

清华大学2022春季学期

# 电路原理C

## 第8讲

## 非线性电阻电路分析

# 目录

1、非线性电阻

2、非线性电阻电路的解析解法

3、非线性电阻电路的分段线性解法

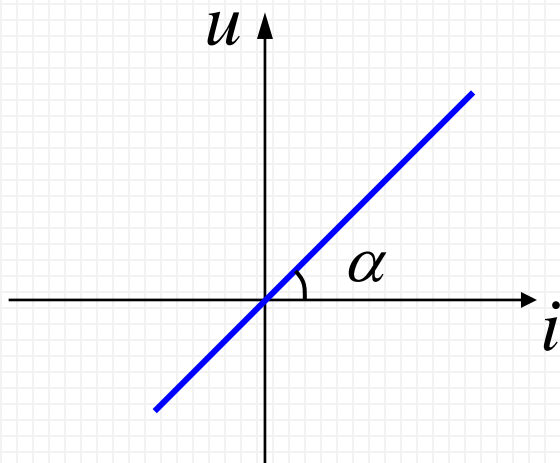
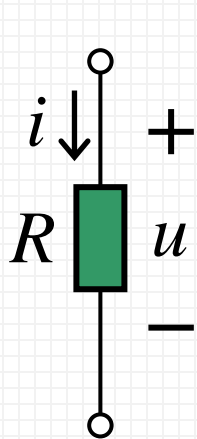
重点

4、非线性电阻电路的图形解法

5、非线性电阻电路解的存在性和唯一性

# 1、非线性电阻

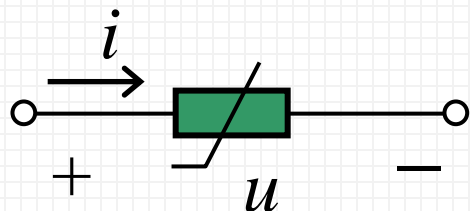
## (1) 线性电阻元件



$$R = \frac{u}{i} = \operatorname{tg} \alpha = \text{const}$$

## (2) 非线性电阻元件

电路符号



伏安特性

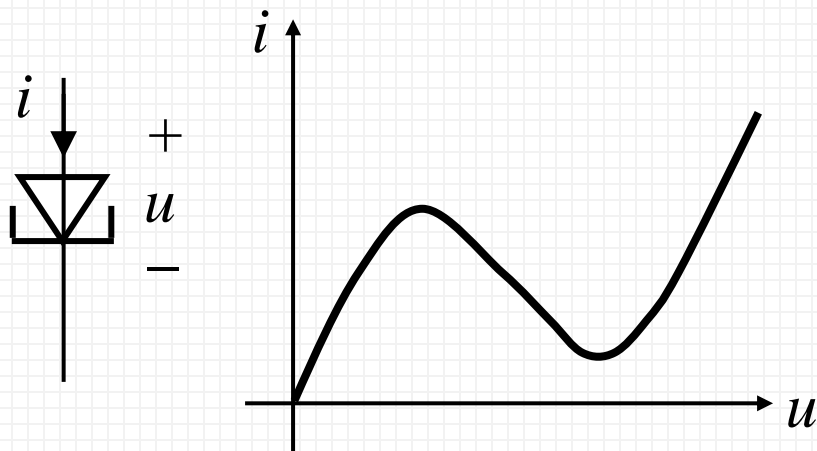
$$u = f(i)$$

或

$$i = g(u)$$

过原点

## 例1 隧道二极管



$$i = g(u) = a_0 u + a_1 u^2 + a_2 u^3$$

称为“**压控型**”或“**N型**”

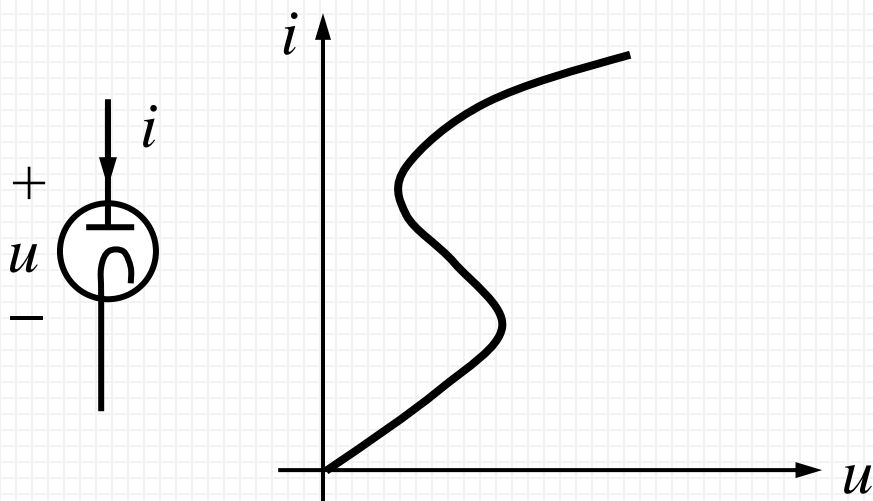
每个电压对应唯一的电流

## 例2 充气二极管

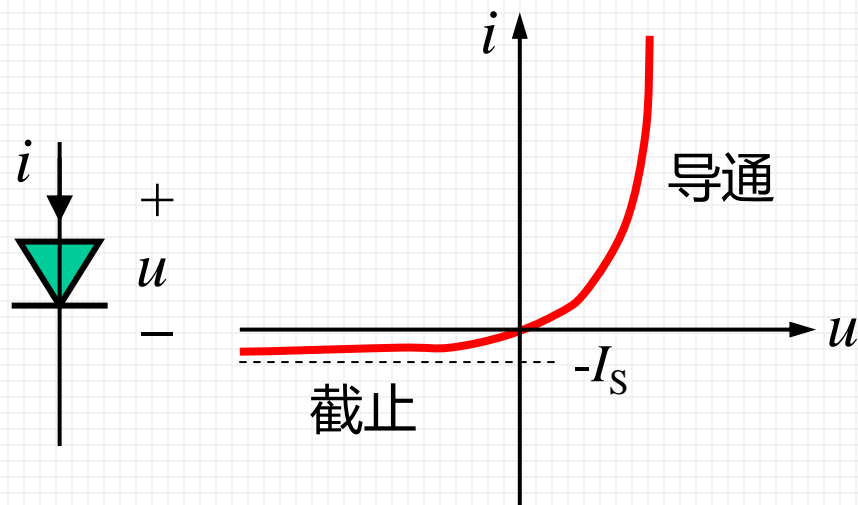
$$u = f(i) = a_0 i + a_1 i^2 + a_2 i^3$$

称为“**流控型**”或“**S型**”

每个电流对应唯一的电压



## 例3 整流二极管



伏安特性

$$i = I_S (e^{u/U_{TH}} - 1)$$

 $I_S > 0$  反向饱和电流

对于硅二极管来说，典型值为

$$I_S = 10^{-12} \text{ A} = 1 \text{ pA}, \quad U_{TH} = 0.025 \text{ V} = 25 \text{ mV}$$

(部分教材)  $I_S = 10^{-7} \text{ A} = 0.1 \mu\text{A}, \quad U_{TH} = 0.026 \text{ V} = 26 \text{ mV}$

### (3) 线性电阻和非线性电阻的区别

**例** 非线性电阻  $u = f(i) = 50i + 0.5i^3$

$$i_1 = 2\text{A} \quad u_1 = 100 + 0.5 \times 8 = 104\text{V}$$

$$i_2 = 10\text{A} \quad u_2 = 500 + 500 = 1000\text{V} \neq 5 \times 104$$

当  $i = i_1 + i_2$  时

**齐次性不满足**

$$\begin{aligned} u &= 50(i_1 + i_2) + 0.5(i_1 + i_2)^3 \\ &= 50i_1 + 0.5i_1^3 + 50i_2 + 0.5i_2^3 + 1.5i_1i_2(i_1 + i_2) \\ &= u_1 + u_2 + 1.5i_1i_2(i_1 + i_2) \\ &\neq u_1 + u_2 \end{aligned}$$

**可加性不满足**

① 齐次性和可加性不适用于非线性电阻。

**例** 非线性电阻  $u = f(i) = 50i + 0.5i^3$

$$i_3 = 2 \sin 60t \text{ A}$$

$$4 \sin^3 t = 3 \sin t - \sin 3t$$

$$u_3 = 50 \times 2 \sin 60t + 0.5 \times 8 \sin^3 60t$$

$$= 100 \sin 60t + 3 \sin 60t - \sin 180t$$

$$= 103 \sin 60t - \sin 180t \text{ A}$$

**出现3倍频**

②非线性电阻能产生与输入信号不同的频率（变频作用）。

**如何看待非线性？**

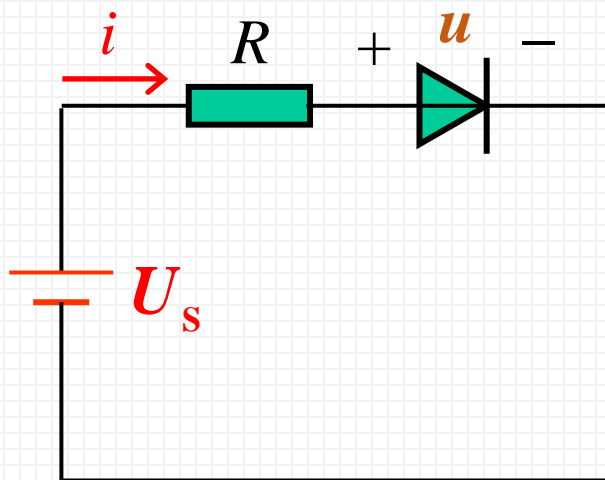
**线性元件：**分压、分流、滤波等作用。

**非线性元件：**整流、稳压、放大、振荡、变频、开关等作用。



## 2、非线性电阻电路的解析解法

例 求电压  $u$



$$i = I_S (e^{u/U_{TH}} - 1)$$

KCL + KVL + 元件特性

$$\frac{U_S - u}{R} = I_S (e^{u/U_{TH}} - 1)$$

超越方程





$$\frac{U_S - u}{R} = I_S \left( e^{u/U_{TH}} - 1 \right) \quad \longrightarrow$$

$$10^{-9} \left( e^{\frac{u}{0.025}} - 1 \right) + u - 2 = 0$$

设  $U_S = 2\text{V}$ ,  $R = 1\text{k}\Omega$ ,  $I_S = 1\text{pA}$ ,  $U_{TH} = 25\text{mV}$

