练习2.1.8 （101页）

设 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解，证明：

1. $R(A)=R([A,\vec{b}])$　　2. $N(A^T)=N\left(\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\right)$

证：1. 若 $\vec{y}\in R(A)$，则存在 $\vec{x}$ 满足 $A\vec{x}=\vec{y}$

令 $\vec{x'}=\begin{bmatrix}\vec{x}\\0\end{bmatrix}$，则 $[A\ \ b]\vec{x'}=[A\ \ \vec{b}]\begin{bmatrix}\vec{x}\\0\end{bmatrix}=A\vec{x}=\vec{y}$

于是 $\vec{y}\in R([A\ \vec{b}])$

此即 $R(A)\subseteq R([A\ \vec{b}])$

若 $\vec{y}\in R([A,\vec{b}])$，则存在 $\vec{x}=\begin{bmatrix}\vec{x_1}\\k\end{bmatrix}$ 满足 $[A\ \vec{b}]\begin{bmatrix}\vec{x_1}\\k\end{bmatrix}=A\vec{x_1}+k\vec{b}=\vec{y}$

~~又因为 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解~~ 又因为存在 $\vec{x_0}$ 使得 $A\vec{x_0}=\vec{b}$，所以 $\vec{y}=A\vec{x_1}+k\vec{b}=A\vec{x_1}+kA\vec{x_0}$

令 $\vec{x_2}=\vec{x_1}+k\vec{x_0}$，则有 $\vec{y}=A(\vec{x_1}+k\vec{x_0})=A\vec{x_2}$

于是 $\vec{y}\in R(A)$. 此即 $R([A\ \vec{b}])\subseteq R(A)$

于是 $R(A)=R([A\ \vec{b}])$

2. 设 $\vec{x}\in N\left(\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\right)$，则 $\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\vec{x}=\begin{bmatrix}A^T\vec{x}\\ \vec{b}^T\vec{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{0}\\0\end{bmatrix}$

于是 $A^T\vec{x}=\vec{0}$. 此即 $\vec{x}\in N(A^T)$. 于是 $N\left(\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\right)\subseteq N(A^T)$.

若 $\vec{x}\in N(A^T)$，则 $A^T\vec{x}=\vec{0}$. 又因为存在 $\vec{x_0}$ 满足 $A\vec{x_0}=\vec{b}$

所以 $\vec{b}^T=x_0^TA^T$，所以

$$\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\vec{x}=\begin{bmatrix}A^T\vec{x}\\ \vec{b}^T\vec{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^T\vec{x}\\ x_0^T(A^T\vec{x})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{0}\\0\end{bmatrix}$$

于是 $\vec{x}\in N\left(\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\right)$ 所以 $N(A^T)\subseteq N\left(\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\right)$. 综上 $N(A^T)=N\left(\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}\end{bmatrix}\right)$

练习2.1.14　设$\mathbb{R}^n$中的向量组$\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}$线性无关，A为n阶可逆矩阵.
求证：$A\vec{a_1}, A\vec{a_2},\cdots,A\vec{a_n}$ 线性无关.

证：设 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 满足
$$k_1A\vec{a_1}+k_2A\vec{a_2}+\cdots+k_nA\vec{a_n}=\vec{0}$$
于是 $A(k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+\cdots+k_n\vec{a_n})=\vec{0}$
由于A可逆．所以 $k_1\vec{a_1}+k_2\vec{a_2}+\cdots+k_n\vec{a_n}=\vec{0}$
由于 $\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}$ 线性无关，所以 $k_1=\cdots=k_n=0$
此即 $A\vec{a_1},A\vec{a_2},\cdots,A\vec{a_n}$ 线性无关.

补充：事实上，仅需要A为一个线性单射即可.
特别地，若 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，则 $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$． A单 $\Leftrightarrow$ A的列向量线性无关

~~利用这一性质可解决2.1.13.~~ ~~2.1.14~~ 2.1.14说2.1.13是它的特殊情况．似乎是不对的.
记 $\vec{b_1}=\vec{a_1}$．$\vec{b_2}=\vec{a_1}+\vec{a_2},\cdots,\vec{b_s}=\vec{a_1}+\cdots+\vec{a_s}$
则
$$[\vec{b_1}\ \vec{b_2}\cdots\vec{b_s}]=[\vec{a_1}\ \vec{a_2}\cdots\vec{a_s}]\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\&1&1&\cdots&1\\&&1&\cdots&1\\&&&\ddots&\vdots\\&&&&1\end{bmatrix}$$
设 $k_1\vec{b_1}+\cdots+k_s\vec{b_s}=\vec{0}$
则 $[\vec{b_1}\cdots\vec{b_s}]\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_s\end{bmatrix}=\vec{0}$　即 $[\vec{a_1}\ \vec{a_2}\cdots\vec{a_s}]\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&\cdots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_s\end{bmatrix}=\vec{0}$

若$A=(a_{ij})$可逆．则我们知 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$．即 $\vec{b_1},\cdots,\vec{b_s}$ 线性无关.

