习题讨论课3解答：隐函数，空间曲面

额外的例子：定义齐次函数：如果函数 $f(x,y)$ 满足对任意正数 t，$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，则称 f 为 n 次齐次函数。

设 $f\in\mathscr{C}^1$。则 f 为 n 次齐次函数 $\Longleftrightarrow x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=nf(x,y)$。

证明1. 若 f 为 n 次齐次函数，则 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，两边对 t 在 $t=1$ 处求导，得到 $x\frac{\partial f}{dx}(x,y)+y\frac{\partial f}{dy}(x,y)=nf(x,y)$。

若 $x\frac{\partial f}{dx}(x,y)+y\frac{\partial f}{dy}(x,y)=nf(x,y)$，则

$$tx\frac{\partial f}{dx}(tx,ty)+ty\frac{\partial f}{dy}(tx,ty)=nf(tx,ty).$$

计算

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{f(tx,ty)}{t^n}\right]=\frac{tx\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+ty\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)-nf(tx,ty)}{t^{n+1}}=0,$$

所以 $\frac{f(tx,ty)}{t^n}$ 与 t 无关，$\frac{f(tx,ty)}{t^n}=\frac{f(1\cdot x,1\cdot y)}{1^n}=f(x,y)$。 □

证明2. $\Longrightarrow$：$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ 两边直接对 t 在 $t=1$ 处求导即得。

$\Longleftarrow$：令 $F(t)=f(tx,ty)-t^n f(x,y)$。则

$$F'(t)=xf_x(tx,ty)+yf_y(tx,ty)-nt^{n-1}f(x,y)=\frac{n}{t}F(t),$$

解微分方程得到 $F(t)=F(1)t^n=0,\quad \forall t>0$。 □

证明3. 只证明 $\Longleftarrow$ 部分。

求解一阶线性偏微分方程的一个重要方法是**特征线法**。设 $(x(t),y(t))$ 是可微曲线，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x(t),y(t))=x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))+y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)).$$

与偏微分方程对比系数，所以取

$$x'(t)=x(t),\quad y'(t)=y(t),$$

这就是特征线满足的常微分方程，从它解得特征线 $x(t)=A\mathrm{e}^t, y(t)=B\mathrm{e}^t$。于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(A\mathrm{e}^t,B\mathrm{e}^t)=A\mathrm{e}^t\frac{\partial f}{\partial x}(A\mathrm{e}^t,B\mathrm{e}^t)+B\mathrm{e}^t\frac{\partial f}{\partial y}(A\mathrm{e}^t,B\mathrm{e}^t)=nf(A\mathrm{e}^t,B\mathrm{e}^t).$$

解这个常微分方程得到

$$f(A\mathrm{e}^t,B\mathrm{e}^t)=f(A\mathrm{e}^0,B\mathrm{e}^0)\mathrm{e}^{nt}=f(A,B)\mathrm{e}^{nt}.$$

所以 f 是 n 次齐次函数。**特征线法使求解一阶线性偏微分方程转化为求解常微分方程。** □

一. 隐函数的求导法

隐函数定理：存在性，可微性，及隐函数的导数（偏导数）

若函数 $y = y(x)$, 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定，求导函数？

方法一：代入方程得到恒等式 $F(x, y(x)) = 0$，按链索法则求导，解出隐函数的导数（偏导）。

$$\begin{aligned} F(x, y(x)) \equiv 0 \Longrightarrow 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x, y(x)) = F_x(x, y(x)) + F_y(x, y(x)) \cdot y'(x) \\ &\Longrightarrow y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}. \end{aligned}$$

