清华大学2022春季学期

电路原理C

第12讲

用状态方程和输出方程求解二阶电路

内容

本讲重难点

- 状态方程的列写方法
- 输出方程的列写方法
- 用状态方程求二阶电路的一般解形式
- 用状态方程和输出方程求二阶电路任意支路量的初值
- 用状态方程和输出方程求二阶电路任意支路量一阶导的初值

总结二阶电路的求解

- **求响应形式**
  - RLC串联、RLC并联 → 直接得到特征方程
  - ZIR非RLC串并联怎么办? → L12（根据状态方程）
- **求稳态值 → 得通解表达式**
  - 电阻电路
- **求初值**
  - 0^-电阻电路 → 换路定理得0^+电阻电路 → 初值
- **求导数初值**
  - 将支路量用独立源、u_C、i_L来表示→0^+电路求i_C、u_L
  - L12（根据输出方程和状态方程）
- **用初值和导数初值确定通解待定系数**

1、状态变量与状态方程
—分析动态电路的另一种方法

(1) 状态变量

分析动态过程的独立变量。

选定系统中一组**最少数量**的变量 $X=[x_1,x_2,\ldots x_n]^T$，如果**当 $t=t_0$ 时这组变量 $X(t_0)$**和 **$t\geq t_0$ 后的输入 $e(t)$**为已知，就可以确定 t_0 及 t_0 以后**任何时刻**系统的**响应 $Y(t)$**。

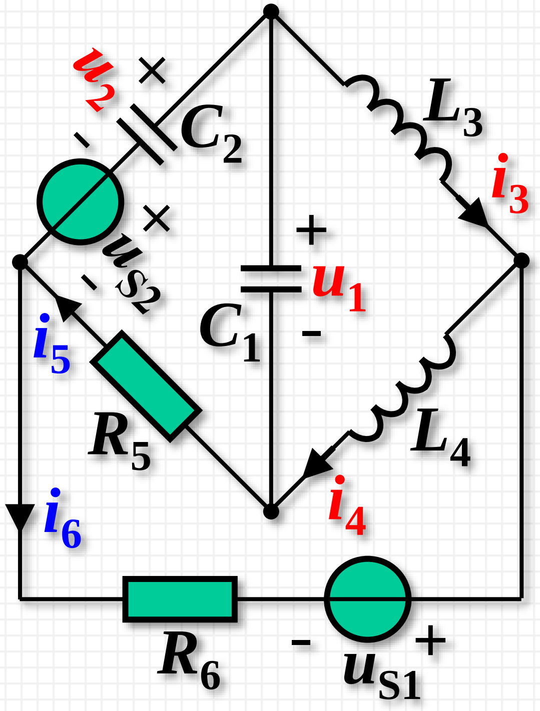
$$\left.\begin{array}{ll} X(t_0) & \\ e(t) & t\geq t_0 \end{array}\right\} \quad Y(t) \qquad t\geq t_0$$

称这一组最少数目的变量为状态变量。

为什么要用另一种方法来分析动态电路?

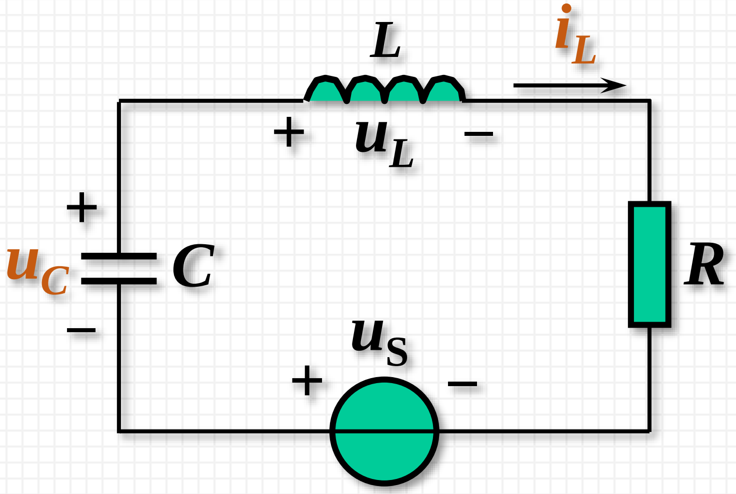
原因 1: 方程列写上的需要

原因 2: 容易描述多输入多输出系统



（2）状态方程 — 求解状态变量的微分方程

设 u_C ，i_L 为状态变量



列状态方程

----用状态变量和激励的线性组合来

表示状态变量的微分

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_C=-i_L$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_L=u_C+u_S-Ri_L$$

整理为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{1}{C}i_L\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{L}u_C-\dfrac{R}{L}i_L+\dfrac{1}{L}u_S\end{cases}$$

状态方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{1}{C} i_L \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{L} u_C - \dfrac{R}{L} i_L + \dfrac{1}{L} u_S \end{cases}$$

特点:

(1) 一阶微分方程组

(2) 左端为状态变量的一阶导数

(3) 右端为状态变量和输入量的线性组合

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} u_S$$

式中

$$[x]=[x_1 \ \ x_2 \ \cdots \ x_n]^{\mathrm{T}}$$

$$[\dot{x}]=[\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \cdots \dot{x}_n]^{\mathrm{T}}$$

$$[u]=[u_1 \ \ u_2 \ \cdots \ u_r]^{\mathrm{T}}$$

一般形式

$$\dot{x} = [A][x]+[B][u]$$

根据该方程和初值即可求解出 t_1时刻的状态变量值。

注：左侧状态变量导数的顺序和右端状态变量的顺序一致

几点说明：

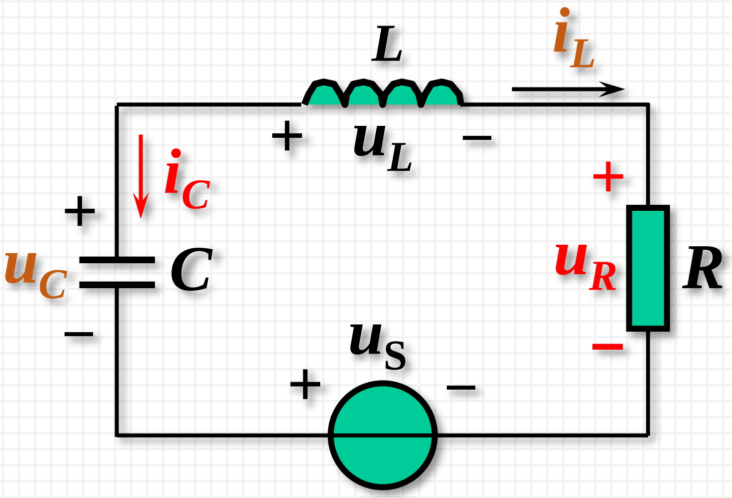
(1) 过渡过程就是一个稳定的能量状态过渡到另一个稳定能量状态的过程。线性电路中的能量状态完全由电感电流和电容电压决定，因而很自然地选择它们为决定电路状态的量。