练习2.1.18 证明：对任意的 $\mathbb{R}^m$ 的非平凡子空间 M, N，都有 $M\cup N\neq\mathbb{R}^m$

证：不妨假设 M, N 无包含关系，否则结论自然成立。

之后使用反证法。假设 $\mathbb{R}^m=M\cup N$，~~于是~~

由于 M, N 无包含关系，则存在

$x\in M$ 且 $x\notin N$

$y\in N$ 且 $y\notin M$。

考虑向量 $x+y$，则 $x+y\in\mathbb{R}^m=M\cup N$

于是 $x+y\in M$ 或 $x+y\in N$。

若 $x+y\in M$，则 $y=x+y-x\in M$ 矛盾。

若 $x+y\in N$，则 $x=x+y-y\in N$ 矛盾。

因此 $M\cup N\neq\mathbb{R}^m$。

[注] 事实上，大家可以证明任意有限个真子空间的并均无法充满 $\mathbb{R}^m$。

练习2.1.19：M, N 为 $\mathbb{R}^m$ 两个子空间，定义集合

$$M+N:=\{\vec{m}+\vec{n}\mid\vec{m}\in M,\ \vec{n}\in N\}$$

1. $M+N$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的子空间（略，直接按定义验证即可）
2. $M\cap N$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的子空间（略，直接按定义验证即可）。
3. $(M+N)\cap W=(M\cap W)+(N\cap W)$ 不正确。

例如 $M=\left\{k\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\middle|k\in\mathbb{R}\right\}$ $N=\left\{k\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\middle|k\in\mathbb{R}\right\}$ $W=\left\{k\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\middle|k\in\mathbb{R}\right\}$

则 $(M+N)\cap W=\mathbb{R}^2\cap W=W$

$(M\cap W)+(N\cap W)=\{\theta\}+\{\theta\}=\{\theta\}$.

4. $(M\cap N)+W=(M+W)\cap(N+W)$ 不正确.

仍采用(3)中的例子.

$M\cap N=\{\theta\}$. $(M\cap N)+W=W$

$M+W=\mathbb{R}^2$. $N+W=\mathbb{R}^2$. 则 $(M+W)\cap(N+W)=\mathbb{R}^2$.

练习 2.1.21.

1. $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. $B\in\mathbb{R}^{m\times s}$. 证明 $R(A)+R(B)=R(C)$，其中 $C=[A\ \ B]$
2. $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{l\times n}$ 证明 $N(A)\cap N(B)=N(D)$ 其中 $D=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$

证：1. 设 $\vec{y}\in R(C)$，则存在 $\vec{x_1}$, $\vec{x_2}$ 满足 $\vec{y}=[A\ \ B]\begin{bmatrix}\vec{x_1}\\\vec{x_2}\end{bmatrix}=A\vec{x_1}+B\vec{x_2}$

于是 $A\vec{x_1}\in R(A)$ $\quad B\vec{x_2}\in R(B)$

即 $\vec{y}\in R(A)+R(B)$，即 $R(C)\subseteq R(A)+R(B)$.

设 $\vec{y}\in R(A)+R(B)$.，则存在 $\vec{y_1}\in R(A)$, $\vec{y_2}\in R(B)$. 满足 $\vec{y}=\vec{y_1}+\vec{y_2}$

且存在 $\vec{x_1}\in\mathbb{R}^{n\times 1}$ $\vec{x_2}\in\mathbb{R}^{s\times 1}$ 满足 $\vec{y_1}=A\vec{x_1}$, $\vec{y_2}=B\vec{x_2}$

令 $\vec{x}=\begin{bmatrix}\vec{x_1}\\\vec{x_2}\end{bmatrix}$. 于是 $[A\ \ B]\begin{bmatrix}\vec{x_1}\\\vec{x_2}\end{bmatrix}=A\vec{x_1}+A\vec{x_2}=\vec{y_1}+\vec{y_2}=\vec{y}$

