清华大学2022春季学期

电路原理C

第13讲

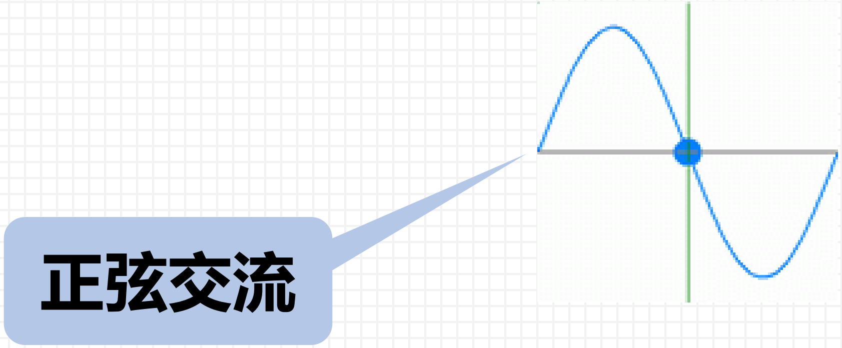
正弦激励下动态电路的稳态分析

内容

电力

过去20世纪人类最伟大的发明

1、电力系统（Power System）简介



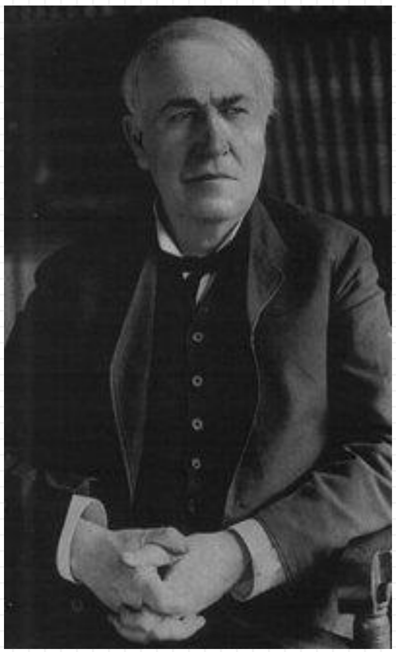
- AC系统和DC系统谁先诞生?
- 为什么用AC系统?
- 目前的AC系统是怎样的?

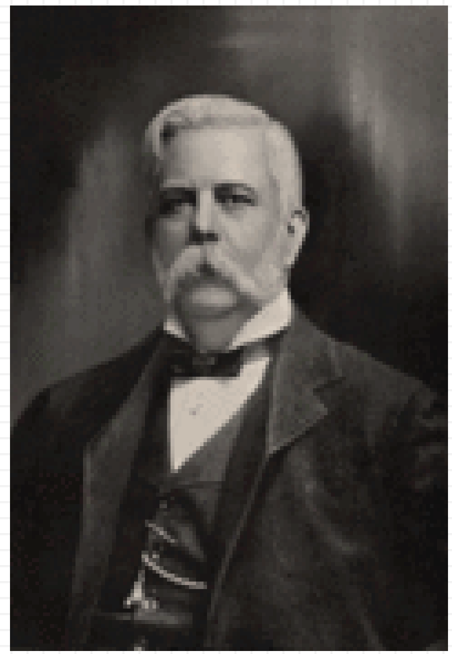
AC系统和DC系统谁先诞生(电流之战)?

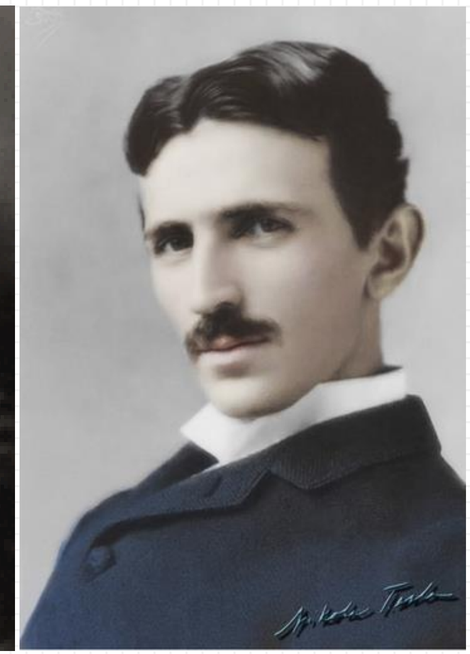
- 爱迪生发明了白炽灯和直流发电机，该发明成为1881年巴黎电气博览会的奇迹之一。1882年爱迪生在欧洲和美国建设了若干直流中心发电站。
- 西屋于1888年获得了特斯拉多相交流系统专利的独家使用权，并且说服特斯拉加入了西屋电气公司。
- 俄国人多里沃－多勃列沃列斯基于1891年在法兰克福举行的国际电工技术展览会上建造了长度为175公里的交流输电系统。
- Steinmetz于1895年获得了专利“交流配电系统”，解决了交流系统的分析问题。
- 1895年西屋获得了在尼亚加拉瀑布安装交流发电机的合同，该项目于1896年向32公里外的布法罗市供电。

History

- **The Current War** in 1880s







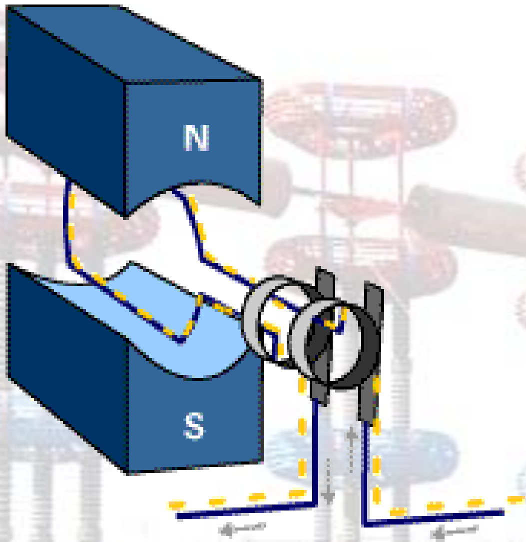
Thomas Alva Edison
Direct Current

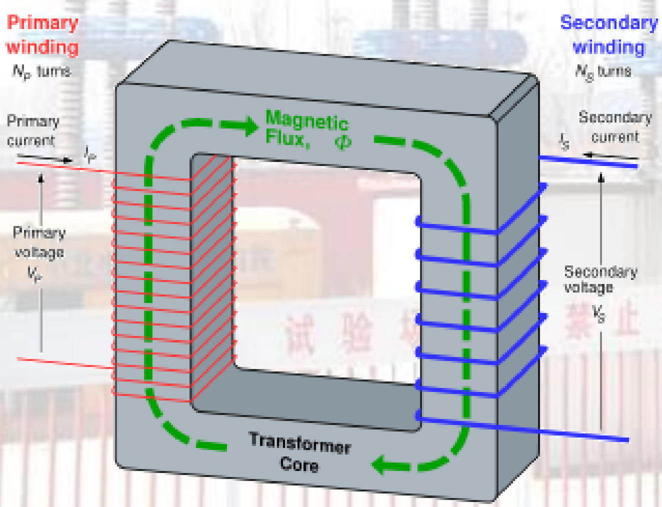
Westinghouse & Tesla
Alternating Current


ONLY ONE COULD POWER THE WORLD.
BENEDICT CUMBERBATCH
AS THOMAS EDISON
MICHAEL SHANNON
AS GEORGE WESTINGHOUSE
NICHOLAS HOULT
AS NIKOLA TESLA
TOM HOLLAND
AS SAMUEL INSULL
THE CURRENT WAR
INSPIRED BY TRUE EVENTS
OCTOBER


[撮影賞／美術賞]
本年度アカデミー賞2部門ノミネート
『ディパーテッド』『父親たちの星条旗』を抜いて
全米初登場第1位!!
(2006/10/20～週末3日間)
『X-MEN』ヒュー・ジャックマン VS 『バットマン ビギンズ』クリスチャン・ベール
世紀の奇術対決が今、幕を明ける。
互いの技能を駆使し、名声を賭け張り合う二人の天才マジシャン。
華麗で洗練されたロバート・アンジャー（ヒュー・ジャックマン）がエンターテイナーとしての才能を発揮する一方、
無骨で純粋なアルフレッド・ボーデン（クリスチャン・ベール）は、マジックを演出する術に欠けるものの、天才的な創造力を持つトリック・メイカー。
—この作品はトリックそのもの。騙されるな。—
クリストファー・ノーラン監督
イリュージョンVS
ヒュー・ジャックマン | クリスチャン・ベール | スカーレット・ヨハンソン | マイケル・ケイン | デヴィッド・ボウイ
illusion.gyao.jp

为什么选择 AC?





