



Review

- 幂级数的收敛性、收敛半径

幂级数在其收敛域中内闭一致收敛

- 幂级数和函数的性质

逐项求极限、逐项积分、逐项求导

- C^∞ 函数的幂级数展开、幂级数求和

(公式法, 变量替换, 待定系数, 逐项求导, 逐项积分)

- C^∞ 函数 f 不一定能展开成幂级数



Thm. 若 $\exists M > 0, s.t.$

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), n = 1, 2, \dots$$

则 $f(x)$ 在 $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ 内可以展开成 Taylor 级数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$



Chap7. Fourier级数

一般来说, 任何复杂的振动都可以分解为一系列谐振动之和. 用数学语言来描述: 在相当普遍的条件下, 周期为 T 的函数 $f(x)$ 可以表示为以下级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

1753年, Daniel Bernoulli为了解决弦振动问题时最早提出这一见解时, 与他同时代的数学家(包括Euler 和 D'Alembert)大都持怀疑态度. 直到1829年, Dirichlet才给出前述基本事实的一个严格数学证明.



形如

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

的函数项级数称为Fourier 级数. 若该级数收敛, 则
其和函数以 $\frac{2\pi}{\omega}$ 为周期.



§ 1. Fourier级数

1. 2π 周期函数的Fourier级数

Question. $f(x)$ 能否由 $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$ 在函数项级数收敛的意义下(无穷)线性表出? 也即

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)?$$

若能, $a_n = ? b_n = ?$

$$\forall m \geq 1, n \geq 1,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0$$



$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x + \cos(n+m)x] \, dx = \begin{cases} \pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(n-m)x - \cos(n+m)x] \, dx = \begin{cases} \pi, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] \, dx = 0. \end{aligned}$$



设

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

并设上式乘以 $\cos kx$ 或 $\sin kx$ 得到的级数可以逐项积分.

两边在 $[-\pi, \pi]$ 上积分, 得
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx;$$

两边同乘 $\cos kx$, 并在 $[-\pi, \pi]$ 上积分, 得

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad k = 1, 2, \dots, n \dots;$$

两边同乘 $\sin kx$, 并在 $[-\pi, \pi]$ 上积分, 得

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k = 1, 2, \dots, n \dots.$$



Def. 设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积或广义绝对可积, 令

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots, n, \dots.$$

称

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

为 $f(x)$ 的(形式)Fourier级数, 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

称 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的Fourier系数.



Remark. 若 f 为奇函数,则

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \mathbf{0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx,$$

$$k = 1, 2, \dots, n \dots,$$

此时, f 的Fourier级数为

$$f \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx,$$

称为**正弦Fourier级数**.



Remark. 若 f 为偶函数,则

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \mathbf{0}, \quad k = 1, 2, \dots, n \dots$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx,$$
$$k = 0, 1, 2, \dots, n \dots$$

此时, f 的Fourier级数为

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx,$$

称为余弦Fourier级数.

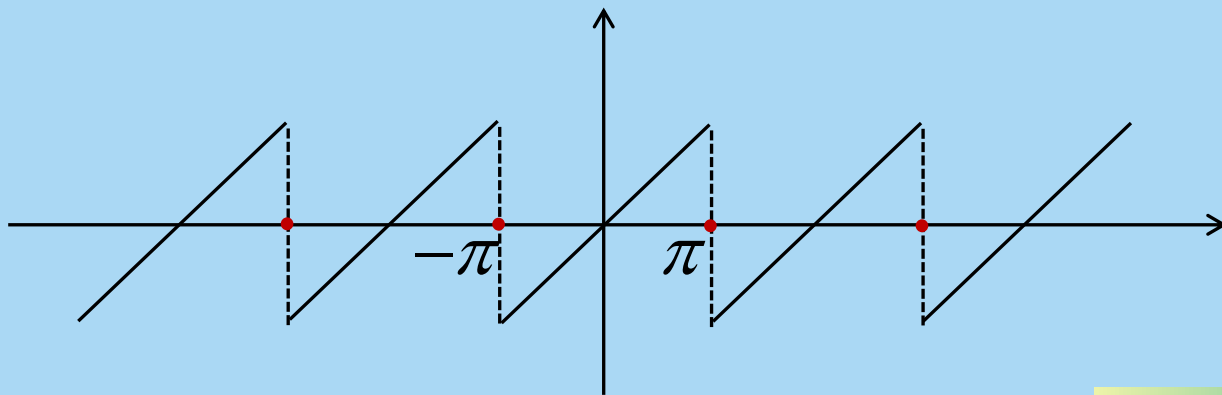


例. 求 $f(x) = x, x \in (0, \pi)$ 的以 2π 为周期的形式正弦 Fourier 级数和形式余弦 Fourier 级数.

