习题课 2021.12.8.

1. n阶矩阵A，在$\mathbb{C}$内有n个特征值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. ~~则~~ $f(x)$为一个多项式，则 $f(A)$在$\mathbb{C}$内的特征值为 $f(x_1), \cdots, f(x_n)$

证：令 $f(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

则 $f(A) = b_m A^m + b_{m-1} A^{m-1} + \cdots + b_1 A + b_0 I.$

为了考察 $\lambda I - f(A)$. 我们设 $F(x) = \lambda - f(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_1 x + c_0$

$$= c_m (x - x_1')(x - x_2') \cdots (x - x_m')$$

另设 A的特征多项式为 $p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$

于是 $|\lambda I - f(A)|$

$$= (c_m)^n |A - x_1' I| |A - x_2' I| \cdots |A - x_m' I|$$

$$= (-1)^{mn} (c_m)^n |x_1' I - A| |x_2' I - A| \cdots |x_m' I - A|.$$

$$= (-1)^{mn} (c_m)^n \left(\prod_{i=1}^{n} (x_1' - x_i)\right) \left(\prod_{i=1}^{n} (x_2' - x_i)\right) \cdots \left(\prod_{i=1}^{n} (x_m' - x_i)\right).$$

$$= (-1)^{mn} (c_m)^n \left(\prod_{i=1}^{m} (x_i' - x_1)\right) \left(\prod_{i=1}^{m} (x_i' - x_2)\right) \cdots \left(\prod_{i=1}^{m} (x_i' - x_n)\right)$$

$$= (-1)^{mn} (c_m)^n (-1)^{mn} \left(\prod_{i=1}^{m} (x_1 - x_i')\right) \left(\prod_{i=1}^{m} (x_2 - x_i')\right) \cdots \left(\prod_{i=1}^{m} (x_n - x_i')\right)$$

$$\cancel{= (c_m)^n \left(\prod_{i=1}^{m} (x_1 - x_1\right.}$$

$$= (c_m) \prod_{i=1}^{m} (x_1 - x_i') \, (c_m) \prod_{i=1}^{m} (x_2 - x_i') \cdots (c_m) \prod_{i=1}^{m} (x_n - x_i')$$

$$= (\lambda - f(x_1))(\lambda - f(x_2)) \cdots (\lambda - f(x_n)).$$

证毕.

[注] 我们不能通过直接验证 ~~$f(A)x = f(x)\lambda$~~ $f(A)\alpha = f(\lambda)\alpha$ 来证明上述结论.

2. 练习 5.4.6. ~~$A_i \in \mathbb{R}$~~ A_1 为 m 阶方阵, A_2 为 n 阶方阵

1. 如果 A_1 和 A_2 没有相同的特征值, 则关于 $m\times n$ 矩阵 X 的 Sylvester 方程 $A_1X - XA_2 = B$ 有唯一解.

先证一个简单结论, 即 A_2 为上三角矩阵时成立.

直接求解: 记 $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ & \ddots & \\ & & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix}$ $\quad B = [\vec{b_1}, \cdots, \vec{b_n}]$

由方程 $A_1X - XA_2 = B$

$$A_1[\vec{x_1}, \vec{x_2}, \cdots, \vec{x_n}] - [\vec{x_1}, \cdots, \vec{x_n}]\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ & \ddots & \vdots \\ & & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} = [\vec{b_1}, \cdots, \vec{b_n}]$$

$$\Rightarrow [A\vec{x_1}, A\vec{x_2}, \cdots, A\vec{x_n}] - [a_{11}^{(2)}\vec{x_1},\ a_{12}^{(2)}\vec{x_1} + a_{22}^{(2)}\vec{x_2},\ \cdots\ a_{1n}^{(2)}\vec{x_1} + \cdots + a_{nn}^{(2)}\vec{x_n}] = [\vec{b_1}, \cdots, \vec{b_n}]$$

$$A\vec{x_1} - a_{11}\vec{x_1} = (A - a_{11}^{(2)}I)\vec{x_1} = \vec{b_1}$$

由于 a_{11} 为 A_2 特征值, 因此, 不为 A_1 的特征值. 所以 $A - a_{11}^{(2)}I$ 可逆. 因此可解得唯一的 $\vec{x_1}$.

$$A\vec{x_2} - a_{12}^{(2)}\vec{x_1} - a_{22}^{(2)}\vec{x_2} = \vec{b_2}$$

$$\Rightarrow (A - a_{22}^{(2)}I)\vec{x_2} = \vec{b_2} - \vec{x_1}$$

同理 $A - a_{22}^{(2)}I$ 可逆, 因此 可解出唯一的 $\vec{x_2}$.

依此方法做下去. 可解出唯一的 X.

之后, 对于一般的 A_2. 存在 P 满足 ~~$P^{-1}TP = A_2$~~ $PTP^{-1} = A_2$. T 为上三角矩阵.

~~于是 $A_1X - XPTP^{-1} = B$ 有唯一解~~.

于是 $A_1Y - YT = BP$ 有唯一解 Y.

令 $X = YP^{-1}$, 则 $A_1XP - XPT = BP$

于是 $AX - XPTP^{-1} = A_1X - XA_2 = B$

唯一性可反推回 $A_1Y - YT = BP$ 由 Y 的唯一性保证.

