1、 $A=[\vec{a}_1\ \ \vec{a}_2]=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\-1&1\end{bmatrix}$.

P_1是关于A的第一列 $\vec{a}_1$ 的正交投影矩阵, i.e. P_1是来到子空间

$$\operatorname{span}(\vec{a}_1)=\operatorname{span}\left(\vec{q}_1=\frac{\vec{a}_1}{\|\vec{a}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\right)$$

(Remark: 仅有一个向量,取其标准正交基,只需要单位化)

的正交投影矩阵. $\vec{q}_1$ 自身构成列正交矩阵 $Q_1=[\vec{q}_1]$. 有

$$P_1=Q_1Q_1^T=\vec{q}_1\vec{q}_1^T=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1&2&-1\end{bmatrix}$$

($P_{\vec{v}}=\vec{v}\vec{v}^T$ where $\|\vec{v}\|=1$ 是常用的简写方式,与 $Q_1Q_1^T$ 的定义是一致的.)

$$=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{bmatrix}=[\vec{p}_1\ \ \vec{p}_2\ \ \vec{p}_3].$$

而 P_2是关于A的正交投影矩阵,可以选择按照下列步骤计算 P_2:

① 可判断出A的两列线性无关,则 $\operatorname{rank}(A)=2$.

② 对列满秩的矩阵,可使用常规的Gram-Schmidt正交化得到A的简化QR分解: $A=[\vec{a}_1\ \ \vec{a}_2]=Q_1R_1=[\vec{q}_1\ \ \vec{q}_2]\begin{bmatrix}r_{11}&r_{12}\\0&r_{22}\end{bmatrix}$

与之前的 $\vec{q}_1$ 是相同的.

则 $\{\vec{q}_1,\vec{q}_2\}$ 构成 $\mathcal{R}(A)$ 的一组标准正交基.

③ 计算正交投影矩阵 $P_2=P_{\mathcal{R}(A)}=P_A=Q_1Q_1^T$.

再计算题目中要求的 P_2P_1.

事实上,应有 $P_2P_1=P_1$, i.e. 不需要更多的计算.

注意到,由 P_1的含义可知, P_1将任给向量投影到子空间 $\operatorname{span}(\vec{a}_1)=\operatorname{span}(\vec{q}_1)$ 中,所以有

$$\vec{p}_1,\ \vec{p}_2,\ \vec{p}_3\in\operatorname{span}(\vec{a}_1)=\operatorname{span}(\vec{q}_1)\subseteq\mathcal{R}(A).$$

而 P_2将任给向量投影到 $\mathcal{R}(A)$中. 特别的,当 $\forall\,\vec{z}\in\mathcal{R}(A)$ 时,有

$$P_2\vec{z}=\vec{z}\in\mathcal{R}(A).$$

所以 $P_2 P_1 = P_2 [\underbrace{\vec{p}_1}_{} \ \underbrace{\vec{p}_2}_{} \ \underbrace{\vec{p}_3}_{}]^{\in \mathcal{R}(A)} = [P_2\vec{p}_1 \ \ P_2\vec{p}_2 \ \ P_2\vec{p}_3]$

$= [\vec{p}_1 \ \ \vec{p}_2 \ \ \vec{p}_3] = P_1$ ▥

Remark: P 是关于 A 的一个正交投影矩阵，其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$\Leftrightarrow$ $\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^m$，有 $\begin{cases} P\vec{a} \in \mathcal{R}(A) \\ \vec{a} - P\vec{a} \in \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T). \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall \vec{a} \in \mathcal{R}(A)，有 \ P\vec{a} = \vec{a}. \\ \forall \vec{a} \in \mathcal{R}(A)^\perp，有 \ P\vec{a} = \vec{0}_m. \end{cases}$

这些是正交投影的等价表述.

2. (a) 不一定存~~存~~在.

关于一个矩阵 A 的四个子空间，$\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{R}(A)$, $\mathcal{N}(A^T)$, $\mathcal{R}(A^T)$，我们应有下列关联：

$\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A^T)$，　$\mathcal{N}(A) \perp \mathcal{R}(A^T)$，且 $\dim \mathcal{R}(A) + \dim \mathcal{N}(A) = n$.

所以四个给定子空间，如果不能同时满足

$\mathcal{M}_1 \perp \mathcal{M}_2$，$\mathcal{N}_2 \perp \mathcal{N}_1$，且 $\dim \mathcal{M}_1 + \dim \mathcal{N}_2 = n$，

则构造不~~出~~出满足题意的矩阵.

