微积分 A2 期中考试样题参考解答

一．填空题（每空 3 分，共 15 题）（请将答案直接填写在试题纸横线上！）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{\frac{x^2+2}{x^2+y^2}}=$______________。

解答：e^2

2. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(2,1)$ 处的微分 $\mathrm{d}f=2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$，则 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(2+2t,1+t)-f(2,1)}{t}=$____。

解答: 5

3. 若 $z=y^x$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,\mathrm{e})=$______________。

解答：2

4. 设 f 为可微且 $f'(0)=1$ ，则函数 $z(x,y)=xy+f(\dfrac{y}{x})$ 在点 $(1,0)$ 处的微分 $\mathrm{d}z=$_________。

解答：$2\mathrm{d}y$

5. 从 $(u_0,v_0)=(2,1)$ 的邻域到 $(x_0,y_0)=(3,4)$ 的邻域中，向量值函数 $\begin{cases}x=u+v\\ y=u^2v^2\end{cases}$ 有可微的逆向量值函数 $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(3,4)=$______________。

解答：2

6. 设函数 $f(u,v)\in C^{(1)}$，函数 $w(x,y,z)=f(x-y,x-z)$，则 $\operatorname{grad} w=$______________。

解答：$(f_u'+f_v',\ \ -f_u',\ \ -f_v')$

7. 已知函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿**单位向量 $\mathbf{l}$** 的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(1,1)=0$ ，则 $\mathbf{l}=$______________。

解答：$(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2})$ 或 $(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$

8. $\dfrac{1}{x+y}$ 在点 $(1,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为 ____________________。

解答：$1-(x-1+y)+(x-1+y)^2+o(\rho^2)$，其中 $\rho^2=(x-1)^2+y^2$.

或 $3-3(x+y)+(x+y)^2+o(\rho^2)$

9. 曲线$\begin{cases} x=\mathrm{e}^t \\ y=2\sin t+\cos t \\ z=1+\mathrm{e}^{3t} \end{cases}$在 $t=0$ 所对应的点处的切线方程为 ____________________。

解答: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \\ z=2+3t \end{cases}$ 或等价形式 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$

10. 曲面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 和曲面 $3x^2+y^2-z^2=0$ 的交线在点 $(1,-1,2)$ 处的法平面方程为__。

解答: $8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0$ 或者 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

11. 曲面 $\mathrm{e}^z+xy-z=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的法线方程为____________________。

解答: $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{0}$

12. 已知 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+2y^2+3z^2-2xy-z-7=0$ 确定的一个隐函数，则 $z=z(x,y)$ 的驻点 $(x_0,y_0)=$ ______________。

解答: $(0,0)$

13. 设 $I(y)=\int_y^{y^2}\mathrm{e}^{x^2y}\mathrm{d}x$， 则 $I'(1)=$ ______________。

解答: e

14. $\lim\limits_{y\to+\infty}\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\mathrm{d}x=$ ______________。

解答: 0

15. 所有 2 阶实数矩阵 $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ 组成一个 4 维线性空间 V，定义向量值函数 $\mathbf{f}:V\to V$，$\mathbf{f}(X)=X^2$，则 $\mathbf{f}(X)$ 在 $X_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 处全微分为______________________________________。

解答: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}X+(\mathrm{d}X)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$， 或 $\begin{pmatrix} 2\mathrm{d}x_{11} & \mathrm{d}x_{12} \\ \mathrm{d}x_{21} & 0 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}x_{11}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}x_{12}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}x_{21}$,

这里 $\mathrm{dX}=\begin{pmatrix} dx_{11} & dx_{12} \\ dx_{21} & dx_{22} \end{pmatrix}$

二. 计算题（每题 10 分，共 4 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

16. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，回答以下问题：

(Ⅰ) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否连续，说明理由；

(Ⅱ) 函数 $f(x,y)$ 在原点处沿任意给定的方向 $u=(a,b)$ （$a^2+b^2=1$） 的方向导数是否存在？若存在，求出这个方向导数，若不存在，说明理由；

(III) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否可微，若可微，求出这个微分，若不可微，说明理由。

解：(Ⅰ) 函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处连续。这是因为当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，我们有

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\frac{|x||y|^3}{x^2+y^2}\leq\frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}^3}{x^2+y^2}=x^2+y^2\to 0$$

(Ⅱ) 函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处沿任意给定的方向 $u=(a,b)$ （$a^2+b^2=1$） 的方向导数是存在且为零。理由如下.

$$\frac{f(ta,tb)-f(0,0)}{t}=\frac{t^4ab^3}{t^3(a^2+b^2)}=tab^3\to 0\text{，当 } t\to 0 \text{ 时。}$$

注：也可先按(III)中证得 $\nabla f\left(0,0\right)=0$，从而 $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{I}}(0,0)=\nabla f_{(0,0)}(\mathbf{I})=0$。

(III) 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时

$$|f(x,y)-f(0,0)|=\frac{|x||y|^3}{x^2+y^2}\leq\frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}^3}{x^2+y^2}=x^2+y^2=o(\sqrt{x^2+y^2}),$$

因此函数 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处可微，且 $\mathrm{d}f\left(0,0\right)=0$。解答完毕.