解: 为了得到正弦 Fourier 级数, 将 $f(x)$ 奇沿拓到 $(-\pi, 0)$, 即

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in (-\pi, 0);$$

令 $f(\pi) = f(-\pi) = f(0) = 0$, 得到 $[-\pi, \pi]$ 上的奇函数; 再 2π 周期延拓到 \mathbb{R} , 得到 \mathbb{R} 上的 2π 周期奇函数, 仍记为 $f(x)$.



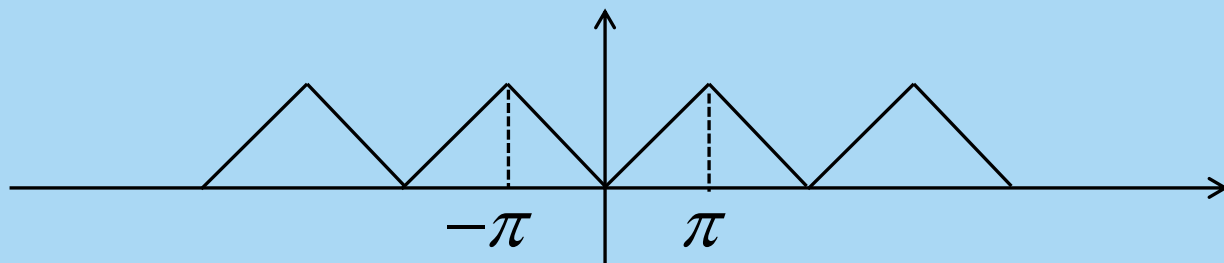


f 为奇函数, 则 $a_k = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n \dots,$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx \, dx = \frac{(-1)^{k+1} 2}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \dots,$$

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx.$$

为了得到余弦Fourier级数, 先将 $f(x)$ 偶沿拓到 $(-\pi, 0)$, 再 2π 周期延拓到 \mathbb{R} , 仍记为 $f(x)$.





f 为偶函数, 则 $b_k = 0, k = 1, 2, \dots, n \dots,$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \pi;$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx \, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{k^2}, \quad k = 1, 2, \dots, n \dots$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos kx,$$

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}. \quad \square$$



Remark. 任给 $[-\pi, \pi]$ 上可积或广义绝对可积的函数 f ,
一定可以构造出 f 的形式Fourier级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

但是,还有两个问题有待解决:

(1)该级数是否收敛?

(2)如果收敛,其和函数是否为 f ?即什么条件下

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)?$$



2.任意周期函数的**Fourier**级数

设 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期,在 $[-l, l]$ 上可积或广义绝对可积,则

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$



例. $f(x) = x^2, \forall x \in [-1, 1], f$ 以 $T = 2$ 为周期, 求 f 的形式
Fourier级数.

解: $a_0 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$

$$a_n = \int_{-1}^1 x^2 \cos n\pi x dx = (-1)^n \frac{4}{(n\pi)^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \int_{-1}^1 x^2 \sin n\pi x dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f(x) \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x. \square$$



3. Bessel不等式, Fourier级数的几何解释

称 f 在 $[a, b]$ 上广义绝对可积, 若 f 与 $|f|$ 均在 $[a, b]$ 上广义可积. 记 $[a, b]$ 上可积或广义绝对可积的函数构成的集合为 $\mathfrak{R}[a, b]$.

Def. $\forall f, g \in \mathfrak{R}[-\pi, \pi]$, f 与 g 的**内积**为

$$(f, g) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx.$$

若 $(f, g) = 0$, 则称 f 与 g **正交**. $\|f\| \triangleq \sqrt{(f, f)}$ 称为 f 的**长度**.

Remark. 内积的引入, 是为了给只有代数性质的线性空间引入长度、角度等几何性质.



Remark. 内积运算要满足3条性质.

(1) $(f, f) \geq 0$, 且 $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f(x)$ 几乎处处为0.

(2) $(f, g) = (g, f)$.

(3) $(a_1 f_1 + a_2 f_2, g) = a_1 (f_1, g) + a_2 (f_2, g),$

$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \forall f_1, f_2 \in \mathfrak{R}[-\pi, \pi].$

Remark. $\mathfrak{R}[-\pi, \pi]$ 中内积的定义不唯一.