(2) 状态变量的个数等于独立的储能元件个数。

(3) 一般选择 u_C 和 i_L 为状态变量。也可以选 q 和 ψ 为状态变量。状态变量的选择不唯一。

(3) 输出方程 — 用状态变量表示输出变量的代数方程

设输出变量为u_R、i_C



如何用状态变量和激励的线性组合表示输出变量?

$$u_R = Ri_L \qquad i_C = -i_L$$

$$\begin{bmatrix} u_R \\ i_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & R \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_S(t)$$

可用于描述输出为u_R、i_C的两输出系统

一般形式 $[y]=[C][x]+[D][u]$

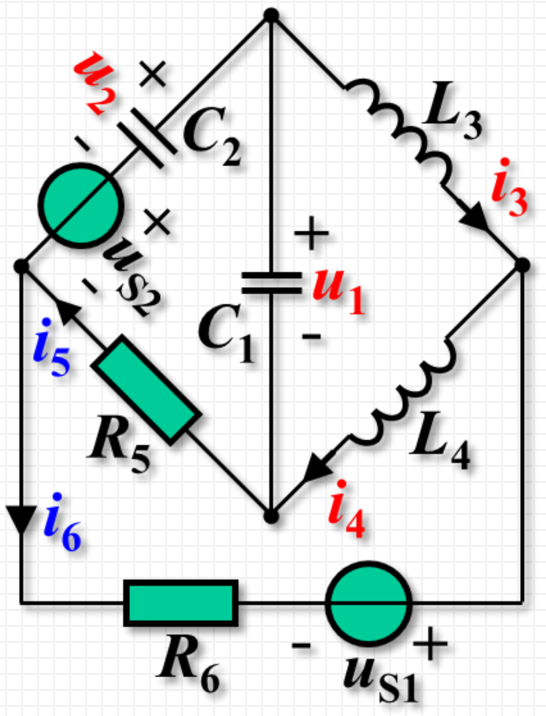
根据该方程即可求解出 t_1时刻的输出变量值。

特点 (1) 代数方程

(2) 用状态变量和输入量的线性组合表示输出量

多输入多输出系统怎么处理?

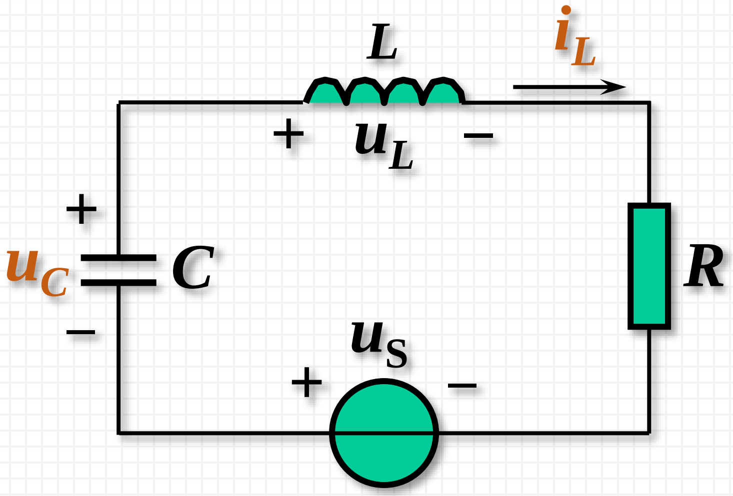
- 找到状态变量和输出变量（对电路来说比较好办）
- 列出状态方程（本讲）
- 列写输出方程（本讲）
- 求解出状态变量（后续课程）
- 求解出输出变量（容易）



