

Review 可降阶的ODE

1) 方程不显含未知函数 x : $F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \dots, x^{(n)}) = 0$

令 $y = x^{(k)}$.

2) 方程不显含自变量 t : $F(x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$

令 $y = x'$, 视 y 为新未知函数, 视 x 为新自变量.

3) m 次齐次方程 (m 为正整数): $F(t, x, x', \dots, x^{(n)}) = 0$

令 $u = u(t) = \frac{1}{x} x'$

4) 已知齐次线性方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0$$

的非零解 $x = \varphi(t)$. 令 $x = \varphi(t)y(t)$. (常数变易法)

§ 4. 线性常微分方程解的结构

1. 线性ODE解的性质

Thm1.(叠加原理) 若 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0 \quad (1)$$

的解, 则 $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ 也是(1)的解. 若 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = f(t) \quad (2)$$

的解, 则 $x_1(t) - x_2(t)$ 是(1)的解. \square

Remark: 类比线性代数中线性方程组的理论.



Remark: 由解的叠加原理, 齐次线性ODE(1)的解集合对线性运算封闭, 是一个线性空间. 另外, 若已知非齐次线性ODE(2)的一个特解 $\varphi_0(t)$, 则(2)的通解为

$$x(t) = \varphi(t) + \varphi_0(t),$$

其中 $\varphi(t)$ 是(2)所对应的齐次方程(1)的通解.

换言之, 要求解(2), 只要找出它的一个特解, 并求出对应的齐次常微分方程(1)的通解.



Question: 如何求 n 次齐次线性ODE

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0 \quad (1)$$

的通解？(1)的解集合是一个线性空间,这个线性空间的维数是多少？如何求出空间的一组基？

Question: 如何求 n 次非齐次线性ODE

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = f(t) \quad (2)$$

的一个特解？

先解决第一个问题,为此,需要引入函数组线性相关与线性无关的概念.

2.函数组的线性相关与线性无关

Def. 设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ 是定义在区间 I 上的函数, 若存在不全为0的常数 c_1, c_2, \dots, c_m , 使得

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_m\varphi_m(t) \equiv 0, \quad \forall t \in I,$$

则称 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ 在区间 I 上线性相关, 否则称 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ 在区间 I 上线性无关.

例: 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ 两两互不相等, 则 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_m t}$ 在任意区间上线性无关.(常用结论!)

证明:任取区间 I , 设有常数 $c_1, c_2, \dots, c_m, s.t.$

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_m e^{\lambda_m t} \equiv 0, \quad \forall t \in I.$$

上式两边对 t 求导, 则 c_1, c_2, \dots, c_m 满足方程组

$$\begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_m e^{\lambda_m t} \equiv 0, \\ \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \lambda_m c_m e^{\lambda_m t} \equiv 0, \\ \vdots \\ \lambda_1^{m-1} c_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^{m-1} c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + \lambda_m^{m-1} c_m e^{\lambda_m t} \equiv 0. \end{cases}$$

此方程组的系数矩阵行列式为



$$\det \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} & \cdots & e^{\lambda_m t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_m e^{\lambda_m t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_2^{m-1} e^{\lambda_2 t} & \cdots & \lambda_m^{m-1} e^{\lambda_m t} \end{pmatrix}$$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^m \lambda_k t\right) \prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0, \quad \forall t \in I.$$

因此方程组只有零解, 即 $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$.
 故 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_m t}$ 线性无关. \square

Remark: $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 则

1) $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ 线性无关;

2) $1, e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \dots, x^ne^{\lambda x}$ 线性无关;

3) $1, \sin \alpha x, \cos \alpha x, \dots, \sin n\alpha x, \cos n\alpha x$ 线性无关;

4) $1, e^{\alpha x} \sin \beta x, e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^ne^{\alpha x} \sin \beta x, x^ne^{\alpha x} \cos \beta x$ 线性无关.

下面给出判断函数组 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ 在区间 I 上线性相关的法则.

Def. 定义函数组 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \in C^{m-1}(I)$ 在区间 I 上的 Wronsky 行列式为

$$W(t) = W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m](t)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_m \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_m' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)} & \varphi_2^{(m-1)} & \cdots & \varphi_m^{(m-1)} \end{pmatrix} (t).$$

Thm2. 函数组 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m \in C^{m-1}(I)$ 在区间 I 上线性相关的必要条件是 $W(t) = W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m](t) \equiv 0$.

