（科目：　　　）清华大学数学作业纸 4120238

编号：　　　班级：　　　姓名：　　　第　　页

练习2.4.16（Fredholm 二择一定理）

$A\vec{x}=\vec{b}$ 有解 当且仅当 $\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\vec{y}=\begin{bmatrix}\vec{0}\\ 1\end{bmatrix}$ 无解. $(A\in\mathbb{R}^{m\times n})$

证：必要性. 设 $A\vec{x}=\vec{b}$

则 $\cancel{A^T\vec{y}}$ $\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\vec{y}=\begin{bmatrix}A^T\vec{y}\\ \vec{b}^T\vec{y}\end{bmatrix}$

若 $A\vec{y}=\vec{0}$，则 $\vec{b}^T\vec{y}=\vec{x}^TA^T\vec{y}=\vec{x}^T\vec{0}=0\neq 1$

所以 $\begin{bmatrix}A^T\\ b^T\end{bmatrix}\vec{y}=\begin{bmatrix}\vec{0}\\ 1\end{bmatrix}$ 无解.

充分性：

$\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\vec{y}=\begin{bmatrix}\vec{0}\\ 1\end{bmatrix}$ 无解，也就是 $A^T\vec{y}=\vec{0}$ 时，$\vec{b}^T\vec{y}=0$

也就是 $N(A^T)=N\left(\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\right)$

于是 $\operatorname{rank}([A\ \ \vec{b}])=\operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\right)=\dim R\left(\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\right)$

$=m-\dim N\left(\begin{bmatrix}A^T\\ \vec{b}^T\end{bmatrix}\right)=m-\dim N(A^T)=m-(m-\dim R(A^T))$

$=\dim R(A^T)=\operatorname{rank}(A^T)=\operatorname{rank}(A)$

即 $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解.

补充知识：直和

对于线性空间 M, N. 它们生成的和空间 $M+N$ 称为一个直和，如果 $M \cap N = \phi$. 记为 $M \oplus N$ 或 $M \dot{+} N$

性质：① $\dim(M \oplus N) = \dim M + \dim N$

② $x \in M \oplus N$. 则分解 $x = y + z$, $y \in M$, $z \in N$ 是唯一的.

练习 2.4.19. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 求证：

(1) $A^2 = A \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I_n - A) = n$

(2) $A^2 = I \Longleftrightarrow \operatorname{rank}(I_n + A) + \operatorname{rank}(I_n - A) = n$.

证：回忆讲过的 73 页 1.5.17(5).

我们容易验证

$$\mathbb{R}^n = \begin{cases} N(A) \oplus N(I_n - A) & (A^2 = A \text{ 时}) \\ N(I_n - A) \oplus N(I_n + A) & (A^2 = I \text{ 时}) \end{cases}$$

(必要性).

于是 $A^2 = A$ 时.

$$\begin{aligned} n = \dim(\mathbb{R}^n) &= \dim(N(A) \oplus N(I_n - A)) \\ &= \dim(N(A)) + \dim(N(I_n - A)) \\ &= n - \dim(R(A)) + n - \dim(R(I_n - A)) \end{aligned}$$

于是 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(I_n - A) = n$.

充分性：$\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(I_n-A)=n$

$\Rightarrow N(A)+N(I_n-A)=\mathbb{R}^n$.

于是 $\forall \vec{v}\in\mathbb{R}^n$，存在唯一的分解 $\vec{v}=\vec{x}+\vec{y}$

$\vec{x}\in N(A)$，$\vec{y}\in N(I_n-A)$.

于是 $A\vec{v}=A\vec{x}+A\vec{y}=\vec{y}$

$A^2v=A^2x+A^2\vec{y}=A\vec{y}=\vec{y}$

即 $(A-A^2)\vec{v}=\vec{0}$　$\forall\vec{v}\in\mathbb{R}^n$

即 $N(A-A^2)=\mathbb{R}^n$，即 $\operatorname{rank}(A-A^2)=0$. 即 $A=A^2$.

类似可证 (2).

练习 2.4.24. $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

1. 对于任意 k. $R(A^k)\geq R(A^{k+1})$
2. $R(A^k)=R(A^{k+1})\Rightarrow R(A^{k+1})=R(A^{k+2})$.
3. 存在 $k\leq n$ 使 $\operatorname{rank}(A^k)=\operatorname{rank}(A^{k+1})=\cdots$，则若存在 p，使得 $A^p=0$，则 $A^n=0$.

证：1. 显然

3. 是 2 的直接推论，故只证 2.

为了证明2. 只要证明

$$R(A^{k+1}) = A(R(A^k)) \quad \forall k.$$

事实上. $\vec{y} \in R(A^{k+1}) \Rightarrow \vec{y} = A^{k+1}\vec{x} \Rightarrow \vec{y} = A(A^k x) \in A(R(A^k))$

$\vec{y} \in A(R(A^k)) \Rightarrow \vec{y} = A\vec{z} = A(A^k\vec{x}) = A^{k+1}\vec{x} \in R(A^{k+1})$

于是 $R(A^{k+1}) = A(R(A^k))$

所以在 $R(A^k) = R(A^{k+1})$ 时.

$$R(A^{k+1}) = A(R(A^k)) = A(R(A^{k+1})) = R(A^{k+2}).$$

3.1.21. (Riesz 表示定理). 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 为线性映射. 则存在 $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ 使 $f(\vec{a}) = b^T\vec{a}$.

设 $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + \cdots + a_n\vec{e_n}$.

令 $\vec{b} = [f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)]^T$ 即可.

补充：$A\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$B\in\mathbb{R}^{n\times m}$，则 $\mathrm{rank}(I_m-AB)$ 与 $\mathrm{rank}(I_n-BA)$ 有什么关系？

回忆 83页 练习 1.6.10

$$\begin{bmatrix} I_m & \\ & -(I_n+BA)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & \\ -B & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & -I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & -A \\ & I_n\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_m+AB & \\ & -I_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & A \\ & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & -I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & \\ B & I_n\end{bmatrix}$$

于是 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_m & \\ & -(I_n+BA)\end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & -I_n\end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_m+AB & \\ & -I_n\end{bmatrix}$

即 $\mathrm{rank}(I_m)+\mathrm{rank}(I_n+BA) = \mathrm{rank}(I_n)+\mathrm{rank}(I_m+AB)$

即 $m+\mathrm{rank}(I_n+BA) = n+\mathrm{rank}(I_m+AB)$