第6章　振　动

涉及的振动类别

自由振动
free ~

无阻尼振动

阻尼振动
damped ~

简谐振动 **SHM**
Simple harmonic motion

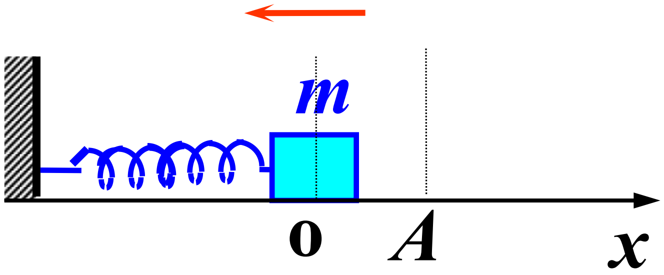
非谐振动

受迫振动
forced ~

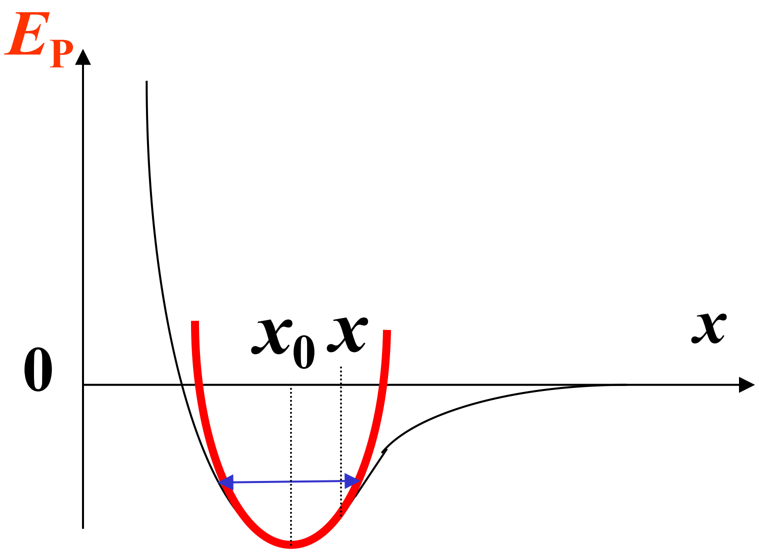
一. 简谐振动（重点）

(Simple Harmonic Motion)

简谐振动是最简单、最基本的振动，可用来研究复杂的振动。



简谐振动是理想化模型，许多实际的小振幅振动都可以看成简谐振动。



例. 双原子分子

两个原子之间的振动。

1. 定义（判据）：

(1) 运动学方程 $x = A\cos(\omega t + \phi)$

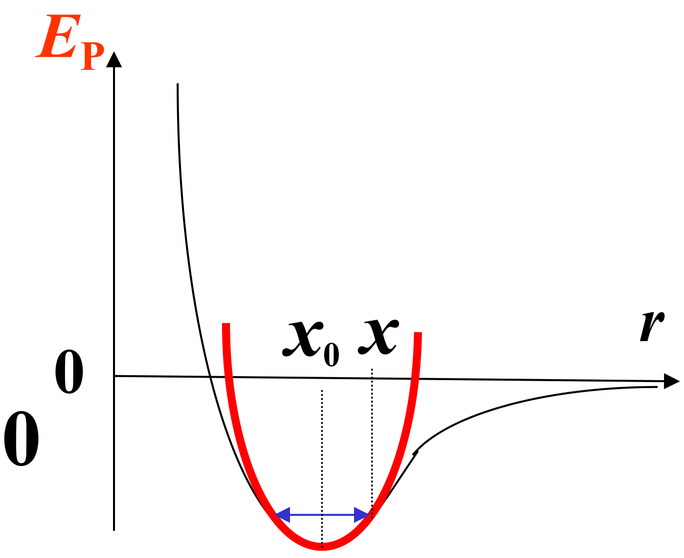
x 可作广义理解（位移、电流、场强、温度…）

(2) 弹性力 $F = -kx$ （x 为弹簧伸长量）

为什么物体在其稳定平衡位置附近的无阻尼微小振动，总可以看成是简谐振动？

$$E_P(x) = E_P(x_0) + E_P'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}E_P''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

有 $E_p'(x_0) = 0$，$E_P''(x_0) = k > 0$



$$E_{\mathrm{P}}(x)=E_{\mathrm{P}}(x_0)+0+\frac{1}{2!}k(x-x_0)^2+\cdots$$

$\therefore$ 有 $F(x)=-\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}=-k(x-x_0)$

(3) 动力学方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$

(4) 能量特点（弹性力是保守力）

$$\begin{cases} E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=\mathrm{const} \\ E_{\mathrm{P}}=\dfrac{1}{2}kx^2 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=\mathrm{const}. \\ \overline{E}_{\mathrm{k}}=\overline{E}_{\mathrm{p}}=\dfrac{1}{4}kA^2\propto A^2 \end{cases}$$

$$E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\phi)$$

$$\boxed{E=E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2}$$

$$E_k=\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\phi)=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

2. 特征量

(1) 角（圆）频率ω　$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　　由系统本身固有情况决定

(2) 振幅A　$A=\sqrt{x_0^{\,2}+\dfrac{v_0^{\,2}}{\omega^2}}$ 或 $A=\sqrt{\dfrac{2E_0}{k}}$

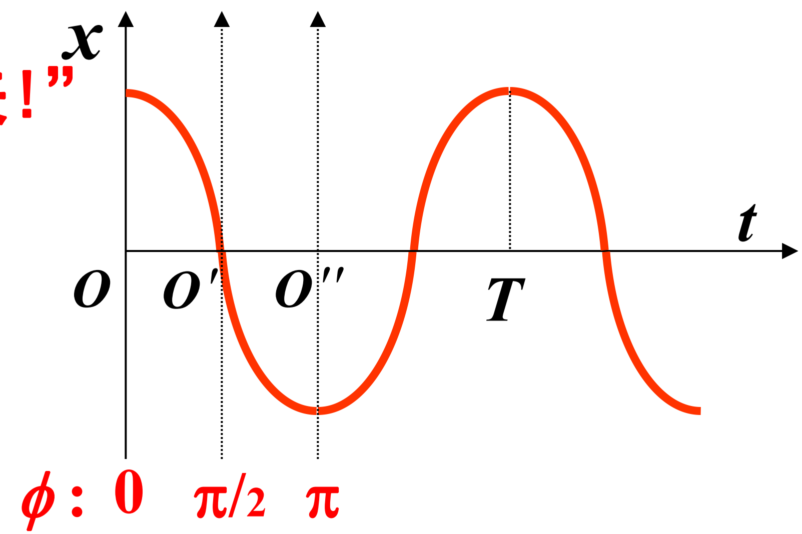
(3) 初相ϕ　$\tan\phi=-\dfrac{v_0}{\omega x_0}$

A 、ϕ都可由初始条件和系统本身情况决定。

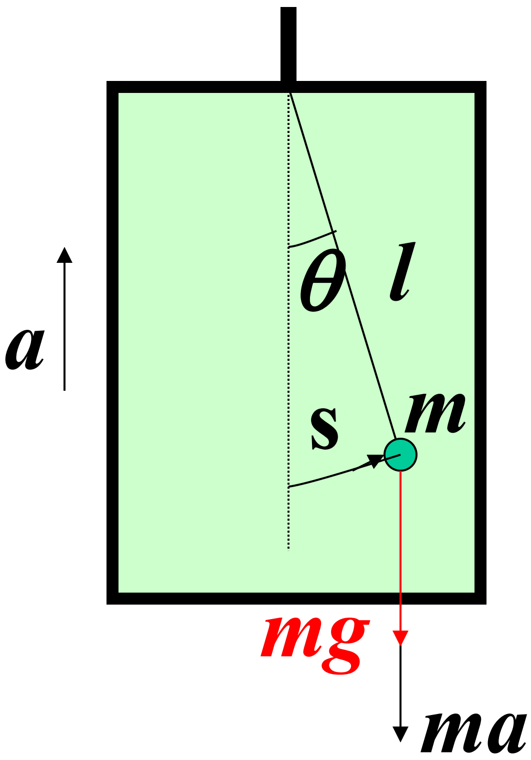
"ϕ 与何时开始计时有关！"

相差与时间差的关系：

$$\boxed{\Delta\phi=\frac{2\pi}{T}\Delta t}$$



例. 在匀加速上升的电梯中有一悬挂的摆，角位移很小时, 在电梯里是否可看成是简谐振动?



