清华大学2022春季学期

电路原理C

第15讲

互感

内容

1 互感和互感电压

2 同名端

3 互感的去耦等效

根据绕线方式确定同名端

根据同名端确定互感电压

互感的去耦等效

包括时域和相量域

本讲重难点

- 根据绕向确定同名端
- 根据同名端确定感应电压正负号
- 去耦等效
  - 串联
  - 并联
  - 单点联

1、互感和互感电压（Mutual Inductance）

载流回路中的电流 i

安培环路定律

$$\int_L \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{l} = \mu\sum i_{\text{int}}$$

磁感应强度 B

磁通 Φ 的定义

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$$

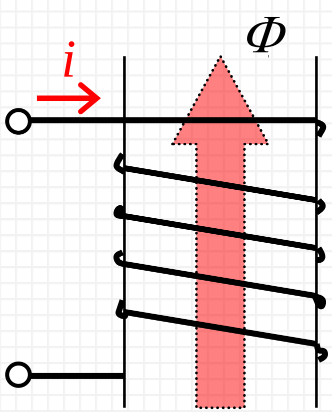
磁通 Φ

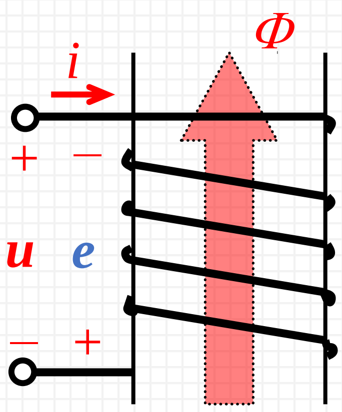
磁链 ψ 的定义

$$\psi = N\,\Phi$$

磁链 ψ

$$L \overset{\text{def}}{=} \frac{\psi}{i}$$





i，Φ右螺旋

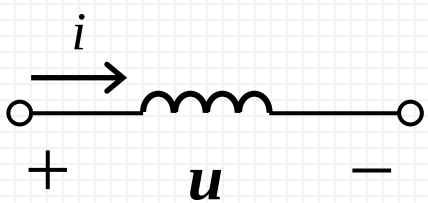
e，Φ右螺旋

u，i 关联

由电磁感应定律

$$e = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

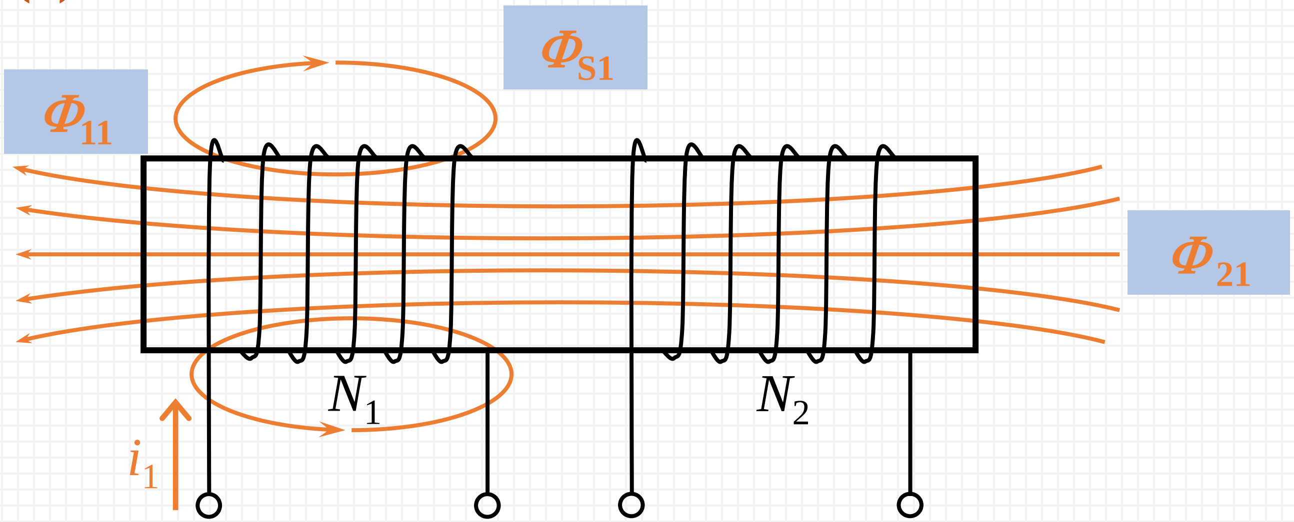
$$u = -e = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

电感确定 u-i 关系无需考虑线圈绕向

(1) 互感的定义



同理有 线圈2的自感

$$L_2 = \frac{\psi_{22}}{i_2}$$

线圈2对1的互感

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}$$

$$L_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{\psi_{11}}{i_1}$$

磁链 ψ_{11}

线圈1的自感

$\psi_{11} = N_1 \Phi_{11}$

载流回路1中的电流 i_1

磁感应强度 B

磁通 Φ_{11}

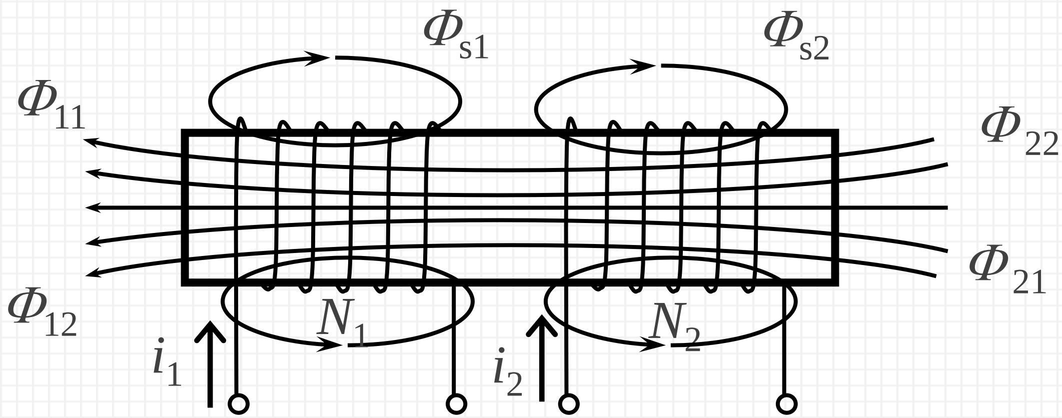
磁通 Φ_{21}

$$M_{21} \overset{\text{def}}{=} \frac{\psi_{21}}{i_1}$$

$\psi_{21} = N_2 \Phi_{21}$

磁链 ψ_{21}

线圈1对2的**互感**



线圈1的自感 $L_1 = \dfrac{\psi_{11}}{i_1}$　　$L_2 = \dfrac{\psi_{22}}{i_2}$ 线圈2的自感

线圈1对2的互感 $M_{21} = \dfrac{\psi_{21}}{i_1}$　　$M_{12} = \dfrac{\psi_{12}}{i_2}$ 线圈2对1的互感

(2) 互感的性质　$M \propto N_1 N_2$　单位 亨 (H)

a）对于线性电感 $M_{12}=M_{21}=M$

b）互感系数 M 只与两个线圈的几何尺寸、匝数、相互位置和周围的介质磁导率有关。

(3) 耦合系数 k (coupling coefficient)

$$k \overset{\text{def}}{=} \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \qquad M^2 \le L_1 L_2 \quad \Rightarrow \quad k \le 1$$

$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_{11}}{i_1} \qquad L_2 = \frac{N_2 \Phi_{22}}{i_2} \qquad M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{i_1} \qquad M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{i_2}$$

