Review

- 含参广义积分的一致收敛性

Def. $\forall t \in \Omega$, $\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ 收敛. 若$\forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{M}(\varepsilon), s.t.$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{\mathrm{A}} f(t,x)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

$$\forall \mathrm{A} > \mathrm{M}, \forall t \in \Omega,$$

则称含参$\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ 关于$t \in \Omega$ 一致收敛.

Def . 设$\forall t\in\Omega,\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$ 收敛,b为唯一瑕点,若

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta(\varepsilon)\in(0,b-a),s.t.$

$$\left|\int_{b-\eta}^{b} f(t,x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_a^{b-\eta} f(t,x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

$$\forall\eta\in(0,\delta),\forall t\in\Omega,$$

则称含参瑕积分$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$ 关于$t\in\Omega$一致收敛.

•含参广义积分一致收敛性的判别法

Thm.(Cauchy收敛原理) 若$\forall R > a, \forall t \in \Omega, f(t,x)$在$x \in [a,R]$上Riemann可积,则：$\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ 关于$t \in \Omega$一致收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{M}(\varepsilon), s.t. \forall \mathrm{A}, \mathrm{B} > \mathrm{M}, \forall t \in \Omega,$ 有$\left| \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} f(t,x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$

Thm.(Cauchy) $\forall t \in \Omega \subset \mathbb{R}, b$为瑕积分$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$的唯一瑕点,且$\forall 0 < \eta < b-a, \forall t \in \Omega, f(t,x)$在$x \in [a, b-\eta]$上Riemann可积.则

$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$ 关于$t \in \Omega$一致收敛

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) \in (0, b-a), s.t.$

$$\left| \int_{b-\eta_2}^{b-\eta_1} f(t,x)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon, \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in (0,\delta), \forall t \in \Omega.$$

Thm.(Weirstrass) $\forall t \in \Omega$, $\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$收敛,若存在

$[a,+\infty)$上的函数$g(x)$, $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛,且

$$|f(t,x)| \le g(x), \quad \forall (t,x) \in \Omega \times [a,+\infty),$$

则$\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$在$t \in \Omega$上一致收敛.

Remark. $\forall t \in \Omega$, $f(t,x)$在$x \in [a,+\infty)$上连续,若存在

$b > a$及$[b,+\infty)$上的函数$g(x)$, $\int_b^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛,且

$$|f(t,x)| \le g(x), \quad \forall (t,x) \in \Omega \times [b,+\infty),$$

则$\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$在$t \in \Omega$上一致收敛.

Thm.(Weirstrass) $\forall t\in\Omega, \int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$ 收敛, b为唯一瑕点, 且存在$[a,b)$上的函数$g(x)$, $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$|f(t,x)|\le g(x),\quad \forall (t,x)\in\Omega\times[a,b),$$

则$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$ 在$t\in\Omega$ 上一致收敛.

Remark. $\forall t\in\Omega$, $f(t,x)$在$x\in[a,b)$上连续, 若存在$\delta>0$ 及$[b-\delta,b)$上的函数$g(x)$, $\int_{b-\delta}^b g(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 且

$$|f(t,x)|\le g(x),\quad \forall (t,x)\in\Omega\times[b-\delta,b),$$

则$\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$ 在$t\in\Omega$上一致收敛.

Thm.(Dirichlet) $\forall t\in\Omega$, $f(t,x),g(t,x)$在$x\in[a,+\infty)$上连续, 若

(1) $\forall t\in\Omega$, $f(t,x)$关于x单调,

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(t,x)=0$关于$t\in\Omega$一致成立, 即;

(3)$\int_a^{\mathrm{A}} g(t,x)\mathrm{d}x$关于$t\in\Omega$以及充分大的A一致有界;

则$\int_a^{+\infty} f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$在$t\in\Omega$上一致收敛.

Thm.(Dirichlet) $\forall t\in\Omega$, $f(t,x), g(t,x)$在$x\in[a,b)$上连续,若

(1) $\forall t\in\Omega$, $f(t,x)$关于x单调;

(2) $\lim\limits_{x\to b^-} f(t,x)=0$关于$t\in\Omega$一致成立;

(3) $\int_a^{\mathrm{A}} g(t,x)\mathrm{d}x$关于$t\in\Omega$以及$\mathrm{A}\in[a,b)$一致有界;

则$\int_a^b f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$在$t\in\Omega$上一致收敛.

