

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 微积分 A (1)

系名_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

一. 填空题 (每个空 3 分, 共 10 题)

1. 常微分方程 $y' = 1 + 2x + y^2 + 2xy^2$ 的通解为_____。

解答: $\arctan y = x + x^2 + C$

2. 常微分方程 $y'' - 2y' + y = 2$ 的通解为_____。

解答: 通解为 $c_1 e^x + c_2 x e^x + 2$.

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+3k} =$ _____。

解答: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+3k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{3k}{n}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+3x} = \frac{2}{3} \ln 2$.

4. $\int_0^2 |1-x| dx =$ _____。

解答: 1

5. 设 $f(x) = \sin(x^3)$, 则 $f^{(15)}(0) =$ _____。

解答: $\frac{15!}{5!}$

6. $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{\sin t}{t} dt =$ _____。

解答: $\frac{3\sin(x^3) - 2\sin(x^2)}{x}$

7. $\int_0^\pi x(\sin x)^2 dx =$ _____。

解答: $\frac{\pi^2}{4}$

8. 常微分方程 $y' + y = e^{-x}$ 满足 $y(0) = 0$ 的解 $y = y(x)$ 的拐点的横坐标为_____。

解答：拐点的横坐标为2。

9. 曲线段 $y = 2x^{\frac{3}{2}}$ ($0 \leq x \leq 1$) 的弧长为_____。

解答： $\frac{2}{27}(10^{\frac{3}{2}} - 1)$

10. 设当 $x \rightarrow 0$ 时，函数 $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - e^{-\frac{x^2}{3}}$ 为 p 阶无穷小，则 $p =$ _____。

答案：2

二. 解答题（共8题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

11. （10分）讨论 p 取何值时，广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ 收敛。

解：记 $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^p \ln x}{(1+x^2)^2} dx$, $J_1 = \int_0^1 \frac{x^p \ln x}{(1+x^2)^2} dx$, $J_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^p \ln x}{(1+x^2)^2} dx$, 则广义积分 J 收敛

当且仅当 J_1, J_2 都收敛。

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\frac{x^p \ln x}{(1+x^2)^2} \sim x^p \ln x$, 所以 J_1 收敛当且仅当 $p > -1$ 。

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x^p \ln x}{(1+x^2)^2} \sim \frac{\ln x}{x^{4-p}}$, 所以 J_2 收敛当且仅当 $p < 3$ 。

综上所述, J 收敛当且仅当 $-1 < p < 3$ 。

12. （10分）求数列 $\{n^{1/n}\}$ ($n=1,2,3,\dots$) 的最大项的值。

解： $\forall x > 0$, 记 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$,

则 $f'(x) = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x)$ 。

所以 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 内严格单调增, 在 $(e, +\infty)$ 内严格单调减。

故 $1 < 2^{1/2}$, $3^{1/3} > n^{1/n}, n \geq 4$ 。

因为 $2^{1/2} < 3^{1/3}$,

所以数列 $\{n^{1/n}\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 的最大项的值为 $3^{1/3}$ 。

13. (13 分) 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 讨论函数 $f(x)$ 的连续性, 并求 $f(x)$ 的单调区间、极值点与极值、凸性区间、拐点和渐近线。

解: 函数 $f(x)$ 有唯一间断点 $x=0$ 。

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, f''(x) = \frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (1+2x),$$

所以:

(1) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内单调减;

函数 $f(x)$ 仅在点 $x=0$ 处取极值, 为极小值, 相应值为 0。

(2) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 内上凸, 在 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内下凸。

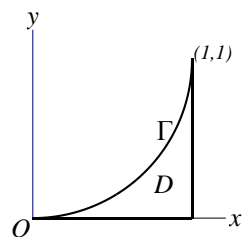
函数 $f(x)$ 有唯一的拐点 $(-\frac{1}{2}, e^{-2})$ 。

(3) 函数 $f(x)$ 有两条渐近线: $x=0$, $y=1$ 。

14. (12 分) 设曲线段 Γ 为圆心在点 $(0,1)$ 的单位圆周位于正方形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 的部分, 平面区域 D 为由 Γ , x 轴以及直线 $x=1$ 围成的有界区域。

(I) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体体积;

(II) 求曲线段 Γ 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转面面积。



解: (I) 曲线段 $\Gamma: y=1-\sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$ 。

区域 D 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体体积

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi(y(x))^2 dx = \pi \int_0^1 (2-x^2-2\sqrt{1-x^2}) dx \\ &= \frac{5}{3}\pi - 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{5}{3}\pi - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{5}{3}\pi - \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

(II) 曲线段 Γ 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转面面积

$$S = \int_0^1 2\pi y(x) dl = 2\pi \int_0^1 (1-\sqrt{1-x^2}) \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2}) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= 2\pi \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - 2\pi \\
&= \pi^2 - 2\pi
\end{aligned}$$

