习题课 2021.12.1

补充: 伴随矩阵的秩

$$\mathrm{rank}(A^*) = \begin{cases} n & \mathrm{rank}(A) = n \\ 1 & \mathrm{rank}(A) = n-1 \\ 0 & \mathrm{rank}(A) < n-1 \end{cases}$$

由于 $AA^* = \det(A) I$

所以 ~~ϕ~~ $\mathrm{rank}(A) = n$ 时. $\mathrm{rank}(A^*) = n$

为了说明后两条. 先证一个引理.

引理: $\mathrm{rank}(A) = r$. 则①A的任意大于 r 阶的子式为0 ②存在A的 r 阶子式不为0.

①记 $A\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_k \\ j_1 \cdots j_k \end{pmatrix}$ $k > r$ 为 A的 k 阶子式

若其不为0. 则 A的 $i_1, \cdots i_k$ 行 ($j_1 \cdots j_k$ 列) 线性无关. 于是 $\mathrm{rank}(A) \geq k > r$ 矛盾.

②由于 $\mathrm{rank}(A) = r$. 所以存在 A的某 r 行线性无关. 取出, 得到一个 $r \times n$ 的矩阵, 该矩阵秩为 r. 那么存在 r 列线性无关. 再取出, 得一个 $r \times r$ 矩阵. 该矩阵在原矩阵中对应的行、列组成的子式不为0.

引理证毕.

$\mathrm{rank}(A) = n-1$ 时. 由秩不等式 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) \leq \mathrm{rank}(AB) + n$

我们知 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(A^*) \leq n$ 于是 $\mathrm{rank}(A^*) \leq 1$

又由引理② . $\mathrm{rank}(A^*) = 1$.

$\mathrm{rank}(A) < n-1$ 时. 由引理① , ~~rank~~ $A^* = 0$. 故 $\mathrm{rank}(A^*) = 0$

练习 5.3.13. 证明 $A=\begin{bmatrix} I_r & \\ B & -I_{n-r}\end{bmatrix}$ 可对角化.

$$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda I_r - I_r & \\ -B & \lambda I_{n-r}+I_{n-r}\end{vmatrix} = (\lambda-1)^r(\lambda+1)^{n-r}$$

所以 A 有特征值 1(代数重数 r), -1(代数重数 $n-r$).

考察特征子空间.

$$I_n - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B & 2I_{n-r}\end{bmatrix} \qquad \operatorname{rank}(I_n-A)=n-r$$

所以 $\dim(N(I_n-A)) = n-(n-r)=r$

类似地 $\dim(N(-I_n-A)) = n-r$.

于是特征值代数重数等于几何重数. 故可对角化.

练习 5.4.2, 对下列矩阵 A, B. 求 X 使得 $A=XBX^{-1}$

1. $A=MN$, $B=NM$, 且 M 可逆

令 $X=M$. 则 $XBX^{-1}=M(NM)M^{-1}=MN=A$.

2. $A=\begin{bmatrix} MN & 0 \\ N & 0\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N & NM\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} I_m & M \\ 0 & I_n\end{bmatrix} B \begin{bmatrix} I_m & -M \\ & I_n\end{bmatrix} = A. \quad 令 X=\begin{bmatrix} I_m & M \\ 0 & I_n\end{bmatrix}$$

(思路是尝试将不出现的 NM 消去)

3. $A=\begin{bmatrix} M & -N \\ N & M\end{bmatrix}$ $\quad B=\begin{bmatrix} M+iN & \\ & M-iN\end{bmatrix}$

从形式上我们容易知道应通过加减~~消去~~消成单项

$$\begin{bmatrix} I_m & -\frac{i}{2}I_m \\ & I_m \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} I_m & \frac{i}{2}I_m \\ & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M+iN & -N \\ & M-iN \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & \\ -iI_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M+iN & -N \\ & M-iN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & \\ iI_m & I_m \end{bmatrix} = A.$$

故取 $X = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -\frac{i}{2}I_m \\ & I_m \end{bmatrix}$ 即可.

