Review

含参广义积分的性质

$$I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x,\quad D=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta].$$

$$\bullet\begin{cases} f(x,y),\ f_y'(x,y)\in C(D); \\ \forall y\in[\alpha,\beta], I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \text{ 收敛}; \\ \int_a^{+\infty} f_y'(x,y)\mathrm{d}x \text{ 关于} y\in[\alpha,\beta]\text{一致收敛}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \in C^1[\alpha,\beta], \text{且} I'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f_y'(x,y)\mathrm{d}x.$$

$$\bullet\begin{cases} f(x,y)\in C(D); \\ \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \text{ 关于} y\in[\alpha,\beta]\text{一致收敛}; \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} I(y)\in C[\alpha,\beta],\text{即} \\ \qquad \lim\limits_{y\to y_0}\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\mathrm{d}x. \\ I(y)\in R[\alpha,\beta], \\ \qquad \text{且}\int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y. \end{cases}$$

- $f(x,y)\in C\left([a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)\right)$, 且满足

(1) $\forall\beta>\alpha,\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\alpha,\beta]$上一致收敛;

$\forall b>a,\int_\alpha^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $x\in[a,b]$上一致收敛;

(2) $\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}\left|f(x,y)\right|\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}\left|f(x,y)\right|\mathrm{d}y$ 中至少有一个存在;

则 $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[\alpha,+\infty)$ 上可积, 且

$$\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Chap3 重积分

§1. 二重积分的概念和性质

二重积分是三重积分的基础. 只有掌握好了二重积分才能学好三重积分. 而且, 二重积分完全体现了重积分的所有思想.

- 二重积分的几何与物理背景
  - 曲顶柱体的体积
  - 平板质量
- 二重积分的概念
- 二重积分的性质

1. 二重积分的几何与物理背景

(1) 曲顶柱体的体积

设曲面$S: z = f(x, y), (x, y) \in D$.求以$D$为下底,以曲面$S$为上顶的曲顶柱体Ω的体积(有向) V(Ω).

•Step1.对D进行分划: 将D分成n个小区域$D_1, D_2, \cdots, D_n$,称之为 D 的一个分划$T = \{D_i\}_{i=1}^{n}$. 相应地, Ω被分成了曲顶柱体$\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_n$. 记

$$d(D_i) \triangleq \sup\left\{d(P, Q) \middle| P, Q \in D_i\right\}.$$

称$\lambda(T) = \max\limits_{1\le i\le n}\{d(D_i)\}$为分划$T$的直径.

- Step2.取标志点　在D_i中任取一点$P_i(\xi_i,\eta_i)$.
- Step3.求近似和　以$\Delta\sigma_i$表示D_i的面积, 则

$$\mathrm{V}(\Omega_i)\approx f(P_i)\Delta\sigma_i,$$

$$\mathrm{V}(\Omega)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(\Omega_i)\approx\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta\sigma_i.$$

- Step4.取极限

直观上,当D的分划越来越细,即$\lambda(T)\to 0$时,

$$\sum_{i=1}^{n}f(P_i)\Delta\sigma_i\to\mathrm{V}(\Omega).$$

(2) 平板质量

薄板D上点(x,y)处的密度为$\rho(x,y)$, 求薄板质量.

- Step1.分划：将D分成n个小区域$D_i\,(i=1,2,\cdots,n)$
- Step2.取标志点：在D_i中任取一点$P_i(\xi_i,\eta_i)$.
- Step3.求近似和：用$\Delta\sigma_i$表示D_i的面积, 薄板质量

$$m(D)=\sum_{i=1}^{n} m(D_i)\approx\sum_{i=1}^{n}\rho(P_i)\Delta\sigma_i.$$

- Step4.取极限：

当D的分割越来越细时, $\sum_{i=1}^{n}\rho(P_i)\Delta\sigma_i\to m(D)$.

2. 矩形区域上的二重积分

Def. f 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上有定义, 对 D 的任意分划

$$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_k=d,$$

及任意 $P_{ij}(\xi_{ij},\eta_{ij})\in D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j], 1\le i\le n,$

$1\le j\le k$, 若 *Riemann* 和 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$ 的极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j$$

存在,则称 f 在 D 上($Riemann$)可积,记作 $f \in R(D)$,
并称该极限为 f 在 D 上的二重积分, 记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i \Delta y_j.$$

其中$\iint$是二重积分号,D是积分域,f是被积函数.

