热学习题课

热学教学要求

1. 能熟练地用理想气体状态方程解有关气体状态的问题

2. 确切理解分子速率分布函数的意义并能进行简单的计算

3. 掌握 功、热量、内能 的计算

4. 掌握掌握熵 的计算

功、热量、内能 的计算

（1）直接计算

计算公式	适用对象	适用条件
$A=\int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$	任何系统	准静态过程
$Q=\nu C_{\mathrm{m}}\Delta T$	任何系统	始末态为平衡态，$C_{\mathrm{m}}=\mathrm{const.}$
$\Delta E=\nu C_{V,\mathrm{m}}\Delta T$	理想气体	始末态为平衡态，$C_{V,\mathrm{m}}=\mathrm{const.}$

（2）用热力学第一定律计算

$Q=\Delta E+A$ —适用于任何系统和任何过程

（3）用 p — V 图分析

1）过程曲线与 V 轴所围的面积 $=|A|$

2）理想气体等温线上 $\Delta E=0$

3）绝热线上 $Q=0$

两条重要的参考线

熵 的计算

（1）选可逆过程

$$S_2 - S_1 = \int_{(1)\,R}^{(2)} \frac{\mathrm{d}Q}{T}$$

（始、末态必须与原过程的始、末态一致）

例如，不能用可逆绝热膨胀来代替气体的绝热自由膨胀。

（2）利用熵的公式

对理想气体：

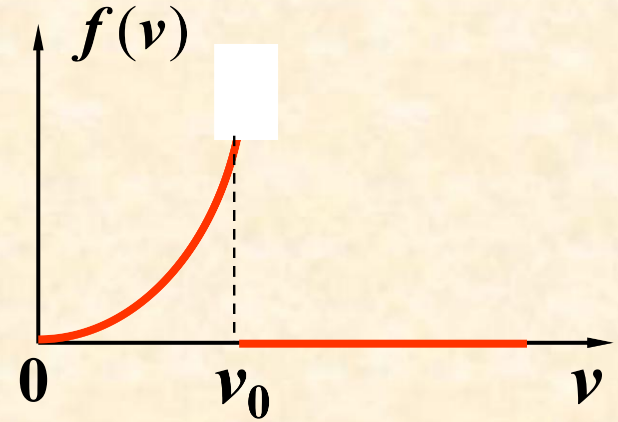
$$\Delta S = S_2 - S_1 = \nu C_{V,\mathrm{m}} \ln \frac{T_2}{T_1} + \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$(C_{V,\mathrm{m}} = \mathrm{const.})$$

*（3）利用 T—S 图

第1题.(分子动理论)设某气体的速率分布函数为

$$f(v)=\begin{cases} av^2, & (0\le v\le v_0) \\ 0, & (v>v_0) \end{cases}$$



求:（1）常量 a 和 v_0 的关系

（2）平均速率 $\bar{v}$

（3）速率在 $0-\dfrac{v_0}{2}$ 之间分子的平均速率 $\bar{v}'$

【解】（1）常量 a 和 v_0 的关系

由归一化条件 $\int_0^\infty f(v)\,\mathrm{d}v=1$

$$\int_0^\infty f(v)\,\mathrm{d}v=\int_0^{v_0} av^2\,\mathrm{d}v=\frac{1}{3}av_0^3=1 \rightarrow a=\frac{3}{v_0^3}$$

（2）平均速率 $\bar{v}$

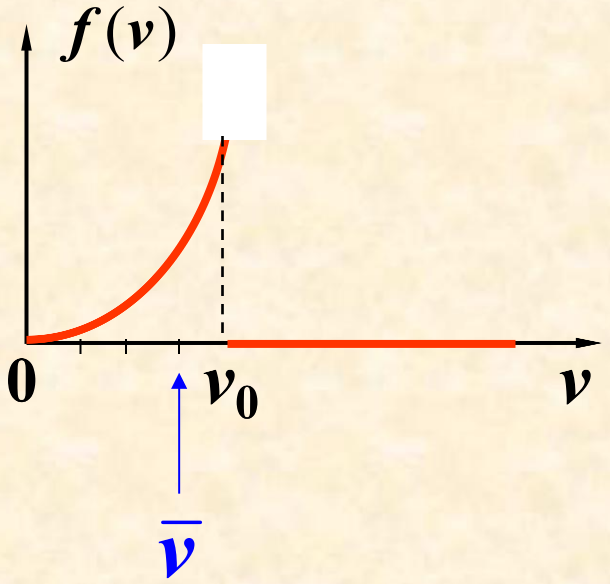
设总分子数为N，则

$$\bar{v}=\frac{\int_0^\infty v\cdot \mathrm{d}N}{N}=\frac{\int_0^\infty v\cdot Nf(v)\,\mathrm{d}v}{N}$$

$$=\int_0^\infty v\cdot f(v)\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^{v_0} v\cdot av^2\,\mathrm{d}v$$

$$=\frac{a}{4}v_0^4=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{v_0^3}\right)v_0^4=\frac{3}{4}v_0$$



（3）速率在 $0-\dfrac{v_0}{2}$ 之间分子的平均速率 $\overline{v}'$

$$\overline{v}'=\int_0^{v_0/2} v\cdot f(v)\,\mathrm{d}v$$ 对否？

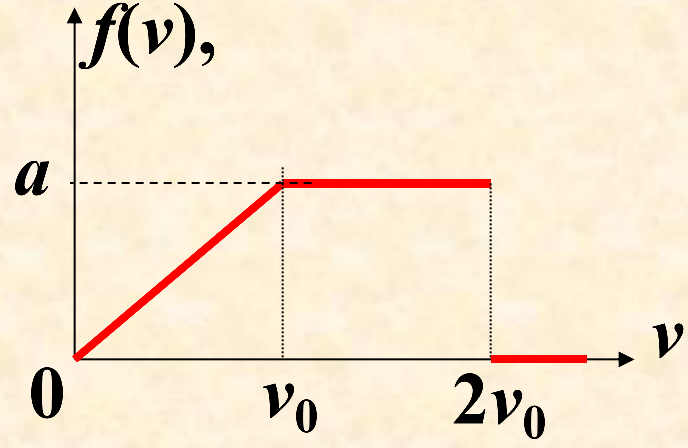
【答】不对！

$$\overline{v}'=\frac{\int_0^{v_0/2} v\,\mathrm{d}N}{\int_0^{v_0/2}\mathrm{d}N}=\frac{\int_0^{v_0/2} v\cdot Nf(v)\,\mathrm{d}v}{\int_0^{v_0/2} Nf(v)\,\mathrm{d}v}\ \text{(分母不是}N\text{)}$$

