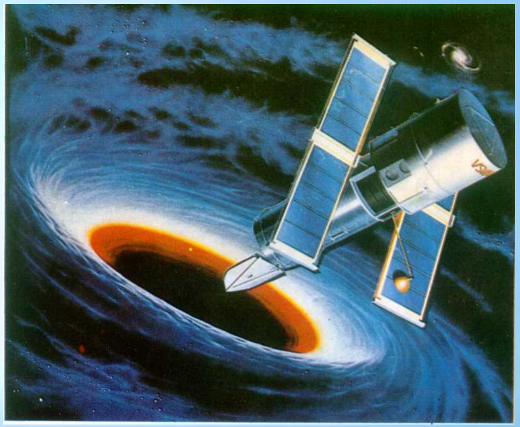
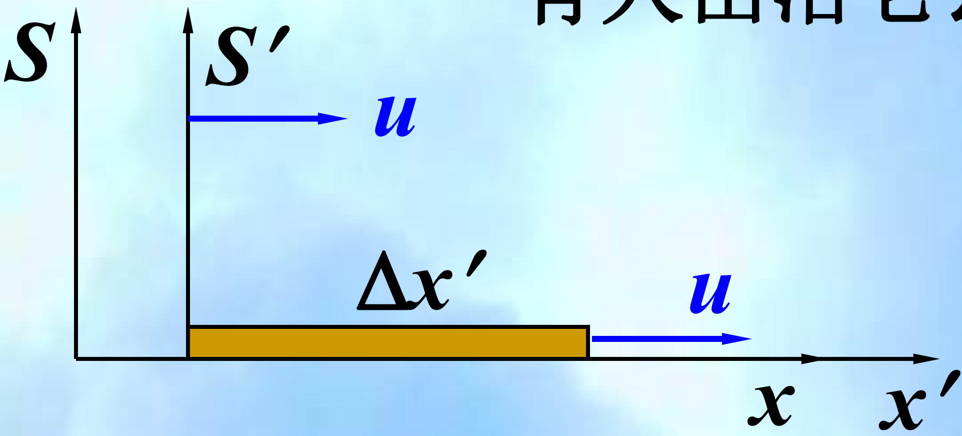
习题课

狭义相对论



1 如图， 已知 S' 中棒长为$\Delta x'$，

有人由洛仑兹变换得S中棒长：



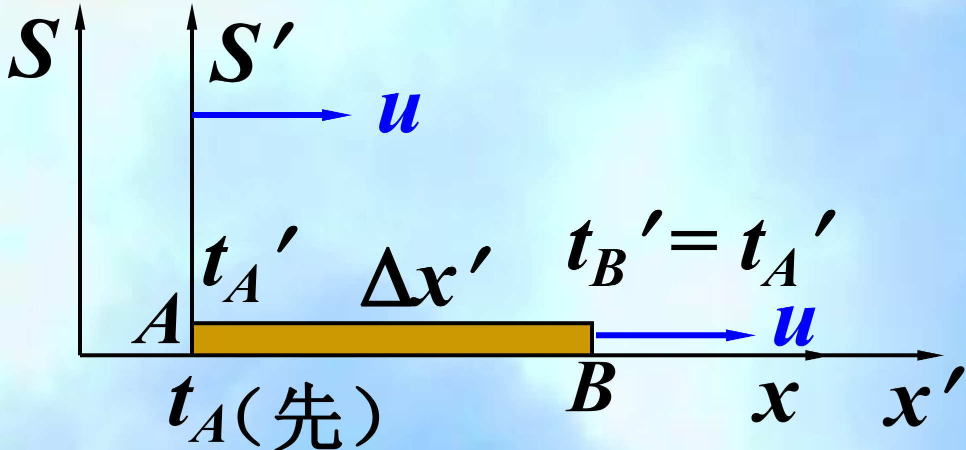
$$\Delta x = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

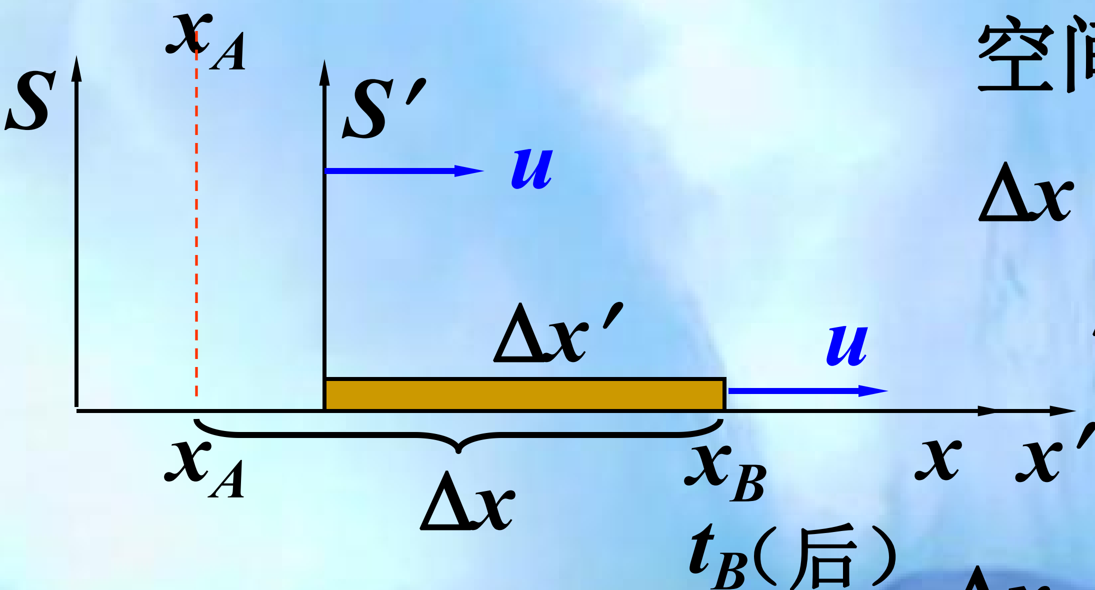
令$\Delta t'=0$，得棒的动长为 $\Delta x = \dfrac{\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$，对吗？

