《线性代数》作业 5

截止时间：10月29日18:00。
纸质。请写出完整的计算等解题过程。提交于课堂或近春园西楼入口处我的信箱。

1. 给定矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) 求解 A 的行简化阶梯形矩阵 B.

   (b) 使用 B 求解零空间 $\mathcal{N}(A)$ 的基和维数。

   (c) 使用 B 求解像空间 $\mathcal{R}(A)$ 的基和维数。将自由列对应的 A 的列向量用基线性表示出来。

2. 求常数 a, b, c, 使得方程 $\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} = 11$ 的所有解都具有如下形式:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_3.$$

3. 证明命题2.2.17: 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的 r 维子空间，给定 $\mathcal{M}$ 中含有 r 个向量的向量组 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$.

   (a) 如果 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ 线性无关，则 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一组基;

   (b) 如果 $\mathcal{M} = \operatorname{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r)$, 则 $\{\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_r\}$ 是 $\mathcal{M}$ 的一组基。

4. 一个三阶方阵，如果每行、每列以及两个对角线上的元素之和都相等，则称为幻方矩阵。判断集合

$$\mathcal{M} = \left\{ \boldsymbol{a} = [a_1 \quad \cdots \quad a_9]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^9 \,\middle|\, \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \text{是幻方矩阵} \right\}$$

   是否是 $\mathbb{R}^9$ 的子空间。如果是，求它的一组基。

5. 任取非零常数 $k_1, \cdots, k_n$ 满足 $\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_n} + 1 \neq 0$。求下列向量组的秩.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 1+k_1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+k_2 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \cdots, \qquad \boldsymbol{a}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1+k_n \end{bmatrix}.$$

6. 给定矩阵 $A = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 为 $\mathbb{R}^m$ 中的列向量。

   (a) 写出 A 的行空间和列空间。

   (b) 假设 $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 都不为零，求 $\operatorname{rank}(A)$.

   (c) 讨论这四个列向量与 $\operatorname{rank}(A)$ 之间的关系。

7. 使用行简化阶梯形求下列矩阵 A 列空间的一组基，并求出自由列对应的 A 的列向量关于基的线性表示。

(a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.　　(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 31 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 73 \end{bmatrix}$.

8. 求分别满足各个条件的 3×4 矩阵 A 的行简化阶梯形和秩。

   (a) 设齐次线性方程 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解集的一组基为 $\boldsymbol{k}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{k}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   (b) A 的 (i, j) 元为 $a_{ij} = i + j + 2$.

9. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的行简化阶梯形为 R, 求矩阵 $B = \begin{bmatrix} A & AC \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} A \\ CA \end{bmatrix}$ 的行简化阶梯形，其中 C 分别为任意给定的 n 阶方阵和 $l \times m$ 矩阵。要求写出详细的求解过程。

10. 设 A 和 B 是 n 阶方阵。利用不等式 $\operatorname{rank}(AB) \le \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$ 证明

    (a) 如果 $AB = I_n$, 则 A, B 都可逆，且 $BA = I_n$.

    (b) 如果 AB 可逆，则 A, B 都可逆。