$$=\frac{\int_0^{v_0/2} v\cdot av^2\,\mathrm{d}v}{\int_0^{v_0/2} av^2\,\mathrm{d}v}=\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{v_0}{2}\right)^4}{\frac{1}{3}\left(\frac{v_0}{2}\right)^3}=\frac{3}{8}v_0$$

第2题. (分子动理论)

$$f(v)\begin{cases} = av/v_0 & (0 \le v \le v_0) \\ = a & (v_0 \le v \le 2v_0) \\ = 0 & (v > 2v_0) \end{cases}$$



在作业9.18题中　已求得 $a = \dfrac{2}{3v_0}$;　$\bar{v} = \dfrac{11}{9}v_0$

$v > v_0$的分子数为 $\dfrac{2}{3}N$;　$v < v_0$的分子数为 $\dfrac{1}{3}N$

问：该系统粒子按平动动能ε分布的函数$\varphi(\varepsilon)$如何?

$\varepsilon = \dfrac{1}{2}mv^2$,　分布 $\varphi(\varepsilon)$与分布$f(v)$一样吗?

即$\varphi(\varepsilon) = f(\sqrt{\dfrac{2\varepsilon}{m}})$ 吗?

【解】 $$\varepsilon=\frac{1}{2}mv^{2}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon=mv\,\mathrm{d}v$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{N}=\underline{f(v)}\,\mathrm{d}v=f\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}\right)\mathrm{d}v$$

$$=f\left(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}\right)\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{mv}=\underline{\varphi(\varepsilon)}\,\mathrm{d}\varepsilon$$

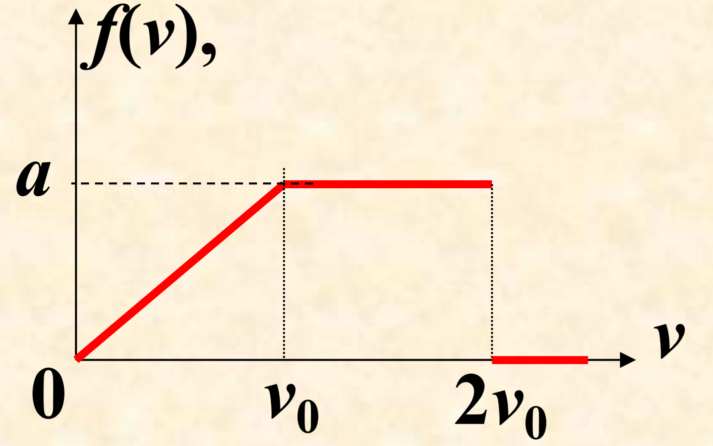
有 $$\varphi(\varepsilon)=\frac{f(v)}{mv}=\frac{f(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}})}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

即 $\varphi(\varepsilon)\neq f(\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}})$

所以，分布 $f(v)$ 与分布 $\varphi(\varepsilon)$ 不一样！

下面来画出$\varphi(\varepsilon)\sim\varepsilon$ 分布曲线：

$0<v<v_0$ 区， $f(v)=\dfrac{a}{v_0}v$



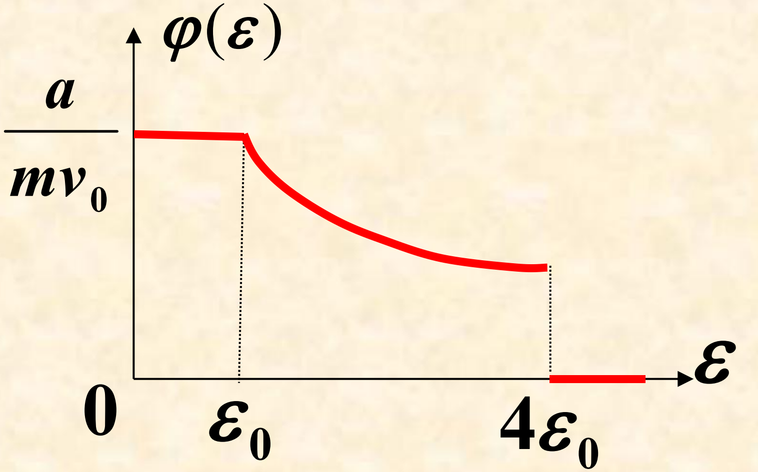
$$\therefore \varphi(\varepsilon)=\frac{f(v)}{mv}=\frac{a}{mv_0}=\text{const.}$$

$v_0<v<2v_0$ 区， $f(v)=a$

$$\therefore \varphi(\varepsilon)=\frac{f(v)}{mv}=\frac{a}{mv}=\frac{a}{\sqrt{2m\varepsilon}}$$

