# Review

## 第一型曲面积分的计算

- $S: x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), (u,v) \in D,$

$$(A, B, C) = \mathrm{r}'_u \times \mathrm{r}'_v$$

$$\iint_S f(x, y, z)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

- $S: z = f(x, y), (x, y) \in D,$

$$\iint_S g(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint_D g(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

# §5. 第二型曲面积分

## 1.有向曲面

Def. 设$S$为逐片光滑曲面.任取$S$上一点$(x_0, y_0, z_0)$,任取$S$在该点的两个单位法向量之一, 如 $\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$, 若不论点 $(x, y, z)$ 在曲面$S$上如何运动,当它回到点$(x_0, y_0, z_0)$ 时,$\vec{n}(x, y, z)$总与 $\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$重合,而不会与$-\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$ 重合,则称$S$为双侧曲面. 所谓有向曲面$S$,就是指定了正侧(或正单位法向量)的双侧曲面.

Remark: 不是双侧曲面的例子:$Möbius$带.

## 2.第二型曲面积分的物理背景及定义

设区域$\Omega\subset\mathbb{R}^3$中分布着流体,其密度均匀(设为1),流速为$\vec{v}(x,y,z)$.$S$为$\Omega$内一光滑曲面.求单位时间内自$S$的$A$侧穿过$S$流向$B$侧的流量.

将$S$分割成$n$小片$\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$,在$\Delta S_i$上取点$P_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$,将$\Delta S_i$近似看成平面,其单位法向量为$S$在点$P_i$指向$B$侧的单位法向量$\vec{n}(P_i)$.于是,单位时间内自$A$侧穿过$S$流向$B$侧的流量近似为

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{v}(P_i)\cdot\vec{n}(P_i)\Delta S_i.$$

当各个小片曲面的最大直径趋于0时,这个和式的极限就是单位时间内自$A$侧穿过$S$流向$B$侧的流量.

Def. 设$\vec{v}(x,y,z)$为$\Omega\subset\mathbb{R}^3$中的连续向量场, $S$为$\Omega$中光滑有向曲面, $\vec{n}(x,y,z)$为$S$的正单位法向量,则函数$\vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)$在$S$上连续,从而(第一型)曲面积分

$$\iint_S \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\mathrm{d}S \triangleq \iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

存在,称之为向量场$\vec{v}(x,y,z)$在有向曲面$S$上的第二型曲面积分.当$S$为封闭曲面时,记作

$$\oiint_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S.$$

记

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma),$$

其中$\alpha, \beta, \gamma$分别为$\vec{n}$与$x, y, z$正半轴的夹角, 称$\cos\alpha$, $\cos\beta, \cos\gamma$为方向余弦.

有向面积微元$\vec{n}\mathrm{d}S$, 在$oyz$, $ozx$和$oxy$平面的有向投影面积为

$$(1,0,0)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = \cos\alpha\,\mathrm{d}S \triangleq \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z,$$

$$(0,1,0)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = \cos\beta\,\mathrm{d}S \triangleq \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x,$$

$$(0,0,1)\cdot\vec{n}\mathrm{d}S = \cos\gamma\,\mathrm{d}S \triangleq \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

Remark:有向面积微元$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$.

当$S$的正法向量与z正半轴的夹角为锐角时,d$S$ 在$oxy$平面的投影为正,$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.反之,当$S$ 的正法向量与z正半轴的夹角为钝角时, d$S$ 在$oxy$平面的投影为负,$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 同样理解有向面积微元$\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$和$\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$.

设$\vec{v} = (P, Q, R), \vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$,则

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{n}\mathrm{d}S &= P\cos\alpha \mathrm{d}S + Q\cos\beta \mathrm{d}S + R\cos\gamma \mathrm{d}S \\ &= P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\end{aligned}$$

Remark:$\vec{v}=(P,Q,R)$,第二型曲面积分也记为

$$\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_S P\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y.$$

第二型曲面积分也称为对坐标的曲面积分.

3.第二型曲面积分的性质

(1)(可积的充分条件) 若$S$为有向光滑曲面,向量场

$\vec{v}(x,y,z)$在$S$上连续,则$\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$存在.