法1 手算  $10^{-9} \left( e^{\frac{u}{0.025}} - 1 \right) + u = 2$

*trial and error*

$u$	左	右
0	0	2
0.3	0.3	2
0.6	27	2
0.5	0.985	2
0.53	2.14	2
0.525	1.844	2
0.527	1.956	2
0.528	2.015	2

法2 MATLAB

```
function f=diode(x)
f=10^(-9)*(exp(x/0.025)-1)+x-2;
```

```
>> a = fzero(@diode, -0.2)
a = 0.5278
```



## (1) 节点电压方程的列写

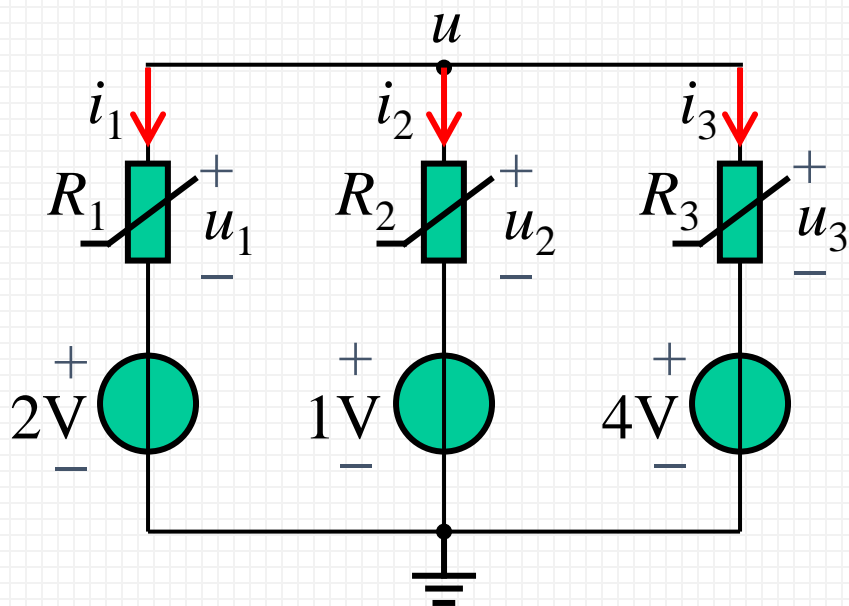
电路方程  $\begin{cases} \text{元件性能} & \text{—— 非线性} \\ \text{电路的连接} & \text{—— KCL, KVL} \end{cases}$

非线性电阻为压控电阻

KCL

非线性电阻电路——非线性代数方程

**例1** 已知  $i_1 = u_1$ ,  $i_2 = u_2^5$ ,  $i_3 = u_3^3$ , 列写求电压  $u$  所需方程。



由KCL

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

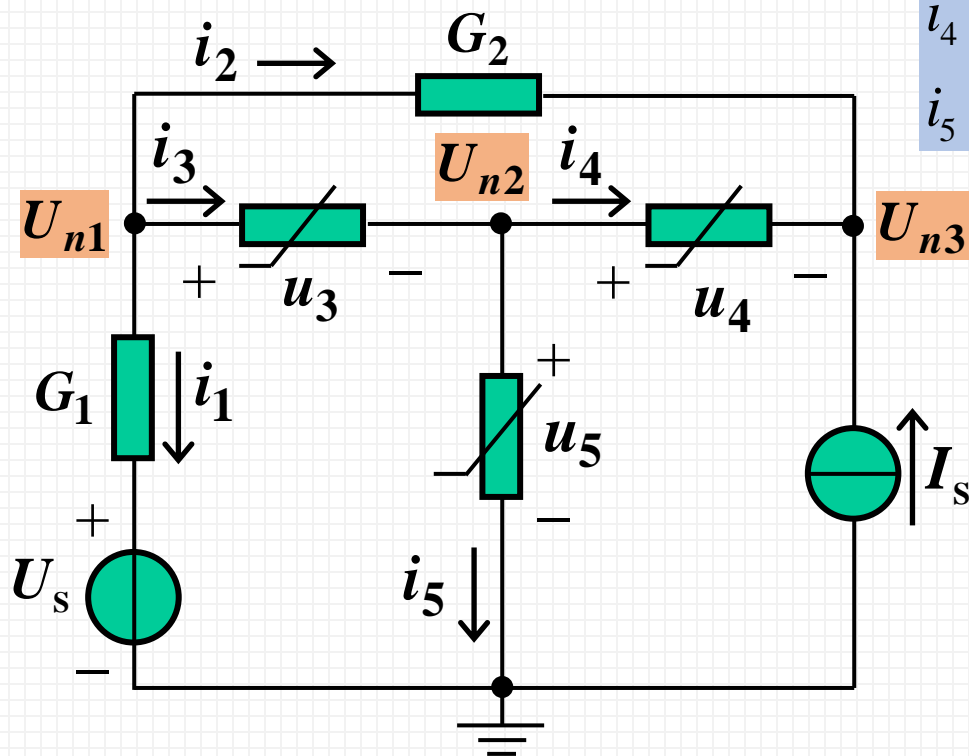
代入元件性质

$$u_1 + u_2^5 + u_3^3 = 0$$

应用KVL, 得

$$u - 2 + (u - 1)^5 + (u - 4)^3 = 0$$

非线性  
代数方程

**例2** 列写节点电压方程

$$\begin{aligned} i_3 &= 5u_3^3 \\ i_4 &= 10u_4^{1/3} \\ i_5 &= 15u_5^{1/5} \end{aligned}$$

**KCL**

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 = 0 \\ -i_3 + i_4 + i_5 = 0 \\ -i_4 - i_2 - I_s = 0 \end{cases}$$

**元件性质 KVL**

$$\begin{cases} i_1 = G_1(U_{n1} - U_s) \\ i_2 = G_2(U_{n1} - U_{n3}) \\ i_3 = 5(U_{n1} - U_{n2})^3 \\ i_4 = 10(U_{n2} - U_{n3})^{1/3} \\ i_5 = 15U_{n2}^{1/5} \end{cases}$$

则节点方程为

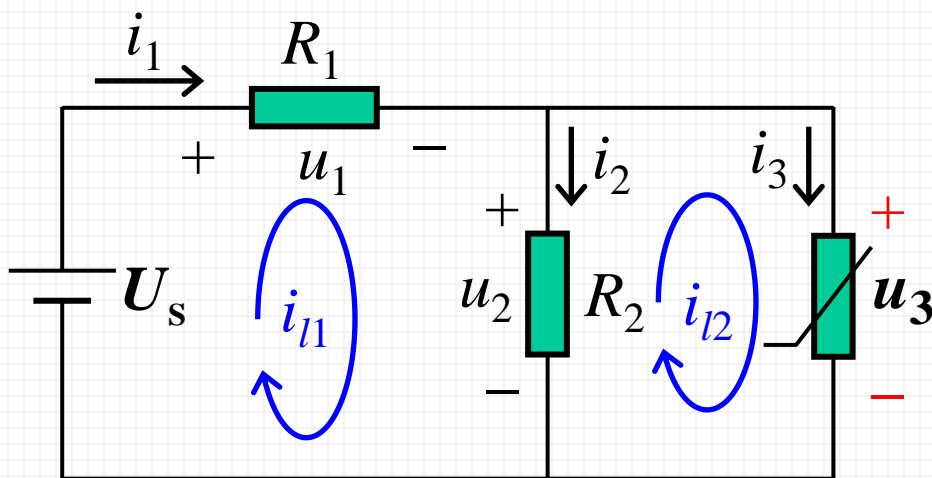
$$\begin{cases} G_1(U_{n1} - U_s) + G_2(U_{n1} - U_{n3}) + 5(U_{n1} - U_{n2})^3 = 0 \\ -5(U_{n1} - U_{n2})^3 + 10(U_{n2} - U_{n3})^{1/3} + 15U_{n2}^{1/5} = 0 \\ -10(U_{n2} - U_{n3})^{1/3} - G_2(U_{n1} - U_{n3}) - I_s = 0 \end{cases}$$

**非线性代数方程组**



## (2) 回路电流方程的列写

**例3** 已知  $u_3 = 20 i_3^{1/3}$ , 求节点电压  $u_3$ 。



非线性电阻为流控电阻

KVL

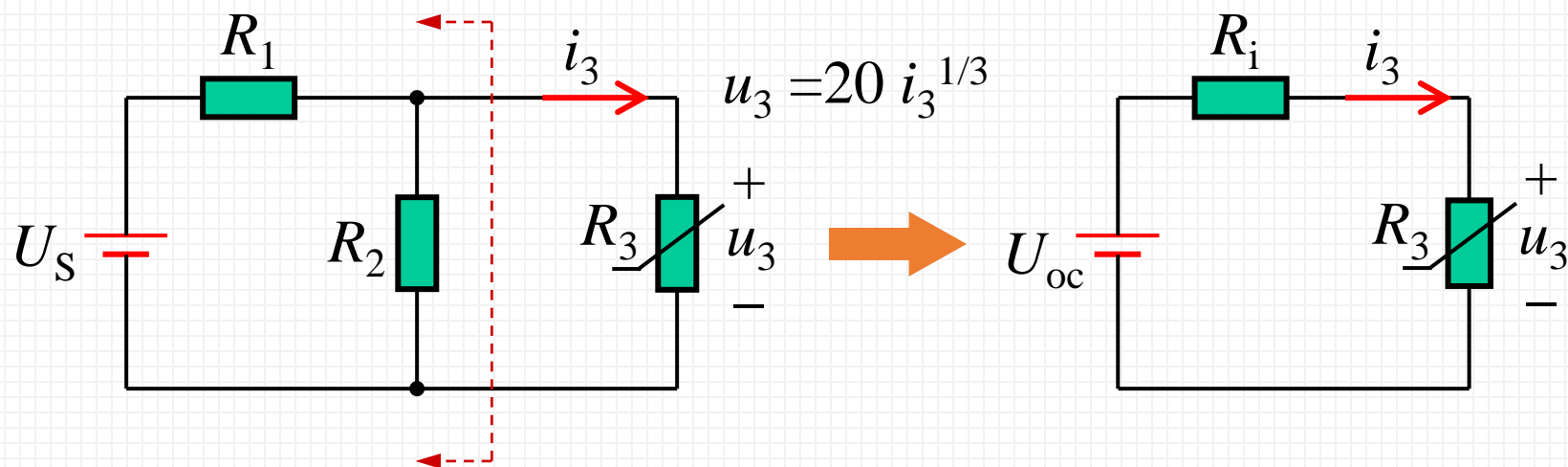
$$\begin{cases} R_1 i_{l1} + R_2 (i_{l1} - i_{l2}) = U_s \\ 20 i_{l2}^{1/3} - R_2 (i_{l1} - i_{l2}) = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow i_3 \longrightarrow u_3$$

