第二周习题课　可微，偏导数，梯度，方向导数

例. 1　　若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某个邻域内有定义，$f(0,0)=0$，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$$

a 为常数。证明：

（1）$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续；

（2）若 $a\neq -1$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，但不可微；

（3）若 $a=-1$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微。

例.2 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点是否连续?

___________(填是或否)；在 $(0,0)$ 点是否可微?　_____________(填是或否).

例. 3　　下列条件成立时能够推出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微, 且全微分 $df=0$ 的是（　　）.

(A) 在点 (x_0,y_0) 两个偏导数 $f'_x=0, f'_y=0$

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$，

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\dfrac{\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}$

例. 4　　设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 则在 $(0,0)$ 点（　B　）

(A) 连续, 但偏导数不存在；　　(B) 偏导数存在, 但不可微；
(C) 可微；　　(D) 偏导数存在且连续.

例. 5　　设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性，偏导存在性，偏导函数连续性，以及可微性。

例. 6　　有如下做法：

设 $f(x,y)=(x+y)\varphi(x,y)$ 其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，则

$df(x,y)=[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_x(x,y)]dx+[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_y(x,y)]dy$

令 $x=0,y=0$， $df(0,0)=\varphi(0,0)(dx+dy)$.

指出上述方法的错误；

例.7 设二元函数 $f(x,y)$ 于全平面 $\Re^2$ 上可微，(a,b) 为平面 $\Re^2$ 上给定的一点，则极限

$$\lim_{x\to0}\frac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}=\underline{\qquad\qquad\qquad}。$$

例. 8　　设 $z(x,y)$ 定义在矩形区域 $D=\{(x,y)|0\le x\le a,0\le y\le b\}$ 上的可微函数。证明:

（1） $z(x,y)=f(y)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv0$ ；

（2） $z(x,y)=f(y)+g(y)\Leftrightarrow\forall(x,y)\in D,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\equiv0$

例. 9　　设 $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$，求 dz .

例.10　　设函数 $z=2\cos^2(x-\dfrac{y}{2})$，证明 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

例.11　　设函数 $z=(x+2y)^{xy}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

例.12　　求 $y^2e^{x+y}(dx+dy)+2ye^{x+y}dy$ 的原函数。

思考：是不是任意的 $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ 都有原函数？

例.13　　设 $f(x,y)\in C^{(1)}(R^2)$，且 $f(x,x^2)\equiv1$。

（I）若 $f_x'(x,x^2)=x$，求 $f_y'(x,x^2)$；

（II）若 $f_y'(x,y)=x^2+2y$，求 $f(x,y)$。

例.14　　求函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在 $P(1,1)$ 点沿与 x 轴成 $\dfrac{\pi}{3}$ 角方向的方向导数。

例.15 求函数 $f(x,y)=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$ 在 $P(\dfrac{a}{\sqrt{2}},\dfrac{b}{\sqrt{2}})$ 点沿曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 在该点的内法方向的方向导数。

例.16 设函数 $z=\arctan\dfrac{x-y}{x+y}$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$， dz， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

例.17 若函数 $f(u)$ 有二阶导数，设函数 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.