$F_y(x, y) \neq 0$ 是保证隐函数 $y = y(x)$ 存在的一个充分条件。

方法二：按隐函数定理的公式求隐函数的导数（偏导）的方法求隐函数的导数（偏导）。

我们推荐使用方法一而不是方法二，特别是在求隐函数高阶导数的时候。

例 1. 已知函数 $y = g(x)$ 由方程 $ax + by = f(x^2 + y^2)$，a, b是常数，求 g 的导函数

解法1. 方程 $ax + by = f(x^2 + y^2)$ 两边对 x 求导，

$$a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2xf'(x^2 + y^2) - a}{b - 2yf'(x^2 + y^2)}.$$

□

解法2. 对

$$F(x, y) = ax + by - f(x^2 + y^2) = 0$$

用隐函数定理结论，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{2xf'(x^2 + y^2) - a}{b - 2yf'(x^2 + y^2)}$$

。 □

一般来说，若函数 $y = y(\mathbf{x})$, 由方程 $F(\mathbf{x}, y) = 0$ 确定，如何求函数 y 的偏导函数？

将 y 看作是 $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ 的函数 $y = y(\mathbf{x}) = y(x_1, ..., x_n)$，

对于方程 $F(x_1, ..., x_n, y(x_1, ..., x_n)) = 0$ 两端分别关于 x_i 求偏导数，得到

$$F_{x_i}(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})) + F_y(\mathbf{x}, y(\mathbf{x}))y_{x_i}(\mathbf{x}) = 0,$$

可解得 $\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}(\mathbf{x}, y)}{F_y(\mathbf{x}, y)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$。**但是方法比结论更重要!**

另外，你会不会把偏导数当成分数，从而得到 $\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\partial y}{\partial x_i}$？这对吗？

例 2. 设 $F\in\mathscr{C}^1$，证明：方程 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

证明1. 记 $u=x+\frac{z}{y},v=y+\frac{z}{x}$。

$$F\left(x+\frac{z(x,y)}{y},y+\frac{z(x,y)}{x}\right)\equiv 0,\quad \forall(x,y)$$

两边对 x 求偏导，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[F\left(x+\frac{z(x,y)}{y},y+\frac{z(x,y)}{x}\right)\right]\equiv 0,\quad \forall(x,y),$$

$$F_u(u,v)\left(1+\frac{z_x}{y}\right)+F_v(u,v)\left(\frac{xz_x-z}{x^2}\right)=0,$$

解得

$$z_x=-\frac{F_u(u,v)-\frac{z}{x^2}F_v(u,v)}{\frac{1}{y}F_u(u,v)+\frac{1}{x}F_v(u,v)}=\frac{yzF_v(u,v)-x^2yF_u(u,v)}{x^2F_u(u,v)+yF_v(u,v)}.$$

同理解得

$$z_y=\frac{xzF_u(u,v)-xy^2F_v(u,v)}{xyF_u(u,v)+y^2F_v(u,v)}.$$

代入验证 $xz_x+yz_y=z-xy$。 □

证明2. 记 $G(x,y,z)=F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)$，则方程 $G(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$。

$$G_1=F_1+F_2\cdot(-\frac{z}{x^2}),\quad G_2=F_1\cdot(-\frac{z}{y^2})+F_2,\quad G_3=F_1\cdot\frac{1}{y}+F_2\cdot\frac{1}{x},$$

由隐函数定理，

$$z_1=-\frac{G_1}{G_3},\quad z_2=-\frac{G_2}{G_3},$$

所以

$$\begin{aligned}
&xz_1+yz_2-z+xy\\
=&-\frac{xG_1+yG_1+zG_3-xyG_3}{G_3}\\
=&-\frac{xF_1+yF_2-\frac{z}{x}F_2-\frac{z}{y}F_1+\frac{z}{y}F_1+\frac{z}{x}F_2-xF_1-yF_2}{G_3}\\
=&0.
\end{aligned}$$

□

例 3. 设函数 $x=x(z),y=y(z)$ 由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-1=0,\\ x^2+2y^2-z^2-1=0\end{cases}$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$。

