1. 记 $\vec{q_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}[1\ -1\ 0\ 2]^T$, $\vec{q_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}[-2\ 0\ 1\ 1]^T$.

对 $\begin{bmatrix} \vec{q_1}^T \\ \vec{q_2}^T \end{bmatrix}$ 进行阶梯形化 $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2+2R_1} \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

自由列为第3,4列. 补充向量 $\vec{e_3}, \vec{e_4} \in \mathbb{R}^4$, 再进行 Gram-schmidt 正交化.

$$[\vec{q_1}\ \ \vec{q_2}\ \ \vec{e_3}\ \ \vec{e_4}] = [\underbrace{\vec{q_1}\ \ \vec{q_2}}_{\text{已经是正交单位向量}}\ \ \underbrace{\vec{q_3}\ \ \vec{q_4}}_{\text{待定}}]\begin{bmatrix} 1 & 0 & r_{13} & r_{14} \\ 0 & 1 & r_{23} & r_{24} \\ 0 & 0 & r_{33} & r_{34} \\ 0 & 0 & 0 & r_{44} \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\qquad}_{\text{标准坐标向量}}$ $\underbrace{\qquad}_{\text{待定}}$

$$\begin{cases} \vec{e_3} = r_{13}\vec{q_1} + r_{23}\vec{q_2} + r_{33}\vec{q_3} \\ \vec{e_4} = r_{14}\vec{q_1} + r_{24}\vec{q_2} + r_{34}\vec{q_3} + r_{44}\vec{q_4}. \end{cases}$$

$\vec{q_3}$: $r_{13} = \vec{q_1}^T\vec{e_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$.

$$r_{23} = \vec{q_2}^T\vec{e_3} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

所以 $r_{33}\vec{q_3} = \vec{e_3} - r_{13}\vec{q_1} - r_{23}\vec{q_2} = \vec{e_3} - r_{23}\vec{q_2}$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\Rightarrow r_{33} = \left\|\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{6}\sqrt{2^2+0^2+5^2+(-1)^2} = \frac{1}{6}\sqrt{30} = \sqrt{\frac{5}{6}}.$$

$$\Rightarrow \vec{q_3} = \frac{1}{r_{33}}\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

类似的，可计算出 $\vec{q}_4$.

Remark: 补充的~~候选~~线性无关的向量不同，得到的 $\vec{q}_3$ 和 $\vec{q}_4$ 也不同.

2. 题目应该排除 $\vec{x}=\vec{y}$ 的情形.

由反射变换的定义方式可知，$H_{\vec{v}} = I_n - 2\vec{v}\vec{v}^T$. 我们只需要证明

$$H_{\vec{v}}\vec{x}=\vec{y}.$$

计算
$$
\begin{aligned}
H_{\vec{v}}\vec{x}-\vec{y} &= (I_n-2\vec{v}\vec{v}^T)\vec{x}-\vec{y} \\
&= \vec{x}-\vec{y} - 2\vec{v}(\vec{v}^T\vec{x}) \\
&\cancel{= \vec{x}-\vec{y} - 2\vec{v}^T\vec{x}(\vec{x}-\vec{y})} \\
&= \vec{x}-\vec{y} - 2\vec{v}^T\vec{x}\,\vec{v} \\
&= \vec{x}-\vec{y} - \frac{2\vec{v}^T\vec{x}}{\|\vec{y}-\vec{x}\|}(\vec{y}-\vec{x}) \\
&= \left(1+\frac{2\vec{v}^T\vec{x}}{\|\vec{y}-\vec{x}\|}\right)(\vec{x}-\vec{y}).
\end{aligned}
$$

计算系数
$$
1+\frac{2\vec{v}^T\vec{x}}{\|\vec{y}-\vec{x}\|} = 1+\frac{2(\vec{y}-\vec{x})^T\vec{x}}{\|\vec{y}-\vec{x}\|^2}
= \frac{\|\vec{y}-\vec{x}\|^2+2(\vec{y}-\vec{x})^T\vec{x}}{\|\vec{y}-\vec{x}\|^2}
$$

其分子部分
$$
\begin{aligned}
&= (\vec{y}-\vec{x})^T(\vec{y}-\vec{x}) + 2(\vec{y}-\vec{x})^T\vec{x} \\
&= (\vec{y}-\vec{x})^T(\vec{y}-\vec{x}+\vec{x}) \\
&= (\vec{y}-\vec{x})^T(\vec{y}+\vec{x}) \\
&= \|\vec{y}\|^2 - \vec{x}^T\vec{y} + \vec{y}^T\vec{x} - \|\vec{x}\|^2 \\
&= 0,
\end{aligned}
$$
因为内积有对称性，且 $\|\vec{x}\|=\|\vec{y}\|$.