交流高压输电的优点：

✓增大输送距离 $\boxed{1\text{kV} \rightarrow 1\text{km}}$

✓减小线路损耗 $\boxed{P = U_1 I_1 = U_2 I_2}$

✓提高输送容量 $\boxed{P = \dfrac{U^2}{Z}}$

电力系统简介

1、发电；2、4、变电；3、输电；5、配电；6、用电；7、调度

发电


1. 火力发电
2. 水力发电
3. 核能发电
4. 风力发电
5. 光伏发电
6. 其他。。。



变电

1. 电力变压器
2. 换流变压器
3. 变电站
4. 换流站

直流换流站阀厅

输电

1. 高压交流输电
2. 高压直流输电

高压直流输电线路

三相交流输电线路

中国输电电压等级

交流： 110kV，220kV，330kV，500kV，750kV，1000kV

直流： ±400kV，±500kV，±660kV，±800kV，±1100kV

一个国家，交流电网和直流电网如何联网？

配、用电

中国配(用)电电压等级

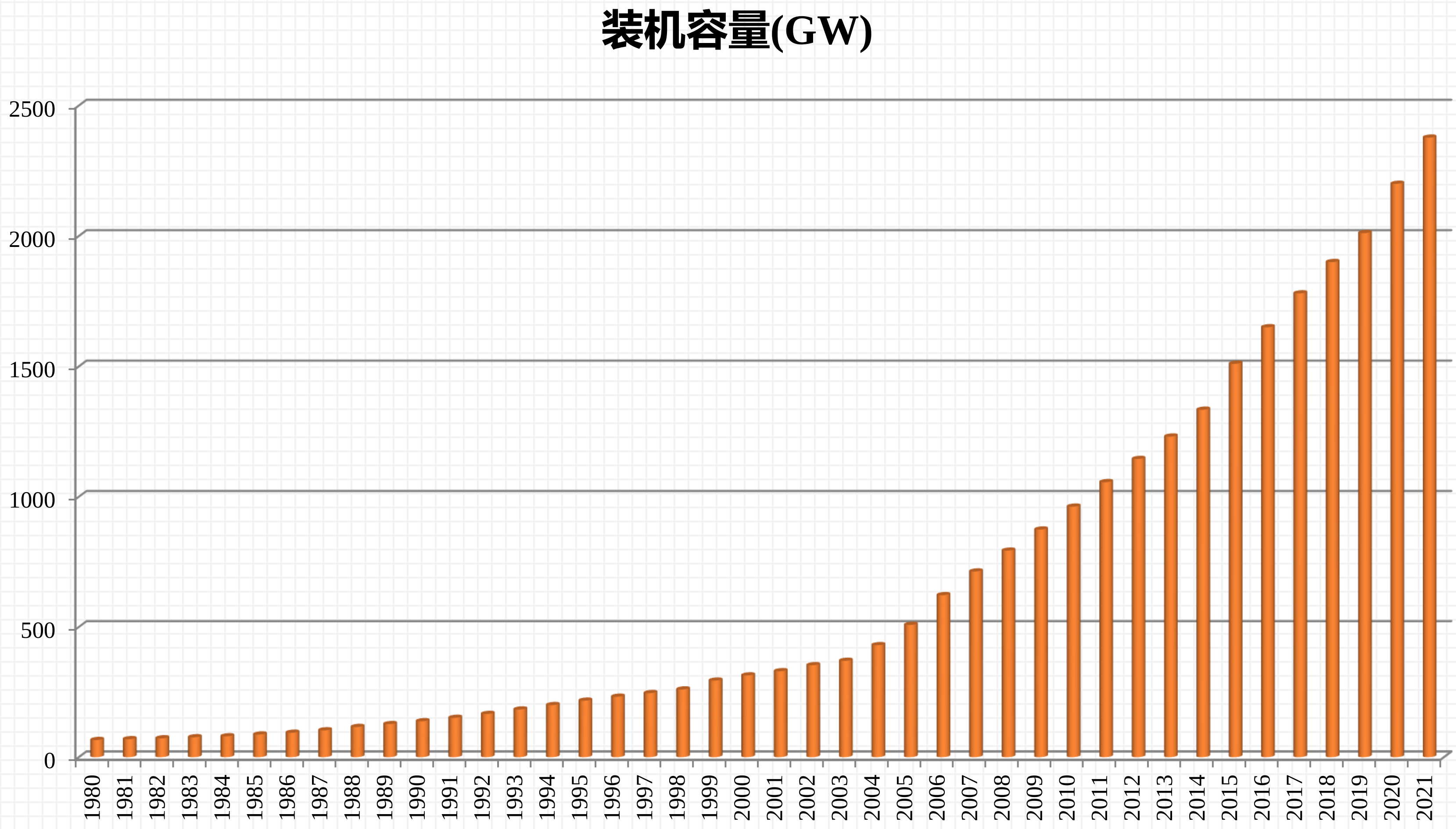
交流：110kV，63kV，35kV，10kV，380V/220V

电力线网络是地球上最大、最复杂的人工有线网络！

调度

调度的工作环境是酱婶儿地

快速增长的中国电力工业



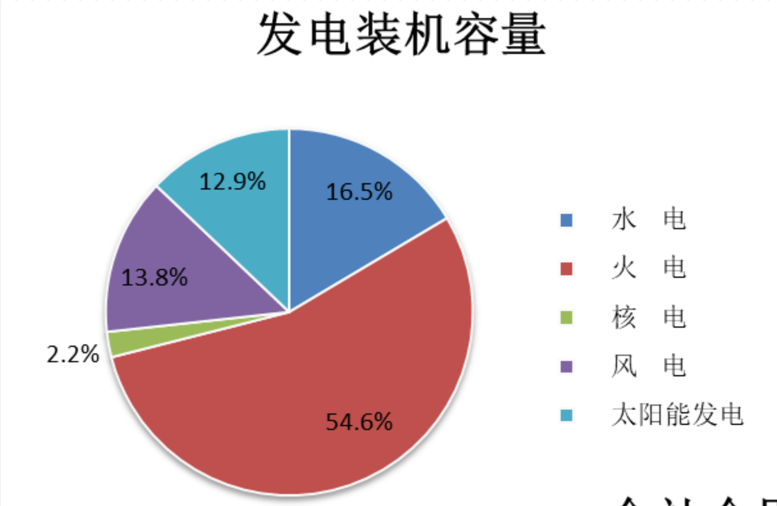
2004年至今，我国每年新增装机都超过英国全国装机

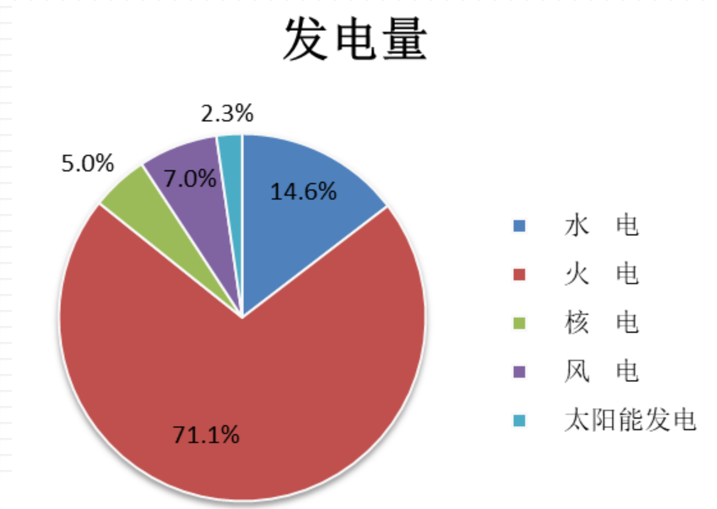
2008年，我国年发电量超过日、加、德、法、英、意总和

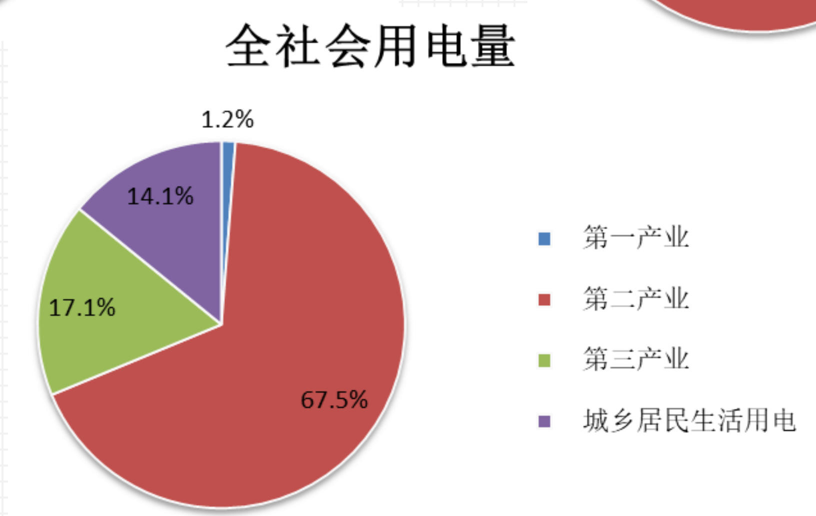
2012年超过美国成为世界第一

我国电力工业现状

- **至2022年底我国发电装机总容量达到23.8亿kW，同比增加7.9%，世界No.1。其中火电装机13.0亿千瓦、水电3.9亿千瓦、风电装机3.3亿千瓦、太阳能发电3.1亿千瓦、核电5326万千瓦。**





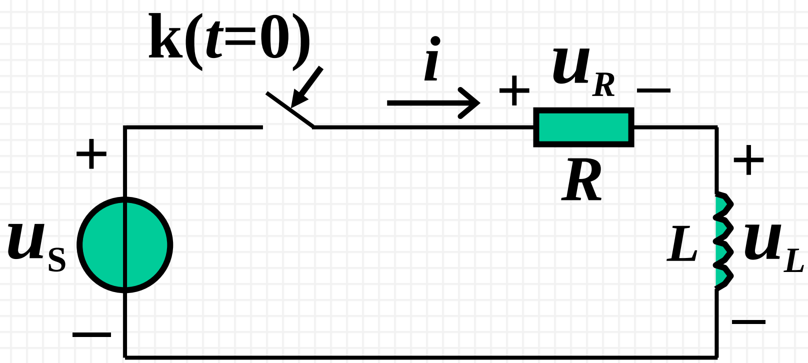


The State-of-the-art

- 至2019年底我国发电装机总容量达到2011GW （世界第一），非化石能源发电装机容量820GW，占总发电装机容量的比重为40.8%
- 2019年我国用电量7.23万亿kWh，居世界第一
  - 相当于我国13亿人平均每人每小时用电0.63度（kWh）
  - 2000年法国用电量5150亿kWh，相当于6000万人平均每人每小时用电0.98度（kWh）
- 世界最大的水电厂：三峡，总装机22.5GW
- 我国1000kV交流和±1100kV直流特高压输电线已商业运行，电压等级均为世界第一

2、正弦稳态分析

(1) 问题



$$u_S = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

求：$i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$的稳态解。

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

一阶常系数线性微分方程

$$i = i' + i''$$

强制分量（非齐次特解）

自由分量（齐次通解）

$t \to \infty$：稳态

$t \to \infty$：0

$$i'' = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

求特解/稳态解　　查表寻找特解的函数类型

激励　　特解类型

$$\sin\omega t \xrightarrow{\text{查表}} C_1\sin\omega t + C_2\cos\omega t \quad \text{或} \quad \boxed{A\sin(\omega t + B)}$$

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \psi_u) \xrightarrow{\text{设特解为}} i = A\sin(\omega t + B)$$

代入

$$LA\omega\cos(\omega t + B) + RA\sin(\omega t + B) = U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t + \psi_u)$$

$$A\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\sin(\omega t + B) + \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}\cos(\omega t + B)\right)$$

$$= U_m\sin(\omega t + \psi_u)$$

$$A\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+B)+\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\cos(\omega t+B)\right)$$

$$=U_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi_u)$$

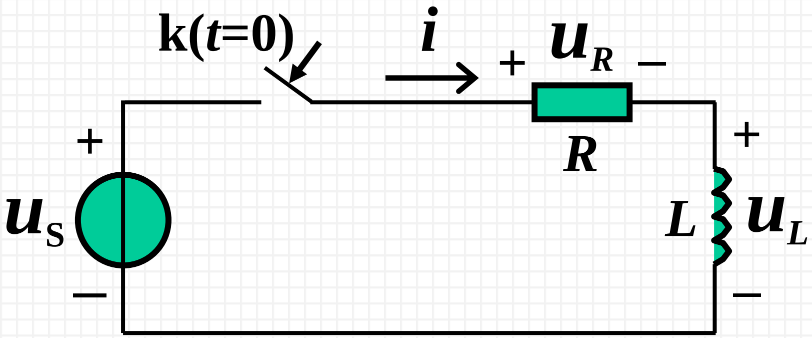
$$\cos(\arctan\frac{\omega L}{R}) \qquad \sin(\arctan\frac{\omega L}{R}) \qquad \sin(\omega t+B+\arctan\frac{\omega L}{R})$$

$$\begin{cases} A\sqrt{R^2+(\omega L)^2}=U_{\mathrm{m}} \\ B+\arctan(\frac{\omega L}{R})=\psi_u \end{cases}$$

$$A=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}=I_{\mathrm{m}}$$

$$B=\psi_u-\arctan\frac{\omega L}{R}=\psi_u-\varphi$$

$$i'(t)=\frac{U_{\mathrm{m}}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\psi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$



$$u_S = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$$

求：$i(t)$, $u_L(t)$, $u_R(t)$的稳态解。

求微分方程特解

$$i'(t) = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R})$$

麻烦1：求特解的待定系数

求导

$$u'_L(t) = L\frac{di'(t)}{dt} = \frac{L\omega U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R} + 90°)$$

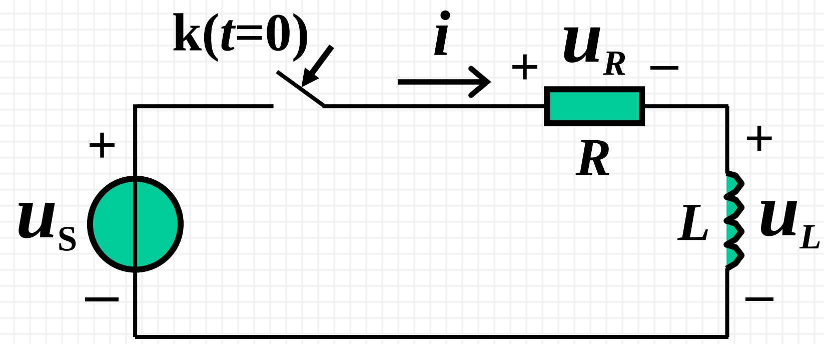
KCL、KVL元件约束

麻烦2：正弦量的微分/积分计算

$$u'_R(t) = u_S - u'_L(t) = \frac{RU_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin(\omega t + \psi_u - \arctan\frac{\omega L}{R})$$

搞定！！！

麻烦3：正弦量的±计算



$$i'(t)=\frac{U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\psi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

$$u'_L(t)=\frac{L\omega U_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\psi_u-\arctan\frac{\omega L}{R}+90°)$$

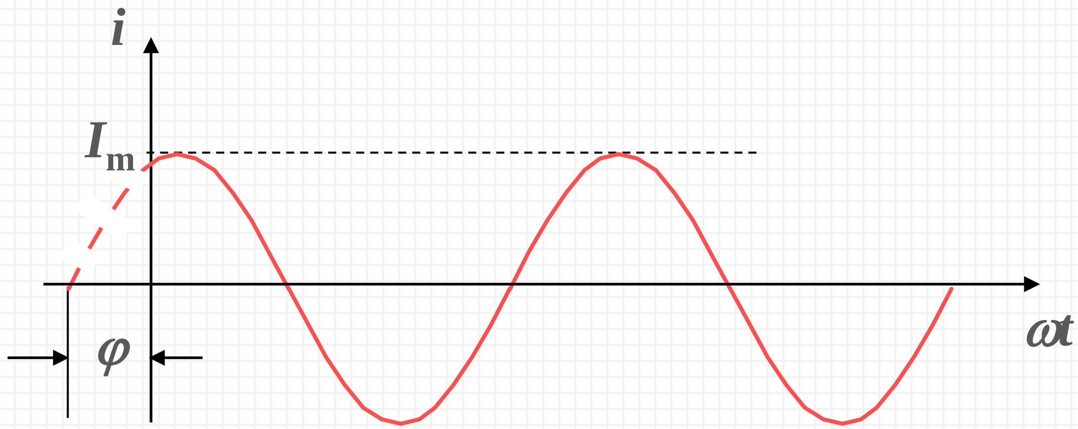
$$u'_R(t)=\frac{RU_m}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\sin(\omega t+\psi_u-\arctan\frac{\omega L}{R})$$

3个支路量有何特点?

所有支路量(电压电流)均是相同频率的正弦量!

3、正弦量的基本概念

波形图



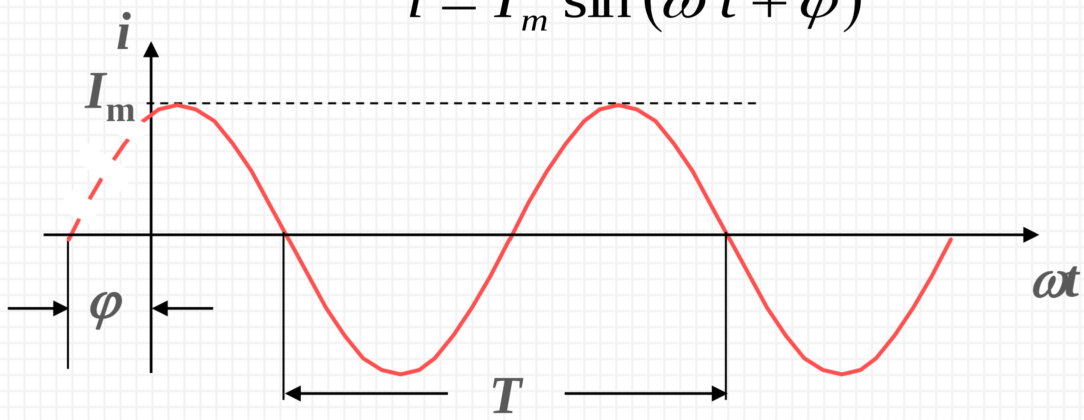
三角函数表达式：$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$

3个特征量:

- I_m: 幅值（最大值）
- ω: 角频率
- φ: 初相角

3.1 周期、频率和角频率

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$



1. 周期 T：变化一周所需的时间　单位：s，ms，μs

2. 频率 f：每秒变化的次数　单位：Hz，kHz，MHz

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

3. 角频率ω：每秒变化的弧度　单位：rad/s

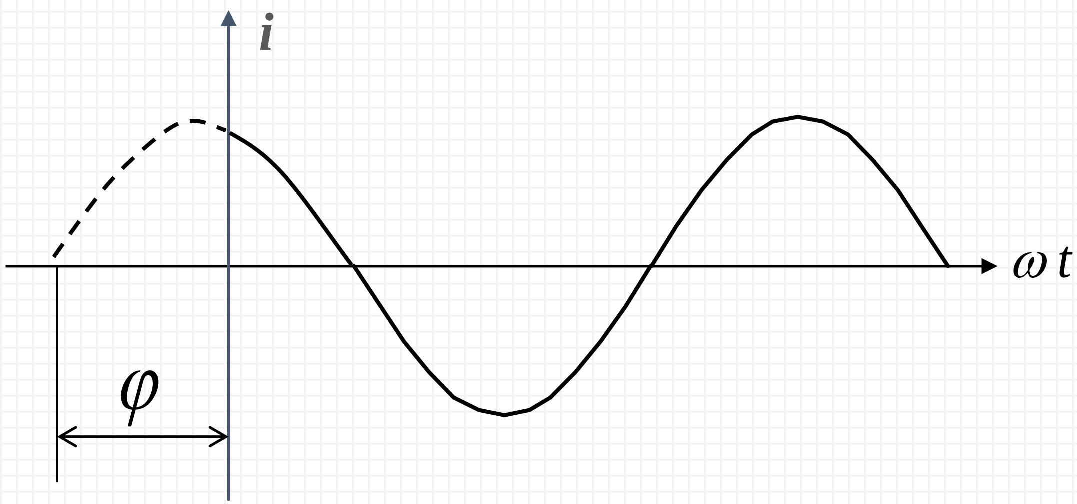
$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f}$$