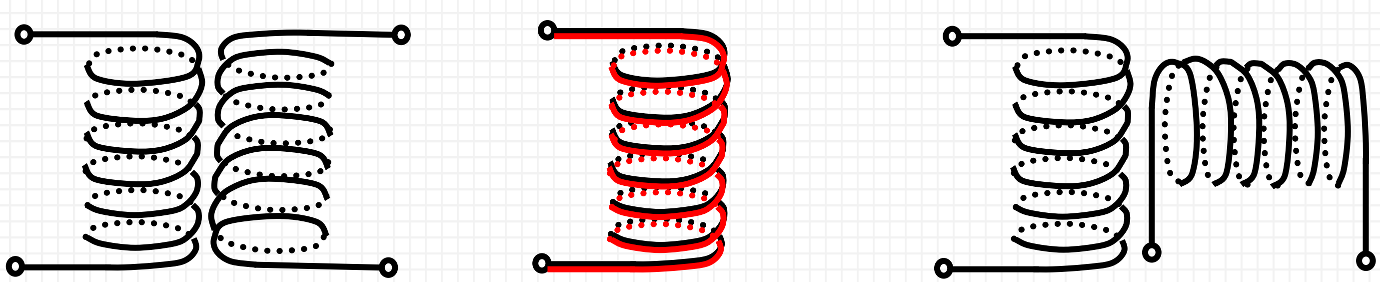
互感不大于两个自感的几何平均值。

全耦合: $k = 1 \Rightarrow \Phi_{S1} = \Phi_{S2} = 0$

$$\Phi_{11} = \Phi_{S1} + \Phi_{21}$$

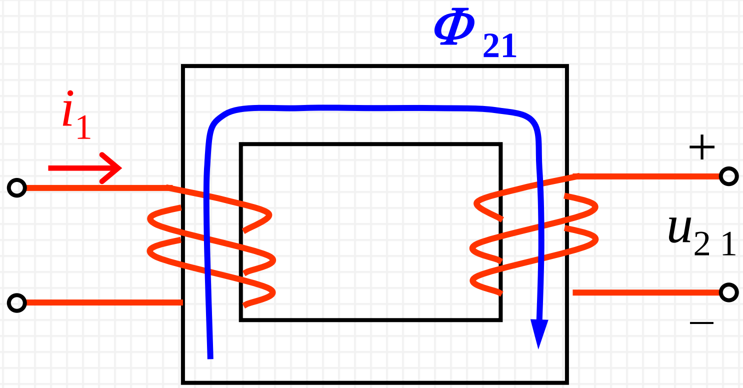
$$\Phi_{22} = \Phi_{S2} + \Phi_{12}$$

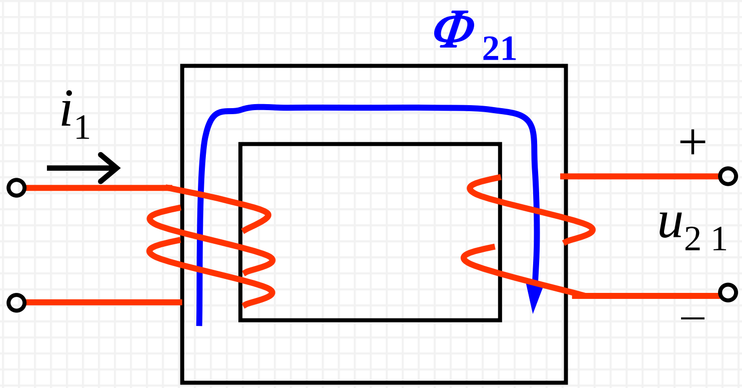
互感现象
- 利用 —— 变压器，信号和功率的传递
- 避免 —— 合理布置线圈以减少干扰



k<1 k=1 k=0

(4) 互感电压





i_1 , Φ_{21} 右手螺旋定则

Φ_{21}, e_{21} 右手螺旋定则

互感电压的方向与互感线圈的**绕向**有关！！

i_1 , Φ_{21} 右手螺旋定则

Φ_{21}, e_{21} 右手螺旋定则

由电磁感应定律

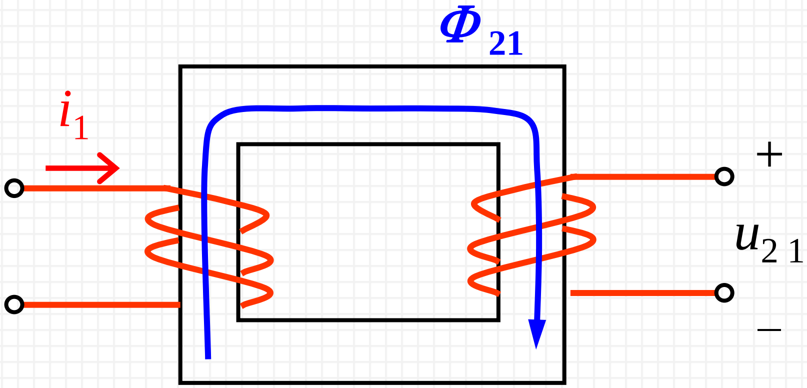
$$e_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M\frac{di_1}{dt}$$

$$u_{21} = -e_{21} = M\frac{di_1}{dt}$$

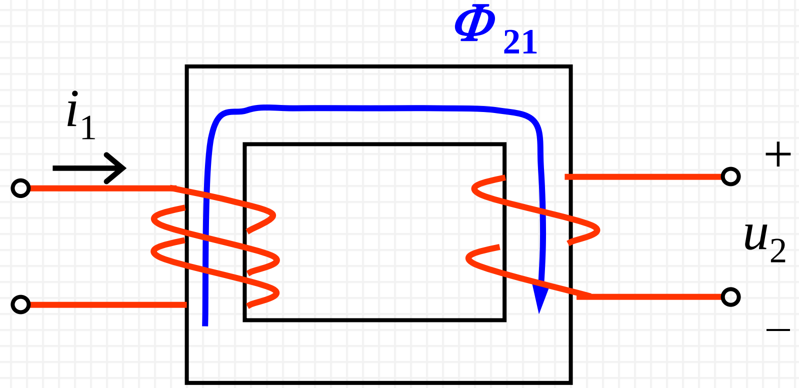
$$e_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M\frac{di_1}{dt}$$

$$u_{21} = e_{21} = -M\frac{di_1}{dt}$$

难道需要画绕向才能定电压吗？



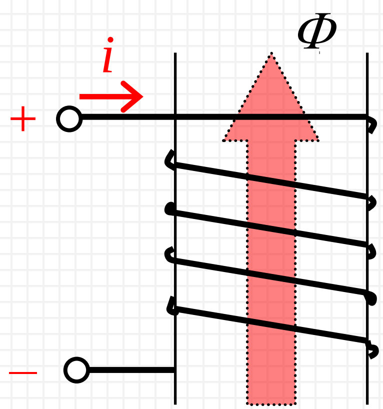
$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

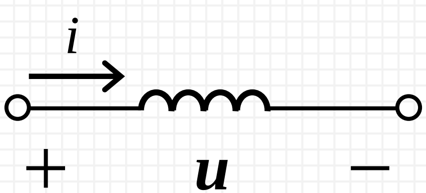


$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

如何规定i_1和u_{21}的参考方向关系，使得互感电压总是正的?

$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$



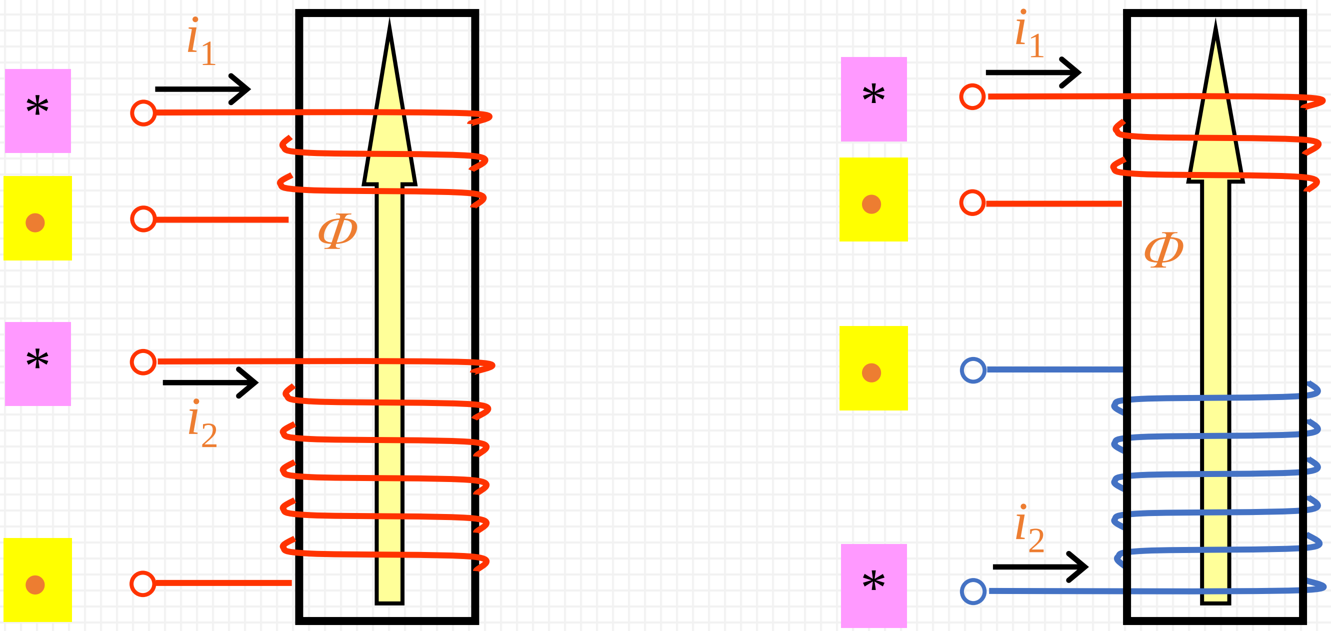


$$u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

2、同名端 (Dot Convention)