(b). 由 (a) 中讨论可知，四个子空间必须满足：

$\mathcal{M}_1 \perp \mathcal{M}_2$，$\mathcal{N}_2 \perp \mathcal{N}_1$，且 $\dim \mathcal{M}_1 + \dim \mathcal{N}_2 = n$.

(i) 构造矩阵 A.

注意到 $\begin{cases} \dim \mathcal{M}_1 + \dim \mathcal{N}_2 = n \\ \dim \mathcal{N}_1 + \dim \mathcal{N}_2 = n \end{cases} \Rightarrow \dim \mathcal{M}_1 = \dim \mathcal{N}_1 = r.$

取 $\mathcal{M}_1$ 的一组标准正交基 $\{\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_r\}$.

取 $\mathcal{N}_1$ 的一组标准正交基 $\{\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_r\}$.

构造矩阵

$$A = [\vec{q}_1 \ \cdots \ \vec{q}_r] \begin{bmatrix} \vec{p}_1^T \\ \vdots \\ \vec{p}_r^T \end{bmatrix} =: Q P^T \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

下面证明 A 符合要求，只需证明：$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}_2$，$\mathcal{R}(A) = \mathcal{M}_1$.

~~(ii) 证明: $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}_2$.~~

~~由 $\{\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_r\}$ 可扩充成 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\{\vec{p}_i\}_{i=1}^n$.~~

(ii) 证明: $\mathcal{R}(A)=\mathcal{M}_1$.

由 Q 的构造可知, $\mathcal{R}(Q)=\mathcal{M}_1$. 所以显然有

$$\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(QP^T)\subseteq\mathcal{R}(Q)=\mathcal{M}_1.$$

另一方面, 注意到 P^T 是一个行满秩的矩阵, 所以是满射, 则对任意向量 $\vec{y}\in\mathbb{R}^n$, 存在 $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, s.t.

$$\vec{y}=P^T\vec{x}.$$

所以 $Q\vec{y}=QP^T\vec{x}=A\vec{x}\in\mathcal{R}(A)$.

由 $\vec{y}$ 的任意性可知, $\mathcal{R}(Q)\subseteq\mathcal{R}(A)$.

综上可得 $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(Q)=\mathcal{M}_1$.

(iii) 证明: $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}_2$.

由 $\{\vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_r\}$ 可扩充成 $\mathbb{R}^n$ 的一组基标准正交基 $\{p_i\}_{i=1}^n$.

因为 $\mathcal{N}_1\perp\mathcal{N}_2$, 且 $\mathcal{N}_1=\mathrm{span}(\vec{p}_1,\cdots,\vec{p}_r)$, 所以

$$\mathcal{N}_2=\mathrm{span}(\vec{p}_{r+1},\cdots,\vec{p}_n).$$

For $r+1\leq j\leq n$, 有

$$A\vec{p}_j=QP^T\vec{p}_j=Q\begin{bmatrix}\vec{p}_1^{\,T}\\ \vdots\\ \vec{p}_r^{\,T}\end{bmatrix}\vec{p}_j=Q\underbrace{\begin{bmatrix}\vec{p}_1^{\,T}\vec{p}_j\\ \vdots\\ \vec{p}_r^{\,T}\vec{p}_j\end{bmatrix}}_{\text{正交性}}=Q\vec{0}_r=\vec{0}_m.$$

所以 $\vec{p}_j\in\mathcal{N}(A)$ for $r+1\leq j\leq n$. 从而有

$$\mathcal{N}_2=\mathrm{span}(\vec{p}_{r+1},\cdots,\vec{p}_n)\subseteq\mathcal{N}(A).$$

由 (ii) 中可知 $\dim\mathcal{R}(A)=\dim\mathcal{M}_1=r$, 所以

$$\dim\mathcal{N}(A)=n-\dim\mathcal{R}(A)=n-r=\dim\mathcal{N}_2.$$

所以~~必~~有 ~~dim~~ $\mathcal{N}(A)=\mathcal{N}_2$.

综上可得, 矩阵 $A=QP^T$ 符合题意. $\square$

3. (a) 计算 $(I_n-P)^2=(I_n-P)(I_n-P)$

$$=I_n-P-P+P^2=I_n-P-P+P=I_n-P.$$

由定义可知, I_n-P 是一个斜投影矩阵.

(b) (i) 证明 $\mathcal{R}(P)=\mathcal{N}(I_n-P)$.

对 $\forall\vec{y}\in\mathcal{R}(P)$, 存在 $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, s.t. $\vec{y}=P\vec{x}$.

所以 $(I_n-P)\vec{y}=(I_n-P)P\vec{x}=(P-P^2)\vec{x}=\vec{0}_n$.

