线性代数-12 HW11 Answer Page 1

1. 将特征对的概念扩展到矩阵多项式的抽象线性空间，需要证明

$$f(A)\vec{x} = f(\lambda)\vec{x}.$$

不妨设给定的任意多项式为 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

计算 $f(A)\vec{x} = (a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n)\vec{x}$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k A^k \vec{x} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \vec{x} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k\right)\vec{x}$$

$$= f(\lambda)\vec{x}.$$

所以 $(f(\lambda), \vec{x})$ 是 $f(A)$ 的一个特征对. $\square$

2. (a) 对 $\lambda\vec{v} = A^T\vec{v}$ 两端左乘 $\vec{w}^T$，有

$$\vec{w}^T(\lambda\vec{v}) = \vec{w}^T(A^T\vec{v}) \Rightarrow \lambda\vec{w}^T\vec{v} = (A\vec{w})^T\vec{v} = \mu\vec{w}^T\vec{v}.$$

因为 $\lambda \neq \mu$，所以必然有 $\vec{w}^T\vec{v} = 0$，i.e. $\vec{w}$ 与 $\vec{v}$ 正交.

(b) 因为 A 对称，i.e. $A^T = A$，所以 A^T 的特征对也是 A 的特征对.
给定A任意两个互异特征值 λ 和 μ，以及其对应的特征向量 $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$.
可以选择将 $(\lambda, \vec{v})$ 看作是 A^T 的特征对，将 $(\mu, \vec{w})$ 看作是 A 的特征对.
由 (a) 的结论可知，$\vec{v}$ 与 $\vec{w}$ 正交.
由 $(\lambda, \vec{v})$ 和 $(\mu, \vec{w})$ 的~~正交性~~任意可知，对称矩阵属于不同特征值的特征向量正交.

3. (i) 证明：对任意 $\vec{x} \in V_\lambda$，有 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

计算 $A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x} = (BA)\vec{x} = B(A\vec{x}) = B(\lambda\vec{x}) = \lambda(B\vec{x})$.

A,B可交换

所以 $B\vec{x} \in V_\lambda$.

(ii) 若A与B不可交换，则结论不成立. 可举一个~~例~~例子证明，我会选择有零特征值的矩阵A. 例如 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

一方面，$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$BA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

所以 $AB \neq BA$，i.e. A与B不可交换.

另一方面 A~~的特有~~的特征多项式为 $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\lambda$.

所以 $\lambda=0$ 为 A 的一个特征值. 考察其对应的特征子空间 $V_\lambda = N(\lambda I_2 - A) = N(-A)$.

$$\lambda I_2 - A = \begin{bmatrix} 0-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$，所以 $V_\lambda = N(\lambda I_2 - A) = \mathrm{span}(\vec{e}_2)$.

计算 $A(B\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\neq \lambda(B\vec{e}_2) = 0 \cdot B\vec{e}_2 = \vec{0}_2$. 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　囗

4. (a) A的特征多项式为 $p_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda-0.6 & -0.1 \\ -0.4 & \lambda-0.9 \end{vmatrix} = (\lambda-0.6)(\lambda-0.9) - 0.04$

$= \lambda^2 - 1.5\lambda + 0.54 - 0.04 = \lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5 = (\lambda-1)(\lambda-0.5)$

由 $p_A(\lambda)=0$ 可知 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 0.5$.

(b) 直接计算验证. 记A交换两行后得的到的矩阵为 $B = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix}$.

B的特征多项式为 $p_B(\lambda) = |\lambda I_2 - B| = \begin{vmatrix} \lambda-0.4 & -0.9 \\ -0.6 & \lambda-0.1 \end{vmatrix} = (\lambda-0.4)(\lambda-0.1) - 0.54$

$= \lambda^2 - 0.5\lambda + 0.04 - 0.54 = \lambda^2 - 0.5\lambda - 0.5 = (\lambda-1)(\lambda+0.5)$.

所以由 $p_B(\lambda)=0$ 可得 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = -0.5$.

显然 A和B 有不同的特征值.