解法1. 在 $\begin{cases} x^2+y^2=-z^2+1, \\ x^2+2y^2=z^2+1 \end{cases}$ 两边对 z 求导数，$\begin{cases} 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=-2z, \\ 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+4y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=2z. \end{cases}$

解得：$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{3z}{x}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{2z}{y}$。先求导，再解方程 □

解法2. 解得 $x^2=-3z^2+1, y^2=2z^2$，求导得到 $x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-3z$，$y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=2z$，从而 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\frac{3z}{x}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}=\frac{2z}{y}$。先解方程，再求导。**方程易解时，不必使用隐函数定理或反函数定理。** □

隐函数定理和反函数定理主要目的是用来处理方程无法简单求解时，确保解的存在性、唯一性和可微性，以及如何通过计算导数得到解的近似展开。

例 4. 已知函数 $z=z(x,y)$ 由参数方程：$\begin{cases} x=u\cos v, \\ y=u\sin v, \\ z=uv \end{cases}$ 给定，试求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

解法1. 两边求微分，得到

$$\begin{cases} \mathrm{d}x=\cos v\,\mathrm{d}u-u\sin v\,\mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}y=\sin v\,\mathrm{d}u+u\cos v\,\mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}z=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v \end{cases}$$

由前两个方程解得

$$\mathrm{d}u=\cos v\,\mathrm{d}x+\sin v\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}v=\frac{-\sin v\,\mathrm{d}x+\cos v\,\mathrm{d}y}{u},$$

根据逆映射定理，$u\neq 0$ 是存在可微逆映射 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 的充分条件。 代入第三式，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z &= v\left(\cos v\,\mathrm{d}x+\sin v\,\mathrm{d}y\right)+u\frac{-\sin v\,\mathrm{d}x+\cos v\,\mathrm{d}y}{u} \\ &= (v\cos v-\sin v)\mathrm{d}x+(v\sin v+\cos v)\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

所以

$$z_x=v\cos v-\sin v, \quad z_y=v\sin v+\cos v.$$

同样，我们可以求二阶偏导。

$$z_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}(v\cos v-\sin v)=(-v\sin v)v_x=-v\sin v\frac{-\sin v}{u}=\frac{v\sin^2 v}{u}.$$

□

解法2. $u=\sqrt{x^2+y^2}, v=\arctan\frac{y}{x}$，$z=\sqrt{x^2+y^2}\arctan\frac{y}{x}$。

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z &= \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\arctan\frac{y}{x}+\sqrt{x^2+y^2}\frac{-\frac{y}{x^2}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ &= \frac{x\arctan\frac{y}{x}-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x+\frac{y\arctan\frac{y}{x}+x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

$\square$

上面两个解法和答案，你更喜欢哪个？

例 5. 设 $f, g, h \in \mathscr{C}^\infty$ 函数。试给一个充分条件，使得由方程

$$\begin{cases} u = f(x, y, z, t), \\ g(y, z, t) = 0, \\ h(z, t) = 0 \end{cases}$$

可确定可微的隐函数 $u = u(x, y)$ ，并求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$。

解. 从

$$g_1 \mathrm{d}y + g_2 \mathrm{d}z + g_3 \mathrm{d}t = 0, \quad h_1 \mathrm{d}z + h_2 \mathrm{d}t = 0,$$

解得（**当** $h_2 g_2 - h_1 g_3 = \det \frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0$ **时**）

$$\mathrm{d}z = \frac{g_1 h_2}{h_1 g_3 - h_2 g_2} \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}t = \frac{g_1 h_1}{h_2 g_2 - h_1 g_3} \mathrm{d}y,$$

