《线性代数》作业 3

截止时间：10月15日18:00。
纸质。请写出完整的计算等解题过程。提交于课堂或近春园西楼入口处我的信箱。

1. 证明所有形如$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$的矩阵全部彼此可交换。

2. 证明：如果n阶方阵A满足$A^2 = A$，则$I_n - 2A$可逆。

3. 举例验证下列结论。
   (a) 存在可逆矩阵A, B，使得$A + B$不可逆。
   (b) 存在不可逆矩阵A, B，使得$A + B$可逆。
   (c) 存在3阶不可逆矩阵A，使得对任意$k > 0$，$A + kI_3$都对角占优。

4. 证明：对称矩阵的逆矩阵也是对称矩阵；反对称矩阵的逆矩阵也是反对称矩阵。

5. 利用分块矩阵求$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$的逆矩阵。

6. 设A, B可逆，证明分块矩阵$X = \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$和$U = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$均可逆，并求其逆。

7. 求矩阵$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$的$LU$分解，其中$L$为单位下三角矩阵。再求出$A^{-1}$.

8. 利用矩阵A的LU分解求解下列线性方程组：

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}: \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \\ 23 \\ 20 \end{bmatrix}.$$