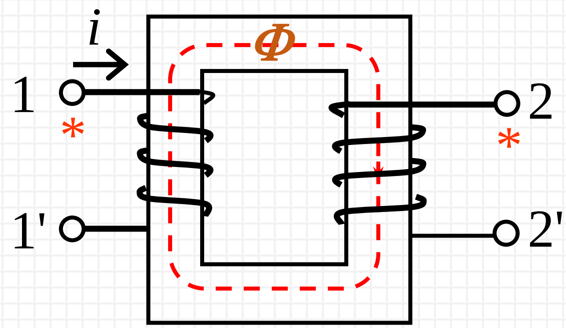
同名端：当两个电流分别从两个线圈的对应端子流入，其所产生的磁场相互加强时，则这两个对应端子称为同名端。

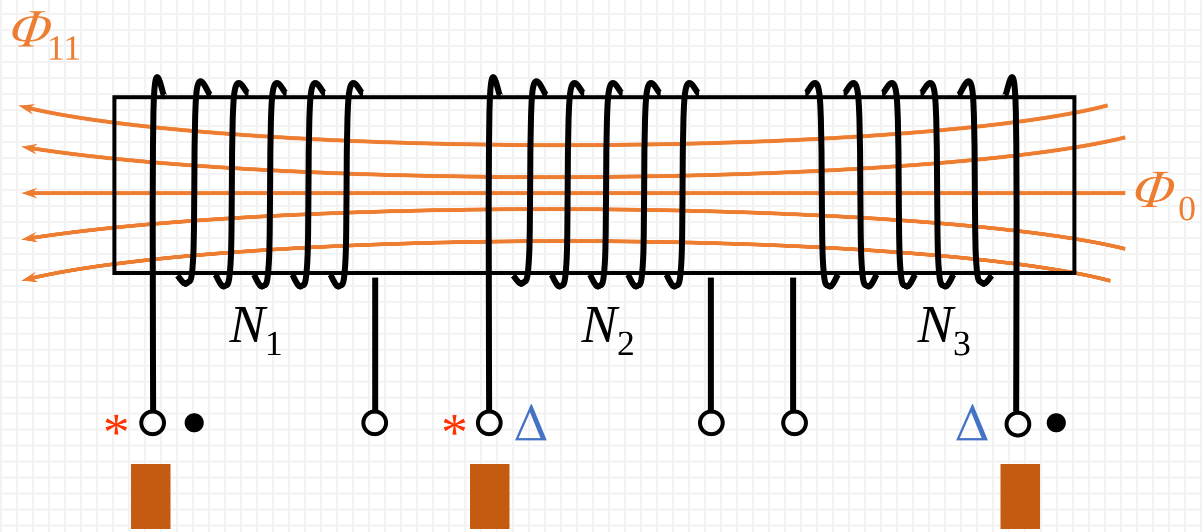
需要解决的问题1：如何根据绕法确定同名端?



注意：线圈的同名端必须**两两**确定。

例1

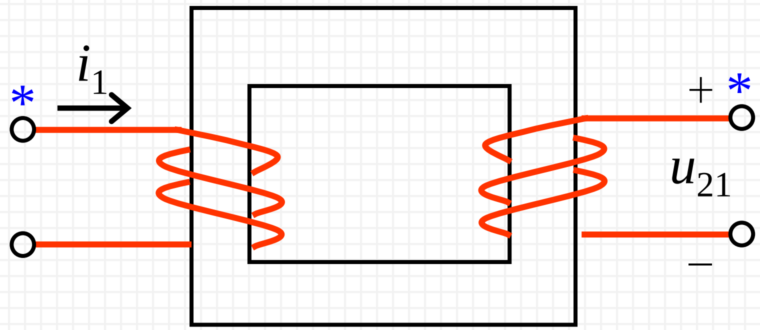




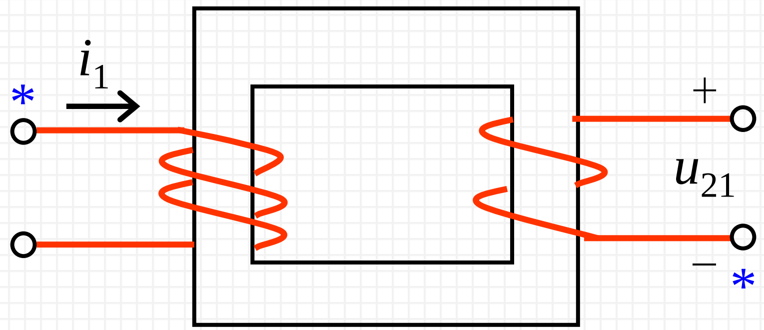
如果3个绕组根据线圈之间的两组关系可以确定另一组关系，

则可以用3个点来代替6个点。

需要解决的问题2：如何根据同名端确定互感电压?



$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$



$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

需要解决的问题2：如何根据同名端确定互感电压?

$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

标注同名端后，无需绕向即可确定电压

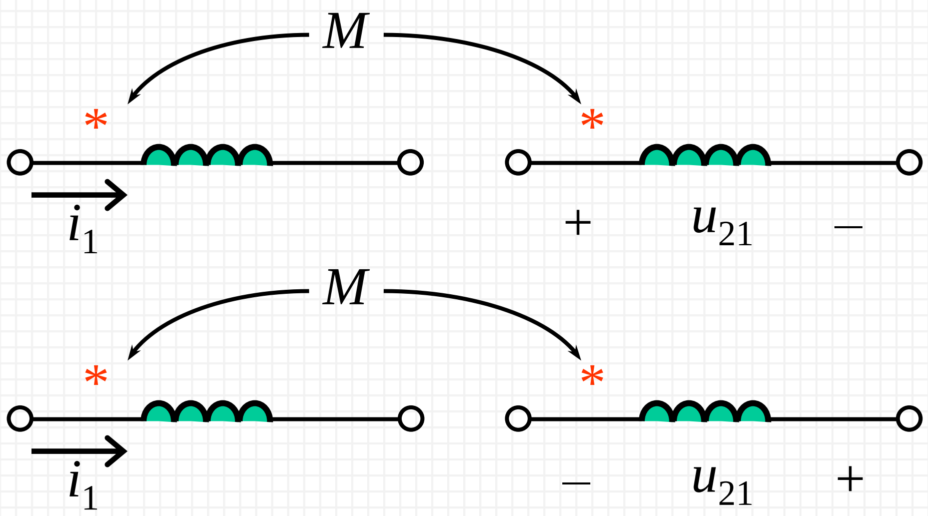
$$u_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

规律：如果电流参考方向**从同名端流入**，互感电压参考方向在**同名端为正**。

则 $$u = M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

重要！！

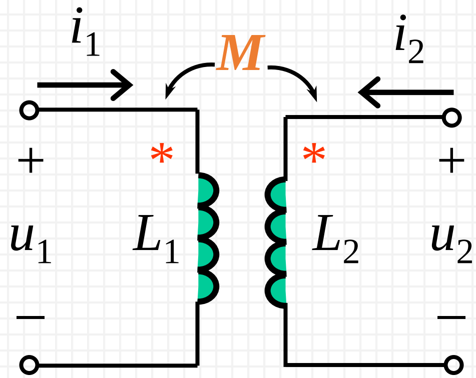
例2

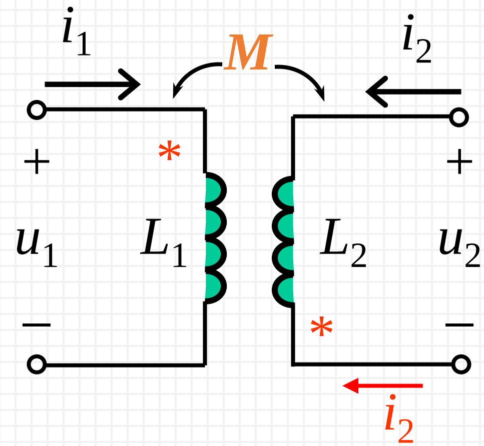


$$u_{21} = M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$u_{21} = \boxed{-}M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

例3



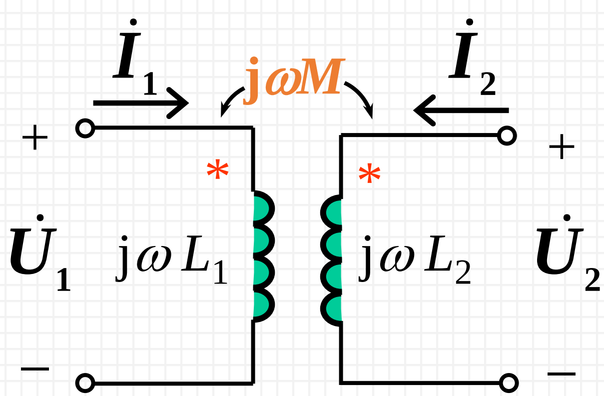


时域形式

$$u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad u_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \boxed{+} M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$u_2 = M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \qquad u_2 = -M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \boxed{-} L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