(4) 列写状态方程和输出方程的方法

$$C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}=i_C=-i_L$$

$$L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}=u_L=u_C+u_S-Ri_L$$



状态方程的特点：

用电容电压、电感电流和独立源的线性组合来表示电容电流和电感电压

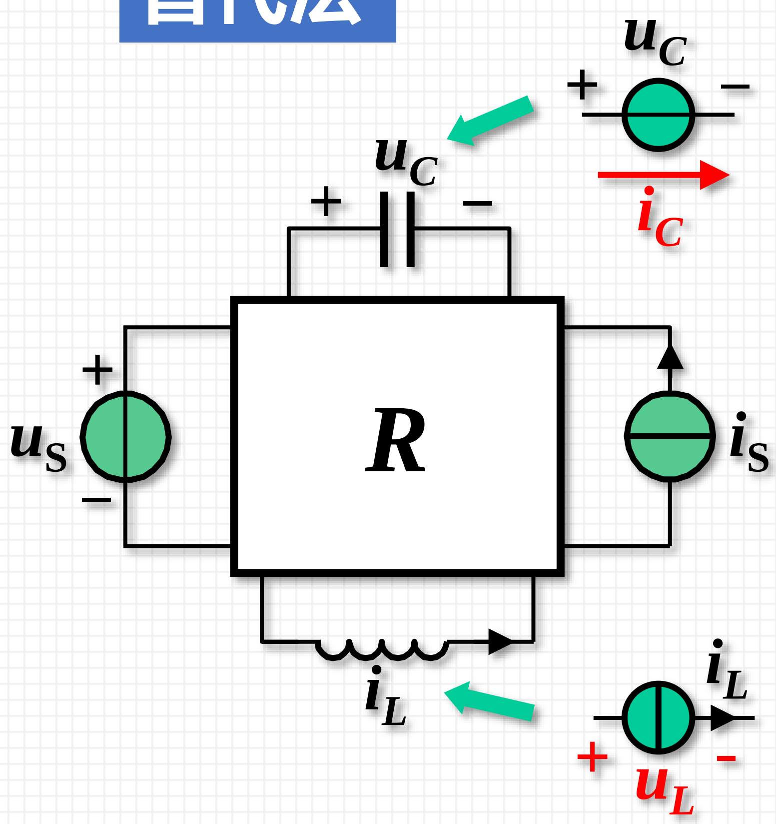
⬇

电容替代为电压源，电感替代为电流源

→ 电阻电路

→ 求该电压源电流和电流源电压

替代法



(1) 将电源、电容、电感均抽到网络外，网络内仅包含电阻。

(2) 电容用电压源替代，电感用电流源替代，**构成电阻电路**。

(3) 求i_C , u_L。

(4) 等号两边同除以C或L。

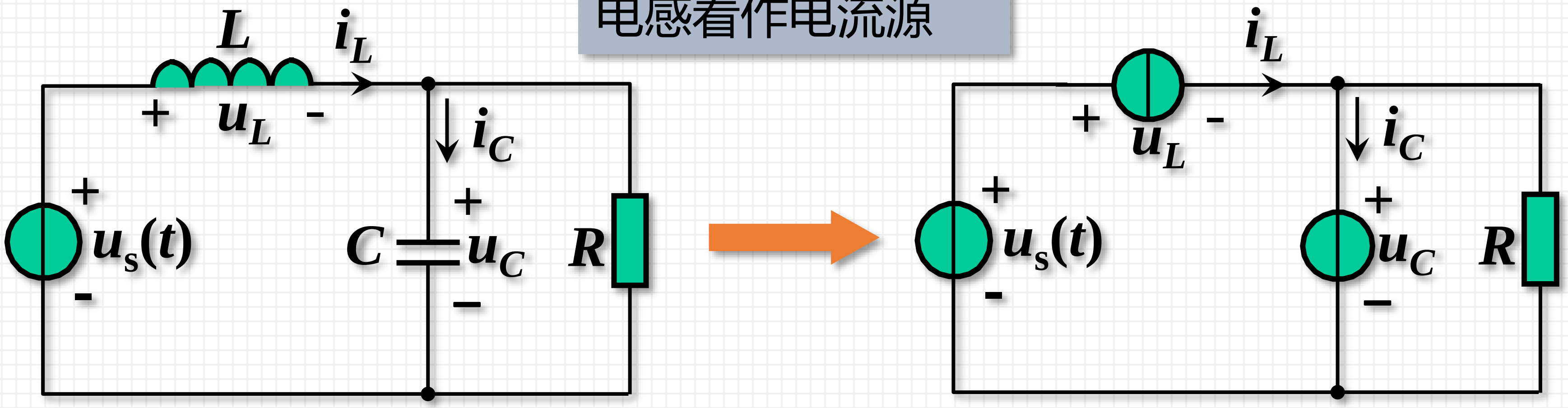
则 u_S、i_S、u_C、i_L共同作用下的 i_C , u_L为：

$$i_C = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{bmatrix} i_C \\ u_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_S \\ i_S \end{bmatrix}$$

例1



替代定理

将电容看作电压源

电感看作电流源

求解

流过电容电压源电流

电感电流源上电压

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{RC}u_C + \frac{1}{C}i_L \qquad C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = i_C = i_L - \frac{u_C}{R}$$

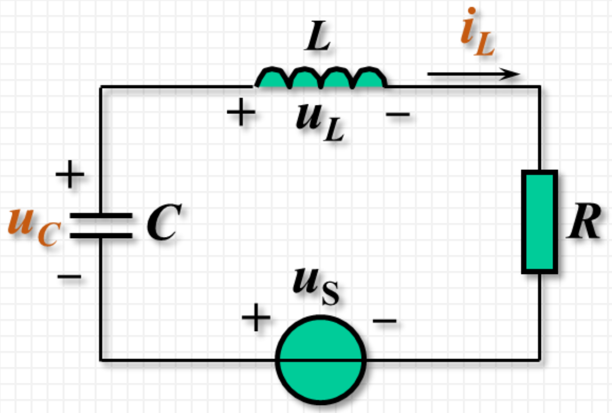
$$\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{L}u_C + \frac{1}{L}u_s \qquad L\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = u_L = u_s - u_C$$

2、用状态方程和输出方程求解二阶电路

回顾

- 求响应形式
  - RLC串联、RLC并联
  - ZIR非RLC串并联怎么办→ L12
- 求稳态值 → 得通解表达式
  - 电阻电路
- 求初值
  - 电阻电路
- 求导数初值
  - 将支路量用独立源、u_C、i_L来表示→0^+电路求i_C、u_L
  - L12（根据输出方程和状态方程）
- 用初值和导数初值确定通解待定系数

问题1：如何利用状态方程求特征根？



$$\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+\frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{LC}u_C=0$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{C}\\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{L}\end{bmatrix}u_S$$

特征方程

$$p^2+\frac{R}{L}p+\frac{1}{LC}=0$$

$$|\lambda I-A|=0$$

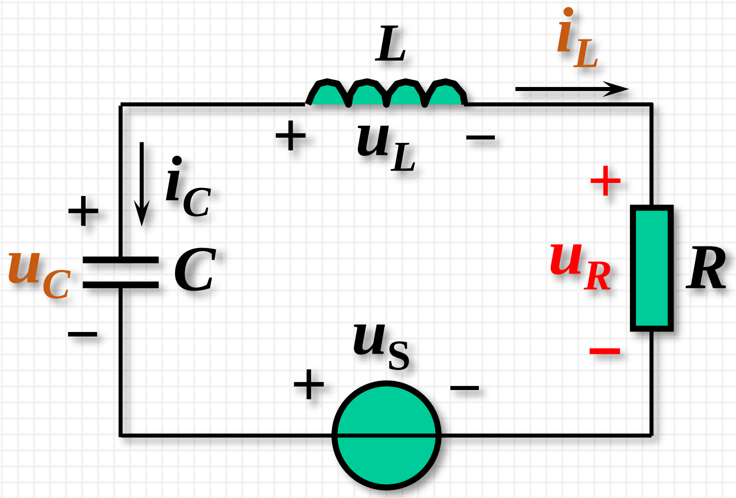
求系数矩阵特征值的方程

$$\begin{vmatrix}\lambda & \dfrac{1}{C}\\ -\dfrac{1}{L} & \lambda+\dfrac{R}{L}\end{vmatrix}=0 \longrightarrow \lambda^2+\frac{R}{L}\lambda+\frac{1}{LC}=0$$

用这两种方法得到的系统自由分量变化形式是一样的

状态变量的变化反映了系统能量的变化

问题2：如何利用输出方程、状态方程求任意支路量的导数初值？



$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{C} \\ \dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} u_S$$

以待求支路量为输出的输出方程 $u_R = Ri_L$

→求导，得待求支路量的导数初值

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = R\left.\frac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}$$

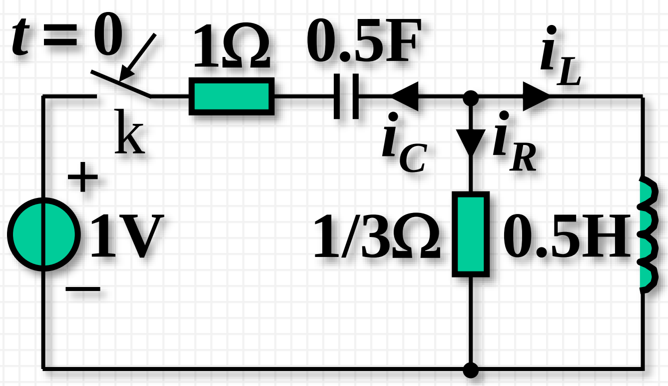
→利用状态方程得一阶导数初值

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = R\left(\frac{1}{L}u_C\Big|_{t=0^+} - \frac{R}{L}i_L\Big|_{t=0^+} + \frac{1}{L}u_S\Big|_{t=0^+}\right)$$

