一、关于正定矩阵的一些说明

① 由定义，称矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 正定，如果 $\forall x\in\mathbb{R}^n$，$x\neq 0$，有 $x^TAx>0$

因此，定义中不限制 A 对称

② 不对称但正定的矩阵存在。

例如 $\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$

③ 正定矩阵为什么一般要求对称

i) 对于一个二次型 x^TAx 而言 $x^TAx\equiv x^T\frac{A+A^T}{2}x$

因此，我们通常仅考虑对称的情况

ii) 不对称但正定的矩阵 ~~性质~~ 缺少很多好的性质。

例如 $\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}$ 没有实特征值。

④ 二次型 x^TAx 的几何意义

$$f(x)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

~~研究~~二次型的研究起源于二次曲线的分类问题，对平面上的二次曲线

$$a_{11}x^2+(a_{12}+a_{21})xy+a_{22}y^2+b_1x+b_2y+c=0.$$

属于椭圆？双曲线？还是抛物线？

例如 $2x^2+4xy+5y^2=22.$

$\cancel{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\2&5\end{bmatrix}}$ $[x,y]\begin{bmatrix}2&2\\2&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=22$

对矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ 作正交对角化

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{bmatrix}$$

~~也~~ $A \overset{d}{=} P^T \Lambda P$

令 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

则 $[x, y] A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x, y] P^T \Lambda P \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x', y'] \begin{bmatrix} 1 & \\ & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$= x'^2 + 6y'^2$

则原曲线为 $x'^2 + 6y'^2 = 22$. $\Rightarrow \dfrac{x'^2}{22} + \dfrac{y'^2}{\frac{22}{6}} = 1$ 为椭圆.

注：若 θ 满足 $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt5}$, $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt5}$.

则 $P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. PX 相当于 向量 逆时针旋转 θ

（科目：　　）清华大学数学作业纸 4120238

编号：　　班级：　　姓名：　　第　页

例题：练习 6.2.16 (7)

如果 A、B 正定，则 AB 特征值均为正数

证：

~~在 A、B 不是对称时，结论不正确~~

答 若此处"正定"不包含"对称"，则结论不正确

例如 $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$

则 $AB=A$，但 A 没有实特征值，自然无从谈起特征值为正。

若此处正定包含对称，则结论正确。

A 对称正定，B 对称正定 ~~则 $A=P^TAP$~~，则 $A=P^TP$，$B=Q^TQ$

由于 $|\lambda I-\tilde{A}\tilde{B}|=|\lambda I-\tilde{B}\tilde{A}|$（参考前面习题课手稿）（$\forall \tilde{A},\tilde{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$）

~~$AB=$~~

于是 $AB=P^TPQ^TQ$ 与 QP^TPQ^T 有相同的特征值

而 $QP^TPQ^T=(PQ^T)^T(PQ^T)$，P、Q 均可逆

故 QP^TPQ^T 对称正定，因此，特征值全为正数。

练习5.4.4. 证明. 任意迹为0的矩阵相似于一个对角线元素全为0的矩阵.

思路：考虑归纳法，如果 A 能相似于 $\begin{bmatrix} 0 & \alpha^T \\ \beta & A_1 \end{bmatrix}$. 则可用归纳法证明.

证明：

① 若 $\mathbb{R}^n$ 中所有向量均为 A 的特征向量，则

$$A=\begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

又 $trace(A)=0$. 于是 $A=0$. 结论成立.

② 否则. 存在 $q\in\mathbb{R}^n$. 不为 A 的特征向量. 即 q. Aq 线性无关.

将 $\{q, Aq\}$ 扩充为一个 $\mathbb{R}^n$ 中的基 $\{q, Aq, *, *, \cdots *\}$

令 $Q=[q. Aq, * \cdots *]$，则

$$AQ=Q\begin{bmatrix} 0 & \alpha^T \\ \beta^T & B \end{bmatrix}$$

于是 $$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} 0 & \alpha^T \\ \beta^T & B \end{bmatrix}$$

$trace(A)=0 \Rightarrow trace(B)=0$

由归纳假设 存在 P，$P^{-1}BP$ 对角元素皆为0.

则 $Q\begin{bmatrix} 1 & \\ & P \end{bmatrix}$ 即为所求.

作业12．9．A奇异值分解 $A=U\Sigma V^T$．求矩阵 $\begin{bmatrix}0 & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}$ 的谱分解．

$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，则 $B=\begin{bmatrix}0 & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}$

取 $\vec{x}_i=\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \vec{u}_i\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$i=1,2,\cdots,r$

则 $$Bx_i=\begin{bmatrix}0 & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \vec{u}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^T\vec{u}_i\\ A\vec{v}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_i\vec{v}_i\\ \sigma_i\vec{u}_i\end{bmatrix}=\sigma_i\vec{x}_i$$

类似地 ~~再考虑~~ $\vec{y}_i=\begin{bmatrix}-\vec{v}_i\\ \vec{u}_i\end{bmatrix}$　　$i=1,2,\cdots,r$

$$B\vec{y}_i=-\sigma_i\vec{y}_i$$

考虑 $\vec{x}_i=\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \vec{0}\end{bmatrix}$　　$i=r+1,\cdots,n$.

则 $$B\vec{x}_i=\begin{bmatrix}0 & A^T\\ A & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \vec{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{0}\\ A\vec{v}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}\vec{v}_i\\ \vec{0}\end{bmatrix}$$

类似地 $\vec{y}_i=\begin{bmatrix}\vec{0}\\ \vec{u}_i\end{bmatrix}$.

则 $$B\vec{y}_i=0\vec{y}_i.$$

得．令 $P=[\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_r,\vec{y}_1,\cdots,\vec{y}_r,\vec{x}_{r+1},\cdots,\vec{x}_n,\vec{y}_{r+1},\cdots,\vec{y}_n]$

则 $$B=P\begin{bmatrix}\sigma_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \sigma_r & & & & & \\ & & & -\sigma_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & -\sigma_r & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots\ 0\end{bmatrix}P^{-1}$$