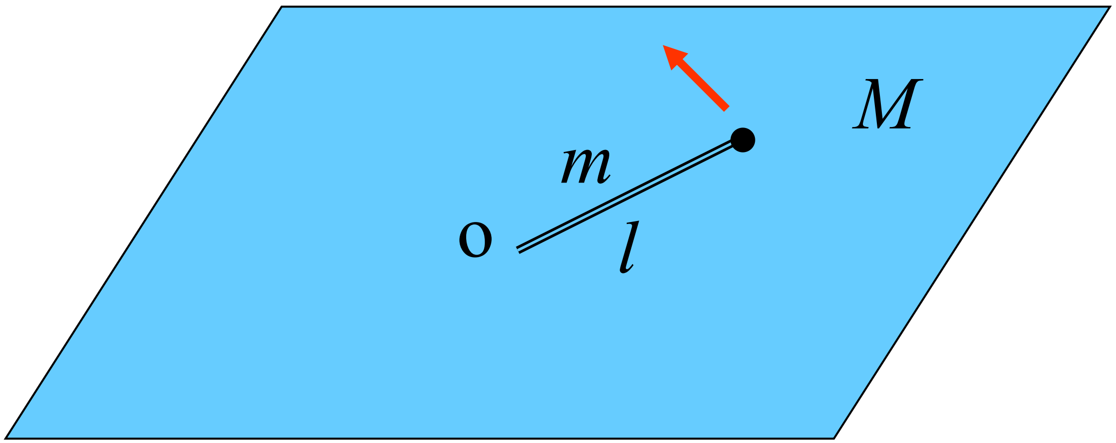
例：　一长度为l，质量为m的绳索，一端系在轴上，另一端固结一质量为M的物体，它们在光滑水平面上以均匀的角速度ω转动，

求：绳中距离轴心为r处的张力T。

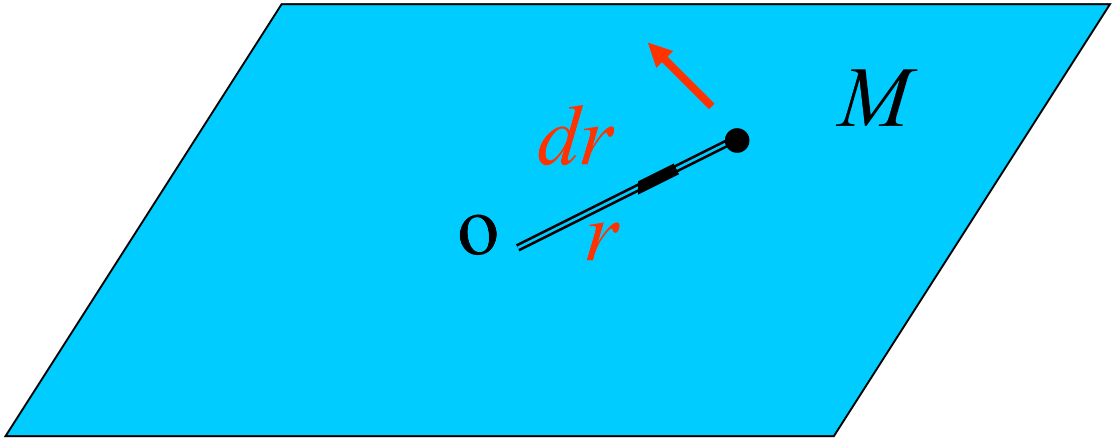


【解】

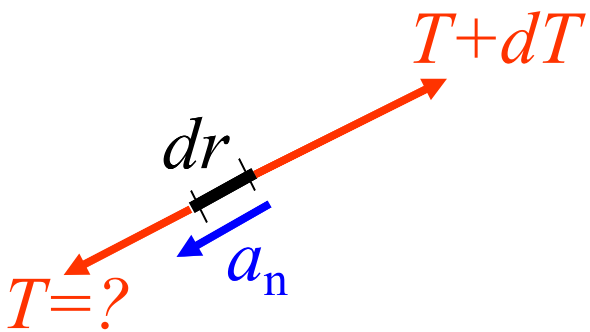
此题告诉了绳的质量不能忽略，绳中各部分的速度加速度都不相同，整个绳不能看成一个质点！

在绳的不同位置处，张力也不会相同。

下面求半径为 r 处的张力 T=?



