Review

- *Green's formula*

$$\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(Q'_x - P'_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{\tau}\,\mathrm{d}l = \iint_D \nabla \times \vec{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\oint_{\partial D} (P, Q) \cdot \vec{n}\ \mathrm{d}l = \iint_D (P'_x + Q'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\oint_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n}\ \mathrm{d}l = \iint_D \nabla \cdot \vec{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

- Green公式的条件

- *Green*公式的应用

1）第二型曲线积分 $\rightarrow$ 二重积分

2）二重积分 $\rightarrow$ 第二型曲线积分

3）第二型曲线积分 $\rightarrow$ 第二型曲线积分+二重积分

4）微分形式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是否存在原函数 f，即

$$\mathrm{d}f=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

5）恰当方程 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$ 的求解

$$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0\Leftrightarrow \mathrm{d}f=0\Leftrightarrow f\equiv c.$$

§6. Gauss公式和Stokes公式

1.*Gauss*公式

Thm. (*Gauss*公式)设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$为有界区域,向量场

$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$在$\Omega$内连续可微,在闭区域$\bar{\Omega}=$

$\Omega\bigcup\partial\Omega$上连续,则

$$\oiint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

在证明*Gauss*公式前先对其作一点解释:

Remark: *Gauss*公式将空间有界区域Ω的边界曲面∂Ω上的第二型曲面积分转化为Ω上的三重积分.其中∂Ω外侧为正.

Remark: 定义散度算子$\nabla\cdot$为$\nabla\cdot\vec{v}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$,

则*Gauss*公式为$\displaystyle\oiint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

或 $$\oiint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Remark: *Green*公式的第二种形式为

$\displaystyle\oint_{\partial D}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l=\iint_{D}(P'_x+Q'_y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,即$\displaystyle\oint_{\partial D}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l=\iint_{D}\nabla\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

因而*Gauss*公式是*Green*公式在三维空间的推广.

Remark:与*Green*公式一样,应注意*Gauss*公式成立的条件.

Proof of Gauss Formula: 为证明*Gauss*公式, 只要证

$$\oiint_{\partial\Omega} R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} R_z' \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\oiint_{\partial\Omega} Q\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = \iiint_{\Omega} Q_y' \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$\oiint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} P_x' \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

下面只证第一式, 同理可证其它两式.

Case1.设Ω可表示为$\begin{cases}(x,y)\in D_{xy}, \\ z_1(x,y)\le z \le z_2(x,y),\end{cases}$ 即Ω是母线平行于*oz*轴的曲顶柱体, Ω的下底和上顶分别为

$S_1 : z = z_1(x, y), (x, y) \in D_{xy}$和$S_2 : z = z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}$.

记Ω的侧面为柱面S_3.则$\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$,外侧为正.

•在柱面S_3上,法向量与oz轴垂直,故$\iint_{S_3} R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0$.

•在下底S_1的下侧,法向量与oz轴成钝角,故

$$\iint_{S_1} R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z_1(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

•在上顶S_2的上侧,法向量与oz轴成锐角,故

$$\iint_{S_2} R\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z_2(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

三式相加得:

$$\oiint_{\partial\Omega} R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[R(x,y,z_2(x,y))-R(x,y,z_1(x,y))\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Case2.Ω可表示为形如Case1中区域的并.(证明略)□

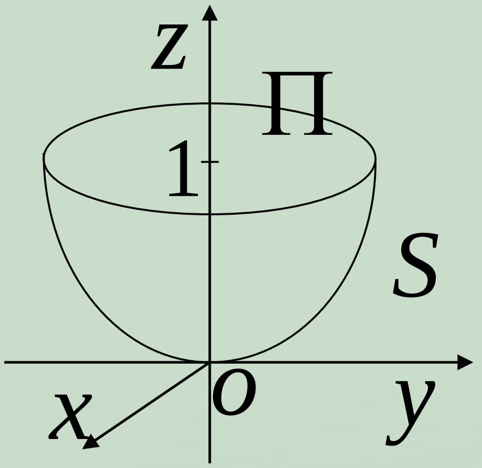
例: $I=\oiint_S x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, 其中$S$为长方体$\Omega:|x|\le a,|y|\le b,|z|\le c$的外表面.

