

第十五周习题课 微分方程

求解问题

1. (变量可分离型方程)  $y' = xy^2$
2. (变量可分离型方程)  $y' = \sqrt{|y|}$
3. (齐次方程) 解方程:  $(y^2 - 3x^2)y' + 3xy = 0$ .
4. (齐次方程)  $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, & (x_0 y_0 \neq 0) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ydy = -xdx \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$
5. (齐次方程)  $xy' = y(\ln y - \ln x)$ .
6. (伯努利方程) 解方程  $x^2 y' + xy = y^2$ .
7. 若  $(x + 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$  求一般解.
8. (高阶可降阶方程) 解方程  $y^{(4)} = \sin x + x$ .
9. (高阶可降阶方程) 解方程  $xy'' = y' \ln y'$ .
10. (高阶可降阶方程) 解方程  $y'' = \frac{1 + (y')^2}{2y}$ .
11. (高阶可降阶方程) 求解二阶微分方程的定解问题  $\begin{cases} \cos y \frac{d^2 y}{dx^2} + \sin y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{dy}{dx} \\ y(-1) = \frac{\pi}{6}, y'(-1) = \frac{1}{2} \end{cases}$
12. 求解:  $y'' - 4y' + 4y = (x-1)e^{2x}$ .
13. 求解:  $y'' + 4y' + 4y = (x-1)e^{2x}$ .

14. 求解:  $x^2 y'' - 4xy' + 4y = x - 1$ 。

几何应用

15. 求曲线方程, 在该曲线上任意点的曲率半径等于夹在该点与横轴之间的法线之长, 如果曲线: (1) 向下凸; 2) 向上凸.

16. 与曲线族  $y = ax^3$ ,  $a \in R$  正交的曲线是\_\_\_\_\_.

17. 在 XOY 坐标平面上, 连续曲线 L 过点  $M(0,1)$ , 其上任意点  $P(x, y)(x \neq 0)$  处的切线低斜率与直线 OP 的斜率之差等于  $ax$  (常数  $a > 0$ )

(I) 求 L 的方程:

(II) 当 L 与直线  $y = ax$  所围成平面图形的面积为  $\frac{8}{3}$  时, 确定  $a$  的值.