3.2 相位和初相位

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi)$$

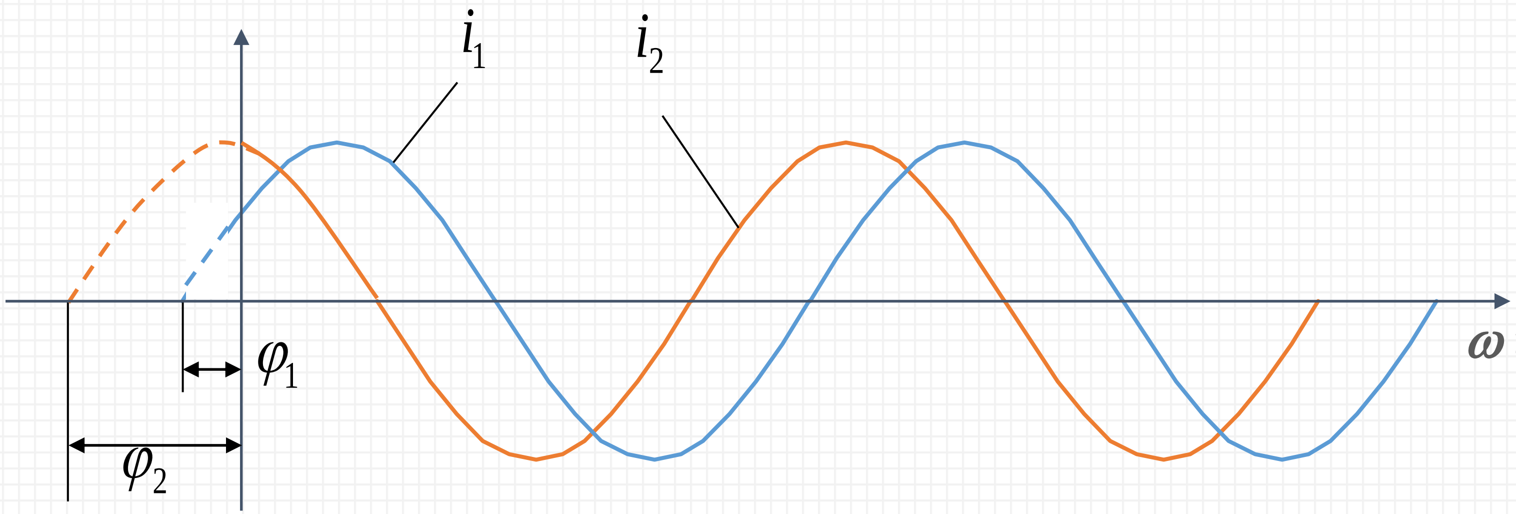
$(\omega t + \varphi)$：正弦波的相位角或相位

φ：$t = 0$ 时的相位，称为初相位或初相角。



说明：φ 给出了观察正弦波的起点或参考点，常用于描述多个正弦波相互间的关系。

相位差：两个同频率正弦量间的初相位之差

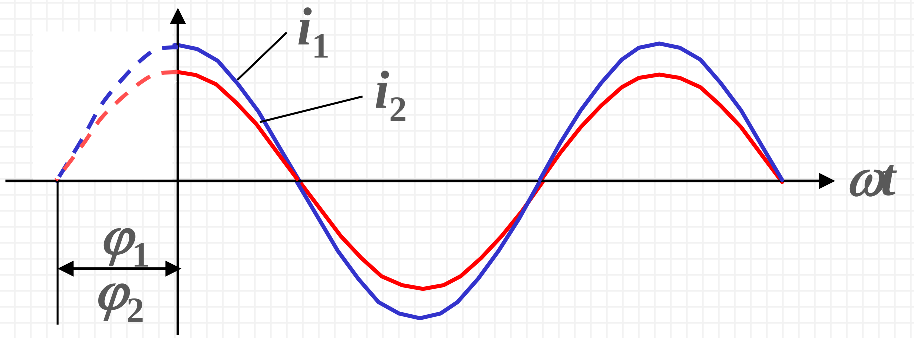
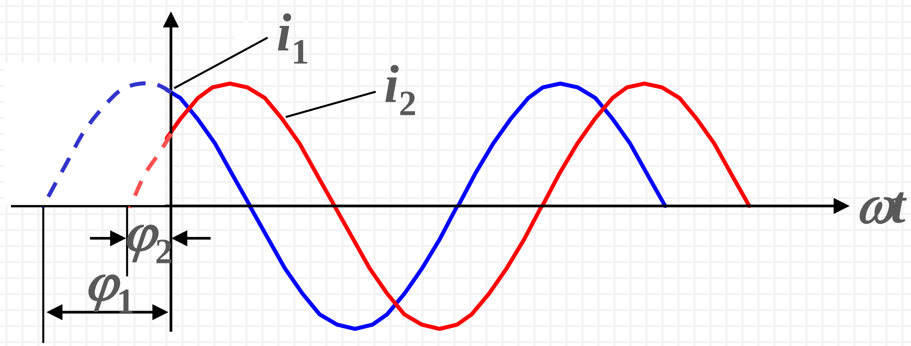
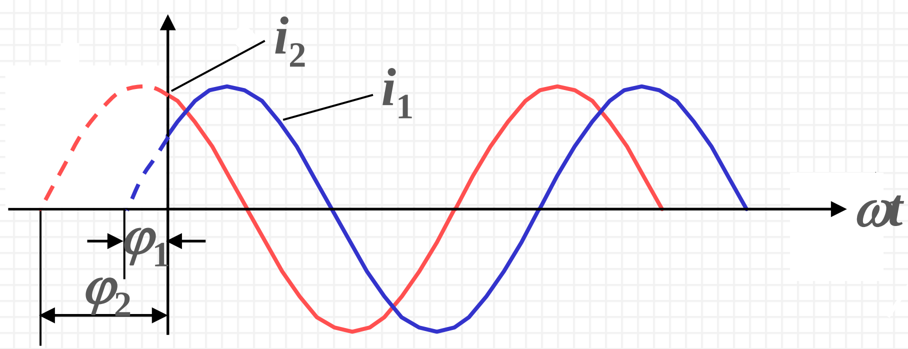


$$\begin{cases} i_1 = I_{m1}\sin(\omega t + \phi_1) \\ i_2 = I_{m2}\sin(\omega t + \phi_2) \end{cases}$$

相位差 $\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_1) - (\omega t + \varphi_2) = \varphi_1 - \varphi_2 \begin{cases} >0 \\ =0 \\ <0 \end{cases}$

规定： $|\Delta\varphi| \le \pi$ (180°)

两种正弦信号的相位关系

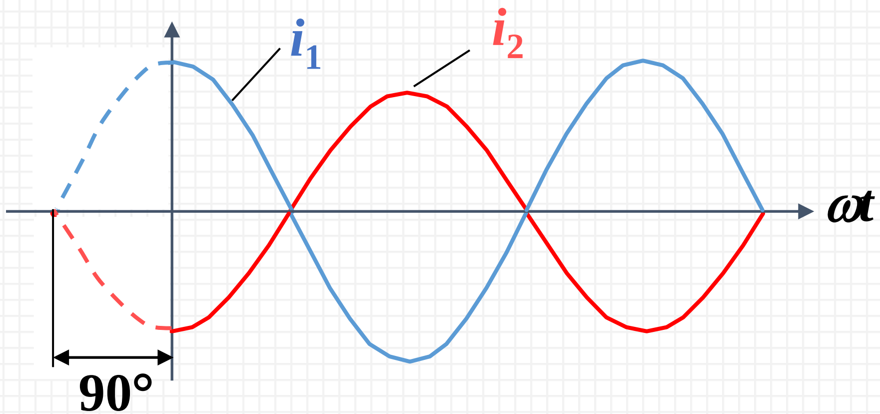
同相位		$\varphi_1=\varphi_2$ **相位差为0** **i_1与i_2同相位**
相位领先		$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2>0$ **i_1领先于i_2**
相位落后		$\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2<0$ **i_1落后于i_2**

例

$$i_1 = I_{m1}\sin(\omega t + 90°)$$

$$i_2 = I_{m2}\sin(\omega t - 90°)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 90° - (-90°) = 180°$$



如果相位差为+180 °或-180 °，称为两波形反相

3.3 最大值和有效值

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$$

I_m为正弦电流的幅值，又称**最大值**

在工程应用中常用**有效值**表示幅度。常用交流电表指示的电压、电流读数，就是被测物理量的有效值。标准电压220V，也是指供电电压的有效值。

有效值概念

交流电流i通过电阻R在一个周期T内产生的热量与一直流电流I通过同一电阻在同一时间T内产生的热量相等，则称I的数值为i的有效值

$$\underbrace{0.24\int_0^T i^2 R\,dt}_{\text{交流电流发热量}} = \underbrace{0.24 I^2 RT}_{\text{直流电流发热量}}$$

则有 $$\boxed{I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2\,dt}}$$ （有效值又称均方根值，rms）

当 $i = I_\mathrm{m}\sin(\omega t+\varphi)$ 时， 可得 $I = \dfrac{I_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}$ $\quad I_\mathrm{m} = \sqrt{2}I$

同理 $u = U_\mathrm{m}\sin(\omega t+\varphi)$ 时， 可得 $U = \dfrac{U_\mathrm{m}}{\sqrt{2}}$ $\quad U_\mathrm{m} = \sqrt{2}U$

$$i = I_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi)$$ 其中 $I_{\mathrm{m}} = \sqrt{2} I$

所以i可写为：$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \varphi)$

同理：$u = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \varphi)$　　$U_{\mathrm{m}} = \sqrt{2} U$

u可写为：$u = \sqrt{2} U \sin(\omega t + \varphi)$

可以证明同频率正弦波加减运算后，频率不变

如：
$$\begin{cases} u_1 = \sqrt{2}U_1 \sin\left(\omega t + \varphi_1\right) \\ u_2 = \sqrt{2}U_2 \sin\left(\omega t + \varphi_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 \\ &= \sqrt{2}U_1 \sin\left(\omega t + \varphi_1\right) + \sqrt{2}U_2 \sin\left(\omega t + \varphi_2\right) \\ &= \sqrt{2}U \sin\left(\omega t + \varphi\right) \end{aligned}$$

幅度、相位变化，频率不变

结论:因为角频率ω不变，所以讨论同频率正弦波时，ω可不考虑，主要研究幅度与初相位的变化。

4、相量的引入和复数表示法

正弦波的表示方法：

- ♣ 波形图

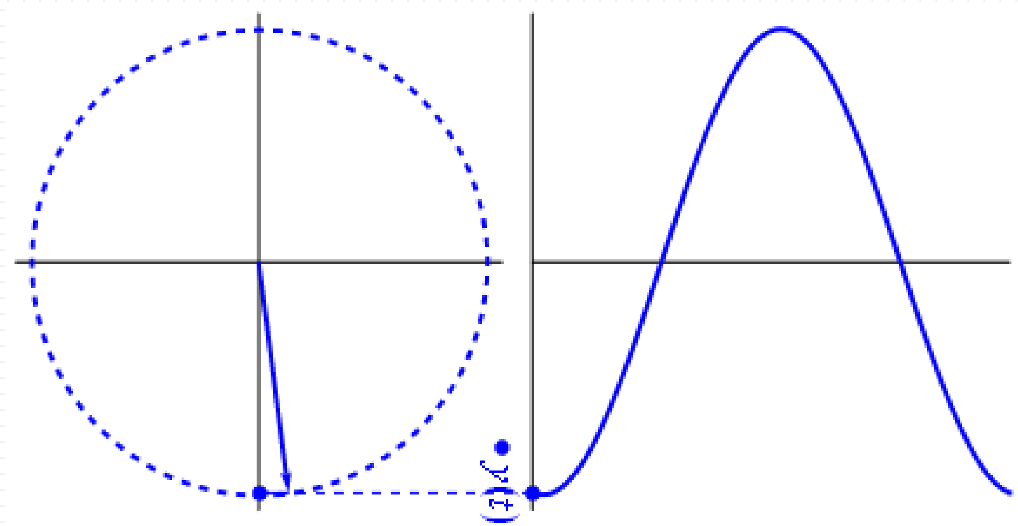
- ♣ 瞬时值表达式 $i = 5\sqrt{2}\sin\left(1000t + 30°\right)\text{A}$

- ♣ 相量表示法 → 复数表示法

目的：运算方便

查尔斯·普罗特斯·斯坦梅茨

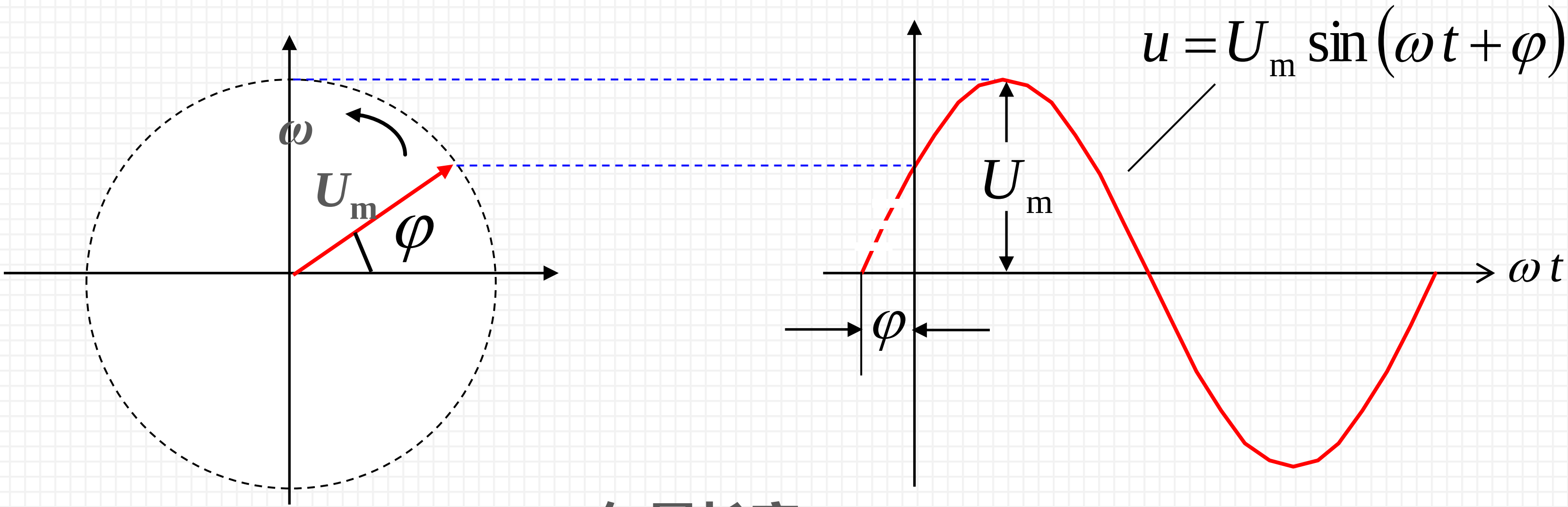
天生	卡尔·奥古斯特·鲁道夫·斯坦梅茨 1865年4月9日 普鲁士西里西亚省布雷斯劳（现波兰弗罗茨瓦夫）
死了	1923年10月26日 （58岁） 斯克内克塔迪（Schenectady），纽约，美国
休息的地方	谷公墓
职业	数学家和电气工程师
闻名	斯坦梅茨方程 交流电 电力行业 磁滞现象 Steinmetz等效电路 梅卡尼克维尔水力发电厂 金属卤化物灯 网络综合过滤器 无源模拟滤波器开发 相量测量单元 Steinmetz固体 传输线 无线电源 工程教育
所获奖项	艾略特·克雷森勋章 (1913)



