

清华大学2022春季学期

# 电路原理C

## 第9讲

### 非线性电阻电路的小信号分析方法

# 非线性电阻电路的小信号分析方法

1 非线性电阻电路的小信号分析法

2 电路元件的小信号模型

重点

3 MOSFET小信号放大器电路分析

重点



# 复 习

## 非线性电阻电路的特点

① 齐次性和叠加性不适用于非线性电路。

② 非线性电阻能产生与输入信号不同的频率（变频作用）。

- **解析法**

- 能求精确解→?
- 方程的列写和求解麻烦

- **分段线性法**

- 线性电路求解容易
- 精度差，线性电路数量多

- **图形解法**

- 简单，物理意义明确
- 对含1个非线性电阻电路的求解比较方便，精度差

非线性电阻  $u = f(i) = 50i + 0.5i^3$

$i = 2.01\text{A}$

$$\begin{aligned}
 u &= 50 \times (2+0.01) + 0.5 \times (2+0.01)^3 \longrightarrow \cancel{2^3 + 3 \times 2^2 \times 0.01 + 3 \times 2 \times 0.01^2 + 0.01^3} \\
 &\approx [50 \times 2 + 0.5 \times 2^3] + [50 \times 0.01 + 0.5 \times 3 \times 2^2 \times 0.01] \\
 &= f(2) + 56 \times 0.01 \quad (50 + 0.5 \times 3 \times 2^2) \times 0.01
 \end{aligned}$$

在  $i=2$  点附近进行泰勒展开并忽略高阶项

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

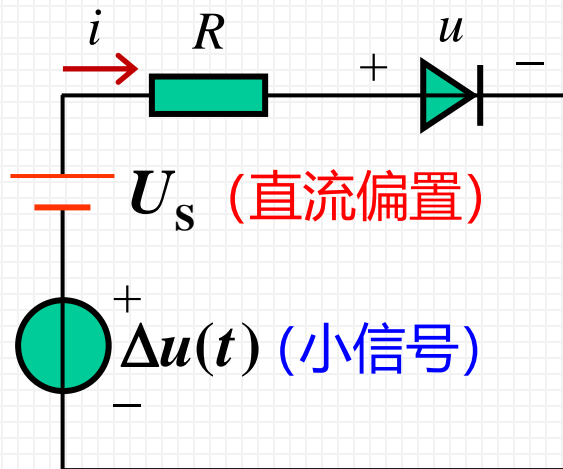
$$\begin{aligned}
 50i + 0.5i^3 &\xrightarrow{i=2.01\text{A}} \left\{ \begin{array}{l} \text{一个非线性电阻作用效果} \\ + \\ \text{一个线性电阻作用效果} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 50 \times 2 + 0.5 \times 2^3 \\ \\ 56 \times 0.01 \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d(50i + 0.5i^3)}{di} \right|_{i=I_0=2} = 50 + 0.5 \times 3 \times I_0^2 = 56$$