所以 $H_{\vec{v}}\vec{x}-\vec{y}=\vec{0}_n \Rightarrow H_{\vec{v}}\vec{x}=\vec{y}$. ◻

3. 记矩阵 $A=[\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n]$, $B=[\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n]$. 定义 $Q=BA^T$. 可证明:

① Q 是正交矩阵.

因为 A ~~和 B~~ 是正交矩阵，则 A^T ~~和~~ 是正交矩阵. 又因为 B 是正交矩阵，所以 Q 是两个正交矩阵 B 和 A^T 的乘积，也是一个正交矩阵.

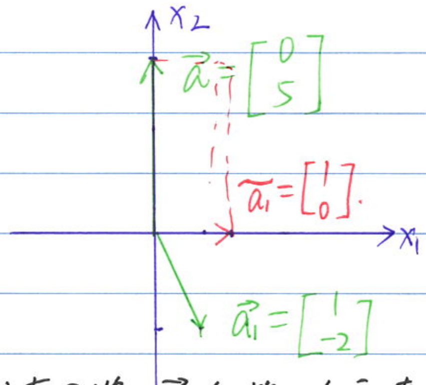
② $Q\vec{a}_i=\vec{b}_i$ for $1\le i\le n$.

计算 $BQA = BA^TA = BI_n = B$. 逐列对应，有 $Q\vec{a}_i=\vec{b}_i$ for $1\le i\le n$.

4. 略. (b) 可直接使用 $B = \underset{\text{单位矩阵}}{I_3}\ \underset{\text{上三角矩阵}}{B} = QR$.

5. 可作图辅助解题.

$$A = [\vec{a_1}\ \ \vec{a_2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$



(a) 使用倍加矩阵 $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$，则有可将 $\vec{a_1}$ 的第2个元素消元为零.

$$AE = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

得到一个长方形.

(b) 将 $\vec{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ 变到 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，可使用个反射变换，对称轴为 x_1 轴，

其法向量为 $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$，正负选择都可以，$\vec{v}\vec{v}^T$ 会消去负号的.

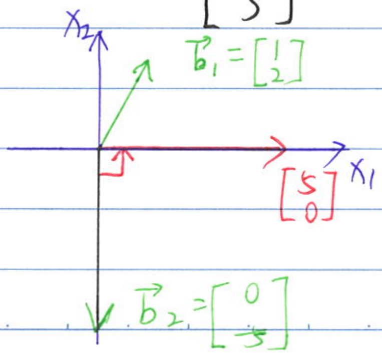
定义 $H\vec{v} = I_2 - 2\vec{v}\vec{v}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [0\ \ 1]$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

则 $B = H\vec{v}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$

A的第2列 $\vec{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ 也被反射到对称轴~~的~~ x_1 轴的另一边.

B:



将 $\vec{b_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ 变到 x_1 轴的正半轴，相当于做一个逆时针 $90° = \frac{\pi}{2}$ 的旋转变换.

可使用旋转矩阵 $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ with $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以有正交矩阵 $Q = R_\theta H_{\vec{v}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

且 $QA = R_\theta H_{\vec{v}} A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. ☒

6. (a) ⇒: 已知 $\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_s}$ 是正交单位向量组.

记 $Q = [\vec{a_1} \cdots \vec{a_s}]$. 则 Q 为列正交矩阵, 且

$$G = \begin{bmatrix} \vec{a_1}^T \\ \vdots \\ \vec{a_s}^T \end{bmatrix} [\vec{a_1} \cdots \vec{a_s}] = Q^T Q = I_s.$$

⇐: 已知 $G = I_s$.

因为 $G = \begin{bmatrix} \vec{a_1}^T \\ \vdots \\ \vec{a_s}^T \end{bmatrix} [\vec{a_1} \cdots \vec{a_s}] = [\ \vec{a_i}^T \vec{a_j}\ ]_{s\times s}$,

所以 $\vec{a_i}^T \vec{a_j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=j, \\ 0 & \text{if } i\neq j. \end{cases}$

所以 $\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_s}$ 为正交单位向量组.

(b) 由 (a) 中列正交矩阵 Q 可知 $G = Q^T Q$.

