习题讨论课3题目：隐函数，空间曲面

额外的例子：定义齐次函数：如果函数 $f(x,y)$ 满足对任意正数 t，$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，则称 f 为 n 次齐次函数。

设 $f\in\mathscr{C}^1$。则 f 为 n 次齐次函数 $\Longleftrightarrow x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=nf(x,y)$。

一. 隐函数的求导法

隐函数定理：存在性，可微性，及隐函数的导数（偏导数）

若函数 $y=y(x)$, 由方程 $F(x,y)=0$ 确定，求导函数？

方法一：代入方程得到恒等式 $F(x,y(x))=0$，按链索法则求导，解出隐函数的导数（偏导）。

$$F(x,y(x))\equiv 0\Longrightarrow 0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y(x))=F_x(x,y(x))+F_y(x,y(x))\cdot y'(x)$$
$$\Longrightarrow y'(x)=-\frac{F_x(x,y(x))}{F_y(x,y(x))}.$$

$F_y(x,y)\neq 0$ 是保证隐函数 $y=y(x)$ 存在的一个充分条件。

方法二：按隐函数定理的公式求隐函数的导数（偏导）的方法求隐函数的导数（偏导）。

我们推荐使用方法一而不是方法二，特别是在求隐函数高阶导数的时候。

例 1. 已知函数 $y=f(x)$ 由方程 $ax+by=f(x^2+y^2)$，a,b是常数，求 f 的导函数

一般来说，若函数 $y=y\left(\mathbf{x}\right)$, 由方程 $F(\mathbf{x},y)=0$ 确定，如何求函数 y 的偏导函数？

将 y 看作是 $\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$ 的函数 $y=y(\mathbf{x})=y(x_1,...,x_n)$，

对于方程 $F(x_1,...,x_n,y(x_1,...,x_n))=0$ 两端分别关于 x_i 求偏导数，得到

$$F_{x_i}(\mathbf{x},y(\mathbf{x}))+F_y(\mathbf{x},y(\mathbf{x}))y_{x_i}(\mathbf{x})=0,$$

可解得 $\frac{\partial y}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}(\mathbf{x},y)}{F_y(\mathbf{x},y)}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$。**但是方法比结论更重要!**

另外，你会不会把偏导数当成分数，从而得到 $\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{\partial y}{\partial x_i}$？这对吗？

例 2. 设 $F\in\mathscr{C}^1$，证明：方程 $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

例 3. 设函数 $x=x(z),y=y(z)$ 由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-1=0,\\ x^2+2y^2-z^2-1=0\end{cases}$ 确定，求 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$。

例 4. 已知函数 $z=z(x,y)$ 由参数方程：$\begin{cases}x=u\cos v,\\ y=u\sin v,\\ z=uv\end{cases}$ 给定，试求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

例 5. 设 $f,g,h\in\mathscr{C}^\infty$ 函数。试给一个充分条件，使得由方程 $\begin{cases}u=f(x,y,z,t),\\ g(y,z,t)=0,\\ h(z,t)=0\end{cases}$ 可确定可微的隐函数 $u=u(x,y)$ ，并求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$。

二．几何应用1．空间曲面

(1)空间曲面的表达式

1. 函数图像： $z=f(x,y)$，它可以看成隐函数的特例 $f(x)-y=0$，或参数表示的特例 $\begin{cases}x=x\\ y=y\\ z=f(x,y)\end{cases}$ ，所以我们主要讨论下面两个。
2. 方程表示: $F(x,y,z)=0$
3. 参数方程表示：$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}\qquad (u,v)\in D_{uv}\subset\mathbb{R}^2$

(2)空间曲面的切平面与法线

曲面 S 由方程 $F(x,y,z)=0$ 确定，S 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z-z_0)=0$$

把方程 $F(x,y,z)=0$ 在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处 Taylor 展开到一阶，并截断。

法向量 $\mathbf{n}=\nabla F(P_0)=\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P_0),\frac{\partial F}{\partial y}(P_0),\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)\right)^T$。**曲面正则条件：$\mathbf{n}\neq\mathbf{0}$，此时有二维切平面。**

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(P_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(P_0)},\quad \text{或 } P=P_0+t\nabla F(P_0),\quad t\in\mathbb{R}.$$

参数曲面 S：$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}\qquad (u,v)\in D_{uv}\subset\mathbb{R}^2$，

$P_0(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ 处的切平面为

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)t + \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)s, \\ y = y_0 + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)t + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)s, \qquad t, s \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)t + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)s, \end{cases}$$

参数方程在 (u_0, v_0) 处 Taylor 展开到一阶，并截断。

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

是一对切向量。**曲面正则条件：$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 线性无关，它们确定了二维切平面。**

切平面方程也可以写为

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

或

$$\left| \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right|_{(u_0, v_0)} (x - x_0) + \left| \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right|_{(u_0, v_0)} (y - y_0) + \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|_{(u_0, v_0)} (z - z_0) = 0$$

法向量

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}_{(u_0, v_0)} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right)_{(u_0, v_0)}, \end{aligned}$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{\left| \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right|_{(u_0, v_0)}} = \frac{y - y_0}{\left| \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \right|_{(u_0, v_0)}} = \frac{z - z_0}{\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right|_{(u_0, v_0)}}$$

无论哪种形式，切平面方程都可以通过一阶 Taylor 展开得到。

例 6. 求曲面 $S: 2x^2 - 2y^2 + 2z = 1$ 上切平面与直线 $L: \begin{cases} 3x - 2y - z = 5 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ 平行的切点的轨迹。

例 7. 证明球面 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与锥面 $S_2: x^2 + y^2 = a^2 z^2$ 正交.

例 8. 过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求该切平面的方程。

例 9. 通过曲面 $S:\mathrm{e}^{xyz}+x-y+z=3$ 上点 $(1,0,1)$ 的切平面（）

(A) 通过 y 轴；　(B) 平行于 y 轴；　(C) 垂直于 y 轴；　(D) A,B,C都不对.

例 10. 已知 f 可微，证明曲面 $f\left(\frac{x-a}{z-c},\frac{y-b}{z-c}\right)=0$上任意一点处的切平面通过一定点，并求此点位置.

例 11. 曲面 S 由方程 $ax+by+cz=G\left(x^2+y^2+z^2\right)$ 确定, 试证明：曲面 S 上任一点的法线与某定直线相交。

例 12. 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点，使椭球面在此点的法线与三个坐标轴的正向成等角。