第四章 功和能

研究力在空间的积累效应

功、动能、势能、

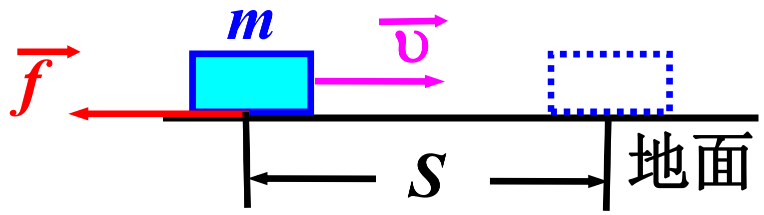
动能定理、机械能守恒定律

要求：

1. 深入理解以上概念，如它们是属于质点还是属于系统、与参考系有无关系等

2. 搞清规律的内容、来源、对象、成立条件、与参考系的关系等

思考:



以地面为参考系

$$W = -f \cdot S$$

以m为参考系:

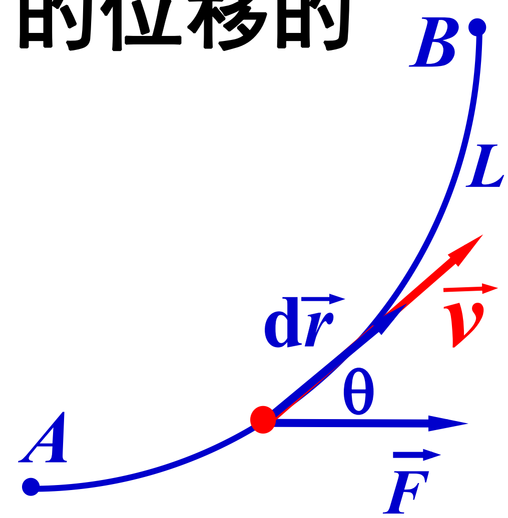
$$W' = 0 \neq W$$

f 到底做不做功？磨擦生热到底从何而来？

§4.1 功 （work）

一、功：

力和力所作用的质点（或质元）的位移的标量积 $dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F\left|d\vec{r}\right|\cos\theta$



$$W_{AB} = \int_{A(L)}^{B} dW = \int_{A(L)}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

1. 功有正、负之分
2. 功依赖于参考系（一对力的功与参考系无关）
3. 功与路径有关（保守力的功与路径无关）
4. 功是过程量。

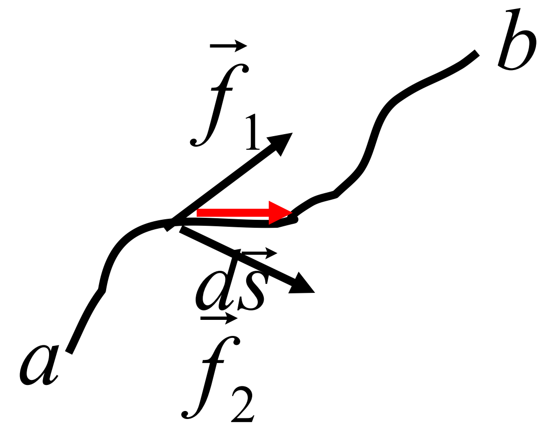
其内涵通过它与能量的关系体现。

功的计算中应注意的问题

1)质点问题

$$\sum_i W_i = \sum_i \int_{L_i} \vec{f}_i \cdot d\vec{s}_i$$

$$= \int_{(a)}^{(b)} (\sum_i \vec{f}_i) \cdot d\vec{s}$$



L_i 各力作用点运动的路径

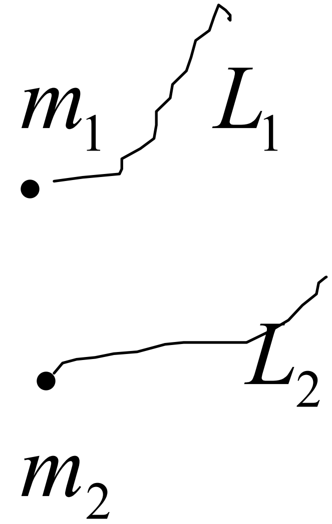
$$\boxed{W = \int_{(a)}^{(b)} \vec{F}_{合} \cdot d\vec{s}}$$

对质点，各力做功之和等于合力做的功

2)质点系问题

$$\sum_i W_i = \sum_i \int_{L_i} \vec{f}_i \cdot d\vec{s}_i$$

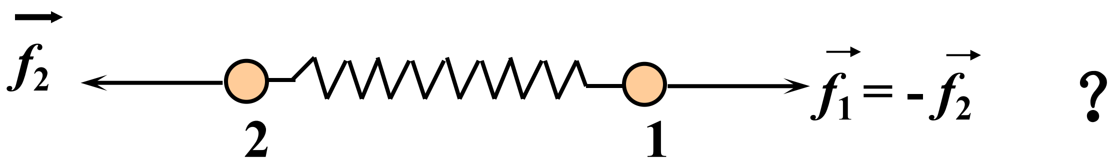
$$? = \int_L \Big(\sum_i \vec{f}_i\Big) \cdot d\vec{s}$$

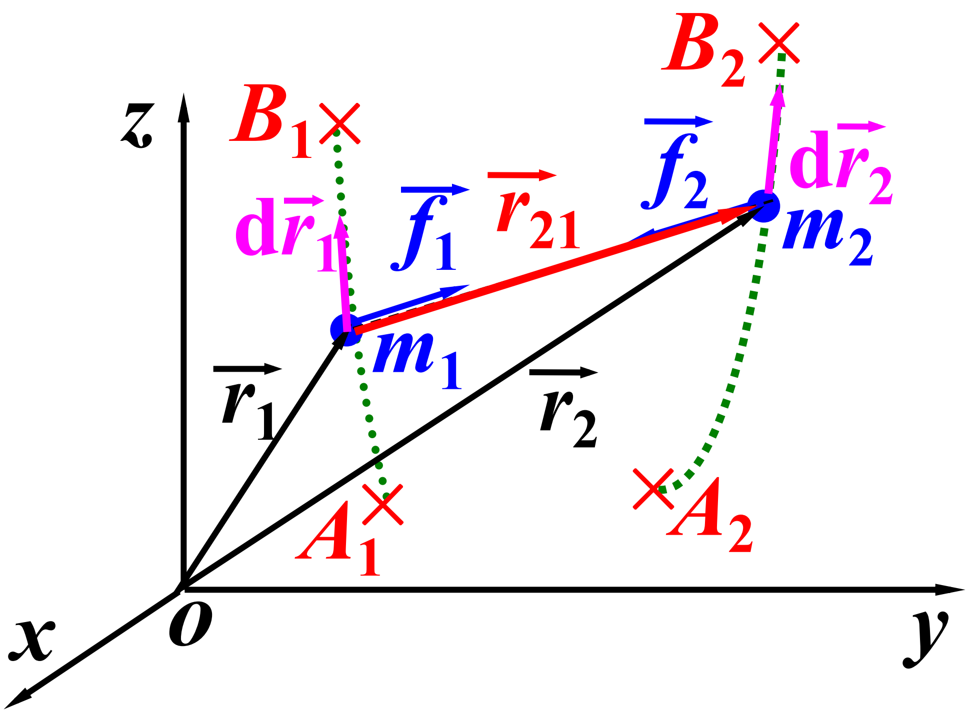


二. 一对力的功

一对力:

分别作用在两个物体上的大小相等、方向相反的力





$$\mathrm{d}W_{对} = \vec{f}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_2$$

$$= \vec{f}_2 \cdot (\mathrm{d}\vec{r}_2 - \mathrm{d}\vec{r}_1)$$

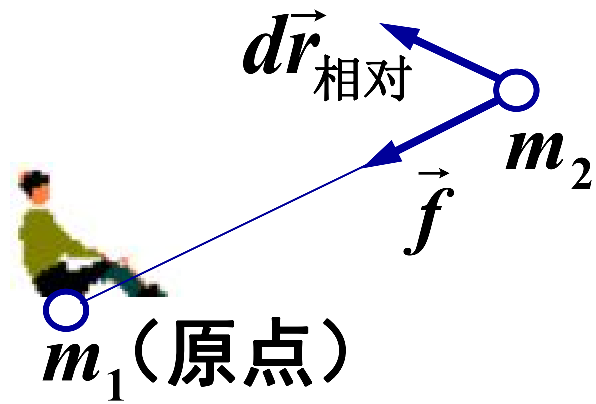
$$= \vec{f}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21}$$

$\mathrm{d}\vec{r}_{21}$: m_2相对m_1的元位移。

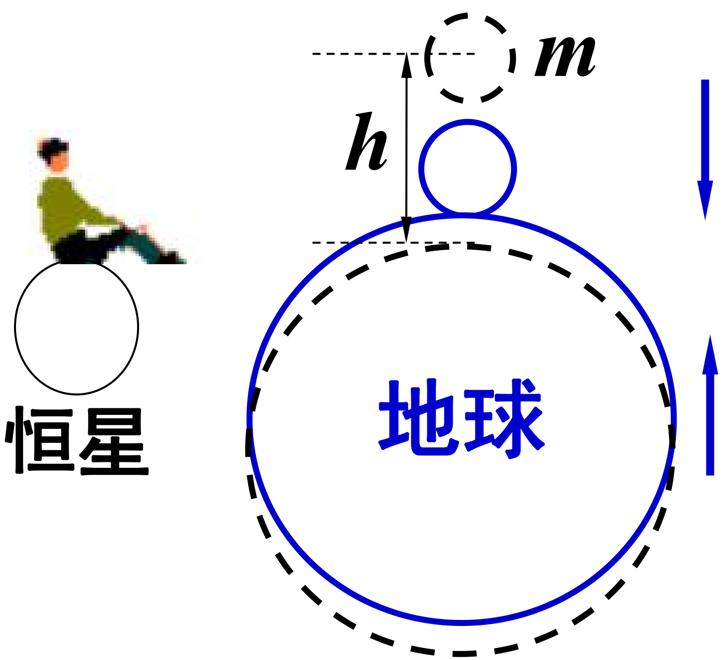
一对力做功之和，等于一个质点受的力（一个力）沿着该质点相对另一质点移动的相对路径所做的功