取距轴心 r处，长度为 dr 的一段质元，

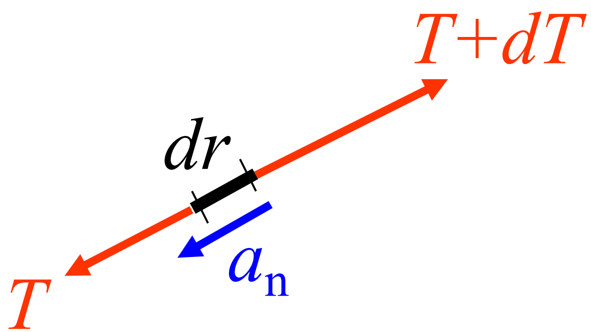


其质量为 $$dm = m\frac{dr}{l}$$

它作半径为r，速率为ωr的匀速圆周运动。

设 r 处, 张力为T,

$r + d\,r$ 处, 张力为$T + dT$



由牛顿定律

$$T-(T+dT)=(dm)\omega^2 r$$

$$dT=-m\omega^2 r\frac{dr}{l}$$

$$\int_T^{T_l} dT=\int_r^l -m\omega^2 r\frac{dr}{l}$$

(注意上下限！)

$$T_l=M\omega^2 l$$

得 $$T=M\omega^2 l+m\omega^2\frac{l^2-r^2}{2l}$$

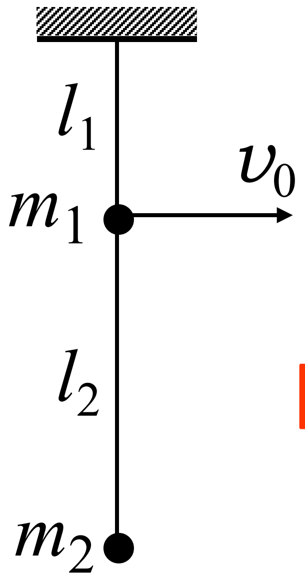
讨论：（1）量纲 正确

（2）特例

$r=l$ 时，$T=M\omega^2 l$ 正确

$r=0$ 时，$T=M\omega^2 l+m\,\omega^2 l/2$ (最大)

例：



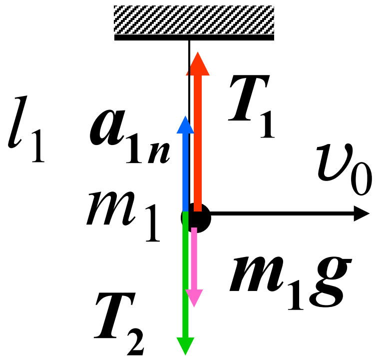
两根长度分别为 l_1, l_2的绳竖直悬挂两个质量分别m_1, m_2 的小球，突然打击球1，使之获得水平速度v_0 ,求该瞬时两绳中的张力。