17. 已知方程 $2z-\mathrm{e}^z+1+\int_y^{x^2}\sin(t^2)\mathrm{d}t=0$ 在 $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,0)$ 的某个邻域中确定了一个隐函数 $z=z(x,y)$。求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)$。

解： 令 $\mathrm{F(x,y,z)}=2\mathrm{z}-e^z+1+\int_y^{x^2}\sin(t^2)dt$， 则

$\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x\sin(x^4)$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}=-\sin(y^2)$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}=2-\mathrm{e}^z$，

代入 $(1,1,0)$ 得到 $\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,0)=2\sin 1$，$\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1,0)=-\sin 1$，$\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,0)=1$。

因此 $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(1,1,0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,0)}=-2\sin 1,\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(1,1,0)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(1,1,0)}=\sin 1$。

在恒等式 $F(x,y,z(x,y))=0$ 两边对 y 求导，得到

$$0=\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=-\sin(y^2)+(2-\mathrm{e}^z)\frac{\partial z}{\partial y}$$

再对 x 求导，得到

$$0=-\mathrm{e}^z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+(2-\mathrm{e}^z)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$

或者对 $\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,z(x,y))}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y,z(x,y))}$ 求导得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\dfrac{\partial F}{\partial z}-\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}+\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}=\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

代入 $(1,1,0)$ 得到，解得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)=\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)=-2\sin^2 1=\cos 2-1$. 解答完毕.

18. 设实数 $a\geq 0$，求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$。

解: 记 $I(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$。 因为 $\dfrac{\partial}{\partial a}\left(\dfrac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^x}\right)=e^{-(a+1)x}$，且当 $a\geq 0$ 时，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(a+1)x}\mathrm{d}x$ 一致收敛，所以 $I'(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(a+1)x}\mathrm{d}x=\frac{1}{a+1}$。又因为 $I(0)=0$，所以 $I(a)=\ln(a+1)$。解答完毕.

19. 设 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$。

(Ⅰ) 求 f 在平面 R^2 所有极值；

(Ⅱ) 求 f 在曲线 $x^2-xy+y^2=1$ 上的最大值和最小值。

解：(Ⅰ) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3y$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=3y^2-3x$，解得全部驻点：$(0,0),(1,1)$。

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\quad B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-3,\quad C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y,$$

f 在 $(1,1)$ 处 Hesse 矩阵正定，所以 $f(1,1)=-1$ 为极小值；

f 在 $(0,0)$ 处，$AC-B^2=-9<0$，Hesse 矩阵不定，故 $(0,0)$ 不是极值点。（也可从 $f(x,0)=x^3$ 知 $(0,0)$ 不是极值点。）

（Ⅱ）曲线 $x^2-xy+y^2=1$ 上，$x^2+y^2=1+xy\le 1+\dfrac{x^2+y^2}{2}$，所以 $x^2+y^2\le 2$。从而 $\{(x,y)\mid x^2-xy+y^2=1\}$ 是有界闭集。f 连续，在 $\{(x,y)\mid x^2-xy+y^2=1\}$ 上存在最大值和最小值。用 Lagrange 乘子法，考虑函数 $F(x,y,\lambda)=x^3+y^3-3xy-\lambda(x^2-xy+y^2-1)$。

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=3x^2-3y-\lambda(2x-y)=0 & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=3y^2-3x-\lambda(-x+2y)=0 & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=-(x^2-xy+y^2-1)=0 & (3)\end{cases}$$

解得 $x=1,\quad y=1$ 或 $x=-1,\quad y=-1$ 或 $x=\frac{1\pm\sqrt5}{4},\quad y=\frac{1\mp\sqrt5}{4}$

$f(1,1)=-1$，$f(-1,-1)=-5$，$f(\frac{1\pm\sqrt5}{4},\frac{1\mp\sqrt5}{4})=\frac{5}{4}$。

所以 $f(x,y)$ 曲线 $x^2-xy+y^2=1$ 上的最大值为 $\dfrac{5}{4}$，最小值为 -5。

注: 许多同学解方程组(1)(2)(3)时，漏掉了最后两组解 $(x,y)=\frac{1}{4}(1+\sqrt5,1-\sqrt5)$, $\frac{1}{4}(1-\sqrt5,1+\sqrt5)$. 以下我们来具体求解这个方程组. 方程(1)加方程(2)得

$3(x^2+y^2)-3(x+y)-\lambda(x+y)=0$ 即 $3(x^2+y^2)=(\lambda+3)(x+y)$ (4)

将方程(1)减去方程(2)得 $3(x^2-y^2)-3(y-x)-3\lambda(x-y)=0$

即 $(x-y)[(x+y)+(1-\lambda)]=0$. 令 $x-y=0$, 即 $x=y$. 代入方程(3)得 $x^2=1$, 即 $x=\pm1$. 由此得方程组的前两组解 $(x,y)=(1,1)$, $(-1,-1)$.

