



Review

- Leibnitz判别法

$$a_n \searrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n \text{ 收敛.}$$

- Dirichlet判别法

$$\left. \begin{array}{l} \text{数列}\{a_n\}\text{单调趋于}0; \\ \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M, \forall n; \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_n b_n \text{ 收敛.}$$



- Abel判别法

$$\left. \begin{array}{l} \text{数列}\{a_n\}\text{单调且有界,} \\ \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \text{收敛} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} a_n b_n \text{收敛.}$$

- Taylor展开在级数判敛中的应用

- 非负项级数的比较、比值判敛法不适用于一般项级数



• 无穷和运算的结合律

(1) $\sum a_n$ 收敛 \Rightarrow

$$(a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) \\ + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots$$

收敛到同一和.

$$(2) (a_1 + \cdots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \cdots + a_{n_2}) \\ + \cdots + (a_{n_{k-1}+1} + \cdots + a_{n_k}) + \cdots$$

收敛, 且同一括号中各项有相同的正负号

$\Rightarrow \sum a_n$ 也收敛到同一和.



• 无穷和运算的交换律

Thm $\sum a_n$ 绝对收敛

\Rightarrow 任意重排 $\sum a'_n$ 也绝对收敛到同一和.

Thm (Riemann定理) $\sum a_n$ 条件收敛, 则

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}, \exists$ 重排 $\sum a'_n, s.t., \sum a'_n = \lambda.$



Chap6. 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots,$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) \triangleq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x).$$



§ 1. 函数项级数的收敛性

1. 函数项级数的逐点收敛性

Def. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 x_0 收敛, 称 x_0 为函数项级数的收敛点; 所有收敛点构成的集合称为函数项级数的收敛域.

Def. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x_0)|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 x_0 绝对收敛.



例. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, x \in (-1, 1).$

例. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, x \in \mathbb{R}.$

Proof. $x = 0$ 时, 结论成立. 任意取定 $x \neq 0$, 存在 ξ 介于 0 与 x 之间, s.t.

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{e^{\xi} x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \frac{e^{|x|} |x|^{n+1}}{(n+1)!} \triangleq a_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0, \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛}, \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0, \text{ 故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x. \square$$



2. 函数项级数的一致收敛性

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0) = S(x_0) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = S(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k(x_0) = S(x_0)$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0), s.t.,$$

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x_0) - S(x_0) \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$



$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x_0)$ 收敛

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0), s.t.,$$

$$\left| S_{n+p}(x_0) - S_n(x_0) \right| < \varepsilon, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x_0), s.t.,$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x_0) \right| < \varepsilon, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Remark. 若以上分析中 $N = N(\varepsilon)$, 与 x_0 无关, 则得到函数列的一致收敛性和函数项级数的一致收敛性.



Def. 称函数列 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $x \in I$ 上一致收敛, 若 $\exists S$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$$

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon, \forall n > N, \forall x \in I.$$

此时, 也称 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $x \in I$ 上一致收敛到 $S(x)$.

Thm (Cauchy准则) $\{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $x \in I$ 上一致收敛

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$$

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in I.$$



Remark. $\{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $x \in I$ 上一致收敛到 $S(x)$

$\Rightarrow \{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $x \in I$ 上逐点收敛到 $S(x)$.

Remark.

$\left. \begin{array}{l} \{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty} \text{ 在 } x \in I \text{ 上逐点收敛到 } S(x) \\ \{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty} \text{ 在 } x \in I \text{ 上一致收敛} \end{array} \right\}$

$\Rightarrow \{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $x \in I$ 上一致收敛到 $S(x)$.



Def. $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$, 若 $\{S_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $x \in I$ 上一致收敛

(到 $S(x)$), 则称 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 $x \in I$ 上一致收敛(到 $S(x)$).

Thm. $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 $x \in I$ 上一致收敛

$\Leftrightarrow \exists S(x), \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - S(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, \forall x \in I.$$

\Leftrightarrow (Cauchy准则) $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon), s.t.,$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, \forall p \geq 1, \forall x \in I.$$



例. $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 在 $(-1,1)$ 上非一致收敛.