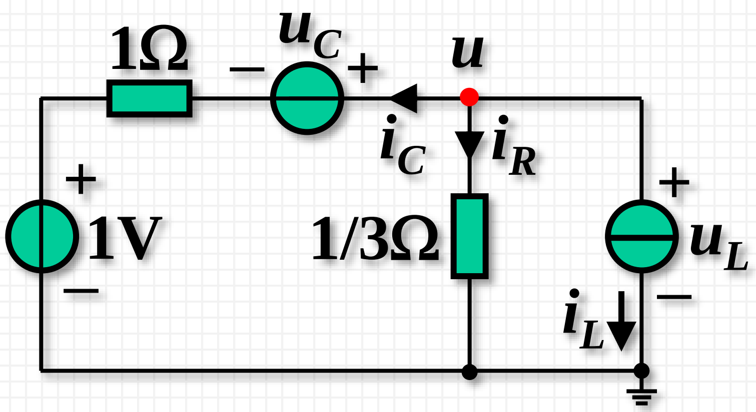
换路定理

例2 换路前电路已达稳态

求电阻电流的零状态响应i_R。



Step1 求状态方程和输出方程



$$(1+3)u = u_C + 1 - i_L$$

$$u = 0.25u_C - 0.25i_L + 0.25$$

$$i_C = -u_C + u - 1$$

$$= -0.75u_C - 0.25i_L - 0.75$$

$$u_L = u = 0.25u_C - 0.25i_L + 0.25$$

输出方程

$$i_R = 3u = 0.75u_C - 0.75i_L + 0.75$$

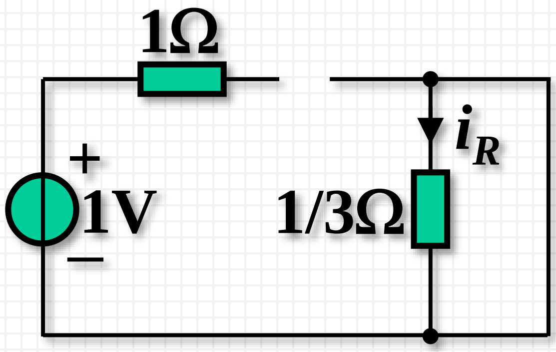
状态方程

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Step2 求全解

$$A=\begin{pmatrix}-1.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5\end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}p+1.5 & 0.5\\ -0.5 & p+0.5\end{vmatrix}=p^2+2p+1=0$$

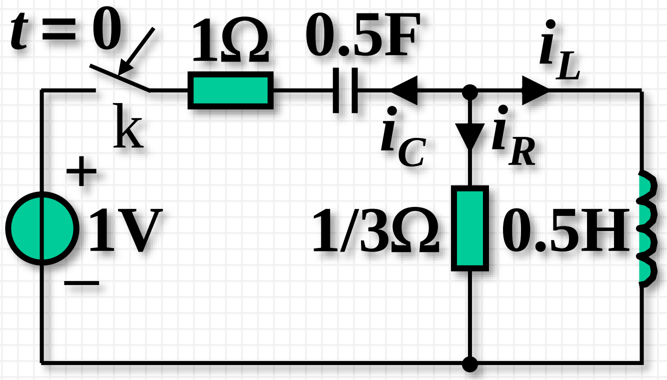
$$p_1=p_2=-1$$



稳态电路

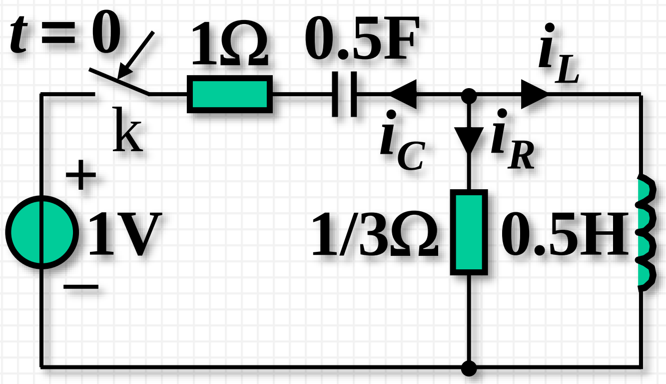
$$i_R(\infty)=0$$

$$i_R=\left(A_1+A_2t\right)\mathrm{e}^{-t} \quad t\geq 0^+$$



$$\begin{pmatrix}\dot{u}_C\\ \dot{i}_L\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1.5 & -0.5\\ 0.5 & -0.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_C\\ i_L\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1.5\\ 0.5\end{pmatrix}$$