【解】 直接在电梯(非惯性系)中列牛顿方程。

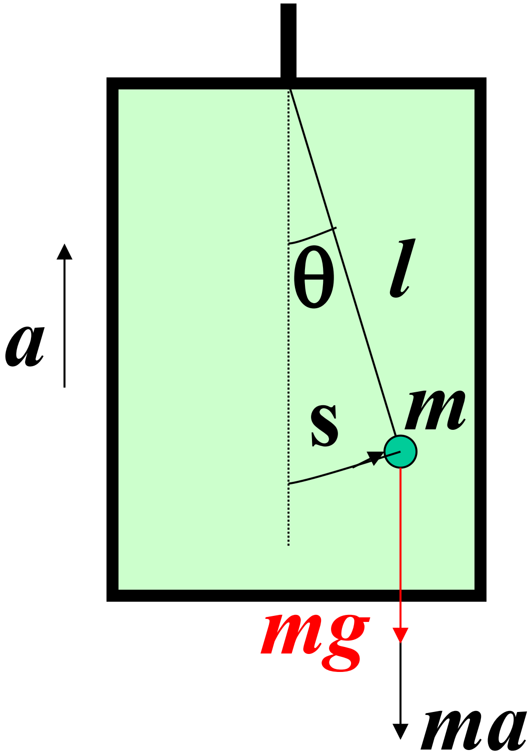
(应考虑惯性力-ma)

切向:

$$-mg\sin\theta - ma\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\because \sin\theta \approx \theta, \quad S = l\theta$$

$$\therefore -m\theta(g+a) = ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$



$$-m\theta(g+a)=ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\rightarrow\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g+a}{l}\theta=0$$

对比简谐振动动力学方程

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0}$$

可知是简谐振动。

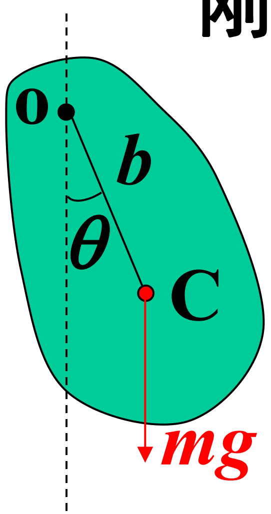
振动角频率为 $\omega=\sqrt{\dfrac{g+a}{l}}$

例. 如图所示，质量为m的刚体可在重力的力矩作用下绕水平固定轴o来回摆动（复摆）。已知刚体重心C到轴o的距离为b, 对轴o的转动惯量为J。

试证明：刚体作小幅度自由摆动时，偏角θ近似地按简谐振动变化。

【证明】设逆时针转动为正，

刚体所受的对轴的力矩为 $-mgb\sin\theta$



由转动定律 $M = J\alpha$

$$-mgb\sin\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

对小幅度自由摆动 $\sin\theta \approx \theta$

$$-mgb\sin\theta = J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \qquad \sin\theta\approx\theta$$

$$J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -mgb\theta \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x}$$

所以，偏角θ 近似地按简谐振动变化。

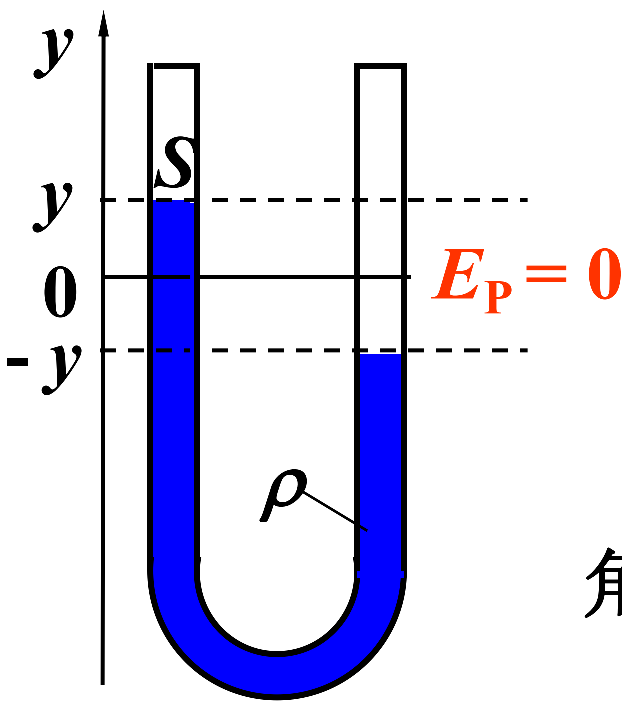
振动周期为

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{mgb}{J}}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgb}}$$

思考：若一单摆的振动周期与此相同，单摆的摆长应是多少？

例．已知： U 形管内液体质量为m，密度为ρ，管的截面积为S 。开始时，造成管两边液柱面有一定的高度差，忽略管壁和液体间的摩擦。试判断液体柱振动的性质。

解　分析能量



$$\left.\begin{aligned} &E_{\mathrm{p}} = (\rho S y g)\cdot y = \frac{1}{2}ky^2 \\ &k = 2\rho S g \\ &\text{无损耗}\quad E = \mathrm{const.} \end{aligned}\right\} \textbf{SHM}$$

角频率　$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{2\rho S g}{m}}$

作简谐振动的物体，其速度，加速度也作简谐振动:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

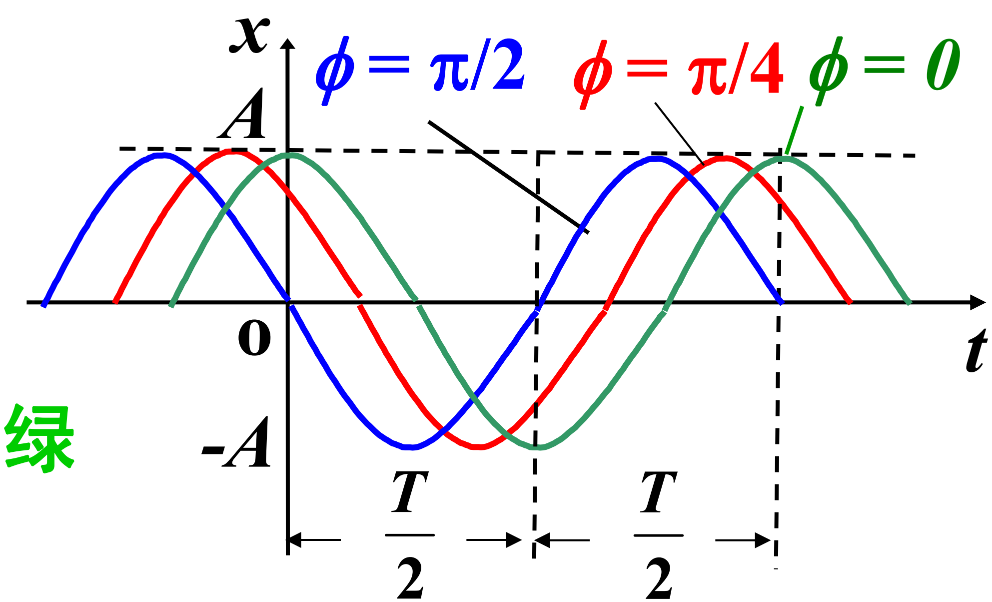
$$v = A\omega\cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$$ 领先 $\frac{\pi}{2}$ 或落后 $\frac{3\pi}{2}$

