《线性代数》作业 10

截止时间：12 月 3 日 18:00。注明姓名，学号和组号。

纸质。请写出完整的计算等解题过程。提交于课堂或近春园西楼入口处我的信箱。

1. 求复矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的全部特征值和特征向量。

2. 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. 确定 a_{21}, a_{22} 的取值，使得 A 的特征值为 $4, 7$.

3. 设 $A\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & x & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$. 已知 A, B 的特征多项式相同，求 x, y.

4. 设方阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

   (a) 利用一元二次方程求根公式，写出 A 的两个特征值 λ_1, λ_2 的表达式。

   (b) 构造一个非对角矩阵的 A，满足 $\lambda_1 = \lambda_2$.

   (c) 设 λ 为 A 的特征值。证明：

   $$A\begin{bmatrix} b \\ \lambda - a \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} b \\ \lambda - a \end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix} \lambda - d \\ c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \lambda - d \\ c \end{bmatrix}.$$

   提示：若这两个向量不是零向量，那么它们就是特征向量。

   (d) 若上述两个向量中有且仅有一个是零向量，求 A 的特征值和特征向量。

   (e) 若上述两个向量都是零向量，求 A 的特征值和特征向量。

5. 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 $1, 2, 3$. 求下列矩阵的特征值。

   (a) $2A$, $A + I_3$, A^2, $\bar{A}$, A^{T}, A^{-1}. 需说明 A 为何可逆。

   (b) $\begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} A & A \\ O & A \end{bmatrix}$.

6. 设 λ_1, λ_2 是 A 的两个不同特征值，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量。证明：$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ 不是 A 的特征向量。

7. 设 $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -k & -1 & k \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$. 当 k 取何值时，A 可对角化？当 A 可对角化时，写出其谱分解。

8. 证明：

   (a) n 阶方阵 $J_n(\lambda_0)=\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0 \end{bmatrix}$ 只有一个特征值 λ_0, 其代数重数是 n, 几何重数是 1.

   (b) 设整数 $n_1>0, n_2>0$. 分块对角矩阵 $A=\begin{bmatrix} J_{n_1}(\lambda_0) & O \\ O & J_{n_2}(\lambda_0) \end{bmatrix}$ 只有一个特征值 λ_0, 其代数重数是 n_1+n_2，几何重数是 2.

9. 证明：$A=\begin{bmatrix} I_r & O \\ B & -I_{n-r} \end{bmatrix}$ 可对角化，其中整数 $r\in\{1,2,\ldots,n\}$.

10. 设方阵 A 的特征多项式为 $p_A(x)$.

    (a) 设 A 为对角矩阵，证明：$p_A(A)=O$.

    (b) 设 A 为可对角化的矩阵，证明：$p_A(A)=O$.

    (c) 设 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. 它是否可对角化？是否满足 $p_A(A)=O$?

11. 对下列方阵 A,B, 求可逆矩阵 X, 使得 $A=XBX^{-1}$.

    (a) $A=MN$, $B=NM$, 其中 M,N 为方阵，且 M 可逆。

    (b) $A=\begin{bmatrix} MN & O \\ N & O \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} O & O \\ N & NM \end{bmatrix}$, 其中 $M\in\mathbb{C}^{m\times n}, N\in\mathbb{C}^{n\times m}$ 不必是方阵。

    (c) $A=\begin{bmatrix} M & -N \\ N & M \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} M+\mathrm{i}N & O \\ O & M-\mathrm{i}N \end{bmatrix}$, 其中 M,N 是方阵。