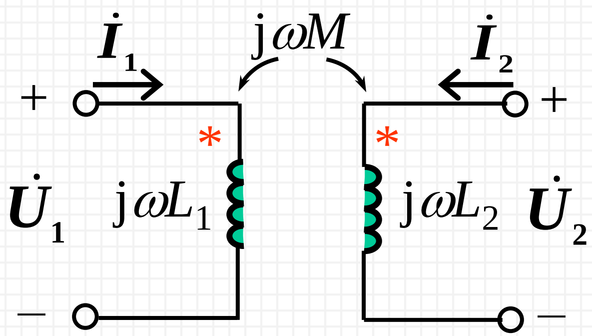
在正弦稳态分析中，其相量形式的方程为

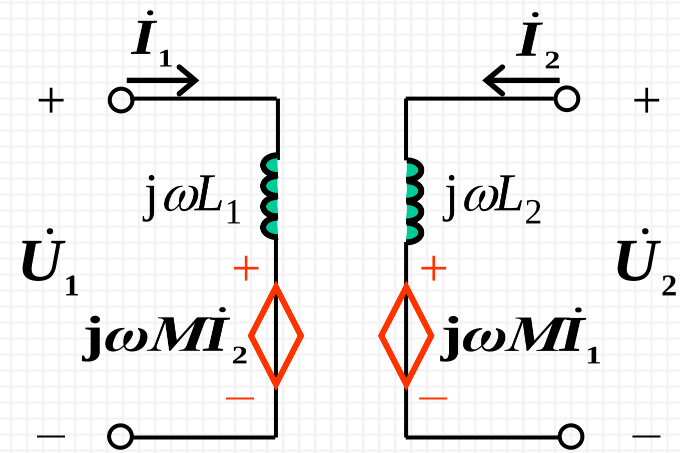


$$\dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2$$

互感线圈的等效电路





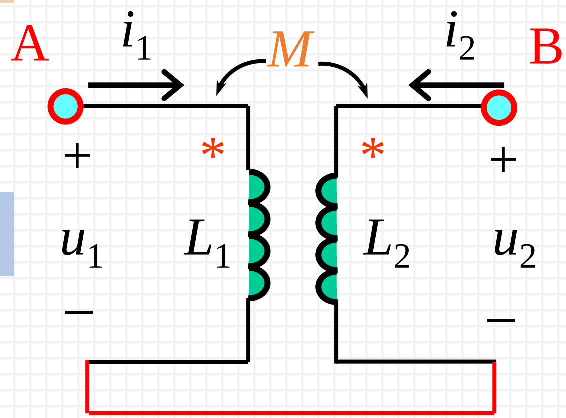
$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \mathrm{j}\omega L_1 \dot{I}_1 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_2 \\ \dot{U}_2 = \mathrm{j}\omega L_2 \dot{I}_2 + \mathrm{j}\omega M \dot{I}_1 \end{cases}$$