$$a = A\omega^2\cos(\omega t + \phi + \pi)$$ 领先 π 或落后 π

3. 表示法

(1) 解析法

(2) 振动曲线法

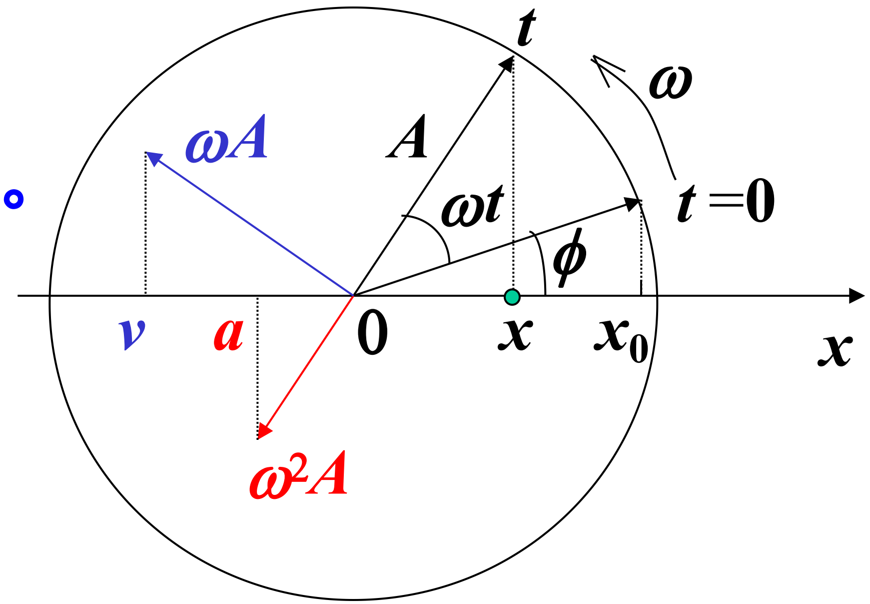


$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

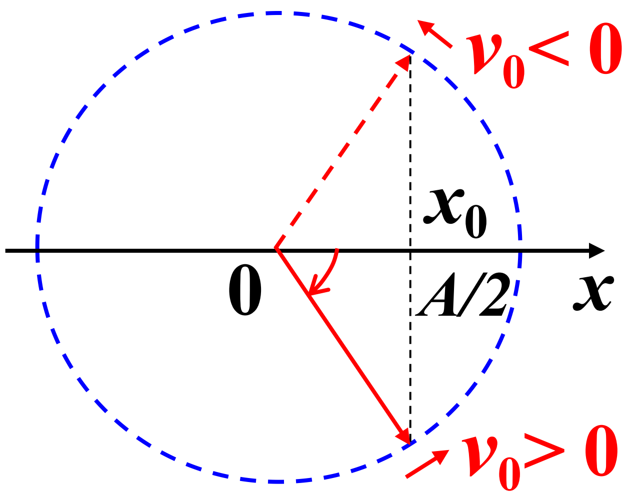
蓝领先于红，红领先于绿

(3) 旋转矢量法

用旋转矢量法定ϕ 很方便。

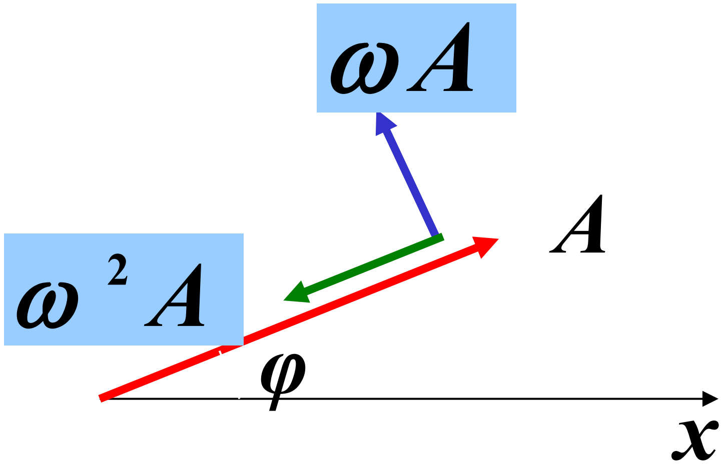


例：$\left.\begin{array}{r} x_0 = A/2 \\ v_0 > 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \phi = ?$



答：$\phi = -\dfrac{\pi}{3}$

用旋转矢量法研究振动合成也 很方便。



*复数法

$$x = A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}$$

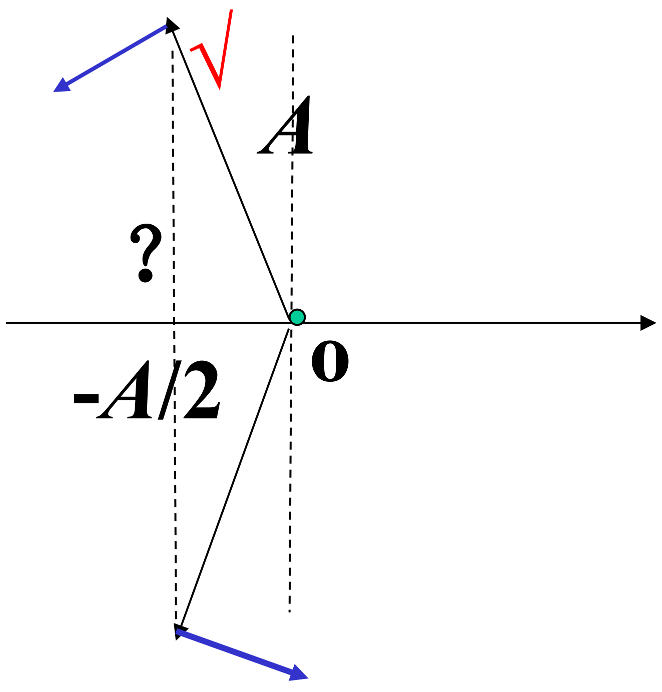
例：一简谐振子，初始位置为-A/2，正朝负方向运动，振动周期为2s，

1)确定初相位；

2)求到达平衡位置的最短时间。

解：1)　由振幅矢量图，得

$$\varphi = \frac{2\pi}{3}$$



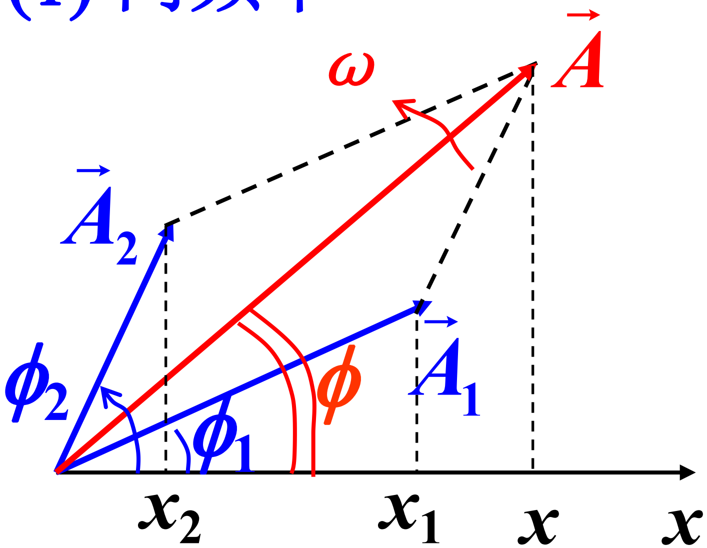
2)由初始位置到平衡位置

振幅矢量需旋转　$\Delta\varphi = 5\pi/6$

$$\therefore \text{需时} \ \Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}T = \frac{5}{6}\text{s}$$