$\Rightarrow\ \vec{y}\in\mathcal{N}(I_n-P)$. 由 $\vec{y}$ 的任意性可知, $\mathcal{R}(P)\subseteq\mathcal{N}(I_n-P)$.

另一方面，$\forall \vec{x} \in N(I_n-P)$，有 $(I_n-P)\vec{x}=0 \Rightarrow \vec{x}=P\vec{x} \in R(P)$.
由 $\vec{x}$ 的任意性可知，$N(I_n-P) \subseteq R(P)$.
综上可得，$R(P)=N(I_n-P)$.

(ii) ~~证明~~ $R(I_n-P)=N(P)$.
注意到 $(P^T)^2=(P^2)^T=P^T$. 由定义及(a)可知，
P^T 和 $(I_n-P)^T=I_n-P^T$ 也是斜投影矩阵.
由 (i) 可知，$R(P^T)=N(I_n-P^T)=N((I_n-P)^T)$
$\Rightarrow R(P^T)^{\perp}=N((I_n-P)^T)^{\perp}$.
$\Rightarrow N(P)=R(I_n-P)$. ▨

(c) 结论：这种分解存在且唯一. 给定 $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$，有
存在性：定义 $\vec{v_1}=P\vec{v}$，$\vec{v_2}=(I_n-P)\vec{v}$，显然有
$$\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}，\text{ 且 } \vec{v_1} \in R(P), \quad \vec{v_2} \in R(I_n-P).$$
唯一性：假设存在两组分解：
$$\vec{v}=\vec{v_1}+\vec{v_2}=\tilde{v_1}+\tilde{v_2}，\text{ 且 } \vec{v_1}, \tilde{v_1} \in R(P), \ \vec{v_2}, \tilde{v_2} \in R(I_n-P).$$
则有 $\vec{v_1}-\tilde{v_1}=\tilde{v_2}-\vec{v_2} \in R(P) \cap R(I_n-P) \underset{\text{由(b)可知}}{=} N(I_n-P) \cap N(P)$.

考察交集 $N(I_n-P) \cap N(P)$，取其中任意一个向量 $\vec{x}$，有
$$\vec{x}=I_n\vec{x}-P\vec{x}+P\vec{x}=(I_n-P)\vec{x}+P\vec{x}=\underset{x \in N(I_n-P)}{\vec{0}_n}+\underset{\vec{x} \in N(P)}{\vec{0}_n}=\vec{0}_n.$$
所以 $N(I_n-P) \cap N(P)=\{\vec{0}_n\}$.
所以 $\vec{v_1}-\tilde{v_1}=\tilde{v_2}-\vec{v_2}=\vec{0}_n$.
$\Rightarrow \vec{v_1}=\tilde{v_1}$，且 $\vec{v_2}=\tilde{v_2}$.
~~综~~综上可得，斜投影的分解总是存在且唯一的.

(d) 构造一个~~构~~非矩阵 P，s.t. $P^2=P$，但是 $P^T \neq P$.
考虑 $P=\vec{u}\vec{v}^T$ 这种结构，应有
$$P^2=(\vec{u}\vec{v}^T)^2=\vec{u}(\vec{v}^T\vec{u})\vec{v}^T=(\vec{v}^T\vec{u})\vec{u}\vec{v}^T=(\vec{v}^T\vec{u})P.$$
取 $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^2$，s.t. $\vec{v}^T\vec{u}=1$，且 $P=\vec{u}\vec{v}^T$ 不对称. 例如
$\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，则有 $P=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$，易证得 $P^2=P$，且 $P^T\neq P$. ▨

4. (a) 所拟合的直线为 $y(x)=b$，所以应有

$$y(x_i) = \underbrace{b}_{\text{待定，未知数}} \approx y_i \quad \text{for} \quad 1\le i\le 3.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[b] \approx \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} =: \vec{y} \iff A[b] \overset{\text{也可记为}\cong}{\approx} \vec{y} \text{ with } A=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

所以最小二乘问题为 $\displaystyle\min_{[b]\in\mathbb{R}^1} \|\vec{y} - A[b]\|$

$$\iff \min_{b\in\mathbb{R}} \|\vec{y} - Ab\|^2 \left(= \left\|\vec{y} - \begin{bmatrix}b\\b\\b\end{bmatrix}\right\|^2\right)$$

$$\iff \min_{b\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{3} |y_i - b|^2.$$

注意到 $A=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 是列满秩，可采取正则化方法或QR分解求解.

正则化方法：求解 $A^T A[b] = A^T\vec{y}$.

