习题讨论课5解答：含参积分与含参广义积分

一. 含参积分

例 1. 设 $f(x)=\int_0^x\left[\int_t^x \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$, 求 $f'(x)$ 与 $f(x)$。

解. 任取 $R>0$，考虑矩形 $|x|\le R, |t|\le R$。

记 $g(x,t)=\int_t^x \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s$，$F(u,x)=\int_0^u g(x,t)\mathrm{d}t$。则 $f(x)=F(x,x)$。

因为

$$g_x(x,t)=\mathrm{e}^{-x^2},\qquad g_t(x,t)=-\mathrm{e}^{-t^2}$$

连续，从而 $g\in\mathscr{C}^1$，所以

$$F_u(u,x)=g(x,u)=\int_u^x \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s,\quad F_x(u,x)=\int_0^u \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}t.$$

所以

$$\begin{aligned}
f'(x)&=(F(x,x))'=F_u(x,x)+F_x(x,x)\\
&=\int_x^x \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s+\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}ds\\
&=x\mathrm{e}^{-x^2},
\end{aligned}$$

因此

$$f(x)=f(0)+\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

□

解法2.

$$\begin{aligned}
\int_0^x\int_t^x \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t&=\int_0^x\int_0^x \mathrm{e}^{-s^2}1_{s\ge t}\mathrm{d}s\mathrm{d}t\\
&=\int_0^x\int_0^x \mathrm{e}^{-s^2}1_{s\ge t}\mathrm{d}t\mathrm{d}s\\
&=\int_0^x\int_0^s \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}s=\int_0^x s\mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s=\frac{1-\mathrm{e}^{-x^2}}{2}.
\end{aligned}$$

□

例 2. 设 $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$。对 $x\approx\frac{\pi}{4}$，估算 $f(x)$。

解. 记 $F(u,v,x)=\int_v^u \mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$。则 $F\in\mathscr{C}^1$，且

$$\begin{aligned}
&F_u(u,v,x)=\mathrm{e}^{x\sqrt{1-u^2}},\\
&F_v(u,v,x)=-\mathrm{e}^{x\sqrt{1-v^2}},\\
&F_x(u,v,x)=\int_v^u\sqrt{1-y^2}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (F(\cos x, \sin x, x))' \\
&= \mathrm{e}^{x\sqrt{1-\cos^2 x}} - \mathrm{e}^{x\sqrt{1-\sin^2 x}} + \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-y^2}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y \\
&= \mathrm{e}^{x|\sin x|} - \mathrm{e}^{x|\cos x|} + \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-y^2}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

对 $x \approx \frac{\pi}{4}$，

$$\begin{aligned}
f''(x) = &\left(\mathrm{e}^{x\sin x} - \mathrm{e}^{x\cos x} + \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-y^2}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y\right)'_x \\
= &\mathrm{e}^{x\sin x}(\sin x + x\cos x) - \mathrm{e}^{x\cos x}(\cos x - x\sin x) \\
&+ \sqrt{1-\cos^2 x}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-\cos^2 x}}(-\sin x) - \sqrt{1-\sin^2 x}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-\sin^2 x}}\cos x \\
&+ \int_{\sin x}^{\cos x} (1-y^2)\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

所以 $f(\frac{\pi}{4}) = f'(\frac{\pi}{4}) = 0$， $f''(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4\sqrt{2}}}$，因此

$$f(x) \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - 1\right)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4\sqrt{2}}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2, \quad x \approx \frac{\pi}{4}.$$

□

例 3. 求 $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^{1+a}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+a^2}$。

解. 记 $F(a,u,v) = \int_v^u \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+a^2}$。则 $F \in \mathscr{C}^1$。复合函数$F(a,a+1,a)$ 关于 a 连续。

$$\lim_{a\to 0}\int_a^{1+a}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+a^2} = F(0,1,0) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