非线性代数方程组

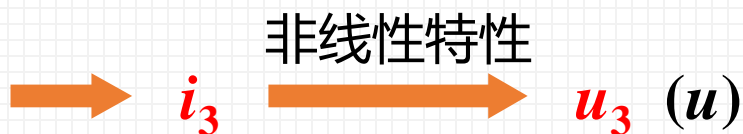


## 将线性部分做戴维南等效



其中  $U_{oc} = U_S R_2 / (R_1 + R_2)$  ,  $R_i = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$

由此得  $U_{oc} = R i_3 + 20 i_3^{1/3}$





## 解析解法的特点

- 步骤
  - 利用所有非线性元件的特性、KCL和KVL列写并求解电路的非线性方程
- 优点
  - 貌似能求出精确解 → 实际上数值解法也带来误差
- 缺点
  - 方程列写可能比较麻烦
  - 方程求解比较麻烦

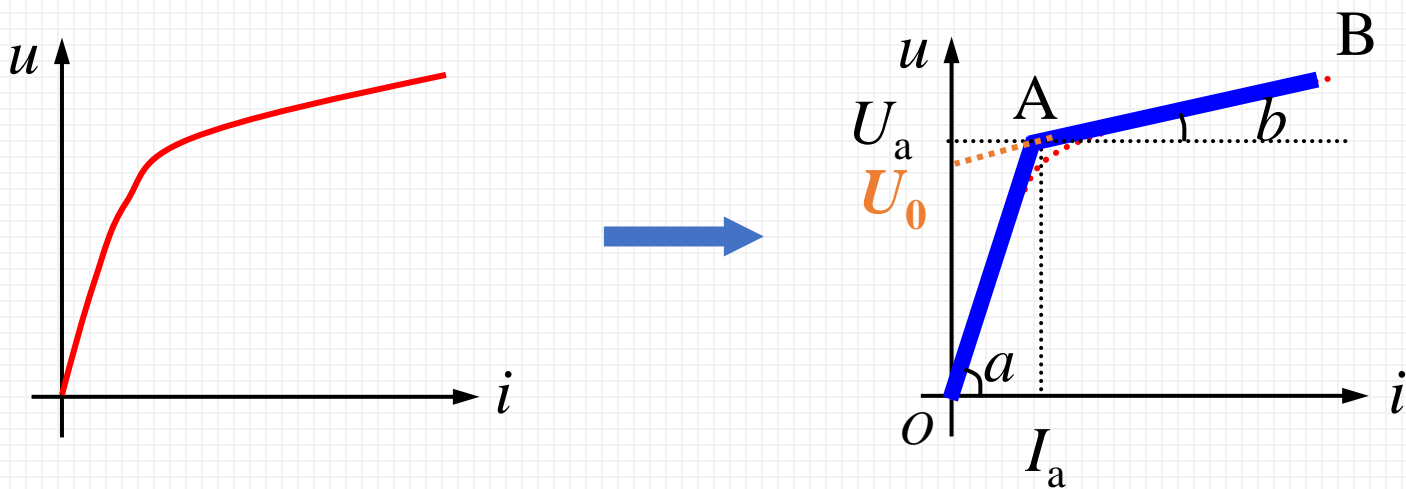


### 3 非线性电阻电路的分段线性解法

**分段线性法：**将非线性电阻近似地用折线来表示。

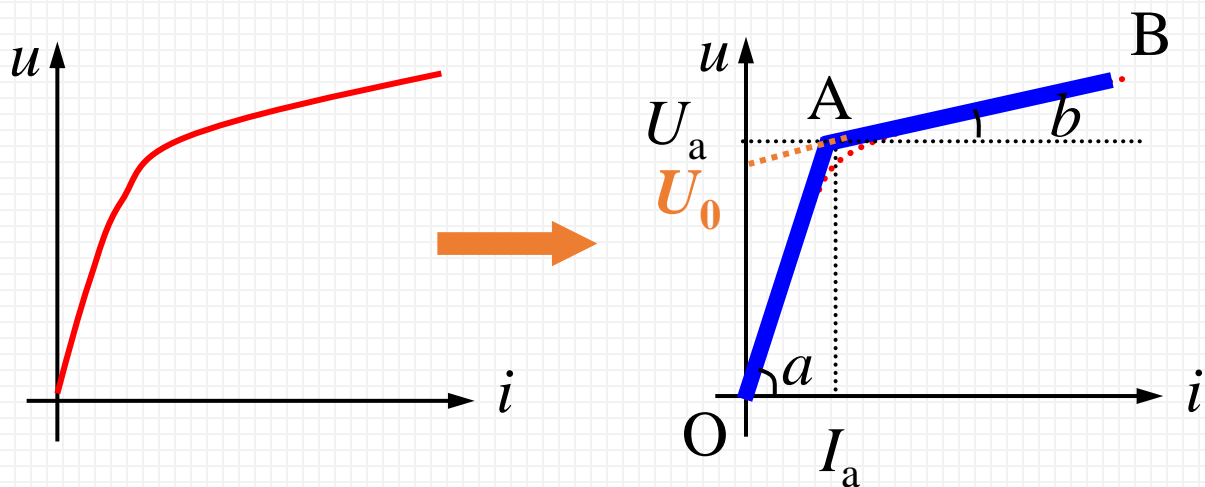
将求解过程分为几个线性段，每段中分析线性电路。

#### 例1

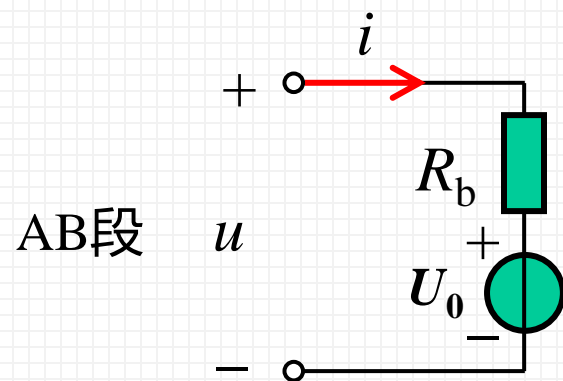
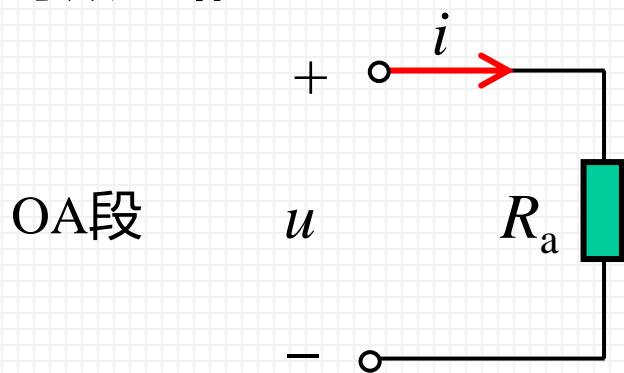




## 例1

OA段  $R_a = \tan a$ AB段  $R_b = \tan b$ 

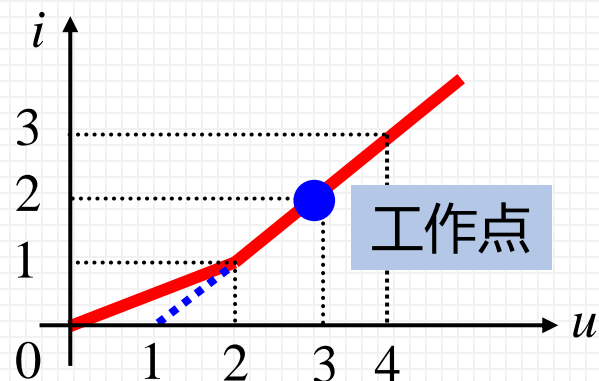
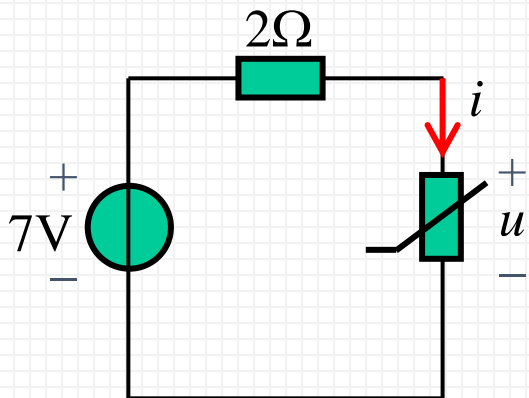
## 等效电路