代入

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y + f_3 \mathrm{d}z + f_4 \mathrm{d}t \\ &= f_1 \mathrm{d}x + \left(f_2 + f_3 \frac{g_1 h_2}{h_1 g_3 - h_2 g_2} + f_4 \frac{g_1 h_1}{h_2 g_2 - h_1 g_3} \right) \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1 = f_x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_2 + \frac{f_3 g_1 h_2 - f_4 g_1 h_1}{h_1 g_3 - h_2 g_2} = f_2 - \frac{g_1 \begin{vmatrix} f_3 & f_4 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}} = f_y - g_y \frac{\det \frac{\partial(f,h)}{\partial(z,t)}}{\det \frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \Big(f_x(x, y, z(y), t(y)) \Big) = f_{xy} + f_{xz} z'(y) + f_{xt} t'(y) \\ &= f_{xy} + f_{xz} \frac{g_y h_t}{h_z g_t - h_t g_z} + f_{xt} \frac{g_y h_z}{h_t g_z - h_z g_t}. \end{aligned}$$

这些结果可以先用量纲检查。 $\square$

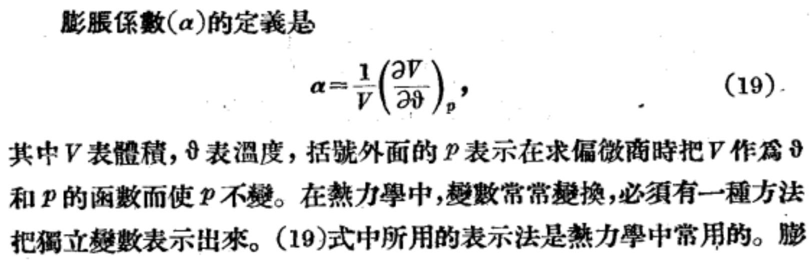
注：

1. 这道题目，学生最困惑的恐怕是 x, y, z, u, t 五个变量满足的三个方程为什么能或怎样确定二元函数 $u(x, y)$？

事实上，由后两个方程 $\begin{cases} g(y,z,t)=0, \\ h(z,t)=0 \end{cases}$，只要 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}$ 可逆，就可由隐函数定理得到可微的隐函数 $z=z(y), t=t(y)$，再将它们代入第一个方程就得到 $u=f(x,y,z(y),t(y))$。也可以这样解释：由最后一个方程 $h(z,t)$ 可得隐函数 $t=t(z)$ 或 $z=z(t)$，代入第二个方程 $g(y,z,t(z))=0$，只要这个复合函数关于变量 y 的偏导数非零，即可解得 $z=z(y)$，从而 $t-t(z(y))$，再代入第一个方程就得到 $u=f(x,y,z(y),t(z(y)))$。

2. 另外，如果不指明 $u=u(x,y)$，$\frac{\partial u}{\partial x}$ 有意义吗？

   按隐函数定理，五个自变量、三个方程的方程组，通常会确定三个变量为其余两个自变量的函数。而 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 确认了 u 是因变量（函数值），x 是自变量，而剩余的 y,z,t 中会有一个为自变量，而剩下的两个是因变量（函数值）。如果不是问题中出现了二阶偏导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$，指明了 x,y 是自变量，从而 z,t 是因变量，那么仅靠 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 是无法确认变量之间的函数关系的，也就是说 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 会有歧义。


膨脹係數(α)的定義是

$$\alpha=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)_p, \qquad (19)$$

其中 V 表體積，ϑ 表溫度，括號外面的 p 表示在求偏微商時把 V 作爲 ϑ 和 p 的函數而使 p 不變。在熱力學中，變數常常變換，必須有一種方法把獨立變數表示出來。(19)式中所用的表示法是熱力學中常用的。膨

图 1: 王竹溪，《热力学》，人民教育出版社1955年出版，第27页

   为了避免这种歧义，物理学家发明了一个很好的符号，$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_y$，它表示当 u 作为自变量 (x,y) 的二元函数时，固定 y 不变，对 x 求的偏导数。感兴趣的学生可以算一算 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_t$。

3. 由此我们知道函数的偏导数是与空间的坐标系有关的。而函数的微分（由于链索法则）具有形式不变性，也就是说它不依赖与空间坐标系。所以学会使用微分进行计算是有好处的。我们在上面两个例子中都示范了用微分来做计算。

