相对论动力学

任何物理体系的动力学方程都是基本假设，只能通过实验事实和更普遍的假设，例如协变性等来建立

如，质点动力学

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad m = \text{const.} ,$$

但与相对论矛盾：

1. 导致超光速；
2. 对洛仑兹变换，不满足相对性原理

高速运动时动力学概念如何发展？

建立质点相对论动力学方程，得到相对论质量的概念，导出质能关系，能量—动量关系以及三维力的相对论变换等。

一、对方程的基本要求

1、速度 $v << c$ 时返回牛顿方程

力＝动量对时间的变化率

2、满足爱因斯坦相对性原理

要求方程是洛仑兹变换协变式，在不同惯性系中方程形式相同

二、 物理学家坚信基本的守恒定律，这是定义物理量的依据。

为使动量守恒定律成立，保留关系：

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}}$$

同时还保留动量定义： $\boxed{\vec{P} = m\vec{v}}$

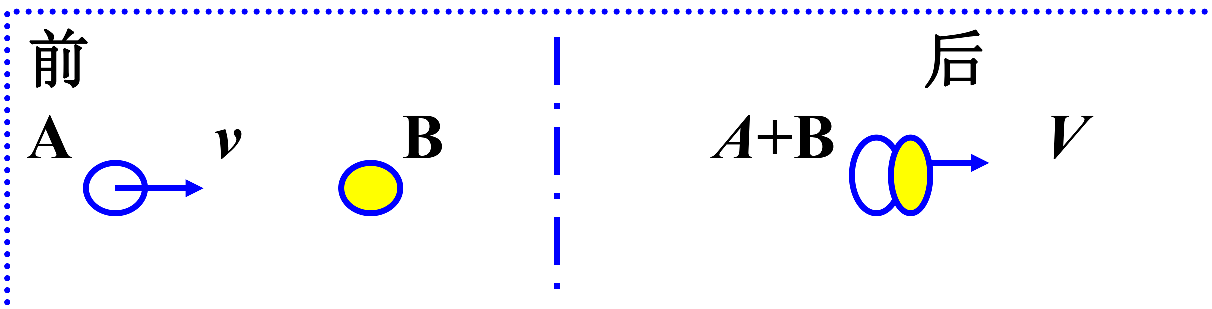
为使动量守恒对洛仑兹变换保持不变，必须认为质量与速度有关，即$m = m(v)$。

§7 相对论质量（relativistic mass）

下面由动量守恒导出m与v的关系：

两粒子对心碰撞。A、B为全同粒子，碰后复合为一整体。碰撞前后动量应守恒。

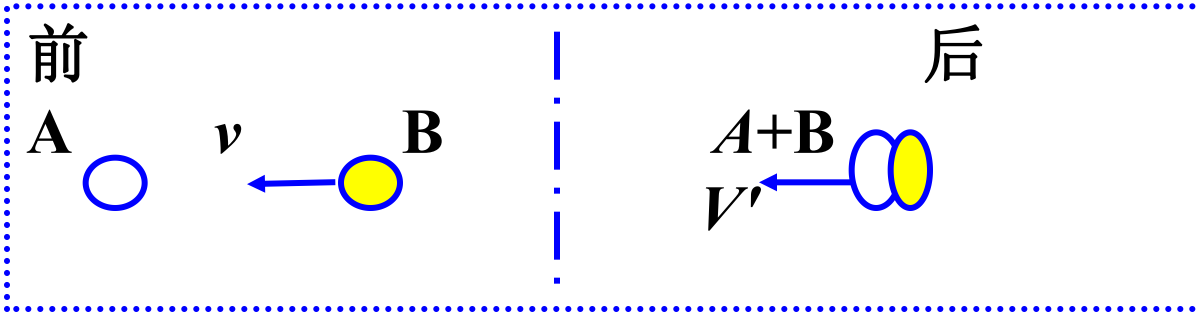
S系中：



碰前　A: v ,m_v ; B: 静止, m_0

碰后　(A+B)： V, M

S'系中



碰前 A: 静止, m_0 B: $-v$, m_v

碰后 (A+B): M', V'

