清华大学本科生考试试题专用纸

微积分 A(2)期中考试样题

系名________________ 班级______________ 姓名______________ 学号_______________

一．填空题（每空 3 分，共 15 题）（请将答案直接填写在试题纸横线上！）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{\frac{x^2+2}{x^2+y^2}}=$______________。

2. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(2,1)$ 处的微分 $\mathrm{d}f=2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$，则 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(2+2t,1+t)-f(2,1)}{t}=$________。

3. 若 $z=y^x$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,\mathrm{e})=$______________。

4. 设 f 可导且 $f'(0)=1$，则函数 $z(x,y)=xy+f(\dfrac{y}{x})$ 在点 $(1,0)$ 处的微分 $\mathrm{d}z=$________________。

5. 从 $(u_0,v_0)=(2,1)$ 的邻域到 $(x_0,y_0)=(3,4)$ 的邻域中，向量值函数 $\begin{cases}x=u+v\\ y=u^2v^2\end{cases}$ 有可微的逆向量值函数 $\begin{cases}u=u(x,y)\\ v=v(x,y)\end{cases}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}(3,4)=$______________。

6. 设函数 $f(u,v)\in \mathrm{C}^{(1)}$，函数 $w(x,y,z)=f(x-y,x-z)$，则 $\mathrm{grad}\,w=$________________________。

7. 已知函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿**单位向量** $\mathbf{l}$ 的方向导数 $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(1,1)=0$，则 $\mathbf{l}=$______________。

8. $\dfrac{1}{x+y}$ 在点 $(1,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展开式为________________________________。

9. 曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\\ y=2\sin t+\cos t\\ z=1+\mathrm{e}^{3t}\end{cases}$ 在 $t=0$ 所对应的点处的切线方程为______________________________。

10. 曲面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 和曲面 $3x^2+y^2-z^2=0$ 的交线在点 $(1,-1,2)$ 处的法平面方程为________________________________。

11. 曲面 $\mathrm{e}^z+xy-z=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的法线方程为______________________。

12. 已知 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+2y^2+3z^2-2xy-z-7=0$ 确定的一个隐函数，则 $z=z(x,y)$ 的驻点 $(x_0,y_0)=$______________。

13. 设 $I(y)=\int_y^{y^2}\mathrm{e}^{x^2y}\mathrm{d}x$，则 $I'(1)=$______________。

14. $\lim\limits_{y\to+\infty}\int_1^{+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{-xy}}{1+x^2}\mathrm{d}x=$ ______________。

15. 所有 2 阶实数方阵 $X=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}$ 组成一个 4 维线性空间 V，定义向量值函数 $\mathbf{f}:V\to V$，$\mathbf{f}(X)=X^2$，则 $\mathbf{f}(X)$ 在 $X_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 处全微分为________________________________。

二. 计算题（每题 10 分，共 4 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

16. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，回答以下问题：

(Ⅰ) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否连续，说明理由；

(Ⅱ) 函数 $f(x,y)$ 在原点处沿任意给定的方向 $u=(a,b)$（$a^2+b^2=1$）的方向导数是否存在？若存在，求出这个方向导数，若不存在，说明理由；

(Ⅲ) 函数 $f(x,y)$ 在原点处是否可微，若可微，求出这个微分，若不可微，说明理由。

17. 已知方程 $2z-\mathrm{e}^z+1+\int_y^{x^2}\sin(t^2)\mathrm{d}t=0$ 在 $(x_0,y_0,z_0)=(1,1,0)$ 的某个邻域中确定了一个隐函数 $z=z(x,y)$。求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,1)$。

18. 设实数 $a\geq 0$，求 $\int_0^{+\infty}\dfrac{1-\mathrm{e}^{-ax}}{x\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$。

19. 设 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$。

(Ⅰ) 求 f 在平面 R^2 上的所有极值；

(Ⅱ) 求 f 在曲线 $x^2-xy+y^2=1$ 上的最大值和最小值。

三. 证明题（请写出详细的证明过程！）

20. （8 分）设 $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ 连续，满足 $f(0)\neq-1$，$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$。

(Ⅰ) 证明存在 $t_0=1$ 的邻域 U 和 $x_0=0$ 的邻域 V 以及 $\mathrm{C}^{(1)}$ 函数 $g:U\to V$ 使得对任意 $(t,x)\in U\times V$，$\int_x^t f(u)\mathrm{d}u=x$ 当且仅当 $x=g(t)$。

(Ⅱ) 求 $g'(1)$。

21. （7 分）设 $\alpha>0$，$f\in\mathrm{C}[0,1]$ 且 $f(x)>0$。根据参数 α 的不同值，研究函数 $g(y)=\int_0^1\dfrac{y^\alpha f(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$（$y\in[0,+\infty)$）的连续性，并证明你的结论。