Thm.(Abel) $\forall t\in\Omega$, $f(t,x),g(t,x)$在$x\in[a,+\infty)$上连续,若

(1) $\forall t\in\Omega$, $f(t,x)$关于x单调;

(2)$x\to+\infty$时, $f(t,x)$关于$t\in\Omega$一致有界;

(3)$\int_a^{+\infty} g(t,x)\mathrm{d}x$关于$t\in\Omega$一致收敛;

则 $\int_a^{+\infty} f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$在$t\in\Omega$上一致收敛.

Thm.(Abel) $\forall t \in \Omega$, $f(t,x), g(t,x)$在$x \in [a,b)$上连续,若

(1) $\forall t \in \Omega$, $f(t,x)$关于x单调;

(2)$x \to b^-$时, $f(t,x)$关于$t \in \Omega$一致有界;

(3)$\int_a^b g(t,x)\mathrm{d}x$关于$t \in \Omega$一致收敛;

则 $\int_a^b f(t,x)g(t,x)\mathrm{d}x$在$t \in \Omega$上一致收敛.

§3. 含参广义积分的性质

Thm. $f(t,x)\in C\big([\alpha,\beta]\times[a,+\infty)\big), I(t)=\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[\alpha,\beta]$一致收敛,则$I(t)\in C[\alpha,\beta]$.

Proof. $\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$关于$t$一致收敛,则$\forall\varepsilon>0,\exists\mathrm{M}>a,s.t.$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\forall\mathrm{A}>\mathrm{M},\forall t\in[\alpha,\beta].$$

取定$\mathrm{A}>\mathrm{M}$, $f\in C\big([\alpha,\beta]\times[a,\mathrm{A}]\big)$,因而$\exists\delta>0,s.t.$

$$\left|f(t,x)-f(t_0,x)\right|\le\varepsilon/(\mathrm{A}-a),$$

$$\forall\left|t-t_0\right|<\delta,t,t_0\in[\alpha,\beta],x\in[a,\mathrm{A}].$$

于是$\forall t, t_0 \in [\alpha, \beta]$,当$|t - t_0| < \delta$时,有

$$|I(t) - I(t_0)| = \left|\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} f(t_0,x)\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|\int_a^{\mathrm{A}} f(t,x)\mathrm{d}x + \int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x \right.$$

$$\left. - \int_a^{\mathrm{A}} f(t_0,x)\mathrm{d}x - \int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(t_0,x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq \int_a^{\mathrm{A}} |f(t,x) - f(t_0,x)|\mathrm{d}x$$

$$+ \left|\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(t_0,x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq 3\varepsilon. \square$$

Thm. $f(t,x)\in C\big([\alpha,\beta]\times[a,b)\big)$, 瑕积分$I(t)=\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$ (b为唯一瑕点)关于$t\in[\alpha,\beta]$一致收敛, 则$I(t)\in C[\alpha,\beta]$.

例. $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$在$x\in(0,+\infty)$连续.

分析: $x<1$时, $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{x-1}e^{-t}=+\infty$, $t=0$为积分的瑕点, 因此 $t=0$和$t=+\infty$都要讨论.

Proof. 只要证$\Gamma(x)\in C[a,b]$, $\forall 0<a<b$. 由于

$$\Gamma(x)=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\triangleq\Gamma_1(x)+\Gamma_2(x),$$

只要证$\Gamma_1(x)$, $\Gamma_2(x)$均在$[a,b]$上连续.

先看$\Gamma_1(x)=\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. 由于

$$0<t^{x-1}e^{-t}\le t^{a-1},\quad \forall(t,x)\in(0,1]\times[a,b],$$

而$a>0$, 所以$\int_0^1 t^{a-1}\mathrm{d}t=\dfrac{1}{a}$, 收敛, 由Weirstrass判别法,

$\Gamma_1(x)$关于$x\in[a,b]$一致收敛, 进而有$\Gamma_1(x)\in C[a,b]$.

再看$\Gamma_2(x)=\int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$. 由于

$$0<t^{x-1}e^{-t}\le t^{b-1}e^{-t},\quad \forall(t,x)\in[1,+\infty)\times[a,b],$$

而$\int_1^{+\infty} t^{b-1}e^{-t}\mathrm{d}t$收敛,由Weirstrass判别法,$\Gamma_2(x)$关于

$x\in[a,b]$一致收敛, 进而有$\Gamma_2(x)\in C[a,b]$.□

例. 证明$\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x$在$t\in[0,+\infty)$上非一致收敛.