相量和正弦波对应示意图

正弦波的相量表示法

概念：一个正弦量的瞬时值可以用一个旋转矢量在纵轴上的投影值来表示。



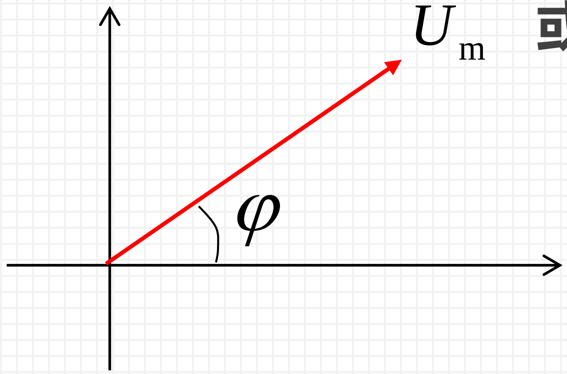
矢量长度 $= U_m$

矢量与横轴夹角 = 初相位φ

矢量以角速度ω按逆时针方向旋转

在电工领域中将这种旋转矢量(Vector)称为相量（Phasor）

相量的书写方式



$\dot{U}_{\mathrm{m}}$ 或 $\dot{U}$

相量长度可用最大值或有效值表示

若其长度用最大值表示，则用符号： $\dot{U}_{\mathrm{m}}$ 或 $\dot{I}_{\mathrm{m}}$

若其长度用有效值表示，则用符号： $\dot{U}$ 或 $\dot{I}$

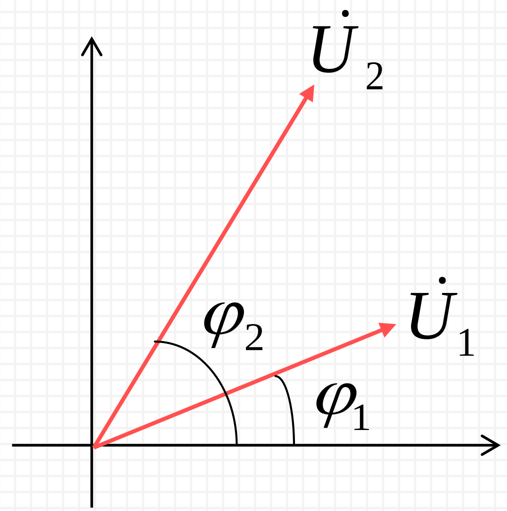
在实际应用中，其长度多采用有效值表示，称为有效值相量

正弦波的相量表示法举例

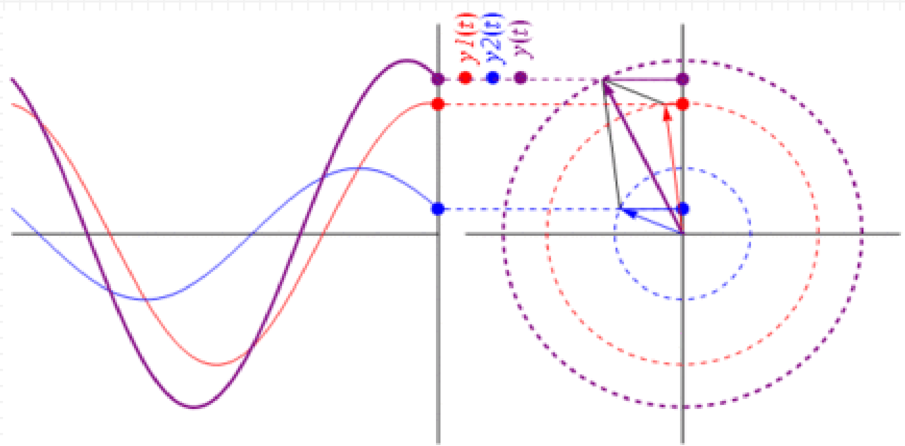
例1：将 u_1、u_2 用相量表示

$$u_1 = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$
$$u_2 = \sqrt{2}U_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

设：
$$\begin{cases} \text{有效值：} & U_2 > U_1 \\ \text{初相位：} & \varphi_2 > \varphi_1 \end{cases}$$



相位哪一个领先？哪一个落后？



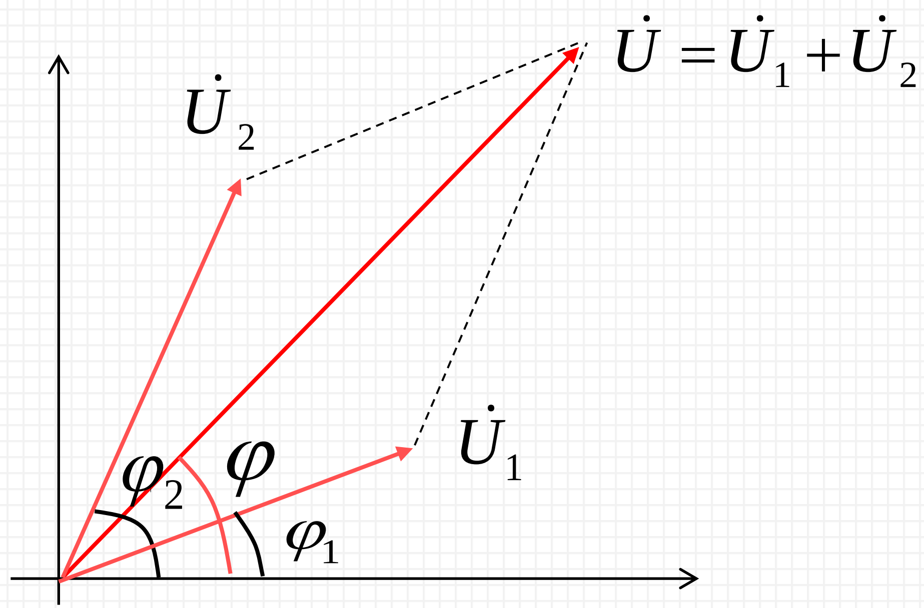
从相量图上可直观看到：相量大小及领先落后关系

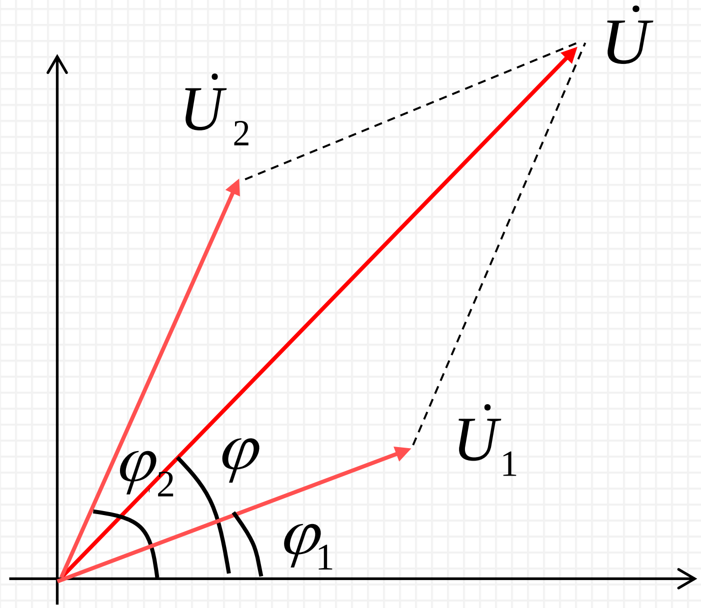
例2：同频率正弦波相加 - 平行四边形法则

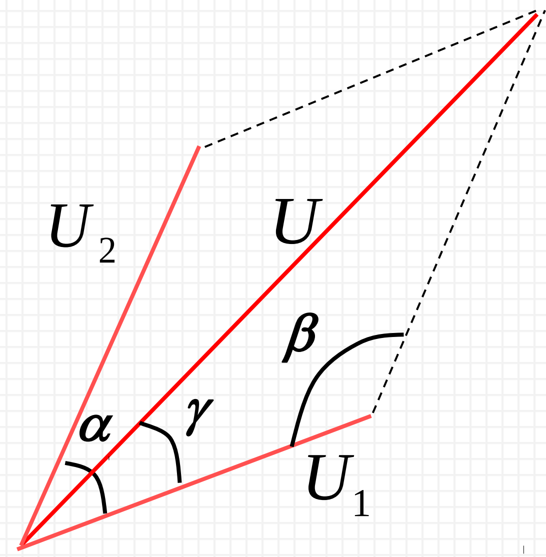
$$u_1 = \sqrt{2}U_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$u_2 = \sqrt{2}U_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$u = u_1 + u_2 = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \varphi)$$







$$\alpha=\varphi_2-\varphi_1$$

$$\beta=180^\circ-\alpha$$

用余弦定理求U:

$$U=\sqrt{U_1^2+U_2^2-2U_1U_2\cos\beta}$$

用正弦定理求γ角:

$$\frac{U}{\sin\beta}=\frac{U_2}{\sin\gamma}$$

$$\varphi=\varphi_1+\gamma$$

$$u=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi)$$

新问题提出：

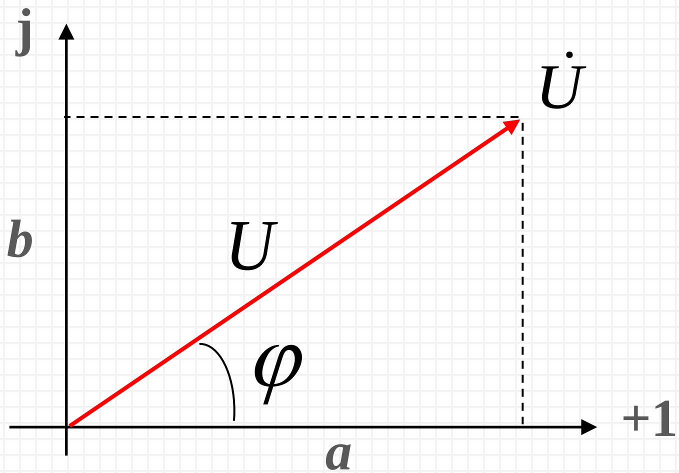
相量表示法可以用于正弦量的运算（几何运算），但不方便。

故引入复数表示法。

正弦电量 ➡ 相量 ➡ 复数表示法 ➡ 复数运算（代数运算）

相量的复数表示法

将相量 $\dot{U}$ 放到复平面上，可如下表示：

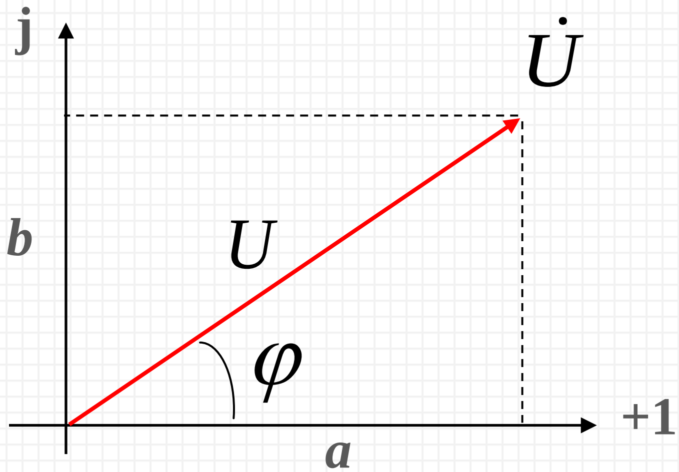


a、b分别为$\dot{U}$ 在实轴和虚轴上的投影

$$\dot{U} = a + \mathrm{j}b = U\cos\varphi + \mathrm{j}U\sin\varphi$$

$$U = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{b}{a}$$



欧拉公式

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$$

$$\left.\begin{aligned}\dot{U} &= a + jb \\ &= U(\cos\varphi + j\sin\varphi)\end{aligned}\right\} \text{代数式}$$

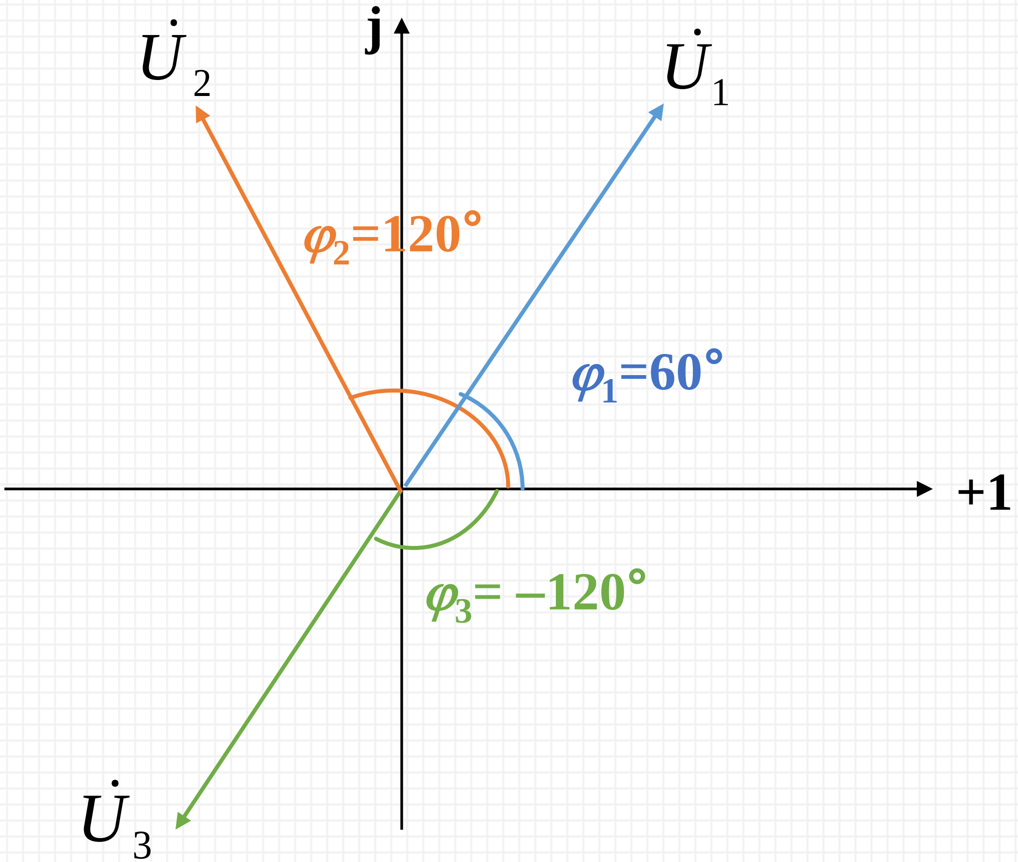
$$= Ue^{j\varphi} \quad \text{---------- 指数式}$$

$$= U\angle\varphi \quad \text{---------- 极坐标式}$$

$$\dot{U}=a+\mathrm{j}b=U\angle\varphi$$

φ在一、二象限，一般φ取值：$180°\geq\varphi\geq 0°$

φ在三、四象限，一般φ取值：$0°\geq\varphi\geq -180°$



相量的复数运算

1. 复数加、减运算

$$\dot{U}_1 = a_1 + \mathrm{j}b_1$$

$$\dot{U}_2 = a_2 + \mathrm{j}b_2$$

复数加减运算要写成代数式

则：$\dot{U}_1 \pm \dot{U}_2 = (a_1 + \mathrm{j}b_1) \pm (a_2 + \mathrm{j}b_2)$

$$= (a_1 \pm a_2) + \mathrm{j}(b_1 \pm b_2)$$

2. 复数乘、除运算

$$\dot{A}_1 = A_1 \angle \varphi_1$$

$$\dot{A}_2 = A_2 \angle \varphi_2$$

复数乘除运算要写成极坐标式

则：$\dot{A}_1 \dot{A}_2 = (A_1 \angle \varphi_1)(A_2 \angle \varphi_2) = A_1 A_2 \angle \varphi_1 + \varphi_2$

$$\frac{\dot{A}_1}{\dot{A}_2} = \frac{A_1 \angle \varphi_1}{A_2 \angle \varphi_2} = \frac{A_1}{A_2} \angle \varphi_1 - \varphi_2$$