质量守恒 $$M = m_v + m_0 = M'$$

动量守恒 $$MV = m_v v$$ （S系中）

$$MV' = m_v(-v)$$ （S'系中）

对比得: $$V' = -V$$

$$\frac{v}{V} = \frac{m_v + m_0}{m_v} = 1 + \frac{m_0}{m_v} \quad (1)$$

相对论变换 $V' = V'_x = \dfrac{V - v}{1 - \dfrac{vV}{c^2}} = -V \qquad (2)$

解方程(2)得 $\dfrac{v}{V} = 1 + \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \qquad (3)$

（因 $v>V$ 故取 “+”号）

由（1），（3）得

$$\boxed{m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0}$$

相对论质量

静止质量

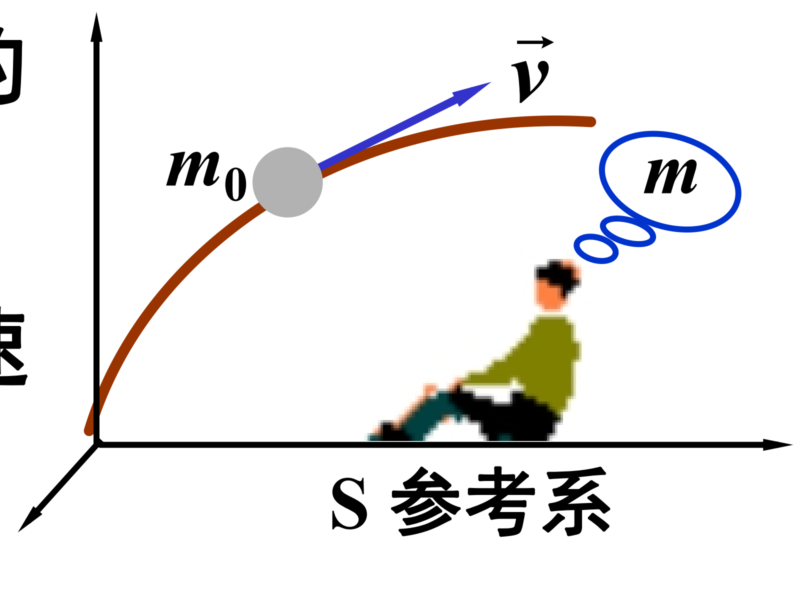
粒子的质量与粒子相对测量质量的参考系的运动速率v 有关

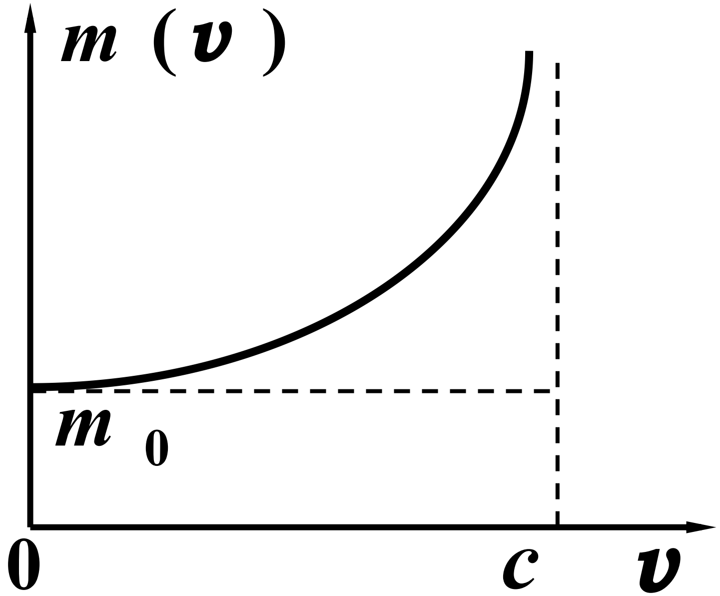
$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

其中，m_0代表粒子的静质量。

1、实物粒子（$m_0 \neq 0$）的极限速度为 c .

2、静质量为零的粒子的速度为 c .