解: 由$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$可得

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}.$$

若$\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x$在$t\in[0,+\infty)$上一致收敛,则$I(t)$

$\in C[0,+\infty)$, 矛盾.□

Remark. 证明含参积分不一致收敛的方法:

定义、Cauchy准则、含参积分不连续.

例. $a\in(0,\pi)$, 求 $\lim\limits_{a\to0^+}\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x-\cos a}}$, $\lim\limits_{a\to\pi^-}\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x-\cos a}}$.

解: (1) $\lim\limits_{a\to0^+}\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x-\cos a}}=\lim\limits_{a\to0^+}\int_0^1\frac{a\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos at-\cos a}}$

$$=\int_0^1\lim_{a\to0+}\frac{a}{\sqrt{\cos at-\cos a}}\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

下证积分与求极限可交换次序.

$$f(a,t)=\begin{cases}\dfrac{a}{\sqrt{\cos at-\cos a}}, & a\neq0,\\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-t^2}}, & a=0,\end{cases}\in C\left([0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1)\right).$$

当$a\in(0,\pi/2], t\in[0,1)$时,

$$\cos at-\cos a=2\sin\frac{a(1+t)}{2}\sin\frac{a(1-t)}{2}>\frac{2a^2(1-t^2)}{\pi^2}>0,$$

$$\frac{a}{\sqrt{\cos at-\cos a}}\le\frac{\pi}{\sqrt{2(1-t^2)}}.$$

于是 $$f(a,t)\le\frac{\pi}{\sqrt{2(1-t^2)}},\quad \forall(a,t)\in[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,1).$$

$\int_0^1\frac{a\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos at-\cos a}}=\int_0^1 f(a,t)\mathrm{d}t$ 关于$a\in[0,\pi/2]$一致收敛

(Weirstrass), 因此积分与求极限可交换次序.

(2) 当$a\in(\pi/2,\pi), x\in(0,a)$时,

$$\sqrt{\cos x-\cos a}\le\sqrt{1+\cos x}=\sqrt{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$=\sqrt{2\sin^2\frac{\pi-x}{2}}\le\frac{\sqrt{2}(\pi-x)}{2}.$$

$$\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x-\cos a}}\ge\int_0^a\frac{\sqrt{2}\mathrm{d}x}{\pi-x}$$

$$=\sqrt{2}\ln(\pi-x)\Big|_a^0\to+\infty, a\to\pi^-\text{时}.$$

故 $\lim\limits_{a\to\pi^-}\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x-\cos a}}=+\infty.\square$

Thm. 设(1) $f(t,x),\ f_t'(t,x)\in C\big([\alpha,\beta]\times[a,+\infty)\big)$;

(2) $\forall t\in[\alpha,\beta], I(t)=\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(3) $\int_a^{+\infty} f_t'(t,x)\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[\alpha,\beta]$ 一致收敛;

则 $I(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, 且

$$I'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^{+\infty} f(t,x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty} f_t'(t,x)\mathrm{d}x.$$

Thm. 设(1) $f(t,x),\ f_t'(t,x)\in C\big([\alpha,\beta]\times[a,b)\big)$;

(2) $\forall t\in[\alpha,\beta], I(t)=\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x$ 收敛(b是唯一瑕点);

(3) $\int_a^b f_t'(t,x)\mathrm{d}x$ 关于$t\in[\alpha,\beta]$一致收敛;

则$I(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, 且

$$I'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(t,x)\mathrm{d}x=\int_a^b f_t'(t,x)\mathrm{d}x.$$

例. 证明$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

引入收敛因子e^{-xy}

解:令$I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\mathrm{d}x$. $\forall y\in[0,+\infty)$, $x=0$是关于x的一元函数 $f(x,y)=\frac{\sin x}{x}e^{-xy}$的可去间断点.