解: 由Guass公式, $I=\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=24abc$.□

例: $I=\iint_S (2x+z)\mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y,$

其中S为曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1),$

其法向量与z轴正向夹角为锐角.



解: 设S与平面$\Pi: z=1, x^2+y^2\le 1$

所围空间区域为Ω,则$\partial\Omega=S^-\cup\Pi$,其中$\Pi$的正向向上.

记$\vec{v}=(2x+z,0,z)$,则$I=\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$,由$Gauss$公式可得

$$\iint_{S^-}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\iint_{\Pi}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\oiint_{\partial\Omega}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{0\le x^2+y^2\le z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\pi/2.$$

$$\iint_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=-\frac{3\pi}{2}+\iint_{\Pi}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=-\frac{3\pi}{2}+\iint_{\Pi}z\,\mathrm{d}S=-\frac{3\pi}{2}+\pi=-\frac{\pi}{2}.$$

例:求$I=\oiint_S \frac{\cos<\vec{r},\vec{n}>}{r^2}\mathrm{d}S$, S为简单光滑闭曲面,$\vec{n}$为S的单位外法向量,M_0为S内部一个确定点,$\vec{r}$是M_0到S上的点的矢向量,r表示$\vec{r}$的长度.

解:取S内部以M_0为球心半径为δ的球面为S_1,外侧为正.记S与S_1所围成的区域为Ω,则$\partial\Omega=S\cup S_1^-$.

$$\frac{\cos<\vec{r},\vec{n}>}{r^2}=\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n},\qquad \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)=0.$$

由$Gauss$公式得$\oiint_{S\cup S_1^-}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega \nabla\cdot\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$,

于是$I=\oiint_S \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\oiint_{S_1}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S=\oiint_{S_1}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}S=4\pi$.□

例*：设$f(u)$二阶连续可微，$f(0)=0$，求

$$I=\oiint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

其中，Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与两球面$x^2+y^2+z^2=1$，$x^2+y^2+z^2=4$所围空间区域Ω的外表面.

解：记$P=x^3, Q=\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3, R=\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3, (y\neq 0)$.

由于 $\lim\limits_{y\to 0}\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{y}{z}\right)-f(0)}{y}=\frac{f'(0)}{z}$,

定义 $R(x,0,z)\triangleq\lim\limits_{y\to 0}R(x,y,z)=\frac{f'(0)}{z}+z^3$.

可以验证P, Q, R在Ω中连续可微, 且

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2, \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3y^2, \frac{\partial R}{\partial z}=-\frac{1}{z^2}f'(\frac{y}{z})+3z^2.$$

由$Gauss$公式, $I=3\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

令$x=r\sin\varphi\cos\theta, y=r\sin\varphi\sin\theta, z=r\cos\varphi$, 则

$1\le r\le 2$, 由$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi=\sin\varphi, \varphi=\pi/4$.

又$z>0, 0<\varphi\le\pi/4$. 于是,

$$I=3\int_1^2 r^2\cdot r^2\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=3\times\frac{31}{5}\times 2\pi\times(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{93}{5}(2-\sqrt{2})\pi. \square$$

2.*Stokes*公式

Thm.(*Stokes*公式)设向量场 $\vec{v} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ 在空间区域Ω内连续可微, S是Ω内逐片光滑的有向曲面, ∂S逐段光滑,则

$$\oint_{\partial S} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= \iint_S (R'_y - Q'_z)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + (P'_z - R'_x)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + (Q'_x - P'_y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

$$= \iint_S \det\begin{pmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} \mathrm{d}S$$

Remark: *Stokes*公式中∂S为有向曲线,其方向由有向曲面S诱导:站在S的正侧,沿∂S的正向前进时,S总在左手侧.