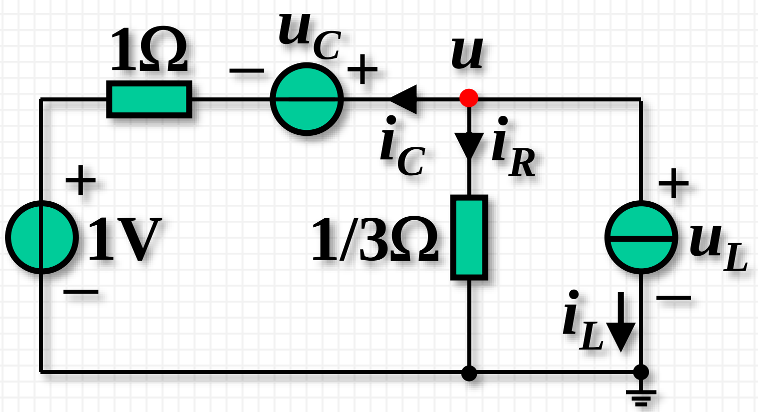
Step3 求初值和一阶导初值



换路前电路已达稳态

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0\ \text{V}$$

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0\ \text{A}$$



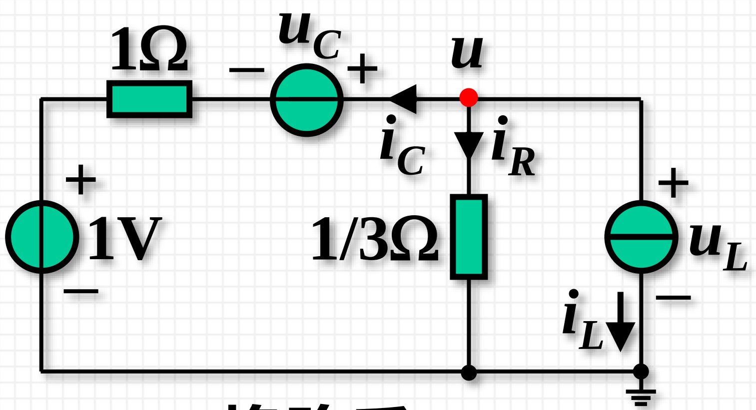
换路后
求状态方程和输出方程的电路

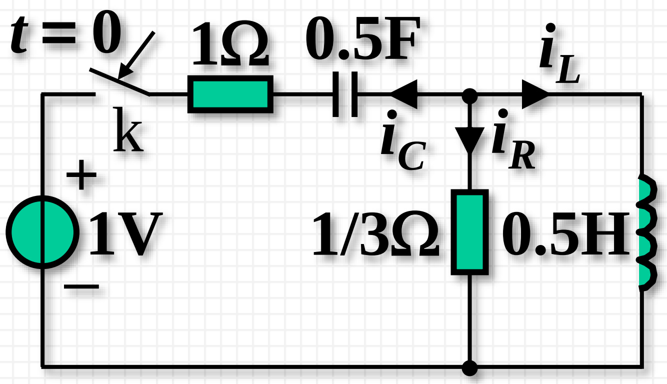
$$i_R = 0.75u_C - 0.75i_L + 0.75$$

输出方程

$$i_R(0^+) = \left(0.75u_C - 0.75i_L + 0.75\right)\Big|_{t=0^+}$$

$$= 0.75\ \text{A}$$





换路后
求状态方程和输出方程
的电路

$$i_R = 0.75u_C - 0.75i_L + 0.75$$

输出方程

$$\dot{i}_R = 0.75\dot{u}_C - 0.75\dot{i}_L$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_C \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

状态方程

$u_C(0^+) = 0\ \text{V}$

$i_L(0^+) = 0\ \text{A}$

状态方程 →

$$\begin{cases} \dot{u}_C(0^+) = \left(-1.5u_C - 0.5i_L - 1.5\right)\Big|_{t=0^+} = -1.5\ \text{V/s} \\ \dot{i}_L(0^+) = \left(0.5u_C - 0.5i_L + 0.5\right)\Big|_{t=0^+} = 0.5\ \text{A/s} \end{cases}$$

输出方程 ↓

$$i_R(0^+) = \left(0.75u_C - 0.75i_L + 0.75\right)\Big|_{t=0^+} = 0.75\text{A}$$

$$\dot{i}_R(0^+) = \left(0.75\dot{u}_C - 0.75\dot{i}_L\right)\Big|_{t=0^+} = -1.5\ \text{A/s}$$

比起上节课方法，这种方法无需画0^+电路，而且适用于高阶电路

Step4 求待定系数

$$\begin{cases} i_R = \left(A_1 + A_2 t\right)e^{-t} \quad t > 0^+ \\ i_R(0^+) = 0.75\text{A} \\ \dot{i}_R(0^+) = -1.5\ \text{A/s} \end{cases}$$

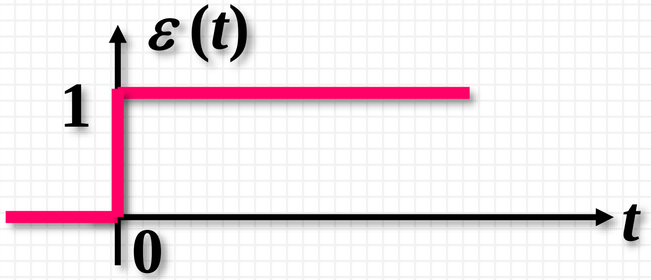
$$i_R = 0.75\left(1 - t\right)e^{-t}\text{A} \quad t > 0^+$$

状态方程+输出方程求解二阶电路

- **求响应形式**
  - **状态方程 → （电阻电路）→ 求系数矩阵特征值**
- **求稳态值 → 得通解表达式**
  - **电阻电路**
- **求初值**
  - **0^-电阻电路→换路定理得0^+电阻电路→初值**
- **求导数初值**
  - **输出方程（电阻电路）→求导→带入状态方程→换路定理**
- **用初值和导数初值确定通解待定系数**

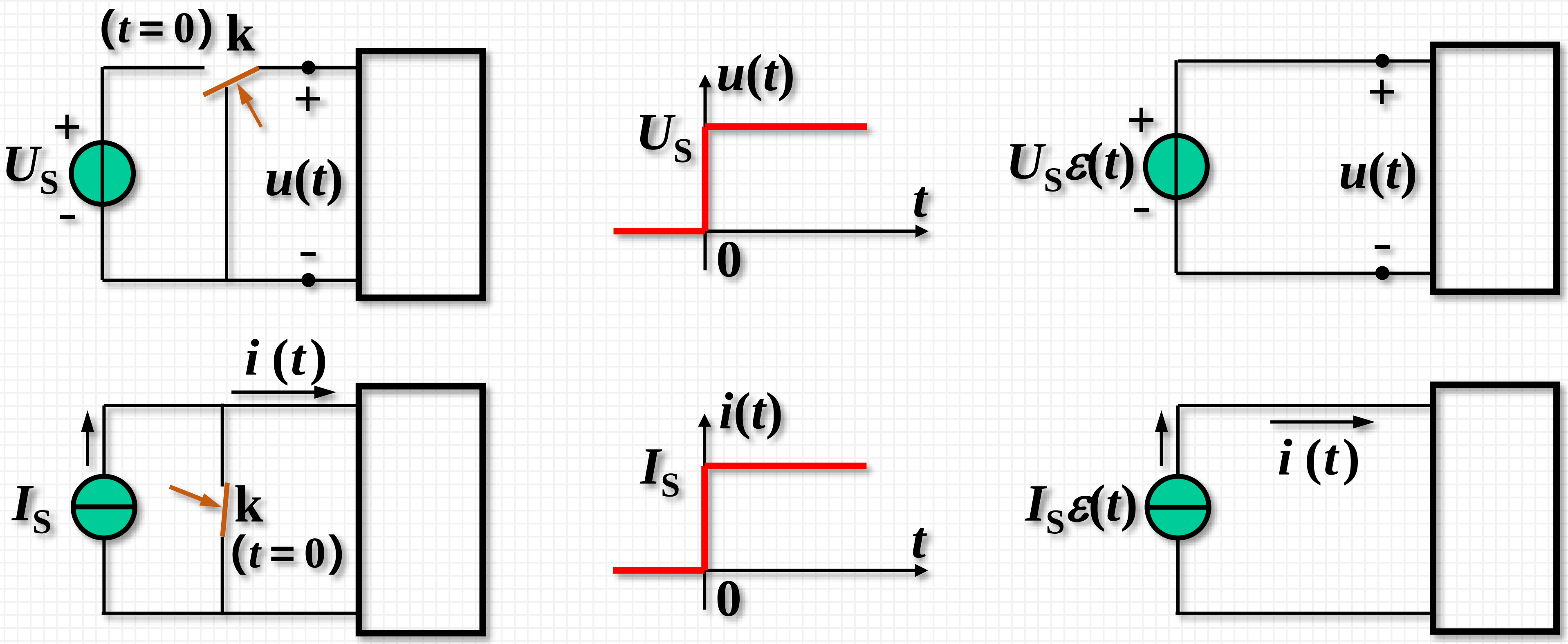
3、单位阶跃函数与单位阶跃响应

(1) 单位阶跃函数(unit step) $\varepsilon(t)$

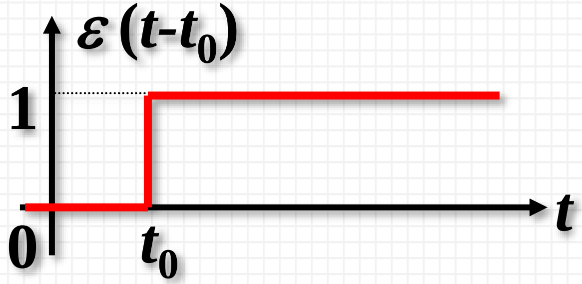


a) **定义** $\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ 1 & (t>0)\end{cases}$

