1. A的特征多项式 $p_A(\lambda)=\det(\lambda I_3-A)=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}$

按第2列展开

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-1)=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1).$$

所以A有3个特征值 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$.

分别计算它们对应的特征向量.

$\lambda_1=2$: $(\lambda_1 I_3-A)\vec{x_1}=\vec{0_3} \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}\vec{x_1}=\vec{0_3} \Leftrightarrow B\vec{x_1}=\vec{0_3}$.

$$B\xrightarrow[R_3+R_1]{R_1\cdot\frac{1}{2}}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\cdot\frac{2}{3}]{R_1+3R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{\text{对换}R_2\text{和}R_3}\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\ \text{主列 自由列 主列}\end{array}$$

取 x_2 为自由变量, x_1和 x_3 为主变量, 则有特征子空间:

$N(\lambda_1 I_3-A)=\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$, 可取特征向量 $\vec{x_1}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

$$\lambda_2=1:\quad \lambda_2 I_3-A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3+R_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{cc}\underbrace{\qquad\quad}_{\text{主列}} & \text{自由列}\end{array}$$

可取 x_3 为自由变量, x_1, x_2 为主变量, 则有 $N(\lambda_2 I_3-A)=\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$.

所以可取特征向量 $\vec{x_2}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

$$\lambda_3=-1:\quad \lambda_3 I_3-A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1}\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[R_2\cdot(-\frac{1}{3})]{R_1\cdot(-1)}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}\underbrace{\qquad\quad}_{\text{主列}} & \text{自由列}\end{array}$$

所以可取 x_3 为自由变量, x_1, x_2 为主变量, 则有 $N(\lambda_3 I_3-A)=\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right)$.

可取特征向量 $\vec{x_3}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$.

////

2. A的特征多项式 $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - a_{22}) - a_{21} = \lambda^2 - a_{22}\lambda - a_{21}$.

由特征多项式 $p_A(\lambda)$ ~~与A的~~ 的系数与A的特征值的关系可知:

$$a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2 = 4 + 7 = 11 = \text{trace}(A)$$

$$-a_{21} = (-1)^2 \det(A) = (-1)^2 \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 4 \cdot 7 = 28. \Rightarrow a_{21} = -28. \quad \blacksquare$$

3. 分别计算A和B的特征多项式.

$$p_A(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda - x & 2 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} \underset{\text{按第1行展开}}{=} (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda - x & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)[(\lambda-x)\lambda - 4] - 2(2\lambda - 4) = (\lambda-2)(\lambda^2 - x\lambda - 4) - 4(\lambda-2)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - x\lambda - 8).$$

B是对角矩阵, 所以有 $p_B(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda-y)$.

由 $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$ 可知, $\lambda^2 - x\lambda - 8 = (\lambda-2)(\lambda-y) = \lambda^2 - (2+y)\lambda + 2y$

所以 $\begin{cases} x = 2+y \\ -8 = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -4. \end{cases}$ $\blacksquare$

4. (a) A的特征多项式为 $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc$

$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

由一元二次方程的求根公式可知: $\lambda_{1,2} = \dfrac{a+d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2} = \dfrac{a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$

(b) 由(a)可知, $\lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow (a-d)^2 + 4bc = 0$.

可以取 $b=1, c=-1, a=4, d=2$, 则 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(c) 直接计算验证:

$$A\begin{bmatrix} b \\ \lambda - a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b \\ \lambda - a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ab + b(\lambda - a) \\ cb + d(\lambda - a) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\lambda \\ d\lambda + bc - ad \end{bmatrix}.$$

计算 $d\lambda + bc - ad = d\lambda + \lambda^2 - (a+d)\lambda$, 因为 $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$,

$$= \lambda^2 - a\lambda = \lambda(\lambda - a)$$

所以 $A\begin{bmatrix} b \\ \lambda - a \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} b \\ \lambda - a \end{bmatrix}$.

计算 $A\begin{bmatrix}\lambda-d\\ c\end{bmatrix}$，可以类似证得 $A\begin{bmatrix}\lambda-d\\ c\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\lambda-d\\ c\end{bmatrix}$.

(d) 分两种情形: (i) $\begin{bmatrix}b\\ \lambda-a\end{bmatrix}=\vec{0}_2$, $\begin{bmatrix}\lambda-d\\ c\end{bmatrix}\neq\vec{0}_2$.

则有 $b=0$，一个特征值为 $\lambda=a$.