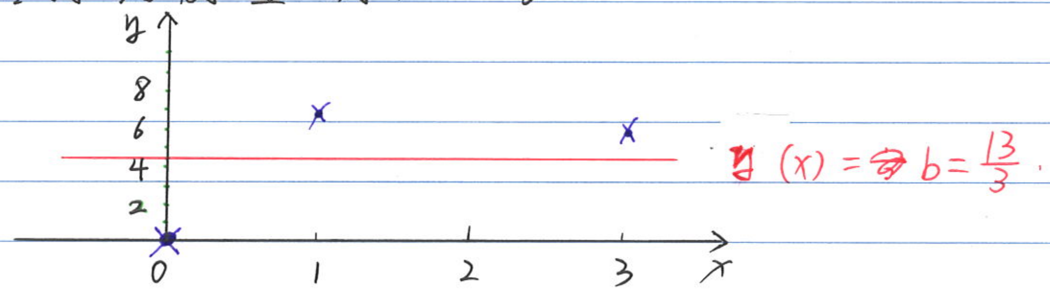
$$\Rightarrow [1\ \ 1\ \ 1]\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}[b] = [1\ \ 1\ \ 1]\begin{bmatrix}0\\7\\6\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow [3]\,[b] = 7+6=13$$

$$\Rightarrow 3b = 13$$

$$\Rightarrow b = \frac{13}{3}.$$

所以拟合得到的直线为~~y~~ $b=\frac{13}{3}$.



(b) 所以拟合的直线为 $y(x) = \underbrace{k}_{\text{待定，未知数}}x$，~~Fk~~ 所以应有

$y(x_i) = k\, x_i \approx y_i \quad \text{for } 1 \le i \le 3.$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} [k] \approx \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A[k] \underset{\cong}{\approx} \vec{y} \text{ with } A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

i.e. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} [k] \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}.$

所以最小二乘问题为 $\min\limits_{[k]\in\mathbb{R}^1} \|\vec{y} - A[k]\|$

$$\Leftrightarrow \min_{k\in\mathbb{R}} \|\vec{y} - A[k]\|^2 \left(= \left\| \vec{y} - \begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{bmatrix} \right\|^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \min_{k\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{3} |y_i - kx_i|^2$$

注意到 $A = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ 是列满秩，可采取正则化方法或QR分解求解。

这里我们采取QR分解：A的简化QR分解为

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = Q_1 R_1 = \underset{3\times 1}{[\vec{q}_1]}\ \underset{1\times 1}{[r_{11}]} \in \mathbb{R}^{3\times 1}$$

只需将唯一的列向量作单位~~化~~化：$r_{11} = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$

$\vec{q}_1 = \dfrac{1}{r_{11}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$ 关于A的正交投影矩阵 $P_A = Q_1 Q_1^T.$

求解 $\vec{y}$ 到 $\mathcal{R}(A)$ 上的投影，~~或者~~ $P_A \vec{y} = Q_1 Q_1^T \vec{y}$，应有

$$A[k] = Q_1 Q_1^T \vec{y}$$

$$Q_1 R_1 [k] = Q_1 Q_1^T \vec{y}$$

两端左乘 Q_1^T，则有 $\underbrace{(Q_1^T Q_1)}_{\text{单位矩阵 } I_1} R_1 [k] = \underbrace{(Q_1^T Q_1)}_{I_1} Q_1^T \vec{y}$

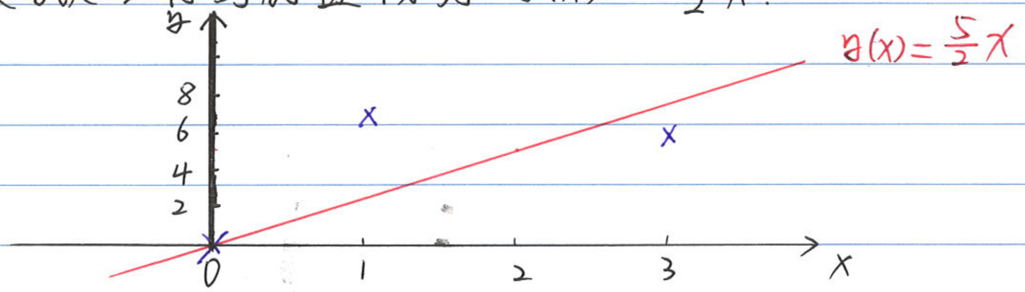
$$\Rightarrow R_1 [k] = Q_1^T \vec{y}$$

$$\Rightarrow [r_{11}][k] = \frac{1}{\sqrt{10}} [0 \ \ 1 \ \ 3] \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \quad r_{11}\, k = \sqrt{10}\, k = \frac{1}{\sqrt{10}}\,(7+3\cdot 6) = \frac{25}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}.$$

所以拟合得到的直线为 $y(x)=\frac{5}{2}x$.