5. 直接求解记 $A_2 = [a_{ij}^{(2)}]$，$B = [\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n]$，则 $a_{jj}^{(2)}$ for $1 \le j \le n$ 是 A_2 的特征值，且不是 A_1 的特征值. 记待定矩阵 $X = [\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_n]$，则有

$$A_1[\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_n] - [\vec{x}_1 \cdots \vec{x}_n]\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} = [\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n]$$

$\Rightarrow [A_1\vec{x}_1 \cdots A_1\vec{x}_n] - [a_{11}^{(2)}\vec{x}_1 \quad a_{12}^{(2)}\vec{x}_1 + a_{22}^{(2)}\vec{x}_2 \quad \cdots \quad a_{1n}^{(2)}\vec{x}_1 + \cdots + a_{nn}^{(2)}\vec{x}_n] = [\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n]$.

逐列对应相等，有 $A_1\vec{x}_j - \sum_{i=1}^{j} a_{ij}^{(2)}\vec{x}_i = \vec{b}_j$ for $1 \le j \le n$.

$$\Rightarrow (A_1 - a_{jj}^{(2)} I_m)\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}^{(2)}\vec{x}_i + \vec{b}_j \quad \text{for } 1 \le j \le n.$$

类似于前代法，可依次求解 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots, \vec{x}_n$. 注意到:

$j=1$: $(A_1 - a_{11}^{(2)} I_m)\vec{x}_1 = \vec{b}_1$.

因为 $a_{11}^{(2)}$ 不是 A_1 的特征值，所以 $A_1 - a_{11}^{(2)} I_m$ 可逆，从而存在唯一解 $\vec{x}_1$.

$j=2$: $(A_1 - a_{22}^{(2)} I_m)\vec{x}_2 = a_{12}^{(2)}\vec{x}_1 + \vec{b}_2$.

同样，因为 $a_{22}^{(2)}$ 不是 A_1 的特征值，所以 $A_1 - a_{22}^{(2)} I_m$ 可逆，从而存在唯一解 $\vec{x}_2$.

以此类推，可求得唯一解 $\vec{x}_j$ for $1\le j\le n$. 从而得到矩阵 X.

Remark: 如果 A_2 不是上三角矩阵，可使用其相似变换，将其转化为一个上三角矩阵，i.e. 存在可逆矩阵 Y，和上三角矩阵 T, s.t.

$$A_2 = YTY^{-1}.$$

从而有 $A_1X - XYTY^{-1} = B \Rightarrow A_1(XY) - (XY)T = BY$. ▢

6. 这道题目是由 Pavel Grinfeld 设计的.

需要利用 trace(A), det(A) 和 A 的特征值的联系，以及 A 的对角化.

注意到 $A = [\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3] = \begin{bmatrix} 110 & 55 & -164 \\ 42 & 21 & -62 \\ 88 & 44 & -131 \end{bmatrix}$ 有下列~~性质~~性质:

$\vec{a}_1 = 2\vec{a}_2$, $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 = [1\ \ 1\ \ 1]^T$.

所以 $\det(A)=0$, 且 $[\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, i.e. $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

所以 0 ~~是~~ 和 1 是 A 的特征值，~~不妨~~不妨记为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$.

又因为 $\text{trace}(A) = 110+21-131 = 0 = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 0+1+\lambda_3 = 1+\lambda_3$.

所以 $\lambda_3 = -1$. 所以A存在 ~~可逆矩~~ 3 个互异特征值，它们~~必~~为为单特征值，所以 A 可对角化，更准确的说，存在可逆矩阵 X, s.t.

$$A = X\Lambda X^{-1},\quad \text{其中 } \Lambda = \mathrm{diag}(0,1,-1)$$

所以 $A^{2017} = (X\Lambda X^{-1})^{2017} = (X\Lambda X^{-1})(X\Lambda X^{-1})\cdots(X\Lambda X^{-1})$

$$= X\Lambda^{2017}X^{-1} = X\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}^{2017}X^{-1}$$

$$= X\begin{bmatrix}0^{2017} & & \\ & 1^{2017} & \\ & & (-1)^{2017}\end{bmatrix}X^{-1} = X\begin{bmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}X^{-1} = A.$$ ▢

7. 取 $\vec{q}_1 = \vec{v}$，扩充成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\{\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_n\}$. 定义 $Q = [\vec{q}_1 \cdots \vec{q}_n]$.

则有 $H_{\vec{v}}\vec{q}_1 = (I_n - 2\vec{v}\vec{v}^T)\vec{q}_1 = \vec{q}_1 - 2\vec{q}_1\underbrace{(\vec{q}_1^T\vec{q}_1)}_{=1} = \vec{q}_1 - 2\vec{q}_1 = -\vec{q}_1$.