将 $b=0$，代入 $\lambda_{1,2}$ 的求根公式，则有

$$\lambda_{1,2}=\frac{a+d\pm\sqrt{(a-d)^2}}{2}=\frac{a+d\pm(a-d)}{2}=a \text{ or } d.$$

利用 $A\begin{bmatrix}\lambda-d\\ c\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\lambda-d\\ c\end{bmatrix}$，分别代入 $\lambda=a$ 和 d，得到对应的特征向量 $\begin{bmatrix}a-d\\ c\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0\\ c\end{bmatrix}$. 所以 A的两个特征对为

$\left(a,\begin{bmatrix}a-d\\ c\end{bmatrix}\right)$ 和 $\left(d,\begin{bmatrix}0\\ c\end{bmatrix}\right)$.

(ii) $\begin{bmatrix}b\\ \lambda-a\end{bmatrix}\neq\vec{0}_2$, $\begin{bmatrix}\lambda-d\\ c\end{bmatrix}=\vec{0}_2$，则有 $c=0$.

类似的计算，可得到 A的两个特征对:

$\left(a,\begin{bmatrix}b\\ 0\end{bmatrix}\right)$ 和 $\left(d,\begin{bmatrix}b\\ d-a\end{bmatrix}\right)$.

(e) 由于 $\begin{bmatrix}b\\ \lambda-a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-d\\ c\end{bmatrix}=\vec{0}_2$，所以 $b=c=0$. i.e. $A=\begin{bmatrix}a&0\\ 0&d\end{bmatrix}$,

所以 $\lambda_1=a$ ~~和~~ $\lambda_2=d$ 是 A 的所以特征值，且都应该是半单的.

(c)中的公式不能使用，需要计算特征向量.

~~情形(i):~~ $a\neq d$. ~~$(\lambda_1 I_2-A)\vec{x}_1=\vec{0}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}0&0\\ 0&a-d\end{bmatrix}\vec{x}_1=\vec{0}_2$~~

~~$\Rightarrow$ 特征子空间 $N(\lambda_1 I_2-A)=\mathrm{span}(\vec{e}_1)$，可取特征向量 $\vec{x}_1=\vec{e}_1$.~~

~~$(\lambda_2 I_2-A)\vec{x}_2=\vec{0}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}d-a&0\\ 0&0\end{bmatrix}\vec{x}_2=\vec{0}_2$~~

~~$\Rightarrow$ 特征子空间 $N(\lambda_2 I_2-A)=\mathrm{span}(\vec{e}_2)$，可取特征向量 $\vec{x}_2=\vec{e}_2$.~~

~~情形(ii):~~ $a=d$. 则有 $\lambda_1=\lambda_2=a$. $\lambda_1 I_2-A=\begin{bmatrix}a&0\\ 0&a\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a&0\\ 0&a\end{bmatrix}=0_{2\times2}$.

所以 $N(\lambda_1 I_2-A)=\mathrm{span}(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$，可取特征向量 $\vec{x}_1=\vec{e}_1$, or $\vec{e}_2$. ∎

5. 记 A 的特征值为 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$. 则其特征多项式为

$$p_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{3}(\lambda-\lambda_i).$$

对应的特征向量分别记为 $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$.

(a) 可使用特征对 $\{(\lambda_i, \vec{x}_i)\}_{i=1}^{n}$ 或特征多项式两种方法讨论.

$2A$: $p_{2A}(\mu)=|\mu I_3-2A| = 2^3\left|\frac{\mu}{2}I_3-A\right| = 2^3 p_A\left(\frac{\mu}{2}\right)$.

所以其根为 $\frac{\mu}{2}=1,2,3$, i.e. 特征值 $\mu=2,4,6$

$A+I_3$: $p_{A+I_3}(\mu)=|\mu I_3-(A+I_3)| = |(\mu-1)I_3-A| = p_A(\mu-1)$.

所以其根为 $\mu-1=1,2,3$, i.e. $A+I_3$ 的特征值 $\mu=2,3,4$.

使用特征对讨论:

A^2: $A^2\vec{x}_i = A(A\vec{x}_i) = A(\lambda_i\vec{x}_i) = \lambda_i A\vec{x}_i = \lambda_i^2\vec{x}_i$ for $i=1,2,3$.

所以 A^2 的特征值为 λ_i^2 for $1\le i\le 3$, i.e., $1,4,9$.

$\bar{A}$: $\bar{A}\bar{\vec{x}}_i = \overline{A\vec{x}_i} = \overline{\lambda_i\vec{x}_i} = \lambda_i\bar{\vec{x}}_i$, 因为 λ_i 均为实数,

所以 $\bar{A}$ 的特征值是 $1,2,3$.