此时的 Δx 的意义如何？

分析：$\Delta t' = t'_B - t'_A = 0$，必然 $\Delta t = t_B - t_A \neq 0$。

（后）（先）





所以 Δx不是棒的动长

$\Delta x = x_B - x_A$是两个不同时刻发生的事件的空间间隔。令$\Delta t = 0$，

Δx 才是棒的动长。

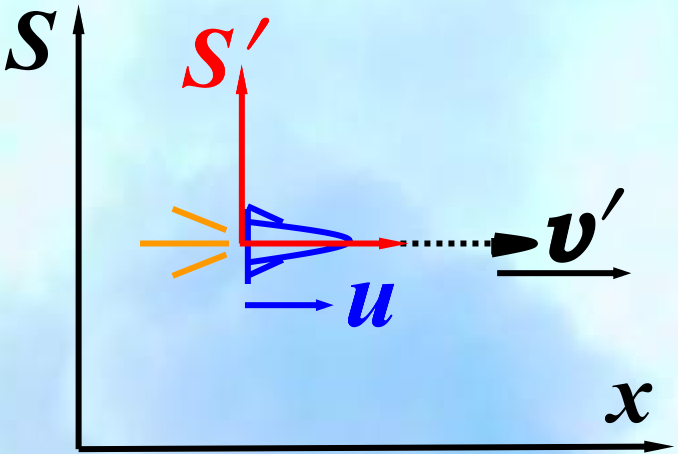
$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - u\Delta t)$$

$$= \gamma\,\Delta x$$

$$\underset{\text{动长}}{\Delta x} = \frac{\Delta x'}{\gamma} = \underset{\text{静长}}{\Delta x'}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

2 已知：火箭 (S'系) 对 地 (S 系) 速 度 为

$u = 0.6c$ ，炮弹相对火箭速度 $v' = 0.9c$ 。



求：地面上看炮弹速度

$$v = ?$$

解：由速度变换，在S 系中有

$$v = \frac{v' + u}{1 + \dfrac{uv}{c^2}} = \frac{0.9c + 0.6c}{1 + 0.6 \times 0.9} = \frac{1.5\ c}{1.54} \approx 0.97c$$

3. 一宇宙飞船的原长为 L'，以速度 u 相对于地面作匀速直线运动。有个小球从飞船的尾部运动到头部，宇航员测得小球的速度为 v'