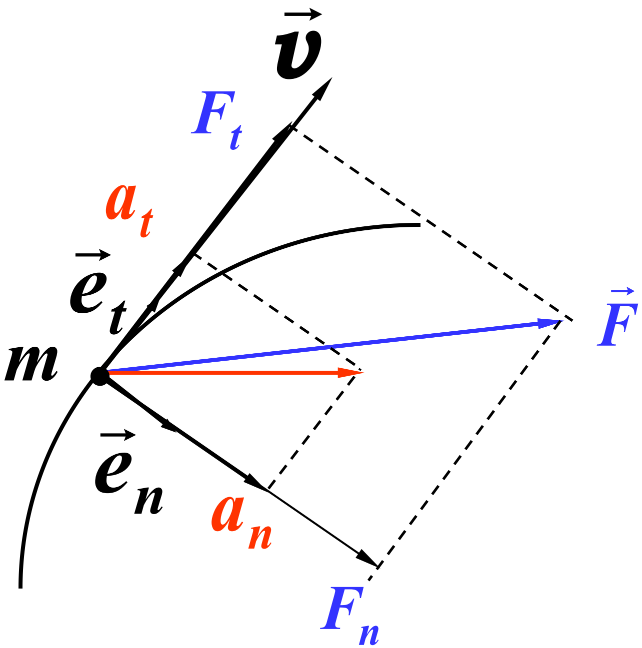


$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

电子能量(MeV)	v/c	m/m_0
5	0.995	9.8
25	0.9998	49
2.8×10^{3}	0.99999998	5490

$v << c$ 时，$m = m_0 \rightarrow$ 牛顿力学情形。

§8 力和加速度的关系



$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=m_{(v)}\vec{a}+\vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$=m(a_n\vec{e}_n+a_t\vec{e}_t)+\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v\vec{e}_t$$

$$F_n=ma_n=\frac{m_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}}a_n$$

$$F_t=ma_t+v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{m_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{m_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}a_t$$

$$\boxed{F_n = ma_n = \frac{m_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{1/2}} a_n}$$ 和 $$\boxed{F_t = \frac{m_0}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} a_t}$$ 表明：

（1）$\vec{a}$并不平行于$\vec{F}$。

（2）速度越大，加速越困难。

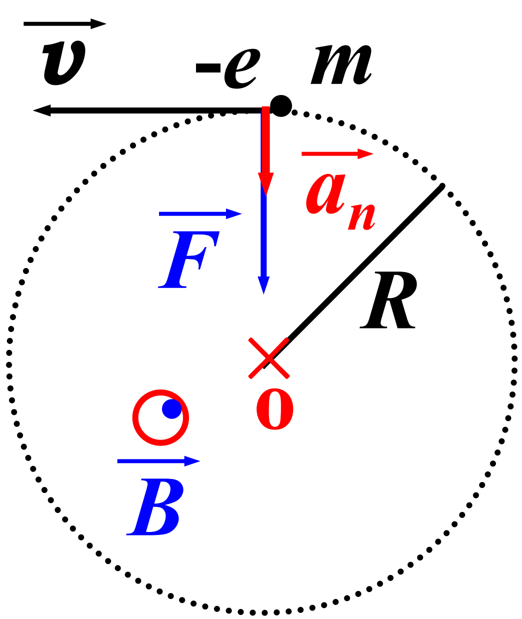
（3）纵向（切向）比横向（法向）加速困难。

$$\left.\begin{aligned} \vec{F} &= m_{(v)}\vec{a} + \vec{v}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \\ m &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_{(v)}} - \frac{\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{F})}{m_{(v)}c^2}}$$

当 $v \ll c$ 时，$\vec{F} = m_0 \vec{a} \rightarrow$ 牛顿第二定律

当 $\vec{v} \perp \vec{F}$ 时，$\vec{F} = m_{(v)} \vec{a} = \gamma\, m_0 \vec{a}$

如：感应加速器中电子的运动：



$$F = Bev = m_{(v)} \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{m_{(v)} v}{eB} = \gamma \frac{m_0 v}{eB}$$

§9 相对论动能（relativistic kinetic energy）

保留动能定理，由此导出相对论动能

$$\boxed{E_k = mc^2 - m_0 c^2}$$

一、推导

设粒子初静止，质量m_0，力F作用，有

$$dE_K = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = d\vec{p} \cdot \vec{v}$$

$$= m\vec{v} \cdot d\vec{v} + v^2 dm = mvdv + v^2 dm$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

有 $mv\mathrm{d}v + v^2\mathrm{d}m = c^2\mathrm{d}m$

有 $\mathrm{d}E_k=c^2\mathrm{d}m$ $\int_0^{E_k} dE_k = \int_{m_0}^{m} c^2 dm$

$$\boxed{\begin{aligned} E_k &= mc^2 - m_0c^2 \\ &= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right) \end{aligned}}$$