A^T: 使用特征多项式: $p_{A^T}(\mu)=|\mu I_3-A^T| = |(\mu I_3-A)^T|$
$= |\mu I_3-A| = p_A(\mu) = \prod_{i=1}^{3}(\mu-\lambda_i)$.

所以 A^T 的特征值为 $1,2,3$.

注意到 $\det(A)=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i = 1\cdot2\cdot3=6\neq0$, 所以 A 可逆.

A^{-1}: 由 $A\vec{x}_i=\lambda_i\vec{x}_i$ 可知, 左乘 A^{-1} 得到 $A^{-1}A\vec{x}_i = A^{-1}(\lambda_i\vec{x}_i)$.

$A^{-1}\vec{x}_i = \frac{1}{\lambda_i}\vec{x}_i$, 这里使用了 λ_i 均非零.

所以 A^{-1} 的特征值为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

(b): 记 $B=\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}A & A\\ 0 & A\end{bmatrix}$.

$$p_B(\mu)=|\mu I_6-B| = \begin{vmatrix}\mu I_3-A & 0\\ 0 & \mu I_3-A\end{vmatrix} = |\mu I_3-A|\cdot|\mu I_3-A| = (p_A(\mu))^2$$
$$= \prod_{i=1}^{3}(\mu-\lambda_i)^2$$

所以 B 的互异特征值为 $1,2,3$.

$$p_C(\mu)=|\mu I_6-C|=\begin{vmatrix}\mu I_3-A & -A\\ 0 & \mu I_3-A\end{vmatrix}=|\mu I_3-A|\cdot|\mu I_3-A|=(p_A(\mu))^2$$
$$=\prod_{i=1}^{3}(\mu-\lambda_i)^2.$$

所以 C 的互异特征值为 1, 2, 3. □

6. 反证法. 假设 $\vec{x}_1+\vec{x}_2$ 是 A 的特征向量则存在 数 μ, s.t.
$$A(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\mu(\vec{x}_1+\vec{x}_2)$$
又因为 $A\vec{x}_1=\lambda_1\vec{x}_1$, $A\vec{x}_2=\lambda_2\vec{x}_2$, 所以
$$(\lambda_1-\mu)\vec{x}_1+(\lambda_2-\mu)\vec{x}_2=\vec{0}_n.$$
因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$, 所以 $\vec{x}_1$ 和 $\vec{x}_2$ 线性无关, 必有 $\lambda_1-\mu=\lambda_2-\mu=0$,
$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\mu$, 与 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 产生矛盾.
所以假设不成立, i.e. $\vec{x}_1+\vec{x}_2$ 不是 A 的特征向量 □

7. A 的特征多项式为
$$p_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & 2\\ k & \lambda+1 & -k\\ -4 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}\overset{C_3+C_2}{=\!=}\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & 0\\ k & \lambda+1 & \lambda+1-k\\ -4 & -2 & \lambda+1\end{vmatrix}$$
$$\overset{\text{按第1行展开}}{=\!=}(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda+1 & \lambda+1-k\\ -2 & \lambda+1\end{vmatrix}-(-2)\begin{vmatrix}k & \lambda+1-k\\ -4 & \lambda+1\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-3)[(\lambda+1)^2+2(\lambda+1-k)]+2[k(\lambda+1)+4(\lambda+1-k)]$$
$$=(\lambda-3)(\lambda+1)^2+2(\lambda-3)(\lambda+1)-2k(\lambda-3)+2(k+4)(\lambda+1)-8k$$
$$=(\lambda-3)(\lambda+1)^2+(\lambda+1)(2\lambda-6+2k+8)-2k\lambda+6k-8k$$
$$=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$$
所以 $\lambda_1=-1$, 代数重数为2; $\lambda_2=1$, 代数重数为1.
由 A 可对角化的等价条件可知, $\lambda_1=-1$ 的几何重数必须为2, i.e. 其特征子空间 $N(\lambda_1 I_3-A)$ 的维数必须为2.
$$\lambda_1 I_3-A=\begin{bmatrix}-4 & -2 & 2\\ k & 0 & -k\\ -4 & -2 & 2\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+\frac{k}{4}R_1}\begin{bmatrix}-4 & -2 & 2\\ 0 & -\frac{k}{2} & -\frac{k}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$
所以 $\dim N(\lambda_1 I_3-A)=2 \Leftrightarrow \operatorname{rank}(\lambda_1 I_3-A)=1 \Leftrightarrow k=0.$
从而有
$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & -2\\ 0 & -1 & 0\\ 4 & 2 & -3\end{bmatrix}.$$