求：（1）宇航员测得的小球飞行时间$\Delta t'$

（2）地面观察者测得的小球飞行时间Δt

有人作如下之解：

1) $$\Delta t' = \frac{L'}{v'}$$ √ 对否？

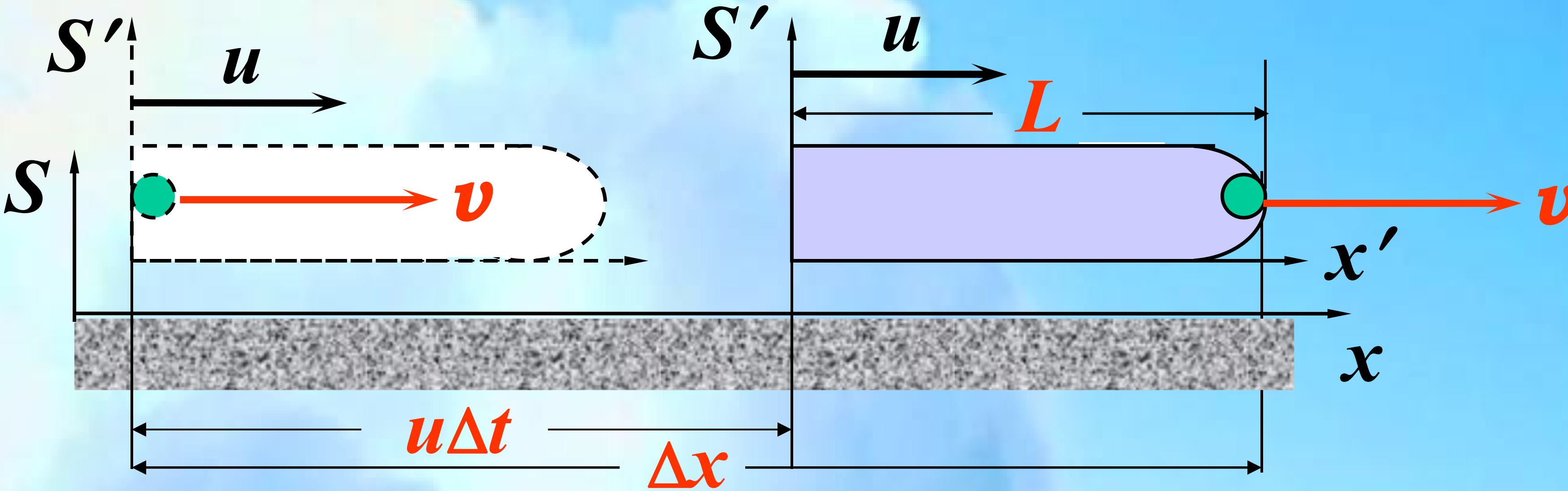
2) 用与1)相同的方法求地面测的时间

$$\boxed{\Delta t = \frac{L}{v}}$$ 对否？ √

$$\boxed{v = \frac{u + v'}{1 + \frac{u}{c^2} v'}}$$ √

$$\boxed{L = L'\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$ ×

当小球发出后，飞船相对地面又运动了一段距离 $u\Delta t$



解法一：用运动长度缩短和速度变换

$$\boxed{\Delta t=\frac{\Delta x}{v}}$$

$$\boxed{\Delta x=L'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}+u\Delta t}$$

$$\Delta t=\frac{L'\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}+u\Delta t}{\dfrac{u+v'}{1+\dfrac{u}{c^2}v'}}$$

$$\longrightarrow$$

$$\Delta t=\frac{\dfrac{L'}{v'}+\dfrac{u}{c^2}L'}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

解法二：分别用洛仑兹坐标变换和速度变换

$$\Delta x=\frac{\Delta x'+u\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\qquad v=\frac{v'+u}{1+\frac{u}{c^2}v'}$$

$$\longrightarrow \Delta t=\frac{\Delta x}{v}=\frac{L'\left(\frac{1}{v'}+\frac{u}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

解法三：直接用洛仑兹时间变换

$$\Delta t=\frac{\Delta t'+\frac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{\frac{L'}{v'}+\frac{u}{c^2}L'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$=\frac{L'\left(\frac{1}{v'}+\frac{u}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

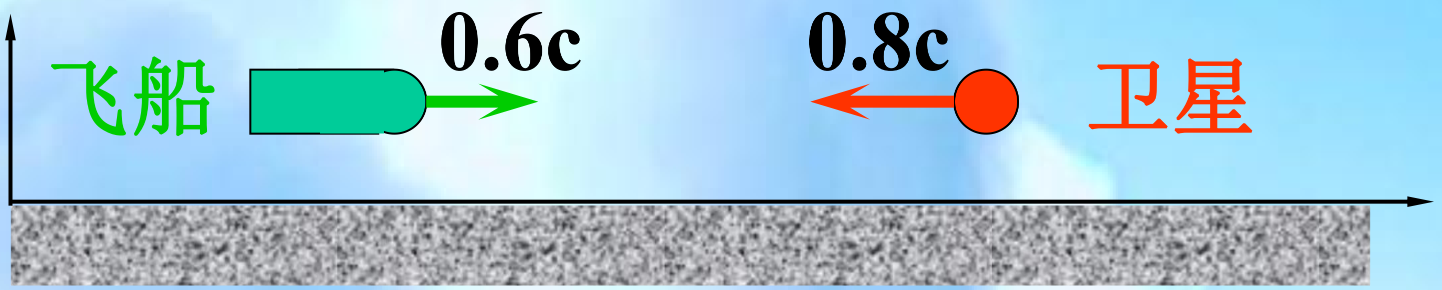
解法四：用运动长度缩短和速度变换

$$\boxed{\Delta t = \frac{L}{(v-u)}}$$

地面看小球与飞船的相对速度

$$\Delta t = \frac{L'\sqrt{1-u^2/c^2}}{\dfrac{v'+u}{1+\dfrac{u}{c^2}v'}-u} = \frac{L'\left(\dfrac{1}{v'}+\dfrac{u}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}$$