Remark: 定义中, $Riemann$和的极限与对D的分划无关,与标志点$\{(\xi_{ij},\eta_{ij})\}$的选取无关. 因此也可以用$\varepsilon-\delta$语言定义二重积分:

Def. f在$D=[a,b]\times[c,d]$上有定义, $\mathrm{A}\in\mathbb{R}$. 若$\forall\varepsilon>0$,

$\exists\delta>0$, s.t.对 D的任意分划

$$T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_k=d,$$

及任意$P_{ij}(\xi_{ij},\eta_{ij})\in D_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, $1\le i\le n$,

$1\le j\le k$, 只要$\lambda(T)<\delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} f(\xi_{ij},\eta_{ij})\Delta x_i\Delta y_j-\mathrm{A}\right|<\varepsilon,$$

则称f在D上(Riemann)可积, 称A为f在D上的二重积分, 记为$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{A}$.

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in D_{ij}} \{ f(x,y) \}, M_{ij} = \sup_{(x,y)\in D_{ij}} \{ f(x,y) \}.$$

Darboux下和： $$L(f,T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

Darboux上和：$$U(f,T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j$$

Thm. f为$D = [a,b]\times[c,d]$上有界函数.

(1)T是D的分划, T'为T的加密分划, 则

$$L(f,T) \le L(f,T') \le U(f,T') \le U(f,T);$$

(2)T_1, T_2是D的分划, 则 $L(f,T_1) \le U(f,T_2)$.

Darboux下积分: $\underline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sup_T L(f,T)$

Darboux上积分: $\overline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \inf_T U(f,T)$

Thm. f为$D=[a,b]\times[c,d]$上有界函数, 则以下命题等价

(1) $f \in R(D)$;

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists D$的分划$T, s.t.\ U(f,T) - L(f,T) < \varepsilon$;

(3) $\underline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \overline{\iint_D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Def. 称$G \subset \mathbb{R}^2$为零面积集,若$\forall \varepsilon > 0$,$\exists$可数多个矩形$\{I_i\}, i = 1, 2, \cdots, \infty$,使得$G \subset \bigcup\limits_{i \ge 1} I_i$,且这些矩形的面积和$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma(I_i) < \varepsilon$.

Thm. $D = [a,b] \times [c,d]$,则

(1) $f \in R(D) \Rightarrow f$在D上有界;

(2) $f \in C(D) \Rightarrow f \in R(D)$;

(3) f在D上有界且间断点集为零面积集$\Rightarrow f \in R(D)$.

3. 一般有界闭集上的二重积分

Def. $D \subset \mathbb{R}^2$为有界闭集, f为D上有界函数. 若存在

$E = [a,b]\times[c,d], s.t.\ D \subset E$, 且

$$f_E(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D \\ 0 & (x,y)\in E\setminus D \end{cases} \in R(E),$$

则称f在D上Riemann可积, 且f在D上的积分定义为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_E f_E(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Thm. $D\subset\mathbb{R}^2$为有界闭集, f为D上有界函数.若f在D上的间断点集为零面积集,∂D为零面积集,则$f\in R(D)$.

Question1. $D\subset\mathbb{R}^2$为有界闭集,若f在D上有瑕点(瑕点的邻域中f无界), 如何拓展f在D上的Riemann可积性?(类比一元函数的瑕积分)

Question2. $D\subset\mathbb{R}^2$为无界闭区域,如何讨论f在D上的可积性?(类比一元函数的无穷限积分)

例. $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$在$[-1,1]\times[-1,1]$上Riemann可积.因为$f$仅有一个间断点$(0,0)$.