二. 几何应用1. 空间曲面

(1)空间曲面的表达式

1. 函数图像：$z=f(x,y)$，它可以看成隐函数的特例 $f(x)-y=0$，或参数

表示的特例 $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases}$ ，所以我们主要讨论下面两个。

2. 方程表示: $F(x,y,z)=0$

3. 参数方程表示：$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v)\in D_{uv}\subset \mathbb{R}^2$

(2)空间曲面的切平面与法线

曲面 S 由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定，S 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0$$

把方程 $F(x,y,z)=0$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处 Taylor 展开到一阶，并截断。

法向量 $\mathbf{n}=\nabla F(P_0)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0),\frac{\partial F}{\partial y}(P_0),\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\right)^T$。**曲面正则条件：$\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$，此时有二维切平面。**

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)},\quad 或\ P=P_0+t\nabla F(P_0),\quad t\in\mathbb{R}.$$

参数曲面 S：$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v)\in D_{uv}\subset \mathbb{R}^2$，

$P_0(x_0,y_0,z_0)=(x(u_0,v_0),y(u_0,v_0),z(u_0,v_0))$ 处的切平面为

$$\begin{cases} x = x_0+\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)t+\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)s, \\ y = y_0+\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)t+\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)s, \\ z = z_0+\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)t+\frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)s, \end{cases} \qquad t,s\in\mathbb{R}$$

参数方程在 (u_0,v_0) 处 Taylor 展开到一阶，并截断。

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\end{pmatrix},\quad \mathbf{v}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0,v_0)\end{pmatrix}$$

是一对切向量。**曲面正则条件：$\mathbf{u},\mathbf{v}$ 线性无关，它们确定了二维切平面。**

切平面方程也可以写为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}=0$$

或

$$\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(x-x_0)+\left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(y-y_0)+\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}(z-z_0)=0$$

法向量

$$\begin{aligned}\mathbf{n}=\mathbf{u}\times\mathbf{v}&=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial u}\end{pmatrix}_{(u_0,v_0)}\times\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}_{(u_0,v_0)}\\ &=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v}&\frac{\partial y}{\partial v}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u}&\frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}&\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u}&\frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\right)_{(u_0,v_0)},\end{aligned}$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{y-y_0}{\left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}=\frac{z-z_0}{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|_{(u_0,v_0)}}$$

无论哪种形式，切平面方程都可以通过一阶 Taylor 展开得到。

例 6. 求曲面 $S: 2x^2-2y^2+2z=1$ 上切平面与直线 $L:\begin{cases}3x-2y-z=5\\ x+y+z=0\end{cases}$ 平行的切点的轨迹。

证明. (1) L 与曲面在点 $P(x,y,z)$ 处的切平面平行，所以曲面的法向量 $\mathbf{n}=(4x,-4y,2)^T$ 与直线 L 垂直。

直线 L 的两个法向量为 $(3,-2,-1)^T$ 和 $(1,1,1)^T$，所以

$$\begin{pmatrix}4x\\ -4y\\ 2\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}3\\ -2\\ -1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},$$

所以 $s-t=2$，从而所求轨迹为曲面上的曲线

$$\begin{cases}x=\frac{3t+s}{4}=\frac{3t+(t+2)}{4}=\frac{2t+1}{2},\\ y=\frac{-2t+s}{-4}=\frac{t-2}{4},\\ z=y^2-x^2+\frac{1}{2}=\left(\frac{t-2}{4}\right)^2-\left(\frac{2t+1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}.\end{cases}$$

□

例 7. 证明球面 $S_1: x^2+y^2+z^2=R^2$ 与锥面 $S_2: x^2+y^2=a^2z^2$ 正交.