说明：±j 称为90°旋转因子

设：任一相量 $\dot{A}$

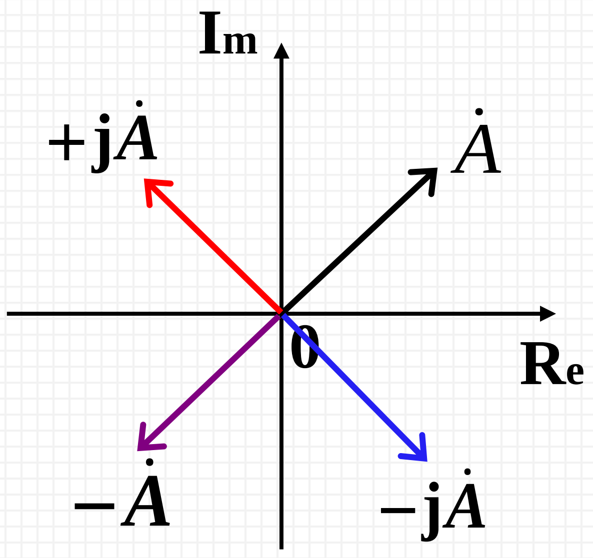
则：$\dot{A}e^{\pm j90^\circ} = \dot{A}(\cos 90^\circ \pm j\sin 90^\circ) = \pm j\dot{A}$

$\dot{A}e^{\pm j90^\circ}$ 相当于将 $\dot{A}$ 逆时针或顺时针旋转90°

所以±j称为90°旋转因子

+j，–j，-1 都可以看成旋转因子

“一乘(j/-j/-1)就转”



3. 正弦量的微分和积分

微分/积分 关系 → 代数关系

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i)=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

微分

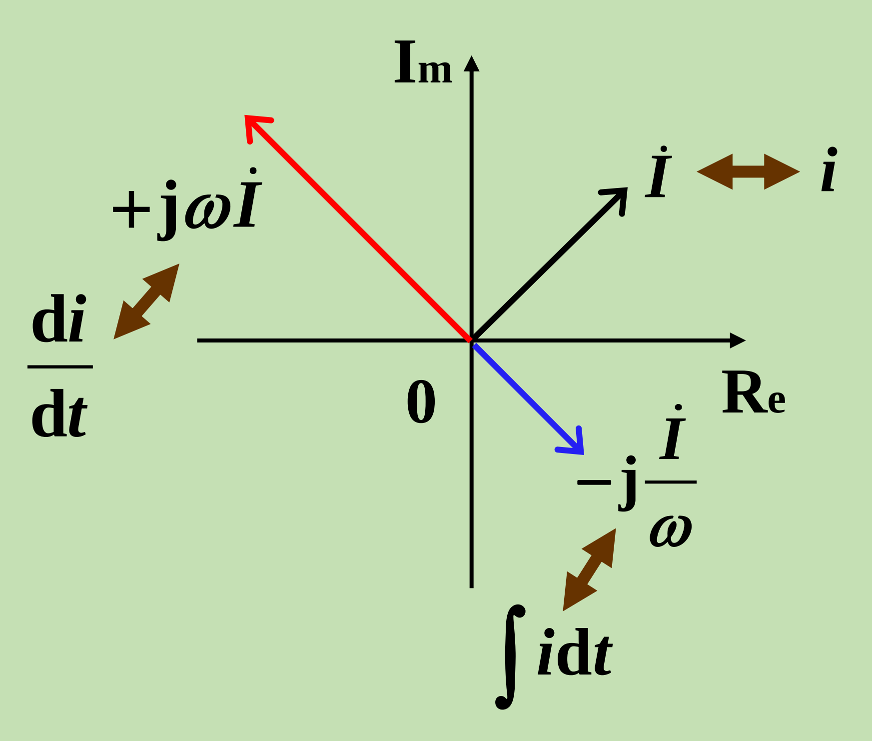
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{Im}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\right)$$

$$=\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{2}\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})\right)$$

$$=\mathrm{Im}(\sqrt{2}\mathrm{j}\omega\dot{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$$

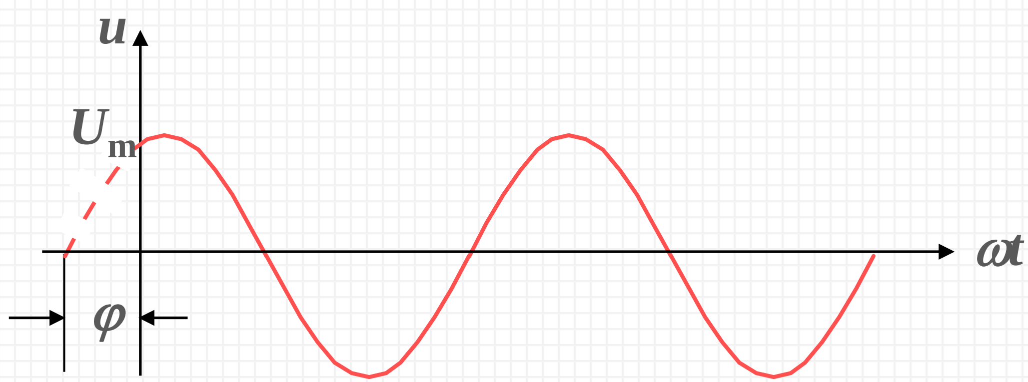
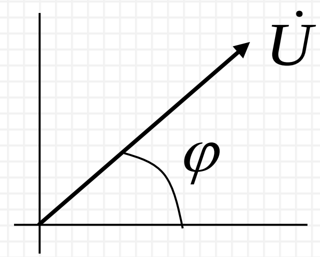
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\to\mathrm{j}\omega\dot{I}$$

积分 $\int i\mathrm{d}t\to\dfrac{\dot{I}}{\mathrm{j}\omega}$



正弦量微分→相量乘以 $\mathrm{j}\omega$

小结：正弦波的四种表示法

波形图	
瞬时值	$u=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\varphi)$
相量图	
复数 表示法	$\dot{U}=U\angle\varphi=U\cos\varphi+\mathrm{j}U\sin\varphi$

符号说明

瞬时值 --- **小写** u、i

有效值 --- **大写** U、I

最大值 --- **大写 + 下标** U_m

复数、相量 --- **大写 + “.”** $\dot{U}$

5、用相量法求解正弦稳态电路

5.1 RLC元件电压与电流的相量关系

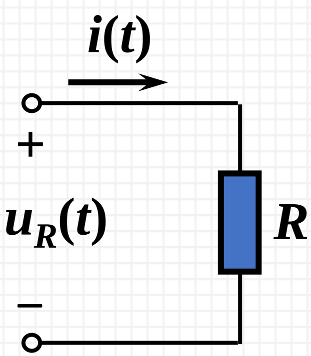
5.2 相量形式的电路定律和电路的相量模型

5.3 复阻抗和复导纳

5.4 用相量法求解正弦稳态电路

5.1 RLC元件上电压和电流的相量关系

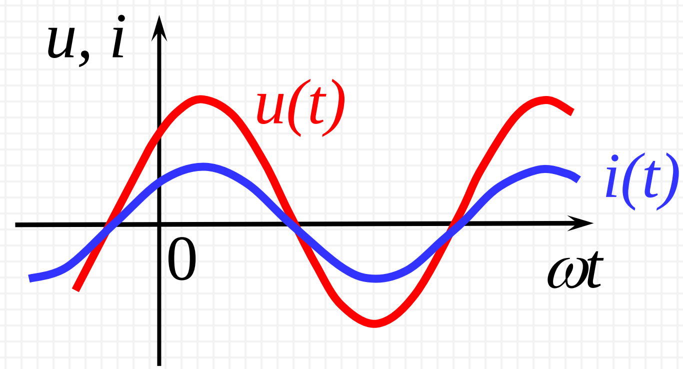
(1) 电阻元件



时域模型

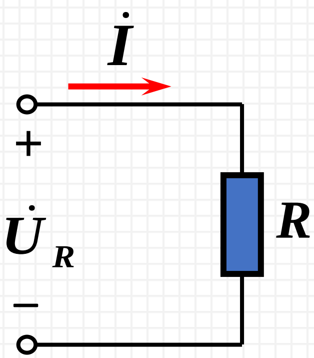
$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi)$$

$$\dot{I}=I\angle\psi$$



时域波形图

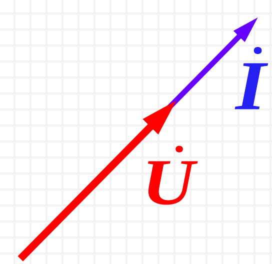
$$u_R(t)=Ri(t)=\sqrt{2}RI\sin(\omega t+\psi)$$



相量模型

$$\dot{U}_R=RI\angle\psi$$

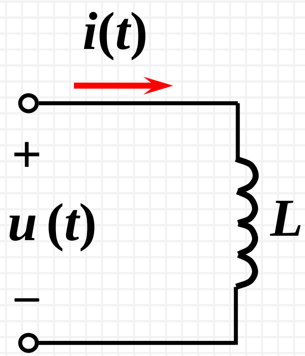
$$\dot{U}_R=R\dot{I}$$



相量图

(2) 电感元件

时 域	频 域



时域模型

$$i(t)=\sqrt{2}I\sin\omega t$$

$$u(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$=\sqrt{2}\omega LI\cos\omega t$$

$$=\sqrt{2}\omega LI\sin(\omega t+90^{\circ})$$

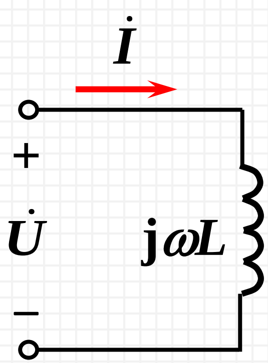
$$\dot{I}=I\angle 0^{\circ}\qquad \dot{U}=\mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

有效值关系：

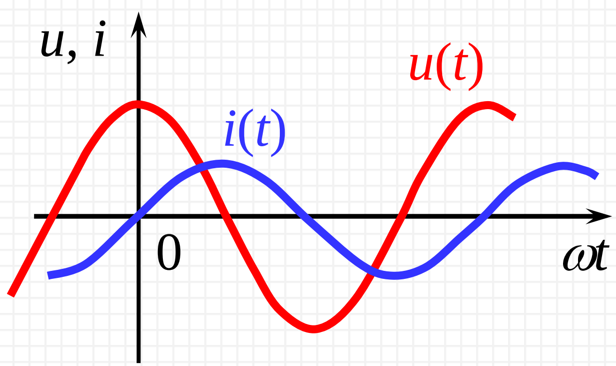
$U=\omega L I$

相位关系：

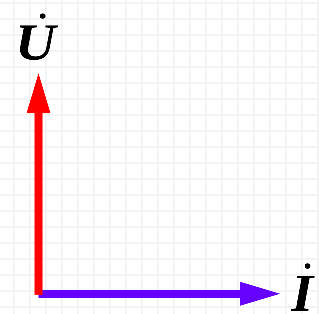
$u(t)$ 超前 $i(t)$ 90°



相量模型



波形图



相量图

$U=\omega L I$

$X_L= U/I =\omega L= 2\pi f L$， **单位：欧**

称为“感抗”(inductive reactance)

错误的写法

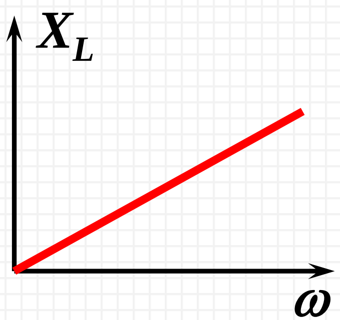
$$\omega L \cancel{=} \frac{u}{i}$$

$$\omega L \cancel{=} \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

感抗的物理意义：

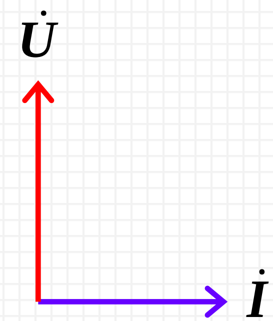
(1) 反映了电感对电流具有限制的能力；

(2) 感抗与所通过电流的(角)频率成正比。



$\omega = 0$ **(直流)**，$X_L = 0$, **(短路)**

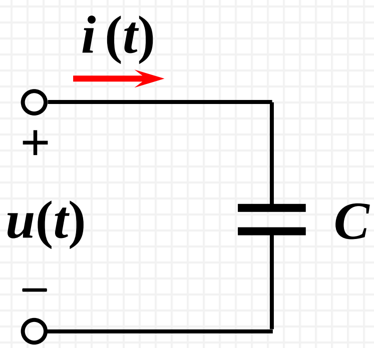
$\omega \to \infty$, $X_L \to \infty$, **(开路)**