由Abel判别法, $I(y)$关于$y\in[0,+\infty)$ (一致) 收敛,

因此$I(y)\in C[0,+\infty)$. $\forall y_0>0$,

$$\int_0^{+\infty}f_y'(x,y)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$$

在$y\in[y_0,+\infty)$一致收敛(Dirichlet). 因此

$$I'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy}\sin x\mathrm{d}x = \frac{-1}{1+y^2},\quad \forall y \ge y_0 > 0,$$

由$y_0 > 0$的任意性,有

$$I(y) = -\arctan y + c,\ \forall y > 0.$$

再由$I(y) \in C[0,+\infty)$,有

$$I(y) = -\arctan y + c,\ \forall y \ge 0.$$

又 $|I(y)| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-xy}\mathrm{d}x\right| \le \int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{d}x = \frac{1}{y}, \forall y > 0.$

故 $\lim\limits_{y\to+\infty} I(y) = 0,\ c = \frac{\pi}{2}, \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = I(0) = \frac{\pi}{2}$.□

例. 利用$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$计算$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解: 令$I(t)\triangleq\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 tx}{x^2}\mathrm{d}x$, 则$I(0)=0$, 欲求$I(1)$.

$\forall t\in[0,1]$, $x=0$是关于x的一元函数$f(t,x)=\frac{\sin^2 tx}{x^2}$的可去间断点. $\frac{\sin^2 tx}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$, $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛, 由Weirstrass判别法, $\int_0^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}x$关于$t\in[0,1]$一致收敛. 故$I(t)\in C[0,1]$.

任意给定$t_0\in(0,1)$, $\left|\int_0^{a}\sin 2tx\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{t}\le\frac{1}{t_0}$; $x\to+\infty$时, $\frac{1}{x}$单调趋于0; $\int_0^{+\infty}f_t'(t,x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2tx}{x}\mathrm{d}x$ 在$t\in[t_0,1]$上

一致收敛(Dirichlet).故

$$I'(t)=\int_0^{+\infty} f_t'(t,x)\mathrm{d}x \ =\int_0^{+\infty}\frac{2\sin tx\cos tx}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2tx}{x}\mathrm{d}x \ =\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \ =\frac{\pi}{2},\ \forall t\in[t_0,1].$$

由t_0的任意性, 有 $I'(t)=\dfrac{\pi}{2},\quad \forall t\in(0,1]$.

又$I(t)\in C[0,1], I(0)=0$, 所以

$$I(t)=\frac{\pi}{2}t,\forall t\in[0,1],\quad \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=I(1)=\frac{\pi}{2}.\square$$

Question. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}\mathrm{d}x=?\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^4}\mathrm{d}x=?\quad \frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}.$

Thm. $f(x,y)\in C\big([a,+\infty)\times[\alpha,\beta]\big), I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$

关于$y\in[\alpha,\beta]$一致收敛,则$I(y)$在$[\alpha,\beta]$上可积,且

$$\int_\alpha^\beta I(y)\,\mathrm{d}y=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

即 $$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_a^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

也记为 $$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Proof. 往证$\forall\varepsilon>0,\exists \mathrm{M}>a,\forall \mathrm{A}>\mathrm{M},$

$$\left|\int_\alpha^\beta I(y)\mathrm{d}y-\int_a^{\mathrm{A}}\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

因为$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$关于$y\in[\alpha,\beta]$一致收敛,所以$\forall\varepsilon>0$,

$\exists \mathrm{M}>a, s.t.$

$$\left|\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\quad \forall \mathrm{A}>\mathrm{M}, \forall y\in[\alpha,\beta].$$

于是$\forall \mathrm{A}>\mathrm{M}$,有

$$\int_\alpha^\beta I(y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_a^{\mathrm{A}} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^{\mathrm{A}} \mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y+\int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

$$\left|\int_\alpha^\beta I(y)\mathrm{d}y-\int_a^{\mathrm{A}} \mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}y\right|=\left|\int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right|$$

$$\le\int_\alpha^\beta\left|\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}y<\varepsilon(\beta-\alpha).\square$$

Thm. $f(x,y)\in C\big([a,b)\times[\alpha,\beta]\big), I(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ (b是唯一瑕点)关于$y\in[\alpha,\beta]$一致收敛, 则$I(y)$在$[\alpha,\beta]$上可积, 且

$$\int_\alpha^\beta I(y)\,\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

即 $$\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

也记为 $$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_\alpha^\beta f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

例: $I=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x \quad (b>a>0).$

解法一: $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b e^{-tx}\mathrm{d}t.$

e^{-tx}在$(t,x)\in D=[a,b]\times[0,+\infty)$上连续, 且

$$\left|e^{-tx}\right|\le e^{-ax},\quad \forall(t,x)\in D;$$

$a>0, \int_0^{+\infty}e^{-ax}\mathrm{d}x$ 收敛. $\int_0^{+\infty}e^{-tx}\mathrm{d}x$关于$t\in[a,b]$一致收敛(Weistrass), 从而累次积分可交换次序

$$I=\int_a^b\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}e^{-tx}\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln\frac{b}{a}.\square$$

