# 参考解答

## 一、填空题（45 分，每空 3 分）

1. 设 $f(x)=x^3$， 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{f(\frac{2i}{n})+f(\frac{2(i-1)}{n})}{n}=2\int_0^1(2x)^3dx=4$。

2. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\dfrac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}})dx$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C\text{。}$$

3. $\int_{-1}^{1}(x+\sqrt{1-x^4})^2dx=\int_{-1}^{1}(x^2+1-x^4)dx=\dfrac{2}{3}+2-\dfrac{2}{5}=\dfrac{34}{15}$。

4. 设 $\dfrac{\sin x}{x}$ 为 $f(x)$ 的一个原函数， 且 $a\neq 0$, 则 $\int\dfrac{f(ax)}{a}dx=$

$$=\int\frac{f(ax)}{a^2}d(ax)=\frac{\sin(ax)}{a^3x}+C\text{。}$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续， $F(x)=\int_a^x(x-t)f(t)dt$， $F''(x)=f(x)$。

【注意 $F(x)=x\int_a^x f(t)dt-\int_a^x tf(t)dt$， $F'(x)=\int_a^x f(t)dt$ 】

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sqrt{x}}\sin(t^2)dt}{\sqrt{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x}=\dfrac{1}{3}$。

7. 由曲线 $y=x^2$ 与 $y^2=x$ 围成的区域绕 $x$ 轴旋转一周生成的体积为

$$A=\pi\int_0^1(x-x^4)dx=\pi(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})=\frac{3\pi}{10}\text{。}$$

8. 星形线 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 的曲线弧长为

$$L=3\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t}dt$$

$$=3\int_0^{2\pi}|\cos t\sin t|\,dt=12\int_0^{\pi/2}\cos t\sin tdt=6\text{。}$$

9. 将曲线 $y=\dfrac{1}{x^p}$ （$1\le x<+\infty$ ）绕 $x$ 轴旋转，产生的旋转面表面积有限，

则 $p$ 的取值范围是 $p>1$。

【旋转面面积 $A=\int_1^{+\infty}2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_1^{+\infty}\frac{2\pi}{x^p}\sqrt{1+\frac{2p}{x^{2(p+1)}}}dx$】

10．已知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^p(\ln x)^q}$ 收敛，则 $p,q$ 的取值范围是 $p>1>q$。

【$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)^p(\ln x)^q}=\int_1^{+\infty}+\int_0^1$，在 $x\to 1$ 时 $\ln x=\ln(1+x-1)\sim(x-1)$】

11．方程 $(x+y)dx-(y-x)dy=0$ 的通解为 $x^2+2xy-y^2=C$。

【$(x+y)dx-(y-x)dy=xdx+d(xy)-ydy$】

12．方程 $\frac{dy}{dx}-2y=1$ 的通解为 $y=Ce^{2x}-\frac{1}{2}$。

13．三叶线的极坐标方程为 $r=a\sin(3\theta)$，它与射线 $\theta=0$，$\theta=\frac{\pi}{3}$ 围成的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}r^2d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/3}\sin^2(3\theta)d\theta=\frac{\pi a^2}{12}。$$

14．平面上过点 $M(x_0,y_0)$，与 $x$ 轴正方向夹角为 60 度的直线方程的参数方程为 $x=x_0+t,y=y_0+\sqrt{3}t$，极坐标方程为 $r(\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta)=\sqrt{3}x_0-y_0$。

## 二、计算题（40 分，每题 10 分）

1．设 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt$（$x>0$），且 $F(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})$，求 $F(x)$ 的表达式。

解：积分变量代换 $t=1/s$ 导出

$$f(\frac{1}{x})=\int_1^{1/x}\frac{\ln t}{1+t}dt=-\int_1^x\frac{\ln(1/s)}{1+(1/s)}\frac{ds}{s^2}=\int_1^x\frac{\ln s}{(1+s)s}ds,$$ ——— 4 分

由此可得

$$F(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})=\int_1^x\frac{\ln t}{1+t}dt+\int_1^x\frac{\ln t}{(1+t)t}dt$$ ——— 4 分

$$=\int_1^x\frac{\ln t}{t}dt=\left.\frac{(\ln t)^2}{2}\right|_1^x=\frac{(\ln x)^2}{2}。$$ ——— 2 分

法二：求导数

$$F'(x)=f'(x)-\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})=\frac{\ln x}{1+x}-\frac{1}{x^2}\frac{\ln(1/x)}{1+(1/x)}=\frac{\ln x}{x},$$ ——— 6 分

$$F(x)=\int\frac{\ln x}{x}dx=\frac{(\ln x)^2}{2}+C,$$ ——— 2 分

注意 $F(1)=f(1)+f(1)=0$，所以 $C=0$，$F(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$。——— 2 分