如何知道在哪段？

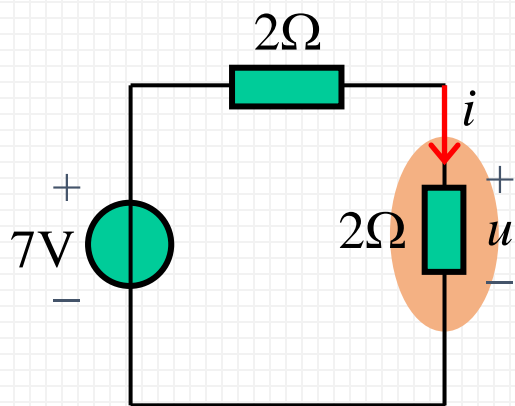


**例2** 已知  $0 < i < 1\text{A}$ ,  $u = 2i$ ;  $i > 1\text{A}$ ,  $u = i + 1$ 。求电压  $u$ 。



假设工作在第1段:  $0 < i < 1\text{A}$

**条件**



**性质**

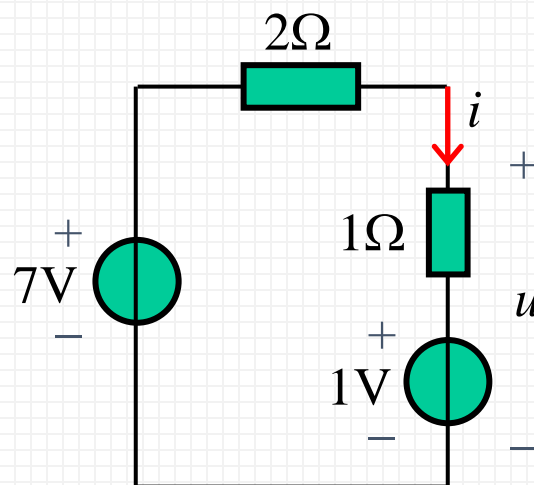
$$i = 1.75\text{A}$$

$$u = 3.5\text{V}$$

$$i = 1.75\text{A} > 1\text{A}$$

**假设错误**

假设工作在第2段:  $i > 1\text{A}$



$$i = 2\text{A}$$

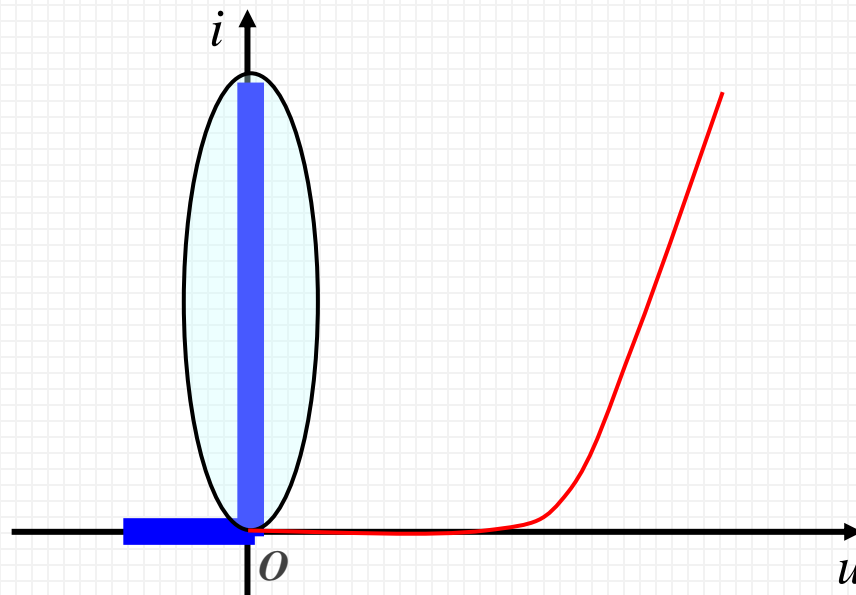
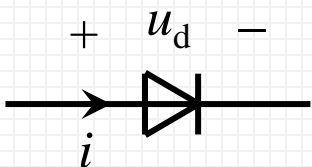
$$u = 3\text{V}$$

**假设正确**

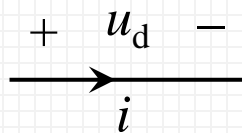


## 研究二极管的分段线性模型

模型1



(半个)短路

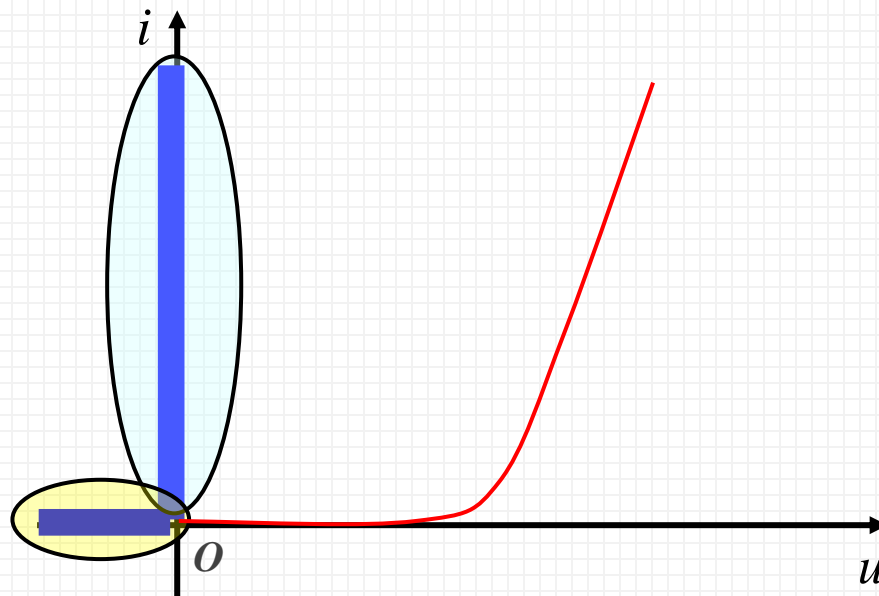
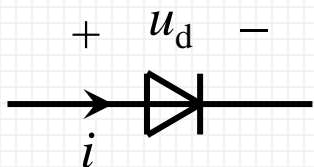


条件是  $i > 0$

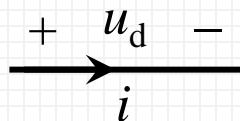


## 理想二极管模型

### 模型1

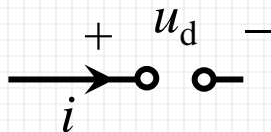


(半个)短路



条件是  $i > 0$

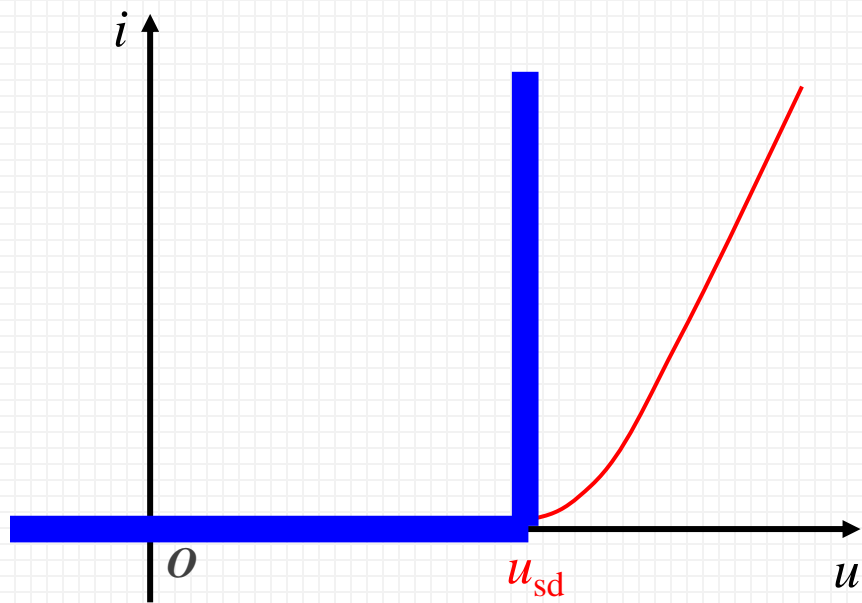
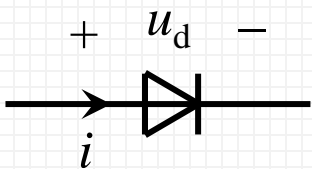
(半个)开路



条件是  $u_d < 0$

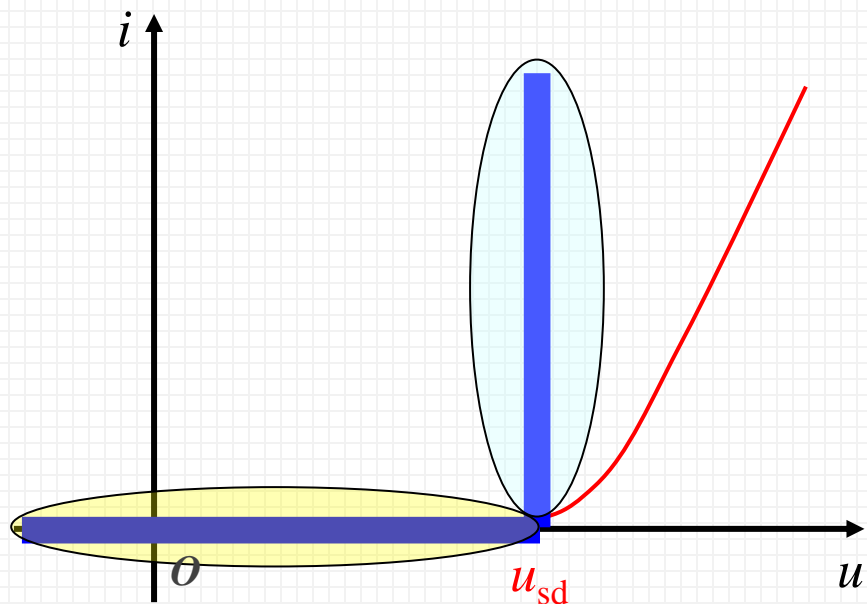
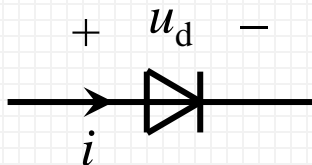


