1、判断以下矩阵是否可相似对角化，并说明理由。

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 23 & 69 & 188 \\ 69 & 45 & 202 \\ 188 & 202 & 68 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

2. 判断以下实矩阵是否正定，说明理由.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，分别找出 $N(A)$，$N(A^T)$，$A)$，(A^T) 的一组基

4. 设 $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，求P的特征多项式.

5. 设 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=QR$，Q为第一个矩阵，R为第二个.

(1) 验证 $Q^TQ=I$ (2) 求到 $C(A)$ 的投影矩阵 (3) 设 $b=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，求 $AX=b$ 最小二乘解

6. 已知整数 1653, 2581, 3451, 4582 可以被29整除，证明下式也可被29整除

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

7. 解关于x的方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=0$$

8. 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是$R^n$的非零正交向量组，证明

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$线性无关

(2) 若$r<n$，总可补充$n-r$个向量$\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_n$，使得$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$构成$R^n$的正交基

9. 若$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$为一组标准正交基，且$(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)Q$，则$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$也是一组标准正交基的充要条件为$Q$是正交矩阵.

10. 设三阶矩阵A的第1行为(a, b, c)不全为0，矩阵$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ (k为常数，且$AB=0$)，求$Ax=0$的通解.

11. 设A为n阶方阵($n \geq 3$)，证明$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.（$|A|$表示$\det(A)$，下同）

12. 设n元线性方程组$Ax=b$，其中

$$A = \begin{bmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n\times n} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1) 求$|A|$　　(2) 当a为何值时，方程组有唯一解，求x_1

(3) 当a为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

13. 设A为n阶非零方阵，A^*为伴随矩阵，A^T为转置，证当$A^* = A^T$时，$|A| \neq 0$.

14. 求$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$

样题（二）简要解答

说明：

1. 样题仅供学生熟悉考试形式。因教学进度等方面的差异，样题对实际考试内容、考试难度等无任何指导。
2. 《样题（二）简要解答》仅给出题目答案与提示。**请同学们在考试作答过程中给出详细解题步骤。**

题1 (8分). 判断以下矩阵是否可以相似对角化，并简单说明理由。

$$(a)\begin{bmatrix}3&4\\0&5\end{bmatrix}\qquad (b)\begin{bmatrix}100&200\\0&100\end{bmatrix}\qquad (c)\begin{bmatrix}23&69&188\\69&45&202\\188&202&68\end{bmatrix}\qquad (d)\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\4&8&12\end{bmatrix}$$

解1. *(a) 可对角化，因为有两个互异特征值。*

(b) 不可对角化，因为特征值唯一，但是100的几何重数是1，小于它的代数重数2.

(c) 可对角化，因为实对称阵都可对角化。

(d) 可对角化。这是一个秩为1的矩阵，故0的几何重数是2，迹是17，故第三个特征值是17，17的几何和代数重数都为1，0的几何和代数重数都为2.

题2 (8分). 判断以下实对称阵是否正定，并简单说明理由。

$$(a)\begin{bmatrix}1&2\\2&6\end{bmatrix}\qquad (b)\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$$(c)\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&-2&0\\3&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-2&3\\0&0&3\end{bmatrix}\qquad (d)\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&0&0\\0&-6&0\\0&0&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&1\end{bmatrix}$$

解2. *(a)* 正定。理由略。

(b) 不正定。理由略。

(c) 正定。理由略。

(d) 不正定。理由略。

题3 (10分). 设$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&0&0&1&1\end{bmatrix}$，分别找出$N(A)$, $N(A^T)$, $C(A)$, $C(A^T)$的一组基。

解3. *(1)* $(1,0,1,1,1)$, $(0,1,1,1,1)$, $(0,0,0,1,1)$ 是$C(A^T)$ 的一组基。

(2) $N(A)$ 的基是$(-1,-1,1,0,0)$, $(0,0,0,-1,1)$.

(3) $\mathbb{R}^3$ 的任意一组基均为$C(A)$ 的基。

(4) 基是空集。

题4 (5分). 设$P=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\2&3\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&3\end{bmatrix}$. 求$P$ 的特征多项式，并说明理由。

解4. 特征多项式是$\lambda(\lambda-1)^2$。

题5 (16分). 设

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&2\\0&0&1\end{bmatrix},$$

第一个矩阵记为Q，第二个矩阵记为R.