非线性电阻电路特点：③ 非线性电阻激励的工作范围充分小时，在工作点处，可看做线性电阻

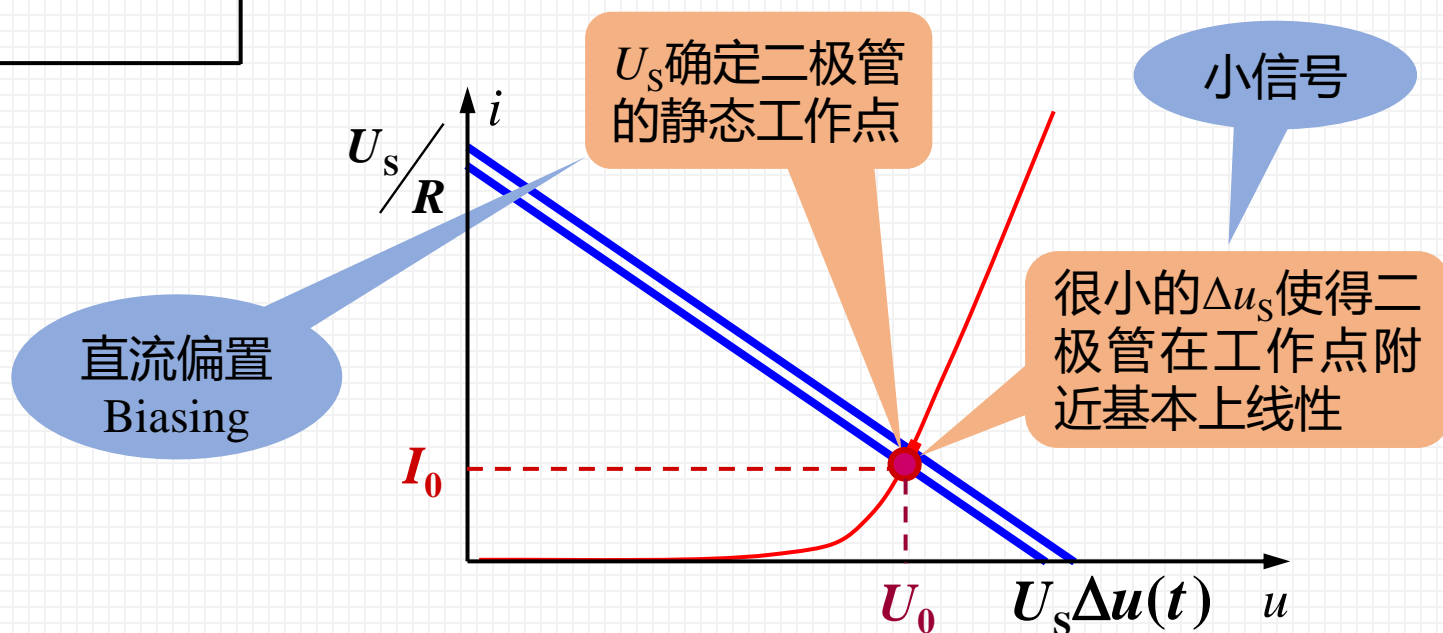


# 1、非线性电阻电路的小信号分析法

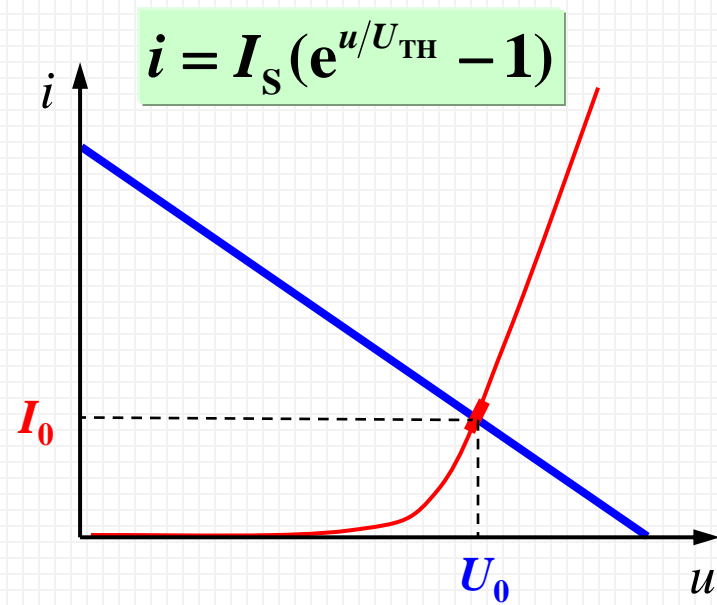
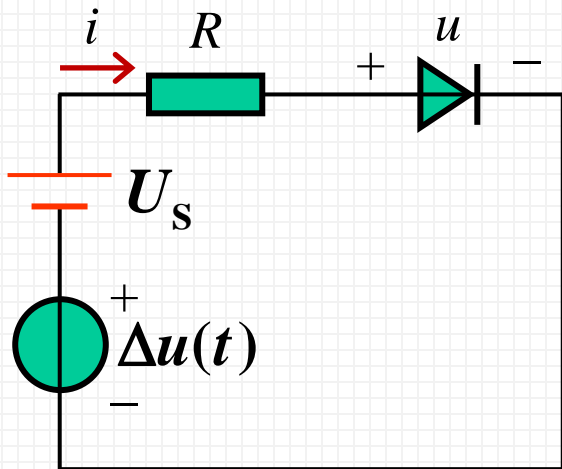


$U_s$ 作用在二极管电路中

出现了小扰动 $\Delta u(t)$







$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

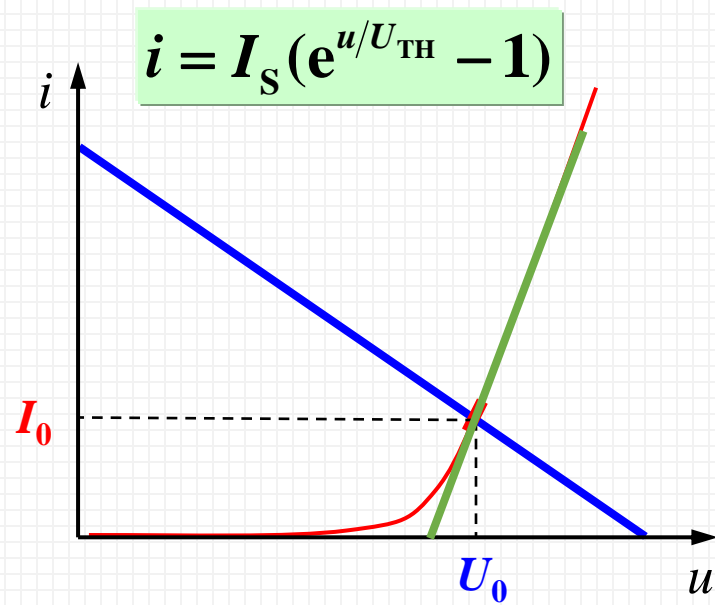
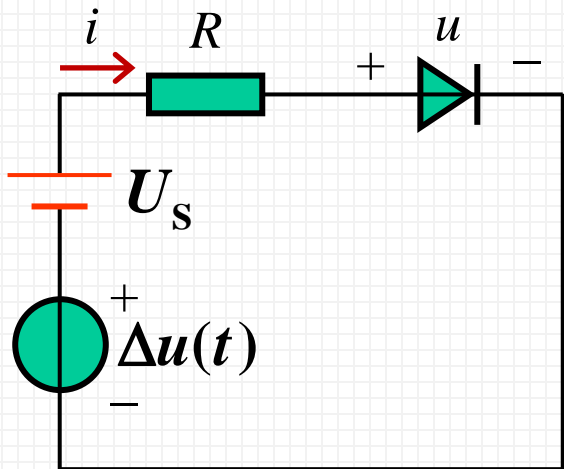
$$i(t) = I_s \left( e^{U_0 + \Delta u(t) / U_{TH}} - 1 \right)$$