CCVS

3、互感的去耦等效

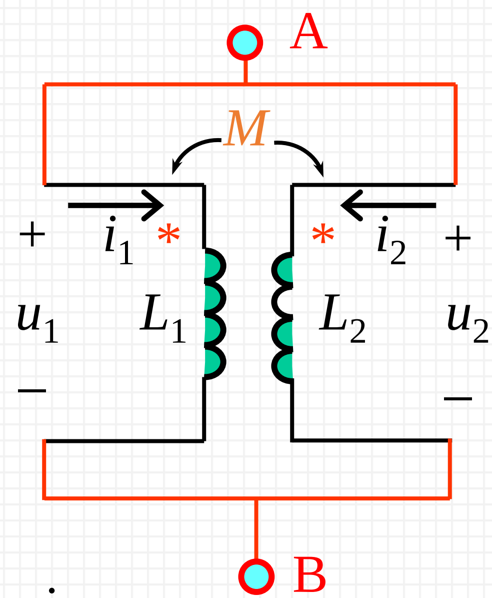
串联

4端→2端

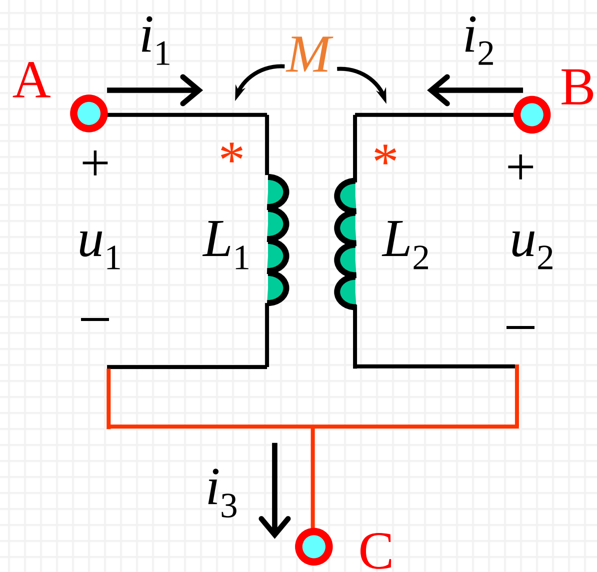


并联

4端→2端



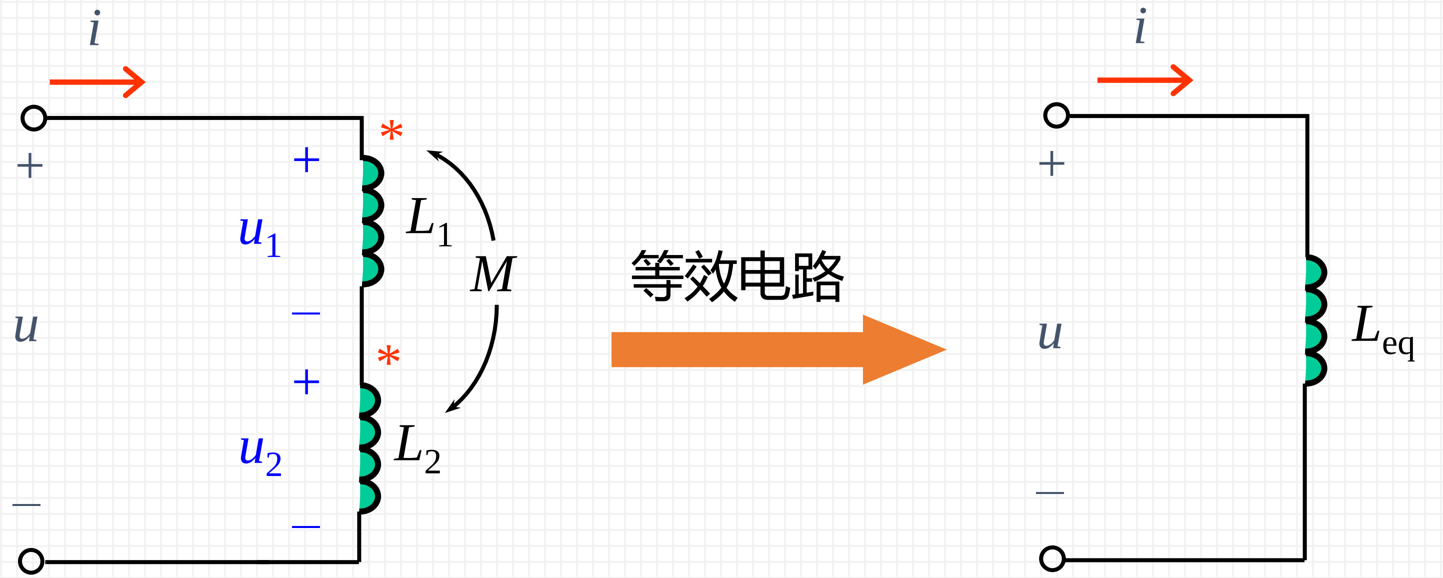
单公共节点联



4端→3端

(1) 互感线圈的串联

同名端**顺串**连接



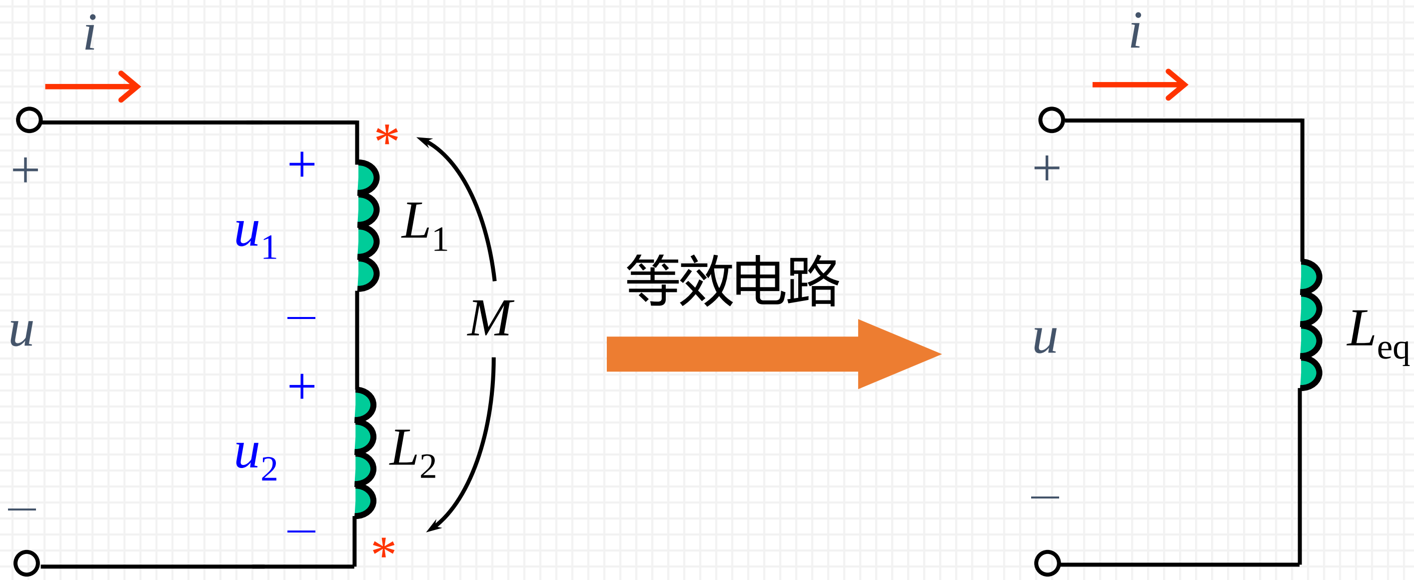
$$u = L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$= (L_1 + L_2 + 2M)\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$= L_{\mathrm{eq}}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$L_{\mathrm{eq}} = L_1 + L_2 + 2M$$

同名端反串连接



$$u = L_1\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} - M\frac{di}{dt}$$

$$= (L_1 + L_2 - 2M)\frac{di}{dt}$$

$$= L_{eq}\frac{di}{dt}$$

$$L_{eq} = L_1 + L_2 - 2M \geq 0$$

问题： 你手头有一个电感测量装置

（比如你作业中设计的电桥），

如何**测量**两线圈之间的**互感**值？

$$L_{顺} = L_1 + L_2 + 2M \qquad L_{反} = L_1 + L_2 - 2M$$

问题：如何测量互感值?

$$L_{顺} = L_1 + L_2 + 2M \qquad L_{反} = L_1 + L_2 - 2M$$

* **顺接**一次，**反接**一次，就可以测出互感：

$$M = \frac{L_{顺} - L_{反}}{4}$$

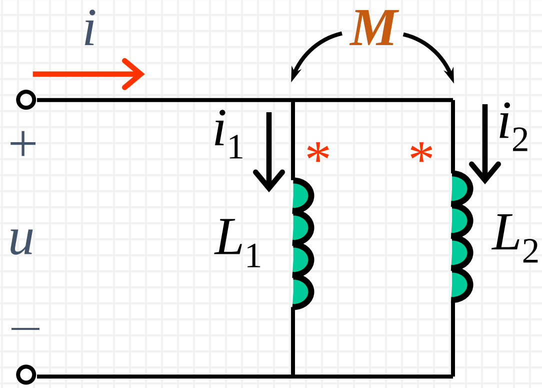
* 全耦合 $M = \sqrt{L_1 L_2}$

当 $L_1=L_2=L$时 ，$\boldsymbol{M=L}$

$$L_{eq} = \begin{cases} 4M & 顺串 \\ 0 & 反串 \end{cases}$$

(2) 互感线圈的并联

同名端在同侧



$$\begin{cases} u = L_1 \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ \quad = L_2 \dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M \dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \\ i = i_1 + i_2 \end{cases}$$

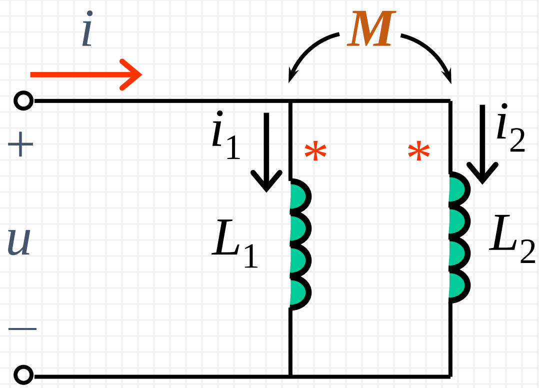
解得 u, i 的关系

$$u = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$L_{\mathrm{eq}} = \frac{(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M}$$

记不住

同名端在同侧互感并联电路的**去耦等效**分析

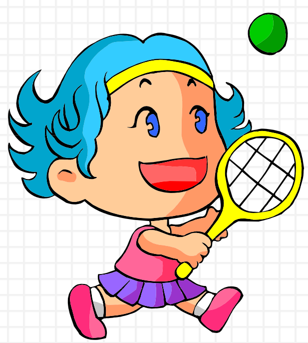


$$\begin{cases} u = L_1\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di_2}{dt} \\ u = L_2\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

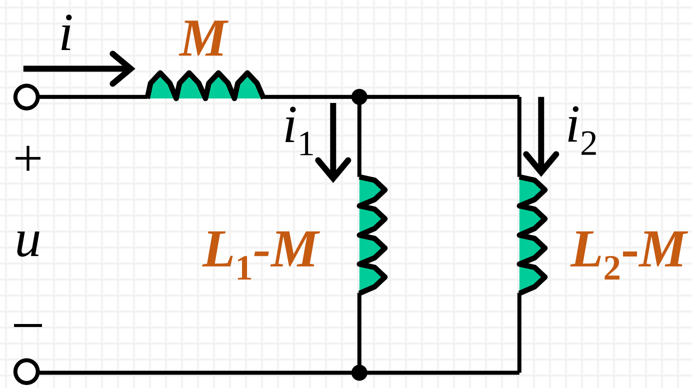
$i_2 = i - i_1$

$i_1 = i - i_2$

$$\begin{cases} u = (L_1 - M)\dfrac{di_1}{dt} + M\dfrac{di}{dt} \\ u = (L_2 - M)\dfrac{di_2}{dt} + M\dfrac{di}{dt} \end{cases}$$



画等效电路

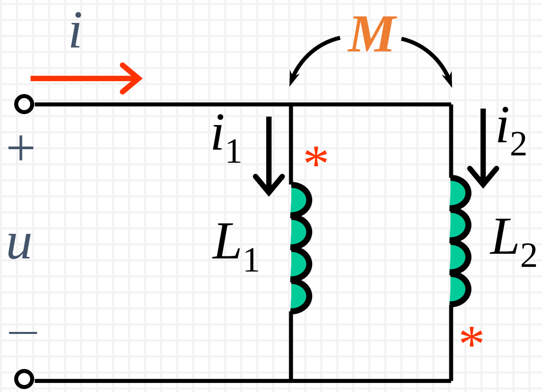


$(L_1\text{-}M)//(L_2\text{-}M)+M$

$$L_{eq} = \frac{(L_1L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M}$$

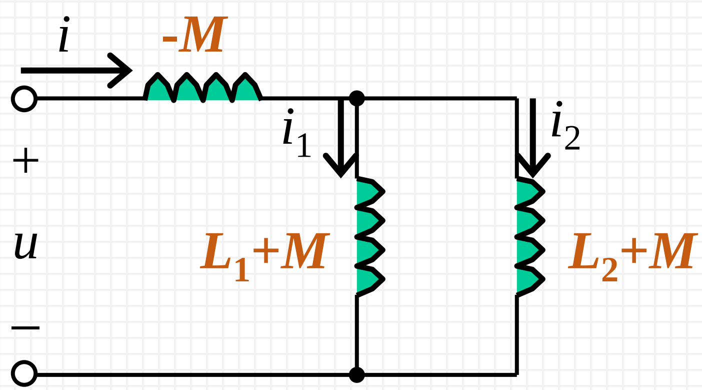
于歆杰等，关于全耦合的一道习题的讨论，电气电子教学学报，2012

同理可推得同名端在异侧互感并联电路的去耦等效分析



$$\begin{cases} u=(L_1+M)\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}-M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ u=(L_2+M)\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}-M\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