解法二:引入参数$t\in[a,b]$,令$I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-tx}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x.$

则 $I(b)=0$,欲求$I(a)$,可以先求$I'(t)$,再积分.因为

• $f(t,x)=(e^{-tx}-e^{-bx})/x$, $f_t'(t,x)\in C([a,b]\times[0,+\infty))$,

• $\int_0^{+\infty}f(t,x)\mathrm{d}x$对任意$t\in[a,b]$收敛,

• $\int_0^{+\infty}f_t'(t,x)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}e^{-tx}\mathrm{d}x$对$t\in[a,b]$一致收敛,

所以$I'(t)=\int_0^{+\infty}f_t'(t,x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}-e^{-tx}\mathrm{d}x=\left.\frac{e^{-tx}}{t}\right|_{x=0}^{+\infty}=-1/t$,

$I(t)=-\ln t+C$.又 $I(b)=0,C=\ln b,I(t)=\ln b-\ln t.$

所求积分为$I=I(a)=\ln b-\ln a.$□

Thm. $f(x,y)\in C\big([a,+\infty)\times[\alpha,+\infty)\big)$, 且满足

(1) $\forall\beta>\alpha, \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\alpha,\beta]$上一致收敛;

$\forall b>a, \int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $x\in[a,b]$上一致收敛;

(2) $\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty}\left|f(x,y)\right|\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty}\left|f(x,y)\right|\mathrm{d}y$ 中至少有一个存在;

则 $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 在$[\alpha,+\infty)$上可积, 且

$$\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}y\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

作业:

习题2.2 No.5(1)

习题2.3 No.1(2),2(1)

例. 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x \quad (b>a>0).$

思路1. $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos tx}{x}\mathrm{d}x, I(a)=0, I(b)=?$

$I'(t)\neq\int_0^{+\infty}\sin tx dx$, 右边的积分不收敛, 无法继续.

思路2. $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b \sin tx\,\mathrm{d}t$

$?=\int_a^b \mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\sin tx\,\mathrm{d}x$, 无法继续计算.

对策：引入收敛因子$e^{-\lambda x}, \lambda>0.$

解: 令$J(\lambda)\triangleq\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x,\lambda\in[0,1]$. 欲求$J(0)$.

$$e^{\lambda x}\frac{\cos ax-\cos tx}{x}$$ 可以连续延拓到$(\lambda,x)\in[0,1]\times[0,+\infty)$.

$x=0$ 不是含参积分的瑕点. $x\to+\infty$时, $e^{-\lambda x}/x$ 关于$\lambda\in[0,1]$ 一致收敛到0, 且

$$\left|\int_0^{\mathrm{A}}(\cos ax-\cos bx)\mathrm{d}x\right|\le\frac{2}{a}+\frac{2}{b},\quad \forall \mathrm{A}>0,\ \forall\lambda\in[0,1].$$

由Dirichlet判别法, 含参积分 $J(\lambda)$ 关于 $\lambda\in[0,1]$ 一致收敛.

因此, $J(\lambda)\in C[0,1]$.

下面先任意固定$\lambda\in(0,1]$, 求 $J(\lambda)$; 再令$\lambda\to0$, 得 $J(0)$.

固定$\lambda\in(0,1]$, 令$I(t)=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\dfrac{\cos ax-\cos tx}{x}\mathrm{d}x, t\in[a,b]$.

$e^{\lambda x}\dfrac{\cos ax-\cos tx}{x}$可以连续延拓到$(t,x)\in[a,b]\times[0,+\infty)$.

$x=0$不是积分的瑕点. $I(t)$关于$t\in[a,b]$一致收敛(Dirichlet),

因此, $I(t)\in C[a,b]$. $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\sin tx\mathrm{d}x$关于$t\in[a,b]$一致收敛

(Weirstrass). 故

$$I'(t)=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\sin tx\mathrm{d}x=\frac{t}{\lambda^2+t^2},\quad t\in[a,b];$$

$$J(\lambda)=I(b)=I(a)+\int_a^b I'(t)\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{t}{\lambda^2+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\ln\frac{\lambda^2+b^2}{\lambda^2+a^2}.$$

由$J(\lambda)\in C[0,1]$, 得 $J(0)=\lim\limits_{\lambda\to0^+}J(\lambda)=\ln\dfrac{b}{a}$.□

例.$\alpha,\beta>0$,计算Laplace积分

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x,\ J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x.$$

解:$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x$ 关于$\beta\ge b>0$一致收敛(Dirichlet).