仅考虑 $U_0$ 的  
非线性关系

$$\approx I_s \left( e^{U_0 / U_{TH}} - 1 \right) + \left. \frac{di}{du} \right|_{U_0} \Delta u(t)$$

在 $U_0$ 点展开的  
线性小信号关系

$$\Delta i(t)$$



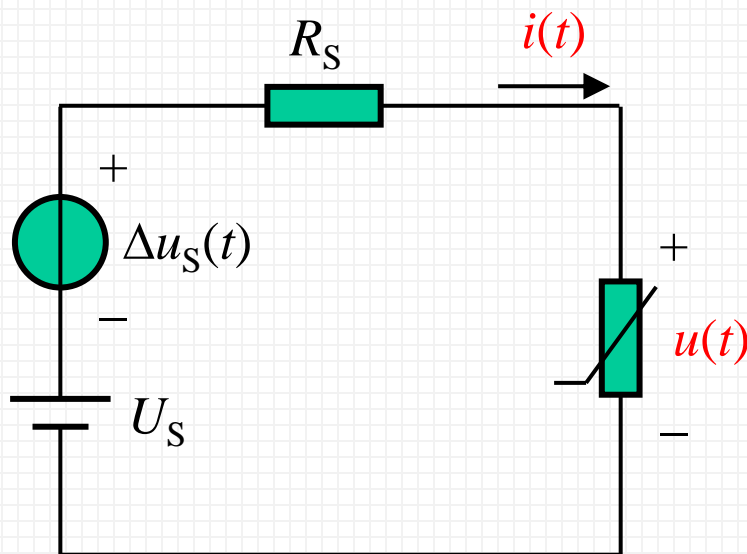
$$i(t) = I_S \left( e^{(U_0 + \Delta u(t))/U_{TH}} - 1 \right)$$
$$\approx I_S \left( e^{U_0/U_{TH}} - 1 \right) + \left. \frac{di}{du} \right|_{U_0} \Delta u(t)$$

已知  $U_{TH}=0.025\text{V}$ ,  $I_S=10^{-12}\text{A}$ ,  $U_0=0.7\text{V}$ ,  
则在二极管直流偏置附近:

$$i(t) \approx 1.446 + 57.85\Delta u(t)$$



考虑更一般的情况，求图示电路中的支路量  $u(t)$  和  $i(t)$ 。



列方程：

$$\begin{cases} U_S + \Delta u_S(t) = R_S i(t) + u(t) \\ i(t) = g(u(t)) \end{cases}$$

