对一个单位矩阵 I_n 作修改：将第 i 行的 k 倍加到第 j 行上，记、
$\alpha_{ji} = k$.

Remark：初等矩阵左乘矩阵 A：初等行变换。
初等矩阵右乘矩阵 A：初等列变换。

Ex 21. $A\vec{x} = \vec{b}$
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

以每列对角元素下方的元素为消元目标，将增广矩阵 $\underbrace{[A \mid \vec{b}]}_{=\tilde{A}}$ 化为阶梯形：

Column 1：将 $a_{21} = 1$ 化为零： $R_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} R_1 = R_2 - \frac{1}{2} R_1 = R_2 + (-\frac{1}{2}) R_1$.

使用 $E_{21;k}$ with $k = -\frac{1}{2} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}$.

则有 $E_{21,k}[A\ \vec{b}] = E_{21,k}\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$1 + (-\frac{1}{2}) \cdot 2 = 0$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} =: \tilde{A} = [a_{ij}]_{3\times4}.$$

将 $a_{31} = -1$ 化为零： $R_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} R_1 = R_3 + (-\frac{a_{31}}{a_{11}}) R_1 = R_3 + kR_1$

使用 $E_{31;k}$ with $k = -\frac{a_{31}}{a_{11}} = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$.

$$E_{31,k}\tilde{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{0} & -2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2} & 1+\frac{4}{2}=3 \end{bmatrix} =: \tilde{A} = [a_{ij}]_{3\times4}$$

继续处理第2列对角元素下方的非零元。

Column 2. 将 $a_{32}=3$ 化为零元素: $R_3-\frac{a_{32}}{a_{22}}R_2=R_3+\left(-\frac{a_{32}}{a_{22}}\right)R_2$.

使用 $E_{32;k}$ with $k=-\frac{a_{32}}{a_{22}}=-\frac{3}{-2}=\frac{3}{2}$.

$$E_{32;k}\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{3}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&3&4\\0&-2&-\frac{3}{2}&0\\0&3&\frac{5}{2}&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&2&3&4\\0&-2&-\frac{3}{2}&0\\0&0&-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}=\frac{1}{4}&3\end{bmatrix}=:\tilde{A}=[a_{ij}]_{3\times4}.$$

此时 $\tilde{A}$ 化为阶梯形矩阵，且 A 对应的阶梯数 $=$ $(\tilde{A}=[A\ \vec{b}])$ 对应的阶梯数 $=$ 未知数的个数. 所以这个线性方程组存在唯一解.

我们可选择使用回代法求解上述线性方程组，或继续使用倍乘矩阵和倍加矩阵化为行简化阶梯形.

☆ 行简化: 主元 $a_{11}=2$ 化为 1. 可使用 $E_{11;k}$ with $k=\frac{1}{2}=\frac{1}{a_{11}}$

$$E_{11;k}\tilde{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&3&4\\0&-2&-\frac{3}{2}&0\\0&0&\frac{1}{4}&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&\frac{3}{2}&2\\0&-2&-\frac{3}{2}&0\\0&0&\frac{1}{4}&3\end{bmatrix}=:\tilde{A}$$

主元 $a_{22}=-2$ 化为 1. 可使用 $E_{22;k}$ with $k=-\frac{1}{2}=\frac{1}{a_{22}}$.

$$E_{22;k}\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&\frac{3}{2}&2\\0&-2&-\frac{3}{2}&0\\0&0&\frac{1}{4}&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&\frac{3}{2}&2\\0&1&\frac{3}{4}&0\\0&0&\frac{1}{4}&3\end{bmatrix}=:\tilde{A}.$$

将主元 $a_{33}=\frac{1}{4}$ 化为 1. 可使用 $E_{33;k}$ with $k=\frac{1}{a_{33}}=4$.

$$E_{33;k}\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&\frac{3}{2}&2\\0&1&\frac{3}{4}&0\\0&0&\frac{1}{4}&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&\frac{3}{2}&2\\0&1&3/4&0\\0&0&1&12\end{bmatrix}=:\tilde{A}.$$

将主元上方的元素通过倍加变换化为零.

