

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A (1)

系名_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

一. 填空题 (每个空 3 分, 共 10 题)

1. 常微分方程 $y' = 1 + 2x + y^2 + 2xy^2$ 的通解为_____。
2. 常微分方程 $y'' - 2y' + y = 2$ 的通解为_____。
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+3k} =$ _____。
4. $\int_0^2 |1-x| dx =$ _____。
5. 设 $f(x) = \sin(x^3)$, 则 $f^{(15)}(0) =$ _____。
6. $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt =$ _____。
7. $\int_0^\pi x(\sin x)^2 dx =$ _____。
8. 常微分方程 $y' + y = e^{-x}$ 满足 $y(0) = 0$ 的解 $y = y(x)$ 的拐点的横坐标为_____。
9. 曲线段 $y = 2x^{\frac{3}{2}}$ ($0 \leq x \leq 1$) 的弧长为_____。
10. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{x^2}{3}}$ 为 p 阶无穷小, 则 $p =$ _____。

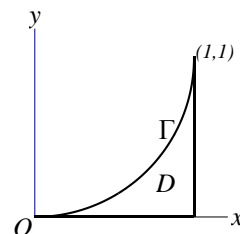
二. 解答题 (共 8 题) (请写出详细的计算过程和必要的根据!)

11. (10 分) 讨论 p 取何值时, 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ 收敛。
12. (10 分) 求数列 $\{n^{1/n}\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 的最大项的值。

13. (13 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 讨论函数 $f(x)$ 的连续性, 并求 $f(x)$ 的单调区间、极值点与极值、凸性区间、拐点和渐近线。

14. (12 分) 设曲线段 Γ 为圆心在点 $(0,1)$ 的单位圆周位于正方形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 的部分, 平面区域 D 为由 Γ , x 轴以及直线 $x=1$ 围成的有界区域。

- (I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体体积;
(II) 求曲线段 Γ 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转面面积。



15. (10 分) 求常微分方程的初值问题 $\begin{cases} \sqrt{1+(y')^2} = (1-x)y'', \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ 的解 ($x < 1$)。

16. (5 分) 设 $f \in C(0, +\infty)$, 并且 $\forall a > 0, b > 1$, 都有积分值 $\int_a^{ab} f(x)dx$ 与 a 无关, 求证: 存在常数 C , 使得 $f(x) = \frac{C}{x}, x \in (0, +\infty)$ 。

17. (5 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续, 且满足 $(f(x))^2 \leq 1 + 2 \int_0^x f(t)dt, x \in [0,1]$, 证明: $f(x) \leq 1+x, x \in [0,1]$ 。

18. (5 分) 设 $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 为实系数 n 次多项式。若 $p(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$, 证明: $p(x) + p'(x) + \cdots + p^{(n)}(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$, 这里 $p'(x), p''(x), \cdots, p^{(n)}(x)$ 表示 $p(x)$ 的一阶, 二阶, 以及 n 阶导数。

三. 附加题 (本题全对才给分, 其分数不计入总评, 仅用于评判 A+)

设 $h > 0$, $f(x)$ 为闭区间 $[-h, h]$ 上的无穷可导函数, 且 $\forall x \in [0, h]$, 以及任意的非负整数 n ,

都有 $f^{(n)}(x) \geq 0$ 。记 $r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$, 求证: $\forall x \in (0, h)$, 均有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0$ 。