(c) 所拟合的直线为 $y(x)=k\,x+b=[x \quad 1]\underbrace{\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix}}_{\text{待定参数}}$，所以应有

$$y(x_i)=kx_i+b=[x_i \quad 1]\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix} \approx y_i \quad \text{for } 1\le i\le 3.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x_1 & 1\\ x_2 & 1\\ x_3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \iff A\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix} \underset{\cong}{\approx} \vec{y} \quad \text{with } A=\begin{bmatrix}x_1 & 1\\ x_2 & 1\\ x_3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}.$$

所以最小二乘问题为 $\displaystyle\min_{\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2} \left\| \vec{y} - A\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix} \right\|$

$$\iff \min_{\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2} \left\| \vec{y} - A\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix} \right\|^2 \left(= \left\| \vec{y} - \begin{bmatrix}kx_1+b\\kx_2+b\\kx_3+b\end{bmatrix} \right\|^2 \right)$$

$$\iff \min_{\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{3} \left| y_i - (kx_i+b) \right|^2.$$

注意到 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ 是列满秩，可采取正则化方法或QR分解求解.

以正则化方法为例：正则化方程为 $A^T A\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix} = A^T\vec{y}$.

代入A和$\vec{b}$，有

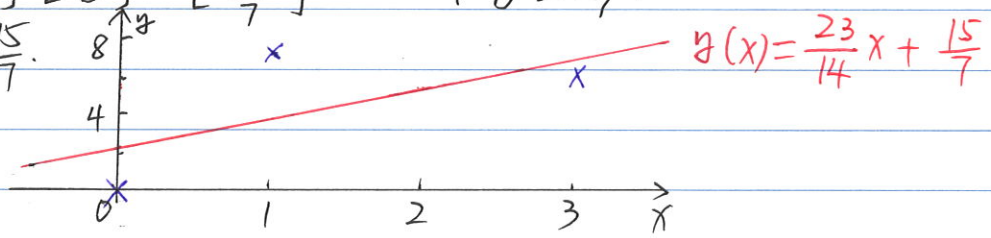
$$\begin{bmatrix}0&1&3\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&3\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\7\\6\end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}10&4\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\13\end{bmatrix}.$$

$$\xrightarrow{R_2-\frac{2}{5}R_1}\begin{bmatrix}10&4\\0&\frac{7}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\3\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\cdot\frac{5}{7}}\begin{bmatrix}10&4\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\\frac{15}{7}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1-4R_2}\begin{bmatrix}10&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{115}{7}\\\frac{15}{7}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}k=\frac{23}{14}\\b=\frac{15}{7}.\end{cases}$$

所以 $y(x)=\frac{23}{14}x+\frac{15}{7}$.



熟悉标准的表述方式，i.e. "$\|\vec{b}-A\vec{x}\|^2$"，可能会直接写出最小二乘问题.

5. 记给定矩阵为A，根据其结构，我们仅取前3列.

$$\begin{vmatrix}1+x_1y_1&1+x_1y_2&1+x_1y_3\\1+x_2y_1&1+x_2y_2&1+x_2y_3\\\vdots&\vdots&\vdots\\1+x_ny_1&1+x_ny_2&1+x_ny_3\end{vmatrix}\xrightarrow[C_3-C_1]{C_2-C_1}\begin{vmatrix}1+x_1y_1&(y_2-y_1)x_1&(y_3-y_1)x_1\\1+x_2y_1&(y_2-y_1)x_2&(y_3-y_1)x_2\\\vdots&\vdots&\vdots\\1+x_ny_1&(y_2-y_1)x_n&(y_3-y_1)x_n\end{vmatrix}$$

分两种情形：① $y_2-y_1=0$ 或 $y_3-y_1=0$.

则矩阵A可通过倍加列变换得到一个有零列的矩阵.

② $y_2-y_1\neq0$ 且 $y_3-y_1\neq0$.

则可继续使用倍加列变换，例如

$$\xrightarrow{C_3-\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}C_2}\begin{vmatrix}1+x_1y_1&(y_2-y_1)x_1&0\\1+x_2y_1&(y_2-y_1)x_2&0\\\vdots&\vdots&\vdots\\1+x_ny_1&(y_2-y_1)x_n&0\end{vmatrix}$$

综合可得A总是可以仅通过倍加列变换得到一个有零列的矩阵，而倍加(列)变换不改变行列式函数的取值，所以有

$$\det(A)=0$$

∎