Proof. $\left| \sum_{k=0}^n x^k - \frac{1}{1-x} \right| = \left| \frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}.$

取 $\varepsilon_0 = 1, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 = N+1, x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N+2}} \in (\frac{1}{2}, 1), s.t.,$

$$\left| \sum_{k=1}^{n_0} x_0^k - \frac{1}{1-x_0} \right| = \frac{|x_0|^{n_0+1}}{1-x_0} > \frac{1/2}{1/2} = 1. \square$$



例. $f_n(x) = x^n$, 证明 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛.

Proof. 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n = N + 1, \exists p = N + 1,$

$$\exists x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{N+1}} \in (0,1), \text{ s.t.,}$$

$$\left|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right| = \left|x_0^{n+p} - x_0^n\right|$$

$$= x_0^n(1 - x_0^p) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \varepsilon_0. \square$$

Remark. $f_n(x) = x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛到 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1); \\ 1, & x = 1. \end{cases}$



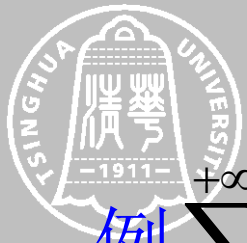
例. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$ 在 \mathbb{R} 上一致收敛.

Proof. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x}$ 为交错级数, $\frac{1}{n + \sin x} \downarrow 0$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(-1)^k}{k + \sin x} \right| \leq \frac{1}{n + 1 + \sin x} \leq \frac{1}{n}.$$

于是, $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1, \forall n > N, \forall x \in \mathbb{R}$, 有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{(-1)^k}{k + \sin x} \right| < \varepsilon. \text{ 故 } \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sin x} \text{ 在 } \mathbb{R} \text{ 上一致收敛. } \square$$



例. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^n}$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致收敛.

分析: 令 $f(t) = \frac{t}{(1+t)^n}, n > 1$, 则

$$f(0) = 0, f(+\infty) = 0, f(t) > 0, \forall t \in (0, +\infty),$$

$$f'(t) = \frac{1}{(1+t)^n} - \frac{nt}{(1+t)^{n+1}} = \frac{1+t-nt}{(1+t)^{n+1}},$$

故 $f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值点为 $1/(n-1)$.

$\frac{x^3}{(1+x^3)^n}$ 的最大值点 x_n 满足: $x_n^3 \sim \frac{1}{n}, n \rightarrow \infty$ 时.



Proof. 用Cauchy准则.

取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{9}$, $\forall N$, 任意取定 $n > N$, $x = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, 有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x^3}{(1+x^3)^k} \right|_{x^3=1/n} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1/n}{(1+1/n)^k} \\ &\geq \frac{1}{n} \frac{1}{(1+1/n)^{2n}} \cdot n \geq \left(\frac{1}{(1+1/n)^n} \right)^2 \geq \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

故 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^n}$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致收敛. \square



3. 函数项级数一致收敛的判别法

Thm(Weierstrass判别法) 若非负项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ 收敛, 且

$$|f_n(x)| \leq M_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,$$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

Proof. $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} M_k, \quad \forall x \in I, \forall n, p. \square$



Thm(Dirichlet判别法) 若

(1) 函数列 $\{a_n(x)\}$ 对任意固定的 $x \in I$ 都单调, 且在 $x \in I$ 上一致收敛到0;

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ 的部分和函数列在 $x \in I$ 上一致有界, 即

$$\exists M > 0, s.t. \left| \sum_{k=1}^n b_k(x) \right| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I;$$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 $x \in I$ 上一致收敛.

Proof.
$$\left| \sum_{k=1}^p a_{n+k}(x)b_{n+k}(x) \right| \leq 2M \left(|a_{n+1}(x)| + 2|a_{n+p}(x)| \right). \square$$



Thm(Abel判别法) 若

(1) 函数列 $\{a_n(x)\}$ 对任意固定的 $x \in I$ 都单调, 且在 $x \in I$ 上一致有界, 即存在 $M > 0, s.t.$

$$|a_n(x)| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I;$$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$ 在 $x \in I$ 上一致收敛;

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)b_n(x)$ 在 $x \in I$ 上一致收敛.



例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$ 在 \mathbb{R} 上一致收敛.