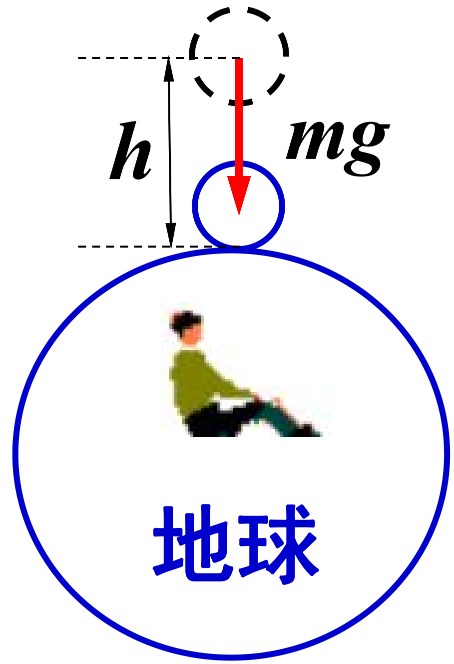
$$\mathrm{d}W = \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{\text{相对}}$$

$$W_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{\text{相对}}$$

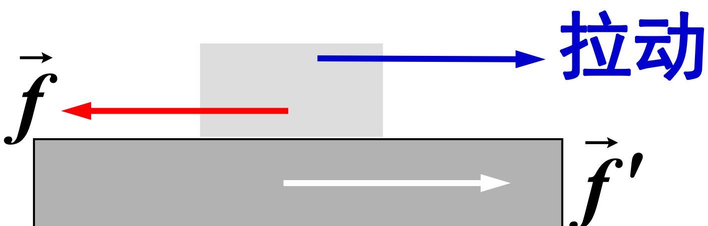


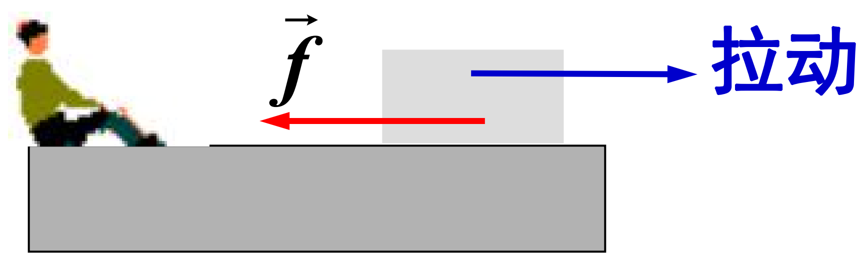
因此，一对力做功之和只与两个质点的相对路径有关，与参考系无关。





一对引力做功之和　　等于重力做的功mgh





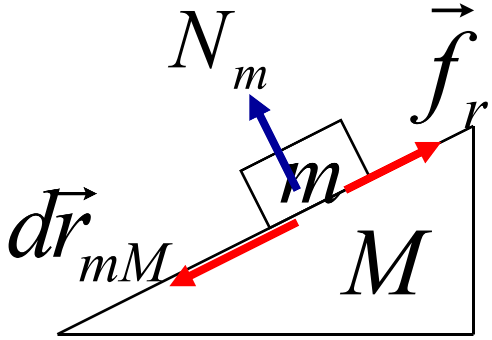
一对摩擦力做功之和　　等于一个摩擦力乘相对位移

在无相对位移或相对位移与一对力垂直的情况下，一对力做功之和必为零

例　一对正压力做功之和

$$dW = dW_1 + dW_2$$

$$= \vec{N}_m \cdot d\vec{r}_{mM} = 0$$



三、保守力（conservative force）

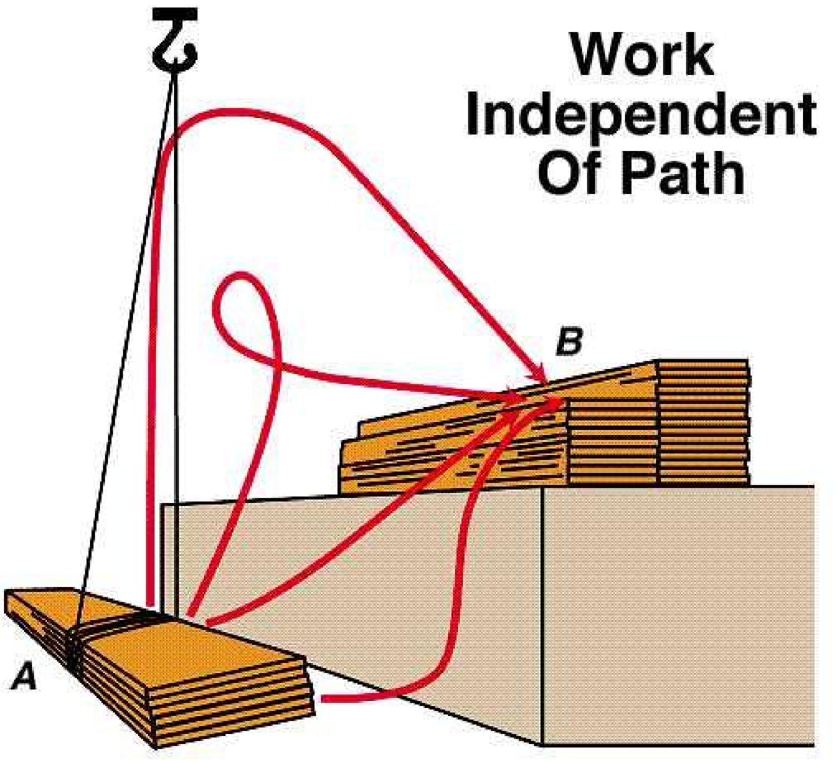
定义：

如 重力做功

$$W = \int_{(A)}^{(B)} m\vec{g} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{(A)}^{(B)} mg\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\varphi = \int_{(A)}^{(B)} -mgdh$$

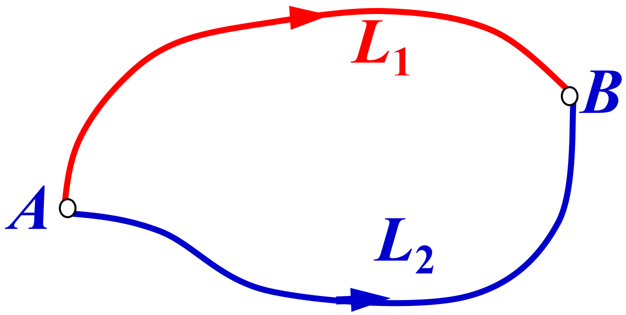
$$W = mgh_{\mathrm{A}} - mgh_{B}$$



重力的功决定于始末位置的高度差！

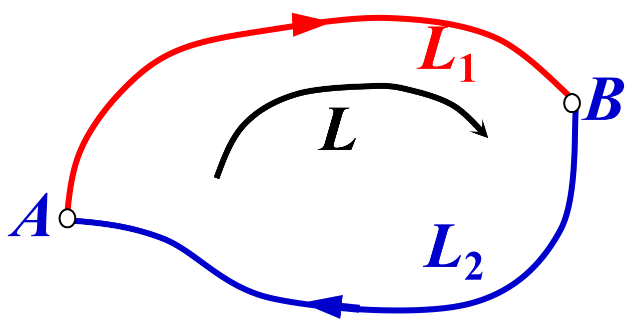
表述1:如果一对力做功之和与相对路径的形状无关，而只决定于相互作用的质点的始末相对位置，这样的一对力称为保守力。

$$\int_{A\,(L_1)}^{B} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{A\,(L_2)}^{B} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$



表述2:保守力沿任意闭合路径一周所做的功为零

$$\oint_{(L)} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$



两个定义是等价的

四、有心力是保守力

有心力： $\vec{f} = f(r)\hat{r}$.

