187页 练习4.3.13.

设n阶方阵 $A=[a_{ij}]$ 对角占优，且对角元素全为正数. 证明：$\det(A)>0$.

法1：令 $f(t)=\begin{vmatrix} a_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n} \\ ta_{21} & a_{22} & \cdots & ta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ta_{n1} & ta_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $t\in[0,1]$

则 $f(t)\in C([0,1])$

又 $f(0)=\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{vmatrix}>0$. $f(t)\neq 0$ (对角占优可逆) $\forall t\in[0,1]$

于是 $f(t)$ 在 $[0,1]$ 上不变号. 因此 $f(1)>0$.

法2：圆盘定理.

A的特征值分布在 $\bigcup_{i=1}^{n}\left\{z\,\middle|\,|z-a_{ii}|\leq\sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n}|a_{ij}|\right\}$

由于A对角占优，所以，所有特征值落在右半平面.

对于实根特征根，自然大于0.

对于复特征根，由于其共轭也为特征根，所以 $z\bar{z}=|z|^2>0$.

因此，$\det(A)=z_1z_2\cdots z_n>0$.

法3：归纳法：

$n=1$时，结论显然成立.

假设命题对 $n-1$ 成立，考察n，

$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ \beta & A_1 \end{bmatrix}$ 于是 $\det A=\begin{vmatrix} a_{11}-\alpha^TA_1^{-1}\beta & \alpha^T \\ 0 & A_1 \end{vmatrix}=\det A_1\cdot(a_{11}-\alpha^TA_1^{-1}\beta)$

(由于A_1对角占优，故可逆，因此上式有意义)

由归纳假设 $\det(A_1)>0$，只需证明 $a_{11}-\alpha^T A_1^{-1}\beta>0$

下面验证 $A_1^{-1}\beta=\begin{bmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 的每个元素的绝对值都小于等于 1

反证，若结论不成立，则 $\max\limits_{2\le i\le n}|b_k|>1$　不妨 $|b_i|=\max\limits_{2\le i\le n}|b_k|$

则由 $\beta=A_1\begin{bmatrix} b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ 知

$$a_{i1}=a_{i2}b_2+\cdots+a_{ii}b_i+\cdots+a_{in}b_n$$

于是 $b_i=\frac{a_{i1}}{a_{ii}}-\frac{a_{i2}}{a_{ii}}b_2-\cdots-\frac{a_{i,i-1}}{a_{ii}}b_{i-1}-\frac{a_{i,i+1}}{a_{ii}}b_{i+1}-\cdots-\frac{a_{in}}{a_{ii}}b_n$

于是 $|b_i|\le\left(\frac{|a_{i1}|}{|a_{ii}|}\cdot 1+\frac{|a_{i2}|}{|a_{ii}|}|b_2|+\cdots+\frac{|a_{i,i-1}|}{|a_{ii}|}|b_{i-1}|+\frac{|a_{i,i+1}|}{|a_{ii}|}b_{i+1}+\cdots+\frac{|a_{in}|}{|a_{ii}|}|b_i|\right)$

$$\le\frac{\sum_{j\ne i}^{n}|a_{ij}|}{|a_{ii}|}|b_i|$$

于是 $|a_{ii}|\le\sum\limits_{j\ne i}^{n}|a_{ij}|$　矛盾.

因此 $|b_k|\le 1$

于是 $|\alpha^T A_1^{-1}\beta|=|a_{12}b_2+a_{13}b_3+\cdots+a_{1n}b_n|$

$$\le|a_{12}||b_2|+|a_{13}||b_3|+\cdots+|a_{1n}||b_n|$$

$$\le|a_{12}|+|a_{13}|+\cdots+|a_{1n}|$$

$$<|a_{11}|$$

于是结论成立.

扫描全能王 创建

习题课 2021.12.22 期末复习总结

一、行列式计算

① 三阶行列式的对角线法则

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{补一块}} \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{matrix}$$

则 三阶行列式 $= x_{11}x_{22}x_{33} + x_{12}x_{23}x_{31} + x_{13}x_{21}x_{32}$

$- x_{31}x_{22}x_{13} - x_{32}x_{23}x_{11} - x_{33}x_{21}x_{12}$

②

$$\begin{vmatrix} & & & & a_{11} & a_{12} \\ & & & & a_{21} & a_{22} \\ & & b_{11} & b_{12} & & \\ & & b_{21} & b_{22} & & \\ c_{11} & c_{12} & & & & \\ c_{21} & c_{22} & & & & \end{vmatrix}$$ 或 $$\begin{vmatrix} & & & a_n \\ & & a_{n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_1 \ a_2 & & & \end{vmatrix}$$

③ 递推法

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}.$$

④ $A\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $B\in\mathbb{R}^{m\times n}$

则 $\det(I_n \pm AB) = \det(I_m \pm BA)$

例
$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1+x_1 & a_1+x_1 & \cdots & a_1+x_n \\ a_2+x_1 & 1+a_2+x_2 & \cdots & a_2+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+x_1 & a_n+x_2 & \cdots & 1+a_n+x_n \end{vmatrix}$$

$$D_n = \left| I_n + \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \right| = \left| I_2 + \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{bmatrix} \right|$$

⑤ 其它方法

i) 拆分法

ii) 加边法 (配合箭形行列式)

⑥ 直接计算 (行列变换).