Proof: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ 在区间 I 上线性相关, 则存在不全为0的常数 c_1, c_2, \dots, c_m , 使得

$$c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_m\varphi_m(t) \equiv 0, \quad \forall t \in I.$$

$$\text{故} \begin{cases} c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_m\varphi_m(t) \equiv 0, \\ c_1\varphi_1'(t) + c_2\varphi_2'(t) + \dots + c_m\varphi_m'(t) \equiv 0, \\ \vdots \\ c_1\varphi_1^{(m-1)}(t) + c_2\varphi_2^{(m-1)}(t) + \dots + c_m\varphi_m^{(m-1)}(t) \equiv 0 \end{cases}$$

有非零解 c_1, c_2, \dots, c_m , 因此系数矩阵行列式

$$W(t) = W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m](t) \equiv 0. \quad \square$$

Remark. 一般情况下, Thm2 的逆命题不成立. 原因在于, 非零解 c_1, c_2, \dots, c_m 是 t 的函数, 不一定是一组不依赖于 t 的不全为零的常数. 例如

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t^2, & t > 0, \end{cases} \quad \psi(t) = \begin{cases} t^2, & t \leq 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

在 \mathbb{R} 上线性无关, 但 $W[\varphi, \psi](t) \equiv 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Remark: 当 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in C^n(I)$ 为 n 次齐次线性 ODE 的 n 个解时, Thm2 的逆命题也成立. 这时, 解的存在唯一性定理起了重要作用.

3.线性常微分方程解的结构

Thm3. 设函数 $a_k(t) \in C(I) (k = 1, 2, \dots, n)$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in C^n(I)$ 为 n 次齐次线性 ODE

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)x' + a_n(t)x = 0 \quad (*)$$

的 n 个解, 则以下命题等价:

- (1) $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 在区间 I 上线性相关.
- (2) $W(t) = W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t) \equiv 0, \forall t \in I$.
- (3) 存在 $t_0 \in I$, 使得 $W(t_0) = 0$.

Proof: (1) \Rightarrow (2) 即 Thm2, (2) \Rightarrow (3) 显然. 下证 (3) \Rightarrow (1).

因 $W(t_0) = 0$, 存在不全为0的常数 $c_1, c_2, \dots, c_n, s.t.$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) & \cdots & \varphi_n(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \cdots & \varphi_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t_0) & \varphi_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0.$$

则ODE(*)的解 $x(t) \triangleq c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t)$,
满足 $x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(n-1)}(t_0) = 0$. 由解的存在唯一性定理, $x(t) \equiv 0$. 故 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 线性相关. \square

Remark: $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in C^n(I)$ 为 n 阶齐次线性 ODE 的 n 个解, $t_0 \in I$. 则

$$(1) \quad W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t) = 0, \forall t \in I.$$

$$\Leftrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \text{ 在 } I \text{ 上线性相关.}$$

$$(2) \quad W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t_0) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t) \neq 0, \forall t \in I.$$

$$\Leftrightarrow \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \text{ 在 } I \text{ 上线性无关.} \square$$



Thm4. n 次齐次线性常微分方程

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)x = 0 \quad (t \in I), \quad (1)$$

的所有解构成的集合是连续函数空间 $C(I)$ 的一个 n 维线性子空间. 即存在(1)的 n 个线性无关的解 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$, 使得 $x(t)$ 为(1)的解当且仅当

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t),$$

其中 c_1, c_2, \cdots, c_n 为常数.



Proof: 取 \mathbb{R}^n 中自然基 e_1, e_2, \dots, e_n . 记 $\varphi_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 为(1)的满足以下初值条件的解:

$$(\varphi_k(t_0), \varphi'_k(t_0), \dots, \varphi_k^{(n-1)}(t_0)) = e_k.$$

于是 $W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](t_0) = \det I_n = 1 \neq 0$, 由Thm3知 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 为(1)在区间 I 上的 n 个线性无关的解.

一方面, 由解的叠加原理,

$$x(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + \dots + c_n\varphi_n(t),$$

则是(1)的解.