引力： $\vec{f} = -\dfrac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{r}$

静电力： $\vec{f} = \dfrac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$

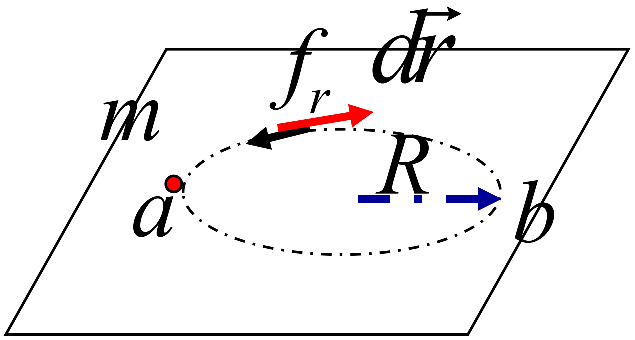
弹性力： $\vec{f} = -k\left(x - x_0\right)\hat{x}$

$$W_{AB} = \int_{(A)}^{(B)} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{(A)}^{(B)} f\left(r\right)\hat{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{(A)}^{(B)} f\left(r\right)\mathrm{d}r = E\left(r_B\right) - E\left(r_A\right)$$

做功与路径无关，只与始末位置有关—保守力

五、非保守力

【例】如图，水平桌面上有质点 m，桌面的摩擦系数为μ 求：沿圆弧；沿直径两种情况下 摩擦力做的功



解：
$$W_{ab\,\text{圆弧}} = \int_{(a)}^{(b)} \vec{f}_r \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{(a)}^{(b)} -f_r \cdot ds = -\mu mg\pi R$$

$$W_{ab\,\text{直径}} = \int_{(a)}^{(b)} \vec{f}_r \cdot d\vec{r} = -\mu mg 2R$$

做功与路径有关的力称为非保守力。

摩擦力（耗散力）　　爆炸力：做功为正

§ 4.2 动能定理

一、质点的动能定理

对牛顿定律关于空间积分得：

合外力对质点所做的功等于质点动能的增量

$$W_{AB}=E_{kB}-E_{kA}=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2$$

$$W_{AB}=\int_{A\,(L)}^{B}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

1、只适用于惯性系。

2、对非惯性系还应考虑惯性力做的功。

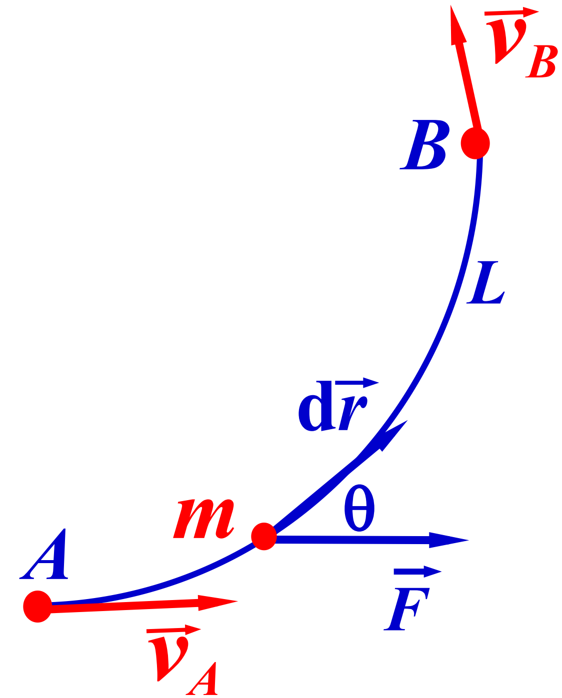
$$\vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$ （惯性系）

关于空间积分

$$W_{AB} = \int_{A(L)}^{B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{A}^{B} m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= m\int_{A}^{B} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{v} = \frac{1}{2}m\int_{A}^{B} \mathrm{d}\left(\vec{v} \cdot \vec{v}\right)$$

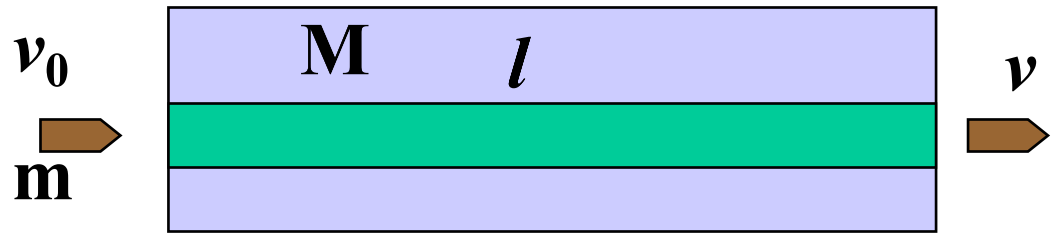
$$= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$



例：光滑水平面上方停放一沙箱，水平射入子弹

求：沙箱对子弹的平均阻力

解：以沙箱和子弹为系统



水平方向动量守恒

设子弹出口时沙箱速度为V

$$MV + mv = mv_0 \qquad V = \frac{m}{M}(v - v_0)$$

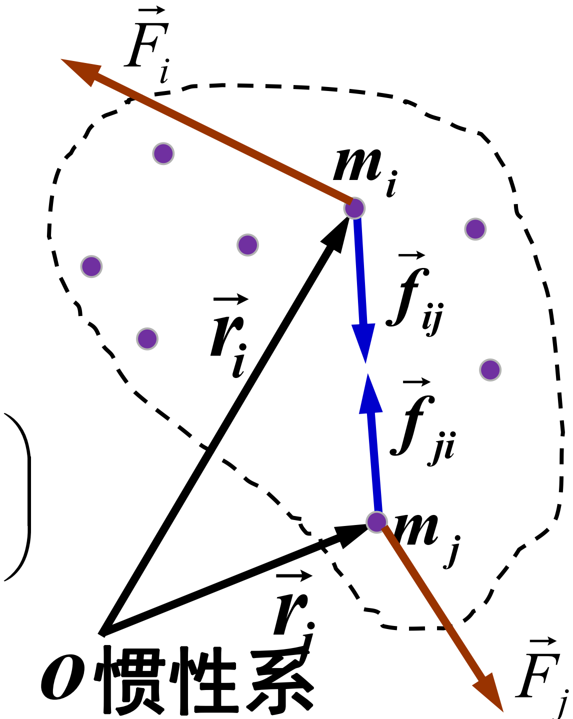
系统，动能定理 $$-\bar{f}\cdot l = \left(\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2\right) - \frac{1}{2}mv_0^{\,2}$$

$$\bar{f} = \frac{1}{l}\left(\frac{1}{2}m(v_0^{\,2} - v^2) - \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}(v - v_0)^2\right)$$

二、质点系的动能定理

质点的动能定理→质点系的动能定理

$$\int_{(1)}^{(2)}(\vec{F}_i+\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij})\cdot \mathrm{d}\vec{r}_i=\frac{1}{2}m_i v_{i2}^2-\frac{1}{2}m_i v_{i1}^2$$



对质点的动能定理求和得：

$$\sum_i\int_{(1)}^{(2)}(\vec{F}_i+\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij})\cdot \mathrm{d}\vec{r}_i=\sum_i\left(\frac{1}{2}m_i v_{i2}^2-\frac{1}{2}m_i v_{i1}^2\right)$$

$$W_{ex}+W_{in}=E_{k2}-E_{k1}$$

所有外力和内力对质点系做功之和，等于质点系总动能的增加

1、质点位移不一定都相同，所以内力虽然成对但总功不一定为零。

2、内力不改变系统的总动量和总角动量，但能改变系统的总动能。

3、只适用于惯性系。

柯尼希定理

质点系相对某一惯性系的动能，等于质心相对该参考系的动能（轨道动能），加上质点系的内动能

$$E_k = E_{kc} + E_{k,in}$$

内动能：在质心系中质点系的动能

$$E_{k,in} = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i'^2 \right)$$

证明

$$E_k = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i (\vec{v}_c + \vec{v}_i')^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} m v_c^2 + \vec{v}_c \cdot \sum_i \left(m_i \vec{v}_i' \right) + \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i'^2 \right) = \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum_i \left(\frac{1}{2} m_i v_i'^2 \right)$$

例：两质点系统，引入相对速度

$$\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_1' - \vec{v}_2'$$

系统相对某一惯性系的动能

$$\boxed{E_k = E_{kc} + E_{k,in} = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \mu u^2}$$

$$m = m_1 + m_2$$

约化质量 $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

证明：

由 $\vec{u}=\vec{v}_1'-\vec{v}_2',\quad m_1\vec{v}_1'+m_2\vec{v}_2'=0$

$$\vec{v}_1'=\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{u},\quad \vec{v}_2'=\frac{-m_1}{m_1+m_2}\vec{u}$$

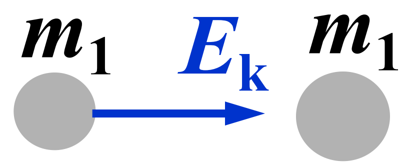
$$E_{k,in}=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

$$=\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}u^2$$

—引起转变的资用能（available energy）

质心动能 E_{kc} “浪费掉了”。

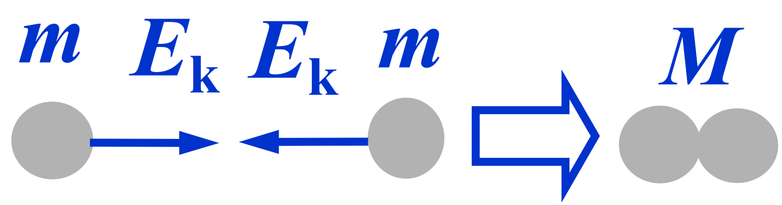
❍靶静止情况



资用能： $E_{k,in} = E_k / 2$

❍对撞机

为全部利用碰撞前粒子的总动能引起转变，让质量和速率相等的粒子对撞—对撞机



资用能：$E_{k,in} = 2E_k$

正负电子对撞机

三、质心系中动能定理

在质心系中，质点系的动能定理

$$W'_{ex}+W'_{in}=E'_{kB}-E'_{kA}$$

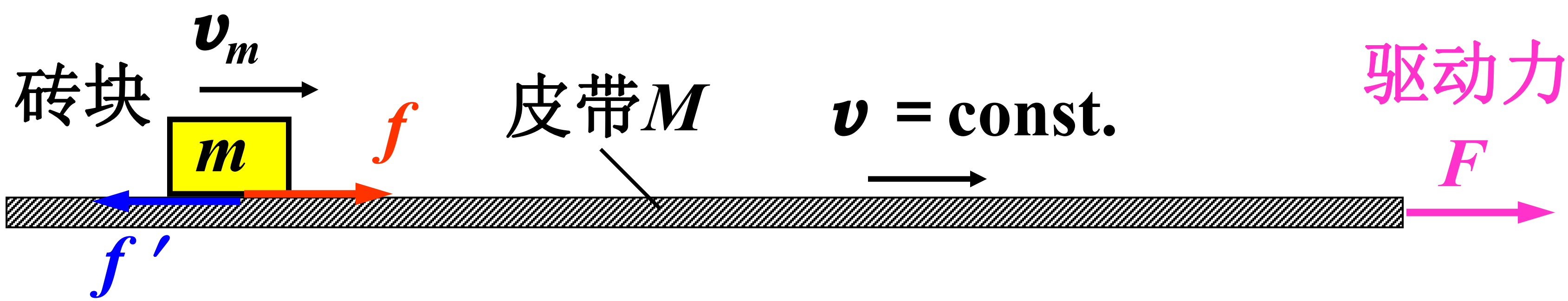
设质心系为非惯性系，加速度为 $\vec{a}_c$

证明惯性力做功为零

$$dW'_{iner}=\sum_i m_i\left(-\vec{a}_c\right)\cdot \mathrm{d}\vec{r}_i{}'=-\vec{a}_c\cdot\sum_i\left(m_i\mathrm{d}\vec{r}_i{}'\right)$$