(3) 由于感抗的存在，使电流在相位上落后于电压90°。

(3) 电容元件

时 域	频 域



时域模型

$$u(t) = \sqrt{2}U \sin \omega t$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$= \sqrt{2}\omega CU \cos \omega t$$

$$= \sqrt{2}\omega CU \sin(\omega t + 90^\circ)$$

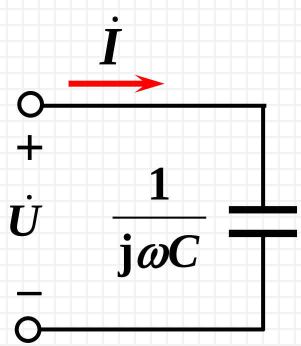
$$\dot{U} = U\angle 0^\circ \quad \dot{I} = \mathrm{j}\omega C\dot{U}$$

有效值关系：

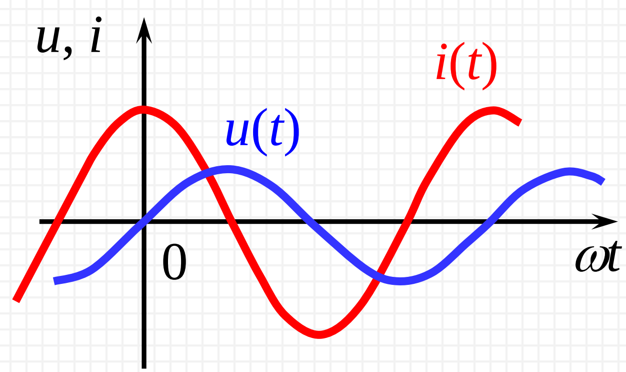
$I=\omega CU$

相位关系：

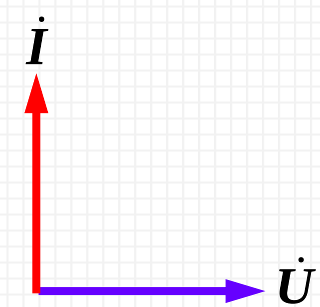
$i(t)$ **超前** $u(t)$ 90°



相量模型



波形图



相量图

$$\dot{I} = \mathrm{j}\omega C\dot{U} \qquad \dot{U} = -\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}\dot{I} = \mathrm{j}X_C\dot{I}$$

错误的写法

$$\frac{1}{\omega C} \neq \frac{u}{i}$$

$$\frac{1}{\omega C} \neq \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

$$\boxed{X_C = -\frac{1}{\omega C}}$$

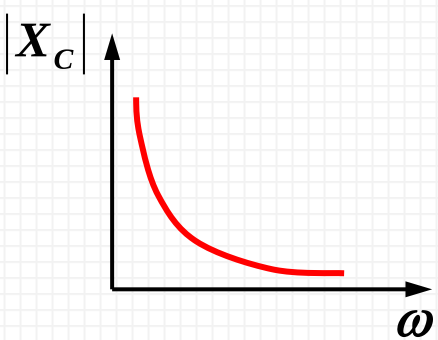
单位：欧

称为“容抗” (capacitive reactance)

容抗的物理意义：

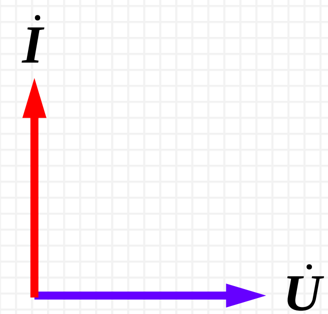
(1) **表征电容对电流有限制作用；**

(2) **容抗的绝对值与电容电流的(角)频率成反比；**



$\omega = 0$ **(直流)**, $|X_C| \to \infty$ **(隔直作用)**

$\omega \to \infty$, $X_C \to 0$ **(短路作用)**



(3) **由于容抗的存在，使电流在相位上超前（领先）电压90°。**

5.2 相量形式的电路定律和电路的相量模型

(1) 相量形式的基尔霍夫定律

$$\sum i(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \sum \dot{I}=0$$

$$\sum u(t)=0 \quad \Rightarrow \quad \sum \dot{U}=0$$

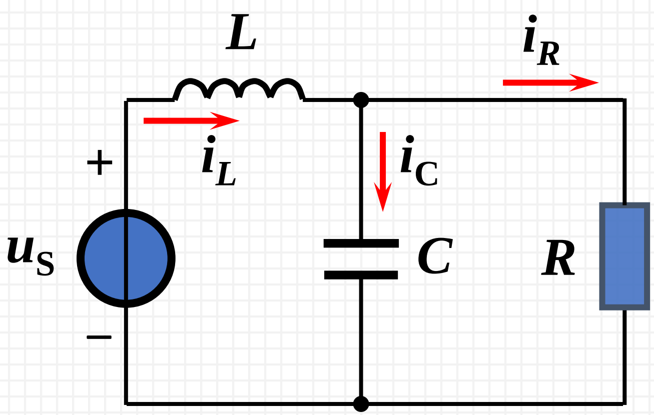
(2) 电路元件电压与电流的相量关系

$$u=Ri \quad \Rightarrow \quad \dot{U}=R\dot{I}$$

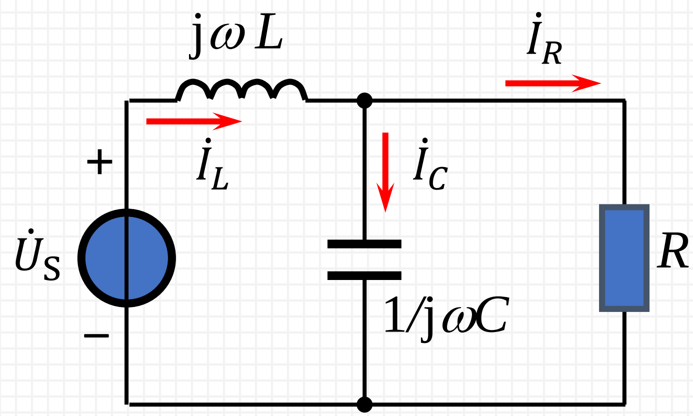
$$u=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \dot{U}=\mathrm{j}\omega L\dot{I}$$

$$u=\frac{1}{C}\int i\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \dot{U}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}$$

(3) 电路的相量模型（以单电源RLC电路为例）



电路时域模型



电路相量模型

$$\begin{cases} i_L = i_C + i_R \\ L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t = u_S \\ R i_R = \dfrac{1}{C}\displaystyle\int i_C \mathrm{d}t \end{cases}$$

时域的微分方程

$$\begin{cases} \dot{I}_L = \dot{I}_C + \dot{I}_R \\ \mathrm{j}\omega L \dot{I}_L + \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C = \dot{U}_S \\ R\dot{I}_R = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_C \end{cases}$$

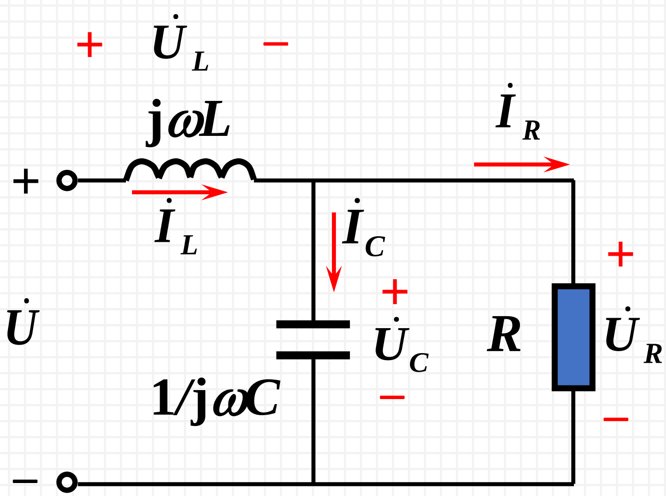
相量形式的代数方程

(4）相量图(phasor diagram)：一张图上画出若干相量

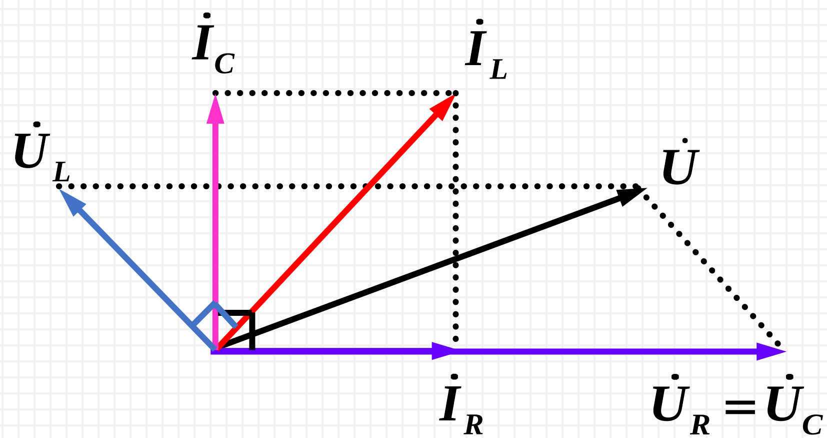
(a）随 t 增加，复函数在逆时针旋转 $A(t)=\sqrt{2}\,U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}=\sqrt{2}\,\dot{U}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$

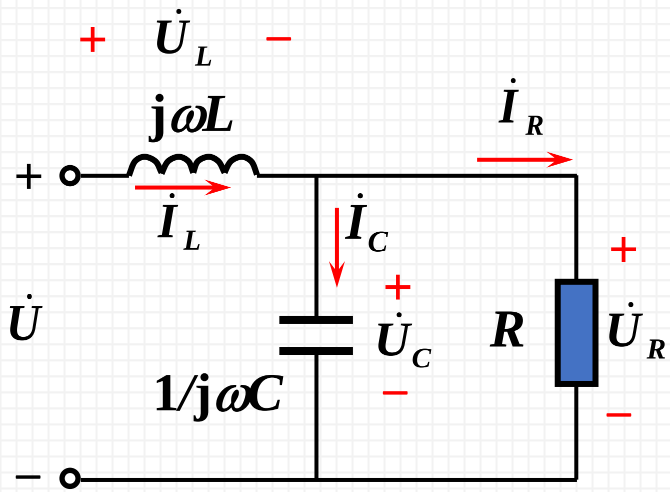
(b）同频率正弦量的相量，才能表示在同一张相量图中

(c）选定一个参考相量（设其初相位为零 — 水平线方向)

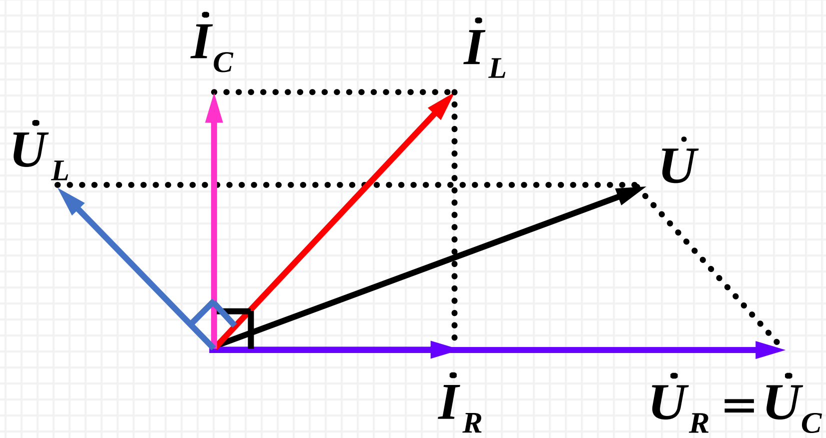


选 $\dot{U}_R$作为参考相量



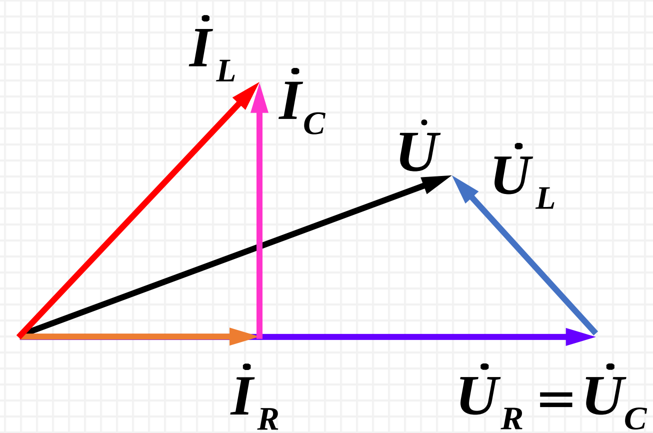


选 $\dot{U}_R$ 作为参考相量



相量图的特点

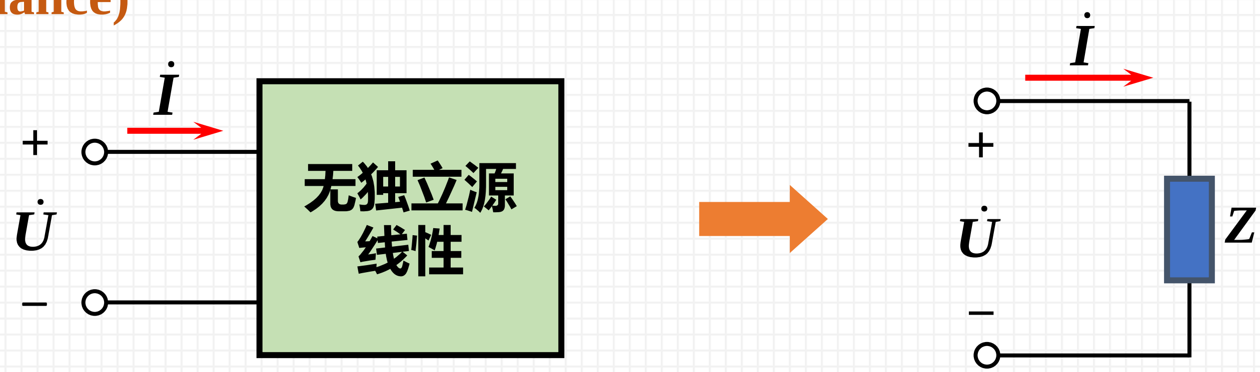
- 三角形法比平行四边形法简洁
- 一个元件上的电压和电流之间的大小不重要，角度重要
- 有KCL关系的电流(有KVL关系的电压)之间的角度和大小都重要



5.3 复阻抗和复导纳

(1) 复阻抗(impedance)