□

例 4. 设 $f \in \mathscr{C}[0,1]$，考察函数 $F(t) = \int_0^1 \frac{tf(x)}{x^2+t^2}\mathrm{d}x$ 的连续性。

解. 记 $h(x,t) = \frac{tf(x)}{x^2+t^2}$。则 $h(x,t)$ 在 $[0,1]\times\mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}$ 内处处连续。所以 F 在 $t \neq 0$ 处连续。

下面讨论 F 在 $t=0$ 处的连续性。

因为 $h(x,0) = 0$（$\forall x \in (0,1]$），所以 $F(0) = \int_0^1 h(x,0)\mathrm{d}x = 0$。

先观察 f 为常值函数时的情形，设 $f=1$，则

$$F(t) = \int_0^1 \frac{t}{x^2+t^2}\mathrm{d}t = \arctan\frac{1}{t},$$

所以 $\lim\limits_{t\to 0^+} F(t) = \frac{\pi}{2}$。

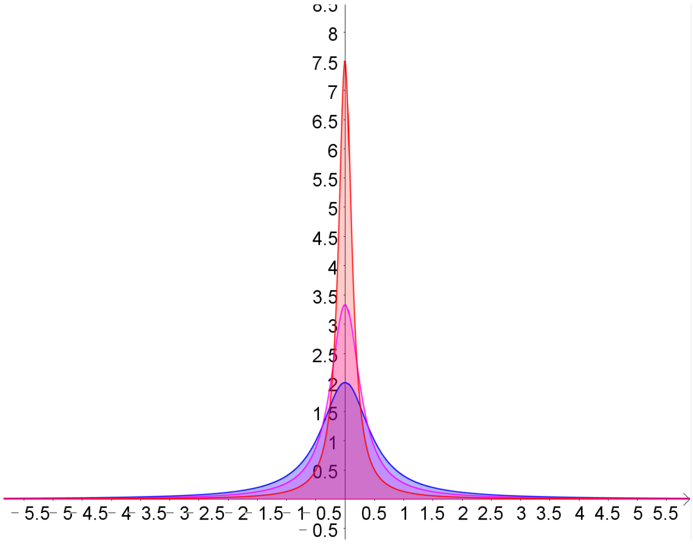

图 1: 当 t 很小时，$f_t(x)=\frac{t}{x^2+t^2}$ 集中于 $x=0$ 附近

再观察 $\frac{t}{x^2+t^2}$ 作为 x 的函数的行为，如图所示。

因此猜测：当 t 很小时，$F(t)$ 由 f 在 $x=0$ 附近的值决定。

对任意 $\varepsilon>0$，取 $0<\delta<1$ 使得 $0\le x\le\delta$ 时，$|f(x)-f(0)|<\varepsilon$。记 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$。则

$$\begin{aligned}\left|F(t)-\int_0^1\frac{tf(0)}{x^2+t^2}\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^\delta\frac{t(f(x)-f(0))}{x^2+t^2}\mathrm{d}x+\int_\delta^1\frac{t(f(x)-f(0))}{x^2+t^2}\mathrm{d}x\right| \\ &\le \varepsilon\int_0^\delta\left|\frac{t}{x^2+t^2}\right|\mathrm{d}x+2M\int_\delta^1\left|\frac{t}{x^2+t^2}\right|\mathrm{d}x \\ &\le \varepsilon\frac{\pi}{2}+2M\left(\arctan\frac{1}{|t|}-\arctan\frac{\delta}{|t|}\right)\end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{t\to0}\arctan\frac{1}{|t|}=\frac{\pi}{2}$，所以存在 $\delta_1>0$ 使得 $0<|t|<\delta_1$ 时，$\left|\arctan\frac{1}{|t|}-\frac{\pi}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{8M}$。因此当 $0<|t|<\delta\delta_1$ 时，

$$\left|\arctan\frac{1}{|t|}-\arctan\frac{\delta}{|t|}\right|<\frac{\varepsilon}{4M},$$