$$=-\vec{a}_c\cdot\mathrm{d}\left(\sum_i m_i\vec{r}_i{}'\right)=0$$

例题：判断对错

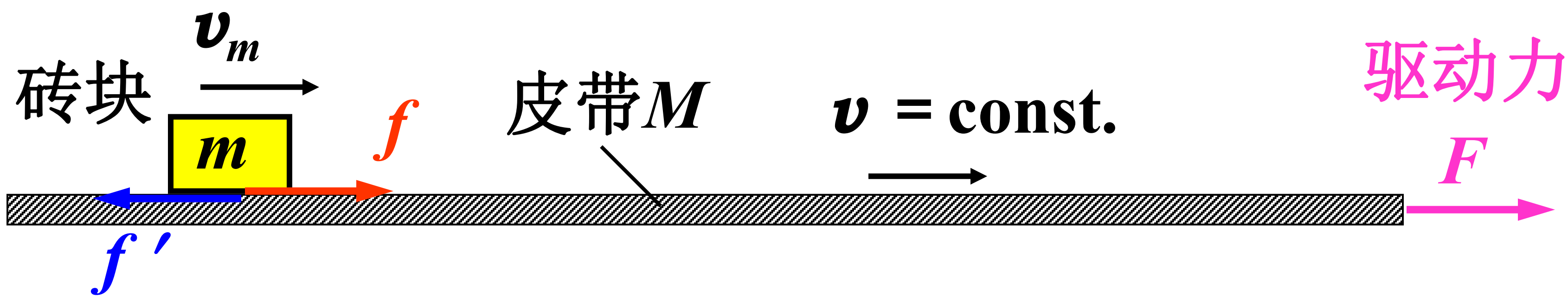


m： $v_m=0 \longrightarrow v_m=v$ 的动过程中，

应该有：

（1）f'对M的功 = -（f 对 m 的功）

答： 错。（m与M间有相对位移）



m： $v_m=0 \longrightarrow v_m=v$ 的动过程中，

（2）F 的功 + f' 的功 = m获得的动能

答： 错。（ F与 f' 是作用在M上而非m上的）

（3）F 的功 + f' 的功 = 0

答：对。（M匀速，动能不变）

（4）F 的功 = m获得的动能

答：错。（ F是作用在M上的；

F 的功 应大于m获得的动能，

因有热能产生）

§4.3, 4.4 势能

一、定义

保守力做功与路径无关 —— 可引入一个相对位形的函数： **势能**

定义：两种位形的势能差

$$E_P(A) - E_P(B) = -\Delta E_p = W_{A\to B}$$

势能增量的负值等于保守力沿任意路径由起点到终点所做的功。

若选B为势能零点，则状态A的势能为

$$E_{pA} = \int_{(A)}^{(B)} \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_{(A)}^{(\text{势能零点})} \vec{f}\cdot d\vec{r}$$

二、常见的势能函数

重力势能

$$E_P = mgh$$ 地面为势能零点

弹性势能

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2$$ 以弹簧原长为势能零点

万有引力势能

$$E_P = -G\frac{Mm}{r}$$ 以无限远为势能零点

说明

1. 只有保守力才有相应的势能

2. 势能属于有保守力作用的体系，是系统相对位形的函数。

特殊情况：一物静止，则称另一物处于保守力场中。

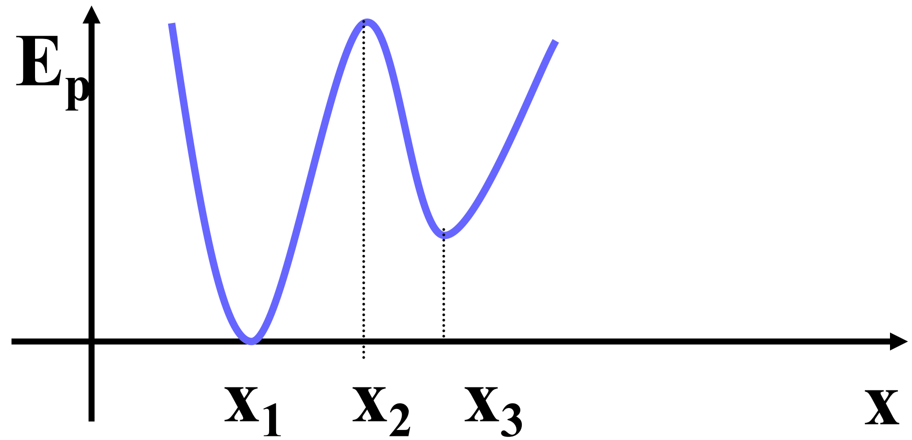
相对位置的函数→位置的函数；

系统的势能→物体的势能。

3. 势能与参考系无关(相对位移)

§4.5 由势能求保守力

一、势能曲线

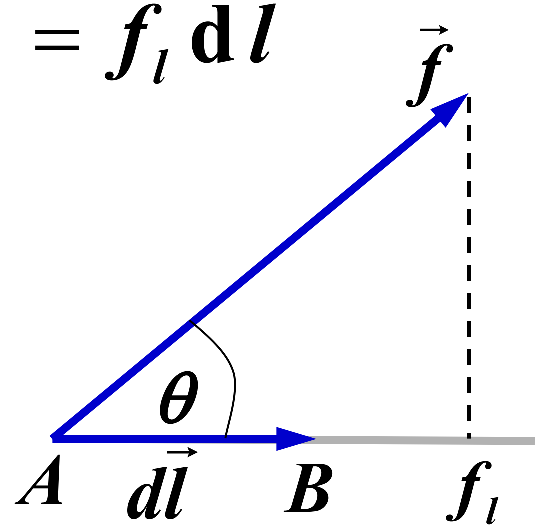


二、力与势能曲线的关系

由势能定义： $-\mathrm{d}E_p = \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = f_l\,\mathrm{d}l$

$$f_l = -\frac{\mathrm{d}E_p}{dl}$$

E_p沿 $\vec{l}$ 方向的空间变化率



如 $E_p = E_p(x,y,z)$，则

$$f_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$$

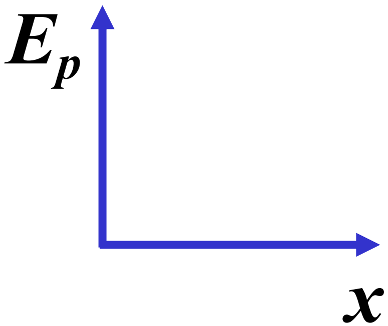
$$f_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$$

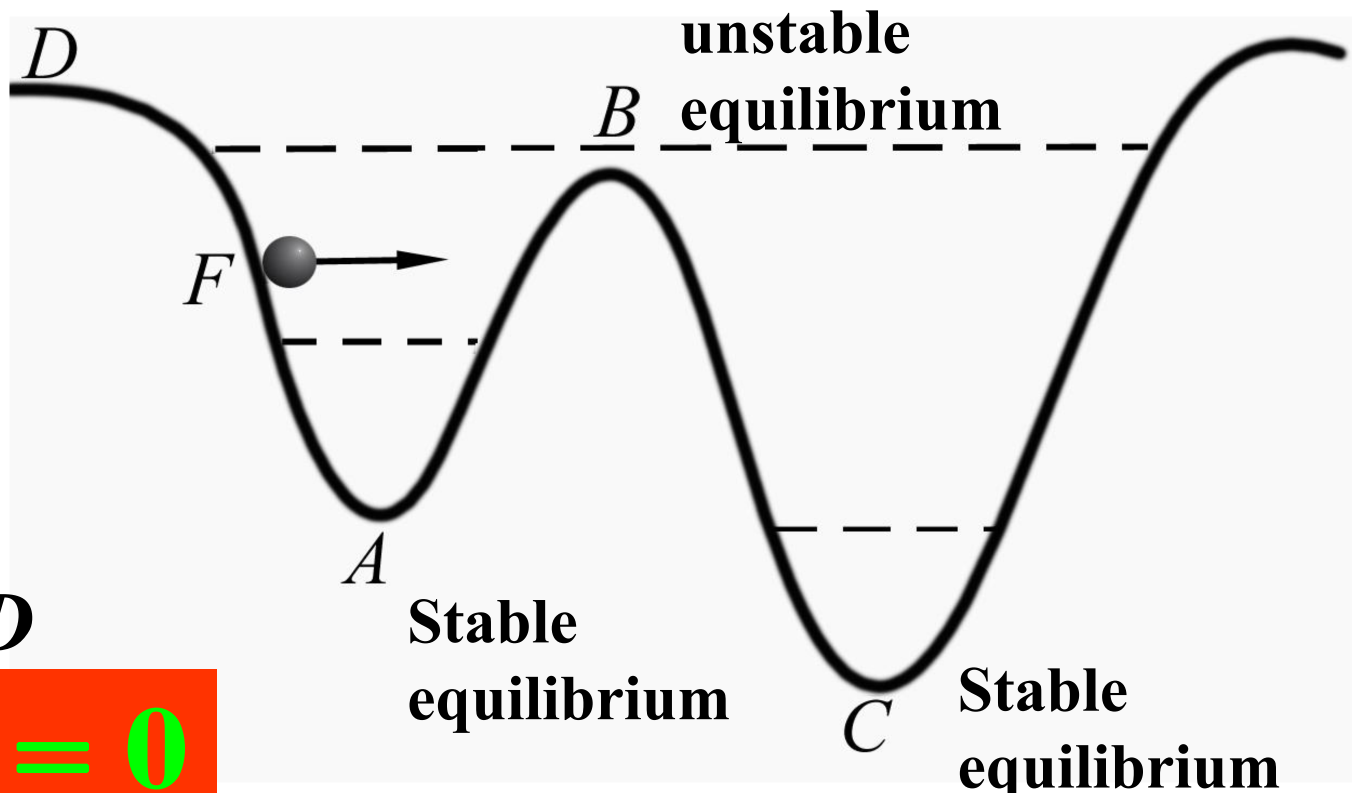
$$f_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\boxed{\therefore \quad \vec{f} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}\right) = -\nabla E_p}$$