(1) (2分) 验证$Q^TQ=I$.

(2) (6分) 求到$C(A)$ 的投影矩阵。

(3) (8分) 设$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}4\\0\\0\\0\end{bmatrix}$. 求$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解。

解5. *(1)* 略。

(2) 到$C(A)$ 的投影矩阵是

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

(3) 最小二乘解是$\hat{x} = (2\sqrt{2}+4, -2, 2)$.

题6 (6分). 已知：整数$1653, 2581, 3451, 4582$可以被29整除. 证明下面的四阶行列式值被29整除.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

解6. 略。

题7 (6分). 解关于x的方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$$

解7. $x = 1,\ 2,$ 或-2.

题8 (6分). 定义$M_2(\mathbb{R})$上线性变换$T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ 满足

$$T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求T在基$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$下的矩阵。

解8. T 在基$E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵是$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

题9 (20分). 设$A=\begin{bmatrix}2&0\\1&1\\0&2\end{bmatrix}$.

(a) (10分) 求A的奇异值分解$A=U\Sigma V^T$，其中U 是3阶正交阵，V 是2阶正交阵。

(b) (2分) 应用(a)写出A的四个基本子空间的一组标准正交基。

(c) (8分) 设$M=\begin{bmatrix}0&A\\A^T&0\end{bmatrix}$. 若$A\boldsymbol{v}=\sigma\boldsymbol{u}$, 其中$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$是奇异向量(singular vector), σ是奇异值(singular value), 证明$\begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\\boldsymbol{v}\end{bmatrix}$是$M$的特征向量，并由此应用奇异向量给出5阶正交阵$Q$, 使得$Q^TMQ$是对角阵.

解9. *(a)* $U=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&0&-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt6}\end{bmatrix}$, $\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt6&0\\0&2\\0&0\end{bmatrix}$, $V=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

(b) 略。

(c)

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&\frac12&\frac12&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&0&0&-\frac{2}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt6}&-\frac12&-\frac12&\frac{1}{\sqrt6}\\\frac12&-\frac12&\frac12&-\frac12&0\\\frac12&-\frac12&-\frac12&\frac12&0\end{bmatrix}.$$

题10 (10分). 在以下两题中选且仅选一道题完成。

(1) $C:3x_1^2+4x_1x_2+6x_2^2=1$ 是实平面上哪种二次曲线，椭圆、双曲还是抛物线？若C 是椭圆，请算出它的长、短轴长，以及长、短轴所在的直线方程；若C 是双曲线，请算出它的虚、实轴长以及虚、实轴所在的直线方阵，以及两条渐近线方程；若C 是抛物线，请算出它的顶点以及对称轴方程。

(2) 令 $A=\begin{bmatrix}\frac12&0&\frac12&0\\0&\frac13&0&\frac23\\\frac12&0&\frac12&0\\0&\frac23&0&\frac13\end{bmatrix}$. 求4阶正交阵$Q$ 和对角阵Λ 使得$Q^TAQ=\Lambda$.

解10. *(1)* 椭圆。长轴长$\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, 短轴长$\frac{2}{\sqrt{7}}$，长轴所在直线方程是$x+2y=0$, 短轴所在直线方程是$2x-y=0$.

(2)

$$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}, \Lambda=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}.$$

题11 (5分). 设$A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, A 的算子范数(operator norm) 是

$$\|A\|=\max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\Re^n\\ \|\boldsymbol{v}\|=1}}\|A\boldsymbol{v}\|=\max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\Re^n\\ \boldsymbol{v}\neq 0}}\frac{\|A\boldsymbol{v}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}.$$

试证：

$$\|A\|=\max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\Re^m,\boldsymbol{v}\in\Re^n\\ \|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|=1}}\boldsymbol{u}^TA\boldsymbol{v}.$$

解11. 先证对任意的$\boldsymbol{w}\in\mathbb{R}^m$, 有

$$\max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\Re^m\\ \|\boldsymbol{u}\|=1}}\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}=\|\boldsymbol{w}\|.$$