该方程并不好求解！

在扰动比较小(且 $g$ 函数性质比较好)的时候，存在简单且误差可接受的分析方法——小信号法。

$U_S$

为直流电源

$\Delta u_S(t)$

为交流小信号

任何时刻  $U_S \gg |\Delta u_S(t)|$

$R_S$

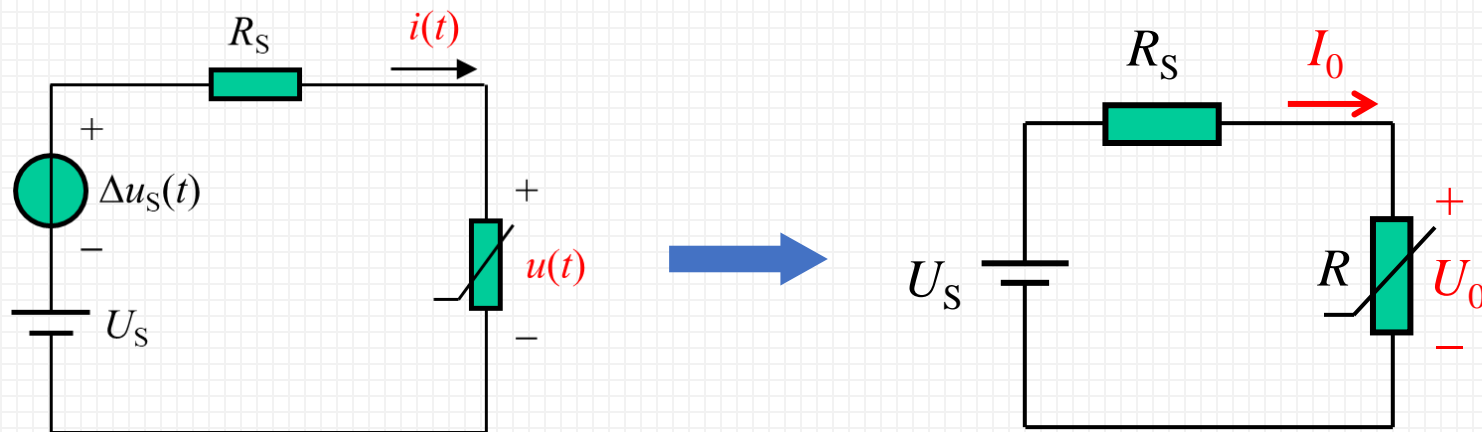
为线性电阻

非线性电阻  $i(t) = g(u(t))$





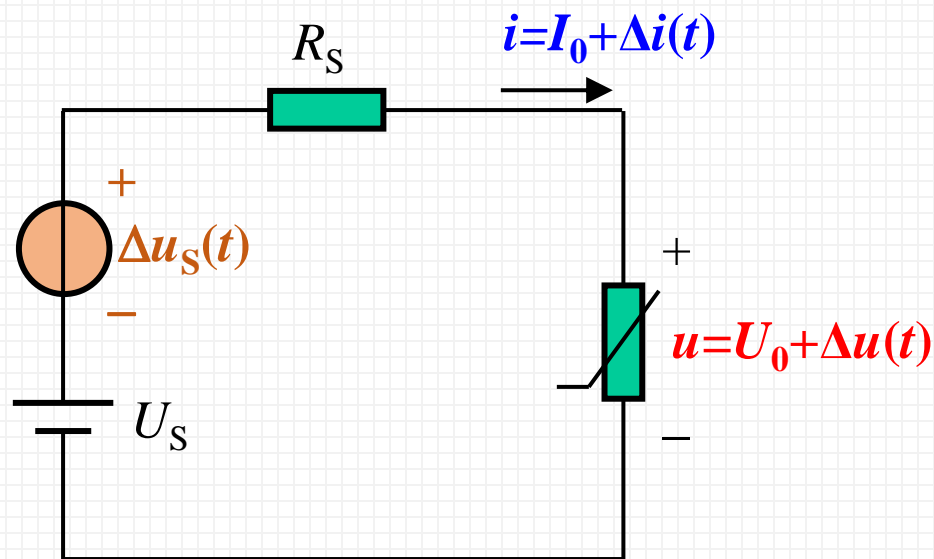
**第1步：**不考虑  $\Delta u_S(t)$  即  $\Delta u_S(t)=0$ 。求直流工作点：电压 ( $U_0$ ) 、电流 ( $I_0$ ) 。



$$\left\{ \begin{array}{l} U_S = R_S I_0 + U_0 \\ I_0 = g(U_0) \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} U_0 \\ I_0 \end{array} \right.$$

解析法、分段线性法、图形法

## 第2步：考虑扰动 $\Delta u_S(t) \neq 0$ 的影响



由于源出现 $\Delta u_S(t)$ ，使得非线性元件控制量 $u(t)$ 在工作点 $U_0$ 上出现扰动 $\Delta u(t)$ ，

导致其被控量也在工作点 $I_0$ 上出现扰动 $\Delta i(t)$ 。

如果保留1次项，误差可忽略，

$$\Delta i(t) \propto \Delta u(t)$$

将 $g(u)$ 在 $U_0$ 点展开  
(只保留1次项)

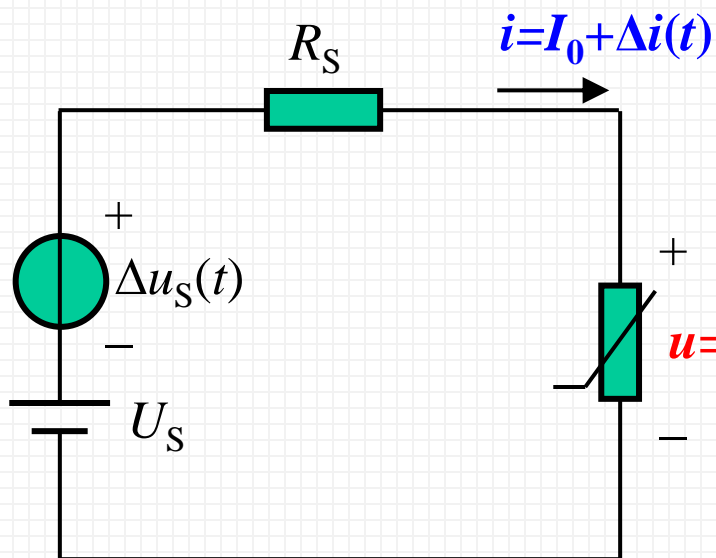
$$i = g(u) = g(U_0 + \Delta u(t))$$

$$\approx g(U_0) + g'(U_0)\Delta u(t)$$

已知  $I_0 = g(U_0)$

$$= I_0 + g'(U_0)\Delta u(t)$$

$$\Delta i(t)$$



$$U_S + \Delta u_S(t) = R_S i + u$$

$$U_S + \Delta u_S(t) = R_S [I_0 + \Delta i(t)] + U_0 + \Delta u(t)$$

$$U_S = R_S I_0 + U_0$$

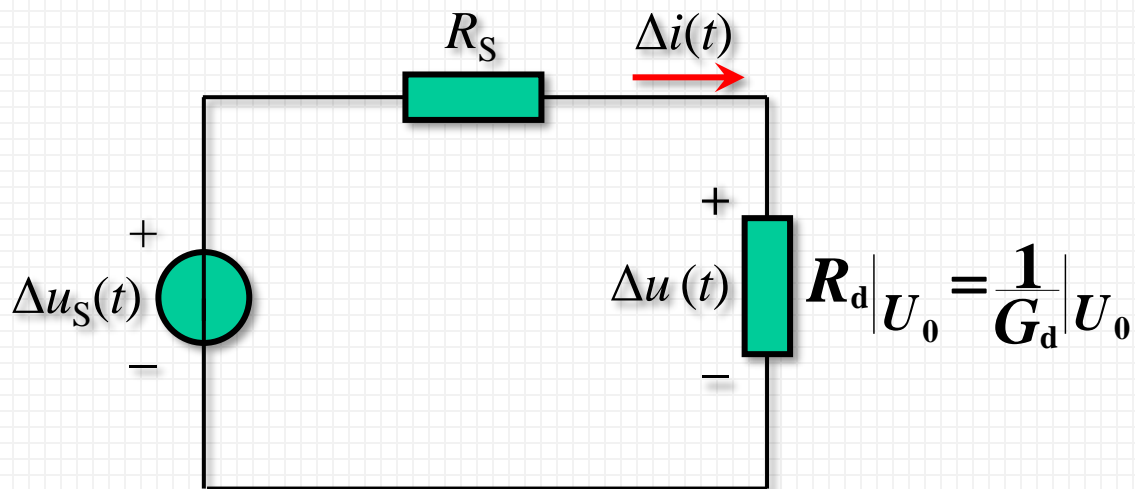
$$\begin{cases} \Delta u_S(t) = R_S \Delta i(t) + \Delta u(t) \\ \Delta i(t) = G_d|_{U_0} \Delta u(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Delta u(t) \\ \Delta i(t) \end{cases}$$