梯度算符： $\nabla \equiv \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

Model potential energy curve





At A, B, C, D

$$\boxed{\mathrm{d}E_p / \mathrm{d}x = 0}$$

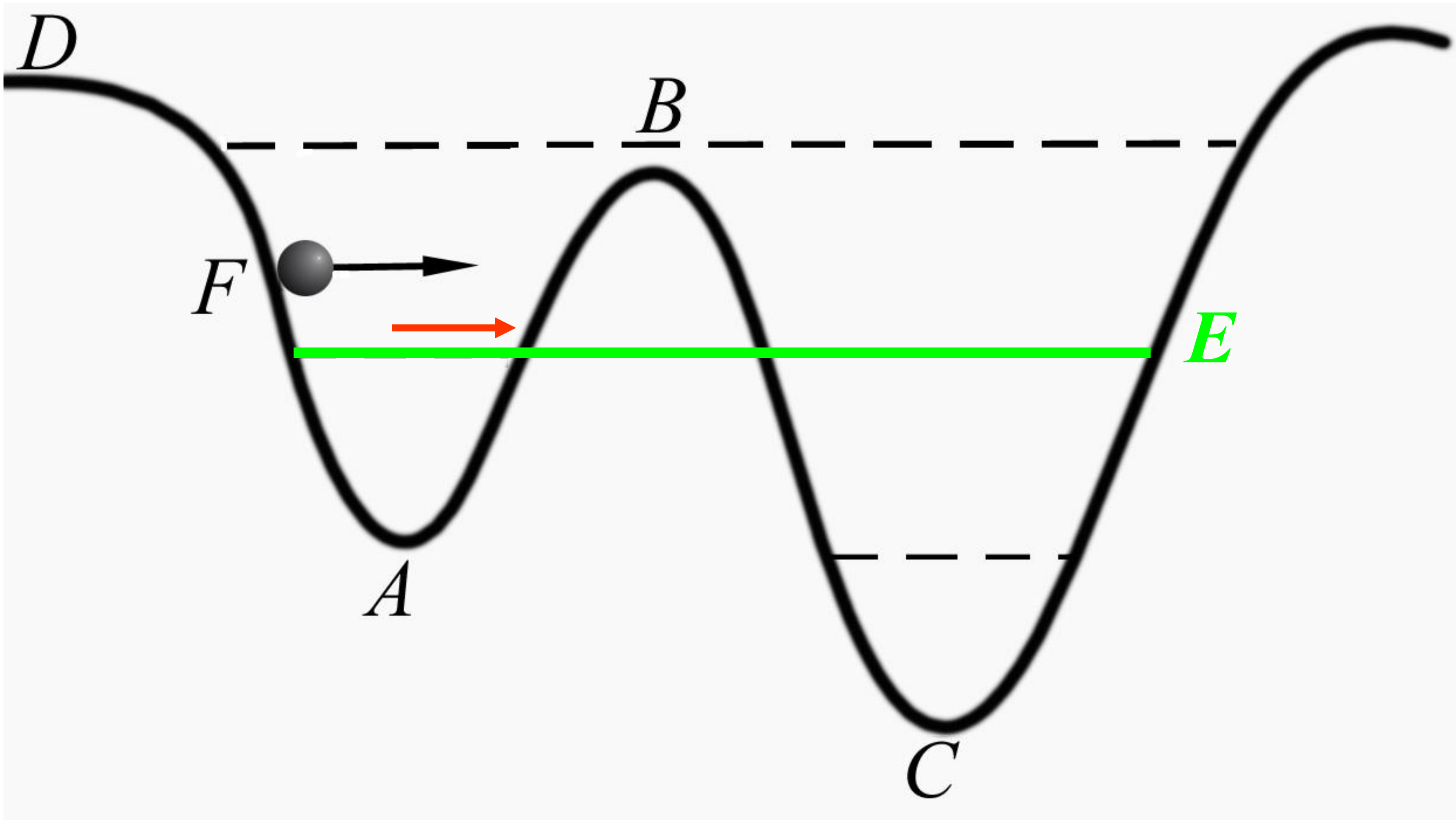
$$F_x = 0$$

equilibrium

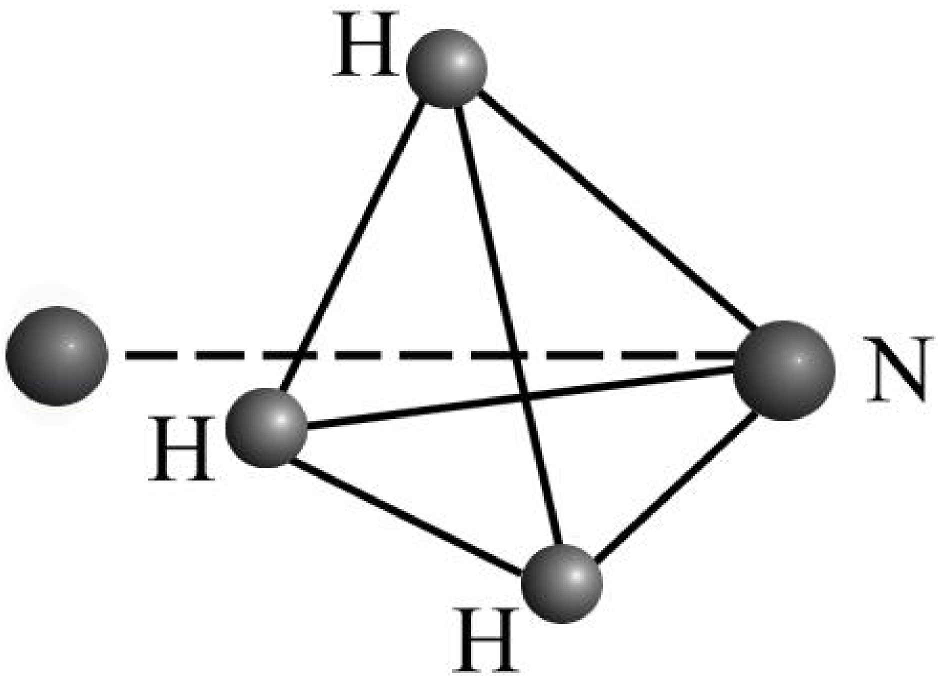
At F $\quad \mathrm{d}E_p / \mathrm{d}x < 0$

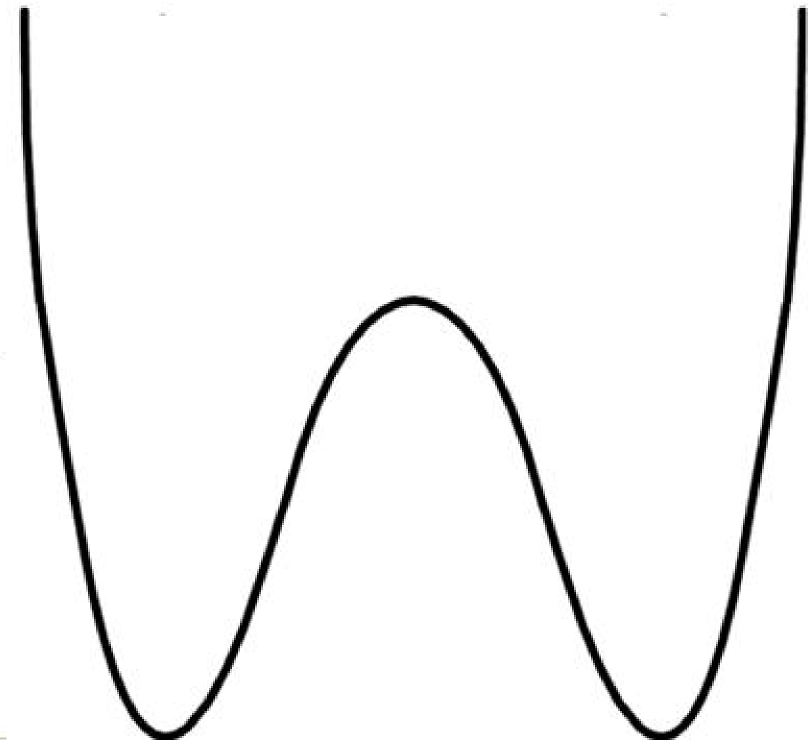
$$F_x > 0$$

Potential barrier and well 势垒和势阱



NH_3 Potential energy curve





§ 4.6 机械能守恒定律

一. 功能原理（work-energy theorem）

质点系的动能定理 $W_{ex}+\left(W_{in,cons}+W_{in,n-cons}\right)=\Delta E_k$

$$W_{in,cons}=-\Delta E_P \quad W_{ex}+W_{in,n-cons}=\Delta E_k+\Delta E_p$$

系统的机械能 $E=E_k+E_p$

功能原理 $W_{ex}+W_{in,n-cons}=\Delta E$

$$\boxed{\mathrm{d}W_{ex}+\mathrm{d}W_{in,n-cons}=\mathrm{d}E}$$ -----微分形式

二. 机械能守恒定律

$$\boxed{\begin{aligned} W_{ex} &= 0 \\ W_{in,\,n-cons} &= 0 \end{aligned}} \longrightarrow \boxed{\Delta E = 0}$$