## 模型2

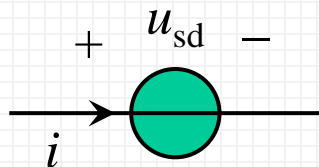




## 模型2



独立电压源

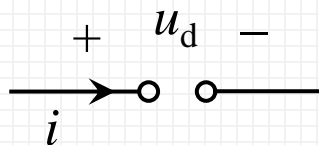


条件是  $i > 0$

硅二极管  $u_{sd}=0.7V$

锗二极管  $u_{sd}=0.2V$

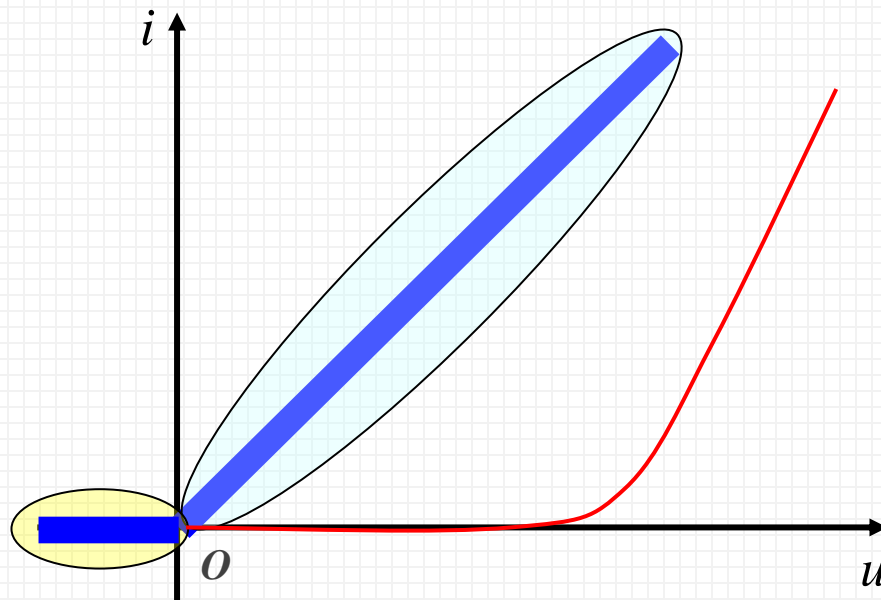
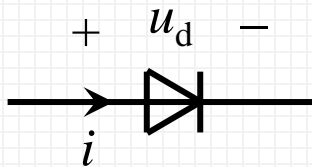
开路



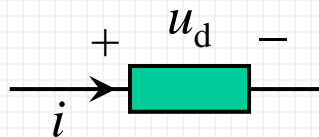
条件是  $u_d < u_{sd}$



### 模型3

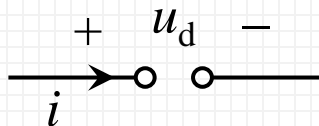


电阻



条件是  $i > 0$  或  $u > 0$

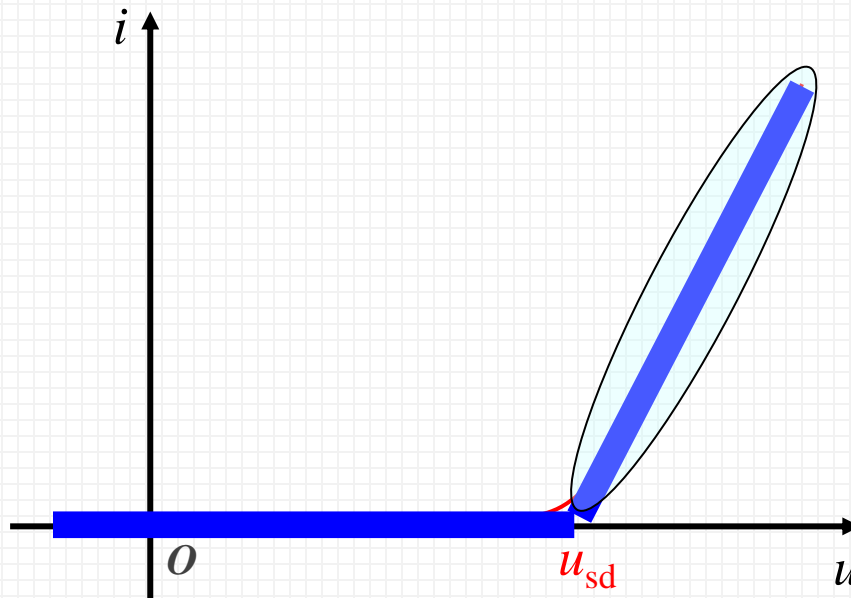
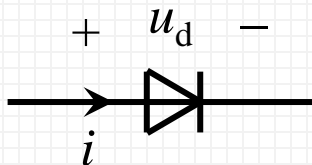
开路



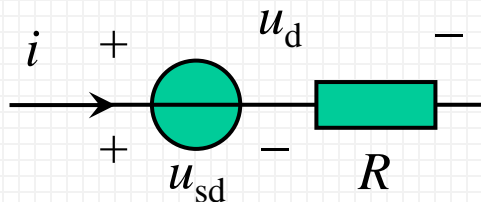
条件是  $u_d < 0$



### 模型4

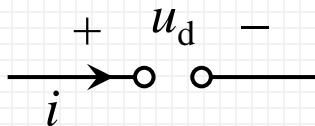


独立电压源串电阻



条件是  $i > 0$  或  $u_d > u_{sd}$

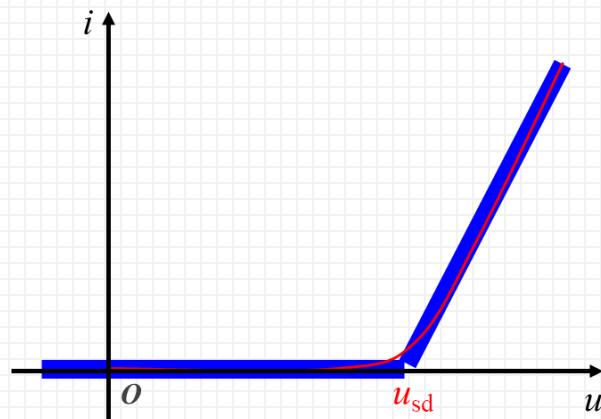
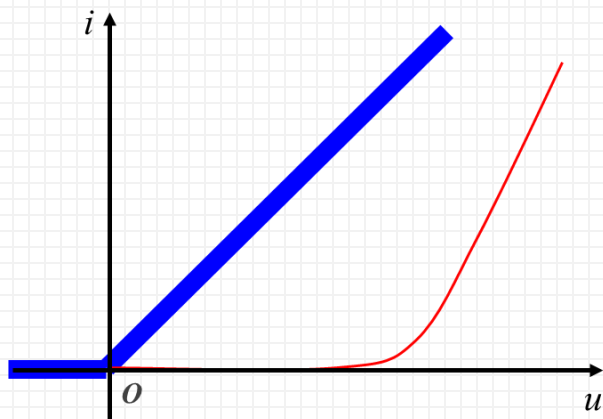
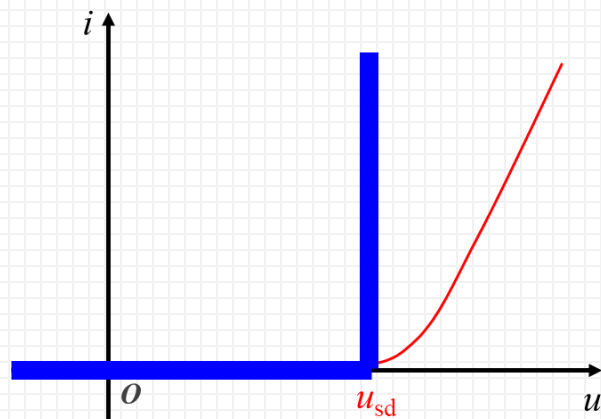
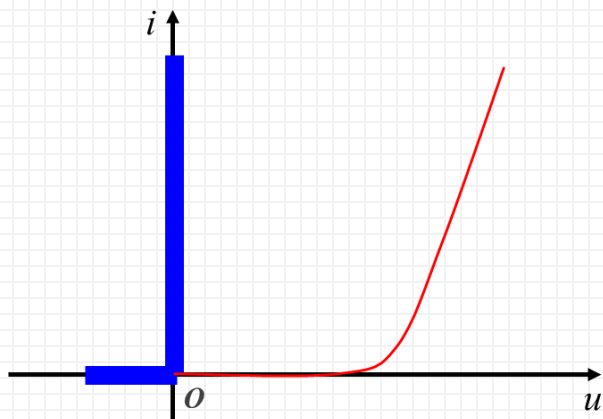
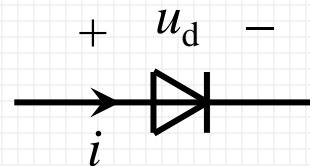
开路