$$\Delta u_S(t) = R_S \Delta i(t) + \Delta u(t)$$

$$\Delta i(t) = G_d \big|_{U_0} \Delta u(t)$$

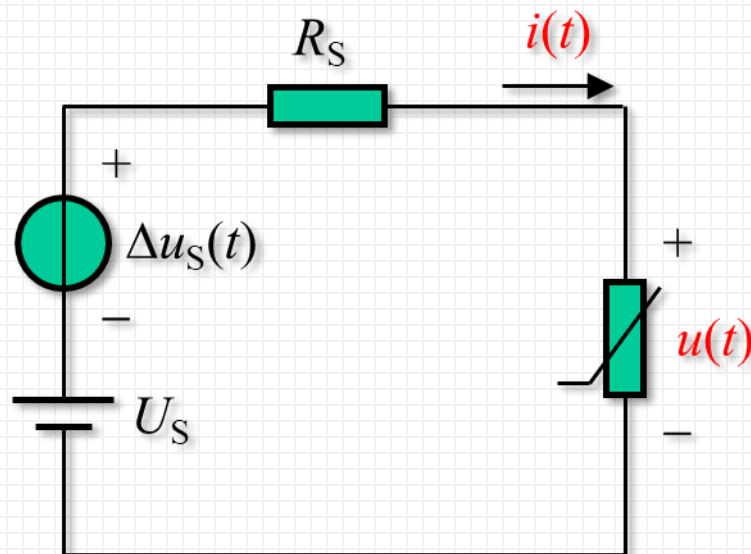
对应什么电路?