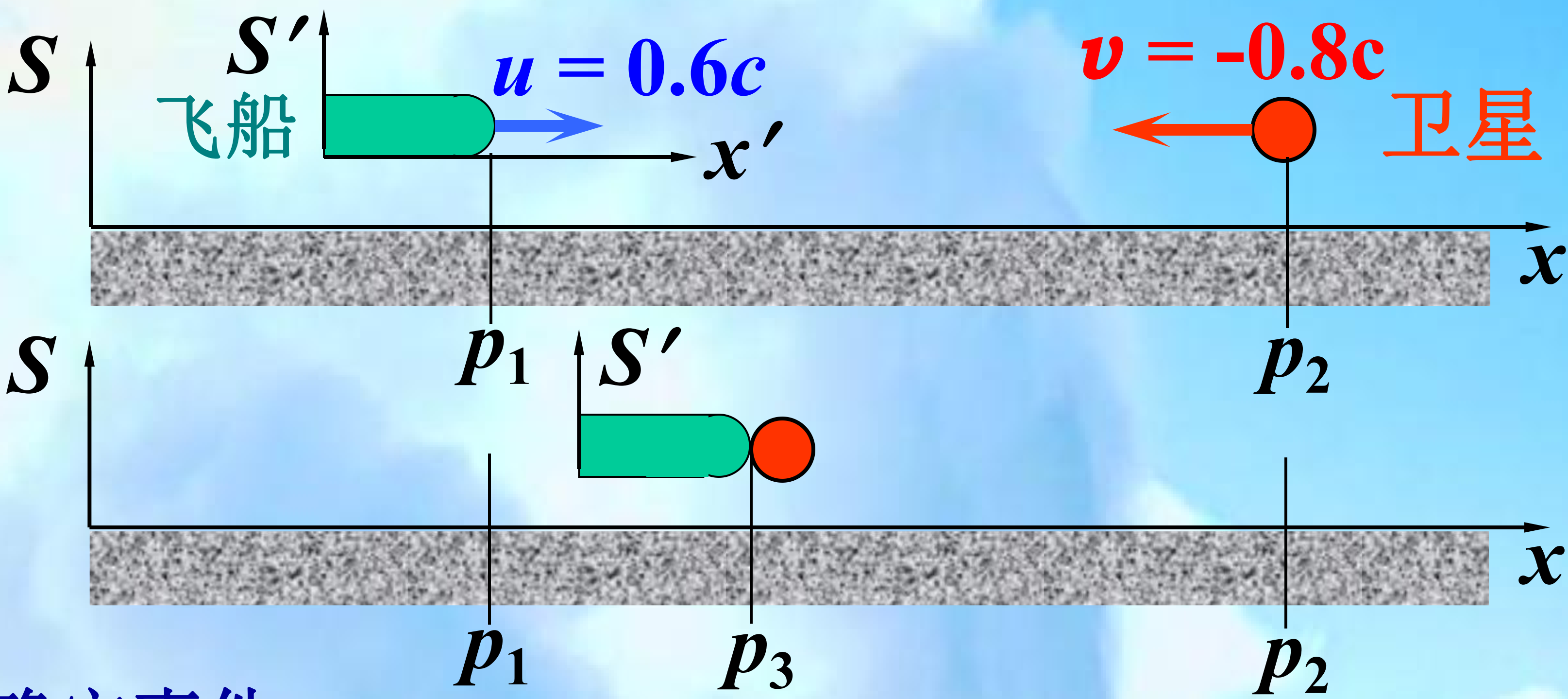
4 已知：在地面上同时发现一艘飞船和一颗卫星，它们相对地面分别以0.6*c*、0.8*c* 的速度相向而行。在地面上观察，再有 5 秒两者就要相撞。



求在飞船上看：（1）卫星的速度多大?

（2）设飞船一经被发现立即得到地面的警示，问此后再经过多少时间飞船将要和卫星相撞?

解： 设地面为 S 系，飞船为 S' 系



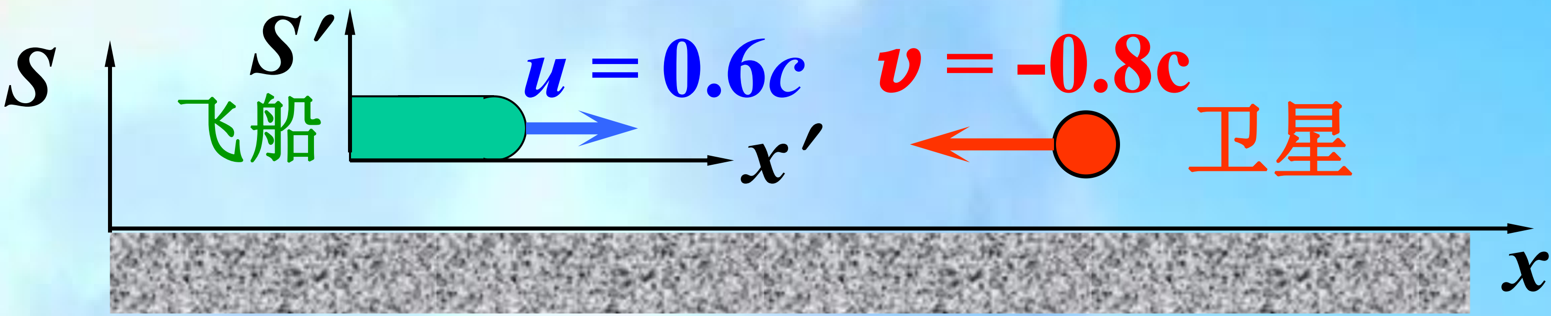
确定事件

事件1 飞船经地面$P_1(x_1, t_1)$处

事件2 卫星经地面$P_2(x_2, t_2)$处

事件3 两者相撞在地面的$P_3(x_3, t_3)$处

（1）在飞船上看卫星的速度：



根据洛仑兹速度变换

$$v' = \frac{v - u}{1 - \frac{u}{c^2} v} = \frac{-0.8c - 0.6c}{1 + \frac{0.6c}{c^2} \times 0.8c} \approx -0.946c$$