可以看出，$\varphi(\varepsilon)\sim\varepsilon$

分布曲线：



$$\varepsilon_0=\frac{1}{2}mv_0^2$$

第3题. dQ = dE+dA和 TdS = dE+dA 等价吗？

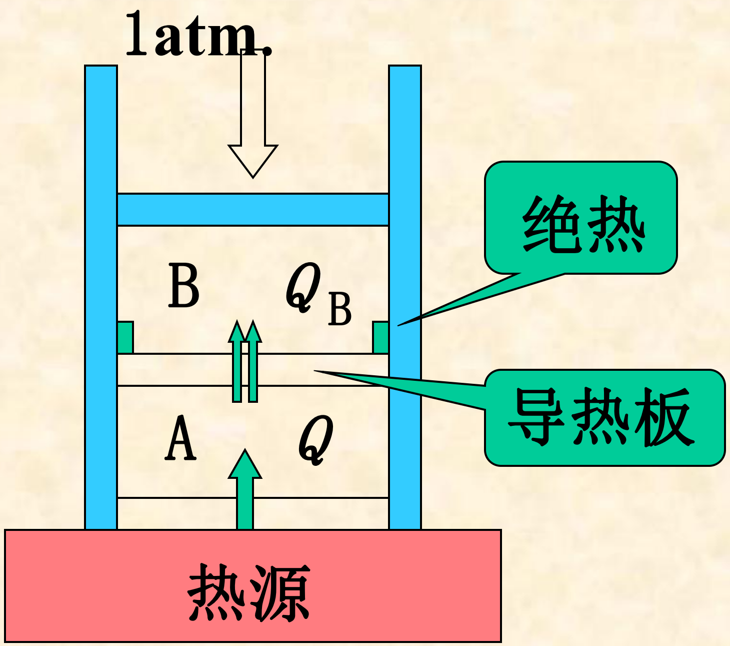
【答】二者不完全等价。

前者适用于任何元过程，

而后者只适用于可逆元过程

（因为只有可逆过程才有dQ= TdS）。

第4题. 已知一气缸如图，A、B内各有 1mol 理想气体氮气，$V_A=V_B, T_A=T_B$。有 335J 的热量缓慢地传给气缸，活塞上方的压强始终是1atm（忽略导热板的吸热，活塞重量及摩擦）。



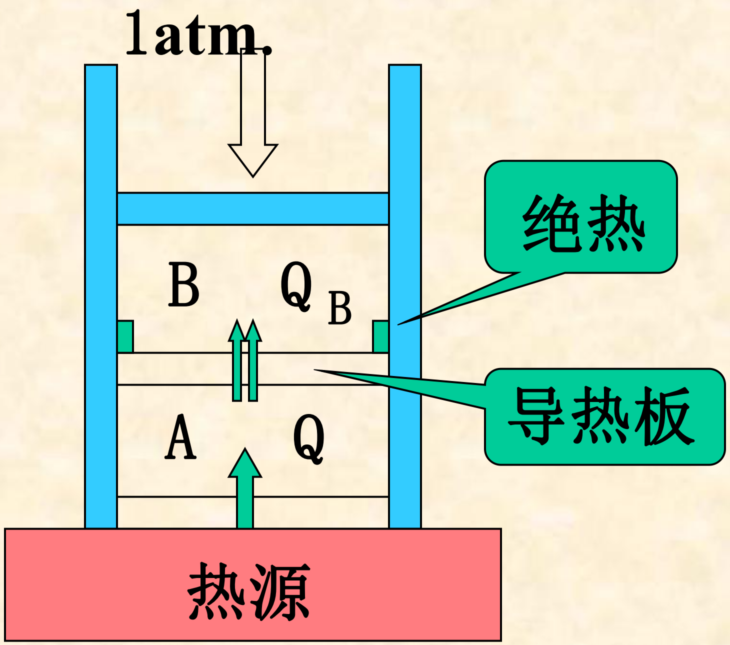
求：(1) A、B两部分温度的增量及净吸的热量。

(2)若导热隔板换成可自由滑动的绝热隔板，再求第(1)问的各量。

【解】 (1) 求A、B两部分温度的增量及净吸的热量

因为隔板导热

所以 $\Delta T = T_A' - T_A = T_B' - T_B$



A：等容过程

$$Q - Q_B = \Delta E + A = \Delta E$$

$$Q - Q_B = C_{V,m}\Delta T \cdots\cdots\cdots(1)$$

B：等压过程

$$Q_B = C_{P,m}\Delta T \cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) (2)联立，得

温度的增量 $$\Delta T=\frac{Q}{C_{V,\mathrm{m}}+C_{P,\mathrm{m}}}=\frac{Q}{\frac{i}{2}R+\frac{i+2}{2}R}$$

$$=\frac{Q}{(i+1)R}=\frac{335}{(5+1)\times 8.31}=6.72\,\mathrm{K}$$

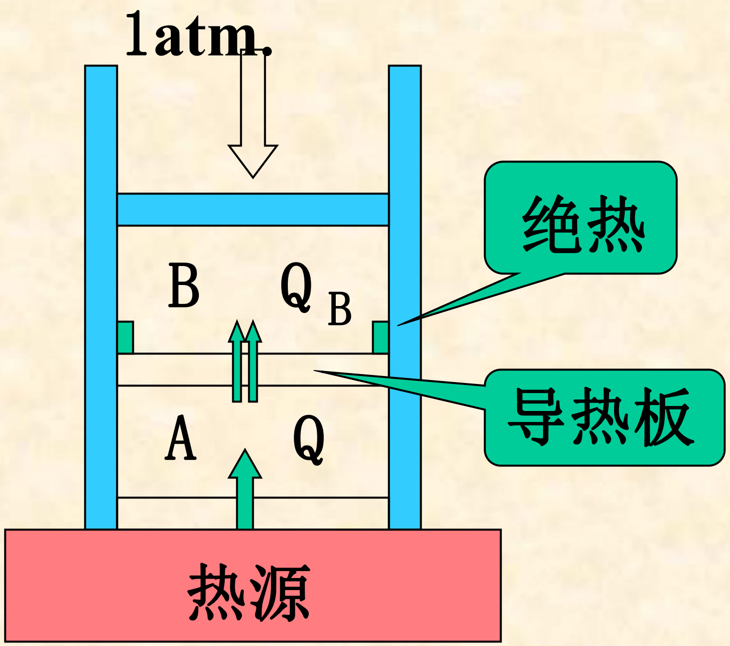
净吸的热量 $$Q_{\mathrm{B}}=C_{P,\mathrm{m}}\Delta T=\frac{i+2}{2}R\Delta T$$

$$=\frac{5+2}{2}\times 8.31\times 6.72=196\ \mathrm{J}$$

$$Q_{\mathrm{A}}=C_{V,\mathrm{m}}\Delta T=\frac{i}{2}R\Delta T=\frac{5}{2}\times 8.31\times 6.72=139\ \mathrm{J}$$