可用 $\varepsilon(t)$ 来表示电压/电流的突然变化。



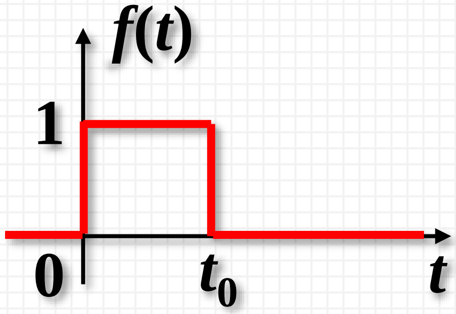
b) 单位阶跃函数的延迟

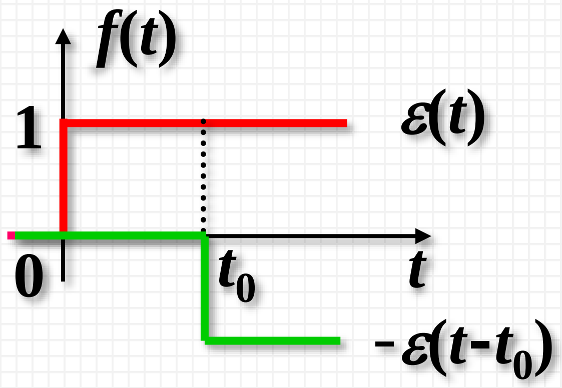


$$\varepsilon(t-t_0)=\begin{cases}0 & (t<t_0)\\ 1 & (t>t_0)\end{cases}$$

c) 由单位阶跃函数可组成复杂的信号

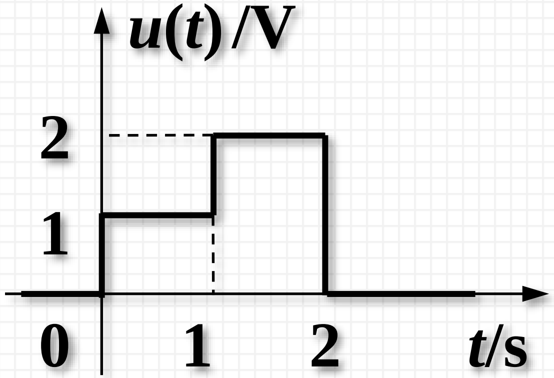
例1

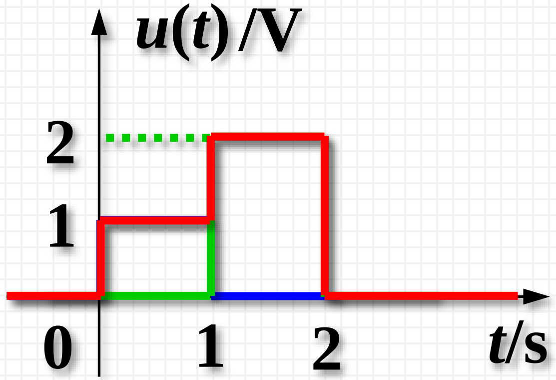




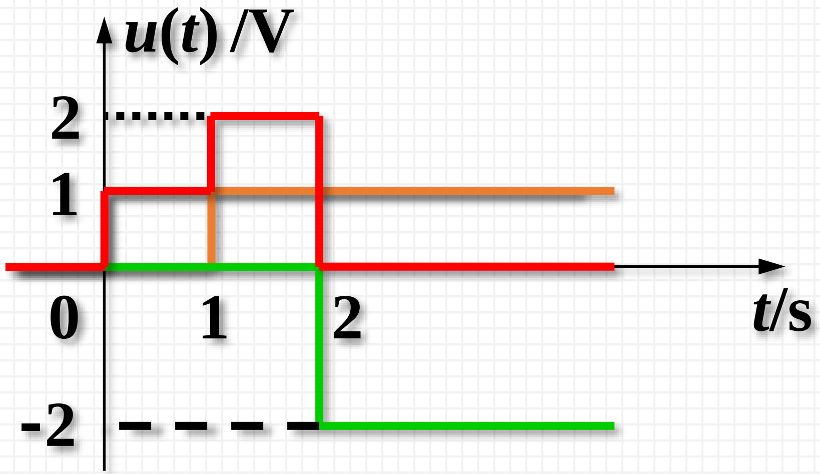
$$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-t_0)$$

例2





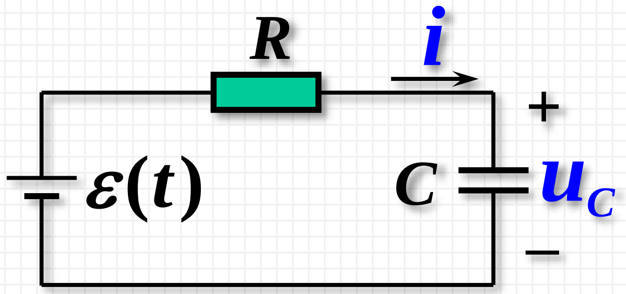
$$f(t)=[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]+2[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]$$