作业11.7. 证明对Householder矩阵 $H_v = I_n - 2\vec{v}\vec{v}^T$ $\|v\|=1$，存在正交阵Q，使得

$$Q^T H_v Q = diag(-1, 1, \cdots, 1)$$

两种方法：

方法1：由于Householder矩阵对称，那么~~它~~它一定可以正交对角化。

如果我们可以证明 H_v 的特征值为 -1（单根）和 1（$n-1$重根），那么结论自然成立。

利用11月24日习题课中证明的一个结论 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$，则 $\lambda^n\det(\lambda I_m+AB)=\lambda^m\det(\lambda I_n+BA)$

~~设 $H=I-2vv$~~ 对 $H=I-2\vec{v}\vec{v}^T$

于是 $\det(\lambda I-H)=\det((\lambda-1)I+2\vec{v}\vec{v}^T)$

$$(\lambda-1)\det((\lambda-1)I+2\vec{v}\vec{v}^T) = (\lambda-1)^n\det((\lambda-1)\cdot 1+2\vec{v}^T\vec{v})$$

$$= (\lambda-1)^n(\lambda+1)$$

于是 $\det(\lambda I-H)=(\lambda+1)(\lambda-1)^{n-1}$.

方法2：直接构造.

取 $\vec{q}_1=\vec{v}$，扩充到 $\mathbb{R}^n$ 的一个标准正交基 $\{\vec{q}_1,\vec{q}_2,\cdots,\vec{q}_n\}$.

令 $Q=\{\vec{q}_1,\cdots,\vec{q}_n\}$.

则 $H\vec{q}_1=(I_n-2\vec{q}_1\vec{q}_1^T)\vec{q}_1=\vec{q}_1-2\vec{q}_1=-\vec{q}_1$

$$H\vec{q}_i=(I_n-2\vec{q}_1\vec{q}_1^T)\vec{q}_i=\vec{q}_i-\vec{0}=\vec{q}_i \qquad i=2,\cdots,n$$

所以

$$Q^T H Q = \begin{bmatrix}\vec{q}_1^T\\ \vdots \\ \vec{q}_n^T\end{bmatrix} H[\vec{q}_1,\cdots,\vec{q}_n]$$

$$= \begin{bmatrix}\vec{q}_1^T\\ \vdots \\ \vec{q}_n^T\end{bmatrix}[-\vec{q}_1,\vec{q}_2,\cdots,\vec{q}_n]$$

$$= diag(-1, 1, \cdots, 1)$$

练习 (229页). 6.1.10. 设实对称矩阵 A，满足 $A^5=I_n$，证明 $A=I_n$.

引理：对方阵A，若多项式 $f(x)$ 满足 $f(A)=0$，则对 A 的特征值 λ，$f(\lambda)=0$.

(此引理为练习5.2.13，习题课12.1日讲过).

$A^5=I_n$ 则 $(A-I)(A^4+A^3+A^2+A+I)=0$

即 $f(x)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ 零化 A.

于是 A 的特征值皆为 $f(x)$ 的根.

但由于 A 实对称，其特征值皆为实数，而 $f(x)$ 仅有实根 1，所以 A 的特征值全为1.

所以 A 正交相似于 $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&\ddots\end{pmatrix}$ 于是 $A=I$.

练习 5.3.14 (214页).

1. $A^2=A$，则 A 可对角化.

$f(x)=x(x-1)$ 零化 A，所以 A 的特征值只能为 1 或 0.

而由 11.3日 习题课中的结论

$\mathbb{R}^n=N(A)\oplus N(I-A)$.

$\Rightarrow$ $\dim(N(A))+\dim(N(I-A))=n$ (不妨 1, 0 均为特征值，若否，下面分析依然对，只不过某个零空间为0而已).

$\dim N(A)$ 为特征值 0 的几何重数

$\dim N(I-A)$ 为特征值 1 的几何重数.

由于若某个几何重数小于代数重数，则相加不可能为 n. (因为代数重数相加为 n).

于是可对角化.

2. $A^2=0$，且 $A\neq 0$，则 A 不可对角化

3. $A^2+A+I=0$，则 A 在 $\mathbb{R}$ 上不可对角化.

2, 3 同一套路，仅证 3. 反证，若可对角化，则 $A=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}P$，$\lambda_i$ 为实特征值.

于是 $A^2+A+I_n=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1^2+\lambda_1+1&&&\\&\lambda_2^2+\lambda_2+1&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n^2+\lambda_n+1\end{pmatrix}P=0$.

于是对角矩阵为 0，但 $f(x)=x^2+x+1$ 在 $\mathbb{R}$ 上无根，矛盾.

6.2.15 证明：若实对称矩阵对角占优，且对角元素全为正数，则该矩阵正定。

~~该定理~~ 如果我们能证明对角线元素为正的对角占优矩阵的行列式 >0，那么 ~~对~~ 每个顺序主子式均大于0，从而 A 正定。

下面我们利用微积分来证明此结论。

若 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ 满足 A 对角占优，且 $a_{ii}>0$.

令 $f(t) = \cancel{\det} \begin{vmatrix} a_{11} & ta_{12} & \cdots & ta_{1n} \\ ta_{21} & a_{22} & \cdots & ta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ta_{n1} & ta_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad t\in[0,1]$

由于行列式关于分量连续，所以 $f(t)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数。

且对于 $\forall t\in[0,1]$，$f(t)\neq 0$（因为对角占优矩阵可逆）

而 $f(0)=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}>0$。所以断言 $f(1)>0$。否则与介值定理矛盾。