(或 $Q_{\mathrm{A}}=Q-Q_{\mathrm{B}}=335-196=139\ \mathrm{J}$)

方法二：“整体法” 将A、B看成一个整体



$$Q = \Delta E + A$$
$$= 2C_{V,\mathrm{m}}\Delta T + P\Delta V$$
$$= 2C_{V,\mathrm{m}}\Delta T + R\Delta T$$
$$\therefore \Delta T = \frac{Q}{2C_{V,\mathrm{m}} + R}$$
$$= \frac{Q}{C_{V,\mathrm{m}} + C_{P,\mathrm{m}}}$$
$$= 6.72\ \mathrm{K}$$

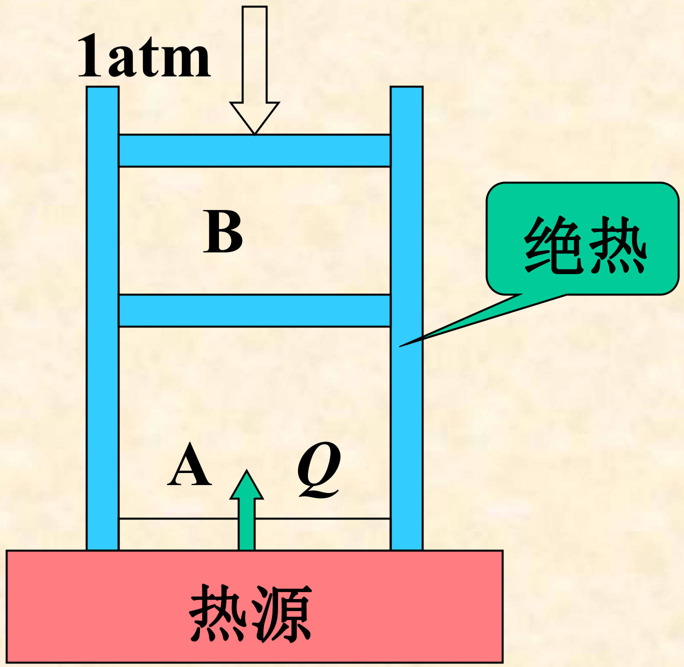
（结果相同）

(2) 若将导热隔板换成可自由滑动的绝热隔板

原来A，B内各有1mol 理想气体氮气，

因为 $V_A=V_B$，$T_A=T_B$

所以 $P_A=P_B=1\ \mathrm{atm}$

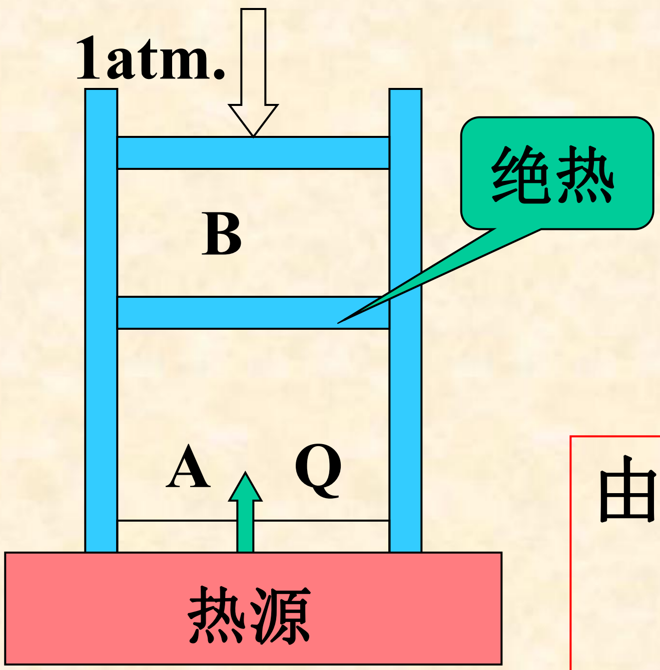


A 吸热膨胀，要推隔板，
B 的压强略增就要推活塞，
---A, B都始终保持
1atm 的压强。

A: 等压吸热过程

$$Q = C_{P,\mathrm{m}}\,\Delta T$$

$$\therefore \Delta T = \frac{Q}{C_{P,\mathrm{m}}} = \frac{335}{\frac{5+2}{2}\times 8.31} = 11.5\,\mathrm{K}$$



B: 等压绝热过程

$$Q_{\mathrm{B}} = C_{P,\mathrm{m}}\,\Delta T = 0$$

$$\therefore \quad \Delta T = 0$$

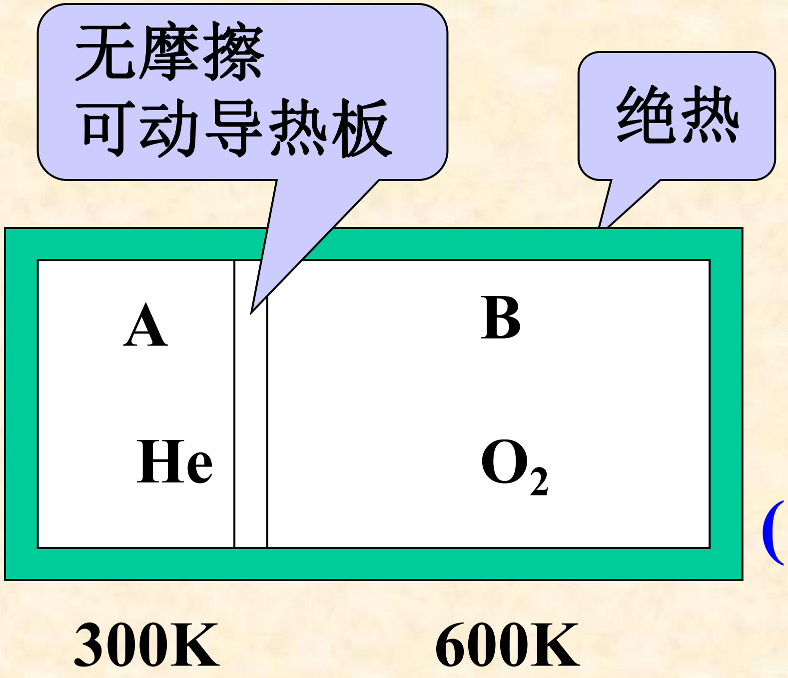
由于B压强不变，而且温度也不变，
所以体积也不变，
B室整个向上平移.