For $2\le j\le n$, $H_{\vec{v}}\vec{q}_j = (I_n - 2\vec{v}\vec{v}^T)\vec{q}_j = \vec{q}_j - 2\vec{q}_1\underbrace{(\vec{q}_1^T\vec{q}_j)}_{=0} = \vec{q}_j$.

所以 $H_{\vec{v}}Q=[-\vec{q}_1 \quad \vec{q}_2 \quad \cdots \quad \vec{q}_n]$. 从而有

$$Q^TH_{\vec{v}}Q=\underbrace{\begin{bmatrix}\vec{q}_1^{\,T}\\ \vdots \\ \vec{q}_n^{\,T}\end{bmatrix}}_{n\times 1}\underbrace{[-\vec{q}_1 \quad \vec{q}_2 \cdots \vec{q}_n]}_{1\times n}=\mathrm{diag}(-1,1,\cdots,1).$$

$\boxed{\text{VI}}$

8 (a) $p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-10 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-10 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-10\end{vmatrix}=(\lambda-10)^3$. 由 $p_A(\lambda)=0$ 可知, $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=10$.

上三角

所以 $\lambda_1I_3-A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, 其秩为2, 所以 $\dim N(\lambda_1I_3-A)=1$.

所以 $\lambda_1=10$ 是亏损特征值, A不可对角化.

$$p_B(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-10 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-10.001 & -1\\ 0 & 0 & \lambda-10.002\end{vmatrix}=(\lambda-10)(\lambda-10.001)(\lambda-10.002)$$

由 $p_B(\lambda)=0$ 可得 $\lambda_1=10$, $\lambda_2=10.001$, $\lambda_3=10.002$. B有3个互异特征值, 则必为单特征值, 所以B可对角化.

(b) $p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & & \\ & \lambda & -1 & \\ & & \lambda & -1\\ & & & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^4$. 由 $p_A(\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$.

$$\lambda_1I_4-A=\begin{bmatrix}0 & -1 & & \\ & 0 & -1 & \\ & & 0 & -1\\ & & & 0\end{bmatrix}$$, 其秩为3, 所以 $\dim N(\lambda_1I_4-A)=1$.

所以 $\lambda_1=0$ 为4重特征值, 且几何重数为1, 是亏损特征值, 所以A不可对角化.

$$p_B(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & & \\ & \lambda & -1 & \\ & & \lambda & -1\\ -0.001 & & & \lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda & -1 & \\ & \lambda & -1\\ & & \lambda\end{vmatrix}-(-0.001)\begin{vmatrix}-1 & & \\ \lambda & -1 & \\ & \lambda & -1\end{vmatrix}$$

$= \lambda^4 + (0.001)(-1)^3 = \lambda^4 - 0.001$

由 $p_B(\lambda)=0$ 可知，B有4个互异复特征值，则必为单特征值，所以B可对角化. ◻

9. i. 使用数学软件求A的特征值，写明所用数学软件及调用的命令行：

例如 Matlab：①定义矩阵 $A=[3,-2,0;\ -2,1,-2;\ 0,-2,0]$;

另起一列

②$[V,D]=\mathrm{eig}(A)$：得到两个矩阵 V 和 D.

D的是由特征值构造的对角矩阵；

V的列向量是对应的特征向量.

或者手算出特征多项式 $p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2\\ 2 & \lambda\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & \lambda\end{vmatrix}$

$= (\lambda-3)[(\lambda-1)\lambda-4]-4\lambda = \lambda^3-4\lambda^2-5\lambda+12.$

使用多项式求根的算法，可得到：

$\lambda_1 \approx 4.519,\quad \lambda_2 \approx -1.910,\quad \lambda_3 \approx 1.391.$

ii. 可使用 i 中的结果 V，得到一组特征向量.

或逐一计算三个特征向量 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$：

$\lambda_1 \approx 4.519$：$\lambda_1 I_3 - A \approx \begin{bmatrix}1.519 & 2 & 0\\ 2 & 3.519 & 2\\ 0 & 2 & 4.519\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2-\frac{2}{1.519}R_1} \begin{bmatrix}1.519 & 2 & 0\\ 0 & 0.886 & 2\\ 0 & 2 & 4.519\end{bmatrix}$

$\xrightarrow{R_3-\frac{2}{0.886}R_2} \begin{bmatrix}1.519 & 2 & 0\\ 0 & 0.886 & 2\\ 0 & 0 & 0.004\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x}_1 \approx \begin{bmatrix}2.972\\ -2.257\\ 1\end{bmatrix}.$

近似为0，作为自由列.