当$\Delta E = 0$时，$\Delta E_k = -\Delta E_p = W_{in,\,cons}$

$$E_p \underset{W_{in,cons}<0}{\overset{W_{in,cons}>0}{\rightleftharpoons}} E_k$$

保守内力做功只起势能与动能相互转化作用。

保守系统：各质点间的作用力都是保守力的质点系。

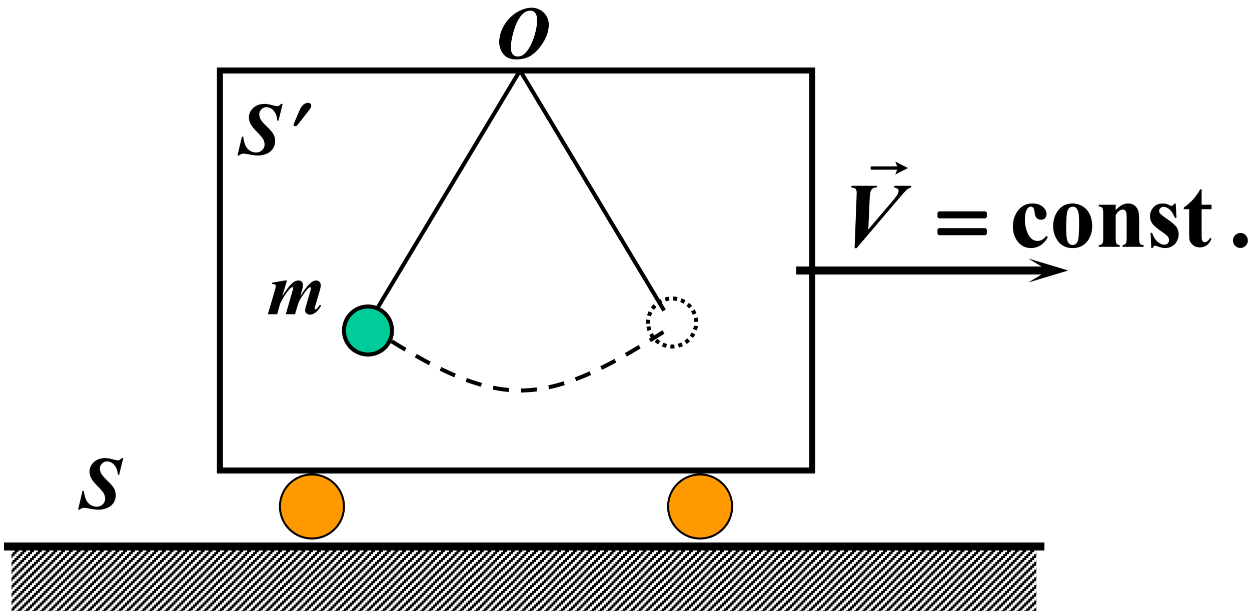
在外力功为零情况下，保守系统机械能守恒。

守恒定律的应用

寻找守恒量，直接建立运动状态满足的关系

【思考】系统对某一惯性系的机械能守恒，对另一惯性系该体系的机械能也一定守恒吗？

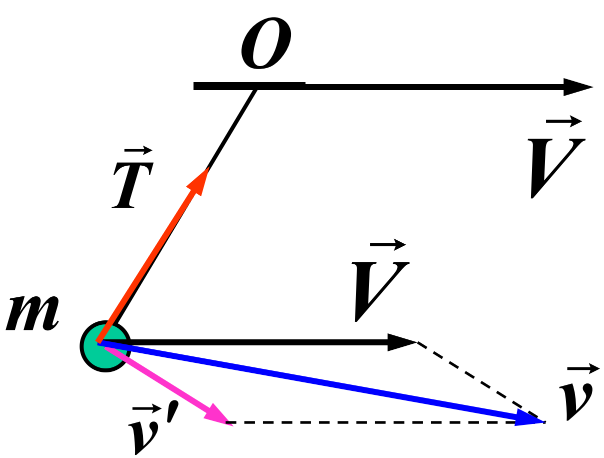
【例】 如图当小车（S'）做匀速直线运动时，



在 S'和 S 中（小球+地球）的机械能是否都守恒？

S'：只有保守内力作功，机械能守恒。

S：



$$\vec{v}(=\vec{v}'+\vec{V}) \not\perp \vec{T}$$

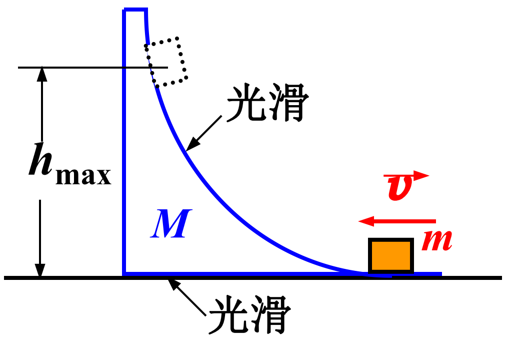
$$W_{外} = W_T \neq 0$$

机械能不守恒。

【例】如图示

已知：$m = 0.2\text{kg}$，$M=2\text{kg}$，$v = 4.9\text{m/s}$

求：$h_{\max}=?$



解：$m + M +$ 地球：

$W_{外} = 0$，$W_{内非} = 0$

当$h = h_{\max}$时，M与m有相同的水平速度。

取地面 $E_p = 0$，有：

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + mgh_{\max} \qquad (1)$$

$m + M$：水平方向$F_{外}= 0$

$$mv = (m+M)V \qquad (2)$$

由(1) (2)得 $$h_{\max}=\frac{1}{1+\frac{m}{M}}\cdot\frac{v^2}{2g}$$

代入数据：

$$h_{\max}=\frac{1}{1+\frac{0.2}{2}}\times\frac{4.9^2}{2\times9.8}=1.11\ \mathrm{m}$$

【例】逃逸速度：欲使物体从地面出发能够脱离地球引力，至少需要多大的初速？（不计阻力）

解：脱离引力，需到达距离地球无限远。

选地心参考系：只有引力做功，∴E守恒：

$$\frac{1}{2}mv_0^2+(-\frac{GM_e m}{R_e})=0$$

解得：$v_0=\sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}=\sqrt{2gR_e}$

$$v_0=\sqrt{2\times 9.8\times 6.4\times 10^6}$$

$$=1.12\times 10^4\ \mathrm{m/s}$$

M越大，R越小，则 v_0越大，若 $v_0=c$，

光速

为黑洞！

三、质心系中的功能关系

1、质点系的内能

内动能和质点间势能的和，称为质点系的内能

$$E_{in} = E_{k,in} + E_p$$

2、质心系中的功能关系

相对于质心系，外力做功和非保守内力做功的和，等于质点系内能的增量

$$W'_{ext} + W'_{in,\, n-cons} = E_{in,B} - E_{in,A}$$

质心系是非惯性系时也是这样，不必考虑惯性力做的功。

证明：$\mathrm{d}W'_{ext}=\sum_i \vec{f}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i'=\sum_i \vec{f}_i\cdot\left(\mathrm{d}\vec{r}_i-\mathrm{d}\vec{r}_c\right)$

$$=\sum_i \vec{f}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i-\sum_i \vec{f}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_c$$

$$=\mathrm{d}W_{ext}-\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_c$$

$\mathrm{d}W'_{in,n-cons}=\mathrm{d}W_{in,n-cons}$（内力为一对力）

$$\mathrm{d}W'_{ext}+\mathrm{d}W'_{in,n-cons}=\mathrm{d}W_{ext}+\mathrm{d}W_{in,n-cons}-F\cdot\mathrm{d}\vec{r}_c$$

$$=\mathrm{d}E_k+\mathrm{d}E_p-\mathrm{d}E_{kc}$$

$=\mathrm{d}E_{kc}+\mathrm{d}E_{in,k}+\mathrm{d}E_p-\mathrm{d}E_{kc}$（柯尼希定理）

$$=\mathrm{d}E_{in,k}+\mathrm{d}E_p=\mathrm{d}E_{in}$$

若质心系是非惯性系，惯性力做功为零。

证明惯性力做功为零

$$dW'_{iner} = \sum_i \left(-m_i \vec{a}_c\right) \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i' = -\vec{a}_c \cdot \sum_i \left(m_i \mathrm{d}\vec{r}_i' \right)$$

$$= -\vec{a}_c \cdot \mathrm{d}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i' \right) = 0$$