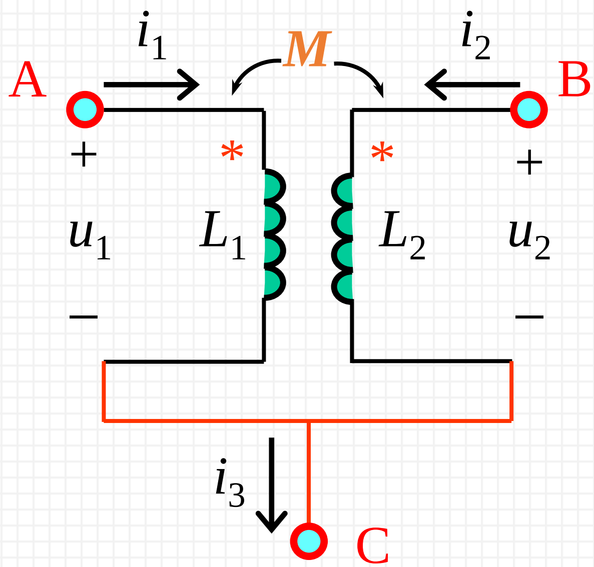
等效电路



$(L_1+M)//(L_2+M)-M$

$$L_{\mathrm{eq}}=\frac{(L_1L_2-M^2)}{L_1+L_2+2M}$$

(3) 有一个公共节点互感线圈的去耦等效电路



2 个同名端都靠近

（远离）公共节点

$$u_{AC}=u_1$$

$$\boxed{i_3=i_1+i_2}$$

$$=L_1\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_2}{dt}$$

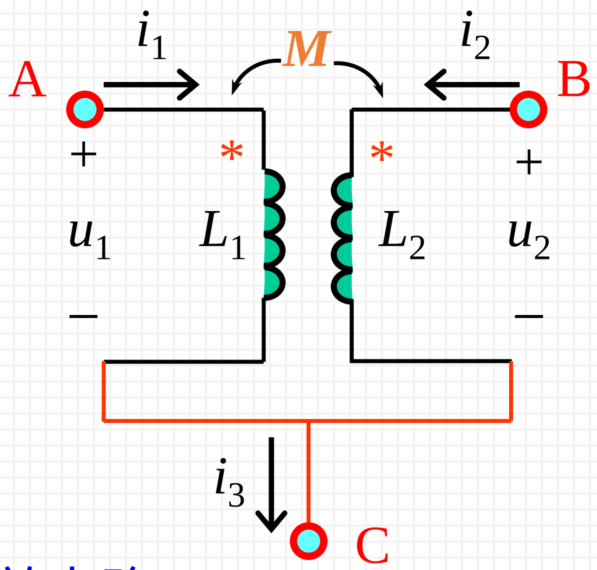
$$=\left(L_1-M\right)\frac{di_1}{dt}+M\frac{di_3}{dt}$$

$$u_{BC}=u_2$$

$$\boxed{i_3=i_1+i_2}$$

$$=L_2\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_1}{dt}$$

$$=\left(L_2-M\right)\frac{di_2}{dt}+M\frac{di_3}{dt}$$

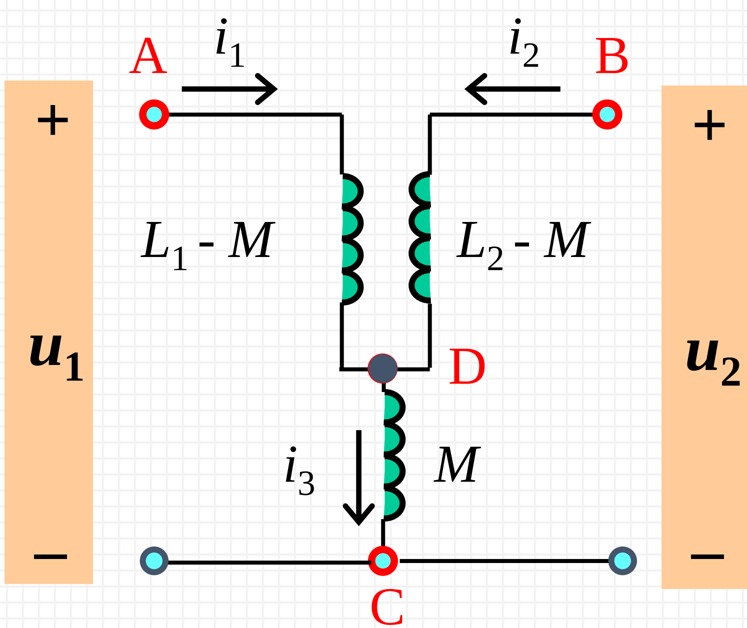


$$u_{AC} = (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_3}{dt}$$

$$u_{BC} = (L_2 - M)\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_3}{dt}$$