条件是  $u_d < u_{sd}$



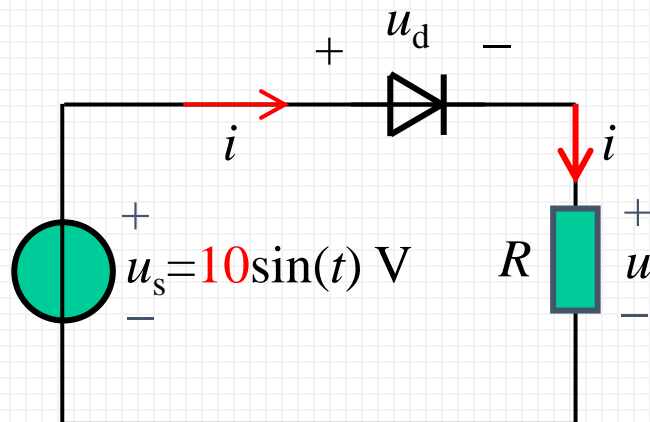
为什么有这么多模型？什么时候用哪个？





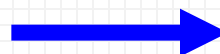


**例3** 用分段线性法求  $u$ ，用理想二极管模型。



**方法:**

假设



检验

**模型1** 短路 条件是  $i > 0$

假设二极管短路，得

$$u = 10\sin(t)$$

$$i = \frac{10\sin(t)}{R}$$

$\sin(t) > 0$  时成立

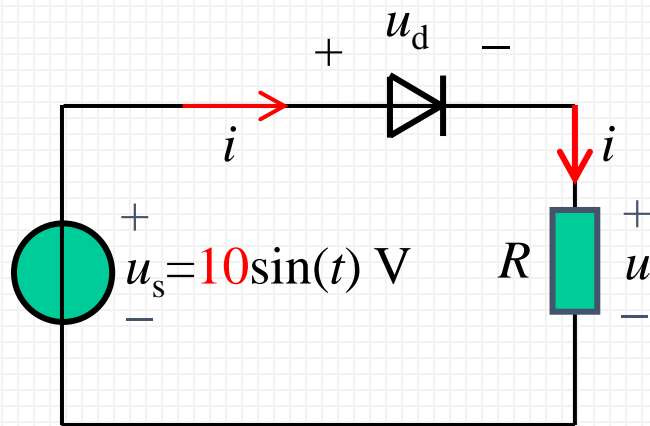
开路 条件是  $u_d < 0$

假设二极管开路，得

$$u = 0$$

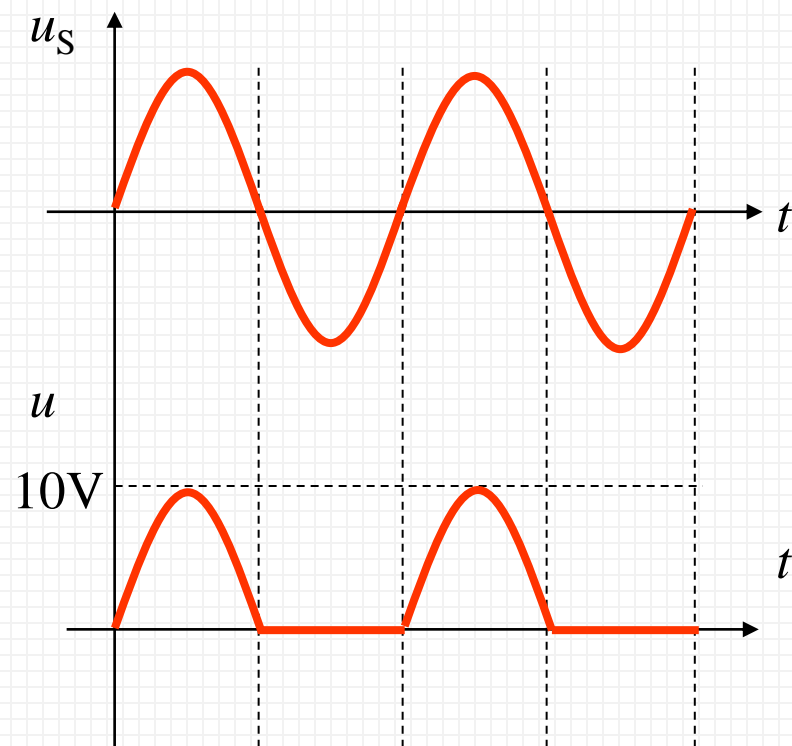
$$u_d = 10\sin(t)$$

$\sin(t) < 0$  时成立



将二极管当作理想二极管处理

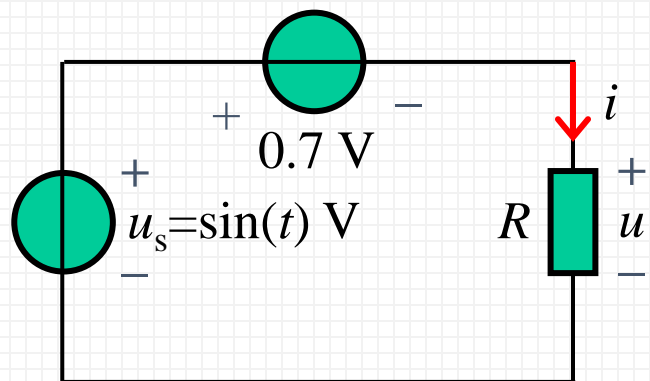
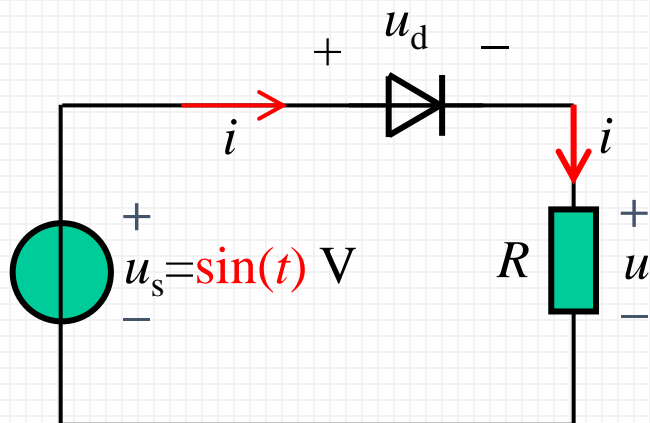
二极管半波整流



思考：二极管两端的电压波形？



**例3** 用分段线性法求 $u$ 。二极管用**模型2**，硅二极管。



$u$  的波形怎样?

**模型2**

**0.7V独立电压源**，条件是  $i > 0$

**开路**，条件是  $u_d < u_{sd}$

设  $i > 0$

$$u = \sin(t) - 0.7$$

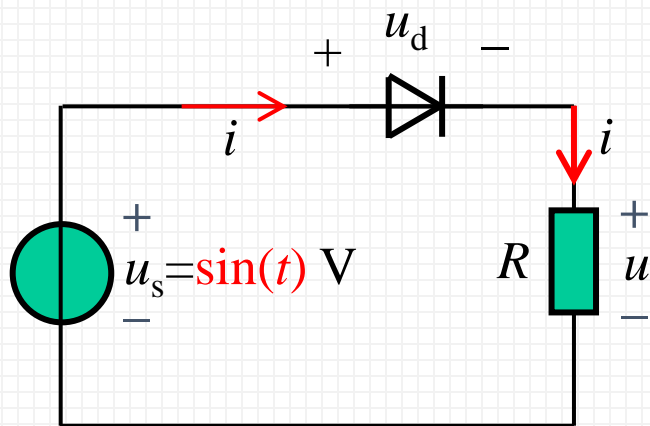
$$i = \frac{\sin(t) - 0.7}{R}$$

即  $\sin(t) > 0.7$  时成立。

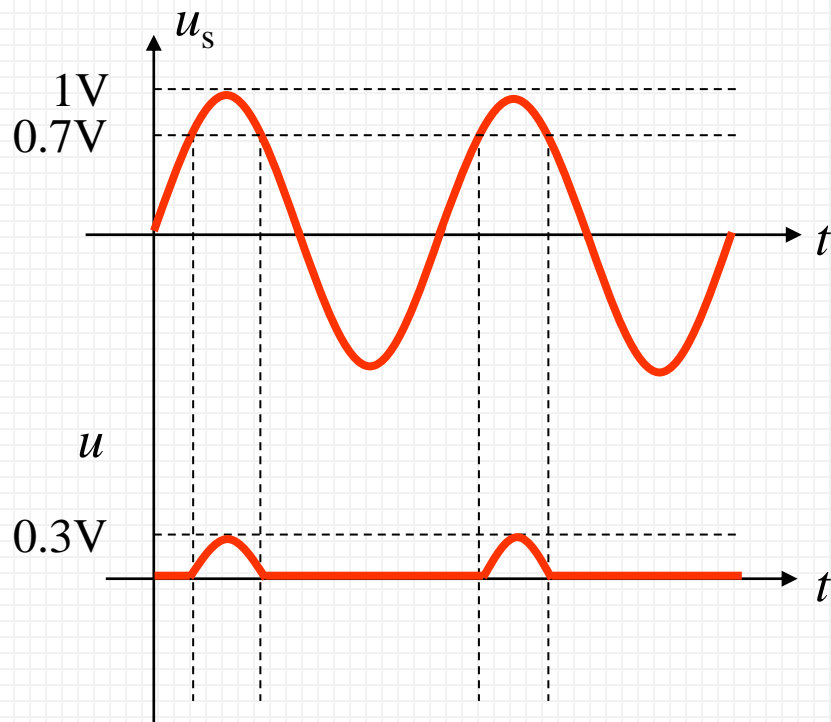
设二极管**开路**，得  $u = 0$

$$u_d = \sin(t)$$

在  $\sin(t) < 0.7$  时成立。

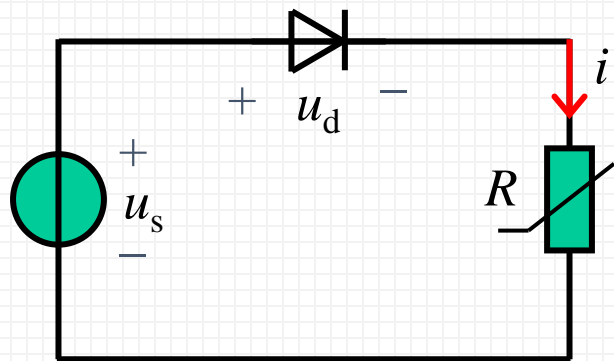


二极管用模型2





含两个非线性电阻



二极管  $\begin{cases} \text{短路} & \text{条件是 } i > 0 \\ \text{开路} & \text{条件是 } u_d < 0 \end{cases}$

非线性  $R$   $\begin{cases} u = 2i, & i < 1\text{A} \\ u = i + 1, & i \geq 1\text{A} \end{cases}$

如果电路中有两个非线性电阻，各分为两段，则要假设四个状态，求解4个相同拓扑结构的电路。



## 分段线性解法的特点

- **步骤**

- 将非线性元件根据精度的需要划分为若干段，每段中用**线性元件**来建模。**确定模型和条件**
- **假设**非线性元件位于某一段，将模型带入，**检验**条件是否满足