Proof. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad \left| \frac{x}{1+n^4 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^2},$$

由 Weierstrass 判别法知, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4 x^2}$ 在

\mathbb{R} 上一致收敛. \square



例. $\alpha > 2$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} x^\alpha e^{-nx^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

Proof. 令 $f_n(x) = x^\alpha e^{-nx^2}$, 则 $f_n(x) > 0, \forall x > 0$, 且

$$f_n(0) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, f'_n(x) = e^{-nx^2} (\alpha x^{\alpha-1} - 2nx^{\alpha+1}),$$

可知 $x = \sqrt{\alpha/2n}$ 是 $f_n(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的最大值点,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(\sqrt{\alpha/2n}) = \left(\sqrt{\alpha/2}\right)^\alpha \frac{1}{n^{\alpha/2}} e^{-\alpha/2}, \forall x \geq 0.$$

$\alpha > 2$, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} x^\alpha e^{-nx^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛 (Weierstrass). \square



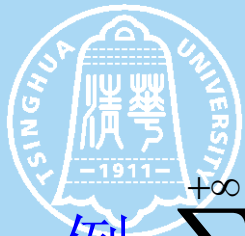
例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上一致收敛.

Proof.
$$\frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}} = \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} \cdot \left(1 / \sqrt{1 + \frac{x}{n}} \right) \triangleq a_n \cdot b_n(x).$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, a_n 与 x 无关, 于是 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 关于 x 一致收敛.

$x \in (0, +\infty), |b_n(x)| \leq 1, \{b_n(x)\}$ 一致有界, 关于 n 单调.

由Abel判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n(n+x)}}$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上一致收敛. \square



例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{2^n x}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上绝对收敛性与一致收敛性?

解: $\forall x \in (0, +\infty), \left| \sin \frac{1}{2^n x} \right| \leq \frac{1}{2^n x}$, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{2^n x}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上绝对收敛.

取 $\varepsilon_0 = 1, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n_0 = N + 1, x_0 = \frac{1}{2^N \pi}, s.t.,$

$$\left| \sin \frac{1}{2^{n_0} x_0} \right| = \left| \sin \frac{\pi}{2} \right| = 1 = \varepsilon_0.$$

故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{2^n x}$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上非一致收敛 (Cauchy). \square



例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上绝对收敛性与一致收敛性?

解: 给定 x , $\left| \frac{(-1)^n}{x^2 + n} \right| = \frac{1}{x^2 + n} \sim \frac{1}{n}$, $n \rightarrow +\infty$ 时. 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$

在 \mathbb{R} 上点点非绝对收敛.

$\{(-1)^n\}$ 的部分和关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致有界; $\left\{ \frac{1}{x^2 + n} \right\}$ 在 $x \in \mathbb{R}$

上关于 n 单调, 一致收敛到 0; 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x^2 + n}$ 在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上

一致收敛(Dirichlet). \square



Remark. 以上两个例子说明: 绝对收敛性与一致收敛性没有必然的联系.



作业：习题6.1 No. 2 (8) (9), 10.



例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ ($0 < \delta < \pi$) 上一致收敛.

Proof. $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ 与 x 无关, $\downarrow 0$.

$$\left| \sum_{n=1}^m \sin nx \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}}, \quad \forall x \in [\delta, 2\pi - \delta], \forall m \in \mathbb{N}.$$

故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ ($0 < \delta < \pi$) 上一致收敛 (Dirichlet). \square

Question. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上是否一致收敛?



例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上非一致收敛.

Proof. 用Cauchy准则.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin kx}{k} \right|_{x=1/2n} &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin(k/2n)}{k} \\ &\geq \sin \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上不一致收敛. \square



附录.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2.$$

Proof. Step1. $1/(n+1) < \ln(1+1/n) < 1/n$.

Step2. 令 $x_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n - \ln n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

事实上, $x_{n+1} - x_n = 1/(n+1) - \ln(1+1/n) < 0$, $x_n \downarrow$,

$$\begin{aligned} x_n &> \ln(1+1) + \ln(1+1/2) + \cdots + \ln(1+1/n) - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0. \end{aligned}$$

Step3. $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = (x_{2n} + \ln 2n) - (x_n + \ln n) = x_{2n} - x_n + \ln 2 \rightarrow \ln 2$.