4. 同一方向上SHM 的合成

(1) 同频率



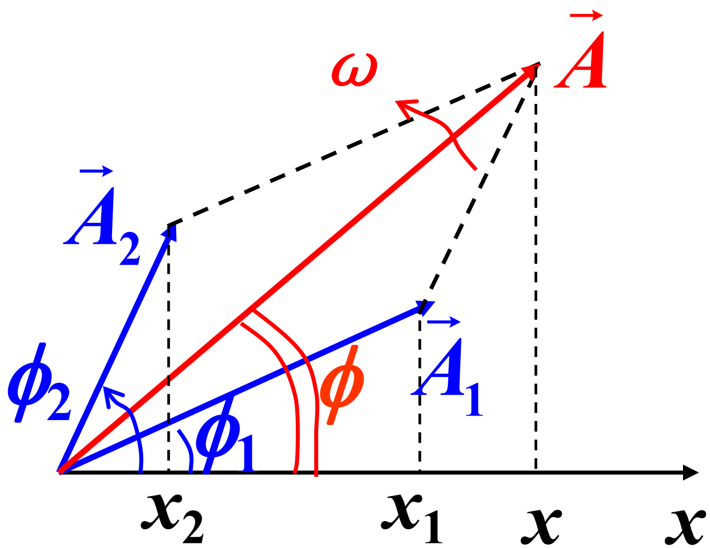
$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

合成仍为SHM

$$x = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\phi_2 - \phi_1)}$$

$$\tan\phi = \frac{A_1\sin\phi_1 + A_2\sin\phi_2}{A_1\cos\phi_1 + A_2\cos\phi_2}$$



重要的特例:

同相 $\phi_2 - \phi_1 = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$

$$\rightarrow A = A_1 + A_2$$

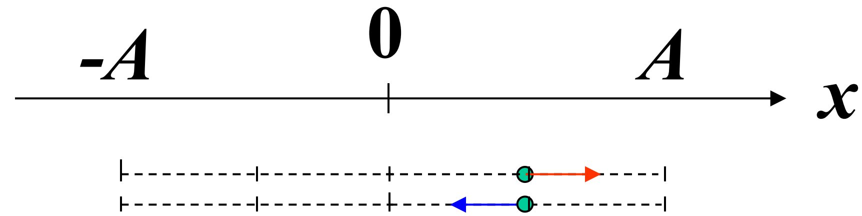
反相 $\phi_2 - \phi_1 = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$

$$\rightarrow A = \left| A_1 - A_2 \right|$$

例. 已知：两个质点平行于同一直线并排作简谐运动，它们的频率、振幅相同。在振动过程中，每当它们经过振幅一半的地方时相遇，且运动方向相反。

求：它们的相差。

【解】

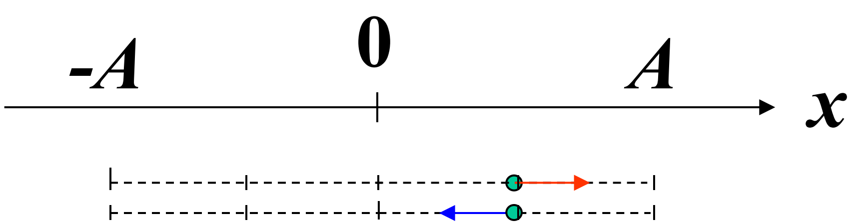


解析法. $|\Delta\phi| = \pi?$

由 $$\frac{A}{2} = A\cos(\omega t + \phi_1) = A\cos(\omega t + \phi_2)$$

$$\therefore \omega t + \phi_1 = \pm\frac{\pi}{3}, \quad \omega t + \phi_2 = \pm\frac{\pi}{3}$$

$$|\Delta\phi| = |\phi_2 - \phi_1| = 0, \frac{2\pi}{3}$$



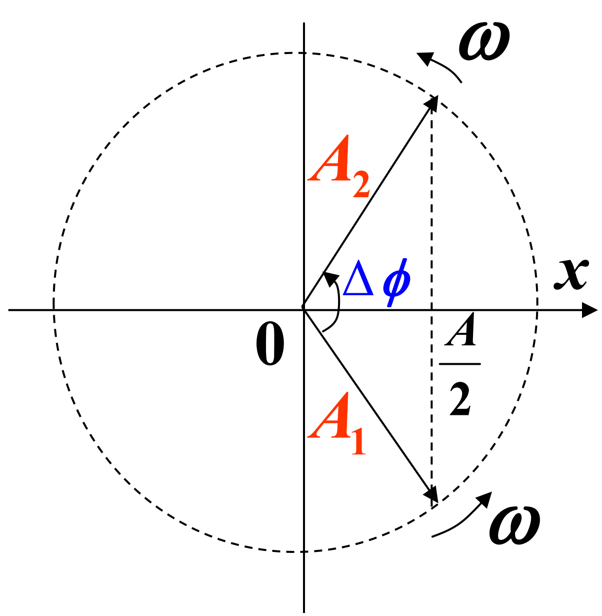
$\because$ 运动方向相反

$\therefore$ 取 $|\Delta\phi| = |\phi_2 - \phi_1| = \dfrac{2\pi}{3}$

旋转矢量法.

按题目的已知条件,
画出两个旋转矢量。
很易可以看出

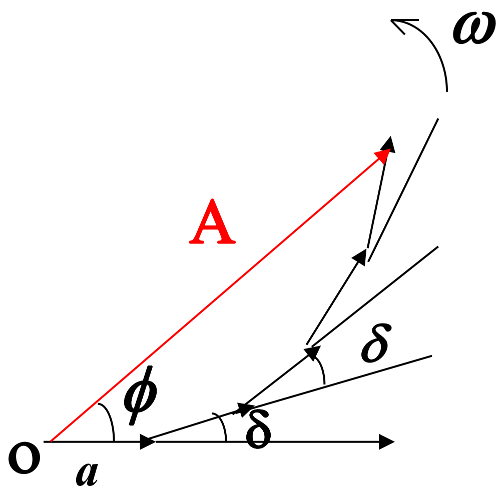
$$|\Delta\phi| = \frac{2\pi}{3}$$



若有 n 个SHM：振幅相等,初相依次差常量δ,

$$x_1 = a\cos(\omega t)$$
$$x_2 = a\cos(\omega t + \delta)$$
$$x_3 = a\cos(\omega t + 2\delta)$$
$$\cdots$$
$$x_n = a\cos[\omega t + (n-1)\delta]$$

合成 (仍是SHM) $x = A\cos(\omega t + \phi)$

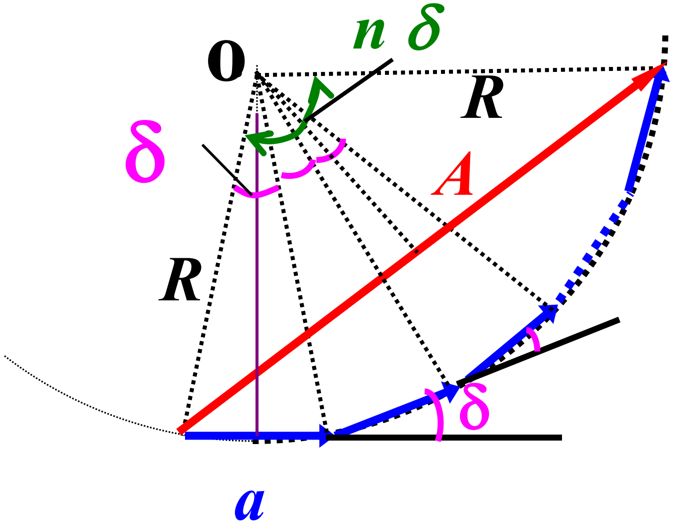


$$A = a\frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

$$\phi = \frac{n-1}{2}\delta$$

$$A = 2R\sin\frac{n\delta}{2}\ ,$$

又 $$a = 2R\sin\frac{\delta}{2}$$



$$\therefore\ A = a\cdot\frac{\sin\dfrac{n\delta}{2}}{\sin\dfrac{\delta}{2}}$$

重要的特例:

各分振动同相

$$\delta = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

可得 $A = na$

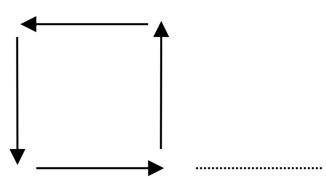
各分振动的初相差为

$$\delta = \frac{2k'\pi}{n}$$

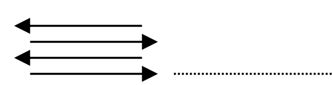
（k'为 不 等 于 nk 的整数）

可得 $A = 0$ 封闭多边形!

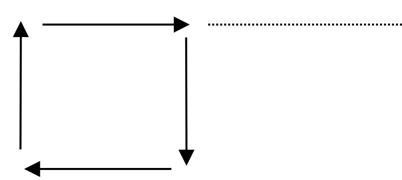
例. n=4 时 $k' = (0), \pm 1, \pm 2, \pm 3, (\pm 4), \pm 5, \pm 6, \pm 7 \cdots$



k'=1



k'=2



k'=3

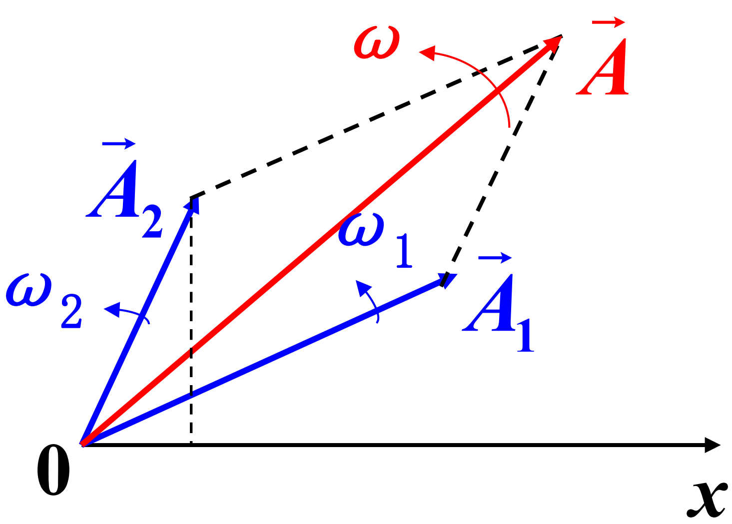
（2）不同频率

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

合成的旋转矢量在 x 轴上的投影不是SHM

A 的大小在变化，



$\vec{A}_1$，$\vec{A}_2$ 同向时，

$$A = A_{\max} = A_1 + A_2$$

$\vec{A}_1$，$\vec{A}_2$ 反向时，

$$A = A_{\min} = |A_1 - A_2|$$

（若 $A_1 = A_2$ 则 $A=0$）

当两个分振动的振幅相等而且在两个分振动矢量重合的时刻开始计时

$$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \phi)$$
$$x_2 = A\cos(\omega_2 t + \phi)$$

合成也是非简谐振动

$$x = x_1 + x_2$$
$$= \underbrace{2A\cos\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t}_{\text{变化慢}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \phi\right)}_{\text{变化快}}$$

(起调制作用–信息)

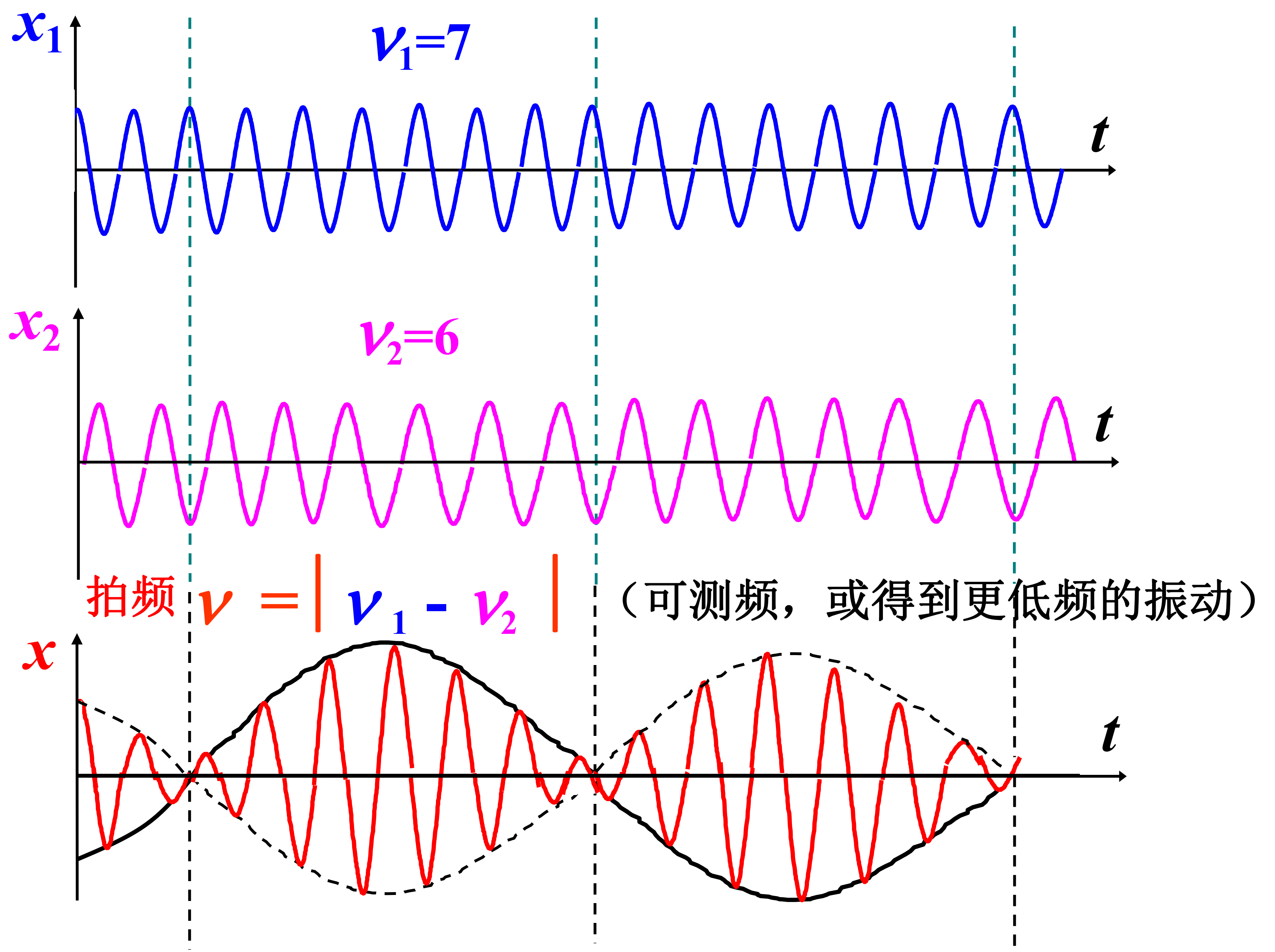
若 ω_1， ω_2 均较大，而差值较小，则合振动的”振幅”时而大（为 $2A$），时而小（为 0）

$$\omega_1 \approx \omega_2 >> |\omega_1 - \omega_2|$$

这种两个频率都较大但是相差又很小、同方向简谐振动合成时，合振动有忽强忽弱的现象，称为“拍”。

单位时间内振动加强（或减弱）的次数叫拍频。

$$\nu_{拍} = |\nu_1 - \nu_2|$$



x_1
$\nu_1=7$
t
x_2
$\nu_2=6$
t
拍频 $\nu = |\nu_1 - \nu_2|$ （可测频，或得到更低频的振动）
x
t

5. 相互垂直的 SHM 的合成

(1) 同频率 $x = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$

$y = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$

将两式联立，消去t,可得

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\phi_2 - \phi_1) = \sin^2(\phi_2 - \phi_1)$$