15. (10 分) 求常微分方程的初值问题 $\begin{cases} \sqrt{1+(y')^2} = (1-x)y'', \\ y(0)=0, \\ y'(0)=0 \end{cases}$ 的解 ($x < 1$)。

解: 令 $p = y'$, 则

$$\begin{cases} \sqrt{1+p^2} = (1-x) \frac{dp}{dx} \\ p(0)=0 \end{cases}$$

分离变量得 $\frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{dx}{1-x}$,

$$\sqrt{1+p^2} + p = \frac{C_1}{1-x}.$$

由 $p(0)=0$ 得 $C_1=1$, 所以

$$\sqrt{1+p^2} + p = \frac{1}{1-x},$$

$$\sqrt{1+p^2} - p = 1-x,$$

相减得: $y' = p = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - 1 + x \right)$ 。

由 $y(0)=0$ 得 $y = -\ln \sqrt{1-x} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$

16. (5 分) 设 $f \in C(0, +\infty)$, 并且 $\forall a > 0, b > 1$, 都有积分值 $\int_a^{ab} f(x)dx$ 与 a 无关, 求证:

存在常数 C , 使得 $f(x) = \frac{C}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ 。

证明: 因为积分值 $\int_a^{ab} f(x)dx$ 与 a 无关, 所以 $\frac{d}{da} \int_a^{ab} f(x)dx = 0$, 即

$$bf(ab) - f(a) = 0, a > 0, b > 1.$$

记 $C = f(1)$ ，当 $x=1$ 时， $f(x) = \frac{C}{x}$ 。

当 $x > 1$ 时，取 $a=1$ ， $b=x$ ，则 $f(x) = \frac{C}{x}$ 。

当 $0 < x < 1$ 时，取 $a=x$ ， $b=\frac{1}{x}$ ，则 $f(x) = \frac{C}{x}$ 。

本题得证。

17. (5 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，且满足 $(f(x))^2 \leq 1 + 2 \int_0^x f(t) dt, x \in [0,1]$ ，证明：
 $f(x) \leq 1+x, x \in [0,1]$ 。

证明：当 $x \in [0,1]$ 时，记 $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ ，则 $g'(x) = f(x) \leq \sqrt{1+2g(x)}$ 。

$$\text{所以 } \int_0^x \frac{g'(t)}{\sqrt{1+2g(t)}} dt \leq \int_0^x dt = x,$$

$$\text{即 } \sqrt{1+2g(x)} - 1 \leq x,$$

$$\text{故 } f(x) \leq \sqrt{1+2g(x)} \leq 1+x, x \in [0,1]。$$

18. (5 分) 设 $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 为实系数 n 次多项式。若 $p(x) \geq 0$ ，
 $x \in (-\infty, +\infty)$ ，证明： $p(x) + p'(x) + \cdots + p^{(n)}(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$ 。

这里 $p'(x), p''(x), \cdots, p^{(n)}(x)$ 表示 $p(x)$ 的一阶，二阶，以及 n 阶导数。

证明：记 $H(x) = p(x) + p'(x) + \cdots + p^{(n)}(x)$ ，

$$\text{则 } H'(x) = p'(x) + \cdots + p^{(n)}(x),$$

$$H(x) - H'(x) = p(x) \geq 0。$$

$$\text{所以 } (e^{-x}H(x))' = e^{-x}(H'(x) - H(x)) \leq 0。$$

即 $e^{-x}H(x)$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 单调减。

$H(x)$ 为多项式，所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{H(x)}{e^x} = 0$ ，故 $\frac{H(x)}{e^x} \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$ ，得证。

三. 附加题 (本题全对才给分，其分数不计入总评，仅用于评判 A+)

设 $h > 0$ ， $f(x)$ 为闭区间 $[-h, h]$ 上的无穷可导函数，且 $\forall x \in [0, h]$ ，以及任意的非负整数 n ，

都有 $f^{(n)}(x) \geq 0$ 。记 $r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ ，求证： $\forall x \in (0, h)$ ，均有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n(x) = 0$ 。

证明：注意 $r_n(x)$ 是函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处 n 阶 Taylor 展式的积分余项，即

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x) \quad (*)$$

对积分 $\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$ 作变量代换 $x-t=xu$ ，则

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^1 (xu)^n f^{(n+1)}(x(1-u)) x du = \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u)) du$$

上式可写作

$$\frac{r_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n!} \int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u)) du$$

根据假设函数 $f(x)$ 的各阶导数非负，可知 $f^{(n+1)}(x(1-u)) \leq f^{(n+1)}(h(1-u))$ 。因此

$$\frac{r_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{r_n(h)}{h^{n+1}}, \quad x \in (0, h)$$

再由展式(*)可知 $r_n(h) \leq f(h)$ 。于是对于任意 $x \in (0, h)$

$$0 \leq r_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{h^{n+1}} r_n(h) = \left(\frac{x}{h}\right)^{n+1} f(h) \rightarrow 0$$

命题得证。