$,

$$xy^{(n+1)}+ny^{(n)}+(x^2-1)y^{(n+2)}+2nxy^{(n+1)}+n(n-1)y^{(n)}=0.$$

令$x=0$,得 $y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$, $y(0)=y'(0)=0, y''(0)=2.$

故 $$y^{(n)}(0)=\begin{cases}0 & n=2k-1,\\ 2^{2k-1}\left((k-1)!\right)^2, & n=2k.\end{cases}$$ □

Ex. $x^2+xy+y^2=1$确定了隐函数$y=y(x)$，求$y''(x)$.

解： 视$x^2+xy+y^2=1$中$y=y(x)$，两边对x求导，得

$$2x+y+xy'+2yy'=0,\quad y'=-\frac{2x+y}{x+2y}.$$

于是

$$y''=-\frac{(2x+y)'(x+2y)-(2x+y)(x+2y)'}{(x+2y)^2}$$

$$=-\frac{(2+y')(x+2y)-(2x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2}$$

$$=\frac{3(xy'-y)}{(x+2y)^2}=\frac{-6}{(x+2y)^3}.\square$$

Ex. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$，求$y'(x), y''(x)$.

解：$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

$$y''(x) = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{\cos t(1-\cos t) - \sin^2 t}{(1-\cos t)^2}}{a(1-\cos t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sin t}{1-\cos t}\right)}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{-1}{a(1-\cos t)^2}. \square$$

知识点	学习目标
微分中值定理	运用
L’Hospital 法则	运用
Taylor公式	运用

Thm.(Rolle) $f\in C[a,b]$, f在(a,b)可导.若$f(a)=f(b)$,则存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)=0$.

Thm.(Lagrange) $f\in C[a,b]$, f在(a,b)可导,则$\exists\xi\in(a,b)$, s.t.

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Thm.(Cauchy) $f,g\in C[a,b]$, f,g在(a,b)可导,且$\forall t\in(a,b)$,有$g'(t)\neq 0$. 则存在$\xi\in(a,b)$, s.t. $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

中值定理的应用：

- 证明不等式
- 分析某些函数的零点存在性
- 含有中值的证明题

Ex. 证明: $|\sin x - \sin y| \le |x - y|, \forall x, y;$

证. $\left|\dfrac{\sin x - \sin y}{x - y}\right| = |\cos\xi| \le 1$

Ex. 证明: 若 $p > 1, x \ge 0$

$(1)\ px^{p-1} \le (x+1)^p - x^p \le p(x+1)^{p-1};(2)\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^{p-1} + 2^{p-1} + \ldots + n^{p-1}}{(n+1)^p} = ?$

证. $(1)(x+1)^p - x^p = \dfrac{(x+1)^p - x^p}{1} = p(x+\xi)^{p-1}, 0 < \xi < 1$

$\therefore\ px^{p-1} \le p(x+\xi)^{p-1} \le p(x+1)^{p-1}$

Ex. 证明:若$p>1, x\ge 0$

(1) $px^{p-1}\le (x+1)^p - x^p \le p(x+1)^{p-1}$; (2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^{p-1}+2^{p-1}+\ldots+n^{p-1}}{(n+1)^p}=?$

证. (2) $\because\ px^{p-1}\le (x+1)^p - x^p \le p(x+1)^{p-1}$;

$$\therefore \frac{x^p-(x-1)^p}{p}\le x^{p-1}\le \frac{(x+1)^p-x^p}{p}\quad (p>1, x\ge 1)$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n}\frac{x^p-(x-1)^p}{p}\le \sum_{x=1}^{n}x^{p-1}\le \sum_{x=1}^{n}\frac{(x+1)^p-x^p}{p}$$

$$\therefore \frac{n^p}{p}\le \sum_{x=1}^{n}x^{p-1}\le \frac{(n+1)^p-1^p}{p}$$

$$\therefore \frac{n^p}{p(n+1)^p}\le \frac{\sum_{x=1}^{n}x^{p-1}}{(n+1)^p}\le \frac{(n+1)^p-1^p}{p(n+1)^p}\qquad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{x=1}^{n}x^{p-1}}{(n+1)^p}=\frac{1}{p}$$

Ex. $x^4+2x^3+6x^2-4x-5=0$恰有两个不同的实根.

Proof. 令$f(x)=x^4+2x^3+6x^2-4x-5$,则

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty.$$

于是$\exists a<0<b, s.t. f(a)>0, f(b)>0$. 而$f(0)=-5<0$,

由介值定理,$f(x)=0$至少有两个相异实根.

假设$f(x)=0$至少有3个相异实根. 由Rolle定理, $f'(x)$至少有2个相异实根, $f''(x)$至少有1个实根. 但

$$f''(x)=12x^2+12x+12>0,$$

矛盾.故$f(x)=0$恰有两个相异实根.□

Ex. f在$[a,c]$上连续, 在$(a,b)\cup(b,c)$上可导,

求证$\exists\xi\in[a,c], s.t. \left|\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|\le|f'(\xi)|$

证明:

在$[a,b]$上用一次微分中值定理: $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi_1)$

在$[b,c]$上用一次微分中值定理: $f(c)-f(b)=(c-b)f'(\xi_2)$

$$\left|\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|=\left|\frac{f(c)-f(b)}{c-a}+\frac{f(b)-f(a)}{c-a}\right|=\left|\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\frac{c-b}{c-a}+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{b-a}{c-a}\right|$$

$$=\left|f'(\xi_1)\frac{c-b}{c-a}+f'(\xi_2)\frac{b-a}{c-a}\right|\le\frac{c-b}{c-a}|f'(\xi_1)|+\frac{b-a}{c-a}|f'(\xi_2)|$$

$$\le\left(\frac{c-b}{c-a}+\frac{b-a}{c-a}\right)\max(|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|)=\max(|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|)$$

Ex. （构造函数法）

$$f \in C^2[0,1],\ f(0)=f(1),\text{证明}:\exists\xi\in(0,1),\ s.t.\ \xi f''(\xi)+2f'(\xi)=0$$

$$(x^2 f'(x))' = 2xf'(x) + x^2 f''(x)$$

$$g(x) = x^2 f'(x)$$

$$g(0) = 0$$

$$\because f(0)=f(1),\therefore f'(c)=0, c\in(0,1)$$

$$\therefore g(c) = c^2 f'(c) = c^2\times 0 = 0$$

$$\therefore g(c) = g(0),\therefore \exists\xi, s.t. g'(\xi) = 2\xi f'(\xi) + \xi^2 f''(\xi) = 0$$

Ex. $f(x)\in C^1[a,b], ab>0$, 证明:存在ξ, s.t. $\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$

$f(\xi)-\xi f'(\xi)$会由谁求导产生?

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}$$

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$