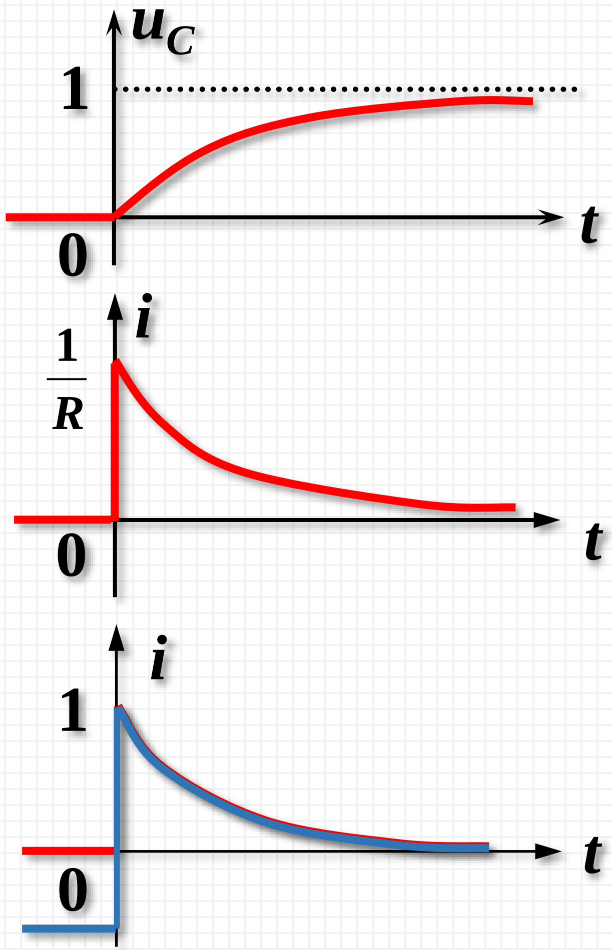
$$f(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)-2\varepsilon(t-2)$$

(2) 单位阶跃响应

——单位阶跃激励下电路的**零状态**响应



$u_C(0^-)=0$



$$u_C(t)=(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\ \varepsilon(t)$$

$$i(t)=\frac{1}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\ \varepsilon(t)$$

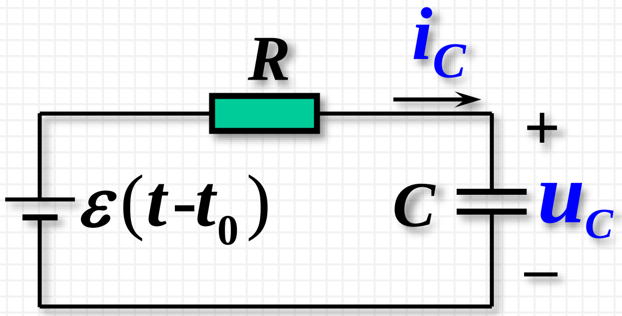
注意 $i=\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t)$ 和 $i=\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$ $t\geq 0^+$ 的区别

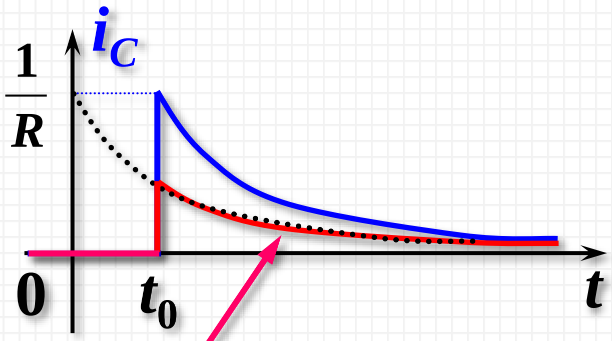
对线性(输入输出关系线性)非时变(元件参数不随时间改变)电路:

$$f(t) \rightarrow r(t)$$
$$f(t-t_0) \rightarrow r(t-t_0)$$

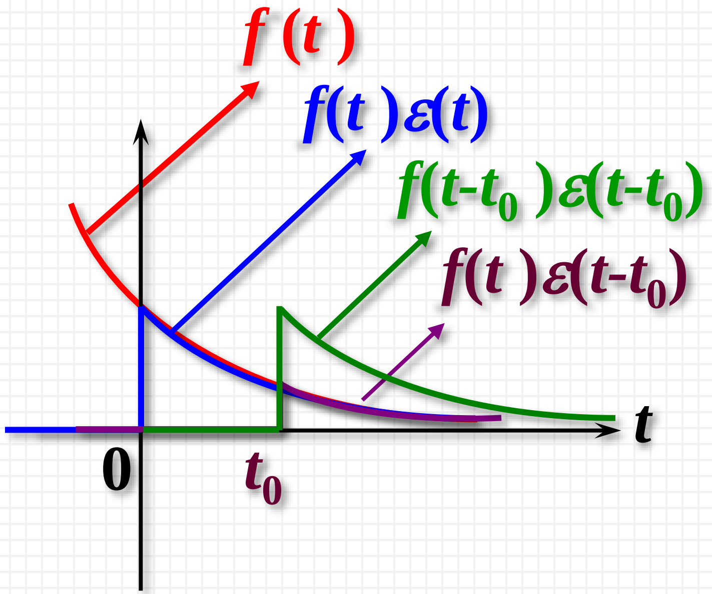
激励在 $t=t_0$ 时加入,
则响应从 $t=t_0$ 开始。

例3





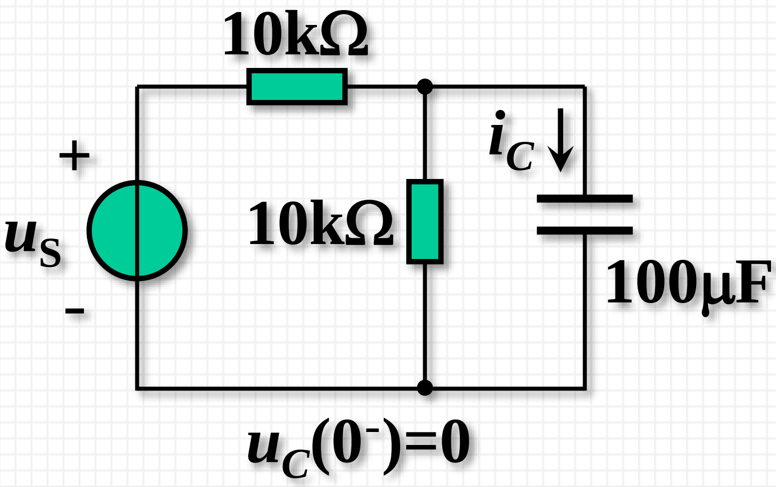
$$i_C = \frac{1}{R}e^{-\frac{t-t_0}{RC}}\varepsilon(t-t_0)$$