线性的小信号等效电路

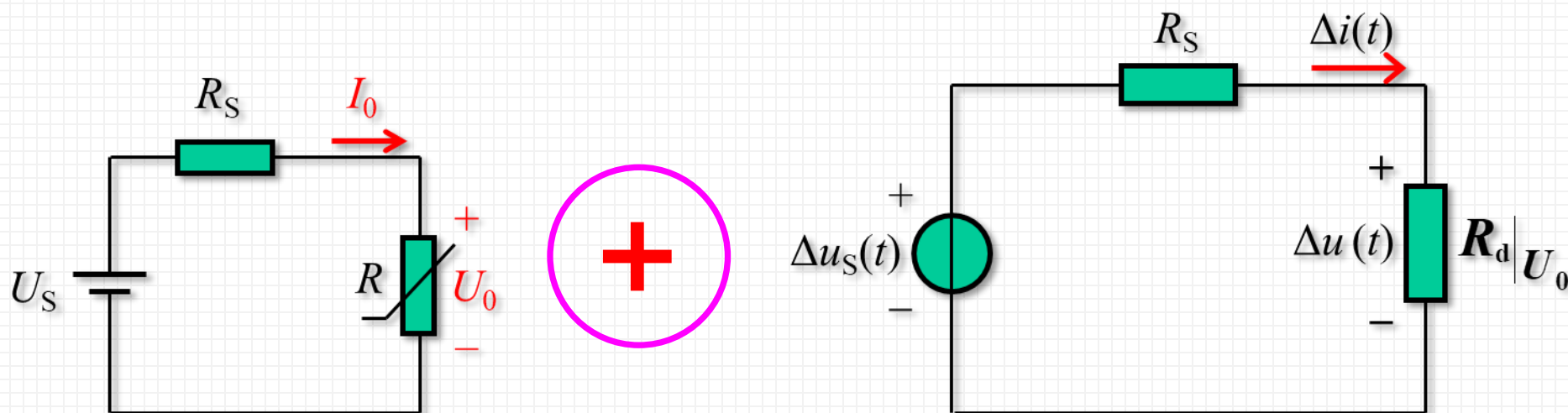


## 第3步：合并



$$u(t) = U_0 + \Delta u(t)$$

$$i(t) = I_0 + \Delta i(t)$$



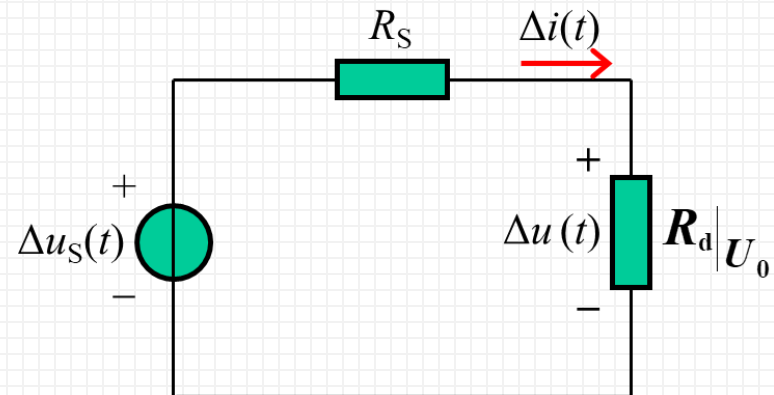
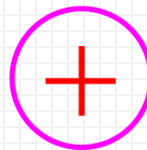
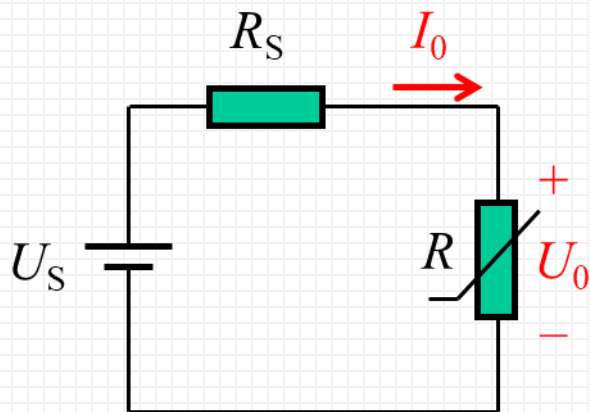
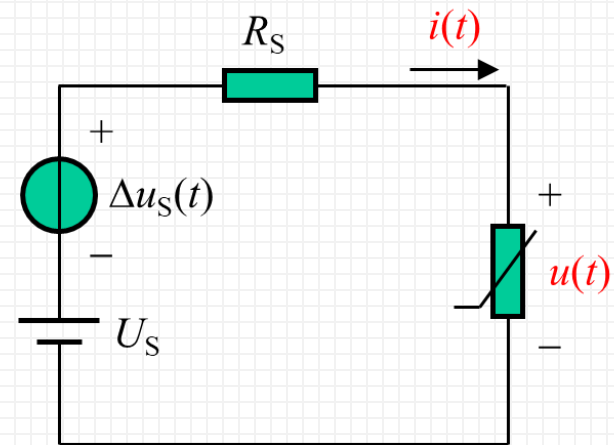


讨论:

是应用叠加定理吗?

$$u(t) = U_0 + \Delta u(t)$$

$$i(t) = I_0 + \Delta i(t)$$

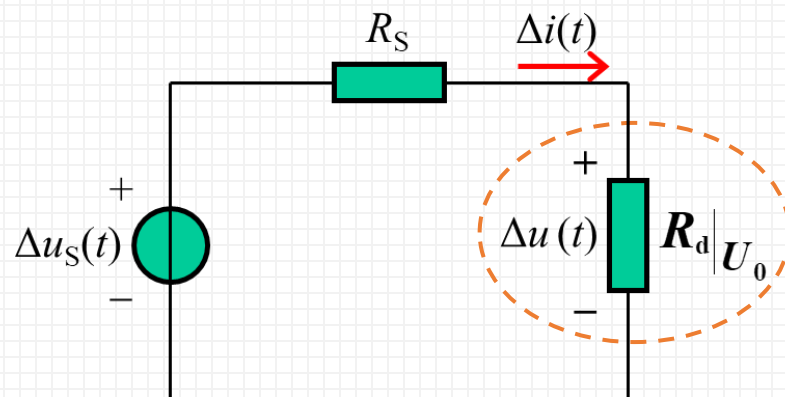
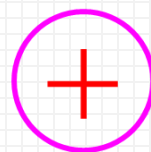
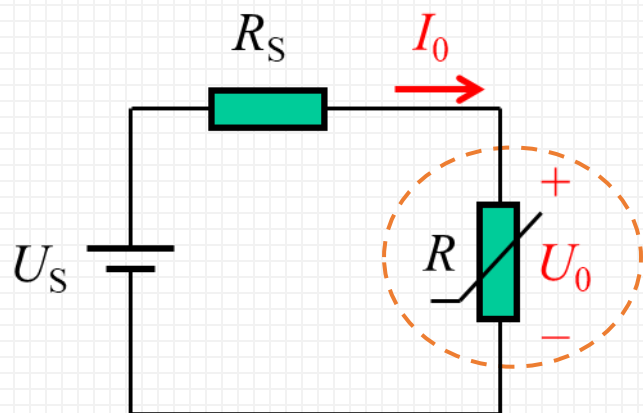
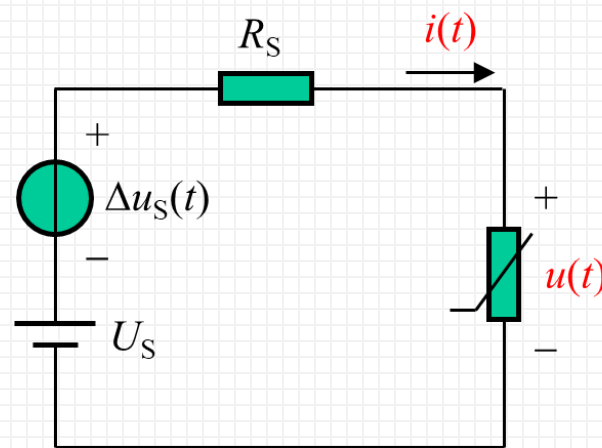


讨论:

是应用叠加定理吗? ❌

$$u(t) = U_0 + \Delta u(t)$$

$$i(t) = I_0 + \Delta i(t)$$



叠加 ①  $\Delta u_S(t) = 0$  ,  $U_S \neq 0$

②  $\Delta u_S(t) \neq 0$  ,  $U_S = 0$

小信号 ①  $\Delta u_S(t) = 0$  , 求工作点

②  $\Delta u_S(t) \neq 0$  , 求小信号响应

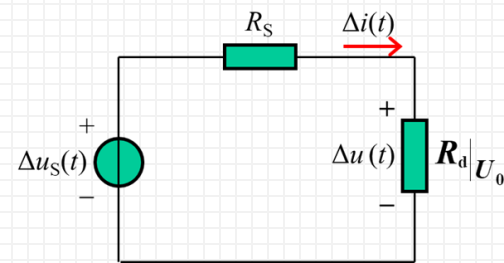
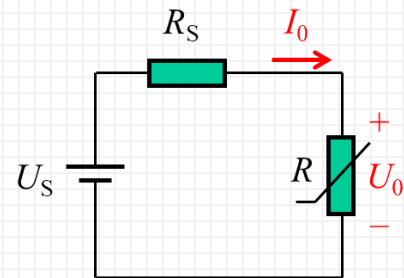
两种情况下, 非线性元件的参数不同





## 用小信号法求解非线性电阻电路

1. 求解直流偏置激励作用下的**非线性**电阻电路  
(求**工作点**)。
2. 画**线性小信号电路**，求解得到小信号响应。  
拓扑结构相同，元件换为小信号模型（小信号下的线性电压电流关系）
3. 将两部分激励作用下电路的响应**合成**为电路的全响应。



$$u(t) = U_0 + \Delta u(t)$$

$$i(t) = I_0 + \Delta i(t)$$



## 支路量表示方法小结

$U, I$  { 恒定直流量  
小信号分析中的工作点

$\Delta u, \Delta i$  → 小信号

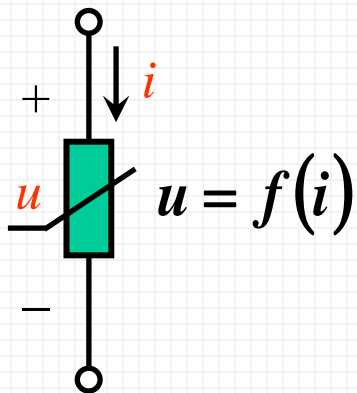
$u, i$  → 可能随时间而变化的量

以后还会讨论  $\dot{U}, \dot{I}$

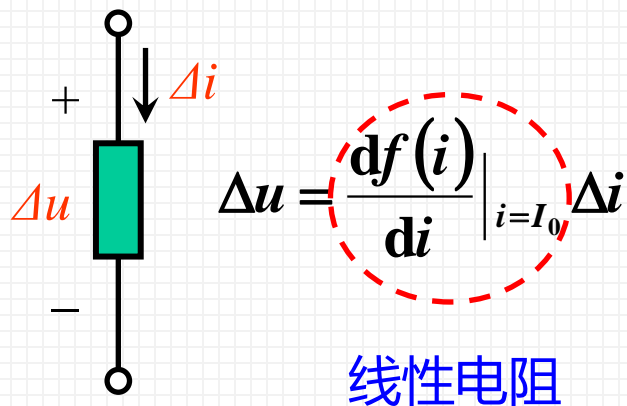
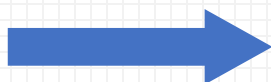


## 2、电路元件的小信号模型

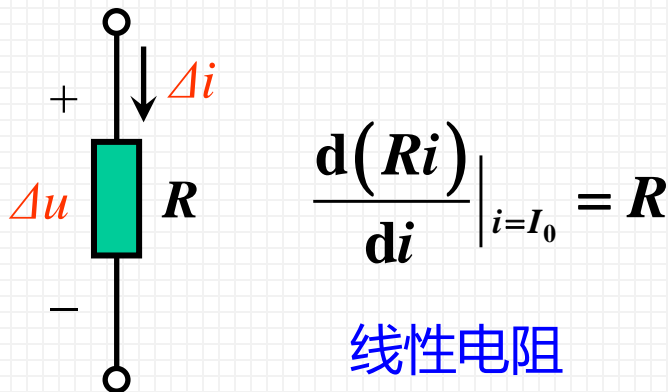
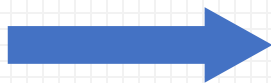
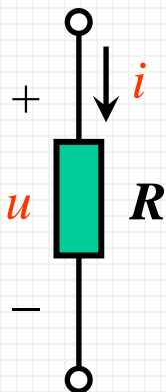
非线性电阻



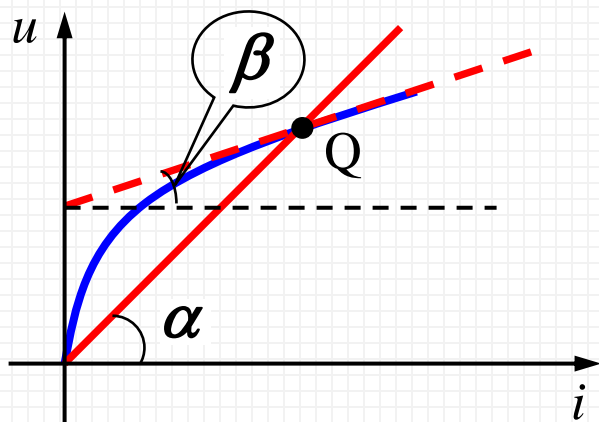
工作点处



线性电阻



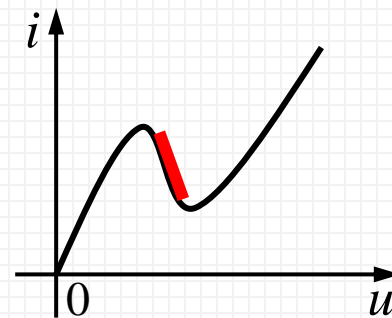
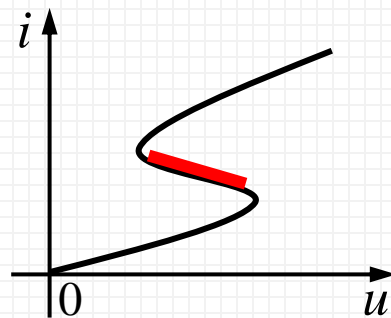
## 静态电阻 $R_s$ 和动态电阻 $R_d$