所以 $G^T = (Q^T Q)^T = Q^T Q = G$. 所以 G 对称.

给定 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^s$, 有 $\vec{x}^T G \vec{x} = \vec{x}^T Q^T Q \vec{x} = (Q\vec{x})^T Q\vec{x} = \|Q\vec{x}\|^2 \geq 0$.

(c) 记 ①: $\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_s}$ 线性无关.

② G 可逆.

③ $\forall$ 非零 $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$, 有 $\vec{x}^T G \vec{x} > 0$.

我们证明闭环 ① ⇒ ② ⇒ ③ ⇒ ①.

① ⇒ ②: $\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_s}$ 线性无关.

仍记 $Q = [\vec{a_1} \cdots \vec{a_s}]$, 则 Q 为列满秩矩阵, 为单射, 所以 $N(Q) = \{\vec{0_s}\}$.

又因为 $N(G) = N(Q^T Q) = N(Q) = \{\vec{0_s}\}$, 所以方阵 G 可逆.

②⇒③：因为G可逆，所以 rank(G) = s. 则有

$$\mathrm{rank}(Q) = \mathrm{rank}(Q^T) \geq \mathrm{rank}(Q^TQ) = \mathrm{rank}(G) = s.$$

所以~~有~~ rank(Q) = s，即 Q 为列满秩，是单射，所以 $N(Q) = \{\vec{0}_s\}$.

所以 ∀ 非零 $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$，有 $\vec{x}^T G \vec{x} = \vec{x}^T Q^T Q \vec{x} = (Q\vec{x})^T Q\vec{x}$

$$= \|Q\vec{x}\|^2 > 0.$$

③⇒①. 考虑齐次线性方程组 $Q\vec{x} = \vec{0}_n$.

注意到，∀ 非零 $\vec{x} \in \mathbb{R}^s$，有 $\|Q\vec{x}\|^2 = (Q\vec{x})^T Q\vec{x} = \vec{x}^T Q^T Q \vec{x}$

$$= \vec{x}^T G \vec{x} > 0.$$

所以 $Q\vec{x} = \vec{0}_n$ 只有零解，i.e. $N(Q) = \{\vec{0}_s\}$，i.e. Q 是单射，所以 Q 是列满秩，i.e. $\vec{a}_1, \dots \vec{a}_s$ ~~是~~ 线性无关. ∎

7. 写成齐次线性方程组的形式：$A\vec{x} = \vec{0}_3$.

所以 $M = N(A)$. 对 A 进行行简化阶梯形的操作，写出 N(A) 的一组基，将对其进行 Gram-Schmidt 正交化，得到一组标准正交基，再将这组基扩充为全空间 $\mathbb{R}^4$ 的一组标准正交基. ∎

8. (a) $A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2]$，$B = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2]$.

将矩阵 $[\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \vec{b}_1 \ \vec{b}_2]$ 化为阶梯形，自由列对应的~~那~~原始列向量~~都~~是 $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$ 中的向量

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

自由列

所以 $\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$.

如果 $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{R}(B)$，由 $\mathcal{R}(A)^\perp = N(A^T)$ 可知 应有 $N(A^T) = \mathcal{R}(B)$.

计算 $A^T \vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 18 \end{bmatrix} \neq \vec{0}_2$.

所以 $\mathcal{R}(A)$ 与 $\mathcal{R}(B)$ 不是正交的.

(b) 讨论 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ 关于 $\mathcal{R}(A)$ 和 $\mathcal{R}(B)$ 的几何含义.

注意到 $\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{R}(B) = 2$.

所以 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ 是 $\mathcal{R}(A)$ 的一個标准正交基.

又因为 $\vec{v}_3 \perp \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. 所以 $\vec{v}_3 \perp \mathcal{R}(A)$, i.e.

$\vec{v}_3$ 是二維平面 $\mathcal{R}(A)$ 的法向量.

另一方面, $\mathcal{R}(B) = \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_3)$, 即平面 $\mathcal{R}(B)$ 是由 $\mathcal{R}(A)$ 中的一个向量 $\vec{v}_1$ 及其法向量 $\vec{v}_3$ 线性生成的二維空间, 所以应有 $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{R}(B)$.

然而由 (a) 的结论可知, $\mathcal{R}(A)$ 与 $\mathcal{R}(B)$ 不是正交的.

所以这样一個标准正交基不存在.

