《线性代数》作业 8

截止时间：11 月 19 日 18:00。注明姓名，学号和组号。
纸质。请写出完整的计算等解题过程。提交于课堂或近春园西楼入口处我的信箱。

1. 考虑矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. 设 P_1 是关于 A 的第一列的正交投影矩阵，P_2 是关于 A 的正交投影矩阵。计算 P_1 和 P_2P_1.

2. 给定 $\mathbb{R}^m$ 中的子空间 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$, $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2$.
   (a) 是否一定存在矩阵 A, 使得 $\mathcal{R}(A) = \mathcal{M}_1, \mathcal{N}(A^{\mathrm{T}}) = \mathcal{M}_2, \mathcal{R}(A^{\mathrm{T}}) = \mathcal{N}_1, \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}_2$?
   (b) 如果不一定存在，那么当四个子空间满足什么条件时，这样的矩阵才一定存在？

3. 一个方阵 P 如果仅满足 $P^2 = P$, 则称之为**斜投影矩阵**，其对应的线性变换称为斜投影。给定一个 n 阶斜投影矩阵 P.
   (a) 证明 $I_n - P$ 也是一个 n 阶斜投影矩阵。
   (b) 证明 $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I_n - P), \mathcal{R}(I_n - P) = \mathcal{N}(P)$.
   (c) 对任意向量 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, 是否一定存在分解 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, 满足 $\boldsymbol{v}_1 \in \mathcal{R}(P), \boldsymbol{v}_2 \in \mathcal{R}(I_n - P)$? 如果存在这种分解，它是否唯一？
   (d) 构造一个二阶斜投影矩阵，但不是正交投影矩阵。

4. 设平面上的三个点 $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}$ 分别是 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$. 表述出下列每个最小二乘问题的构造过程，求出对应直线. 并画出三个点和所得直线的示意图.
   (a) 求平行于 x 轴的直线 $y = b$ 使得 $\sum_{i=1}^{3} |y_i - b|^2$ 最小.
   (b) 求经过原点的直线 $y = kx$ 使得 $\sum_{i=1}^{3} |y_i - kx|^2$ 最小.
   (c) 求直线 $y = kx + b$ 使得 $\sum_{i=1}^{3} \big|y_i - (kx + b)\big|^2$ 最小.

5. 计算 $\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & \cdots & 1 + x_1y_n \\ 1 + x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \cdots & 1 + x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 + x_ny_1 & 1 + x_ny_2 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{vmatrix}$. 其中 $x_i, y_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$, 且 $n \geq 3$.