$\boldsymbol{v} << c$ 时：

$$\frac{1}{\sqrt{1-\boldsymbol{v}^2/c^2}} \approx 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}, \rightarrow \quad E_k \approx \frac{1}{2}m_0\boldsymbol{v}^2$$

注意：$\frac{1}{2}m_{(v)}\boldsymbol{v}^2$ 并不是相对论的动能 ，

这与相对论动量 $\vec{p} = m_{(v)}\vec{\boldsymbol{v}}$ 不同。

二、实验验证

带电粒子在电场中加速，得到的动能

$E_k=qU$ 　　(U为加速电压),

通过测q，U可测E_k，再测定粒子速率 v，

画出$E_k \sim v$曲线，与上述关系吻合。

§10 相对论能量（relativistic energy）

一. 质能关系（equivalence of mass and energy）

对 $E_k = mc^2 - m_0c^2$

爱因斯坦认为：

$E_0 = m_0 c^2$ 为 静止能量

$mc^2 = E_k + m_0 c^2$ 为总能

记作： $\boxed{E = mc^2}$ —— 质能关系

讨论

1）宏观静止的物体具有能量——内部结构各层次粒子的能量的总和。

如电子：$E_0=0.511\text{MeV}$

2）$E=mc^2$为质点相对论（总）能量，这是相对论力学的最重要的成就

3）$\because E=mc^2$ 若$E=\text{const.}$, 则$m=\text{const.}$，相对论统一了质量和能量守恒

（这里的质量是相对论质量，而非静止质量）

4）静质量变化——质量亏损

孤立系统内部进行一个过程时

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta(m_0 c^2) = 0$$

$$\Delta E_k = (-\Delta m_0) c^2$$

$(-\Delta m_0)$称系统的(静) 质量亏损用Δm_0 表示

当过程前后系统可看成由一些独立质点组成时

$$\Delta m_0 = \sum m_{0i\,初} - \sum m_{0i\,末}$$

例1：热核反应

$$ {}^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} $$

$$ \Delta m_0 = (m_\mathrm{D} + m_\mathrm{T}) - (m_{\mathrm{H_e}} + m_\mathrm{n}) $$

$$ = 0.0311 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg} $$

释放能量 $\Delta E = \Delta m_0 c^2 = 2.799 \times 10^{-12}\,\mathrm{J}$

1kg核燃料释放能量约为：3.35×10^{14} J 。

1kg优质煤燃烧热为：2.93×10^{7}J

即1公斤核燃料相当于1千万公斤煤

释能效率

（释放的能量占燃料的相对论静能之比）

$$\frac{\Delta E_k}{(m_\mathrm{D}+m_\mathrm{T})c^2}=\cdots=0.37\%$$

可见，静能还是要比释放的能量大得多。

太阳每时每刻进行着热核聚变反应，

释放的核能以热辐射的形式放出。

由地面接收到的太阳辐射为 $1.7\times10^3\ \mathrm{W/m^2}$,

可得整个太阳的辐射功率为 $4.9\times10^{26}\ \mathrm{W}$,

并且可以计算出太阳质量的年损失量为

$\Delta m = 1.7\times10^{17}\ \mathrm{kg}$.

重核裂变

$$X \to Y + Z$$

质量亏损

$$\Delta m_0 = m_{X0} - (m_{Y0} + m_{Z0})$$

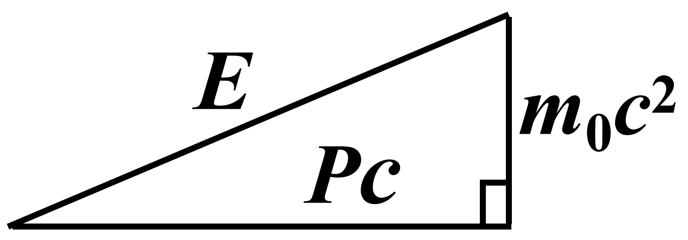
裂变能

$$\Delta E = \Delta m_0 c^2$$

二. 能量和动量的关系：

$$\left.\begin{aligned} &E = mc^2 \\ &m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}} \\ &P = m\upsilon \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{E^2 = P^2c^2 + m_0^2c^4} \qquad (1)$$