（沿 $-x'$ 方向） 小于光速 c。

（2）飞船上看，再经过多少时间相撞？

解法一：利用“原时”和”“两地时”的关系

事件1 $P_1(x_1, t_1)$

事件3 $P_3(x_3, t_3)$

$$\Delta t = t_3 - t_1 = 5s$$

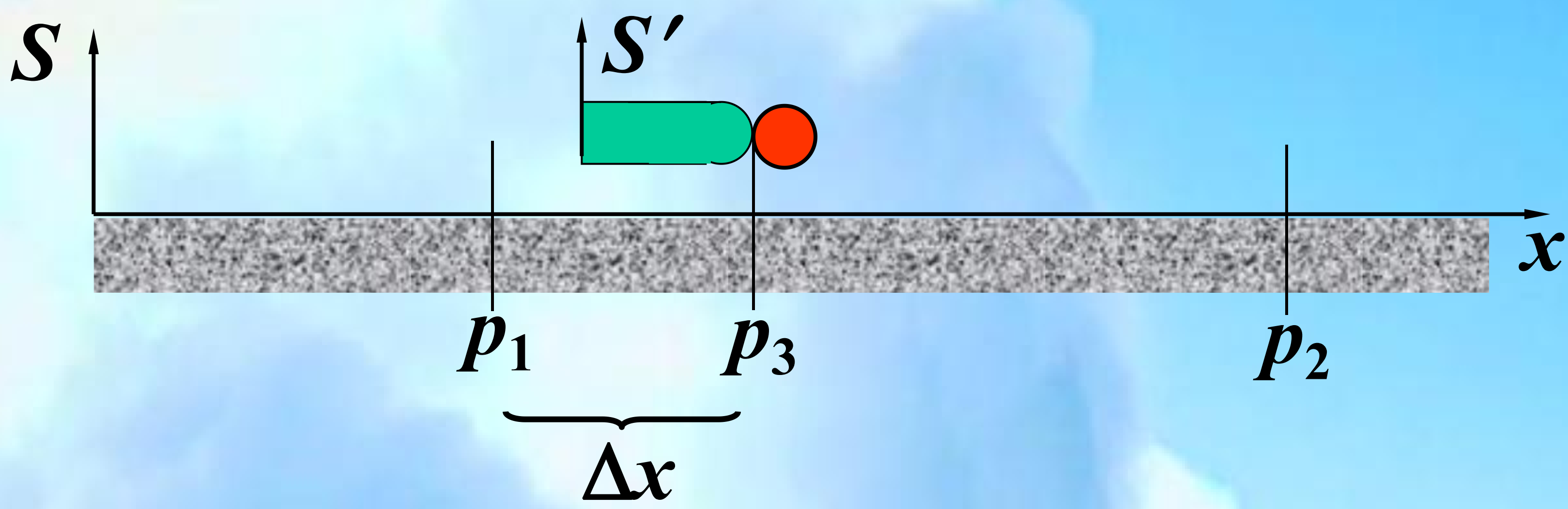
两地时

在飞船上看是原时 $\Delta t'$。

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-u^2/c^2} = 5\sqrt{1-(0.6c/c)^2}$$