故 $I'(\beta)=-J(\beta)$. (再在积分下求导是不允许的?)

已知$\beta>0$时, $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.

两式相加,得 $I'(\beta)+\frac{\pi}{2}=\alpha^2\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x(\alpha^2+x^2)}\mathrm{d}x.$

求导得 $$I''(\beta)=\alpha^2 I(\beta).$$

此微分方程通解为 $$I=c_1e^{-\alpha\beta}+c_2e^{\alpha\beta}.$$

因为 $$|I|\le\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\alpha^2+x^2}=\frac{\pi}{2\alpha},\quad \lim_{\alpha\to+\infty}I=0,$$

所以 $$c_2=0,\ \ I=c_1e^{-\alpha\beta}.$$

又 $$\lim_{\beta\to0+}I=\lim_{\beta\to0+}\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2\alpha}.$$

所以 $$c_1=\frac{\pi}{2\alpha},\quad I(\beta)=\frac{\pi}{2\alpha}e^{-\alpha\beta},$$

$$J(\beta)=-I'(\beta)=-\frac{\pi}{2}e^{-\alpha\beta}.\square$$

Ex. $I=\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.(瑕积分)　　　引入参变量$t$

解：令$I(t)=\int_0^1 \frac{\arctan(tx)}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, 则$I(0)=0$, 求$I(1)$.

$$I'(t)\overset{\text{Able}}{=\!=}\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2x^2)\sqrt{1-x^2}}dx \overset{x=\sin\theta}{=\!=}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{1+t^2\sin^2\theta}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\frac{\csc^2\theta d\theta}{\csc^2\theta+t^2}=\int_0^{\pi/2}\frac{-d\cot\theta}{1+t^2+\cot^2\theta}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+t^2}}\arctan\frac{\cot\theta}{\sqrt{1+t^2}}\Bigg|_{\theta=0}^{\pi/2}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}.$$

$$I(1)=\int_0^1\frac{\pi}{2\sqrt{1+t^2}}dt=\frac{\pi}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\Big|_{t=0}^{1}=\frac{\pi}{2}\ln(1+\sqrt{2}).\square$$

Ex. $I=\int_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}\sin(\ln\frac{1}{x})\mathrm{d}x \quad (a,b>0).$

解: 固定$a>0$,欲求含参积分$I(b)$. $I(a)=0$.

$$f(b,x)=\frac{x^b-x^a}{\ln x}\sin(\ln\frac{1}{x}), \quad \left|f(b,x)\right|\le\left|x^b-x^a\right|.$$

$\forall b>0, I(b)$收敛. $\int_0^1\sin(\ln\frac{1}{x})\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-t}\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$; x^b在$x\in$ $(0,1)$上单调, $x^b\le 1$. $\int_0^1 x^b\sin(\ln\frac{1}{x})\mathrm{d}x$ 关于$b>0$一致收敛(Abel).

因此

$$I'(b)=\int_0^1 x^b\sin(\ln\frac{1}{x})\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}e^{-(1+b)t}\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{1+(1+b)^2}.$$

$$I(b)=I(a)+\int_a^b\frac{\mathrm{d}t}{1+(1+t)^2}=\arctan(1+b)-\arctan(1+a).\square$$

例. 利用Possion积分$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$, 计算$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$.

解: 由Possion积分得 $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}, t>0.$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x \xlongequal{t=x^2} \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\sin t\mathrm{d}x \overset{?}{=} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}\sin t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\square$$

$$\left(\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x=\frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

附. $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^4}\mathrm{d}x, J=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$

$$I+J=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1+(1/x)^2}{x^2+(1/x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-1/x}{\sqrt{2}}\bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

$$I-J=\int_0^{+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{(1/x)^2-1}{x^2+(1/x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{-\mathrm{d}(x+1/x)}{(x+1/x)^2-2}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x+1/x-\sqrt{2}}{x+1/x+\sqrt{2}}\bigg|_0^{+\infty}=0.$$

$$I=J=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$