四、（普遍）能量守恒定律

一个孤立系统无论经历何种变化，系统各种形式能量的总和是不变的。

这称为普遍的能量守恒定律

- 机械能守恒定律是
  普遍能量守恒定律在机械运动中的体现。

- **内力的功的作用：**

保守内力做功：相应势能和系统动能间转换；

非保守内力做功：系统机械能与内部其他形式能量间转换。

- **外力的功：** 系统的能量与外界能量的交换或转换
  - **从普遍能量守恒观点：**
    功是能量传递或转换的一种度量！

即：能量只能传递或转换，而不能创生。

△§4.7 守恒定律的意义

自然界中许多物理量如动量、角动量、机械能、电荷、质量等等，都具有相应的守恒定律。

物理学特别注意对守恒量和守恒定律的研究，这是因为：

第一，从方法论上看：

利用守恒定律研究问题，可避开过程的细节，而对系统始、末态下结论（特点、优点）。

第二，从适用性来看：

守恒定律适用范围广，宏观、微观、高速、低速均适用。

第三，从认识世界来看：

守恒定律是认识世界的很有力的武器。

第四，从本质上看：

守恒定律揭示了自然界普遍的属性—对称性。

对称 — 在某种“变换”下的不变性。

每一个守恒定律都相应于一种对称性：

动量守恒相应于空间平移的对称性；

能量守恒相应于时间平移的对称性；

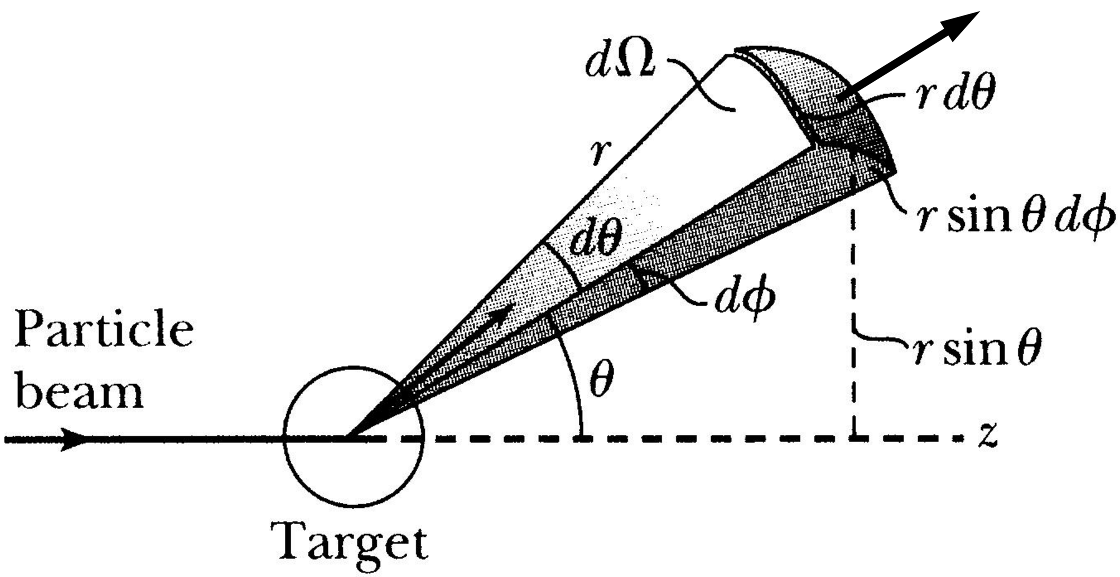
角动量守恒相应于空间转动的对称性；

……

△§4.8 碰撞

两物体接近或接触，在较短时间内发生强烈相互作用的过程称为碰撞。

微观领域的碰撞是指入射粒子与靶粒子发生相互作用，测量出射粒子分布，反推相互作用的性质或粒子的结构。



1、完全非弹性碰撞

碰后不再分开

初态：m_1 ，$\vec{v}_1$ ，m_2 ，$\vec{v}_2$

末态：不再分开，共同速度为$\vec{v}_c$

$$\vec{v}_c=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$$

碰撞失去的动能等于系统的内动能：

$$\Delta E=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2-\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_c^2$$
$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_c^2+E_{k,in}-\frac{1}{2}(m_1+m_2){v_c}^2=E_{k,in}$$

—— 引起转变的资用能（available energy）

2、弹性碰撞：碰撞后总动能没有损失

求对心碰撞后两体的速度？

速度共线

初态：m_1 ，v_{10} ，m_2 ，v_{20}

末态：m_1 ，v_1 ，m_2 ，v_2

动量守恒（无外力或忽略外力）：

$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

动能不变：

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{20}$$

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{20} + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10}$$

1、 $m_1 = m_2$：$v_1 = v_{20}, v_2 = v_{10}$,两球互相交换速度。

2、受碰球$v_{20} = 0$, 原来静止

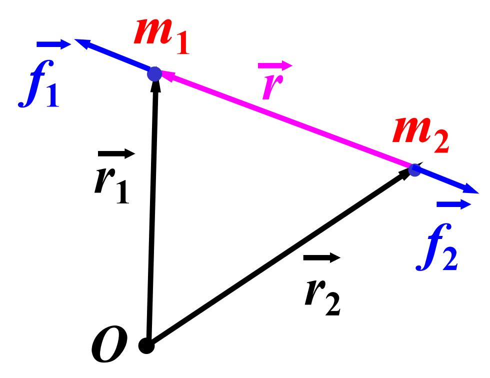
$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10}, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10}$$

- $m_1 << m_2$: $v_1 \approx -v_{10}$, $v_2 \approx 0$
- $m_1 = m_2$: $v_1 = 0$, $v_2 = v_{10}$
- $m_1 >> m_2$: $v_1 \approx v_{10}$, $v_2 \approx 2v_{10}$

§ 4.9 两体问题

两物体在相互作用下的运动问题称为**两体问题**

$$\vec{f}_1 = f(r)\hat{r} \qquad \vec{f}_2 = -f(r)\hat{r}$$



惯性系

$$m_1 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_1}{\mathrm{d}t^2} = f(r)\hat{r} \qquad (1)$$

$$m_2 \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}_2}{\mathrm{d}t^2} = -f(r)\hat{r} \qquad (2)$$

方程是耦合的，求解困难

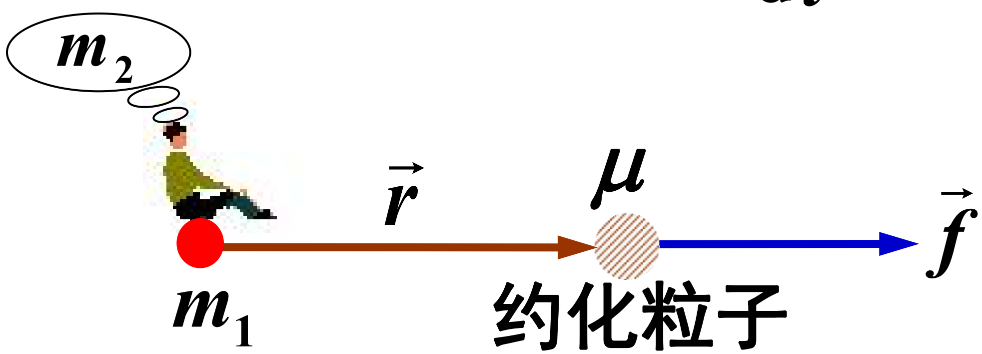
——化成单体问题。

$$(1)\times m_2 - (2)\times m_1$$

$$m_1 m_2 \frac{d^2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{dt^2} = (m_1 + m_2) f(r)\hat{r}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu$$ ——约化质量

单体问题： $f(r)\hat{r} = \mu \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$



质点m_2相对m_1的运动，和约化粒子μ的原点取在m_1上的惯性系中受同样力时的运动是一样的

$$\vec{f}(r)=\mu\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

作为牛顿定律的推论，关于约化粒子的动量和能量的定律，仍取惯性系中的形式，尽管原点m_1有加速度。

约化粒子是“等效粒子”。约化质量μ和m_2的差别，来源于“以m_1为原点的参考系不是惯性系”这一事实。

如果$m_1 \to \infty$，则以m_1为原点的参考系近似为惯性系，约化粒子就近似地等于m_2了

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_2$$

例：物体(m)与地球(M)　$$\mu = \frac{mM}{m+M} \approx m$$

地球和物体系统的总动能即为：

$$E_k = \frac{1}{2}\mu v_{m对地}^2 \approx \frac{1}{2} m v_{m对地}^2$$

【例】已知：质子质量为m_p，质子间相互作用电势能为 ke^2/r ，e为质子电量，r为质子间距离，k为常量。今有两个质子从相距很远处，均以速率v_0相向运动。

求：二者能达到的最近距离 $r_{\min}$

解：

$$\mu = \frac{m_p}{2}$$

$$\frac{1}{2}\mu(2v_0)^2 = k\frac{e^2}{r_{\min}}$$

$$r_{\min} = k\frac{e^2}{m_p v_0^2}$$

*§4.10 流体的稳定流动

伯努利方程是理想流体稳恒流动的动力学方程。实际上是流体流动中的功能关系。

一、理想流体（ideal fluid）

完全不可压缩（密度为常量）无粘滞性的流体，称为理想流体。

❍流动的液体和气体近似为理想流体

可压缩性和密度的变化可忽略。

❍忽略粘滞性。但粘滞性有重要作用。

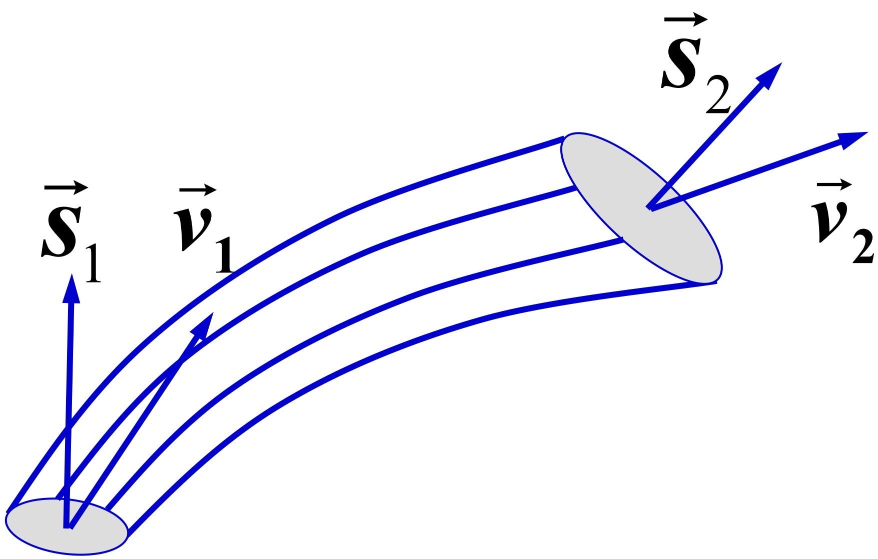
二、稳恒流动（steady flow）

空间各点速度不随时间变化的流体运动称为稳恒流动。

在稳恒流动流体中取一个细流管，流管静止。

$$\vec{v}_1 \Delta t \cdot \vec{s}_1 = \vec{v}_2 \Delta t \cdot \vec{s}_2$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{s}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{s}_2$$