证明. 所谓两曲面正交是指它们在交点处的法向量互相垂直。

记 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-R^2$，$G(x,y,z)=x^2+y^2-a^2z^2$。

曲面 S_1 和曲面 S_2 在其交点 $M(x,y,z)$ 处的法向量分别是

$$\nabla F(x,y,z)=(2x,2y,2z)^T,\quad \nabla G(x,y,z)=(2x,2y,-2a^2z).$$

它们的内积为

$$4x^2+4y^2-4a^2z^2=0,$$

因此两曲面正交。 □

例 8. 过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求该切平面的方程。

解. 设曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 在点 (X,Y,Z) 处的切平面

$$6X(x-X)+2Y(y-Y)-2Z(z-Z)=0,$$

即 $3Xx+Yy-Zz=27$。

直线 L 在该平面上，当且仅当

$$\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0,\\ 3Xx+Yy-Zz=27\end{cases}$$

有无穷多解，从前两个方程解得 $x=\frac{27}{8}$，$y-z=-\frac{27}{8}$，代入第三个方程得到

$$\frac{81}{8}X+yY-\left(y+\frac{27}{8}\right)Z=27 \tag{*}$$

对所有 y 成立，因此

$$\begin{cases}Y=Z & y\text{ 的系数}\\ 3X-Z=8, & \text{方程 (*)}\\ 3X^2+Y^2-Z^2=27, & \text{曲面}\end{cases}\iff\begin{cases}X=3\\ Y=1Z=1\end{cases}\text{ 或}\begin{cases}X=-3\\ Y=-17Z=-17\end{cases}$$

相应的切平面方程为 $9x+y-z=27$ 和 $-9x-17y+17z=0$。 □

例 9. 通过曲面 $S:\mathrm{e}^{xyz}+x-y+z=3$ 上点 $(1,0,1)$ 的切平面（ B ）
(A) 通过 y 轴； (B) 平行于 y 轴； (C) 垂直于 y 轴； (D) A,B,C都不对.

解. 设 $x=1+u,y=v,z=1+w$，代入曲面方程得到

$$\mathrm{e}^{v+v(u+w)+uvw}+(1+u)-v+(1+w)=3.$$

在 $(u,v,w)=(0,0,0)$ 处 Taylor 展开并忽略高阶项，得到 $u+w=0$，从而所求切平面为 $(x-1)+(z-1)=0$。选(B)。 □

例 10. 已知 f 可微，证明曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$上任意一点处的切平面通过一定点，并求此点位置.

证明. 任取曲面上一点 (x_0,y_0,z_0)，过点 (x_0,y_0,z_0) 和点 (a,b,c) 的直线都在这个曲面上，所以点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面都过点 (a,b,c)。曲面是以 (a,b,c) 为顶点的一个锥面。 □

例 11. 曲面 S 由方程 $ax+by+cz=G\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 确定, 试证明：曲面 S 上任一点的法线与某定直线相交。

证明. 曲面上任意一点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 的法线

$$L:\begin{cases}x=x_0+t\left(G'(r^2)(2x_0)-a\right)=x_0(1+2tG'(r^2))-at,\\ y=y_0+t\left(G'(r^2)(2y_0)-b\right)=y_0(1+2tG'(r^2))-bt,\\ z=z_0+t\left(G'(r^2)(2z_0)-c\right)=z_0(1+2tG'(r^2))-ct.\end{cases}$$

取 $t=-\frac{1}{2G'(r^2)}$，则 $(x,y,z)=(-at,-bt,-ct)$。所以所有法线 L 都与直线 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 相交。 □

例 12. 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。

解. 椭球面在此点的法向量

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)^T$$

与 $(1,1,1)^T$ 平行，所以 $x_0=a^2t,y_0=b^2t,z_0=c^2t$，代入曲面方程

$$(a^2+b^2+c^2)t^2=1$$

为 $(1,1,1)$，所以 $(x_0,y_0,z_0)=\pm\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$。 □