补充:

对 n 阶方阵 A、B、C、D 有

$$AC = CA \Longleftrightarrow \det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det(AD - CB)$$

~~A可逆时~~

引理1：行列式关于分量连续

引理2：A可逆时 $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det A \det(D - CA^{-1}B)$

证：$AC = CA$ 时，若A可逆，则 $\det\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det A \det(D - CA^{-1}B)$

$$= \det(AD - ACA^{-1}B)$$

$$= \det(AD - CB).$$

A不可逆时 存在 $\delta > 0$，$t \in (0, \delta)$ 时，$A + tI$ 可逆

从而 $\det\left(\begin{bmatrix} A+tI & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = \det((A+tI)D - CB)$，令 $t \to 0$ 即有结论成立.

充分性 计算过程返回即可.

习题课 2021.12.1

练习 5.2.11

证明：实对称矩阵属于不同特征值的实特征向量正交.

设 $\lambda_i \in \mathbb{R}$ 为 A 的特征值. 对应特征向量 x_i. $i=1,2$.

则 $\cancel{\lambda_1(x_1, x_1)}$

$$\lambda_1(x_1^T x_2) = (\lambda_1 x_1)^T x_2 = (Ax_1)^T x_2 = x_1^T A^T x_2 = x_1^T A x_2$$

$$= x_1^T(Ax_2) = x_1^T(\lambda_2 x_2) = \lambda_2 x_1^T x_2$$

于是 $(\lambda_1-\lambda_2)x_1^T x_2 = 0$

由于 $\lambda_1-\lambda_2 \neq 0$、所以 $x_1^T x_2 = 0$.

练习 5.2.13.

对方阵 A, 若多项式 $f(x)$ 满足 $f(A)=0$, 则对 A 的特征值 λ

证明 $f(\lambda)=0$

由于 λ 为 A 的特征值. 所以存在 $x\neq 0$, $Ax=\lambda x$. $\cancel{x\neq 0}$

于是 $A^k x = \lambda^k x$.

设 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$

则 $f(A)x = (a_0 I + a_1 A + \cdots + a_m A^m)x = (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m \lambda^m)x = f(\lambda)x$

由于 $f(A)=0$, 所以 $f(\lambda)x = 0$

而 $x \neq 0$

所以 $f(\lambda)=0$

练习 5.2.14.

A, B 可交换. λ_0 为 A 的一个特征值. V_{λ_0} 为 λ_0 的特征子空间.. 证明 V_{λ_0} 为B的不变子空间 ~~在B下不变~~.

$\forall x_0 \in V_{\lambda_0}$. $\quad A(Bx_0) = B(Ax_0) = B(\lambda_0 x_0) = \lambda_0 Bx_0$.

说明 ~~B为~~ $Bx_0 \in V_{\lambda_0}$.

练习 5.2.19.

如果复矩阵 A, B 可交换. 则 A, B 有公共的特征向量.

证: ~~由~~ (其实由 5.2.14 可直接得出此结论. 只需要将 B 视为 V_{λ_0} 上的线性变换即可)

这里采用构造法

设 x 为 A 的特征向量. 则对 $\forall k \in \mathbb{N}$.. $B^k x$ 也为 A 的特征向量.

考察子空间 $\mathrm{span}(x, Bx, \cdots B^k x)$ 满足 $x, Bx, \cdots B^k x$ 线性无关且

~~维数为 k+1~~ $B^{k+1}x \in \mathrm{span}(x, \cdots, B^k x)$., 则此时该空间中元素都为 A 的特征向量.

于是 $B[x, Bx, \cdots, B^k x] = [x, Bx, \cdots, B^k x] \begin{bmatrix} 0 & & & & & l_0 \\ 1 & 0 & & & & l_1 \\ & 1 & 0 & & & l_2 \\ & & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 & l_{k-1} \\ & & & & 1 & l_k \end{bmatrix}$

$\overset{d}{=} [x, Bx, \cdots B^k x] M$.

设 M 有特征向量 $y = \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$ 满足 $My = \lambda y$.

则对 $\mathrm{span}(x, Bx, \cdots B^k x)$ 中的向量 $\alpha = y_0 x + y_1 Bx + \cdots + y_k B^k x$

我们有 $B\alpha = B[x, Bx, \cdots B^k x] \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix} = [x, Bx, \cdots B^k x] My$

$= \lambda [x, Bx, \cdots B^k x] \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_k \end{bmatrix}$

此即 A, B 的公共特征向量.