例. Dirichlet函数$D(x,y)=\begin{cases}1 & (x,y)\in\mathbb{Q}^2\\ 0 & (x,y)\notin\mathbb{Q}^2\end{cases}$在$\mathbb{R}^2$中任一有界区域$E$上均不可积.因为对$E$的任意分划,

$$L(f,T)=0<\sigma(E)=U(f,T).$$

4. 二重积分的性质

1)(线性性质) $f,g\in R(D)$, 则 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha f+\beta g\in R(D)$, 且

$$\iint_D(\alpha f+\beta g)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\alpha\iint_D f\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\beta\iint_D g\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2)(区域可加性) D_1,D_2 为 $\mathbb{R}^2$ 中有界闭集, $D_1\cap D_2$ 为零面积集, $D=D_1\cup D_2$, 则 $f\in R(D)\Leftrightarrow f\in R(D_i), i=1,2$, 且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3)(保序性) $f,g\in R(D)$, $f\geq g$, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

特别地, $f\in R(D)$, $f\geq 0$, 则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq 0$.

4) $f \in R(D)$,则$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Proof: $\pm f \le |f|$, 由线性性质和保序性,

$$\pm\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \ \square$$

5)(估值定理) $f \in R(D), m \le f(x,y) \le M$.记$\sigma(D)$为$D$的面积,则

$$m\sigma(D) \le \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le M\sigma(D).$$

6)(对称性)设$f \in R(D)$, D关于OX轴对称,

- 若$f(x,y)$关于y为奇函数,则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$;

- 若$f(x,y)$关于y为偶函数,记D_1为D位于OX轴上方的部分,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7)(轮换不变性) 若$D \subset \mathbb{R}^2$关于x,y是轮换对称的,即$(x,y) \in D \Leftrightarrow (y,x) \in D$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例. $f\in C([a,b]), f>0, D=[a,b]\times[a,b]$, 则

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge (b-a)^2.$$

Proof: 由于区域D是轮换对称的, 因此

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \frac{f(y)}{f(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$$\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_D \left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\ge \frac{1}{2}\iint_D 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (b-a)^2. \square$$

8) (积分中值定理)$D\subset\mathbb{R}^2$为连通有界闭集,∂D为零面积集,g不变号, $f,g\in C(D)$. 则存在$(\xi,\eta)\in D$, s.t.

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

特别地,若$g\equiv 1$,记D的面积为$\sigma(D)$,则

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\sigma(D).$$

Proof. $f,g\in C(D)$,则$fg\in C(D)$,从而$fg\in R(D)$.

g不变号,不妨设$g\geq 0$. 记

$$m=\min_{(x,y)\in D} f(x,y), M=\max_{(x,y)\in D} f(x,y),$$

则 $\quad mg(x,y) \le f(x,y)g(x,y) \le Mg(x,y).$

由二重积分的保序性,有

$$m\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le M\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因此,$\exists \mu \in [m, M], s.t.$

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mu\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由连续函数的介值定理,$\exists(\xi,\eta) \in D, s.t. f(\xi,\eta) = \mu,$

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \square$$

Remark: g变号时, 结论不一定成立.

例如, $D=[-1,1]\times[-1,1]$, $f(x,y)=g(x,y)=x$.则

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0.$$

事实上, $\displaystyle\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq \iint_{\frac{1}{2}\leq x,y\leq 1} x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$\geq \iint_{\frac{1}{2}\leq x,y\leq 1}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{16}>0.$$

而区域D关于y轴对称, $g(x,y)=x$关于x为奇函数, 所以$\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

故$\forall(\xi,\eta)\in D,$

$$0<\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\neq f(\xi,\eta)\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0. \square$$

例. 求 $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

分析: 将被积函数看成薄板点密度,则所求为原点处的点密度,即被积函数在点(0, 0)的值,结果应为1.

解:由积分中值定理,$\exists(\xi_r,\eta_r)$, $s.t.\ \xi_r^2+\eta_r^2\le r^2$,s.t.

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2} e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=e^{\xi_r^2-\eta_r^2}\cos(\xi_r+\eta_r)\to 1,\text{当} r\to 0\text{时}. \ \square$$

基本的二重积分的计算很重要, 大家要熟练掌握

- 二重积分的基本性质
- 二重积分化累次积分
- 交换积分次序
- 由累次积分给出积分区域
- 极坐标下二重积分的计算
- 二重积分的变量替换方法

作业：

习题3.2 No.4（D为有界闭区域）