当$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ 时，等式显然成立。当$\boldsymbol{w}\neq\boldsymbol{0}$ 时，一方面由*Cauchy-Schwarz*不等式知

$$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}\leq|\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}|\leq\|\boldsymbol{u}\|\ \|\boldsymbol{w}\|=\|\boldsymbol{w}\|.$$

另一方面，若令$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|}$, 则$\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{w}=\frac{\boldsymbol{w}^T}{\|\boldsymbol{w}\|}\boldsymbol{w}=\|\boldsymbol{w}\|$. 故等式得证。

回到原命题有

$$\max_{\substack{\boldsymbol{u}\in\Re^m,\boldsymbol{v}\in\Re^n\\ \|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|=1}}\boldsymbol{u}^TA\boldsymbol{v}=\max_{\substack{\boldsymbol{v}\in\Re^n\\ \|\boldsymbol{v}\|=1}}\|A\boldsymbol{v}\|=\|A\|.$$

第二个等号用的是$\|A\|$ 的定义。

8. 证明：(1) 假设存在$k_1, k_2, \cdots, k_r \in R$，使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$

上式两边与α_i作内积，可得 $(\alpha_i, k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=(\alpha_i, 0)=0$ $(i=1,2,\cdots,r)$

由内积的线性性质，可得 $k_1(\alpha_i,\alpha_1)+k_2(\alpha_i,\alpha_2)+\cdots+k_i(\alpha_i,\alpha_i)+\cdots+k_r(\alpha_i,\alpha_r)=0$

由于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是非零正交向量组，故有 $(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ |\alpha|^2\neq 0, & i=j\ (\alpha\text{非零})\end{cases}$

从而可得$k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0$，即$k_i=0$ $(i=1,2,\cdots,r)$

故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

(2) 因$r<n$，将$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$向量组扩充一个向量$\alpha_{r+1}$，要求$\alpha_{r+1}$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$都正交，我们将$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$都看成行向量时，即要求

$(\alpha_1,\alpha_{r+1})=\alpha_1\alpha_{r+1}^T=0 \quad (\alpha_2,\alpha_{r+1})=\alpha_2\alpha_{r+1}^T=0 \quad \cdots \quad (\alpha_r,\alpha_{r+1})=\alpha_r\alpha_{r+1}^T=0$

合并以上各式，写成矩阵形式，即有 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}\alpha_{r+1}^T=A\alpha_{r+1}^T=0$

其中A是以行向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$合并的$r\times n$矩阵，$r(A)=r<n$，即$AX=0$有非零解

说明$A\alpha_{r+1}^T=0$的α_{r+1}存在，只要取$AX=0$的一个非零解x_1作为α_{r+1}即可

取$\alpha_{r+1}=x_1$. 此时已得正交量扩充到$r+1$个. 若$r+1<n$，按上述方法继续扩充，直到n个正交向量为止.

9. 证明：必要性. 即证$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$和$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是两组标准正交基，则$Q$为正交阵.

由标准正交基的关系 $\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \varepsilon_2^T\\ \vdots\\ \varepsilon_n^T\end{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=I$ $\quad \begin{pmatrix}\eta_1^T\\ \eta_2^T\\ \vdots\\ \eta_n^T\end{pmatrix}(\eta_1,\cdots,\eta_n)=I$

而$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Q$

故 $I=\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \vdots\\ \varepsilon_n^T\end{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=[(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Q]^T(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Q$

$=Q^T\begin{pmatrix}\eta_1^T\\ \vdots\\ \eta_n^T\end{pmatrix}(\eta_1,\cdots,\eta_n)Q=Q^TIQ=Q^TQ$ 得证.