(2)(线性性质)若$\iint_S \vec{u}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$与$\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$都存在,则$\forall \alpha,\beta$

$\in \mathbb{R}$, $\iint_S (\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$也存在,且

$$\iint_S (\alpha\vec{u}+\beta\vec{v})\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\alpha\iint_S \vec{u}\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\beta\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

特别地,$\iint_S P\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$

$$=\iint_S P\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+\iint_S Q\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x+\iint_S R\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y.$$

(3)(对曲面的可加性)$S$由$S_1,S_2,\cdots,S_n$拼接而成,则

$$\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum_{i=1}^{n}\iint_{S_i} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

(4)用$S^-$表示有向曲面$S$的另一侧,则

$$\iint_{S^-} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=-\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}.$$

## 4.第二型曲面积分$\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$ 的计算

这里$S$为已知有向曲面, $\vec{v}$为$S$上已知向量场. 因此, 计算第二型曲面积分的关键是求出有向曲面$S$的单位法向量$\vec{n}$, 然后再计算第一型曲面积分$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$.

对形如$\iint_S P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$的第二型曲面积分, 令$\vec{v}=(P,Q,R)$, 将积分视为$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$来计算.

例:$I=\iint_S xz\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,其中$S$

为半球$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$,上侧为正.

解:$\vec{v}=(xz,yz,z^2),\vec{n}=(x,y,z)/R$.

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(R/z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$I=\iint_S\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iint_S\frac{z}{R}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi R^4.\square$$

例:$I=\iint_S (2x+z)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$,其中$S$为有向曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$,其法向量与z正半轴夹角为锐角.

解: 
$$\vec{v}=(2x+z,0,z),$$
$$\vec{n}=(-2x,-2y,+1)\Big/\sqrt{1+4x^2+4y^2},$$
$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$
$$I=\iint\limits_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_S \frac{-4x^2-2xz+z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S$$
$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\left[-4x^2-(2x-1)(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由对称性知$\iint_{x^2+y^2\le 1} x(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,于是

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{x^2+y^2\le 1}(y^2-3x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi} r^2(\sin^2 t-3\cos^2 t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(1-4\cos^2 t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left[1-2(1+\cos 2t)\right]\mathrm{d}t=-\pi/2.\square
\end{aligned}
$$

计算第二型曲面积分$\iint_S \vec{v}(x,y,z)\cdot\vec{n}(x,y,z)\mathrm{d}S$时，分别求单位正法向量$\vec{n}(x,y,z)$和面积微元$\mathrm{d}S$，计算$\vec{n}\mathrm{d}S$时能约分.因此计算过程可以进一步简化.

Remark:设$\vec{v}=(P,Q,R)$.

Case1.$S: x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v), (u,v)\in D$.

$$(A,B,C)=\mathrm{r}_u'\times \mathrm{r}_v',\ \vec{n}(x,y,z)=\pm\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\pm\iint_S\frac{PA+QB+RC}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,\mathrm{d}S$$

$$=\pm\iint_D(PA+QB+RC)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

当向量$(A,B,C)$与曲面$S$的正向单位法向量同向(反向)时, 取正号(负号).

Case2. $S: z = f(x, y), (x, y) \in D.$

$$A = -f'_x, B = -f'_y, C = 1, \vec{n}(x, y, z) = \pm \frac{(f'_x, f'_y, -1)}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}},$$

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是 $$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S = \pm \iint_S \frac{-Pf'_x - Qf'_y + R}{\sqrt{1 + f'^2_x + f'^2_y}}\,\mathrm{d}S$$

$$= \pm \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当向量$(-f'_x, -f'_y, 1)$与曲面$S$的正向单位法向量同向(反向)时, 取正号(负号).

例:$I=\iint_S x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$,其中$S$为椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的内侧.

解:$S$的参数方程$\mathrm{r}=(a\sin\varphi\cos\theta,b\sin\varphi\sin\theta,c\cos\varphi)$,

$$\varphi\in[0,\pi],\theta\in[0,2\pi].$$

$$\mathrm{r}'_\varphi=(a\cos\varphi\cos\theta,b\cos\varphi\sin\theta,-c\sin\varphi),$$

$$\mathrm{r}'_\theta=(-a\sin\varphi\sin\theta,b\sin\varphi\cos\theta,0),$$

$$\mathrm{r}'_\varphi\times\mathrm{r}'_\theta=(bc\sin^2\varphi\cos\theta,ac\sin^2\varphi\sin\theta,ab\sin\varphi\cos\varphi)$$

$$I=-abc\iint_D(\sin^3\varphi\cos^2\theta+\sin^3\varphi\sin^2\theta+\sin\varphi\cos^2\varphi)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=-abc\iint_D\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=-4\pi abc.\square$$