二、矩阵可否对角化问题

① 对称矩阵在$\mathbb{R}$上一定可以对角化.

② 计算特征值
- 有 n 个不同的实特征值 $\Rightarrow$ 在$\mathbb{R}$上可对角化
- 有复特征值 $\Rightarrow$ 在$\mathbb{R}$上不可对角化 (注, 在$\mathbb{C}$上可能能对角化)
- 特征值都是实的, 对重根去计算几何重数 (利用秩判断)
  单根不用计算几何重数.

三. QR分解

若A可逆(列满秩)，对列做Gram-Schmidt正交化即可.(但不推荐)

更一般的方法：用Householder变换

以4阶矩阵为例

$$A=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix}=[\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\vec{\alpha}_4]$$

① 找 H_1，使 $H\vec{\alpha}_1=\|\vec{\alpha}_1\|\underbrace{\vec{e}_1}_{\text{此处}\vec{e}_1\text{为4维的}}$ （取 $\vec{v}=\dfrac{\vec{\alpha}_1-\|\vec{\alpha}_1\|\vec{e}_1}{\|\vec{\alpha}_1-\|\vec{\alpha}_1\|\vec{e}_1\|}$，$H_1=I-2vv^T$ 即可）

（课本143页有错误）
但不影响结果

② $H_1A=\begin{bmatrix} \|\vec{\alpha}_1\| & * & * & * \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ 0 & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \|\vec{\alpha}_1\| & * & * & * \\ \vec{0}_{3\times1} & \vec{\beta}_2 & \vec{\beta}_3 & \vec{\beta}_4 \end{bmatrix}$

找 H_2，使 $H_2\vec{\beta}_2=\|\vec{\beta}_2\|\vec{e}_1$ （此时 $\vec{e}_1$ 为3维的），

③ $\begin{bmatrix} 1 & \\ & H_2 \end{bmatrix}H_1A=\begin{bmatrix} \|\vec{\alpha}_1\| & * & * & * \\ 0 & \|\vec{\beta}_2\| & * & * \\ 0 & 0 & c_{33} & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix}$

④ 继续下去（类似重复一次③即可）

四. SVD分解.

标准的做法是 240页例6.3.3.

需要指出的是 $A=U\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^H$ 中.

V的列是A^TA的特征向量　U的列是AA^T的特征向量

但如果依此确定U, V, 不一定能得到正确的SVD分解.

例:

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$A^TA=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \lambda_1=5,\ \lambda_2=1.\qquad V=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$AA^T=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}\qquad \lambda_1=5,\ \lambda_2=1\ \ \lambda_3=0.$$

若 $U=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & \sqrt{5} & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 则 $U^T\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^T\neq A.$

若 $U=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & \sqrt{5} & 0\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$, 则 $U^T\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^T=A.$

五、正交投影与最小二乘法

求一个向量 $\vec{v}$ 向一个空间 M 的正交投影

① 求 M 的基 $\{\vec{\alpha_1}, \cdots, \vec{\alpha_r}\}$

② 令 $A = [\vec{\alpha_1}, \cdots, \vec{\alpha_r}]$. 则 $M = R(A)$

③ 解方程 $A^TA\vec{x} = A^T\vec{v}$

④ 投影即为 $A\vec{x}$

最小二乘法：~~练习~~ 164页 练习3.3.24.

大题：~~练习~~ 163页 练习3.3.21, 3.3.23 （解答可见11.17号习题课讲义）

关键要熟悉关系：

（154页 3.3.8） $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

则
1. $R(A^T)^\perp = N(A)$　　$R(A)^\perp = N(A^T)$
2. $R(A^TA) = R(A^T)$　　$N(A^TA) = N(A)$
3. $R(AA^T) = R(A)$　　$N(AA^T) = N(A^T)$.

六. 对角化问题.

① 计算　例如 计算 ~~正交~~ 对称矩阵的正交谱分解.

② ~~方~~ 证明：

例 $A^2=A$（幂等），则 A 可对角化.

引理1：若多项式 $f(x)$ 零化 A，则 A 的特征值为 $f(x)$ 的根

引理2：$\mathbb{R}^n = N(A) \oplus N(I-A)$

引理3：维数定理.

（具体证明可见 12.8 讲义）.

七. 正定矩阵、二次型、Rayleigh 商

1. 直接判断是否正定.

2. 结合二次型和 Rayleigh 商

求 $\max\limits_{x\neq 0} \dfrac{x^TAx}{x^Tx}$. 　A对称时　$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$.

则 $\lambda_1 = \max\limits_{x\neq 0} \dfrac{x^TAx}{x^Tx}$　　$\lambda_n = \min\limits_{x\neq 0} \dfrac{x^TAx}{x^Tx}$.

~~由于~~ 若A不对称. 由于 $x^TAx = x^T\left(\dfrac{A+A^T}{2} + \dfrac{A-A^T}{2}\right)x = x^T\dfrac{A+A^T}{2}x$.

~~由~~ 考察 $\dfrac{A+A^T}{2}$ ~~的~~ 特征值即可.

3. 正定的判定方法（矩阵含参，确定参数范围）