若粒子动能为 E_k，则

$$E = E_k + m_0c^2 \qquad (2)$$

(2)代入(1)得：$\boxed{E_k^2 + 2E_k \cdot m_0c^2 = p^2c^2}$

当 $v << c$ 时，$E_k << m_0c^2$，

$$\therefore \qquad 2E_k m_0 c^2 \approx p^2c^2$$

$$E_k \approx \frac{p^2}{2m_0}$$ （牛顿力学动能）

对光子： $\because v = c$ ， $\therefore m_0 = 0$

光子动能 $E_k = E = mc^2 = (mc)c = Pc$

（按牛顿力学应为） $E = \dfrac{1}{2}pc$

由爱因斯坦光子理论 $E = h\nu$

$$\therefore \quad p = \frac{h\nu}{c}, \quad m = \frac{h\nu}{c^2} \quad (p = mc)$$

例：北京正负电子对撞机中电子动能

E_k=2.8×10^{9}ev, 求电子速率v 。

解：$\because E_k >> m_0c^2$（0.511×10^{6}ev）

$$\therefore E_k \approx mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

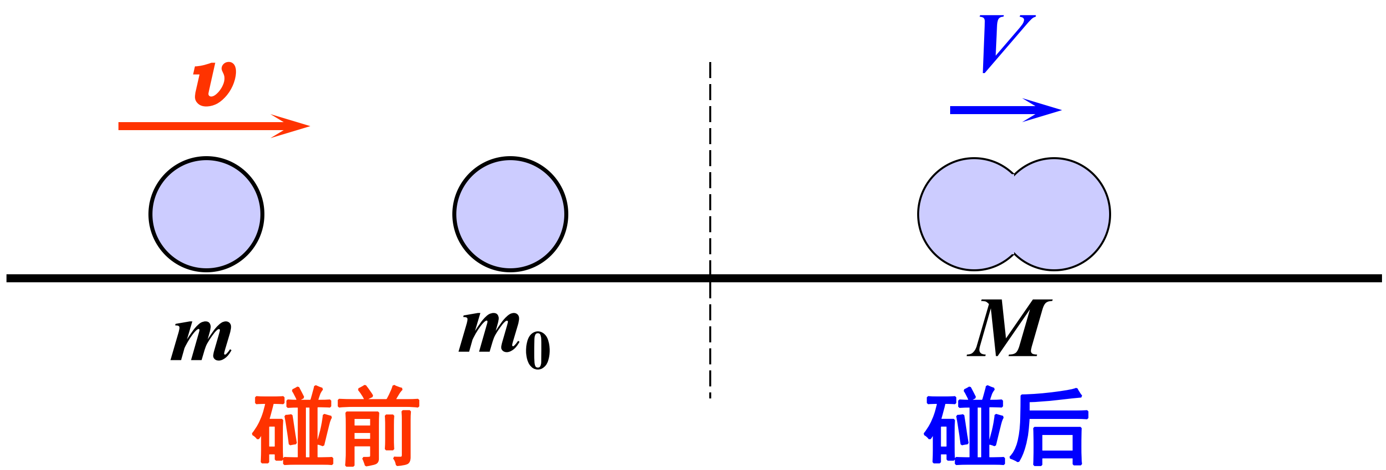
得 $c^2 - v^2 = (m_0c^2/\ E_k)^2 c^2$

$$c^2 - v^2 = (c+v)(c-v) \approx 2c(c-v)$$

$$\therefore c - v = \frac{1}{2}\left(\frac{m_0c^2}{E_k}\right)^2 c = 5m/s$$

例：已知

两个静止质量为 m_0 的小球，一个静止，另一个以速率 $v = 0.8c$ 运动。它们对心碰撞后粘在一起（设桌面光滑）。



求：碰撞后它们的静止质量M_0

解： 设碰后粘在一起速率为V

因为水平方向无外力，**动量守恒，**有

$$\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{M_0 V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \cdots\cdots \text{（1）}$$

无外力作功，碰撞前后 **能量守恒，**有

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+m_0 c^2=\frac{M_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \cdots\cdots \text{（2）}$$

（1）、（2）联立，代入$v = 0.8c$，得

$$V = \frac{1}{2}c$$

$$M_0 = \frac{4}{3}\sqrt{3}m_0 \approx 2.31m_0 > 2m_0$$

为什么？

§11 相对论动量 — 能量变换

利用 $\vec{p}' = \dfrac{m_0 \vec{v}'}{\sqrt{1 - v'^2/c^2}}$，$E = \dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