另一方面,任取(1)的一个解 $\varphi(t)$,设

$$(\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0)) = (d_1, d_2, \dots, d_n).$$

则 $y(t) \triangleq d_1\varphi_1(t) + d_2\varphi_2(t) + \dots + d_n\varphi_n(t)$ 也是方程(1)的满足相同初值条件的解. 由解的存在唯一性定理得

$$\varphi(t) = y(t) = d_1\varphi_1(t) + d_2\varphi_2(t) + \dots + d_n\varphi_n(t). \quad \square$$



Corollary. 设 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 为

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0 \quad (1)$$

的 n 个线性无关的解, $\varphi_0(t)$ 为

$$x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = f(t) \quad (2)$$

的一个特解, 则(2)的通解为

$$x(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(t),$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_n 为任意常数.



Remark: 推论中(2)的特解 $x_0(t)$ 可取为

$$\varphi_0(t) = \sum_{k=1}^n \left[\varphi_k(t) \cdot \int_{t_0}^t \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s) ds \right],$$

其中, $W(s) = W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n](s)$ 为 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 的 Wronsky 行列式, 而 $W_k(s)$ 是 $W(s)$ 的第 n 行第 k 列元素的代数余子式 (这一结论将在后面“线性常微分方程组”中给出证明).

由此, 非齐次线性 ODE (2) 的通解形如

$$x(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \varphi_k(t),$$

其中

$$c_k(t) = \int \frac{W_k(s)}{W(s)} f(s) ds, (k = 1, 2, \dots, n).$$

这为用常数变易法求非齐次方程 (2) 的通解提供了理论依据. 同时也可以看出, 求解线性 ODE 的关键是找出齐次方程的解.

Remark: n 阶非齐次线性ODE(2)的解集合不再是一个线性空间. 这是因为 $x(t) \equiv 0$ 不是解. 由上面的推论知, (2) 有 $n+1$ 个线性无关的解:

$$\varphi_0(t) \text{ 及 } \varphi_0(t) + \varphi_k(t) (k = 1, 2, \dots, n).$$

反之, 任给(2)的 $n+1$ 个线性无关的解 $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, 则(2)的通解为

$$x(t) = \varphi_0(t) + \sum_{k=1}^n c_k (\varphi_k(t) - \varphi_0(t)),$$

其中 c_1, c_2, \dots, c_n 为任意常数. \square



例: 求非齐次方程 $x'' + \omega^2 x = a$ 的通解及满足初值条件 $x(0) = 1, x'(0) = 0$ 的特解.

解: 不难验证方程有特解 $x = a/\omega^2$, 而对应的齐次方程 $x'' + \omega^2 x = 0$ 有线性无关的解 $\sin \omega t, \cos \omega t$. 于是, 非齐次方程的通解为:

$$x(t) = a/\omega^2 + c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t.$$

由 $x(0) = 1, x'(0) = 0$ 得, $a/\omega^2 + c_2 = 1, c_1 \omega = 0$. 因此, $c_2 = 1 - a/\omega^2, c_1 = 0$, 满足初值条件 $x(0) = 1, x'(0) = 0$ 的特解为 $x(t) = a/\omega^2 + (1 - a/\omega^2) \cos \omega t$. \square

4.二阶线性ODE的常数变易法

若 n 阶齐次线性ODE(1)的线性无关解 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, 则(1)一定有解形如 $x(t) = \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(t)$, 其中 c_k ($k = 1, 2, \dots, m$) 为任意常数. 将常数 c_k 变易为函数 $c_k(t)$, 并设对应的非齐次线性ODE(2)的通解形如 $x(t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) \varphi_k(t)$, 然后确定 $c_k(t)$ ($k = 1, 2, \dots, m$), 以求得(2)的通解. 这种方法称为常数变易法.

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad (3)$$

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t) \quad (4)$$

Case1. 已知齐次线性ODE的两个线性无关解

已知 $x_1(t), x_2(t)$ 是 (3) 的两个线性无关解. 设 (4) 的通解为: $x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$. 则

$$x' = c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_1x_1' + c_2x_2'.$$

为避免 x'' 中出现 c_1'' 和 c_2'' , 假设

(稍后解释合理性) $c_1'x_1 + c_2'x_2 = 0$.

无解?
(5) 少解?