$$i_3 = i_1 + i_2$$

等效电路



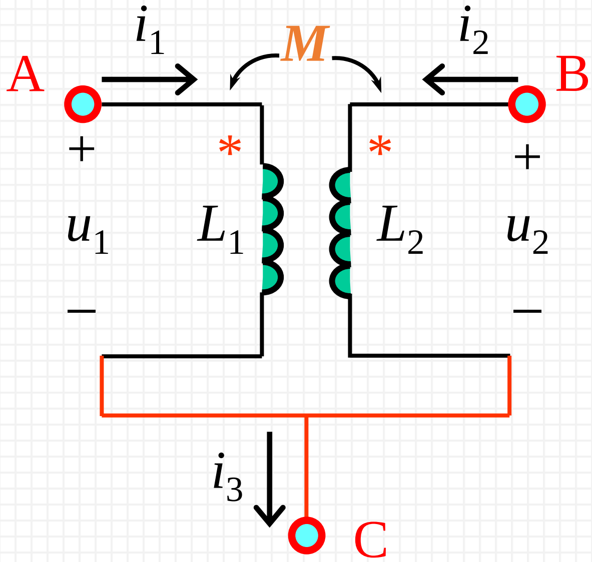
强调：

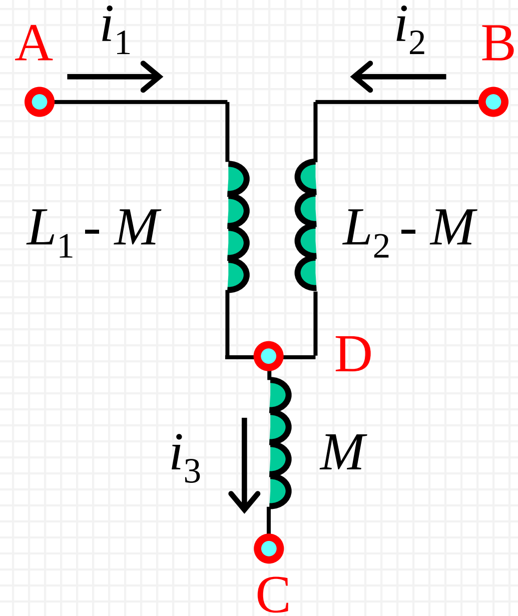
多了个节点D

$u_1 = u_{AC} \neq u_{AD}$

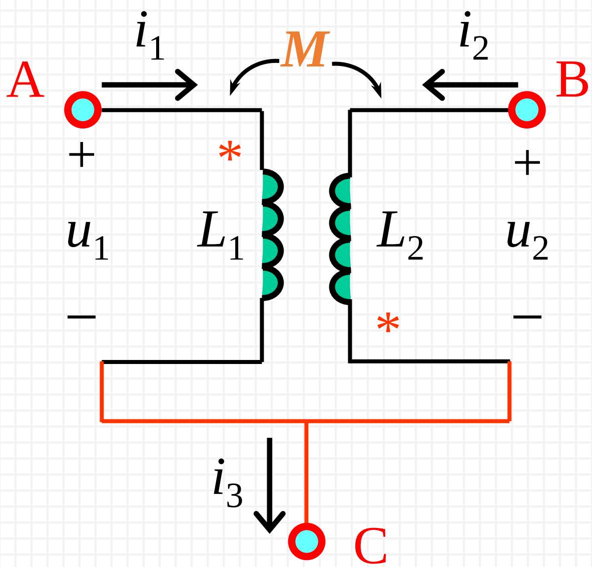
$u_2 = u_{BC} \neq u_{BD}$

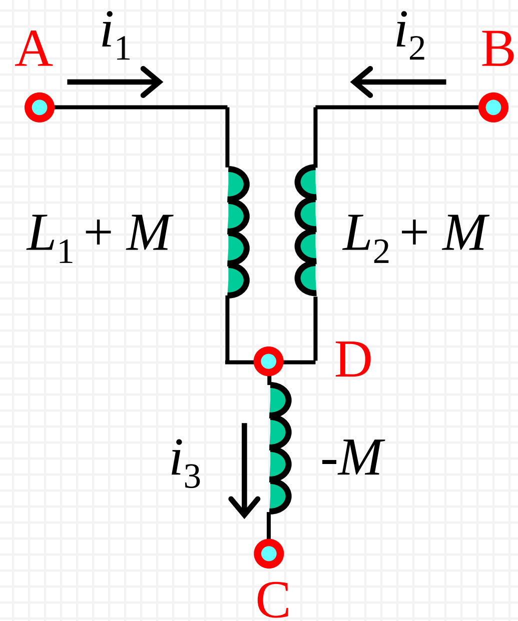
L_1-M, L_2-M, M 都**不是真电感**





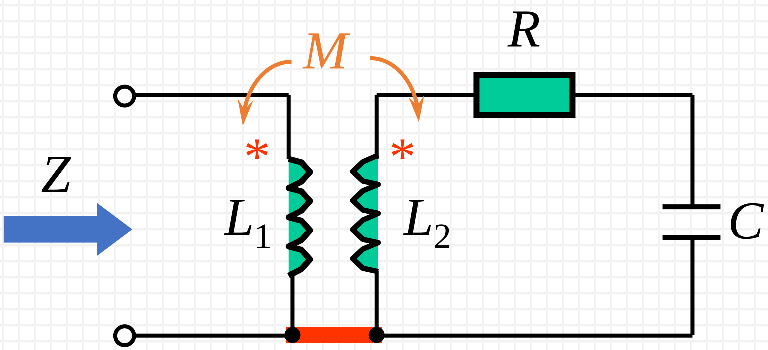
2 个同名端**都靠近**（远离）公共节点



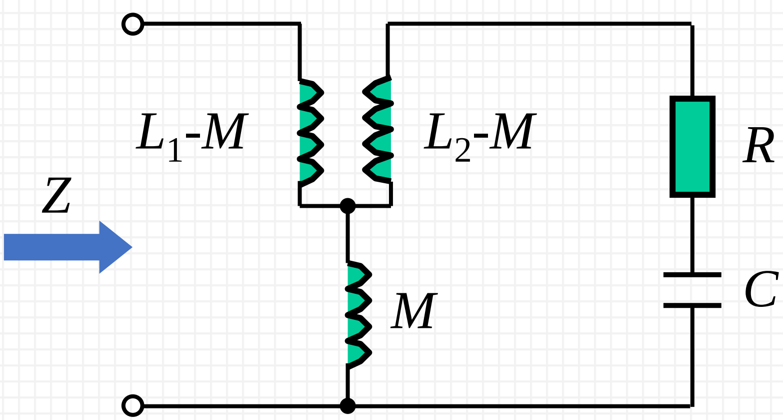


同名端**1个靠近**、**1个远离**公共节点

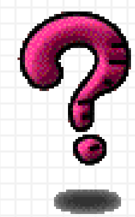
例1 已知如图，求入端阻抗 Z=?