$$= 5\times 0.8 = 4\,\text{s}$$

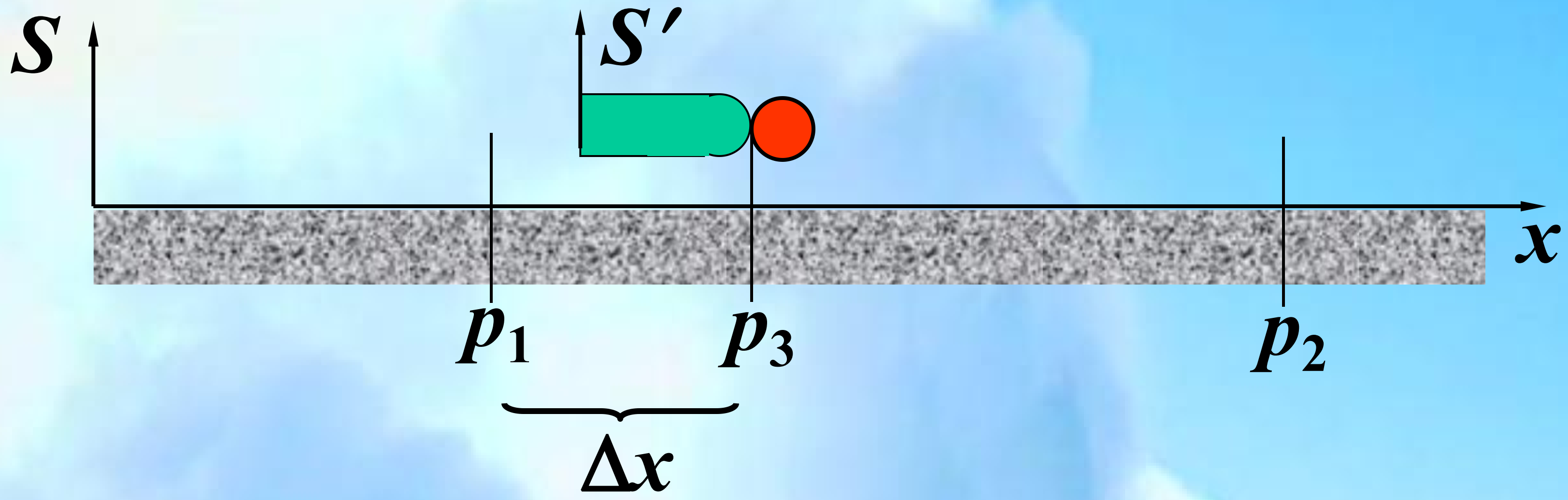
解法二：利用洛仑兹变换



$$\Delta x = x_3 - x_1 = 0.6c \times 5 = 3c$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \dfrac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{5 - \dfrac{0.6c}{c^2} \times 3c}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{0.6c}{c}\right)^2}} = 4\,\text{s}$$

解法三：利用“时空间隔ΔS”是不变量



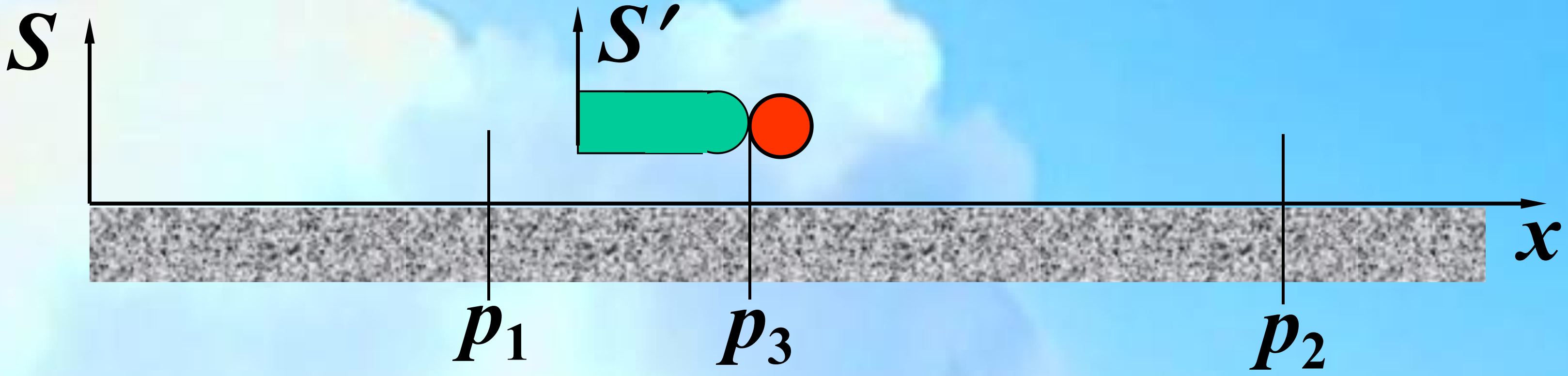
S：$\Delta t = 5\text{s}$，$\Delta x = u\Delta t$；S'：$\Delta t'$未知，$\Delta x'=0$；

$$(\Delta S')^2 = (\Delta S)^2：(c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$$

$$c^2(\Delta t')^2 - 0 = c^2(\Delta t)^2 - (u\Delta t)^2$$

$$c^2(\Delta t')^2 = c^2(5)^2 - (3c)^2$$

$$(\Delta t')^2 = 25 - 9 = 16 \longrightarrow \Delta t' = 4\,\text{s}$$



问题1:

$$t_3' - t_2' = ?$$

$$x_2 - x_3 = 0.8c \times 5 = 4c$$

$$t_3' - t_2' = \frac{t_3 - t_2 - \dfrac{u}{c^2}(x_3 - x_2)}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 9.25s$$

?

问题2：

$$l = \Delta x_{21} = x_2 - x_1 = (0.6c + 0.8c)\cdot 5s = 7c\cdot s$$

在飞船系中看，这段距离是Δx_{21}的动长：

$$l' = \Delta x'_{21} = \Delta x_{21}\cdot\sqrt{1-u^2/c^2} = 7c\times 0.8 = 5.6c\cdot s$$

在飞船系中卫星的速度是：

$$v' = -0.946c$$

$$\therefore \quad \Delta t' = l'/|v'| \approx 5.6c\cdot s/0.946c \approx 5.92s \quad ?$$