从而

$$\left|F(t)-\int_0^1\frac{tf(0)}{x^2+t^2}\mathrm{d}t\right|<\varepsilon.$$

而

$$\left|\int_0^1\frac{tf(0)}{x^2+t^2}\mathrm{d}t-f(0)\frac{\pi}{2}\right|=|f(0)|\left|\arctan\frac{1}{t}-\frac{\pi}{2}\right|\le M\frac{\varepsilon}{8M}<\varepsilon,$$

所以

$$\left|F(t)-f(0)\frac{\pi}{2}\right|<2\varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{t\to 0} F(t) = f(0)\frac{\pi}{2}$，从而 F 在 $t=0$ 处连续当且仅当 $f(0)=0$。 $\square$

例 5. 计算积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x} \mathrm{d}x, \quad (-1 < a < 1)$。

解. 这是一个正常积分。

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\cos x} \ln \frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1+a\cos x} + \frac{1}{1-a\cos x}\right] \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1-a^2\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2+t^2}{(1-a^2)+t^2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \qquad x = \tan t \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}.
\end{aligned}$$

故 $I(a) = I(0) + \int_0^a I'(t)\mathrm{d}t = \int_0^a \frac{\pi}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \pi \arcsin a$。 $\square$

例 6. 设 $f(t) = \int_0^1 \ln\sqrt{x^2+t^2}\mathrm{d}x$，$0 \le t \le 1$，求 $f'_+(0)$。

解. 函数 $\ln\sqrt{x^2+t^2}$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}\ln\sqrt{x^2+t^2} = \frac{t}{x^2+t^2}$ 在 $(0,0)$ 点不连续，不能直接用公式。

$$f(0) = \int_0^1 \ln x \mathrm{d}x = -1, \qquad \text{收敛的瑕积分，分部积分}$$

对 $t > 0$，

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(x^2+t^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+t^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\ln(1+t^2)}{2} - 1 + \frac{\pi t}{2} - t\arctan t = -1 + \frac{\pi}{2}t + o(t), t \to 0.
\end{aligned}$$

f 在 $t=0$ 处连续，所以 $f'_+(0) = \frac{\pi}{2}$。

思考：若把 t 的范围改为 $-1 \le t \le 1$，$f'(0)$ 是否存在？ $\square$

例 7. 求 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

解. $\int \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 不是初等函数，上述积分计算需要利用含参积分。记

$$I(a) = \int_0^1 \frac{\ln(1+ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

易得

$$I'(a) = \frac{1}{1+a^2}\left(\frac{a\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2} - \ln(1+a)\right).$$

进而可得

$$I(1) = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

$\square$

例 8. $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1 \frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim\limits_{y\to 0}\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\mathrm{d}x$ 是否成立？

解. 不能交换顺序。

$$\int_0^1 \frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{y^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}}\right),$$

而

$$\int_0^1 \lim_{y\to 0}\left(\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\right)\mathrm{d}x = 0.$$

原因：$f(x,y) = \frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}$ 在点 $(0,0)$ 处不连续。

$$f(y^2,y) = \mathrm{e}^{-y^2} \to 1, \quad y\to 0; \qquad f(0,y) = 0, \quad \forall y\neq 0.$$

□

例 9. 设 $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$， $0\le x\le 1, 0<y\le 1$。

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

是否成立？

解.

$$f(x,y) = -f(y,x).$$

所以

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 -f(y,x)\mathrm{d}y = -\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x.$$

而

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\neq 0,$$

所以 $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y \neq \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$。 □

二、含参广义积分

两个公式：

1. Poission积分：$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，
2. Dirichlet积分：$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$。

例 10. 证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$。

证明. 记

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x,\quad a\in[0,+\infty).$$

因为 $\int_0^A\sin x\mathrm{d}x$ 有界，$\frac{1}{x}$ 单调趋于零，所以由 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛，从而关于 $a\in[0,+\infty)$ 一致收敛（因为不含参数 a）。

e^{-ax} 关于 x 单调，且一致有界（$|g(x,a)|\le 1$，$\forall x\ge 0,\forall a\ge 0$）。

所以由一致收敛的 Abel 判别法，$I(a)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 对 $a\ge 0$ 一致收敛。从而 $I(a)$ 关于 $a\in[0,+\infty)$ 连续。