正弦激励下

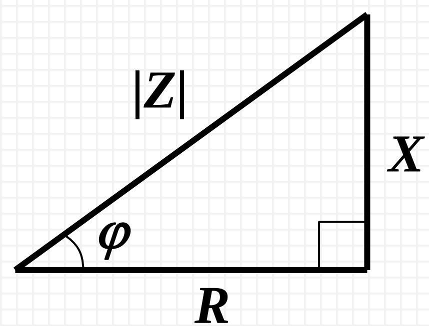


复阻抗：$Z = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + \mathrm{j}X$

电阻　电抗

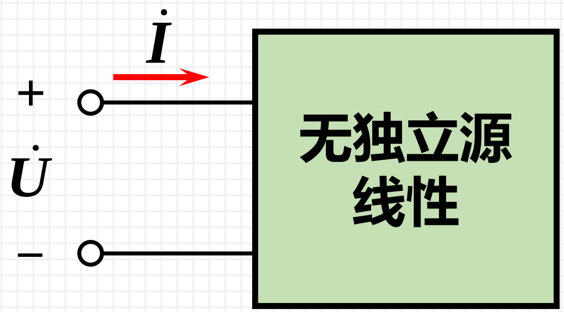
$$\begin{cases} |Z| = \dfrac{U}{I} & \text{阻抗的模} \\ \phi = \psi_u - \psi_i & \text{阻抗角} \end{cases}$$

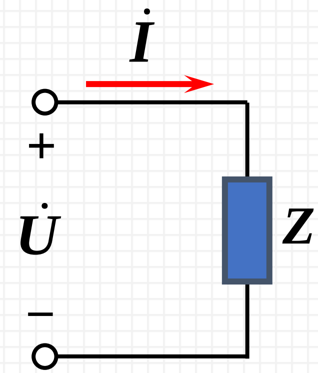
单位：Ω



阻抗三角形

正弦激励下





复阻抗：

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

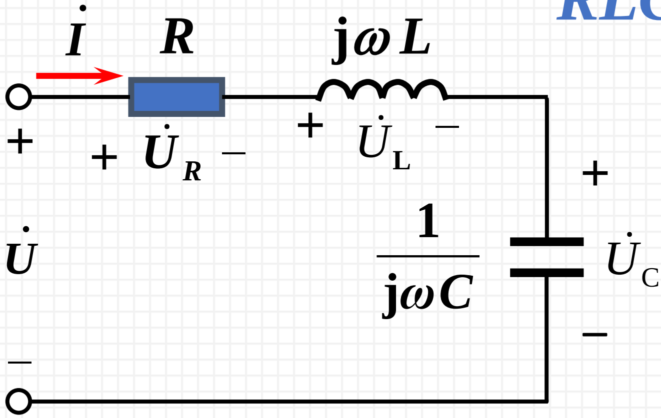
特殊情况：

- **纯电阻** $Z_R=R$ $\quad \dot{U}=R\dot{I}$
- **纯电感** $Z_L=\mathrm{j}\omega L=\mathrm{j}X_L$ $\quad \dot{U}=\mathrm{j}\omega L\dot{I}$
- **纯电容** $Z_C={}^{1}/_{\mathrm{j}\omega C}=\mathrm{j}X_C$ $\quad \dot{U}=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}$

$X_L=\omega L$ $\qquad X_C=-{}^{1}/_{\omega C}$

感抗 $\qquad$ **容抗**

*RLC*串联的特殊情况



复阻抗

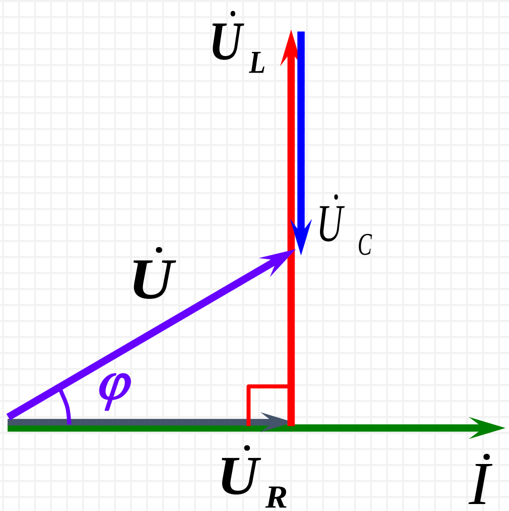
$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX$$

$\omega L > 1/\omega C$，$X > 0$，$\varphi > 0$，**电压 超前 电流，电路呈感性；**

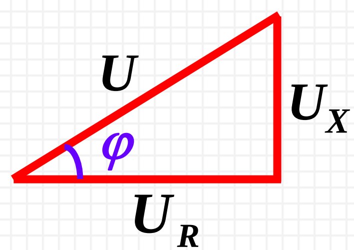
$\omega L < 1/\omega C$，$X < 0$，$\varphi < 0$，**电压 落后 电流，电路呈容性；**

$\omega L = 1/\omega C$，$X = 0$，$\varphi = 0$，**电压与电流同相，电路呈阻性。**

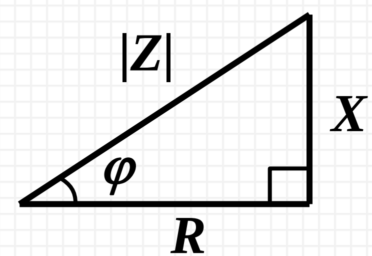
画相量图：选电流相量为参考相量（以$\omega L > 1/(\omega C)$为例）



$$U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2}$$



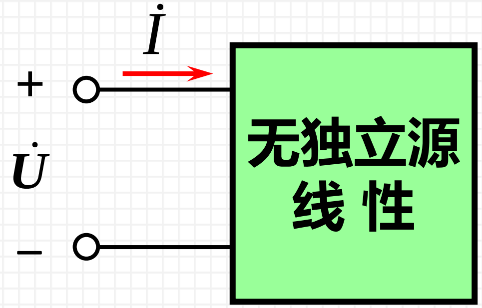
电压三角形

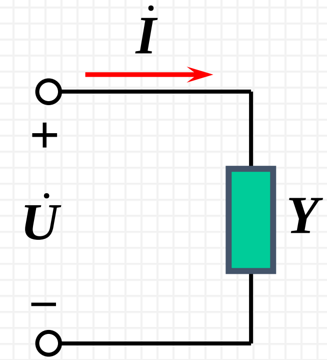


阻抗三角形

(2) 复导纳(admittance)

正弦激励下





复导纳：

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = G + \mathrm{j}B = |Y|\angle\varphi'$$

电导 电纳

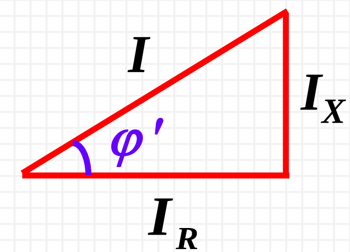
$$Y = \frac{1}{Z}$$

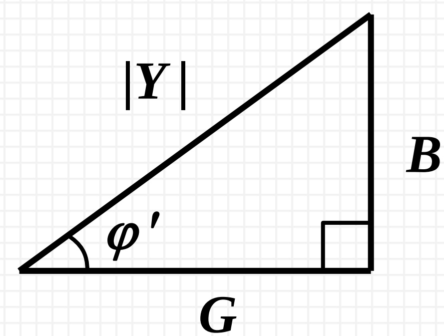
$$\begin{cases} |Y| = \dfrac{I}{U} \\ \varphi' = \psi_i - \psi_u \end{cases}$$

导纳的模　　单位：S

导纳角

电流三角形





导纳三角形

(3) 阻抗的串、并联

串联 $Z=\sum Z_k$ ， $\dot{U}_k=\dfrac{Z_k}{\sum Z_k}\dot{U}$

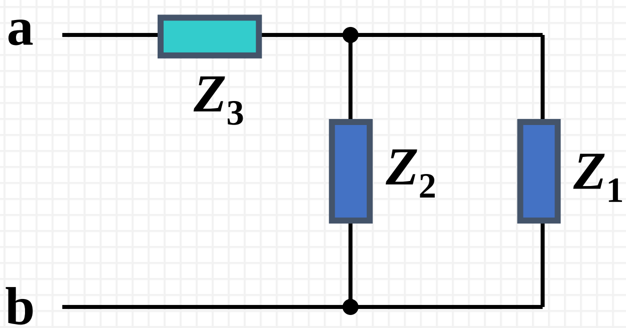
并联 $Y=\sum Y_k$ ， $\dot{I}_k=\dfrac{Y_k}{\sum Y_k}\dot{I}$

例： 已知 $Z_1=(10+\mathrm{j}6.28)\ \Omega$;

$Z_2=(20-\mathrm{j}31.9)\ \Omega$;

$Z_3=(15+\mathrm{j}15.7)\ \Omega$。

求：阻抗 Z_{ab}。



解:

$$Z_{ab}=Z_3+\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$$

$$=15+\mathrm{j}15.7+\frac{(10+\mathrm{j}6.28)(20-\mathrm{j}31.9)}{10+\mathrm{j}6.28+20-\mathrm{j}31.9}$$

$$=(25.9+\mathrm{j}18.6)\Omega$$

论计算器复数运算的重要性！

5.4 用相量法求解正弦稳态电路

步骤：

① **画相量电路模型** $R, L, C \rightarrow$ **复阻抗**

$$i, u \rightarrow \dot{U}, \dot{I}$$

② **列写满足KVL、KCL的相量形式的代数方程**

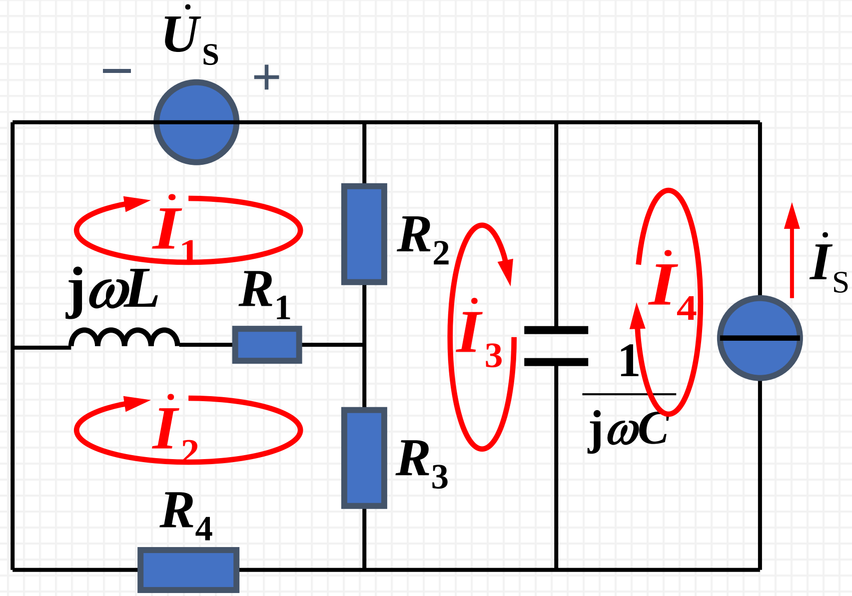
(1) 正弦稳态分析

(2) 相量图

(3) 正弦激励下的过渡过程

(1) 用相量法求解正弦稳态电路

例1 试列写求解所示电路的回路电流法方程。



解:

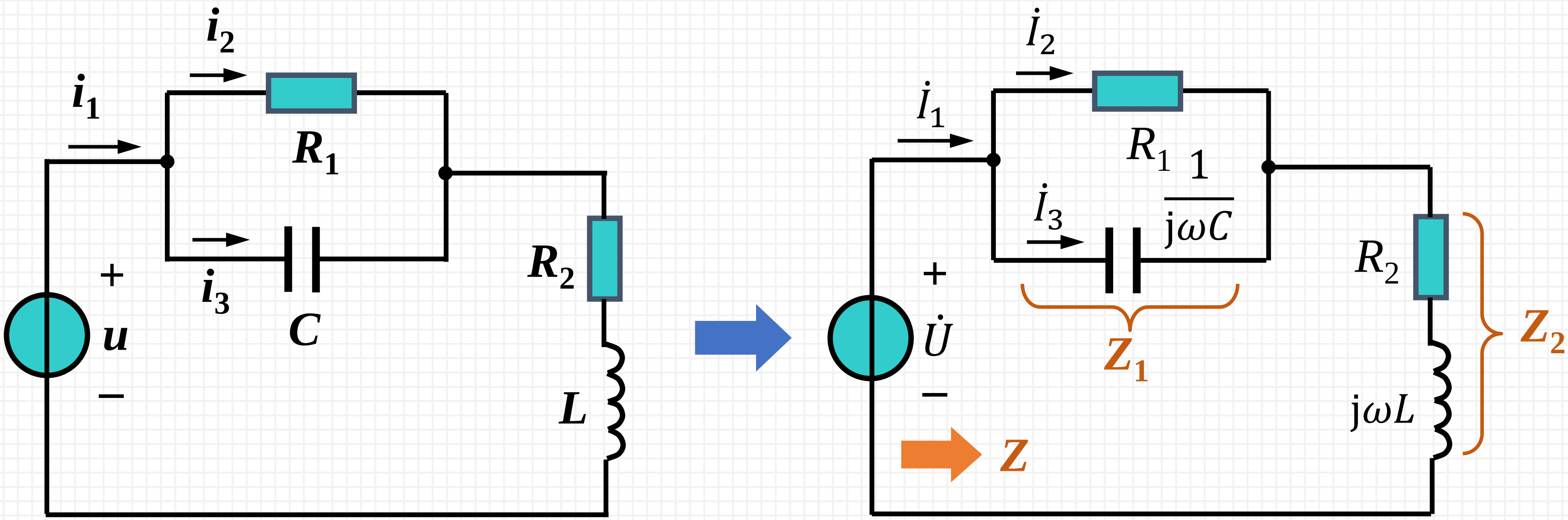
$$(R_1 + R_2 + \mathrm{j}\omega L)\dot{I}_1 - (R_1 + \mathrm{j}\omega L)\dot{I}_2 - R_2\dot{I}_3 = \dot{U}_S$$

$$-(R_1 + j\omega L)\dot{I}_1 + (R_1 + R_3 + R_4 + j\omega L)\dot{I}_2 - R_3\dot{I}_3 = 0$$

$$-R_2\dot{I}_1 - R_3\dot{I}_2 + (R_2 + R_3 + \frac{1}{\mathrm{j}\omega C})\dot{I}_3 - \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}_4 = 0$$

$$\dot{I}_4 = -\dot{I}_S$$

例2 已知： $R_1 = 1000\Omega$，$R_2 = 10\Omega$，$L = 500\text{mH}$，$C = 10\mu\text{F}$，$U = 100\text{V}$，$\omega = 314\text{rad/s}$，**求各支路电流。**