继续将上述矩阵化为行简化阶梯形，求解特征向量

$$\lambda_1 I_3 - A \longrightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\cdot(-\frac{1}{4})} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主列　　自由列

取 x_2 和 x_3 为自由变量，x_1 为主变量，则有

$$N(\lambda_1 I_3 - A) = \mathrm{Span}\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

可取特征向量 $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

对 $\lambda_2 = 1$，有 $\lambda_2 I_3 - A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[R_3 - R_2]{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2\cdot\frac{1}{2}]{R_1\cdot(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主列　　自由列

取 x_3 为自由变量，x_1 和 x_2 为主变量，则有 $N(\lambda_2 I_3 - A) = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

可取特征向量 $\vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

构造可逆矩阵 $X = [\vec{x}_1 \ \ \vec{x}_2 \ \ \vec{x}_3] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，和对角矩阵

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$，有 A 的~~谱~~谱分解 $A = X\Lambda X^{-1}$.

8. (a) 计算 $J_n(\lambda_0)$ 的特征多项式 $p_{J_n(\lambda_0)}(\lambda) = |\lambda I_n - J_n(\lambda_0)|$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-\lambda_0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & \lambda-\lambda_0 \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_0)^n.$$

所以 $J_n(\lambda_0)$ 的特征值仅有 $\lambda=\lambda_0$，且其代数重数为 n.

矩阵 $\lambda_0 I_n - J_n(\lambda_0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$，所以 $\mathrm{rank}(\lambda_0 I_n - J_n(\lambda_0)) = n-1$，

从而有 $\dim N(\lambda_0 I_n - J_n(\lambda_0)) = n - \mathrm{rank}(\lambda_0 I_n - J_n(\lambda_0)) = n-(n-1) = 1$.

所以 $\lambda=\lambda_0$ 的几何重数是 1.

(b) 计算 $p_A(\lambda) = |\lambda I_{(n_1+n_2)} - A| = \begin{vmatrix} \lambda I_{n_1} - J_{n_1}(\lambda_0) & 0 \\ 0 & \lambda I_{n_2} - J_{n_2}(\lambda_0) \end{vmatrix}$

$= |\lambda I_{n_1} - J_{n_1}(\lambda_0)| \cdot |\lambda I_{n_2} - J_{n_2}(\lambda_0)|$

由(a)可知 $= (\lambda-\lambda_0)^{n_1}(\lambda-\lambda_0)^{n_2} = (\lambda-\lambda_0)^{n_1+n_2}$.

所以 A 只有一个特征值 $\lambda=\lambda_0$，且代数重数为 n_1+n_2.

矩阵 $\lambda I_{(n_1+n_2)} - A = \begin{bmatrix} \lambda I_{n_1} - J_{n_1}(\lambda_0) & 0 \\ 0 & \lambda I_{n_2} - J_{n_2}(\lambda_0) \end{bmatrix}$

所以 $\mathrm{rank}(\lambda I_{(n_1+n_2)} - A) = \mathrm{rank}(\lambda I_{n_1} - J_{n_1}(\lambda_0)) + \mathrm{rank}(\lambda I_{n_2} - J_{n_2}(\lambda_0))$

$= n_1 - 1 + n_2 - 1 = (n_1+n_2) - 2$.

所以 $\dim N(\lambda I_{(n_1+n_2)} - A) = n_1+n_2 - \mathrm{rank}(\lambda I_{(n_1+n_2)} - A)$

$= 2$.

所以 $\lambda=\lambda_0$ 的几何重数为 2. ▨

9. $p_A(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda I_r - I_r & 0 \\ -B & \lambda I_{n-r} + I_{n-r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\lambda-1) I_r & 0 \\ -B & (\lambda+1) I_{n-r} \end{vmatrix}$

$= |(\lambda-1) I_r| \cdot |(\lambda+1) I_{n-r}| = (\lambda-1)^r (\lambda+1)^{n-r}$.

所以A只有两个互异特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，其代数重数分别为 r 和 $n-r$.

考察其特征子空间：

$\lambda_1 I_n - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -B & 2I_{n-r} \end{bmatrix}$，所以 $\mathrm{rank}(\lambda_1 I_n - A) = n-r$，从而有

$\dim N(\lambda_1 I_n - A) = n - \mathrm{rank}(\lambda_1 I_n - A) = n-(n-r) = r$.

所以 $\lambda_1=1$ 的几何重数为 r，等于其代数重数.