再令 $(x+y)+(1-\lambda)=0$, 即 $x+y=\lambda-1$ (5)

将方程(5)代入方程(4) $3(x^2+y^2)=(\lambda+3)(\lambda-1)$ (6)

对方程(5)两边平方得 $x^2+y^2+2xy=(\lambda-1)^2$. 该方程与方程(3)联立, 即

$$\begin{cases}x^2+y^2+2xy=(\lambda-1)^2\\ x^2+y^2-xy=1\end{cases}$$

可解得 $3(x^2+y^2)=(\lambda-1)^2+2$ (7)

由方程(6)和方程(7)得 $(\lambda+3)(\lambda-1)=(\lambda-1)^2+2$. 解之得 $\lambda=\frac{3}{2}$. 将 $\lambda=\frac{3}{2}$代入方程(5)得

$x+y=\frac{1}{2}$. 该方程与方程(3)联立

$$\begin{cases} x+y=1/2 \\ x^2+y^2-xy=1 \end{cases}$$

解上述方程组不难得到方程组(1)(2)(3)的另外两组解$(x,y)=\frac{1}{4}(1+\sqrt{5},1-\sqrt{5})$,

$\frac{1}{4}(1-\sqrt{5},1+\sqrt{5})$. 注解完毕.

三．证明题（请写出详细的证明过程！）

20. （8 分）设 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ 连续，满足 $f(0)\neq-1$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$。

（I）证明存在 $t_0=1$ 的邻域 U 和 $x_0=0$ 的邻域 V 以及 $\mathrm{C}^{(1)}$ 函数 $g:U\to V$ 使得对任意 $(t,x)\in U\times V$，$\int_x^t f(u)\mathrm{d}u=x$ 当且仅当 $x=g(t)$。

（II）求 $g'(1)$。

（I）**证明**：令 $F(t,x)=\int_x^t f(u)\mathrm{d}u-x$。$F(1,0)=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u-0=0$，$\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)=-f(0)-1\neq0$，

所以根据隐函数定理存在 $t_0=1$ 的邻域 U 和 $x_0=0$ 的邻域 V 以及 C^1 函数 $g:U\to V$，

使得对任意 $(t,x)\in U\times V$，$F(t,x)=0$（即 $\int_x^t f(u)\mathrm{d}u=x$）当且仅当 $x=g(t)$。

（II）**解**：对恒等式 $\int_{g(t)}^t f(u)\mathrm{d}u=g(t)$ 求导得到 $f(t)-f(g(t))g'(t)=g'(t)$，从而 $g'(1)=\frac{f(1)}{f(0)+1}$。

21. （7 分）设 $f\in\mathrm{C}^{(0)}[0,1]$ 且 $f(x)>0$，$\alpha>0$。根据参数 α 的不同值，研究函数

$g(y)=\int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$（$y\in[0,+\infty)$）的连续性，并证明你的结论。

结论: 当 $0<\alpha\le1$ 时，g(y)在 $(0,+\infty)$ 上连续，在 $y=0$ 处不连续；当 $1<\alpha$ 时，g(y) 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

证明：对于 $(0,+\infty)$ 的任何有界闭子区间 $[\delta,N]$，$\frac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}$ 在 $[0,1]\times[\delta,N]$ 上（一致）连续，所以 $g(y)=\int_0^1 \frac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。以下讨论 $y=0$ 处的连续性，并设 $0\le y<1$。

当 $y=0$ 时，$\dfrac{y^{\alpha} f(x)}{x^2+y^2}=0$，所以 $g(0)=0$。

因为 $f\in C^{(0)}[0,1]$，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在最大值 M 和最小值 m。又因为 $f(x)>0$，所以 $0<m\le f(x)\le M$。

当 $0<\alpha\le 1$ 时，$\dfrac{y^{\alpha} f(x)}{x^2+y^2}\ge\dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}\ge\dfrac{my}{x^2+y^2}$，所以

$$g(y)=\int_0^1\frac{y^{\alpha} f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\ge m\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=m\arctan\frac{1}{y}\to\frac{m\pi}{2}>0，当 y\to 0^+。$$

因此 $g(y)=\int_0^1\dfrac{y^{\alpha} f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 在 $y=0$ 处不连续；

当 $1<\alpha$ 时，$0\le\dfrac{y^{\alpha} f(x)}{x^2+y^2}\le\dfrac{My^{\alpha-1}y}{x^2+y^2}$，所以

$$0\le g(y)=\int_0^1\frac{y^{\alpha} f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\le My^{\alpha-1}\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=My^{\alpha-1}\arctan\frac{1}{y}\to 0=g(0)，$$

所以 $g(y)=\int_0^1\dfrac{y^{\alpha} f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 在 $y=0$ 处连续。