第5题. 已知一绝热容器如图，A、B内各有1mol 理想气体 He，O_2； $T_A = 300K, T_B = 600\text{K},$

$$P_A = P_B = P_0 = 1\text{atm}.$$

求：(1) 整个系统达到平衡时的温度T，压强P

(2) He，O_2各自的熵变.



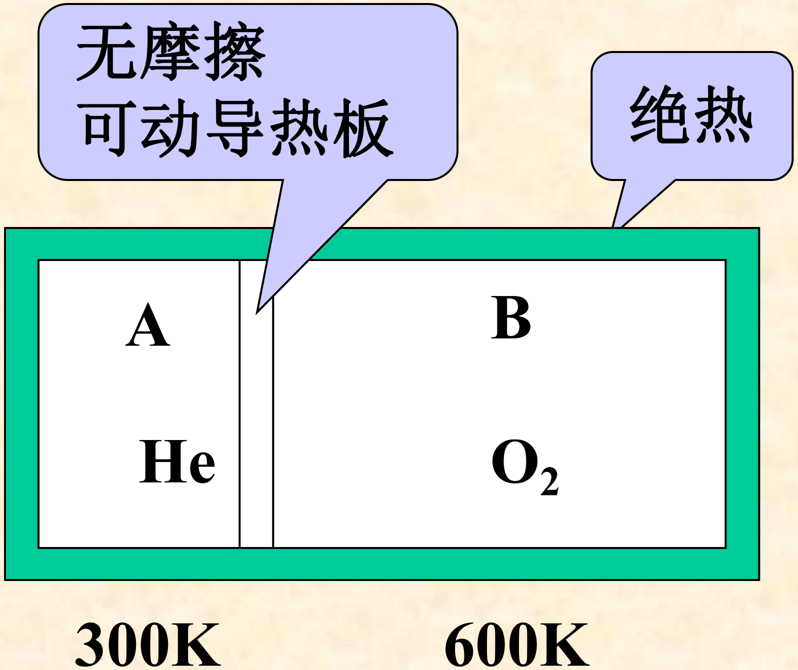
【解】这是有限温差传热，非准静态过程；

并且A(或B)非等温,非绝热，非等容,非等压.

(1) 求平衡时的温度T,压强P:

温度是 450K吗？

“整体法”：



$$\because Q=0,\ A=0 \ \therefore \Delta E=0$$

（热一律 普遍适用）

$$\therefore \Delta E_A+\Delta E_B=0$$

再利用 理想气体内能公式

$$\frac{3}{2}R(T-T_A)+\frac{5}{2}R(T-T_B)=0$$

可得 $T=488\ \mathrm{K}$

利用理想气体状态方程：

初始：$V_A+V_B=\dfrac{RT_A}{P_A}+\dfrac{RT_B}{P_B}=R\dfrac{T_A+T_B}{P_0}=2V$

A、B最终体积相等，因为压强、温度相等。

最后：　对He 或 O_2

$$\because PV = RT$$

$$\rightarrow P = \frac{RT}{V} = \frac{RT}{R\dfrac{T_A + T_B}{2P_0}} = \frac{2P_0 T}{T_A + T_B}$$

$$= 1.08\ \text{atm}.$$

(2) 求He、O_2各自的熵变.

$$(\Delta S)_A = (C_{P,m})_A \ln\frac{T}{T_A} - R\ln\frac{P}{P_0}$$

$$= \frac{3+2}{2} \times 8.31 \times \ln\frac{488}{300} - 8.31 \times \ln\frac{1.08}{1} = 9.45\ \mathrm{J/K}$$

$$(\Delta S)_{\mathrm{B}}=\left(C_{P,\mathrm{m}}\right)_{\mathrm{B}}\ln\frac{T}{T_{\mathrm{B}}}-R\ln\frac{P}{P_0}$$

$$=\frac{5+2}{2}\times 8.31\times\ln\frac{488}{600}-8.31\times\ln\frac{1.08}{1}$$

$$=-6.68\ \mathrm{J/K}$$

整个系统的熵变:

