《线性代数》作业 7

截止时间：11 月 12 日 18:00。注明姓名，学号和组号。

纸质。请写出完整的计算等解题过程。提交于课堂或近春园西楼入口处我的信箱。

1. 求一个四阶正交矩阵，其中前两个列向量分别为：$\frac{1}{\sqrt{6}}[1 \quad -1 \quad 0 \quad 2]^{\mathrm{T}}$, $\quad \frac{1}{\sqrt{6}}[-2 \quad 0 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$.

2. 证明命题 3.2.6：给定 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$，满足 $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\|$. 则存在反射 $\boldsymbol{H_v}$，其中 $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|}$，使得 $\boldsymbol{H_v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}$.

3. 设 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ 和 $\boldsymbol{b}_1, \cdots, \boldsymbol{b}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两组标准正交基，证明存在正交矩阵 Q，使得
$$Q\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}_i, \quad 1 \le i \le n.$$

4. 计算下列矩阵的 QR 分解。
(a) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. $\qquad$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. 考虑矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ 的列向量围成的平行四边形。
   (a) 通过列变换，把第二列的若干倍加到第一列，使得平行四边形变成长方形。这对应着 A 右乘哪个矩阵？
   (b) 考虑 x_1-x_2 平面。通过旋转和反射，把平行四边形的第一条边变到对应 $x_2 > 0$ 的上半平面，不妨变到 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$。再把第二条边变到 x_1 轴的正半轴上。两次变动时，另一列可以随之变化。这对应着 A 左乘哪个正交矩阵？

6. 设 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 s 个向量，定义矩阵
$$G = G(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_s \\ \cdots & & \cdots \\ \boldsymbol{a}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_s \end{bmatrix},$$
   称为 $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 的 **Gram 矩阵**。证明：
   (a) $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s$ 是正交单位向量组当且仅当 $G(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_s) = I_s$.

(b) G 是 s 阶对称矩阵，且对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^s$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{x}\geq 0$.

(c) $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_s$ 线性无关当且仅当 G 可逆，也等价于对任意非零向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^s$，都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}G\boldsymbol{x}>0$.

7. 设 $\mathcal{M}$ 是下列齐次线性方程组的解空间，即零空间：

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & x_2 & & & - & 2x_4 & = & 0, \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 9x_3 & - & x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

分别求 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}^{\perp}$ 的一组标准正交基。

8. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad B=\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) 求两个矩阵列空间的交集中的一个非零向量；由此判断两个列空间是否正交。

(b) 求标准正交基 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$，使得 $\boldsymbol{v}_1\in\mathcal{R}(A)\cap\mathcal{R}(B)$, $\quad \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in\mathcal{R}(A)$，且 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_3\in\mathcal{R}(B)$.

(c) 求 $[A \quad -B]$ 零空间的一组基，并求所有的 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^2$，满足 $A\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{y}$.

9. 给定向量组 $S=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_k\}$，定义 $S^{\perp}$ 为与 S 中向量都正交的向量所构成的子集。

(a) 证明：$S^{\perp}$ 是一个子空间。

(b) 构造矩阵 A，使得 $\mathcal{N}(A)=S^{\perp}$.

(c) 证明：$\left(S^{\perp}\right)^{\perp}=\operatorname{span}(S)$.

10. 证明：设 $\mathcal{L}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的直线：

$$\mathcal{L}:\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0, \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 3x_3 & = & 0. \end{array}\right.$$

求向量 $\boldsymbol{b}=[1 \quad 0 \quad 2]^{\mathrm{T}}$ 在直线 $\mathcal{L}$ 上的正交投影。

11. 设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中由方程 $x_1-x_2+x_3=0$ 决定的平面，求 $\boldsymbol{b}=[2 \quad 1 \quad 2]^{\mathrm{T}}$ 在平面 $\mathcal{M}$ 上的正交投影，并求出 $\boldsymbol{b}$ 到平面 $\mathcal{M}$ 的距离。

12. 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

(a) 求关于 A 的列空间的正交投影矩阵 P_1.

(b) 求关于 A 的行空间的正交投影矩阵 P_2.

(c) 计算 P_1AP_2.