2. 计算四分之一椭圆盘 $D=\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1,\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b\}$ 的形心（重心）坐标 $(\bar{x},\bar{y})$。

解：已知 $D$ 的面积（总质量） $M=\frac{\pi ab}{4}$， ————2 分

关于 x 轴的静力矩 $M_x=\int_0^a \frac{b}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx=\frac{b^2}{2}(x-\frac{x^3}{3a^2})\Big|_0^a=\frac{ab^2}{3}$， —3 分

关于 y 轴的静力矩 $M_y=\int_0^a xb\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx=\frac{a^2b}{3}(1-\frac{x^2}{a^2})^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{a^2b}{3}$， ——3 分

（或利用关于 x-y 的轮换对称性）

所以 $\bar{x}=\frac{M_y}{M}=\frac{4a}{3\pi}$， $\bar{y}=\frac{M_x}{M}=\frac{4b}{3\pi}$。 ——2 分

3. 设 $f(x)=\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt$，判别积分 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 的敛散性；如果收敛求其值。

解：首先注意到 $f(x)=\int_x^{+\infty}e^{-t^2}dt$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界连续函数，

考察 $\lim_{x\to+\infty}x^2f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{(1/x^2)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^2}}{2/x^3}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2e^{x^2}}=0$， ————3 分

已知 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ 收敛，由比较判别法 $\int_0^{+\infty}f(x)dx$ 也收敛； ————2 分

利用分部积分计算如下：

$$\int_0^{+\infty}f(x)dx=xf(x)\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}xf'(x)dx=\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{2}，$$ ——5 分

其中利用了 $\lim_{x\to+\infty}xf(x)=0$。 （1 分）

4. 求下面的定解问题的解 $u=u(t)$：

$$\begin{cases}\frac{d^2y}{dx^2}-2y^3-2y=0, & x>0\\ y(0)=0,\ \frac{dy}{dx}(0)=1\end{cases}$$

解：令 $\frac{dy}{dx}=z(y)$，则 $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dy}z=2y+2y^3$， ————3 分

分离变量积分得到 $z^2=2y^2+y^4+C$， ————2 分

注意到 $z(0)=1$，得到 $C=1$，所以 $z(y)=1+y^2$； ————1 分

再求解 $\frac{dy}{dx}=1+y^2$， $y(0)=0$， ————1 分

得到 $\arctan y=x$， $y=\tan x$。 ————3 分

## 三、证明题（15 分+附加 5 分）

设函数 $f(x)$ 在 $\left[0,a\right]$ 上非负，且存在二阶导数。已知 $f(0)\ge 0$，求证：

1．如果 $f'(x)\ge 0$，则 $\int_0^a xf(x)dx \ge \frac{a}{2}\int_0^a f(x)dx$；

2．如果 $f''(x)\le 0$，则 $\int_0^a xf(x)dx \le \frac{2a}{3}\int_0^a f(x)dx$；

3*（附加题）解释结论（1）和（2）的几何意义。

证：1．令 $F(t)=\int_0^t xf(x)dx-\frac{t}{2}\int_0^t f(x)dx$，则 ————2 分

$$F'(t)=tf(t)-\frac{1}{2}\int_0^t f(x)dx-\frac{1}{2}tf(t)=\frac{1}{2}tf(t)-\frac{1}{2}\int_0^t f(x)dx,$$ ————2 分

$$F''(t)=\frac{1}{2}tf'(t)\ge 0,$$ ————2 分

由此导出 $F'(t)\ge F'(0)=0$，$F(a)\ge F(0)=0$。 ————2 分

2．令 $G(t)=\frac{2t}{3}\int_0^t f(x)dx-\int_0^t xf(x)dx$，则 ————1 分

$$G'(t)=\frac{2}{3}\int_0^t f(x)dx-\frac{1}{3}tf(t),\quad G''(t)=\frac{1}{3}[f(t)-tf'(t)],$$ ————3 分

$$G'''(t)=-\frac{1}{3}[tf''(t)]\ge 0,$$ ————2 分

[或者利用 $f''(x)\le 0$，从而 $f(x)$ 上凸：$f(x)\le f(t)+(x-t)f'(t)$ ]

由此导出 $G''(t)\ge G''(0)\ge 0$，$G'(t)\ge G'(0)\ge 0$，$G(a)\ge G(0)=0$。——1 分

3*．令曲线 $y=f(x)$ 与 y 轴、$x=0$、$x=a$ 围成的平面区域是 D，

其重心坐标为 $(\overline{x},\overline{y})$， ————1 分

结论（1）说明：如果曲线 $y=f(x)$ 单调增，则 $\overline{x}\ge\frac{a}{2}$； ————2 分

结论（3）说明：如果曲线 $y=f(x)$ 是上凸的，则 $\overline{x}\le\frac{2a}{3}$。 ————2 分