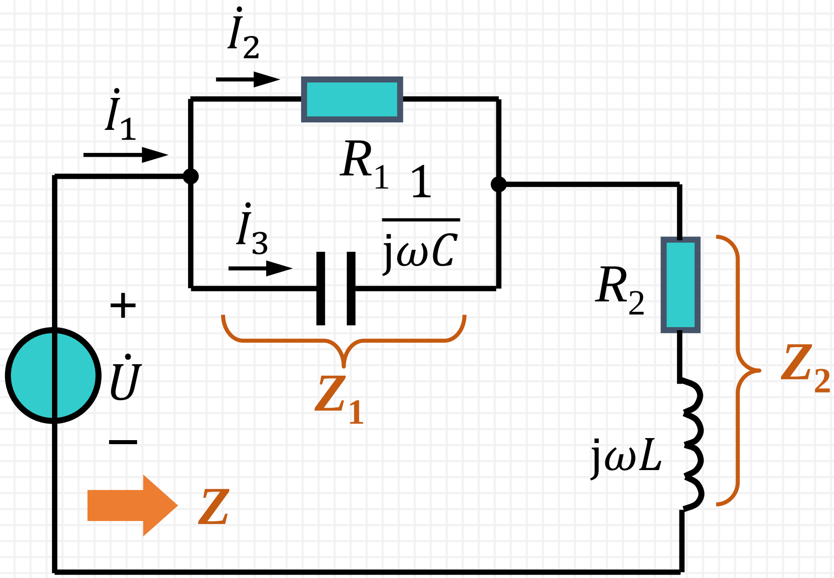


解：先画出电路的相量模型，再列写方程求解

$$Z_1 = \frac{R_1(-j\frac{1}{\omega C})}{R_1 - j\frac{1}{\omega C}} = （92.20 - j289.3）\ \Omega$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L = （10 + j157）\ \Omega;$$

$$Z = Z_1 + Z_2 = （102.2 - j132.3）\Omega$$



$Z =$ （102.2 − j132.3）Ω

设 $\dot{U} = 100\angle 0^{\circ}\text{V}$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z} = 0.598\angle 52.3^{\circ}\ \text{A}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{-\text{j}\dfrac{1}{\omega C}}{R_1 - \text{j}\dfrac{1}{\omega C}}\dot{I}_1 = 0.182\angle -20.0^{\circ}\text{A}$$

$$\dot{I}_3 = \frac{R_1}{R_1 - \text{j}\dfrac{1}{\omega C}}\dot{I}_1 = 0.570\angle 70.0^{\circ}\text{A}$$

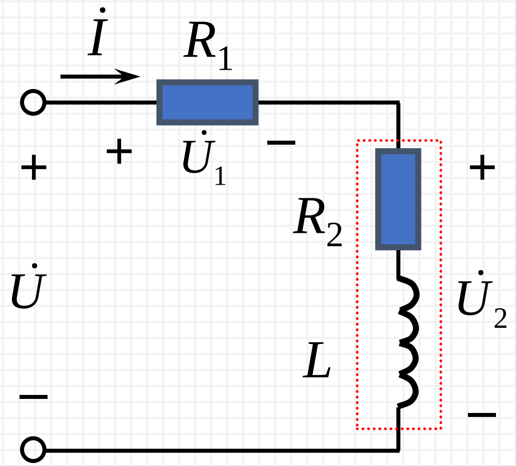
各支路电流的时域表达式为：

$$i_1 = 0.598\sqrt{2}\sin(314t + 52.3^{\circ})\text{A}$$

$$i_2 = 0.182\sqrt{2}\sin(314t - 20^{\circ})\text{A}$$

$$i_3 = 0.57\sqrt{2}\sin(314\ t + 70^{\circ})\text{A}$$

(2) 相量图的应用



例3 已知：U=115V，U_1=55.4V，U_2=80V，

R_1=32 Ω， f=50Hz。

求： 电感线圈的电阻R_2和电感L。

解法一： 列有效值方程求解

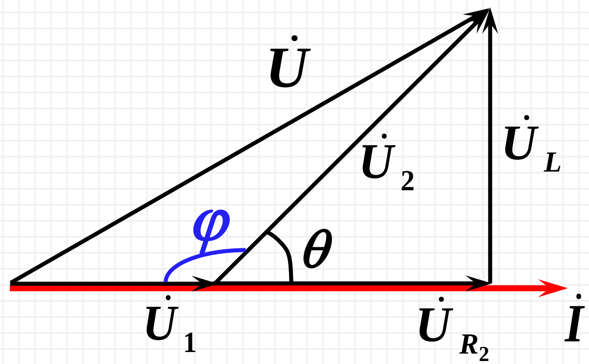
$$I = U_1/R_1 = 55.4/32$$

$$\begin{cases} \dfrac{U}{\sqrt{(R_1+R_2)^2+(\omega L)^2}} = I \\[2ex] \dfrac{U_2}{\sqrt{{R_2}^2+(\omega L)^2}} = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{115}{\sqrt{(32+R_2)^2+(314L)^2}} = \dfrac{55.4}{32} \\[2ex] \dfrac{80}{\sqrt{{R_2}^2+(314L)^2}} = \dfrac{55.4}{32} \end{cases}$$

$$R_2 = 19.6\Omega \qquad L = 0.133\text{H}$$

已知U=115V，U_1=55.4V，U_2=80V

解法二：画相量图求解



$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \dot{U}_1 + \dot{U}_{R2} + \dot{U}_L$$

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\cos\phi$$

代入 3 个已知的电压有效值：

$$\cos\phi = -0.4237 \quad \therefore \phi = 115.1°$$

$$\theta = 180° - \varphi = 64.9°$$

电压三角形

$$U_L = U_2\,sin\theta = 80 \times \sin 64.9° = 72.45\text{V}$$

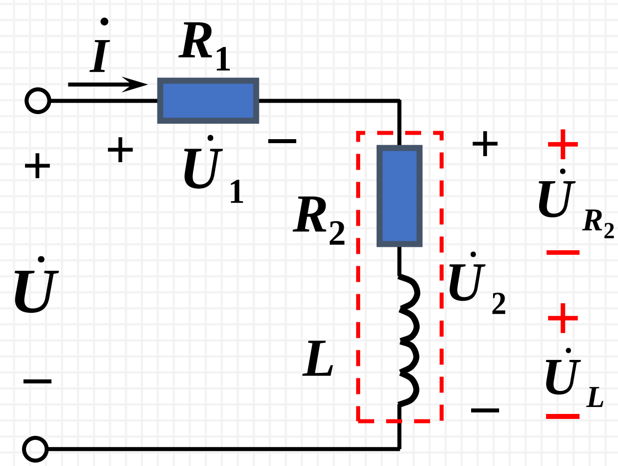
$$U_{R2} = U_2\,cos\theta = 80 \times \cos 64.9° = 33.94\text{V}$$

$$I = U_1/R_1 = 55.4/32 = 1.731\text{A}$$

$$R_2 = U_{R2}/I = 33.94/1.731 = 19.6\Omega$$

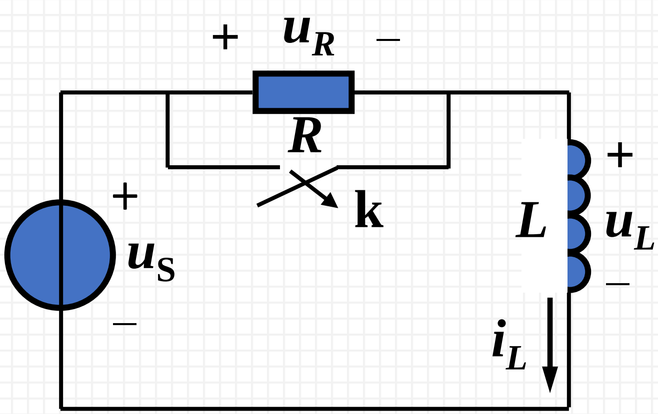
$$\omega L_2 = U_L/I = 72.45/1.731 = 41.85\Omega$$

$$L = 41.85/314 = 0.133\text{H}$$



(3) 求解正弦激励下动态电路的初值和过渡过程

例4： 试求图示电路的初值。



已知： $t=0$时刻开关k打开，

$$u_S(t)=U_m\sin(\omega t+60°)\mathrm{V}$$

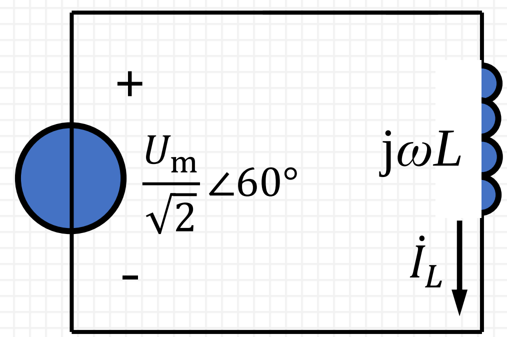
求 $i_L(0^+)$，$u_L(0^+)$，$u_R(0^+)$ 。

解： 换路前，正弦激励作用，并处于稳态，故有：

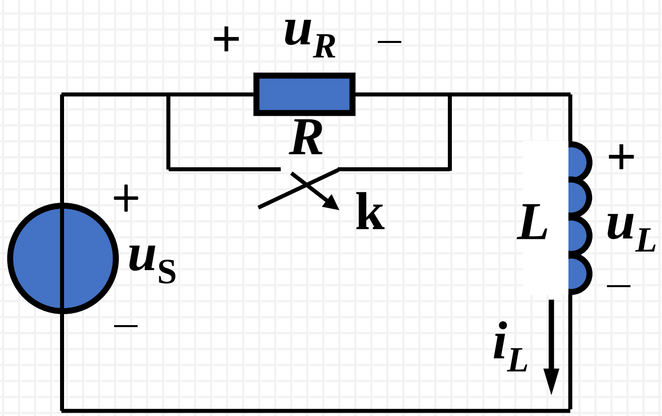
$$\dot{I}_L=\frac{\dot{U}_S}{j\omega L}=\frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}}\angle 60°}{\omega L\angle 90°}=\frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}}}{\omega L}\angle -30°$$

$$i_L(t)=\frac{U_m}{\omega L}\sin(\omega t-30°)$$

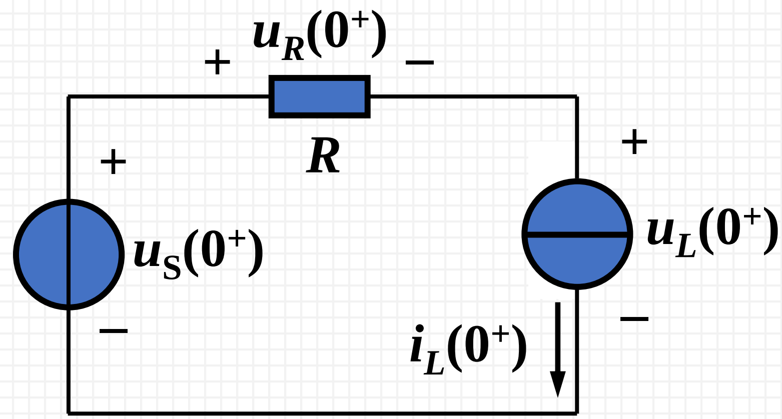
$$i_L(0^-)=-\frac{U_m}{2\omega L}$$



$$u_S(t) = U_m \sin(\omega t + 60^\circ)\text{V}$$



$$i_L(0^-) = -\frac{U_m}{2\omega L}$$



0⁺时刻等效电路

根据换路定理，有：

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = -\frac{U_m}{2\omega L}$$

$$u_S(0^+) = U_m \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}U_m}{2}$$

$$u_R(0^+) = Ri_L(0^+) = -\frac{RU_m}{2\omega L}$$

$$u_L(0^+) = u_S(0^+) - u_R(0^+)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2\omega L}\right)U_m$$

再论一阶三要素法

一阶常系数线性常微分方程

任意支路量 f 的方程

$$\begin{cases} a > 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + af(t) = u(t) \\ f(t)|_{t=0^+} = f(0^+) \end{cases}$$

特征根($-a$) < 0

时间常数($1/a$) > 0

$$f(t) = 特解 + A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

待定系数 (用时间边界条件求出来)

$t \to \infty$

恒定激励

$$特解 = f(\infty)$$

$$f(0^+) = f(\infty) + A$$

$$A = f(0^+) - f(\infty)$$

$$f(t) = f(\infty) + [f(0^+) - f(\infty)]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

正弦激励

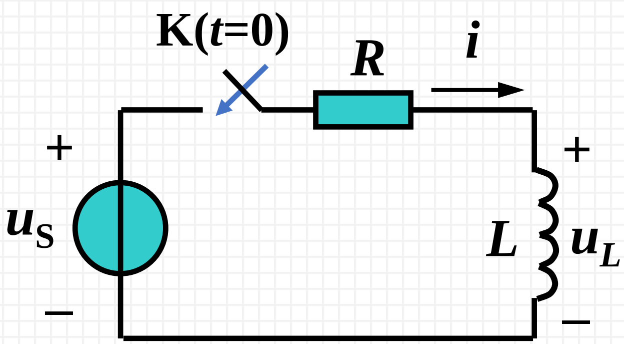
$$特解 = f_t(\infty)$$

$$f(0^+) = f_t(\infty)|_{t=0} + A$$

$$A = f(0^+) - f_t(\infty)|_{t=0}$$

$$f(t) = f_t(\infty) + [f(0^+) - f_t(\infty)|_{0^+}]\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$$

例5 试求正弦激励下所示电路中发生的过渡过程。



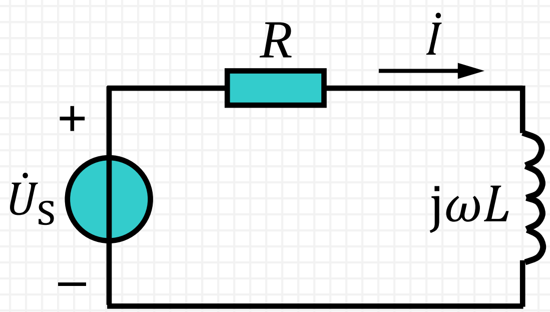
已知：$u_S(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$

$i(0^-)=0$

求：换路后的电流 $i(t)$ 。

$$f(t) = f_t(\infty) + [f(0^+) - f_t(\infty)|_{0^+}]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

解：用相量法求 $i_t(\infty)$



$$\dot{I} = \frac{\dot{U}_S}{R+j\omega L} = \frac{\frac{U_m}{\sqrt{2}}\angle\psi_u}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\angle\arctan\frac{\omega L}{R}}$$

令 $I = \dfrac{U_m/\sqrt{2}}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}$　　$\phi = \arctan\dfrac{\omega L}{R}$

$i_t(\infty) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \psi_u - \varphi)$；　　$i_t(\infty)|_{0^+} = \sqrt{2}I\sin(\psi_u - \varphi)$

$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \psi_u - \varphi) - \sqrt{2}I\sin(\psi_u - \varphi)e^{-\frac{t}{L/R}} \quad t \geq 0$$