类似可求得到 $\vec{x}_2$ 和 $\vec{x}_3$.

iii 因为A有3个互异特征值，且A对称，所以得到的特征向量必然两两正交. 但因为只保留了3位有效数字，可能有较小偏差，可以做相应修正，得到两两正交的 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$.

iv：$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$，$Q=[\vec{q}_1\ \ \vec{q}_2\ \ \vec{q}_3] = \left[\frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|}\ \ \frac{\vec{x}_2}{\|\vec{x}_2\|}\ \ \frac{\vec{x}_3}{\|\vec{x}_3\|}\right]$

$$\Rightarrow Q \approx \begin{bmatrix} 0.769 & 0.271 & 0.579 \\ -0.584 & 0.665 & 0.466 \\ 0.259 & 0.696 & -0.670 \end{bmatrix}.$$

v. 计算 $Q\Lambda Q^T \approx \begin{bmatrix} 0.769 & 0.271 & 0.579 \\ -0.584 & 0.665 & 0.466 \\ 0.259 & 0.696 & -0.670 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.519 & & \\ & 1.910 & \\ & & 1.391 \end{bmatrix} Q^T$

$$= \begin{bmatrix} 2.998 & -1.998 & 0.000 \\ -1.998 & 0.999 & -2.002 \\ 0.000 & -2.002 & 0.002 \end{bmatrix}.$$

与A的各个元素相比，误差为 0.002，即小数点之后第3位.
与Q和Λ的3位有效数字一致. $\boxed{///}$

10. 我们通过A的谱分解计算得到A.
A为实对称，应有谱分解：$A = Q\Lambda Q^T$，其中 Q为正交矩阵，且
$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = diag(0, 3, 3)$.
记 $\vec{x_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \in V_0$，$\vec{x_2} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in V_{\lambda=3}$.

显然 $\vec{x_1}$ 与 $\vec{x_2}$ 正交，所以关于正交矩阵 $Q = [\vec{q_1} \ \vec{q_2} \ \vec{q_3}]$，可取

$$\vec{q_1} = \frac{\vec{x_1}}{\|\vec{x_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{q_2} = \frac{\vec{x_2}}{\|\vec{x_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由 $\vec{q_1}$ 和 $\vec{q_2}$ 扩充出 $\vec{q_3}$：

$$\begin{bmatrix} \vec{q_1}^T \\ \vec{q_2}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \\ -\frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1 \cdot \frac{2}{\sqrt5}\sqrt6} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt6} & \frac{2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{bmatrix}$$

自由列

第3列为自由列，可补充 $\vec{e_3}$，对 $[\vec{q_1} \ \vec{q_2} \ \vec{e_3}]$ 进行Gram-Schmidt正交化.

$$[\vec{q_1} \ \vec{q_2} \ \vec{e_3}] = [\vec{q_1} \ \vec{q_2} \ \vec{q_3}] \begin{bmatrix} 1 & 0 & r_{13} \\ 0 & 1 & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{bmatrix}.$$

所以 $r_{13} = \vec{q_1}^T \vec{e_3} = \frac{1}{\sqrt6}$，$r_{23} = \vec{q_2}^T \vec{e_3} = 0$.

$\Rightarrow r_{33}\vec{q_3} = \vec{e_3} - r_{13}\vec{q_1} - r_{23}\vec{q_2}$

$$=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\cdot\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{6}\\-\frac{2}{6}\\\frac{5}{6}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1\\-2\\5\end{bmatrix}.$$

所以 $r_{33}=\left\|\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1\\-2\\5\end{bmatrix}\right\|=\frac{1}{6}\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+5^2}=\frac{1}{6}\sqrt{30}=\sqrt{\frac{5}{6}}.$

从而有 $\vec{q_3}=\frac{1}{r_{33}}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1\\-2\\5\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-1\\-2\\5\end{bmatrix}.$

