基扩充定理

Abstract：1. 直接扩充
2. 转置成行向量再扩充
3.（标准）正交基的扩充

1 给定 $\mathbb{R}^m$ 中的一个子空间 M 及其一组基
$$S_r=\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\}.$$

1.1 将 S_r 扩充成 $\mathbb{R}^m$ 的一组基。
可使用 $\mathbb{R}^m$ 的标准基 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_m\}$. 将 S_r 排列在左侧，构造矩阵
$$A=[\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_r\ \ \vec{e}_1\ \cdots\ \vec{e}_m].$$
对 A 进行阶梯化. 由 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 的线性无关性可知，它们会作为主列保留下来，而此时有 $r+m$ 个列向量，且 $\dim\mathbb{R}^m=m$. 所以在 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_m$ 中会有 r 个列成为自由列，$m-r$ 个列成为主列，记为
$$\vec{e}_{i_1},\ \vec{e}_{i_2},\ \cdots,\ \vec{e}_{i,m-r}.$$
总结可得，$\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r,\ \vec{e}_{i_1},\cdots\ \vec{e}_{i_2},\cdots,\vec{e}_{i,m-r}\}$ 是由 M 的一组基扩充为 $\mathbb{R}^m$ 的一组基.

1.2 将 S_r 扩充成子空间 N 的一组基，这里 $M\subseteq N$.
可取 N 的任意一组基，记为
$$\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s\},\ 其中\ s=\dim N.$$
同样，将 S_r 放在左侧，构造矩阵
$$A=[\vec{a}_1\cdots\ \vec{a}_r\ \ \vec{b}_1\ \cdots\ \vec{b}_s]$$
对 A 进行阶梯化. 由 N 的维数可知，最终有 s 个

主列，且 $\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r$ 一定包含其中. 记 $\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s$ 中成为主列的列向量为 $\vec{b}_{i_1},\ \vec{b}_{i_2},\ \cdots,\ \vec{b}_{i,s-r}$.
则 $\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r,\ \vec{b}_{i_1},\ \vec{b}_{i_2},\cdots,\vec{b}_{i,s-r}\}$ 是由M的一组基扩充为N的一组基.

$\boxed{2}$ 从M到 $\mathbb{R}^m$，有一种较简单的方式.
将 S_r 转置成行向量，再进行阶梯化，

$$A^T=\begin{bmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{a}_r^{\,T} \end{bmatrix}.$$

由 $\mathrm{rank}(A^T)=\mathrm{rank}(A)=r$ 可知，A^T 的阶梯形只有 r 个主列，例如在 $\mathbb{R}^4$ 中，我们可能会得到

$$A^T=\begin{bmatrix} \vec{a}_1^{\,T} \\ \vec{a}_2^{\,T} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{42} \end{bmatrix}$$

主列 1　　3

自由列 2　　4

所以将 S_r 扩充成全空间 $\mathbb{R}^m$ 中的一组基，缺失的正是 $m-r$ 个自由列对应的标准基.
由 $\mathbb{R}^4$ 的例子可知 $\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_4\}$ 应为 $\mathbb{R}^4$ 的一组基.
相较于①中的直接扩充，这种方式会减少一些计算量.

3. (标准)正交基的扩充.

本课程常用的场景是将子空间的一组标准正交基扩充成全空间 $\mathbb{R}^m$ 的一组标准正交基.

结合 §2 和 Gram-Schmidt 正交化, 我们有以下方法:

给定一组标准正交基 $\{\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_r\}$.

① 根据 §2 中的方法, 补充缺失的标准基.

$$\begin{bmatrix} \vec{q}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{q}_r^{\,T} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{阶梯形: 左有 } m-r \text{ 个自由列.}$$

取对应自由列的列指标的标准基, 记为

$$\vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \cdots, \vec{e}_{i, m-r}.$$

② Gram-Schmidt 正交化下列向量组

$$\{\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_r, \vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \cdots, \vec{e}_{i, m-r}\}.$$

显然我们不需要处理前 r 列, 可以直接从第 $r+1$ 列 $\vec{e}_{i_1}$ 开始正交化.

注意到, 这里我们只关心最终得到的一组标准正交基, 不需要整理出包含 r_{ij} 的上三角矩阵 R. ▯