《线性代数》作业 11

截止时间：12 月 10 日 18:00。注明姓名，学号和组号。
纸质。请写出完整的计算等解题过程。提交于课堂或近春园西楼入口处我的信箱。

1. 证明：如果 $(\lambda, \boldsymbol{x})$ 是 A 的特征对，则 $(f(\lambda), \boldsymbol{x})$ 是 $f(A)$ 的特征对，其中 $f(x)$ 是一任意多项式。

2. 设 n 阶矩阵 A 满足 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$，其中 $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$.
   (a) 设 $(\mu, \boldsymbol{w})$ 是 A 的一个特征对，且 $\lambda \neq \mu$. 证明：$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ 正交。
   (b) 证明：对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交。

3. 设方阵 A, B 可交换，λ 是 A 的一个特征值，V_λ 是 A 关于特征值 λ 的特征子空间。证明：对任意 $\boldsymbol{x} \in V_\lambda$, 都有 $B\boldsymbol{x} \in V_\lambda$. 当 A, B 不可交换时，结论是否成立？

4. 设方阵 $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}$.
   (a) 计算 A 的特征值。
   (b) 交换 A 的两行，特征值是否不变？

5. 给定 m 阶方阵 A_1, n 阶上三角矩阵 A_2 和 $m \times n$ 矩阵 B. 证明：如果 A_1 和 A_2 没有相同特征值，关于 $m \times n$ 矩阵 X 的矩阵方程：
$$A_1X - XA_2 = B$$
   有唯一解。
   注：上述矩阵方程称为 **Sylvester 方程**，在控制论中有不少应用。A_2 可取为一般 n 阶方阵。

6. (Pavel Grinfeld) 利用谱分解计算 $\begin{bmatrix} 110 & 55 & -164 \\ 42 & 21 & -62 \\ 88 & 44 & -131 \end{bmatrix}^{2017}$.

7. 证明:对反射矩阵 $H_{\boldsymbol{v}} = I_n - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\|\boldsymbol{v}\| = 1$, 存在正交矩阵 Q, 使得 $Q^{\mathrm{T}}H_{\boldsymbol{v}}Q = \mathrm{diag}(-1, 1, \dots, 1)$.

8. 计算下列两对矩阵的特征值，并判断是否可以对角化.

(a) $A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 10.001 & 1 \\ 0 & 0 & 10.002 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ 0.001 & & & 0 \end{bmatrix}$.

注：微小扰动可能会大幅改变矩阵/线性系统的性质。数学建模/线性系统的设计过程中，有时会希望其稳定性较强，即在微小扰动下，系统的性质改变会较小或可控，以一种平衡或理想状态运行。另一种情形，会希望线性系统对微小扰动较为敏感，输出会显著放大扰动，例如仪器灵敏度，小概率事件警报问题等。稳定性在不同应用场景下有相应的数学表达或判断方法。

9. 求实对称矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ 的谱分解。

因为这个特征多项式求根比较繁琐，可以选择跳过计算，文字说明谱分解的过程。或者按照下列步骤尝试求出一个近似的谱分解，保留小数点后三位。这个问题也可能无解。

i. 使用数学软件等工具求出特征值的近似解。$\lambda_1 \approx 4.519, \lambda_2 \approx -1.910, \lambda_3 \approx 1.391$.

ii. 求出对应的特征向量的近似值。需要写出特征向量对应的齐次线性方程组，可使用计算器辅助计算。

iii. 做必要的简单修正，例如将三个特征向量正交化，保证特征向量之间的正交性。

iv. 利用 i 和 iii 的结果构造出 Q 和 Λ，得到 A 的一个近似谱分解。

v. 计算 $Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$，和原始矩阵 A 做比较。

注：使用计算软件或搜索多项式求根的网站，例如：

- https://www.wolframalpha.com/
- https://www.mathportal.org/calculators/polynomials-solvers/polynomial-roots-calculator.php
- http://www.hvks.com/Numerical/websolver.php

10. 记 V_λ 为矩阵关于特征值 λ 的特征子空间。设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值是 0, 3, 3. 且 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in V_{\lambda=0}$, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in V_{\lambda=3}$. 求矩阵 A.

11. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3. 且 $\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(A)$，求矩阵 A 及其谱分解。

12. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 计算满足下列条件的 b 的取值范围。

    (a) A 不可逆。 (b) A 可以正交对角化。 (c) A 不可对角化。

13. 计算下列矩阵及其特征值。哪些是对称矩阵？哪些矩阵的特征值是 ± 1？由此观察正交相似的特殊性。

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

    (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

    (c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.