问题3：

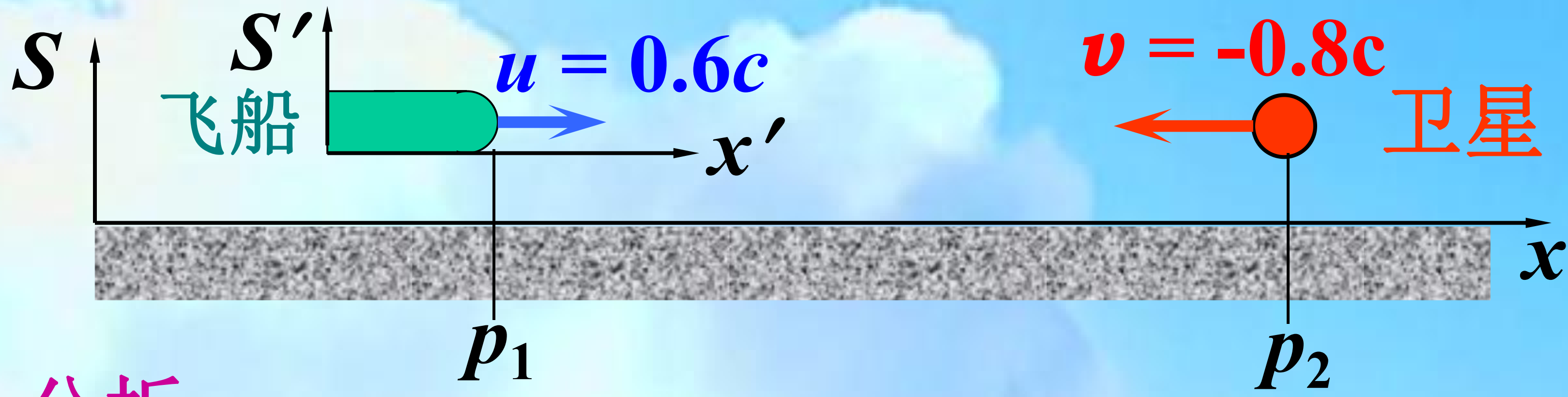
由洛伦兹变换：

$$\Delta x'_{21} = \frac{(\Delta x_{21} - u\Delta t_{21})}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$= \frac{\Delta x_{21}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{7c}{0.8} = 8.75c \cdot s$$

$$\therefore \quad \Delta t' = \Delta x'_{21} / |v'| = 9.25s$$

?



分析

问题1：

t_1', t_2'不同时　事件2先发生

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \dfrac{u}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} = -5.25$$

“—”表明，在飞船系中事件2在先，早了5.25s。

$$\Delta t' = 9.25 - 5.25 = 4s$$

问题2：

飞船系中看，事件1、2并非同时，

故$\Delta x'_{21}$不应是Δx_{21}的动长，

问题3：

$\Delta x'_{21}$不是飞船系中卫星和飞船的距离

在飞船系中，事件1、2并非同时

$$\Delta t'_{21} = -5.25\ \mathrm{s}$$

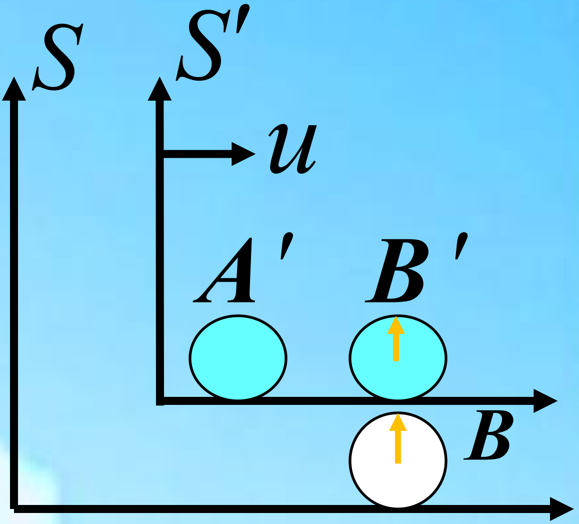
飞船与卫星距离应为： $l' = \Delta x'_{21} - |\Delta t'_{21}| \cdot |v'|$

$$\therefore\ \Delta t' = l' / |v'| = 9.25 - 5.25 = 4\ \mathrm{s}$$（同前）

5 已知： 在S'参考系中有两只钟 A', B'

与S系中的B钟先后相遇

B'与B相遇时，两钟均指零



$$\Delta x' = 3\times 10^8 m \quad u = \frac{4}{5}c$$

求： A'与B相遇时，

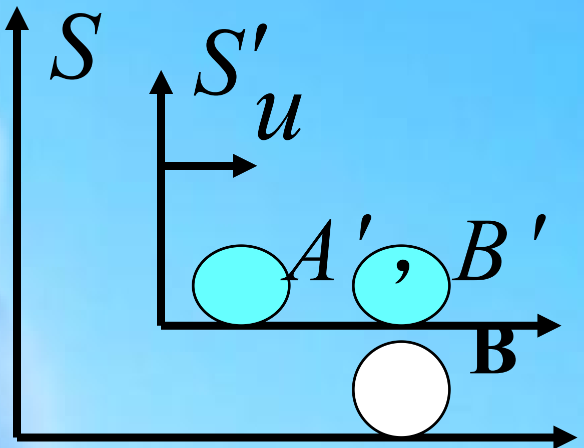
B 钟指示的时刻，A' 钟指示的时刻

解：事件1　B'与B相遇

$$(x_1', t_1')\ (x_1, t_1)$$

事件2　A'与B相遇

$$(x_2', t_2')\ (x_2, t_2)$$



两地时

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{\Delta x'}{u}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{t_2' = \frac{\Delta x'}{u} = \frac{3\times 10^8}{\frac{4}{5}\times 3\times 10^8} = \frac{5}{4}s}$$