Remark: $\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$,定义旋度算子$\nabla\times$为

$$\nabla\times\vec{v}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{pmatrix},$$

则*Stokes*公式可记为$\oint_{\partial S}\vec{v}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}l=\iint_S(\nabla\times\vec{v})\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$.

Remark: 令$\vec{v}=(P,Q,0)$, 设D为oxy上区域, 上侧为正, 则由$Stokes$公式可得

$$\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这正是$Green$公式. 因此$Stokes$公式是$Green$公式在三维空间的推广.

Remark: $Stokes$公式成立的条件。

例: $I=\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$, 其中$L$是$x^2+y^2=R^2$与$x/a+z/b=1(a>0,b>0)$的交线, 其正向从$oz$轴往下看为逆时针方向.

解: 记$\vec{v}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$, 则

$$\nabla\times v=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ y-z & z-x & x-y\end{pmatrix}=-2(1,1,1).$$

记S为平面$x/a+z/b=1$包含在柱面$x^2+y^2=R^2$以内的部分, 上侧为正, 则其正单位法向量为

$$\vec{n}=\frac{(1/a,0,1/b)}{\sqrt{(1/a)^2+(1/b)^2}}=\frac{(b,0,a)}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

面积微元$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

由Stokes公式

$$I=\oint_L \vec{v}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}l=\iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_S \mathrm{d}S$$

$$=\frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}}\iint_{x^2+y^2\le R^2}\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{-2(a+b)}{a}\pi R^2.\square$$

例:L为球面$x^2+y^2+z^2=4x(z\geq 0)$与柱面$x^2+y^2=2x$的交线,从oz轴正向看去为逆时针方向. 求

$$I=\oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x+(x^2+z^2)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z.$$

解法一:记$\vec{v}=(y^2+z^2)\vec{i}+(x^2+z^2)\vec{j}+(x^2+y^2)\vec{k}$,则

$$\nabla\times\vec{v}=\det\begin{pmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z\\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2\end{pmatrix}$$

$$=2(y-z)\vec{i}+2(z-x)\vec{j}+2(x-y)\vec{k}.$$

在$L:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4x(z\geq 0) \\ x^2+y^2=2x \end{cases}$上，$z^2=x^2+y^2(z\geq 0)$.

取S为锥面$z^2=x^2+y^2(z\geq 0, x^2+y^2\leq 2x)$，上侧为正，则$S$的正单位法向量为

$$\vec{n}=(-x,-y,z)\Big/\sqrt{x^2+y^2+z^2}=(-x,-y,z)\Big/(\sqrt{2}z),$$

面积微元为

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\nabla\times\vec{v}\cdot\vec{n}=2\sqrt{2}(x-y).$$

由$Stokes$公式得

$$I=\iint\limits_{S}\nabla\times\vec{v}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$$

$$=4\iint\limits_{x^2+y^2\le 2x}(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$(令x=1+r\cos t,\ y=r\sin t)$$

$$=4\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(1+r\cos t)\mathrm{d}t=2\pi\times 4\int_0^1 r\mathrm{d}r=4\pi.$$

解法二：选S为球面$x^2+y^2+z^2=4x$上满足$z\geq 0$, $x^2+y^2\leq 2x$的部分，上侧为正.则在S上,

$$\vec{n}=(x-2,y,z)/2,\ z=\sqrt{4x-x^2-y^2},$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由Stokes公式,

$$I=\iint_S \nabla\times\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

$$=4\iint_{x^2+y^2\leq 2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-4\iint_{x^2+y^2\leq 2x}\frac{y}{\sqrt{4x-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_{x^2+y^2\leq 2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi.\square$$

Remark:利用$Stokes$公式将沿有向闭曲线L的第二型曲线积分化为以L为边界的曲面S上的第二型曲面积分. 适当选取S,可以简化计算过程.

例:$I=\oint_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$,其中$L$是$x^2+y^2+z^2=R^2$与$x+y+z=0$的交线,从$x$轴正向看去为逆时针方向.

分析:$v=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$,$\nabla\times v=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$.利用$Stokes$公式计算该积分时,取$S$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的一部分,还是取$S$为平面$x+y+z=0$的一部分,计算的难易程度不同.以下留作习题.