Def. 考察函数系 $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ 或者 $\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$.

(1) 如果函数系中的函数长度非零且两两正交, 也即

$$(f_i, f_j) \begin{cases} \neq 0, & i = j, \\ = 0, & i \neq j, \end{cases}$$

则称函数系是**正交**的.

(2) 如果正交函数系中的函数长度都为1, 也即

$$(f_i, f_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

则称函数系是**标准正交**的.



Remark. 正交函数系一定线性无关.

Remark. $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$ 是 $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$ 中
(线性无关) 的正交函数系.

Remark. $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$ 标准正交化得
$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \right\}.$$



记 $\varphi_0(x) = 1/\sqrt{2}$, $\varphi_{2n-1}(x) = \cos nx$, $\varphi_{2n}(x) = \sin nx$, $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \\ &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \end{aligned}$$

记 $c_0 = \frac{a_0}{\sqrt{2}}$, $c_{2n-1} = a_n$, $c_{2n} = b_n$, $n = 1, 2, \dots$, 即 $c_k = (f, \varphi_k)$, 则

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \varphi_n(x).$$



Thm. $f \in \mathfrak{R}[-\pi, \pi], \{c_k\}, \{\varphi_k\}$ 如前定义, 则

$$(1) \forall n \geq 0, \forall \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R},$$

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k \right\| \geq \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|;$$

$$(2) \left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2;$$

$$(3) \sum_{k=0}^{+\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2. \quad (\text{Bessel不等式})$$



Proof.

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k \right\|^2 &= \left(f - \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k, f - \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k \right) \\ &= (f, f) - 2 \left(f, \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k \right) + \left(\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k, \sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k \right) \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^n \lambda_k (f, \varphi_k) + \sum_{k=0}^n \lambda_k^2 \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=0}^n \lambda_k c_k + \sum_{k=0}^n \lambda_k^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n (c_k - \lambda_k)^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2 \\ &\geq \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2, \text{ " = " 成立当且仅当 } \lambda_k = c_k, k = 0, 1, \dots, n. \square \end{aligned}$$



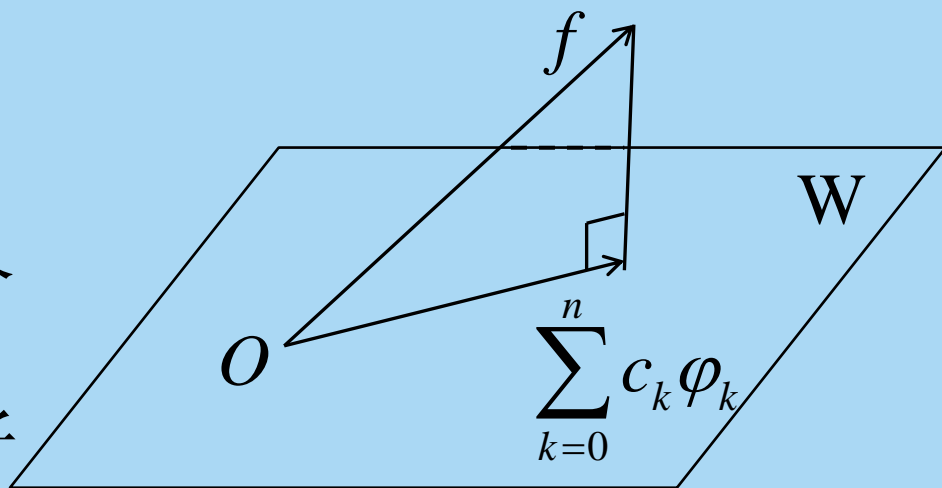
Remark. $f \in \mathfrak{R}[-\pi, \pi]$, $\{\varphi_k\}$ 如前, 在所有线性组合 $\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k$

中, f 的 Fourier 级数的前 n 项和是最佳均方逼近的.

几何解释如下.

在内积空间 V 中, 标准正交
向量 $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ 的线性组合

$\sum_{k=0}^n \lambda_k \varphi_k$ 张成了一个 $n+1$ 维子



空间 W . f 是空间 V 中向量, 求子空间 W 中离 f 最近的向量.

所求向量应为 f 在子空间 W 中的垂直投影, 即 $\sum_{k=0}^n c_k \varphi_k$.



由Bessel不等式可得以下推论:

Corollary. $f \in \mathfrak{R}[-\pi, \pi]$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则
$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

换言之,

$$f \in \mathfrak{R}[-\pi, \pi]$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$



作业：习题7.1 No. 1 (5) (7)