Remark: 对形如$\iint_S P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z, \iint_S Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x, \iint_S R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$的第二型曲面积分,也可以直接化成$S$ 在坐标面上的投影区域上的二重积分计算. 例如,

$$S: x = x(y,z), y = y, z = z, (y,z)\in D_{yz}.$$

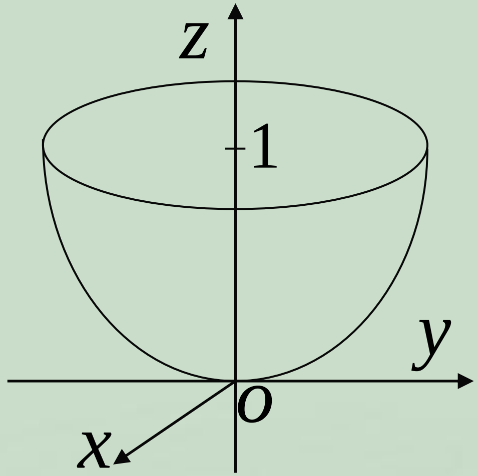
$$\mathrm{r}'_y\times\mathrm{r}'_z = (x'_y, 1, 0)\times(x'_z, 0, 1) = (1, *, *)$$

$$\iint_S P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} (P,0,0)\cdot(\mathrm{r}'_y\times\mathrm{r}'_z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

对具体的例子, 这种方法一般比较麻烦. 但因此$\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$有直观的几何解释, 所以该方法在理论分析上很有用. 将来证明Gauss 公式时就要用到这种观点.

例: $I=\iint_S (2x+z)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y$,

$S$为曲面$z=x^2+y^2\,(0\le z\le 1)$的内侧.




解:设$D_{yz}, D_{xy}$分别为$S$在$oyz, oxy$平面上的投影区域,则

$$I=\iint\limits_{S,x\ge 0}(2x+z)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+\iint\limits_{S,x\le 0}(2x+z)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+\iint\limits_{S} z\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y,$$

$$=\iint_{D_{yz}}(2\sqrt{z-y^2}+z)(-\mathrm{d}y\mathrm{d}z)+\iint_{D_{yz}}(-2\sqrt{z-y^2}+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-4\iint_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\iint_{D_{yz}}\sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{1}\sqrt{z-y^2}\,\mathrm{d}z$

$$=\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(z-y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{z=y^2}^{1}\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{2}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{4}{3}\int_{0}^{1}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}y=\frac{4}{3}\int_{0}^{\pi/2}\cos^4 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

$$\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{1}r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.$$

于是, $I=-4\times\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}.$ □

例: $I=\oiint_S x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中$S$为长方体$|x|\le a,|y|\le b,|z|\le c$的外表面.

解: $S$由六块侧面$S_1, S_2,\cdots, S_6$拼接而成.

在$S_1: x=a,|y|\le b,|z|\le c$上, $\vec{n}=(1,0,0), x=a$, 于是

$$\iint_{S_1} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

$$=\iint_{S_1} x\mathrm{d}S=\iint_{|y|\le b,|z|\le c} a\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4abc.$$

同理, $\iint_{S_i} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=4abc,$

$$i=2,3,\cdots,6.$$

故$I=24abc.\square$

我们将用Guass公式给出更简洁的计算.

# Summary

## 第二型曲面积分的计算

- 方法一：化第二型曲面积分为第一型曲面积分

$$\iint_S P\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge \mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

其中$\vec{v}=(P,Q,R)$

- 方法二：$S: x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v), (u,v)\in D,$

$$\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \pm\iint_D (PA+QB+RC)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

$$(A,B,C) = \mathrm{r}_u'\times \mathrm{r}_v' = \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \det\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right).$$

•方法三 $S: z = f(x, y), (x, y) \in D,$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \pm \iint_D (-Pf_x' - Qf_y' + R) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

•方法四:直接化二重积分S在坐标面上的投影区域上的二重积分

$$\iint_S P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{yz}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iint_S Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = \pm \iint_{D_{xz}} Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$\iint_S R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

作业:习题4.5 No.1,5,7.