§ 4. 无穷乘积

无穷乘积： $\prod_{1\le n<+\infty} p_n = p_1 p_2 \cdots p_n \cdots,$

部分乘积： $P_n = \prod_{1\le k\le n} p_k.$

Def. 若 $\lim_{n\to\infty} P_n = P \in \mathbb{R}$, 则称 $\prod_{1\le n<+\infty} p_n$ 收敛, 记为 $\prod_{1\le n<+\infty} p_n = P$;

若数列 $\{P_n\}$ 发散, 则称 $\prod_{1\le n<+\infty} p_n$ 发散.

Remark. $\prod_{1\le n<+\infty} p_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{P_n\}$ 收敛.

例. $\prod_{1\le n<+\infty} \frac{1}{n} = 0.$ Proof. $P_{n+1} = \frac{1}{n+1} P_n,\ \lim_{n\to\infty} P_n = 0.$ □

例.证明 $\prod_{2\le n<+\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$.

Proof. 记$a_n=\frac{n^2-n+1}{n(n-1)}$,则

$$p_n=\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)}$$

$$=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}\Big/\frac{n^2-n+1}{n(n-1)}=a_{n+1}/a_n$$

$$\prod_{n=2}^{m}p_n=\prod_{n=2}^{m}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{m+1}}{a_2}=\frac{2}{3}a_{m+1},\quad \prod_{2\le n<+\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}.\square$$

Thm.(无穷乘积收敛的必要条件)

$$\prod_{1\le n<+\infty} p_n = P \neq 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} p_n = 1.$$

Proof.记$P_n = \prod_{1\le k\le n} p_k$,则$\lim_{n\to+\infty} P_n = P \neq 0.$

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\lim_{n\to+\infty} P_n}{\lim_{n\to+\infty} P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1.\square$$

Corollary. $\prod_{1\le n<+\infty} (1+a_n)$收敛到非零实数$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$

Thm. 设$p_n>0, |a_n|<1$, 则

$$\prod_{1\le n<+\infty} p_n = P>0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln p_n \text{ 收敛}$$

$$\prod_{1\le n<+\infty} (1+a_n) = P>0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n) \text{ 收敛.}$$

Proof. $P>0$, 则

$$\prod_{1\le n<+\infty} p_n = P \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \prod_{1\le k\le n} p_k = P$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{1\le k\le n} \ln p_k = \ln P \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln p_n = \ln P. \square$$

Remark. $\prod_{1\le k\le n} p_k = e^{\sum_{1\le k\le n} \ln p_k}$, 因此 $\prod_{1\le n<+\infty} p_n = e^{\sum_{1\le n<+\infty} \ln p_n}$.

例. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 < +\infty$, 证明 $\prod_{1\le n<+\infty} \cos u_n$ 收敛.

Proof. $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 < +\infty$, 则 $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

$\exists N$, 当 $n \ge N$ 时, $\cos u_n > 0$,

$$0 \ge \ln\cos u_n = \ln\sqrt{1-\sin^2 u_n} = \frac{1}{2}\ln(1-\sin^2 u_n)$$

$$\sim -\frac{1}{2}\sin^2 u_n \sim -\frac{1}{2}u_n^2,\ n\to+\infty \text{时}.$$

$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n^2 < +\infty$, 则 $\sum_{n=N}^{+\infty} \ln\cos u_n$ 收敛, 从而 $\prod_{1\le n<+\infty} \cos u_n$ 收敛. □

作业:习题5.4 No. 2(4)