《线性代数》作业 12

截止时间：12 月 17 日 18:00。注明姓名，学号和组号。

纸质。请写出完整的计算等解题过程。提交于课堂或近春园西楼入口处我的信箱。

1. 实矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & d & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ 中未知元素 d 满足什么条件时，矩阵正定或者半正定？

2. 对 n 阶实对称矩阵 A，证明：当实数 t 充分大时，矩阵 $tI_n + A$ 正定。

3. 对 n 阶实对称矩阵 A，证明：存在正实数 c, 使得对任意 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$, 都有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x} \le c \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}$.

4. 举例说明，实对称矩阵 A 的所有顺序主子式都非负，但 A 并不是半正定。

5. 证明：若实对称矩阵对角占优，且对角元素全为正数，则该矩阵正定。

6. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 计算 $\max\limits_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}$.

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$. 计算 $\max\limits_{\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}}$.

8. 求下列矩阵的奇异值分解：

   (a) $[3 \quad 5 \quad 0]$.　　(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

   (c) $\begin{bmatrix} A & O \\ O & O \end{bmatrix}$, 其中 A 有奇异值分解 $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$.

9. 设 A 的奇异值分解为 $A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\begin{bmatrix} O & A^{\mathrm{T}} \\ A & O \end{bmatrix}$ 的谱分解。

   注：参考练习 6.1.16，可以得到一个构造思路。

10. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，考虑单位圆 $C=\{\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{v}\|=1\}$ 及其在 A 对应的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 下的像集 $A(C)=\{A\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^2 \mid \|\boldsymbol{v}\|=1\}$.

   (a) 设 $\boldsymbol{w}\in A(C)$, 证明：$\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{w}=1$.

   (b) 求 A 的奇异值分解 $A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$.

   (c) 注意 V,U 为二阶正交矩阵，对应的线性变换是旋转或反射。而 Σ 是对角矩阵，对应伸缩变换。从几何上看，曲线 $V^{\mathrm{T}}(C),\Sigma V^{\mathrm{T}}(C),U\Sigma V^{\mathrm{T}}(C)$ 分别是什么形状？

11. 将 $\frac{4x^2+2xy+4y^2}{x^2+y^2}$ 表示成对称矩阵 A 的 Rayleigh 商，并通过 Rayleigh 商求这个表达式的最大值和最小值。