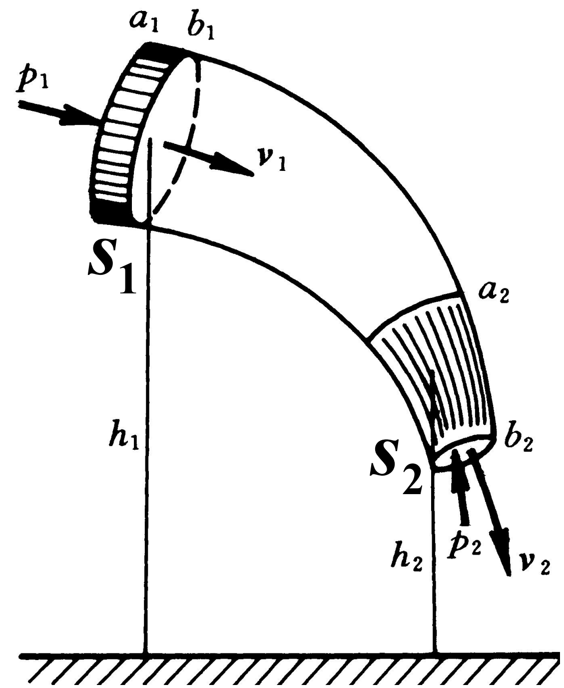


对稳恒流动的理想流体的流管，有连续性方程：

$$\boxed{\vec{v} \cdot \vec{s} = \text{恒量}}$$

*§4.11 伯努利（Bernoulli）方程

设时刻t，流管中一段流体处在a_1a_2位置；经过Δt时间，这段流体达到b_1b_2位置。



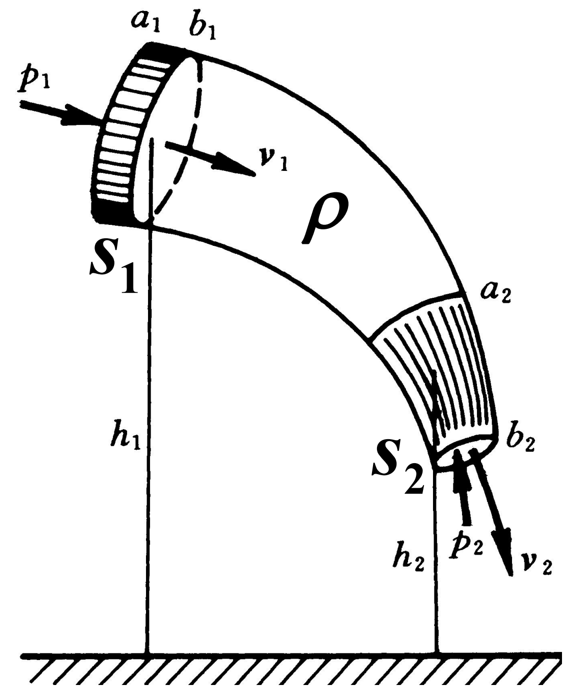
压力p_1s_1做正功，p_2s_2做负功。外力的总功为

$$A=(p_1s_1v_1-p_2s_2v_2)\Delta t=(p_1-p_2)\Delta V$$

稳恒流动理想流体，a_1b_1和a_2b_2两段体积相等

$$s_1v_1\Delta t=s_2v_2\Delta t=\Delta V$$

对稳恒流动，b_1a_2间流体的动能和重力势能不变，只须考虑质量为$m=\rho\Delta V$的a_1b_1和a_2b_2两段流体的**机械能的改变**



$$(p_1-p_2)\Delta V$$

$$=\rho\Delta V\left[\left(\frac{1}{2}v_2^2+gh_2\right)-\left(\frac{1}{2}v_1^2+gh_1\right)\right]$$

$$p_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h_1=p_2+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g h_2$$

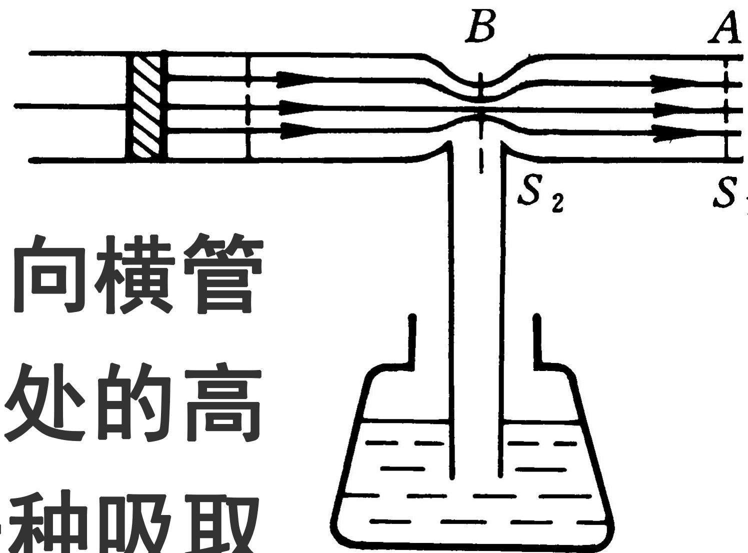
伯努利方程：

$$\boxed{p+\frac{1}{2}\rho v^2+\rho g h=\text{恒量}}$$

设流管处在同一水平面

$$p+\frac{1}{2}\rho v^{2}=\text{恒量}$$

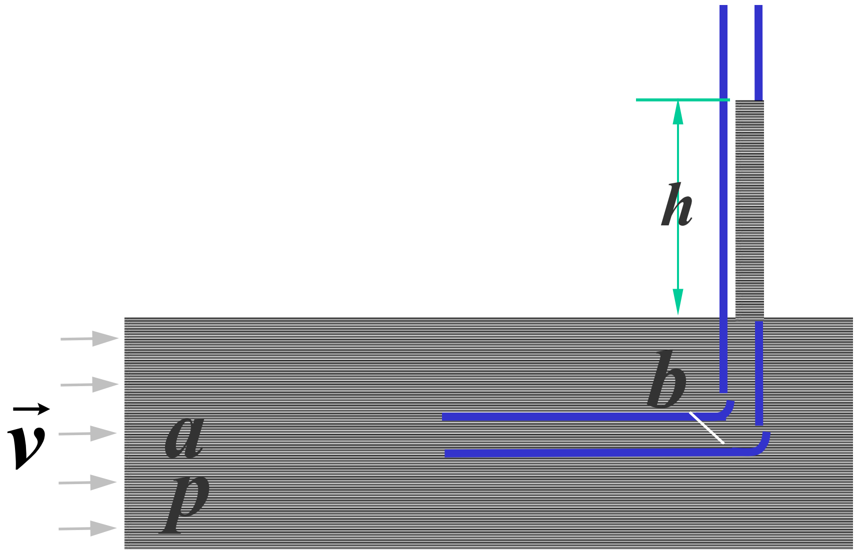
空吸作用



流速大的地方压强小。当向横管吹气或向右推动活塞时，B处的高速气流造成的低压将产生一种吸取流体的作用，称为空吸作用。

小型喷雾器、水流抽机和汽油机的汽化器等都利用了这种空吸作用。

皮托管测流速



考虑a，b两点：$p+\frac{1}{2}\rho v^2 = p+\rho gh$

流速：$v=\sqrt{2gh}$

【例】某大楼由铺设在地下的同一自来水管道供水。打开二楼的水龙头，测得水的流速为12.0m/s，求打开一楼水龙头的流速。设大楼的层高为4m。

解 取地下管道处为高度的零点，管道内水的压强为p，流速为v；一楼和二楼水龙头的高度分别为h_1和h_2，水的流速分别为v_1和v_2，大气压为p_0，水的密度为ρ，由伯努利方程，有

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2=p_0+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho g h_1$$

$$p+\frac{1}{2}\rho v^2=p_0+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g h_2$$

解得

$$v_1 = \sqrt{v_2^2 + 2g(h_2 - h_1)}$$

代入

$$v_2 = 12\,\mathrm{m/s},\ \ h_2 - h_1 = 4\mathrm{m},\ \ \mathrm{g} = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$$

因此，打开一楼水龙头的流速为

$$v_1 = \sqrt{12^2 + 2\times 9.8\times 4} = 14.9\,\mathrm{m/s}$$