(c) 记矩阵 $C = [A \quad -B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

$$\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \cdot \frac{1}{3}]{R_1-R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1-R_3]{R_1+5R_3} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{自由列} \end{array}$$

取 x_3 为自由变量, x_1, x_2, x_4 为主变量.

则有 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} [x_3]$. 取 $x_3 = 1$, 则得到 $\vec{k}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

所以 $N(C) = \text{span}(\vec{k}_1) = \text{span}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$.

注意到 $A\vec{x} = B\vec{y} \iff A\vec{x} - B\vec{y} = \vec{0}_3$

$$\iff [A \quad -B] \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} = \vec{0}_3.$$

i.e. $C \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} = \vec{0}_3$.

所以 $\forall \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{y} \end{bmatrix} \in N(C)$, 都满足题意.

9.(a) 证明 ① $S^\perp$ 非空.

② S 关于线性运算封闭.

①显然有 $\vec{0}\in S^\perp$，所以 $S^\perp$ 非空.

② $\forall\ \vec{a},\vec{b}\in S^\perp$，$\forall\ k_1,k_2\in\mathbb{R}$，考察向量 $\vec{c}=k_1\vec{a}+k_2\vec{b}$:

给定 $\forall\ \vec{v_i}\in S$ 有

$$\vec{v_i}^T\vec{c}=\vec{v_i}^T(k_1\vec{a}+k_2\vec{b})=k_1\vec{v_i}^T\vec{a}+k_2\vec{v_i}^T\vec{b}$$
$$=k_1 0+k_2 0=0,\quad 因为\ \vec{a},\vec{b}\in S^\perp.$$

所以 $\vec{c}\in S^\perp$.

综上所述，$S^\perp$是一个子空间.

(b) 利用结论 $N(A)=\mathcal{R}(A^T)^\perp$. $\exists$定义矩阵 A, s.t.

$$\mathcal{R}(A^T)^\perp=\cancel{S^\perp}\ span(S)^\perp$$

使用S~~构~~构造矩阵 $A^T=[\vec{v_1}\ \cdots\ \vec{v_k}]$. 则 $A=\begin{bmatrix}\vec{v_1}^T\\ \vdots\\ \vec{v_k}^T\end{bmatrix}$.

则有 $N(A)=span(S)^\perp$.

只需证明 $S^\perp=span(S)^\perp$.

~~易~~显然有 $S^\perp\supseteq span(S)^\perp$，这是因为 $S\subseteq span(S)$.

考虑 $\forall$向量 $\vec{a}\in S^\perp$，$\forall$向量 $\vec{b}=span(S)$，则$\exists$一组实数 ~~$k_1,\cdots,k_n$~~ $l_1,\cdots,l_k$, s.t.

$$\vec{b}=l_1\vec{v_1}+\cdots+l_k\vec{v_k}.$$

计算 $\vec{a}^T\vec{b}=\vec{a}^T(l_1\vec{v_1}+\cdots+l_k\vec{v_k})$
$$=l_1\vec{a}^T\vec{v_1}+\cdots+l_k\vec{a}^T\vec{v_k}$$
$$=l_1 0+\cdots+l_k 0,\quad 因为\ \vec{a}\in S^\perp.$$
$$=0.$$

由定义和$\vec{b}$的任意性可知，$\vec{a}\in span(S)^\perp$.

又由$\vec{a}$的任意性可知，$S^\perp\subseteq span(S)^\perp$.

所以有 $S^\perp=span(S)^\perp$.

从而有 $N(A)=\cancel{span(S)}\ S^\perp$.

(c). 仍利用 (b)中的矩阵A，有

$$(S^\perp)^\perp=N(A)^\perp=\mathcal{R}(A^T)=span(S).$$

或者利用 $(S^\perp)^\perp=(span(S)^\perp)^\perp=span(S)$. ∎

10. 记直线 L 满足的齐次线性方程组为

$$A\vec{x}=\vec{0}_2 \text{ with } A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -3\end{bmatrix},\ \vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

直线 $L=N(A)$. 求解 $N(A)$.

$$A\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & -3 & -7\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2(-\frac{1}{3})}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & \frac{7}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1-R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{3}\\ 0 & 1 & \frac{7}{3}\end{bmatrix}$$

自由列

取 x_3 为自由变量, x_1, x_2 为主变量, 则有

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{7}{3}\end{bmatrix}[x_3].$$

取 $x_3=1$, 得到 $\vec{k}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{7}{3}\\ 1\end{bmatrix}$, 和 $N(A)=\text{span}(k_1)$.