于是 $x' = c_1 x_1' + c_2 x_2'.$

$$x'' = c_1' x_1' + c_2' x_2' + c_1 x_1'' + c_2 x_2''.$$

将 x, x', x'' 代入方程(4),注意到 x_1, x_2 为(3)的解,则

$$c_1' x_1' + c_2' x_2' = f(t). \quad (6)$$

联立(5),(6),得 $c_1'(t) = -\frac{x_2(t)f(t)}{W(t)}, c_2'(t) = \frac{x_1(t)f(t)}{W(t)},$

其中 $W(t) = W[x_1, x_2](t)$ 为 Wronsky 行列式. 积分得 $c_1(t), c_2(t)$, 进而得(4)的通解.

Remark: (条件(5)的合理性) 添加假设条件(5)后, $c_1'(t)$, $c_2'(t)$ 仍有解. 记

$$c_1(t) = u(t) + \lambda_1, c_2(t) = v(t) + \lambda_2,$$

其中 λ_1, λ_2 为任意常数, 则

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t) \\ &= [u(t)x_1(t) + v(t)x_2(t)] + [\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] \end{aligned}$$

依然是 (4) 的通解. 因此条件 (5) 是合理的. 事实上, 条件 (5) 是**必要**的. 这一点在后面的章节将给出解释. \square

例: 已知 t 和 e^t 为齐次线性ODE $(t-1)x'' - tx' + x = 0$ 的两个线性无关解, 求以下非齐次线性ODE的通解

$$(t-1)x'' - tx' + x = (t-1)^2.$$

解: 设非齐次线性ODE的通解为 $x(t) = u(t)t + v(t)e^t$,

且满足

$$u'(t)t + v'(t)e^t = 0. \quad (*)$$

代入, 得

$$u'(t) + v'(t)e^t = t - 1. \quad (**)$$

联立(*)(**)得

$$u' = -1, v' = te^{-t}.$$

积分得

$$u = -t + c_1, v = -e^{-t} - te^{-t} + c_2.$$

所求通解为 $x(t) = (-t + c_1)t + (-e^{-t} - te^{-t} + c_2)e^t$. \square

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad (3)$$

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t) \quad (4)$$

Case2. 已知齐次方程的一个非零解

已知(3)的一个非零解 $x_0(t)$. 设(4)的通解为

$$x(t) = c(t)x_0(t).$$

将 x 及 $x' = c'x_0 + cx'_0$, $x'' = c''x_0 + 2c'x'_0 + cx''_0$ 代入(4)得

$$x_0c'' + [2x'_0 + px_0]c' + [x''_0 + px'_0 + qx_0]c = f(t).$$

$$x_0c'' + [2x'_0 + p(t)x_0]c' = f(t). \quad (7)$$

(7)可降阶为一阶线性ODE, 进而解出 $c(t)$.

Remark. 尽管只知道(3)的一个非零解 $x_0(t)$, 常数变易法求出的解 $x(t) = c(t)x_0(t)$ 仍然是(4)的通解. 为此, 只要验证这样求出来的解可以表示成如下形式

$$x(t) = \psi(t) + \lambda x_0(t) + \mu x_1(t),$$

其中, λ, μ 为任意常数, 而 $x_0(t), x_1(t)$ 为(3)的两个线性无关解.

事实上, 这里的两个任意常数 λ, μ 来源于方程(8)求解 $u(t) = c'(t)$, 再积分求解 $c(t)$. 具体证明略. \square

例: 已知 $x_0(t) = e^t$ 为方程 $x'' - 2x' + x = 0$ 的解. 求 $x'' - 2x' + x = e^t/t$ 的通解.

解: 设通解为 $x(t) = c(t)e^t$, 则

$$x' = (c + c')e^t, \quad x'' = (c'' + 2c' + c)e^t.$$

将 x, x', x'' 代入非齐次方程得 $c'' = 1/t$. 于是

$$c(t) = t \ln |t| + \lambda_1 t + \lambda_2.$$

通解为 $x(t) = \lambda_1 t e^t + \lambda_2 e^t + t e^t \ln |t|$. \square



Question. 要求二阶非齐次线性ODE的通解, 是已知对应齐次线性ODE的一个非零解来得简单, 还是已知对应齐次线性ODE的两个线性无关解简单?



作业：习题7.4

No. 2, 5 (2) (4), 8

