微积分（2）期中考题

系名________________ 班级______________ 姓名______________ 学号___________

一．填空题（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\log(xy)}=$____________________________。

2. 函数 $f(x,y)=x^y y^x$ 在 $(1,2)$ 点的全微分为_______________________________。

3. 设函数 $f(u,v)$ 可微，函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$ 确定，则偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________________________________。

4. 函数 $x^2+2y^2+3z^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处函数值**递增**最快的方向为_______________________。

5. 向量值函数 $\mathbf{f}(x,y)=(x^3y^2,x^3-y^2)$ 的 Jacob 矩阵 $J\mathbf{f}=$__________________________。

6. $u=f(x^2+y^2)$，其中 f 为 $C^{(2)}$ 类函数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$_____________________________。

7. $y=y(x), z=z(x)$ 为由方程组 $\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 确定的隐函数，$y\neq z$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$______________________。

8. 函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $(x,y)=(1,1)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式为

____。

9. 曲面 $x=u+e^{u+v}, y=u+v, z=e^{u-v}$ 在 $(2,0,e^2)$ 点的切平面方程为________________。

10. 曲面 $x^2+y^2+\sin y=z^2$ 在 $(1,0,1)$ 点的切平面方程为____________________________。

11. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\ z=xy\end{cases}$ 在点 $(1,2,2)$ 处的切线方程为______________________________。

12. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 处的法线方程为______________________。

13. 设 $\alpha>0$，已知广义积分 $\int_1^{+\infty}\sin(x^\alpha)dx$ 收敛，则 α 的范围为____________________。

14. 设 $p>0,q>0,r>0$，利用 Beta 函数，积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^r)^{q-1}dx$ 可以表示为

______________________________。

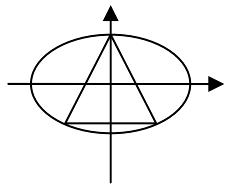
15. 设 $F(x)=\int_x^{2x}e^{\sin(xy)}dy$，则 $F'(x)=$____________________________。

二．计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 求函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点的偏导数 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$，并考察 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的连续性和可微性。

2. 设 φ 为二阶连续可微函数，$z=z(x,y)$ 为由方程 $x^3+y^3+z^3=\varphi(z)$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，并说明隐函数存在的条件。

3. （如图）求椭圆 $x^2+3y^2=12$ 的一个内接等腰三角形,使其底边平行于长轴,且其面积最大。



4. 已知 $0<a<b$，$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，求积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}dx$。

三．证明题

1. （7 分）证明如下二元函数的罗尔（Rolle）定理：设二元函数 $f(x,y)$ 在开圆盘 D_R：$x^2+y^2<R^2$ 内可微，在闭圆盘 $\overline{D_R}$：$x^2+y^2\le R^2$ 上连续。若 $f(x,y)$ 在圆周 ∂D_R：$x^2+y^2=R^2$ 上取常数值，则 $f(x,y)$ 在开圆盘 D_R 内必有驻点，即存在点 $(\xi,\eta)\in D_R$，使得 $\nabla f(\xi,\eta)=0$。

2. （8 分）证明：当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时，广义积分 $\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x^p}\right)-\dfrac{1}{1+x^p}\right]dx$ 收敛。