A'钟示值

原时

$$\Delta t = \Delta t'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$$

$$\rightarrow \boxed{t_2 = \Delta t'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{5}{4}\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \frac{3}{4}s}$$

*B*的示值

6 已知：S 系同一点 x 发生两个事件，间隔为 $\Delta t = 4\text{s}$，在 S' 系此两个事件间隔为 $\Delta t' = 5\text{s}$

求：（1）S' 系对 S 系的速度 u

（2）S' 系中两个事件的空间间隔 l

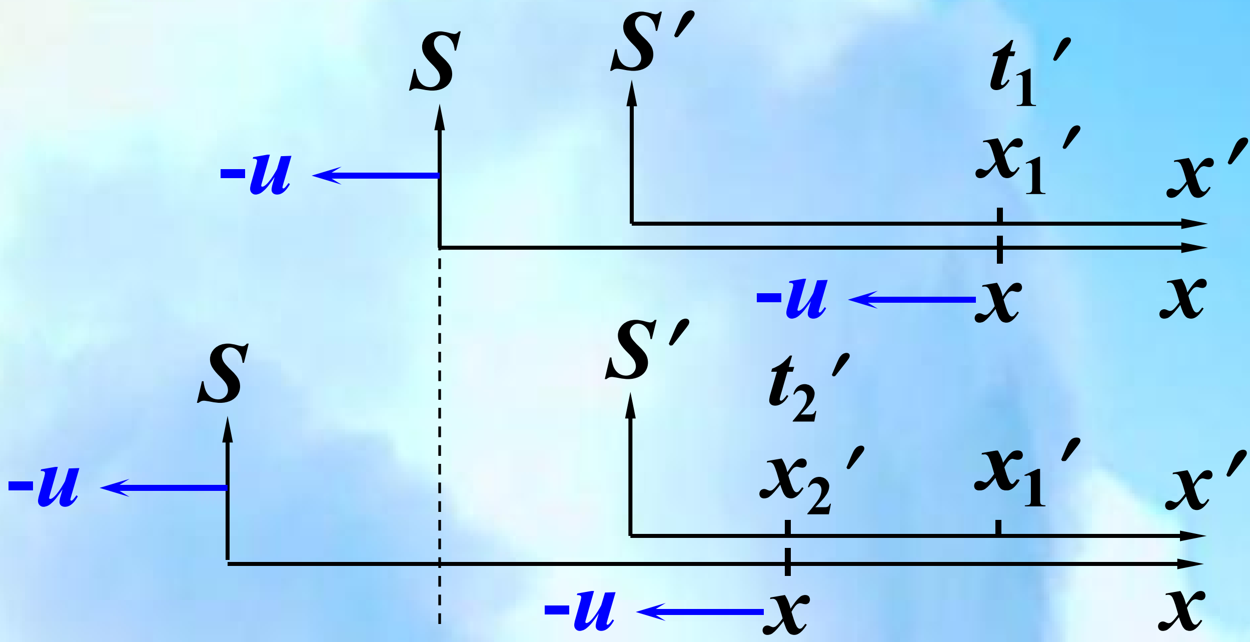
解：

（1）$\Delta t = 4\text{s}$ 是原时，$\Delta t' = 5\text{s}$ 是测时。

$$\Delta t = \Delta t' \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \longrightarrow 1 - \frac{u^2}{c^2} = \left(\frac{\Delta t}{\Delta t'}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

解得 $u = \frac{3}{5} c$

（2）在 S' 系中 x 点的速度为 $-u=-\frac{3}{5}c$



$$l=\left|x_2'-x_1'\right|=\left|\Delta t'\cdot(-u)\right|=5\,\mathrm{s}\cdot\frac{3}{5}c=9\times10^8\ \mathrm{m}$$

也可由洛仑兹变换求得

$$\left|x_2'-x_1'\right|=\left|\frac{\Delta x-u\Delta t}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right|=\left|\frac{0-\frac{3}{5}c\cdot 4\,\mathrm{s}}{\sqrt{1-(3/5)^2}}\right|=9\times10^8\ \mathrm{m}$$

7. μ子的静止质量是电子静止质量的207倍，静止时的平均寿命 $\tau_0=2\times10^{-6}$s。若它在实验室参照系中的平均寿命$\tau=7\times10^{-6}$s，试问其质量是电子静止质量的多少倍。

解

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{\tau}{\tau_0}=\frac{7}{2}$$

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{207m_{0e}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\frac{m}{m_{0e}}=\frac{207}{\sqrt{1-\beta^2}}=207\times\frac{7}{2}=725$$