$$\Delta S=(\Delta S)_{\mathrm{A}}+(\Delta S)_{\mathrm{B}}$$

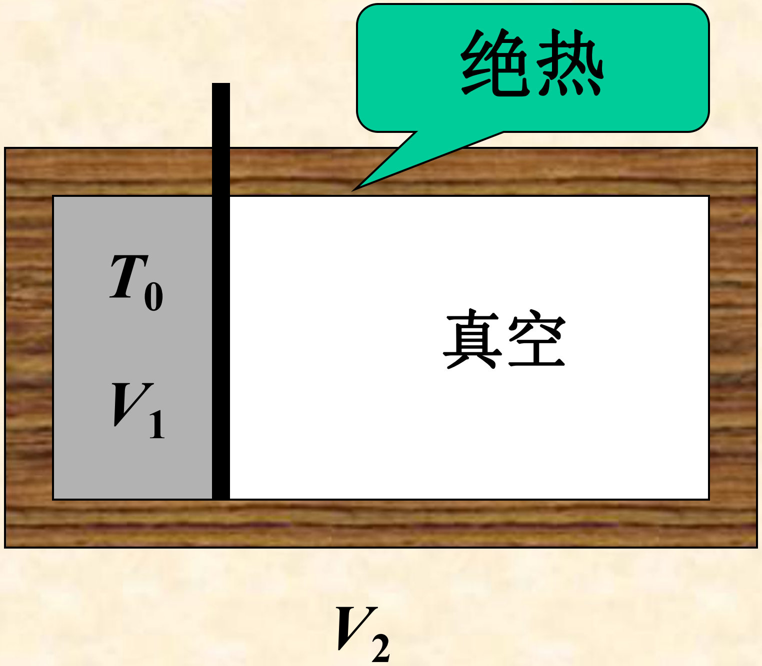
$$=9.45+(-6.68)=2.77\ \mathrm{J/K}>0$$

这是有限温差的传热过程，是不可逆的，
当然熵是增加的。

第6题. 已知在一绝热容器中，有1mol 温度为T_0的理想气体，其 $C_{V,m}$ 已知，

求:(1)体积由V_1自由膨胀到V_2，再无限缓慢地压缩回V_1的整个过程 的熵变及终温。

(2)体积由V_1自由膨胀到V_2，再很快地压缩回V_1的整个过程的熵变，能否求出终温？

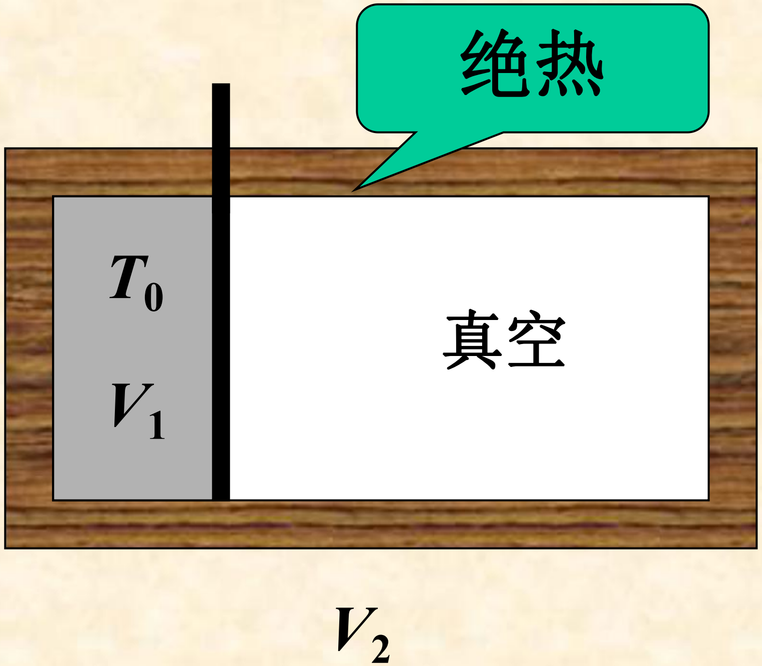


【解】 设气体经绝热自由膨胀 从 $V_1 \to V_2$，即从状态1→状态2

$$\because Q = 0$$

$$A = 0$$

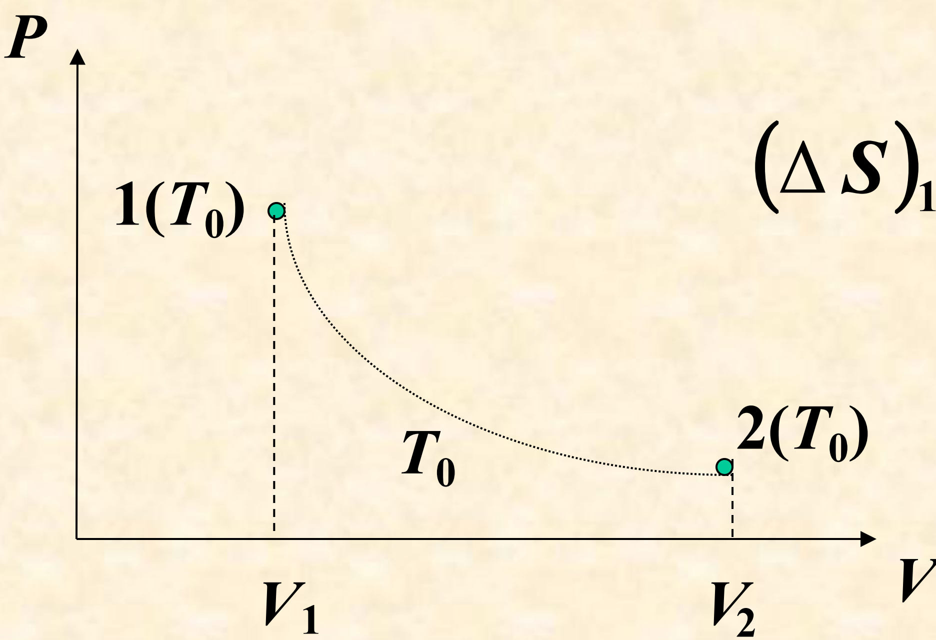
$$\therefore \Delta E = 0 \text{ (热一律)}$$



由于是不可逆过程,
所以可以另设想一个
可逆等温过程来求熵变:

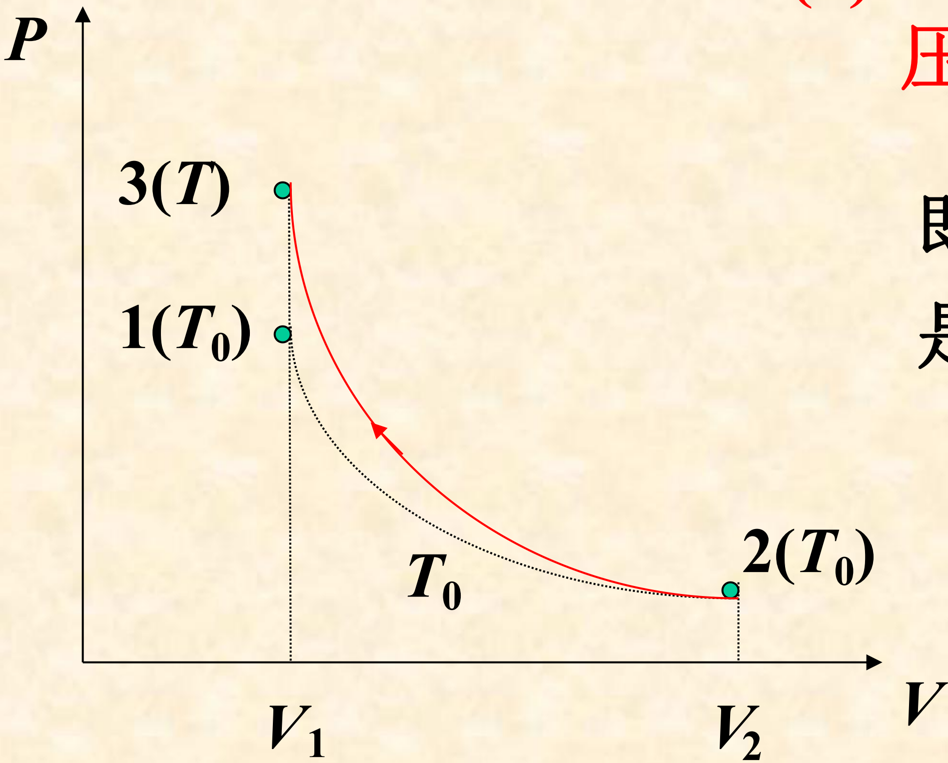
思考：能否设想一个
可逆绝热过程来求熵变?

【答】不能。



$$(\Delta S)_{12}=\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}Q}{T}=\int_{V_1}^{V_2}\frac{P\,\mathrm{d}V}{T}$$

$$=\int_{V_1}^{V_2}\frac{RT}{V}\frac{\mathrm{d}V}{T}=R\ln\frac{V_2}{V_1}$$



(1) 当无限缓慢地压缩回V_1时

即 状态 2→ 状态 3

是可逆绝热过程（即等熵过程），

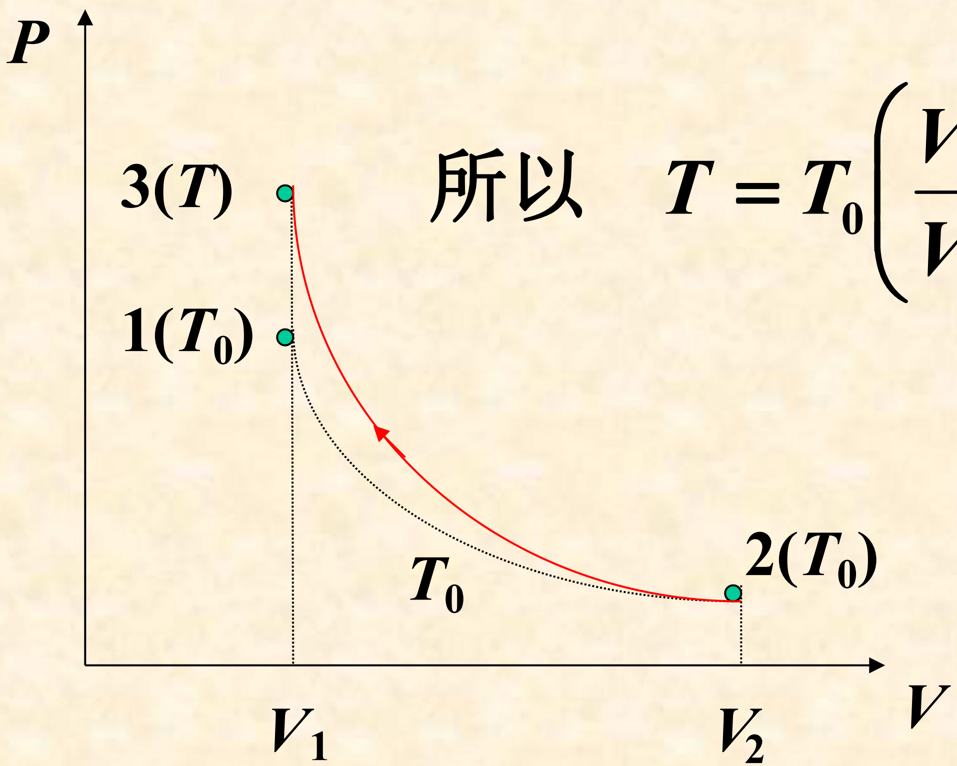
有 $(\Delta S)_{23} = 0$

有 $$\Delta S = (\Delta S)_{12} + (\Delta S)_{23} = R\ln\frac{V_2}{V_1} > 0$$

系统的终温：由图线可知肯定是升高了，计算：

方法一.　由准静态的绝热过程方程

因为 $TV_1^{\gamma-1}=T_0V_2^{\gamma-1}$



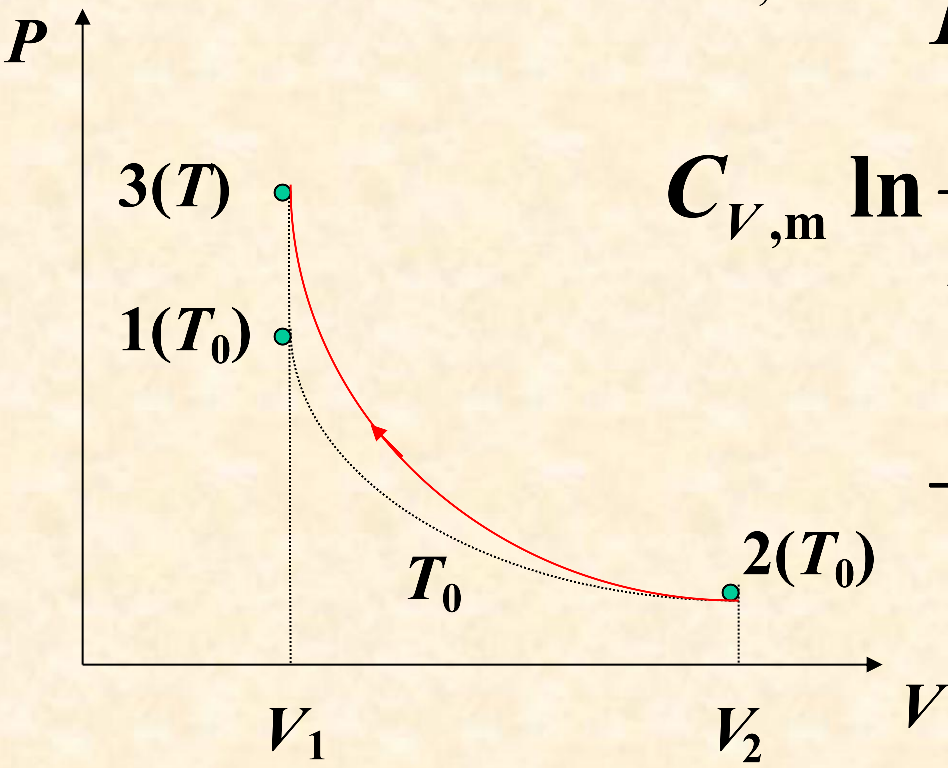
所以 $T=T_0\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}=T_0\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{C_{P,\mathrm{m}}}{C_{V,\mathrm{m}}}-1}$