此即 $\vec{y}\in R(C)$，即 $R(A)+R(B)\subseteq R(C)$

于是 $R(A)+R(B)=R(C)$

2. $\vec{x}\in N(D)\Rightarrow D\vec{x}=\vec{0}\Rightarrow\begin{bmatrix}A\vec{x}\\B\vec{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{0}\\\vec{0}\end{bmatrix}\Rightarrow A\vec{x}=0$ 且 $B\vec{x}=\vec{0}\Rightarrow x\in N(A)\cap N(B)$

$\Rightarrow N(D)\subseteq N(A)\cap N(B)$

$\vec{x}\in N(A)\cap N(B)\Rightarrow A\vec{x}=\vec{0}$ 且 $B\vec{x}=0\Rightarrow\begin{bmatrix}A\vec{x}\\B\vec{x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{0}\\\vec{0}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}\vec{x}=\vec{0}=x\in N(D)$

$\Rightarrow N(A)\cap N(B)\subseteq N(D)$.

练习 2.2.16.（Steinitz 替换定理）（此题如果只将 $\vec{a_i}, \vec{b_i}$ 视为 $\mathbb{R}^n$ 中的向量，可以用一些已有结论证明，但这里我们给出一种最一般情况的证明）

S: $\vec{a_1},\cdots,\vec{a_r}$ 线性无关，可被 T: $\vec{b_1},\vec{b_2},\cdots,\vec{b_t}$ 线性表示.

求证：1. $r\le t$　2. 可以选择 T 中 r 个向量换成 S，得到新向量与 T 线性等价.

证：对 r 用归纳法. $r=1$ 时，显然 $r\le t$.

$\vec{a_1}$ 可由 $\vec{b_1},\vec{b_2},\cdots,\vec{b_n}$ 线性表示.

设 $\vec{a_1}=\lambda_1\vec{b_1}+\lambda_2\vec{b_2}+\cdots+\lambda_n\vec{b_n}$，则 λ_i 不全为0（否则 $\vec{a_1}=\vec{0}$，线性相关）.

不妨 $\lambda_1\neq 0$. 于是 $\vec{b_1}=\frac{1}{\lambda_1}\vec{a_1}+(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1})\vec{b_1}+\cdots+(-\frac{\lambda_t}{\lambda_1})\vec{b_t}$

这也就说明了 $\vec{a_1},\vec{b_2},\cdots,\vec{b_t}$ 和 $\vec{b_1},\vec{b_2},\cdots\vec{b_t}$ 线性等价.

假设结论对 $r-1$ 成立. 考察 r 时的情况

$\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots\vec{a_r}$ 可被 $\vec{b_1},\vec{b_2},\cdots,\vec{b_t}$ 线性表示

那么 $\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_{r-1}}$ 可被 $\vec{b_1},\vec{b_2},\cdots,\vec{b_t}$ 线性表示.

由归纳假设 $r-1\le t$，且可有替换等价. 不妨 $\vec{a_1},\cdots\vec{a_{r-1}}$ 替换 $\vec{b_1},\cdots\vec{b_{r-1}}$ 后

$\vec{a_1},\cdots\vec{a_{r-1}},\vec{b_r},\cdots\vec{b_t}$ 和 $\vec{b_1},\cdots,\vec{b_{r-1}},\vec{b_r},\cdots,\vec{b_t}$ 等价.

从而 $\vec{a_r}=\lambda_1\vec{a_1}+\cdots+\lambda_{r-1}\vec{a_{r-1}}+\lambda_r\vec{b_r}+\cdots+\lambda_t\vec{b_t}$

若 $r-1=t$，则 $\lambda_1\vec{a_1}+\cdots+\lambda_{r-1}\vec{a_{r-1}}+(-1)\vec{a_r}=\vec{0}$ 与线性无关矛盾.

从而 $\cancel{r-1\le t}$ $r-1<t$ 即 $S\le t$

另外，若 $\lambda_r=\cdots=\lambda_t=0$，则同样与线性无关矛盾.

不妨 $\lambda_r\neq 0$. 则 $\vec{b_r}=(-\frac{\lambda_1}{\lambda_r})\vec{a_1}+\cdots+\frac{1}{\lambda_r}\vec{a_r}+(-\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_r})\vec{b_{r+1}}+\cdots+(-\frac{\lambda_t}{\lambda_r})\vec{b_t}$.

从而 $\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_r},\vec{b_{r+1}},\cdots,\vec{b_t}$ 与 $\vec{b_1},\vec{b_2},\cdots,\vec{b_t}$ 等价

证毕.