将 $a_{23}=\frac{3}{4}$ 化为零: 可使用 $E_{23;k}$ with $k=\cancel{a_{23}}-\frac{a_{23}}{a_{33}}=-\frac{3/4}{1}=-\frac{3}{4}$.

$$E_{23;k}\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-\frac{3}{4}\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&\frac{3}{2}&2\\0&1&\frac{3}{4}&0\\0&0&1&12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&\frac{3}{2}&2\\0&1&0&-9\\0&0&1&12\end{bmatrix}=:\tilde{A}.$$

将 $a_{13}=\frac{3}{2}$ 化为零, 可使用 $E_{13;k}$ with $k=-\frac{a_{13}}{a_{33}}=-\frac{\frac{3}{2}}{1}=-\frac{3}{2}$.

$$E_{13;k}\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&0&-\frac{3}{2}\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&3/2&2\\0&1&0&-9\\0&0&1&12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1&0&2-\frac{3}{2}\cdot 12=-16\\0&1&0&-9\\0&0&1&12\end{bmatrix}=:\tilde{A}.$$

将 $a_{12}=1$ 化为零, 可使用 $E_{12;k}$ with $k=-\frac{a_{12}}{a_{22}}=-\frac{1}{1}=-1$.

$$E_{12;k}\tilde{A}=\begin{bmatrix}1&\cancel{0}-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&-16\\0&1&0&-9\\0&0&1&12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&-7\\0&1&0&-9\\0&0&1&12\end{bmatrix}\quad \text{行简化阶梯形.}$$

$\vec{x}$

$\Rightarrow\quad x_1=-7,\quad x_2=-9,\quad x_3=12.$

Verification: $A\vec{x}=\begin{bmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7\\-9\\12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(-7)+2(-9)+3\cdot12=4\\1(-7)+(-1)(-9)+0\cdot12=2\\(-1)(-7)+2(-9)+1\cdot12=1\end{bmatrix}=\vec{b}.$

Remark: 每一列的操作可以合并，例如

$$E_{31}E_{21}[A\ \ \vec{b}]=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\underbrace{a_{14}}_{=b_1}\\ \boxed{0}&*&*&*\\ \boxed{0}&*&*&*\end{bmatrix}$$

设计算

$$E_1:=E_{31}E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&1&0\\\frac{1}{2}&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{a_{21}}{a_{11}}&1&0\\-\frac{a_{31}}{a_{11}}&0&1\end{bmatrix}.$$

看上去乘法运算的结果是把非零元素放在了一起. 事实上，这个结论是普遍成立的.

Remark: E_{ji} 有很多快速、便利的运算法则，可参考数值代数等相关文献. 这里我们只使用结论.

For any given matrix $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 我们可使用形如

$$E_1=\begin{bmatrix}1&&&0\\-l_{21}&1&&\\\vdots&&\ddots&\\-l_{m1}&0&&1\end{bmatrix}\text{ or in general, }E_j=\begin{bmatrix}1&\ddots&&&0\\&&1&&\\&&-l_{j+1,j}&1&\\&0&\vdots&0&\ddots\\&&-l_{m,j}&&&1\end{bmatrix}$$

初始化 $A_1=A=[a_{ij}^{(1)}]_{m\times n}$

定义循环: For $j=1,2,\cdots,\underbrace{\min\{m,n\}-1}_{=t}$

令 $A_{j+1}:=E_jA_j$

其中构造 E_j, s.t. A_{j+1} 的第j列对角元 $a_{jj}^{(j+1)}$ 下方元素均为零.

END For.