所以 $A=Q\Lambda Q^T=\lambda_1\vec{q_1}\vec{q_1}^T+\lambda_2\vec{q_2}\vec{q_2}^T+\lambda_3\vec{q_3}\vec{q_3}^T$

$$=0\,\vec{q_1}\vec{q_1}^T+\lambda_2\vec{q_2}\vec{q_2}^T+\lambda_3\vec{q_3}\vec{q_3}^T$$

$$=3\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}-2&1&0\end{bmatrix}+3\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-1\\-2\\5\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}-1&-2&5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{3}{5}\begin{bmatrix}4&-2&0\\-2&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}+\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&2&-5\\2&4&-10\\-5&-10&25\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}25&-10&-5\\-10&10&-10\\-5&-10&25\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5&-2&-1\\-2&2&-2\\-1&-2&5\end{bmatrix}.$$

□

11. 先判断 A 的秩. 因为 A 的各行元素之和为3, 所以 $A\neq O_{3\times3}$, 所以 $rank(A)\geq1$.
而 $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}\in N(A)$, 且 $\vec{a_1}$ 和 $\vec{a_2}$ 线性无关, 所以 $\dim N(A)\geq2$.
综合可得 $rank(A)=1$, 且 $\dim N(A)=2$.
可求得 A 的谱分解: $N(A)=span(\vec{a_1},\vec{a_2})$, 所以 $\vec{a_1}$ 和 $\vec{a_2}$ 是对应特征值 0 的特征向量.
又因为 A 的各行元素之和为3, 应有

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\\3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

所以 $[1\ \ 1\ \ 1]^T$ 是 A 对应特征值 3 的特征向量, 所以 A 可对角化为
$A=X\Lambda X^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

也可选择不计算 A 的谱分解得到 A.

记 $A = [a_{ij}]$，由题意可得 $\begin{cases} [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]\, \vec{a_1} = 0 \\ [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]\, \vec{a_2} = 0 \\ a_{11} + a_{12} + a_{13} = 3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

使用增广矩阵 $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$ 求解上述线性方程组，得到 $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

类似可得到 $\begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

所以 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$\square$

Remark: 因为 A 实对称，可由 $A = X \Lambda X^{-1}$，进一步得到 $A = Q \Lambda Q^T$，i.e. 将 X 进行 Gram-Schmidt 正交化，得到 Q.

12.(a) A 不可逆 $\Leftrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & b \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -b = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

(b) A 可以正交对角化 $\Leftrightarrow$ 存在正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，s.t. $A = Q\Lambda Q^T$.

$\Leftrightarrow A^T = (Q\Lambda Q^T)^T = Q\Lambda^T Q^T = Q\Lambda Q^T = A$，i.e. A 实对称.

$\Leftrightarrow b = 1$.

(c) A 不可对角化 $\Leftrightarrow$ A 有一个亏损特征值.

而 $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$，所以 A 应有一个 2 重特征值，其几何重数为 1.

计算A的特征多项式 $p_A(\lambda)=|\lambda I_2-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -b\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\lambda-b$

$$=\lambda^2-2\lambda-b.$$

$p_A(\lambda)=0$ 有两个重根 $\Leftrightarrow$ 其判别式 $\Delta=(-2)^2-4(-b)=4+4b=0$.

$\Leftrightarrow b=-1$. ▥

13. (a) 记所给矩阵 $A=BDB^T$, 其中 $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $D=diag(1,-1)$.

B可逆, 所以 A和 D 为合同关系.

且 $A^T=(BDB^T)^T=BD^TB^T=BDB^T=A$, 所以 A对称.

计算 $A=BDB^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\lambda-1=\lambda^2-\lambda-1$.

由 $p_A(\lambda)=0$ 可得 $\lambda=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

注意到 B不是正交矩阵, 所以 A和 D不是正交相似, 特征值不相同.

(b) 因为 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$. 所以可记为 $A=BDB^{-1}$, 其中 $D=diag(1,-1)$.

计算 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$.

A不是对称矩阵, 但 A与D 相似, 有相同的特征值 1 和 -1.

(c) 可记 $A=BDB^T$, 其中 $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $D=diag(1,-1)$.

注意到B是正交矩阵, 所以 A和 D有相同的特征值 1 和 -1, 且对称性质相同, 所以 A 也对称.

可以总结一下上者的不同量:

合同的不变量 有对称性质.

相似的不变量 有 特征值.

正交相似既是合同, 也是相似, 不变量有对称性质和特征值. ▥