1） $\phi_2 - \phi_1 = 0, \pi$ 合振动为线振动。

2） $\phi_2 - \phi_1 = \pm\dfrac{\pi}{2}$ 合振动为正椭圆。

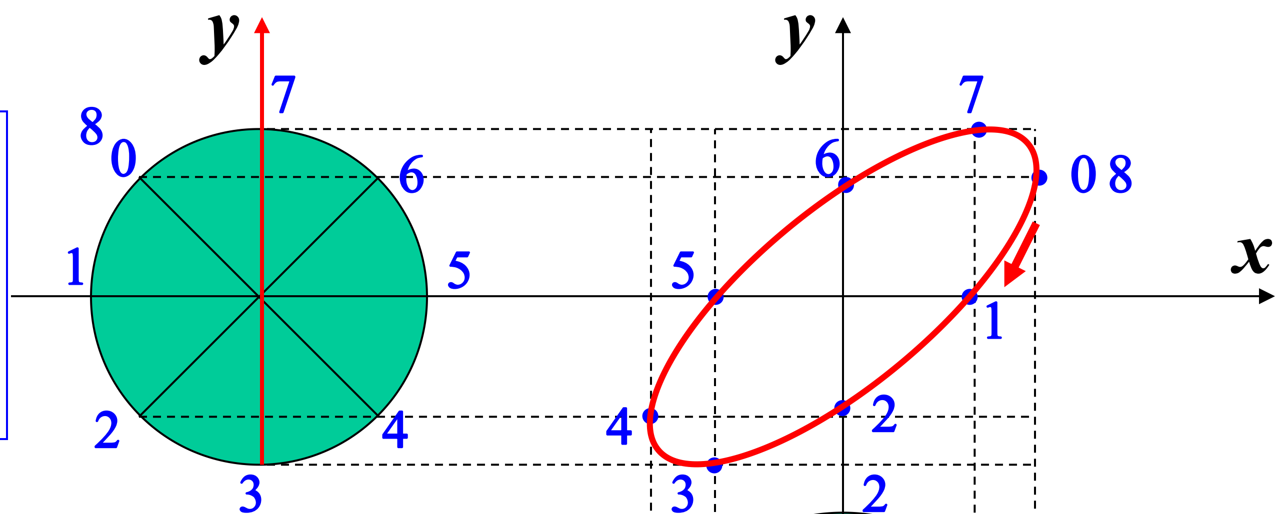
且当 $A_1 = A_2$ 时,即为圆

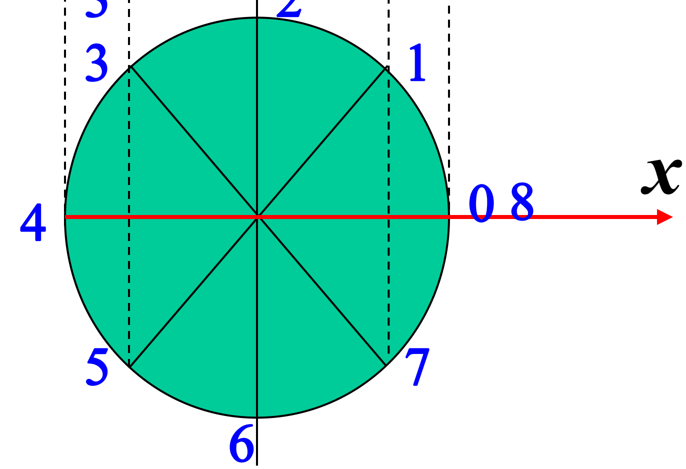
3） 一般情况下，合振动为斜椭圆

轨迹的旋转矢量作图法:

以 $\phi_2-\phi_1=\pi/4$ 为例 (y相位领先)

在半个周期里看，谁先达到最大值，谁领先。

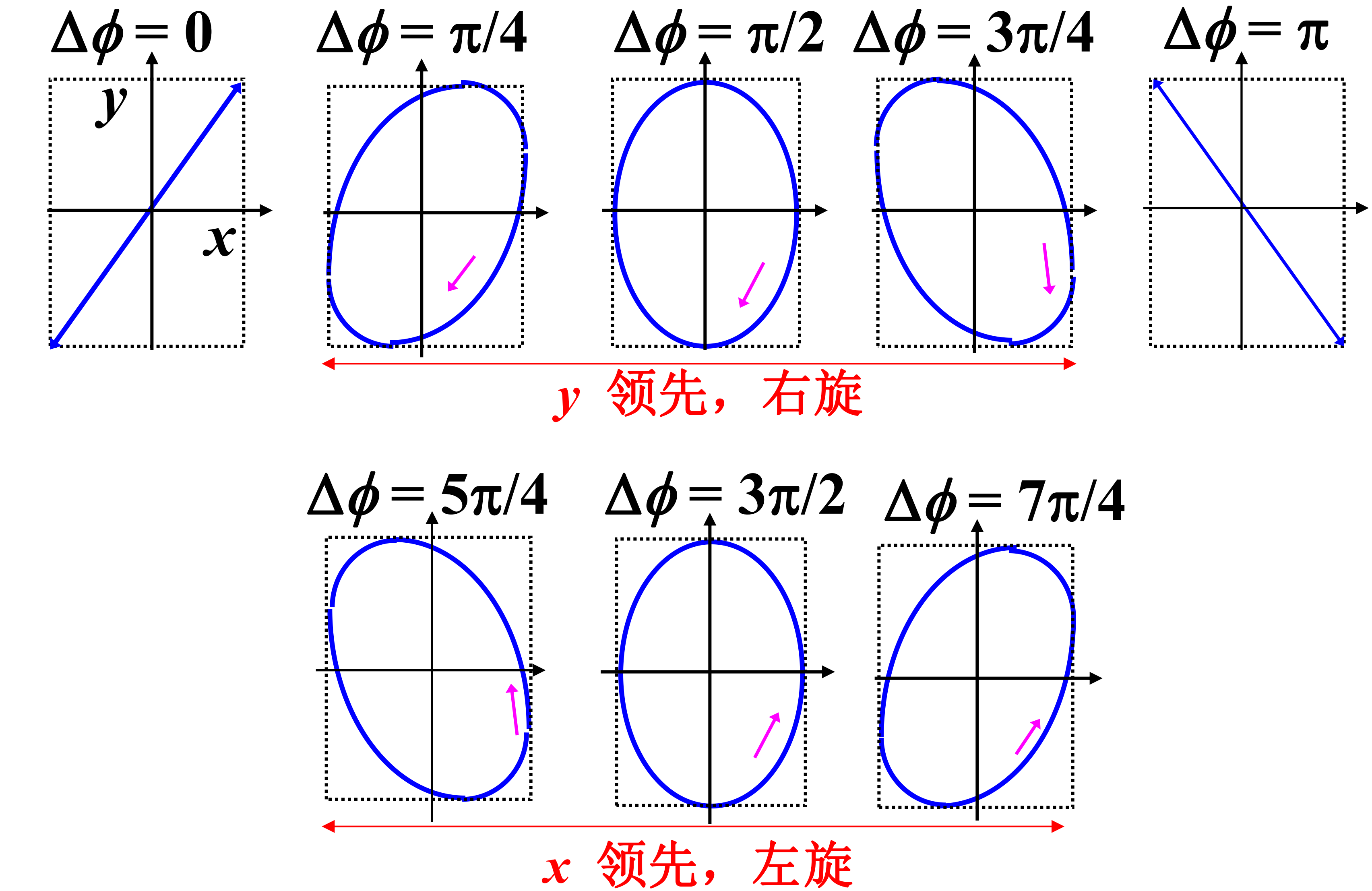




y 相位领先,则为右旋!

x 相位领先,则为左旋!