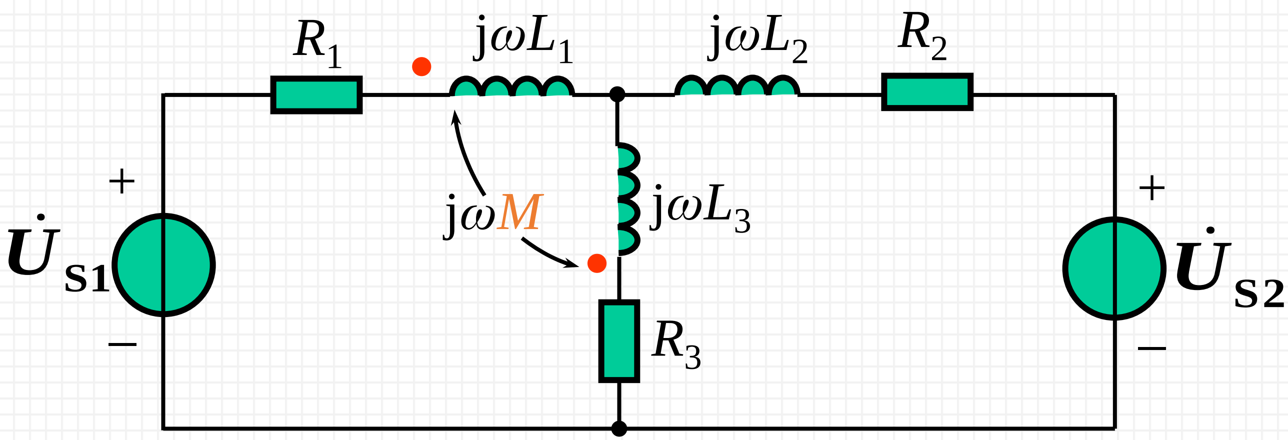
法一 端口加压求流



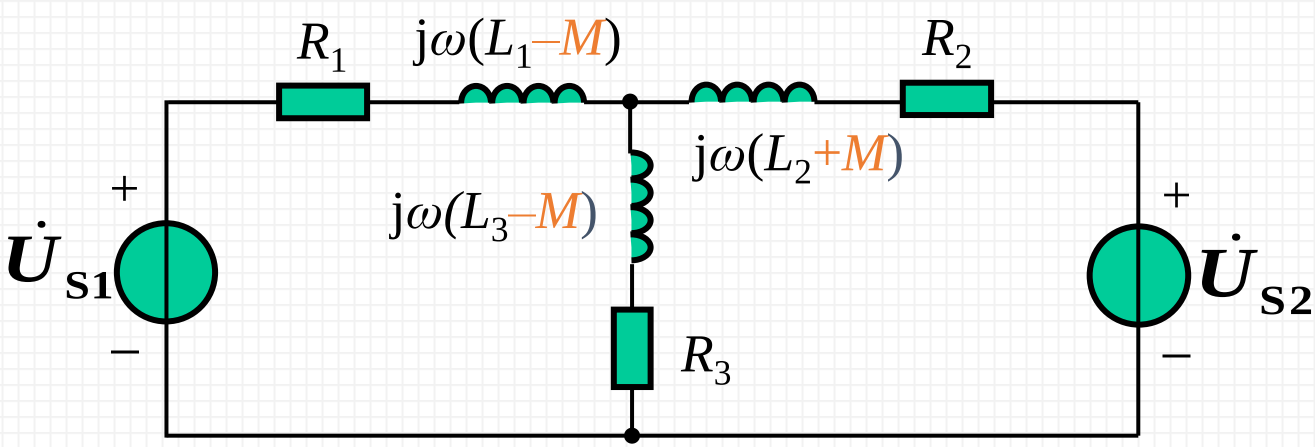
法二 去耦等效



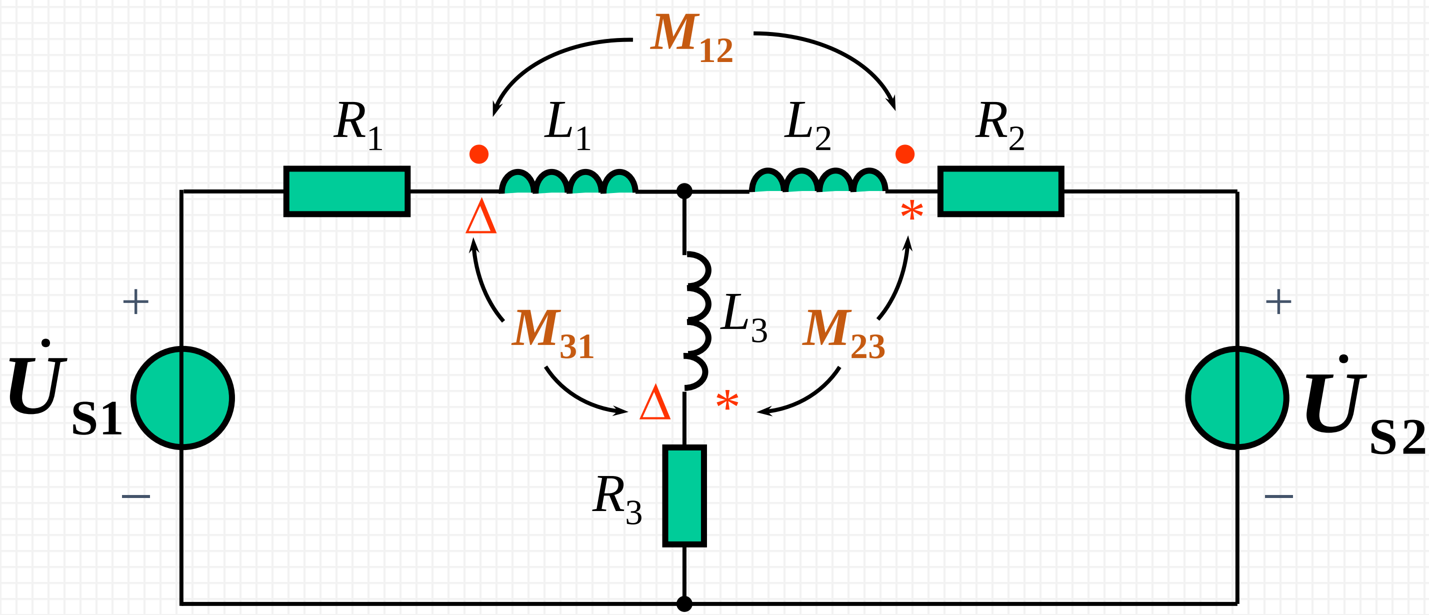
例2 画出下图电路的去耦等效电路。



去耦等效电路

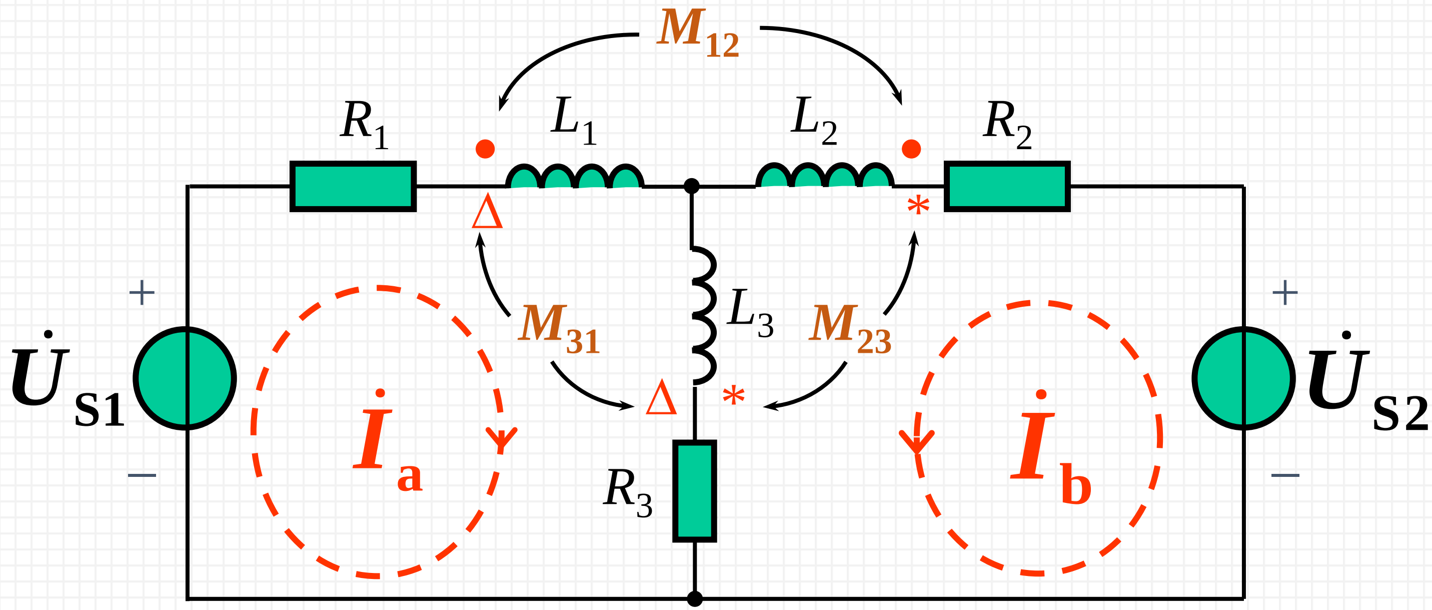


例3 列写电路的回路电流方程。



法1：直接列写

法2：去耦等效

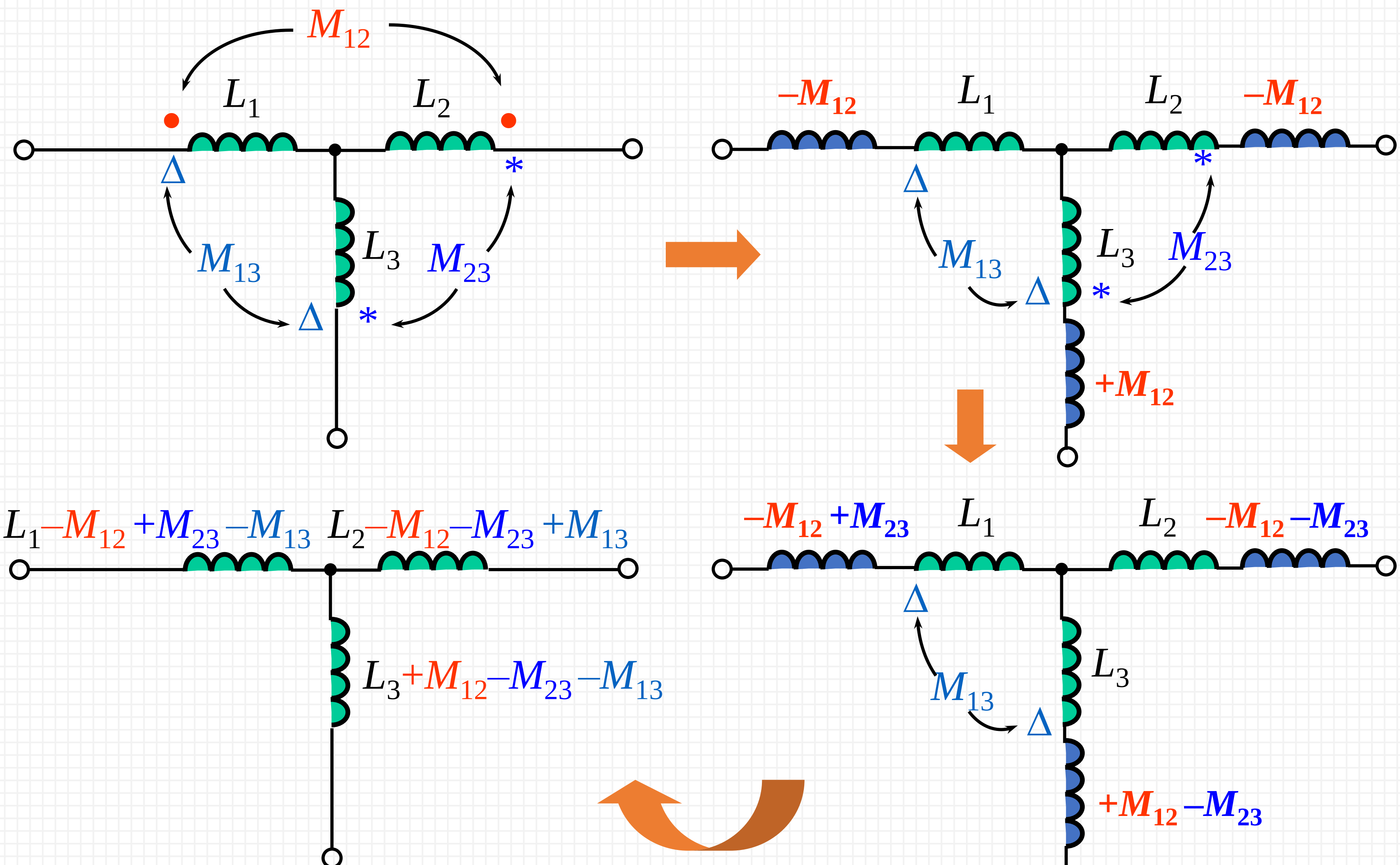


法1：直接列写 先不考虑互感, 再补充互感电压

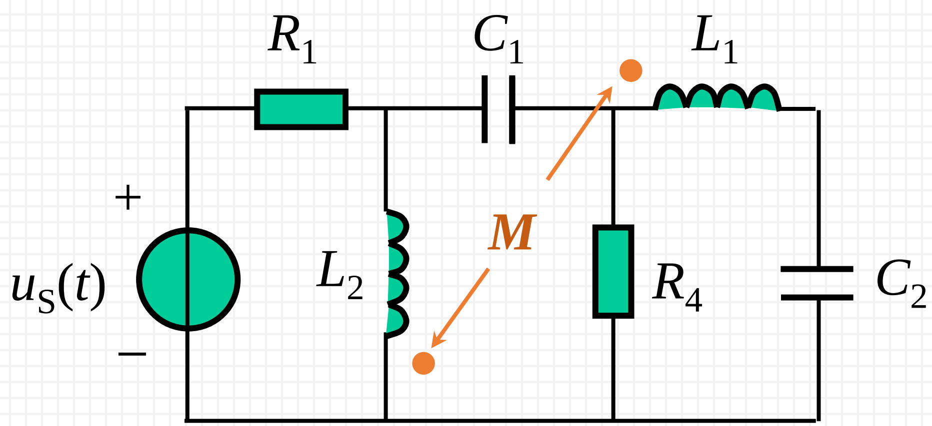
$$
\begin{cases}
(R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_3 + R_3)\dot{I}_a + (R_3 + j\omega L_3)\dot{I}_b \\
-j\omega M_{31}\dot{I}_a - j\omega M_{31}\dot{I}_a + j\omega M_{12}\dot{I}_b - j\omega M_{23}\dot{I}_b - j\omega M_{31}\dot{I}_b = \dot{U}_{S1} \\
(R_2 + j\omega L_2 + j\omega L_3 + R_3)\dot{I}_b + (R_3 + j\omega L_3)\dot{I}_a \\
+j\omega M_{12}\dot{I}_a - j\omega M_{31}\dot{I}_a - j\omega M_{23}\dot{I}_a - j\omega M_{23}\dot{I}_b - j\omega M_{23}\dot{I}_b = \dot{U}_{S2}
\end{cases}
$$

注意： ① 不丢互感电压项；② 互感电压的正、负。

法2 去耦等效电路(一对一对消)



去耦等效不是万能的



没有公共点

怎么办?