下面证明对任意 $a>0$，

$$I'(a)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin x\mathrm{d}x.$$

由 Dirichlet 判别法知，对任意 $\delta>0$，$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin x\mathrm{d}x$ 关于 $a\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛。所以上式对任意 $a\ge\delta$ 成立。再由 $\delta>0$ 的任意性知，上式对任意 $a>0$ 成立。

由分部积分可得

$$I'(a)=-\frac{1}{1+a^2},\quad a>0.$$

因此

$$I(a)=I(0)+\int_0^a I'(t)\mathrm{d}t=I(0)-\int_0^a\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=I(0)-\arctan a.$$

另由

$$|I(a)|\le\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\to 0,\quad a\to+\infty,$$

所以

$$0=I(0)-\frac{\pi}{2},$$

从而 $I(0)=\frac{\pi}{2}$。 □

例 11. 求两个 Laplace 积分：

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x,\quad J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x,\quad \alpha>0.$$

解. 先减少参数，令 $x=\alpha t$，$u=\alpha\beta$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ut)}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

记

$$K(u)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ut)}{t^2+1}\mathrm{d}t,\quad L(u)=\int_0^{+\infty}\frac{t\sin(ut)}{t^2+1}\mathrm{d}t,$$

则 $I(\beta)=\frac{1}{\alpha}K(\alpha\beta)$，$J(\beta)=L(\alpha\beta)$。

因为
$$\left|\frac{\cos(ut)}{t^2+1}\right| \leq \frac{1}{t^2+1},$$
所以由 Weierstrass 判别法知，$K(u)$ 关于任意 $u \in \mathbb{R}$ 一致收敛。

易见
$$\frac{\pi}{2} - L(u) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ut)}{t}\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(ut)}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(ut)}{t(t^2+1)}\mathrm{d}t$$
对 $u \in \mathbb{R}$ 一致收敛。而
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sin(ut)}{t(t^2+1)}\right) = \frac{\cos(ut)}{t^2+1},$$
所以
$$\left(\frac{\pi}{2} - L(u)\right)'_u = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ut)}{t^2+1}\mathrm{d}t = K(u),$$
又
$$K'(u) = -L(u).$$
所以
$$\begin{cases} K'' = \left(K + \frac{\pi}{2}u\right)'' = \left(K' + \frac{\pi}{2}\right)' = \left(-L + \frac{\pi}{2}\right)' = K, \\ K(0) = \frac{\pi}{2}, \qquad K'(0) = -L(0) = 0, \end{cases}$$
解得
$$K(u) = \frac{\pi}{4}\left(\mathrm{e}^u + \mathrm{e}^{-u}\right) = \frac{\pi}{2}\cosh u, \quad L(u) = \frac{\pi}{2}\sinh u.$$
于是 $I(\beta) = \frac{\pi}{2\alpha}\cosh(\alpha\beta), J(\beta) = \frac{\pi}{2}\sinh(\alpha\beta)$。 $\square$

例 12. 求 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\cos(2\beta x)\mathrm{d}x$。

解. 记上述积分为 $I(\beta)$。则
$$I'(\beta) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} 2x\sin(2\beta x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \sin(2\beta x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x^2} = -2\beta I(\beta),$$
又 $I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，所以 $I(\beta) = I(0)\mathrm{e}^{-\beta^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\beta^2}$。 $\square$

例 13. 证明积分 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}\mathrm{d}x$ 在区间 $[-a, a]$ 上非一致收敛，其中 $a > 0$。（注：这是教材第104页习题2.1第8题）（提示：利用 Dirichlet 积分公式 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$）。