充分性，即证$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$为一组标准正交基，$Q$为正交矩阵，则$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$也是标准正交基

Q为正交矩阵，则有$Q^TQ=I$. 而$\eta_1,\cdots,\eta_n$是一组标准正交基，故有$\begin{pmatrix}\eta_1^T\\ \vdots\\ \eta_n^T\end{pmatrix}(\eta_1,\cdots,\eta_n)=I$

则 $\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \vdots\\ \varepsilon_n^T\end{pmatrix}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=[(\eta_1,\cdots,\eta_n)Q]^T(\eta_1,\cdots,\eta_n)Q=Q^T\begin{pmatrix}\eta_1^T\\ \vdots\\ \eta_n^T\end{pmatrix}(\eta_1,\cdots,\eta_n)Q=Q^TQ=I$

即证$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$也是一组标准正交基.

10. 解：由$AB=O$，知$r(A)+r(B)\leq 3$，又$A\neq 0$，$B\neq 0$，故$1\leq r(A)\leq 2$，$1\leq r(B)\leq 2$

① 若$k\neq 9$，必有$r(B)=2$，此时$r(A)=1$．由于$n-r(A)=3-1=2$

而$AB=O$说明B的列向量是$Ax=0$的解，通解为$k_1(1,2,3)^T+k_2(3,6,k)^T$

② 若$k=9$，则$r(B)=1$，此时$r(A)=1$或2

1、若$r(A)=2$，则$n-r(A)=1$，通解为$t(1,2,3)^T$，t为任意常数

2. 若$r(A)=1$，则$Ax=0$与$ax+by+cz=0$同解，由$n-r(A)=2$，不妨设$a\neq 0$.

于是$Ax=0$的通解为$k_1(-b,a,0)^T+k_2(-c,0,a)^T$，$k_1,k_2$为任意常数.

11. 证：由$AA^*=A^*A=|A|I$，有$(A^*)^*\cdot A^*=|A^*|I=|A|^{n-1}I$

① 若$|A^*|\neq 0$，则$|A|\neq 0$，$(A^*)^*=|A|^{n-1}I(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-2}A$

② 若$|A^*|=0$，则$|A|=0$（否则矛盾）.

当$n>2$时，$r(A^*)\leq 1$，$r[(A^*)^*]=0$ 故$A^*=0$ 于是$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

思考：
$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)\leq n-2 \end{cases} \qquad r[(A^*)^*]=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ \left.\begin{matrix} 1, & n=2 \\ 0, & n>2 \end{matrix}\right\} r(A^*)=1 \end{cases}$$

12. 解：(1) 记$|A|=D_n$ 按第一列展开，则有

$$D_n=2a\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1}+a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=2a(2aD_{n-2}-a^2D_{n-3})-a^2(2aD_{n-3}-a^2D_{n-4})=\cdots$$

由$D_1=2a$，$D_2=\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}=3a^2$ 代入上述递推关系式，可得$D_n=(n+1)a^n$

另解：对于三对角矩阵，可用消元技巧化为上三角，将第一行的$-\frac{a}{2}$倍加至第二行，…

$$|A|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=\cdots=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix}=D_n$$

(2) 由克莱姆法则，当$|A|\neq0$时方程组有唯一解，故$a\neq0$时有唯一解

$$x_1=\frac{1}{D_n}\begin{vmatrix}1 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & a^2 & 2a & 1\end{vmatrix}=\frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{n}{(n+1)a}$$

(3) 当$a=0$时，方程组有无穷多解，即 $\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

由$r(A)=r(A\vdots b)=n-1$，通解为$(0,1,0,\cdots,0)^T+K(1,0,\cdots,0)^T$，$k$为任意常数

13. 证：由$A^*=A^T$，此时$A_{ij}=a_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$

由$A\neq0$，不妨设$a_{ij}\neq0$，由行列式展开定理

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{ii}A_{ii}+\cdots+a_{in}A_{in}$$
$$=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{ij}^2+\cdots+a_{in}^2\geq a_{ij}^2>0$$ 故$|A|\neq0$

另证：若$|A|=0$，则 $AA^*=A^*A=|A|I=0=AA^T$

设A的行向量为α_i $(i=1,2,\cdots,n)$，则$\alpha_i\alpha_i^T=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0$

于是$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$

进而有$A=0$，与A为非零矩阵矛盾，故$|A|\neq0$

14. $$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1\\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n\\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1\\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}-1 & 0 & \cdots & 0 & -n\\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0\\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^{n-1}\cdot\frac{n+1}{2}$$