$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ 不同，椭圆形状、旋向也不同。



当两个频率有微小差别时,
位相在缓慢变化,轨迹形状也会缓慢变化,不稳定

(2) 不同频率,但有简单整数比时

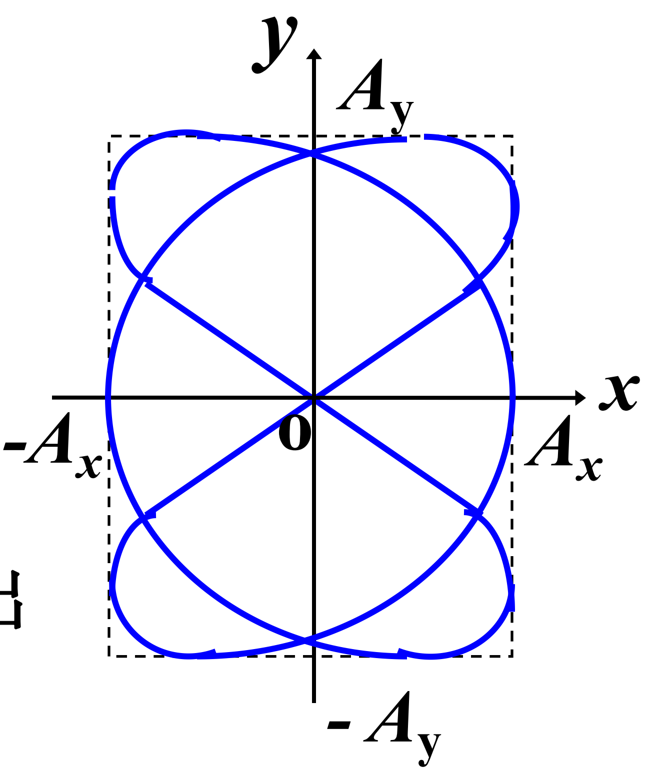
合成运动又具有稳定的封闭轨迹,称为李萨如图

例如. $x = A_x \cos(\omega_x t + \phi_x)$
$y = A_y \cos(\omega_y t + \phi_y)$

右图: $\dfrac{\omega_x}{\omega_y} = \dfrac{3}{2}$

$$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{\nu_x}{\nu_y} = \frac{x\ \text{达到最大值的次数}}{y\ \text{达到最大值的次数}}$$

具体的图形与 ϕ_x, ϕ_y 有关,可以画出



二.谐振分析

利用付里叶分解，可将任意振动分解成若干SHM 的叠加。

对周期性振动：

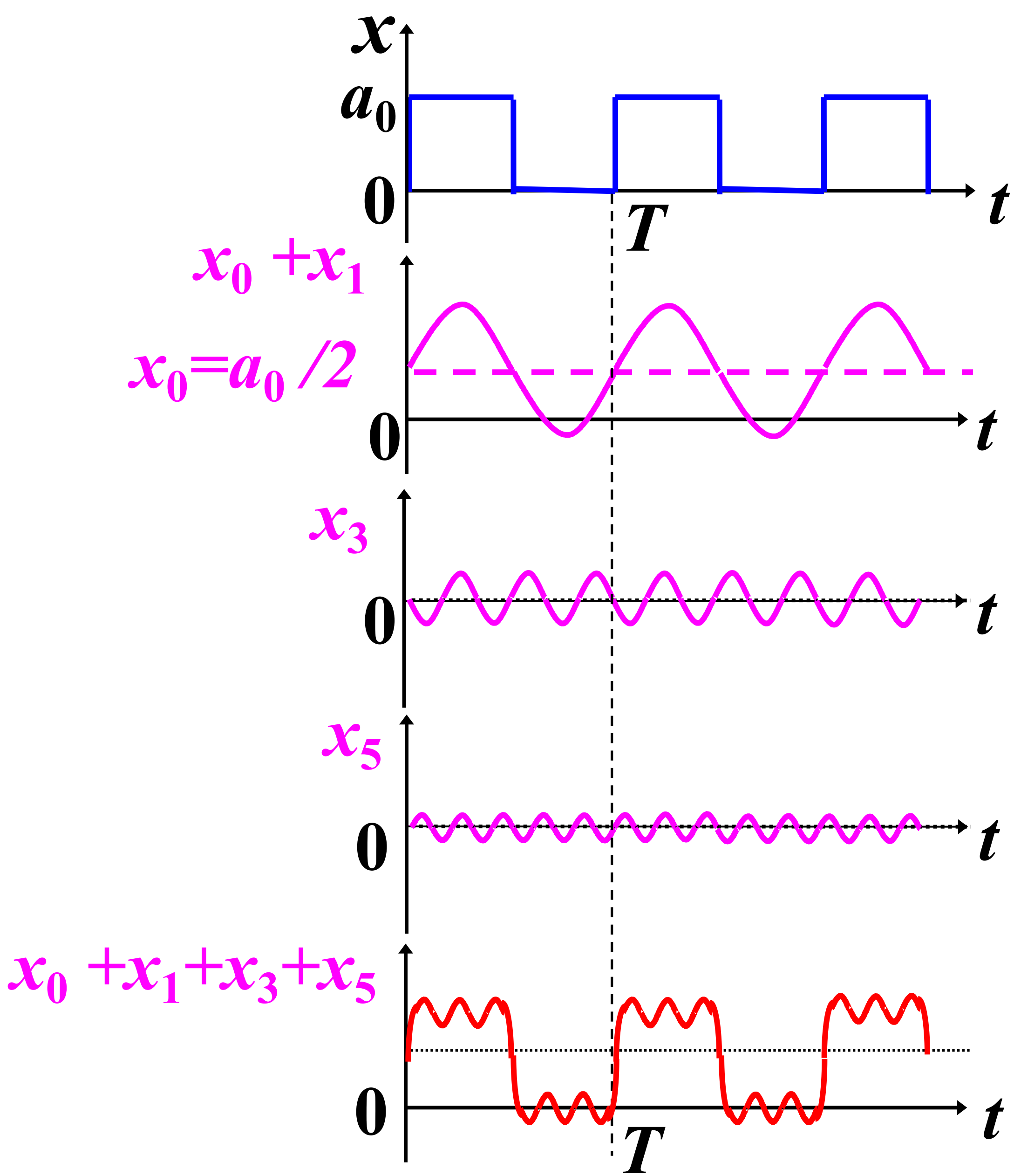
T……周期， $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\cos(k\omega\, t+\phi_k)]$$

$k=1$　基频（ω）　（决定音调）

$$\left.\begin{array}{ll} k=2 & \text{二次谐频}(2\omega) \\ k=3 & \text{三次谐频}(3\omega) \\ & \cdots\cdots \end{array}\right\}\text{高次谐频（决定音色）}$$

例如：　对方波



三. 阻尼振动

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad 2\beta = \frac{\gamma}{m}$$