最终，有
$$A_{t+1}=\begin{bmatrix}a_{11}^{(t+1)}&a_{12}^{(t+1)}&&a_{1,m}^{(t+1)}&a_{1,m+1}^{(t+1)}&\cdots&a_{1,n}^{(t+1)}\\0&a_{22}^{(t+1)}&&\vdots&\vdots&&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&a_{m-1,m}^{(t+1)}&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{m,m}^{(t+1)}&a_{m,m+1}^{(t+1)}&\cdots&a_{mn}^{(t+1)}\end{bmatrix}$$
for $m\leq n$,

$$\text{or } A_{t+1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(t+1)} & a_{12}^{(t+1)} & & a_{1,n-1}^{(t+1)} & a_{1,n}^{(t+1)} \\ 0 & a_{22}^{(t+1)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1,n-1}^{(t+1)} & a_{n-1,n}^{(t+1)} \\ & & & 0 & a_{n,n}^{(t+1)} \\ & & & 0 & 0 \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ for $m > n$.

To ~~ma~~ summarize, we have $A_{t+1} = E_t E_{t-1} E_{t-2} \cdots E_2 E_1 A_1$.

Step 1. 初始化: $A_1 = A = [\,a_{ik}^{(1)}\,]_{m\times n}$.

Step 2. 依次处理第1列至第 t 列, 其中 $t = \min\{m,n\}-1$, 可构造成循环.

处理第1列:

定义 $E_1 := \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -l_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -l_{m1} & & & 1 \end{bmatrix}$ with $l_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}$ for $2 \le i \le m$.

计算可知

$$A_2 := E_1 A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{m2}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} \end{bmatrix} = [\,a_{ik}^{(2)}\,]_{m\times n}.$$

new

处理第2列:

定义 $E_2 := \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & -l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & -l_{m2} & & & 1 \end{bmatrix}$ with $l_{i2} = \dfrac{a_{i2}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ for $3 \le i \le m$.

计算可知

$$A_3 := E_2 A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \cdots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(3)} & \cdots & a_{mn}^{(3)} \end{bmatrix} = [\,a_{ik}^{(3)}\,]_{m\times n}$$

new

令 $j = 1, 2, \cdots, t-1$, 表示需处理的列指标, 则有, 一般的,

定义 $E_j := \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{j+1,j} & 1 & & \\ & & -l_{j+2,j} & & \ddots & \\ & & \vdots & & & \\ & & -l_{m,j} & & & 1 \end{bmatrix}$ (j,j) with $l_{i,j} = \dfrac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}$ for $i+1 \leq j \leq m$.

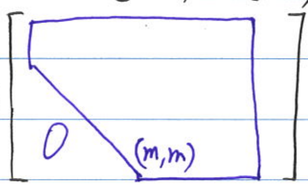
则有

$$A_{j+1} := E_j A_j = \begin{bmatrix} a_{11}^{(j)} & a_{12}^{(j)} & & & & & \\ 0 & a_{22}^{(j)} & & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & & \\ \vdots & \vdots & & a_{jj}^{(j)} & a_{j,j+1}^{(j)} & \cdots & a_{j,n}^{(j)} \\ & & & 0 & a_{j+1,j+1}^{(j+1)} & \cdots & a_{j+1,n}^{(j+1)} \\ & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & a_{m,j+1}^{(j+1)} & \cdots & a_{mn}^{(j+1)} \end{bmatrix}$$

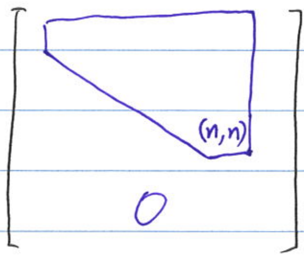
new

$$= \left[\, a_{ik}^{(j+1)} \,\right]_{m\times n}.$$

Finally, for $t = \min\{m,n\}-1$, we have

$\cancel{A_t = E_t}$ $A_{t+1} = E_t A_t =$ 

for $m \leq n$,

or 

for $m > n$.

$\square$

To summarize, $E_t E_{t-1} \cdots E_2 E_1 A_1 = A_{t+1} =: R$.