将基向量 $\vec{k}_1$ 单位化: $\|\vec{k}_1\|=\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(-\frac{7}{3})+1^2}=\frac{\sqrt{59}}{3}$.

从而得到正交单位向量 $\vec{q}_1=\frac{1}{\frac{\sqrt{59}}{3}}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{7}{3}\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{59}}\begin{bmatrix}1\\ -7\\ 3\end{bmatrix}$.

则到子空间 $N(A)$ 上的正交投影矩阵为

$$P_{N(A)}=\vec{q}_1\vec{q}_1^T=\frac{1}{\sqrt{59}}\begin{bmatrix}1\\ -7\\ 3\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{59}}\begin{bmatrix}1 & -7 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{59}\begin{bmatrix}1 & -7 & 3\\ -7 & 49 & -21\\ 3 & -21 & 9\end{bmatrix}.$$

$$P_{N(A)}\vec{b}=\frac{1}{59}\begin{bmatrix}1 & -7 & 3\\ -7 & 49 & -21\\ 3 & -21 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}=\frac{1}{59}\begin{bmatrix}7\\ -49\\ 21\end{bmatrix}=\frac{7}{59}\begin{bmatrix}1\\ -7\\ 3\end{bmatrix}.$$

显然有 $P_{N(A)}\vec{b}=\frac{7}{\sqrt{59}}\vec{q}_1$.

$\boxed{///}$

11. 记齐次线性方程组为 $A\vec{x}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$.

由题意知 $M=N(A)$.

A已经是行简化阶梯形. 自由列为第2, 3列. 可取 x_2, x_3 为自由变量, x_1 为主变量. 则有

$$[x_1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

取 $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 得到 $N(A)$ 的一组基 $\vec{k_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{k_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

则有 $N(A) = span(k_1, k_2)$. 对 $\{\vec{k_1}, \vec{k_2}\}$ 进行 Gram-Schmidt 正交化, 得到 $N(A)$ 的一组标准正交基, 记为 $\{\vec{q_1}, \vec{q_2}\}$.

构造列正交矩阵 $Q_2 = [\vec{q_1} \quad \vec{q_2}]$.

到 $M = N(A)$ 上的正交投影矩阵为 $P_M = P_{N(A)} = Q_2 Q_2^T$.

可计算 $\vec{b}$ 在 M 上的正交投影: $P_M \vec{b} = Q_2 Q_2^T \vec{b}$.

$\vec{b}$ 到平面 M 的距离.

我们没有明确定义这一概念, 由正交分解或正交投影可定义

$$dist(\vec{b}, M) = \|\vec{b} - P_M \vec{b}\|.$$ ☒

dist → distance

12. (a) 将 A 化为行简化阶梯形

$$A \xrightarrow{R_2 - \frac{4}{3}R_1} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot \frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

主列 自由列

主列为第1列. 所以 $\mathcal{R}(A) = span(\vec{a_1}) = span\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\right)$.

将 $\vec{a_1}$ 单位化, 得到 $\mathcal{R}(A)$ 的一组标准正交基:

$$\{\vec{q_1}\} \quad with \quad \vec{q_1} = \frac{1}{\|\vec{a_1}\|} \vec{a_1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

关于A的正交投影矩阵为 $P_1 = P_{\mathcal{R}(A)} = P_A = \vec{q_1} \vec{q_1}^T = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}.$$

(b) 记A的行空间为M. 因为A的第2行可被第1行线性表示, 所以有

$$M = span\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}\right) = span\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right).$$

所以将向量 $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ 单位化，则有

$$M=\operatorname{span}\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right)=\operatorname{span}\left(\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right)=\operatorname{span}(\vec{b}_1).$$

所以到A的行空间的正交投影矩阵 $P_2=\vec{b}_1\vec{b}_1^{T}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1&1&2\end{bmatrix}$,

$$\Rightarrow P_2=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}.$$

(C) 主要考察对正交投影的理解.

P_1 和 P_2 将给定的任意向量分别投影到 $R(A)$ 和 $R(A^T)$.

而 A 和 A^T 的列向量显然分别属于 $R(A)$ 和 $R(A^T)$.

则有 $P_1A=A$.

$$\Rightarrow P_1AP_2=AP_2=(\underline{\underline{P_2^T}}A^T)^T=(\underline{\underline{P_2}}A^T)^T=(A^T)^T=A.$$

$P_2^2=P_2^T=P$.

也可计算验证这一结果. ▥