- **优点**

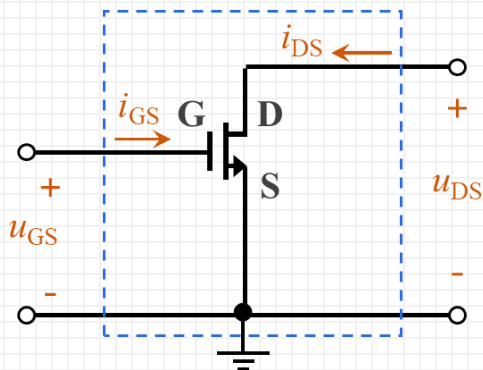
- 线性模型的求解比较方便

- **缺点**

- 精度上有牺牲
- 非线性元件多的时候需要求解的线性电路数量大大增加



## 用分段的思想来分析MOSFET电路



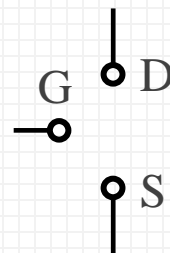
## 1. 截止区

条件

$$(u_{GS} - U_T) < 0$$

性质

$$i_{DS} = 0$$



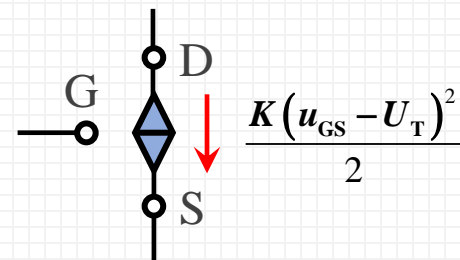
## 2. 恒流源区

条件

$$0 < (u_{GS} - U_T) < u_{DS}$$

性质

$$i_{DS} = \frac{K(u_{GS} - U_T)^2}{2}$$



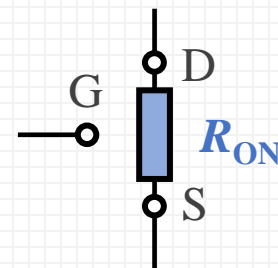
## 3. 电阻区

条件

$$(u_{GS} - U_T) > u_{DS}$$

性质

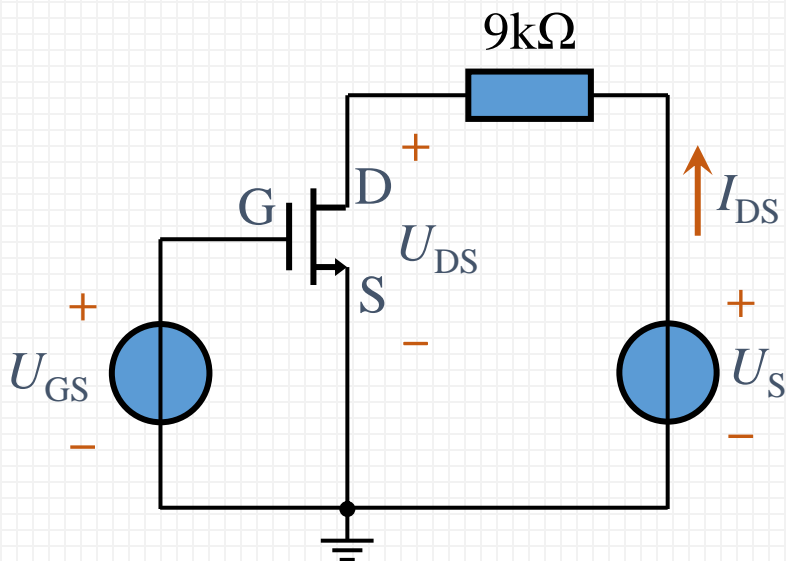
$$R_{ON}$$





**问题：** 给定MOSFET元件参数和 $U_S$ 数值， $U_{GS}$ 取不同值时，如何确定MOSFET工作区间？

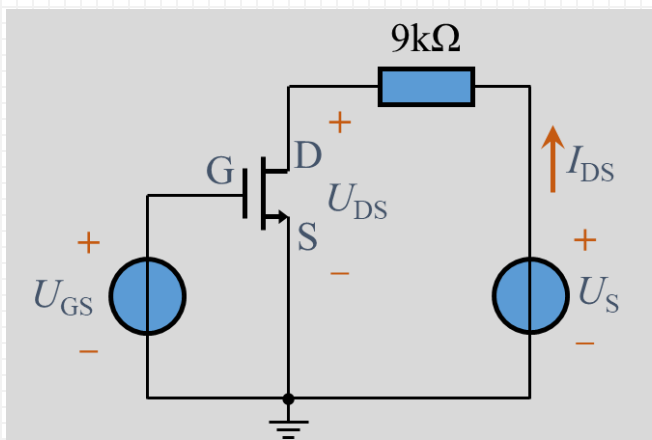
假设-检验！





**例1:**  $U_S = 5V$ ,  $U_{GS} = 1.3V$ ,  $K = 0.5mA/V^2$ ,  $U_T = 1V$ ,  $R_L = 9k\Omega$ ,  $R_{ON} = 1k\Omega$

$U_{GS} > U_T \rightarrow$  D、S导通

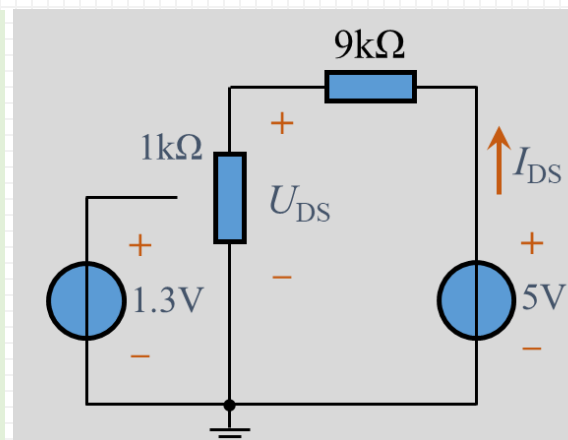


假设“可变电阻区”

$$U_{DS} < (U_{GS} - U_T)$$

$$0.5 > (1.3 - 1)$$

假设不成立



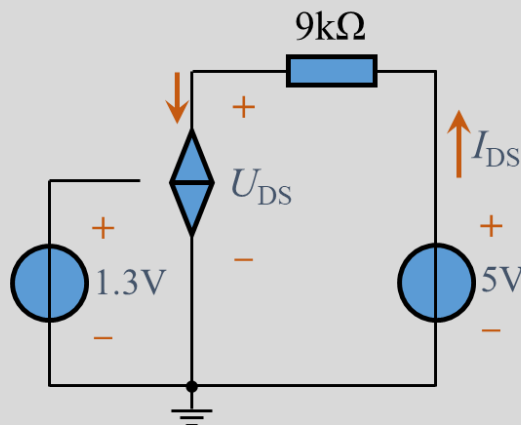
假设“恒流源区”

$$(U_{GS} - U_T) < U_{DS}$$

$$(1.3 - 1) < 4.80$$

假设成立

$$I_{DS} = \frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2}$$



$$U_{DS} = U_S - I_{DS}R_L$$

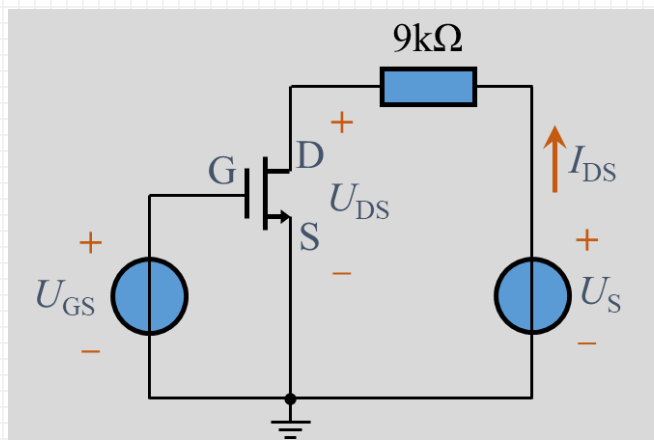
$$U_{DS} = 5 - 9000 \frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2}$$

$$= 5 - \frac{0.5 \times (1.3 - 1)^2}{2} \times 9 = 4.80V$$

输入  $U_{GS}$  为 “1” 时, 输出  $U_{DS}$  为 “0”  $\longrightarrow$  反相器

例2:  $U_S = 5V$ ,  $U_{GS} = 5V$ ,  $K = 0.5mA/V^2$ ,  $U_T = 1V$ ,  $R_L = 9k\Omega$ ,  $R_{ON} = 1k\Omega$

$U_{GS} > U_T \longrightarrow$  D、S导通

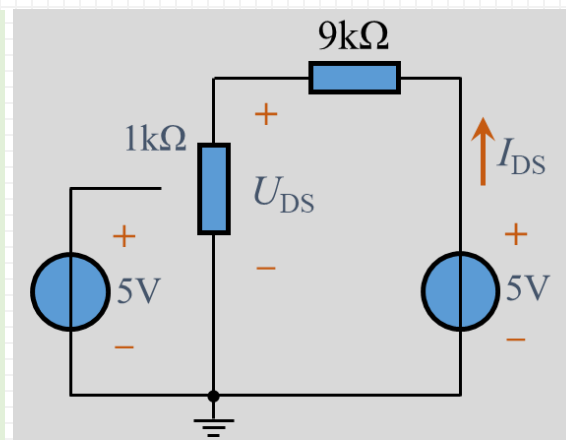


假设 “可变电阻区”

$$U_{DS} < (U_{GS} - U_T)$$

$$0.5 < (5 - 1)$$

假设成立



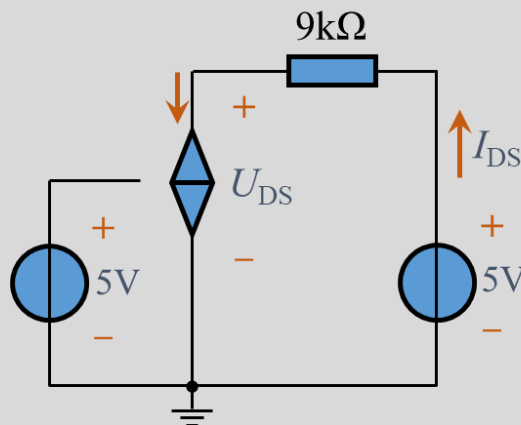
假设 “恒流源区”