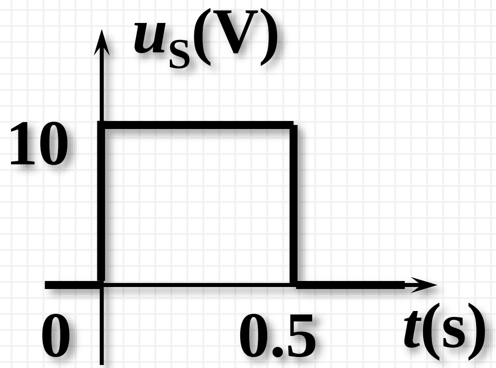


注意

不要写为 $\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\varepsilon(t-t_0)$

例4 **求图示电路中电流 $i_C(t)$。**



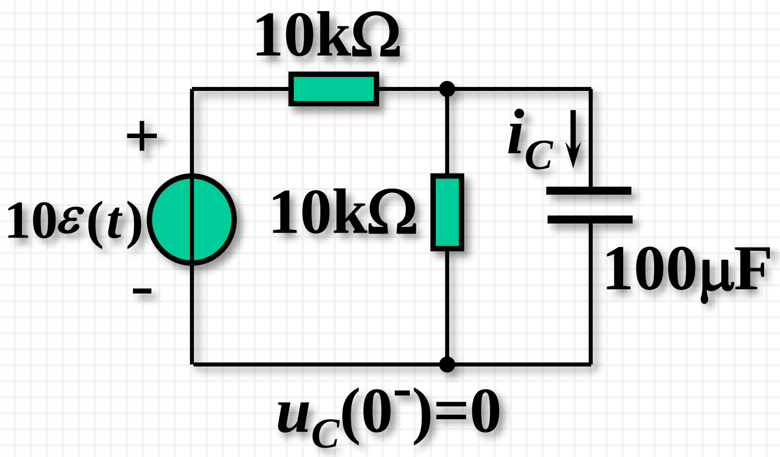


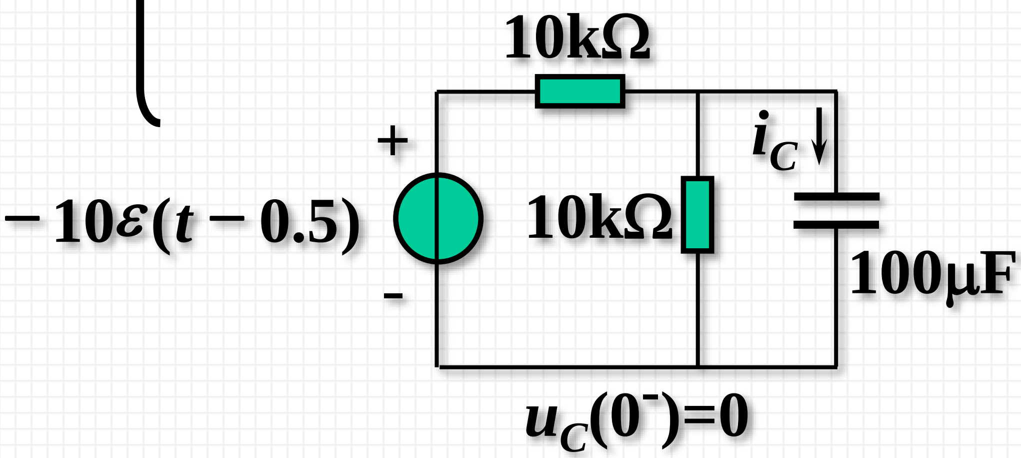
$$u_S = 10\left(\varepsilon(t) - \varepsilon(t-0.5)\right)$$

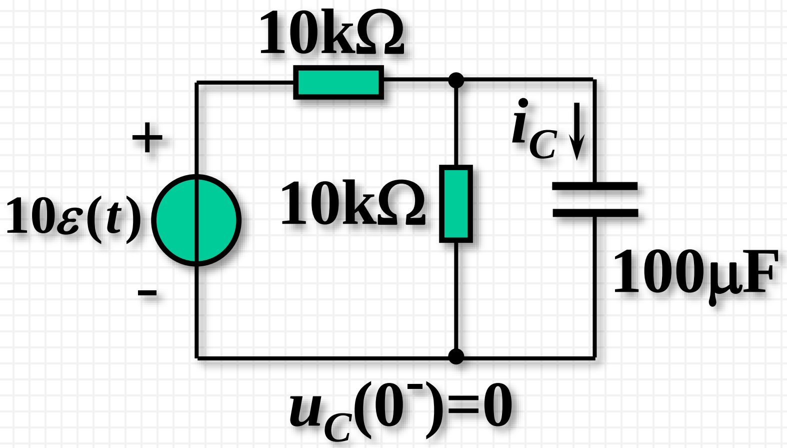
$$= 10\varepsilon(t) - 10\varepsilon(t-0.5)$$

法一： 二次换路，三要素法。

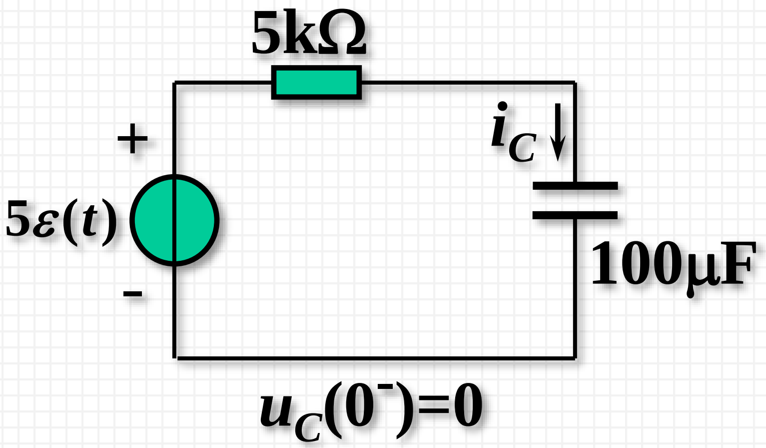
法二 叠加







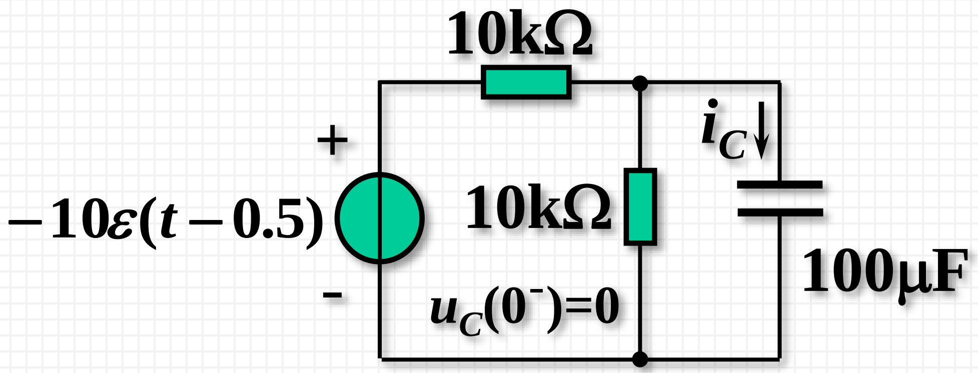
等效



$$i_C(0^+)=1\text{mA} \qquad i_C(\infty)=0$$

$$\tau=RC=100\times10^{-6}\times5\times10^{3}=0.5\text{s}$$

$$i_C'(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)\quad \text{mA}$$



$$i_C''(t)=-e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)\ \text{mA}$$

$$\therefore\ i_C(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)-e^{-2(t-0.5)}\varepsilon(t-0.5)\quad \text{mA}$$