类似的，可得到 $\dim N(\lambda_2 I_n - A) = n-r$，所以 λ_2 的几何重数为 $n-r$，也等于其代数重数，所以A的所有特征值都是半单的，从而有A可对角化. ▨

10. (a) A为对角矩阵，不妨记为 $A = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$.

则A的特征多项式为 $p_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-d_i)$

从而有 $p_A(A)=\prod_{i=1}^{n}(A-d_iI_n)=(A-d_1I_n)(A-d_2I_n)\cdots(A-d_nI_n)$

均为对角矩阵

对角矩阵的乘积只需做对角元素的对应乘积，所以有

$$=\begin{bmatrix}\prod_{i=1}^{n}(d_1-d_i) & & & \\ & \prod_{i=1}^{n}(d_2-d_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \prod_{i=1}^{n}(d_n-d_i)\end{bmatrix}=O_{n\times n}.$$

(b) A可对角化，则存在可逆矩阵 X，和对角矩阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, s.t. $A=X\Lambda X^{-1}$，且 $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n}$ 是A的所有特征值（记重数）.

所以 $p_A(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$. 从而有

$$p_A(A)=\prod_{i=1}^{n}(A-\lambda_iI_n)=\prod_{i=1}^{n}(X\Lambda X^{-1}-\lambda_iXX^{-1})=\prod_{i=1}^{n}X(\Lambda-\lambda_iI_n)X^{-1}$$

$$=X(\Lambda-\lambda_1I_n)\underbrace{X^{-1}X}_{I_n}(\Lambda-\lambda_2I_n)X^{-1}\cdots X(\Lambda-\lambda_{n-1}I_n)\underbrace{X^{-1}X}_{I_n}(\Lambda-\lambda_nI_n)X$$

$$=X\prod_{i=1}^{n}(\Lambda-\lambda_iI_n)X^{-1}.$$

由(a)中结论可知 $\prod_{i=1}^{n}(\Lambda-\lambda_iI_n)=O_{n\times n}$. 所以有 $p_A(A)=O_{n\times n}$.

(c) A的特征多项式为 $p_A(\lambda)\overset{=\det(\lambda I_2-A)}{=}\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)+1=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2.$

所以 $\lambda_0=1$ 是A的唯一互异特征值，其代数重数为2.

矩阵 $\lambda_0I_2-A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1}\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$.

所以 $\mathrm{rank}(\lambda_0I_2-A)=1$，从而有 $\dim N(\lambda_0I_2-A)=2-\mathrm{rank}(\lambda_0I_2-A)=1$.

所以 $\lambda_0=1$ 的几何重数为1，小于其代数重数，是亏损特征值，所以A不可对角化.

计算 $p_A(A)=(A-I_2)^2=\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=O_{2\times2}.$

即使A不可对角化，也满足 $p_A(A)=O_{2\times2}$.

Remark: ~~Hatmi~~ Hamilton-Cayley 定理对所有方阵都成立. ▨

11. 需要做不同分块矩阵的尝试.

(a) 因为~~A~~ M可逆，所以有

$$A = MN = MNMM^{-1} = M(N\cancel{B}M)M^{-1} = MBM^{-1}.$$

所以可逆矩阵 $X = M$.

(b) ~~A~~B可通过一系列初等行列变换转化为~~B~~ A.

$$\begin{bmatrix} I_m & M \\ 0 & I_n \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} I_m & -M \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & M \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ N & NM \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -M \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} MN & MNM \\ N & NM \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -M \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} MN & 0 \\ N & 0 \end{bmatrix} = A.$$

所以可逆矩阵 $X = \begin{bmatrix} I_m & M \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$.

(c) 分两步转化:

$$\begin{bmatrix} I_m & -\frac{i}{2} I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix} B \begin{bmatrix} I_m & \frac{i}{2} I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & -\frac{i}{2} I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix} \cancel{B} \begin{bmatrix} M+iN & 0 \\ 0 & M-iN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & \frac{i}{2} I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} M+iN & -\frac{i}{2}(M-iN) \\ 0 & M-iN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & \frac{i}{2} I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M+iN & -N \\ 0 & M-iN \end{bmatrix} =: C.$$

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ +iI_m & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M+iN & -N \\ 0 & M-iN \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ +iI_m & I_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} M+iN & -N \\ -iM+N & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ +iI_m & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -N \\ N & M \end{bmatrix} = A.$$

所以可取可逆矩阵 $X = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & -\frac{i}{2} I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & -\frac{i}{2} I_m \\ -iI_m & \frac{1}{2} I_m \end{bmatrix}$,

从而有 $A = XBX^{-1}$. $\square$