和速度变换公式，可得：

$$\begin{cases} p'_x = \gamma\left(p_x - u\dfrac{E}{c^2}\right) \\ p'_y = p_y \\ p'_z = p_z \\ E' = \gamma(E - \beta c p_x) \end{cases} \quad \text{对比} \quad \begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\beta}{c}x\right) \end{cases}$$

有：$p_x \sim x$，$p_y \sim y$，$p_z \sim z$，$E/c^2 \sim t$ 。

§ 12 相对论中力的变换

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{F'_x + \dfrac{u}{c^2}\vec{F}\cdot\vec{v}'}{1+\dfrac{u}{c^2}v'_x} \\ F_y = \dfrac{F'_y}{\gamma(1+\dfrac{u}{c^2}v'_x)} \\ F_z = \dfrac{F'_z}{\gamma(1+\dfrac{u}{c^2}v'_x)} \end{cases} \xrightarrow[\vec{v}'=0]{\text{若}} \begin{cases} F_x = F'_x \\ F_y = F'_y/\gamma \\ F_z = F'_z/\gamma \end{cases}$$

【例】高能粒子碰撞中的资用能：可以用于粒子转化的能量。对于

$$A_1 + A_2 \rightarrow B$$

设加速粒子的动能为E_k（$>> m_0c^2$，粒子的静能）

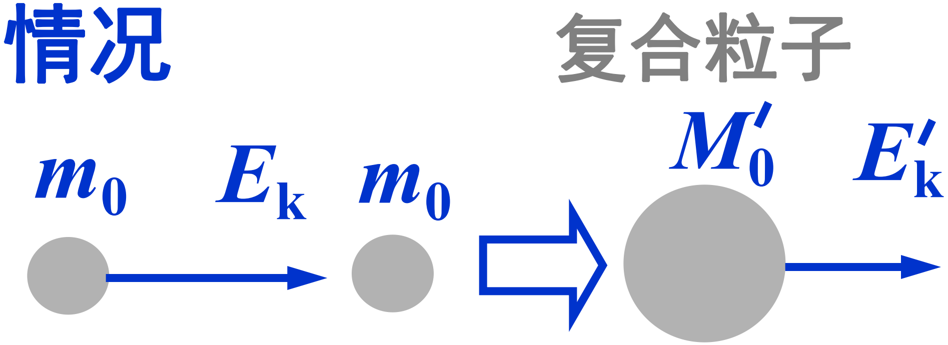
（1）求当靶静止时的资用能；

（2）求对撞时的资用能；

（3）哪种碰撞更有效？

解. 简单反应，应用动量、能量守恒计算

1、靶静止情况



$E_{av} = M_0'c^2$—资用能，E_k'—浪费掉了。

碰撞前：$E = E_k + 2m_0c^2$

$$p^2c^2 = (E_k + m_0c^2)^2 - m_0{}^2c^4 = E_k(E_k + 2m_0c^2)$$

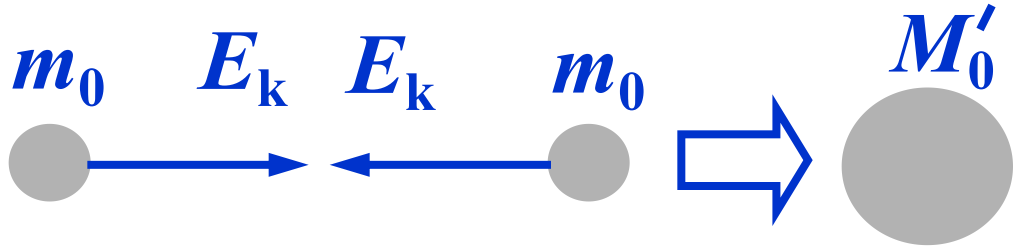
碰撞后：$E' = \sqrt{p'^2c^2 + M_0'^2c^4}$

应用动量、能量守恒：$p = p'$，$E = E'$

得到资用能（$E_k >> m_0c^2$）：

$$M_0'c^2 = \sqrt{2m_0c^2(E_k + 2m_0c^2)} \approx \sqrt{2m_0c^2E_k}$$

2、对撞情况



资用能：$M_0'c^2 = 2E_k + 2m_0c^2 \approx 2E_k$

3、对撞比靶静止更有效

$$\frac{2E_k}{\sqrt{2m_0c^2E_k}} = \sqrt{\frac{2E_k}{m_0c^2}} >> 1$$