$$=T_0\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{R/C_{V,\mathrm{m}}}>T_0$$

方法二：由理想气体的熵变公式

$$\because (\Delta S)_{23} = 0$$ （可逆绝热是等熵过程）

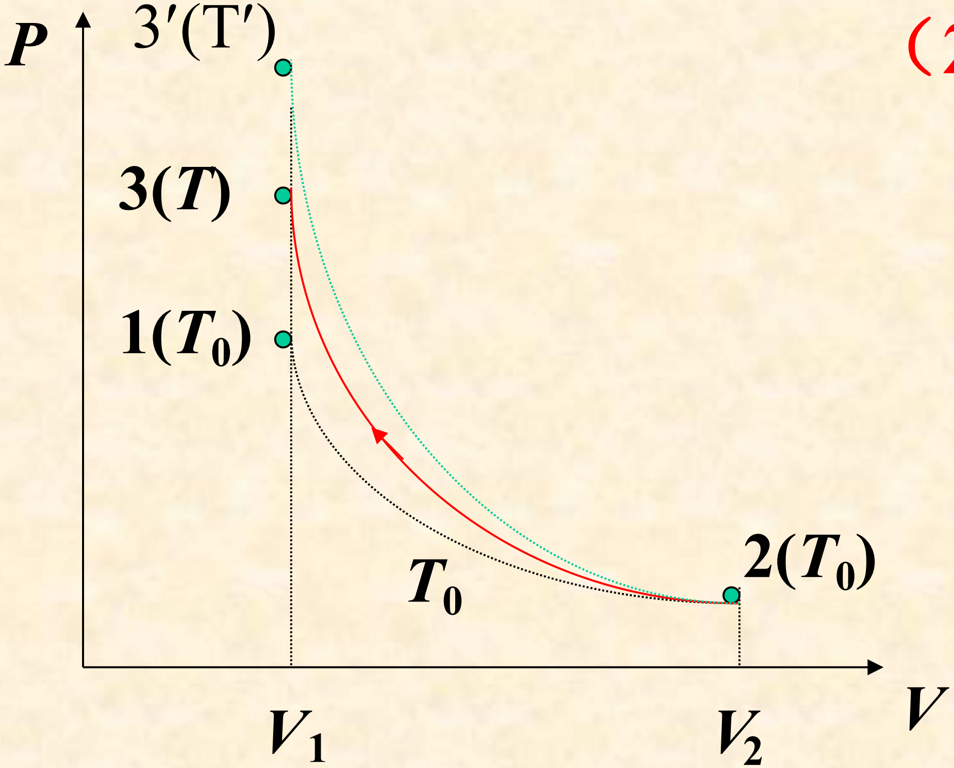
$$\therefore (\Delta S)_{23} = C_{V,\mathrm{m}} \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{V_1}{V_2} = 0$$



$$C_{V,\mathrm{m}} \ln \frac{T}{T_0} = R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\rightarrow T = T_0 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{R/C_{V,\mathrm{m}}}$$

（结果相同）



（2）当很快地压缩回V_1时

即 状态 2→ 状态 3′

是不可逆绝热压缩过程，

$$(\Delta S)_{23'} > 0$$

是 $T' > T$(终温更高)?

还是$T' < T$(终温更低)?

看 $$(\Delta S)_{23'} = C_{V,\mathrm{m}} \ln \frac{T'}{T_0} + R \ln \underline{\frac{V_1}{V_2}}\ ?$$

由前已得到 $$T = T_0 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{R/C_{V,\mathrm{m}}} \longrightarrow T_0 = T \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{R/C_{V,\mathrm{m}}}$$

$$T_0 = T\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{R/C_{V,\mathrm{m}}} \quad \therefore \quad \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{R/C_{V,\mathrm{m}}} = \frac{T_0}{T}$$

$$\rightarrow \quad \ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \frac{1}{R/C_{V,\mathrm{m}}}\ln\frac{T_0}{T} = \frac{C_{V,\mathrm{m}}}{R}\ln\frac{T_0}{T}$$

所以 $(\Delta S)_{23'} = C_{V,\mathrm{m}}\ln\frac{T'}{T_0} + \underline{R\ln\frac{V_1}{V_2}}$?

$$= C_{V,\mathrm{m}}\ln\frac{T'}{T_0} + C_{V,\mathrm{m}}\ln\frac{T_0}{T} = C_{V,\mathrm{m}}\ln\frac{T'}{T} > 0$$

$\therefore T' > T$(终温更高)

$$\therefore T' > T\text{(终温更高)}$$

$T' = ?$ 取决于压缩的快慢！

整个过程的熵变

$$\Delta S = (\Delta S)_{12} + (\Delta S)_{23'}$$

$$= R\ln\frac{V_2}{V_1} + C_{V,\mathrm{m}}\ln\frac{T'}{T}$$

第二项是比第（1）问多出的，即：

当很快地压缩回V_1时，ΔS 更大！

https://thu.kaoshixing.com/login/account/login/2