【解】：以地面为参考系，来分析：

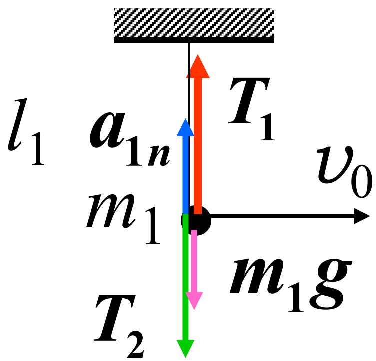
m_1作半径为 l_1 的圆周运动，

在打击m_1的瞬时，

其法向加速度为a_{1n} ,法向力为 T_1

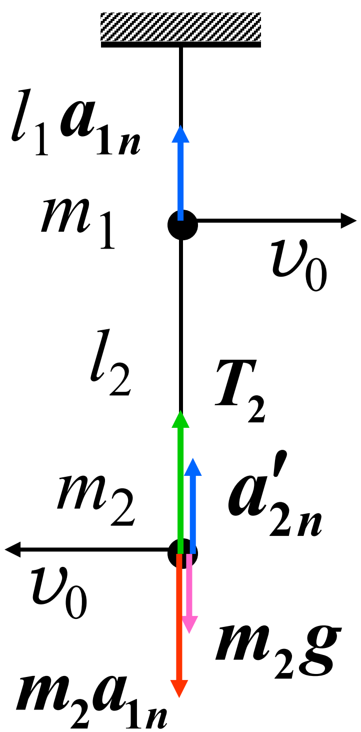


它还受到重力m_1g和下面绳的拉力T_2



对m_1列竖直方向的方程：

$$T_1 - T_2 - m_1 g = m_1 \frac{v_0^{\ 2}}{l_1} \quad \cdots(1)$$



以“m_1”为参考系，来分析：

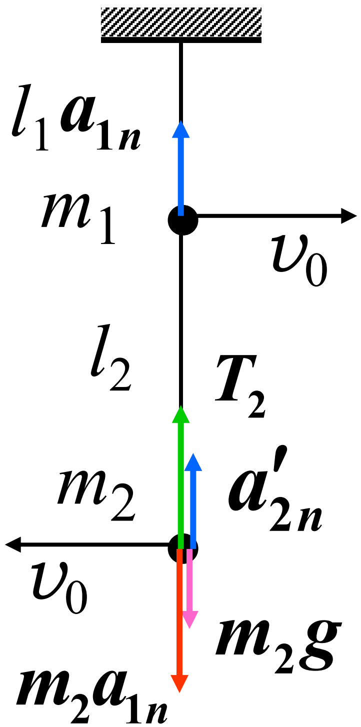
（有向上加速度a_{1n}的平动非惯性系）

在打击m_1的瞬时，m_2作半径为 l_2的圆周运动，瞬时速度也是v_0（向左），

设其法向加速度为a'_{2n}，法向力为 T_2，

它除受到重力 m_2g 外，

还受到惯性离心力 m_2a_{1n} （向下）。



对m_2列竖直方向的方程：

$$T_2 - m_2g - m_2a_{1n} = m_2a'_{2n}$$

即 $$T_2 - m_2g - m_2\frac{v_0^2}{l_1} = m_2\frac{v_0^2}{l_2} \quad \cdots(2)$$

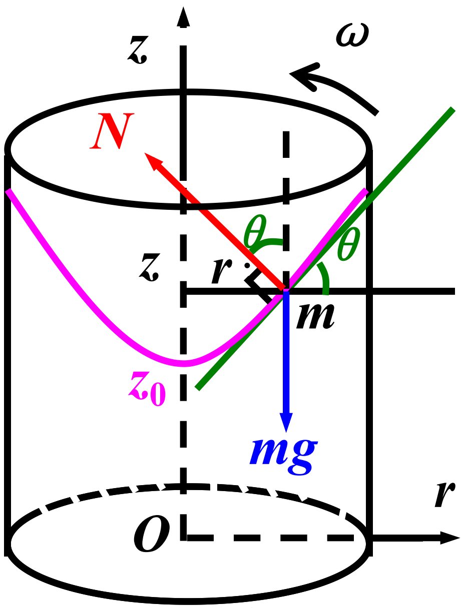
联立（1）（2）两式，得

$$T_2 = m_2\left(g + \frac{v_0^2}{l_1} + \frac{v_0^2}{l_2}\right)$$

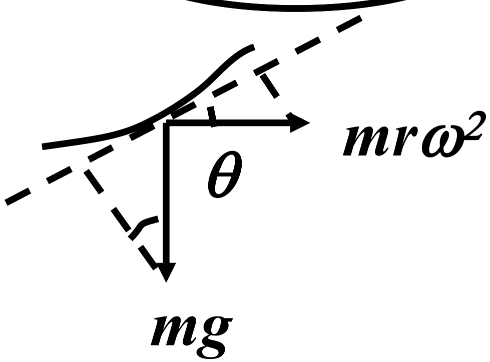
$$T_1 = (m_1 + m_2)\left(g + \frac{v_0^2}{l_1}\right) + m_2\frac{v_0^2}{l_2}$$

检验：量纲？特例（$v_0=0$）？

例. 水桶以ω旋转，水对桶静止 。求水面形状?



解：任选水面一小质元，在切线方向静止



$$mg\sin\theta - mr\omega^2\cos\theta = 0$$

$$\tan\theta = \frac{r\omega^2}{g}$$ 为z（r）曲线的斜率

由导数关系知 $$\frac{dz}{dr} = \frac{r\omega^2}{g}$$

$$\int_{z_0}^{z} dz = \int_0^r \left(\frac{r\omega^2}{g}\right) dr$$

解得：$$z=\frac{\omega^2}{2g}r^2+z_0$$（旋转抛物面）

若已知不旋转时水深为h， 桶半径为R，

则由旋转前后水的体积不变，有：

$$\int_0^R z\cdot 2\pi\ r\,\mathrm{d}\,r=\pi R^2 h$$

$$\int_0^R \left(\frac{\omega^2}{2g}r^2+z_0\right)2\pi r\,\mathrm{d}\,r=\pi R^2 h$$

解得：$$z_0=h-\frac{\omega^2 R^2}{4g}$$

▲ 验结果：$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + z_0 = \frac{\omega^2}{2g} r^2 - \frac{\omega^2}{4g} R^2 + h$

- 单位的分析：$[\omega^2] = 1/\mathrm{s}^2$， $[r] = \mathrm{m}$， $[g] = \mathrm{m/s}^2$

$$[\frac{\omega^2}{2g} r^2] = [\frac{\omega^2}{4g} R^2] = \frac{(1/\mathrm{s}^2)\cdot \mathrm{m}^2}{\mathrm{m/s}^2} = \mathrm{m} = [h] = [z],$$ 正确

- 过渡到特殊情形： $\omega = 0$，有 $z = z_0 = h$， 正确

- 看变化趋势： r 一定时， $\omega \uparrow \rightarrow (z-z_0)\uparrow$， 合理。