证明. 假设积分 $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x}\mathrm{d}x$ 在区间 $[-a, a]$ 上是一致收敛。

因为 $f(x,t) = \begin{cases} \frac{\sin(tx)}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ 关于 t, x 连续，所以 $I(t)$ 连续。

但是，当 $t > 0$ 时，$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{tx} d(tx) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$；当 $t < 0$ 时，$I(t) = -\frac{\pi}{2}$。因此 $I(t)$在 $t = 0$ 处间断。这就得到了一个矛盾。证毕。 $\square$

问题：上述积分在 $t\in(0,1)$ 上一致收敛吗？

对任何 $\delta>0$，积分 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x}\mathrm{d}x$ 对 $t\in[\delta,+\infty)$ 一致收敛。这可以用 Dirichlet 判别法验证。也可以采取如下分部积分

$$\int_1^A\frac{\sin(tx)}{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{t}\int_1^A\frac{1}{x}\mathrm{d}\cos(tx)=-\frac{\cos(tx)}{tx}\bigg|_1^A-\int_1^A\frac{\cos(tx)}{x^2}\mathrm{d}x.$$

该积分对 $t\in(0,\delta)$ 不一致收敛，也可以从上述分部积分看出来。

例 14. 利用积分号下求导方法，计算积分 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$。（课本第115页第二章总复习题第4题（2））

解. 解：显然 $I(a)$ 是奇函数，$I(0)=0$。

容易验证，对于上述积分，积分号下求导定理的条件满足。于是我们有：对 $a>0$，

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\tan^2 x}=\int_0^{+\infty}\frac{a\mathrm{d}u}{(1+u^2)(a^2+u^2)}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+a}.$$

又 $I(0)=0$，所以 $I(a)=\frac{\pi\ln(1+a)}{2}$。所以

$$I(a)=\begin{cases}\frac{\pi\ln(1+a)}{2}, & a\ge 0;\\ -\frac{\pi\ln(1-a)}{2}, & a<0.\end{cases}$$

解答完毕。 □

例 15. 设 $f(x,t)$ 在区域 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续。假设积分 $I(t)=\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 对任意 $t\in[\alpha,\beta)$ 都收敛，但积分 $\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\mathrm{d}x$ 发散。证明积分 $I(t)$ 关于 $t\in[\alpha,\beta)$ 非一致收敛。（课本第103-104页习题2.1第6题）.

证明. 反证法。假设积分 $I(t)$ 关于 $t\in[\alpha,\beta)$ 一致收敛，则根据 Cauchy 一致收敛准则可知，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists B=B(\varepsilon)\ge a$，使得

$$\left|\int_{B_1}^{B_2}f(x,t)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\quad \forall B_1,B_2\ge B,\forall t\in[\alpha,\beta).$$

令 $t\to\beta^-$，则由上述不等式以及含参积分的连续性得到 $\left|\int_{B_1}^{B_2}f(x,\beta)\mathrm{d}x\right|\le\varepsilon$。这表明积分$\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\mathrm{d}x$收敛，与假设相矛盾。 □

证法2. 记 $F(B,t)=\int_a^B f(x,t)\mathrm{d}t$。由已知，对任意 $t\in[\alpha,\beta)$

$$\lim_{B\to+\infty}F(B,t)$$

存在。假设这极限对 $t\in[\alpha,\beta)$ 一致。

对任意 $B>a$，由于 $f:[a,B]\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ 连续，所以

$$\lim_{t\to\beta}\int_a^B f(x,t)\mathrm{d}t=\int_a^B\lim_{t\to\beta}f(x,t)\mathrm{d}t=\int_a^B f(x,\beta)\mathrm{d}t,$$

由第一次习题课关于累次极限的定理，以下两个极限存在且相等

$$\lim_{t\to\beta}\lim_{B\to+\infty}F(B,t)=\lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x,\beta)\mathrm{d}t=\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\mathrm{d}t.$$

但这与已知 $\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\mathrm{d}t$ 发散矛盾。 $\square$