1.弱阻尼（$\beta < \omega_0$）

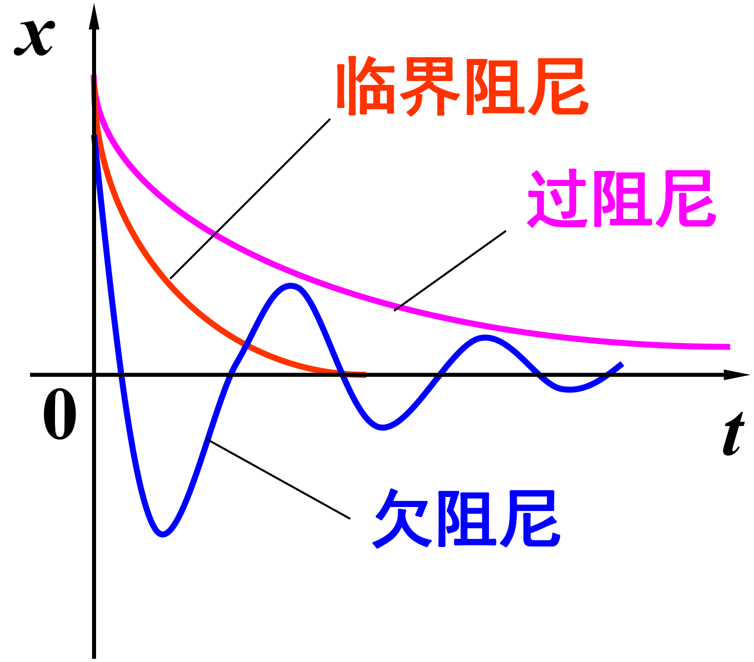
$$x = A_0\,\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t + \phi_0)$$

$\mathrm{e}^{-\beta t}$ 称为衰减因子

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$；周期比系统的固有周期长。

2.过阻尼（$\beta>\omega_0$）

为非周期振动。



3.临界阻尼（$\beta=\omega_0$）

刚能作非周期振动，

且回到平衡位置的时间最短。（电表设计）

三. 强迫振动

若系统受弹性力,阻力外,还受周期性策动力

$$F = H\cos\omega t$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + H\cos\omega t$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\beta = \frac{\gamma}{m}, \quad h = \frac{H}{m}$$

其稳定振动解为:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

稳定振动 $x = A\cos(\omega t + \phi)$

式中 $$A = \frac{h}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]^{1/2}}$$

$$\tan\phi = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

注意: 此稳定解与简谐振动很相似,但很不一样:

ω 是策动力的角频率(与系统本身的性质无关)

A,ϕ 是 h,ω,ω_0,β 的函数 (与初始条件 x_0, v_0无关)

在弱阻尼($\beta < \omega_0$)情况下,当 $\omega \approx \omega_0$ 时,

振幅 A为最大值,这称为共振现象。

共振时,振动系统能最大限度地从外界获得能量。

因为此时 $\tan\phi = -\infty$

$$\boxed{\tan\phi = \frac{-2\beta\omega}{\omega_0^{\ 2} - \omega^2}}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

有 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \omega A \cos(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})$

$$= \omega A \cos(\omega t)$$

$$\boxed{F = H \cos\omega t}$$

即策动力与速度同相,策动力总是作正功,系统就能最大限度从外界获得能量,振幅可达最大值

例. 能否用旋转矢量法解得强迫振动稳态解的 A 和 ϕ？

【解】系统受弹性力,阻力外,还受周期性策动力

$$F = H\cos\omega t$$

动力学方程 $$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - \gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + H\cos\omega t$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = h\cos\omega t$$

式中： $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$, $2\beta = \dfrac{\gamma}{m}$, $h = \dfrac{H}{m}$

方程左边是三个旋转矢量，其和为右边旋转矢量。

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=h\cos\omega t$$

设稳态解 $x=A\cos(\omega t+\phi)$ （1）

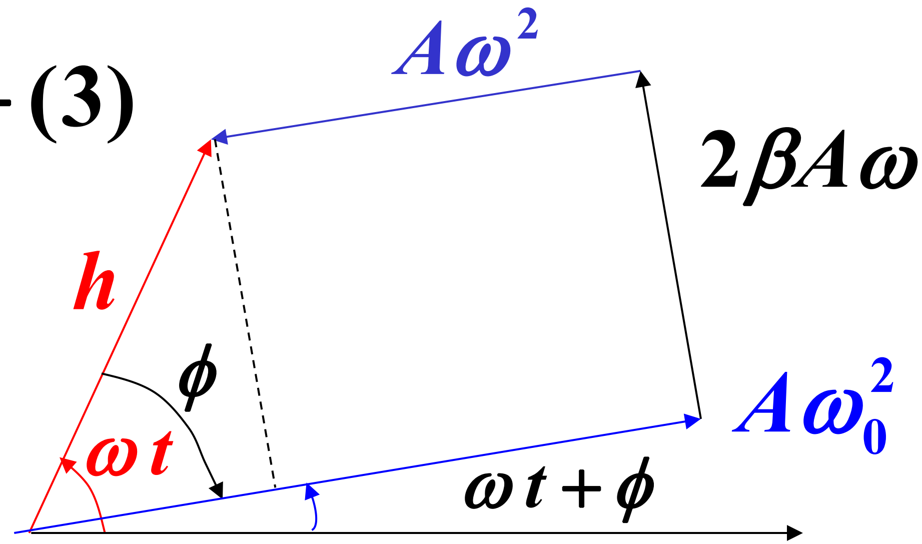
则 $\dfrac{dx}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\phi+\dfrac{\pi}{2})$ （2）

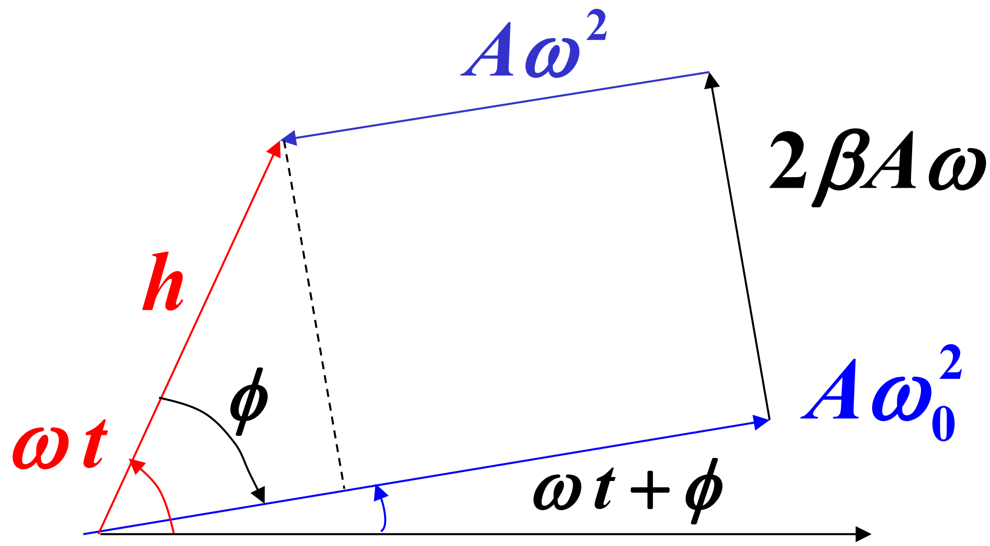
$\dfrac{d^2x}{dt^2}=A\omega^2\cos(\omega t+\phi+\pi)$ （3）

$\omega_0^2\times(1)+2\beta\times(2)+(3)$

$=h\cos\omega t$

用旋转矢量法:





$$h=\left[\left(A\omega_0^2-A\omega^2\right)^2+\left(2\beta A\omega\right)^2\right]^{1/2}$$

可得 $$A=\frac{h}{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(2\beta\omega\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$tg\phi=-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$ 证毕