$$(U_{GS} - U_T) < U_{DS}$$

$$(5 - 1) > -31$$

假设不成立

$$I_{DS} = \frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2}$$



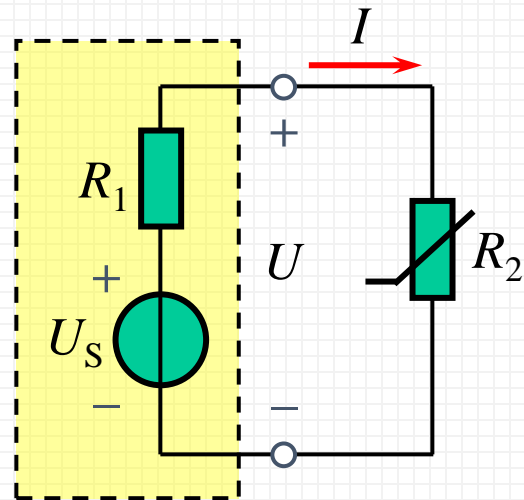
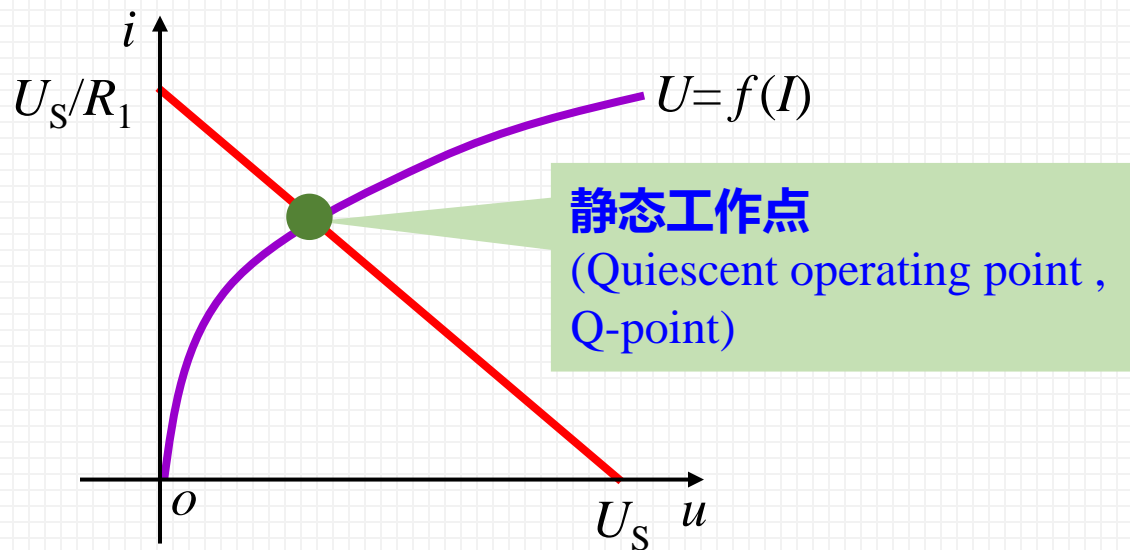
$$U_{DS} = U_S - I_{DS}R_L$$

$$U_{DS} = 5 - 9000 \frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2}$$
$$= 5 - \frac{0.5 \times (5 - 1)^2}{2} \times 9 = -31V$$



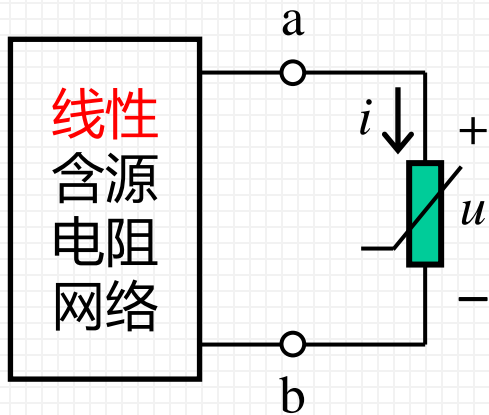
## 4 非线性电阻电路的图形解法

用图解法求解非线性电路

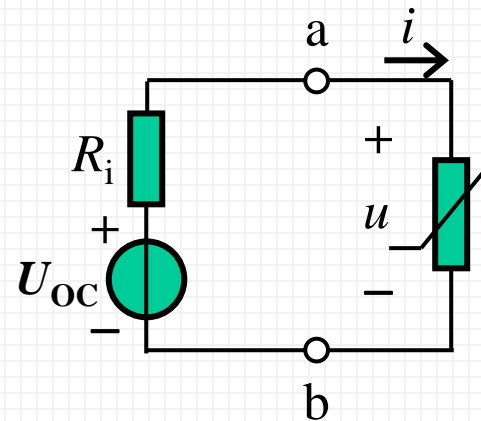


$$U = U_S - R_1 I$$

$$R_2: U = f(I)$$

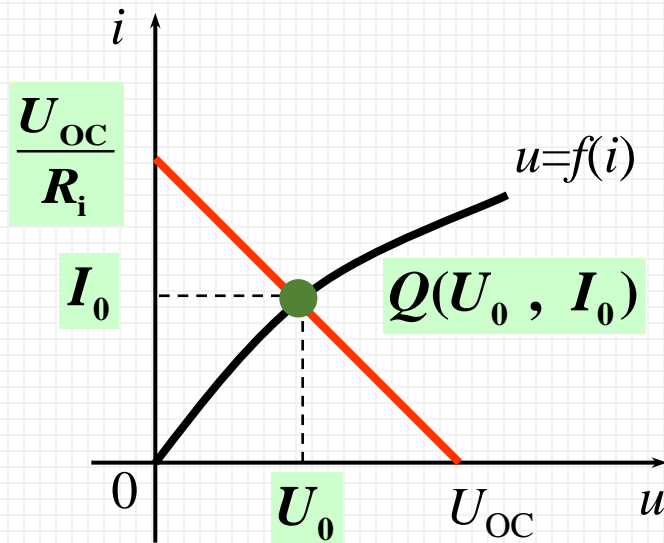


戴维南定理



$$u = U_{OC} - R_i i$$

其特性为一直线。



两曲线交点坐标  $(U_0, I_0)$  即为所求解答。



## 图形解法的特点

- 步骤
  - 将除非线性元件外的线性电路用戴维南等效
  - 在同一幅图中画出戴维南电路和非线性元件的 $u-i$ 关系，其交点即为非线性电路的电压和电流（工作点, Q-point）
- 优点
  - 简单
  - 直观，物理意义清晰
- 缺点
  - 精度上有牺牲
  - 适宜求解只在一个端口上含有非线性电阻的电路

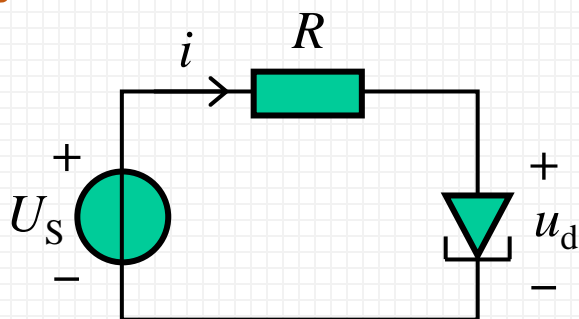


## 5 非线性电阻电路解的存在性与唯一性

线性电路一般有唯一解。

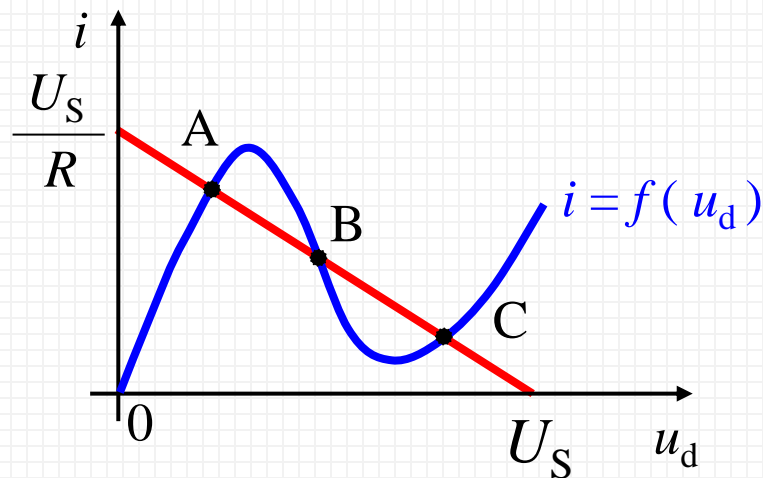
非线性电阻电路可以有多个解或没有解。

### 例1



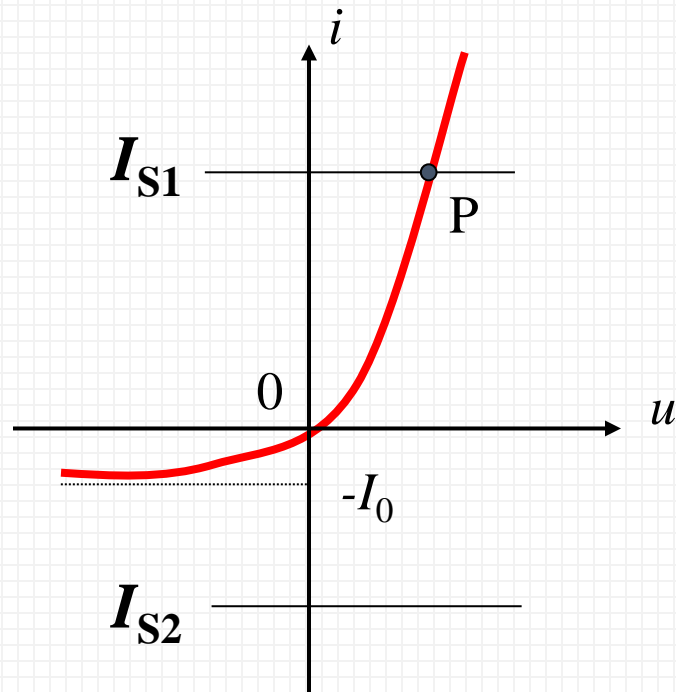
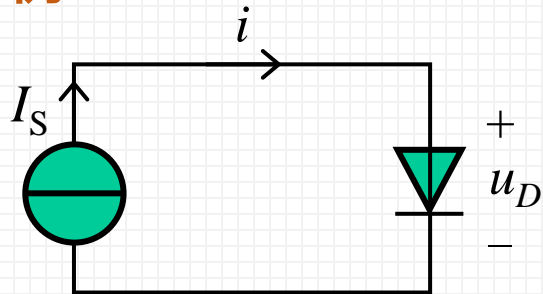
$$Ri + u_d = U_S$$

$$i = f(u_d)$$





## 例2



当  $I_S > -I_0$  时 有唯一解

当  $I_S < -I_0$  时 无解

非线性电阻电路有唯一解的充分条件请参考教材4.1.2节



**T H A N K**