3. 空间向量场

Def. $\Omega\subset\mathbb{R}^3$中任一封闭曲面$S$的内部都包含在$\Omega$中，则称$\Omega$是面(二维)连通区域.

（形象地说就是没有“洞”的区域。）

Def. 对$\Omega\subset\mathbb{R}^3$中任一简单闭曲线L，均有$\Omega$中曲面以L为边界，则称$\Omega$是线(一维)连通区域.

例. $x^2+y^2+z^2<1$ 面连通、线连通

$0<x^2+y^2+z^2<1$ 线连通、非面连通

实心轮胎(甜甜圈) 面连通、非线连通

空间向量场与平面向量场有相似的结论，证明方法也完全类似，因此不加证明地将定理叙述如下：

Thm. 设$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$为区域$\Omega\subset\mathbb{R}^3$上的连续向量场，则以下命题等价：

(1) $\vec{v}$是Ω上的保守场，

(2) 对于Ω中任意一条逐段光滑的有向闭曲线L，

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0.$$

(3) $\vec{v}$为Ω上有势场，即存在函数f，使$\vec{v}=\nabla f$.

Thm2. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^3$为线连通区域,$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$为$\Omega$上连续可微的向量场,则以下命题等价:

(1)$\vec{v}$为Ω上的保守场.

(2)$\vec{v}$为Ω上的无旋场.

证明无旋场是保守场时要用到Stokes公式

Remark:

•若向量场$\vec{v}$为$\Omega\subset\mathbb{R}^3$中保守场,则第二型曲线积分与路径无关,可以选择适当的积分路径简化计算.

•要验证线连通区域$\Omega\subset\mathbb{R}^3$上连续可微的向量场$\vec{v}$为保守场,只要验证$\vec{v}$为无旋场,即$\nabla\times\vec{v}=0$.

- 微分形式$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$有原函数$f$

$$\Leftrightarrow f\text{是向量场}\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}\text{的势函数}$$

- 可以利用第二型曲线积分来求$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$的原函数

$$f(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z,$$

也可以用不定积分法来求原函数.

例:判断$\vec{v}=(x-x_0)\vec{i}+(y-y_0)\vec{j}+(z-z_0)\vec{k}$是否为$\mathbb{R}^3$上的有势场,若是, 求其势函数.

解:在单连通区域$\mathbb{R}^3$上, $\nabla\times\vec{v}=0$,故$\vec{v}$为$\mathbb{R}^3$上无旋场,从而为保守场, 有势场, 其势函数可取为

$$f(x,y,z)$$

$$=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}(x-x_0)\mathrm{d}x+(y-y_0)\mathrm{d}y+(z-z_0)\mathrm{d}z,$$

积分与路径无关,取为折线段$(x_0,y_0,z_0)\to(x,y_0,z_0)\to(x,y,z_0)\to(x,y,z)$.于是

$$f(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}(t-x_0)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}(t-y_0)\mathrm{d}t+\int_{z_0}^{z}(t-z_0)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right].$$

故$\vec{v}$的势函数为

$$\frac{1}{2}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]+C.$$

作业：习题4.7

No. 3(5), 5(1), 6(2), 7(1)

- 补充题：记$\mathbb{R}^3$中以原点为球心的单位球为Ω，设

$$\vec{V}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))^{\mathrm{T}}\in C^1(\mathbb{R}^3),$$ 且

$$\begin{cases}\nabla\cdot\vec{V}(x,y,z)=0, & \forall(x,y,z)\in\Omega,\\ \vec{V}(x,y,z)=(1,1,1)^{\mathrm{T}}, & \forall(x,y,z)\in\partial\Omega.\end{cases}$$

求证：$\iiint_{\Omega}(P+Q+R)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=4\pi.$

Hint: 利用Gauss公式将三重积分化为第二型曲面积分$\iint_{\partial\Omega}(x+y+z)\vec{V}\cdot\mathrm{d}\vec{S}.$