静态电阻  $R_s = \frac{u}{i} = \operatorname{tg} \alpha$  ,  $G_s$

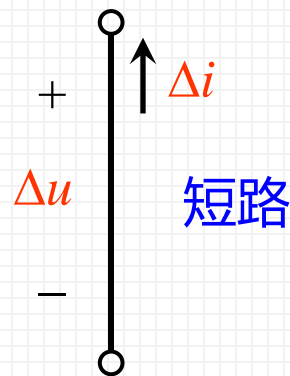
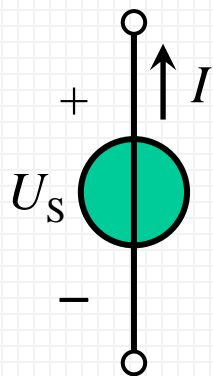
动态电阻  $R_d = \frac{du}{di} = \operatorname{tg} \beta$  ,  $G_d$

- a)  $R_s$  反映了某一点上  $u$  与  $i$  的关系, 而  $R_d$  反映了在某一点  $u$  的变化与  $i$  的变化的关系, 即  $u$  对  $i$  的变化率。
- b) 静态电阻与动态电阻都与工作点有关。当Q点位置不同时,  $R_s$  与  $R_d$  均变化。
- c) 对“S”型、“N”型非线性电阻, 下倾段  $R_d$  为负, 因此, 其动态电阻具有负电阻的性质。



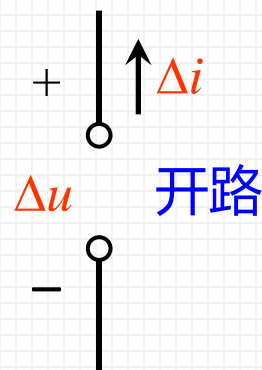
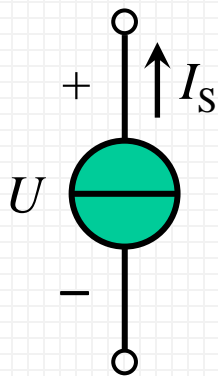


独立电压源（直流偏置）



$$R_d = \frac{du}{di} = 0$$

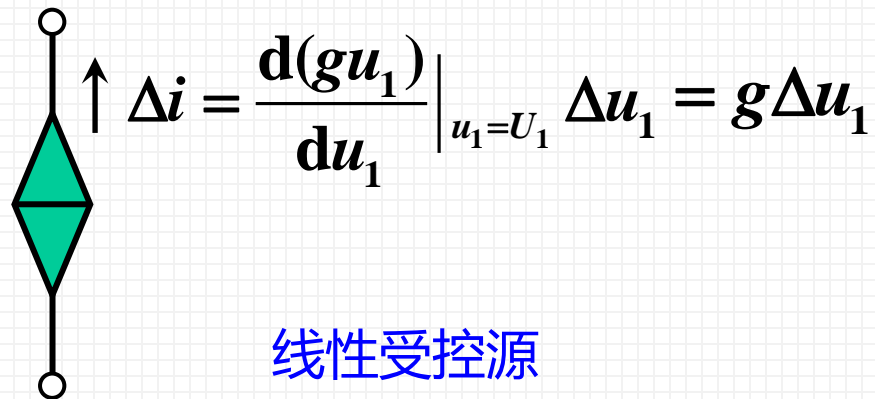
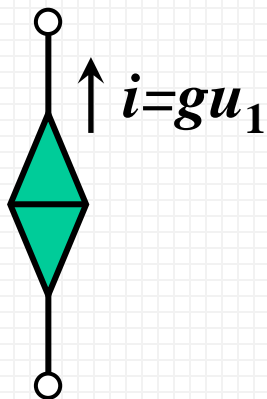
独立电流源（直流偏置）



$$G_d = \frac{di}{du} = 0$$

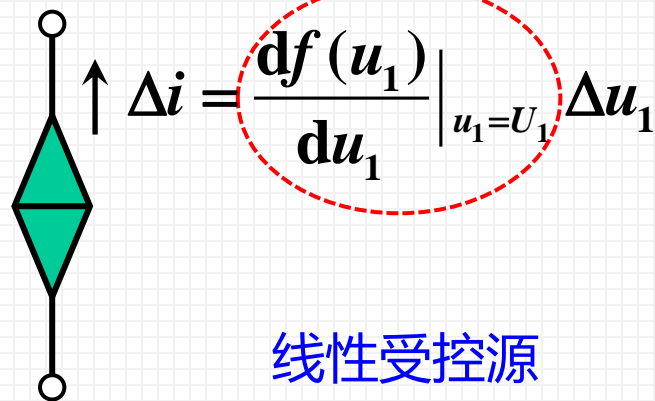
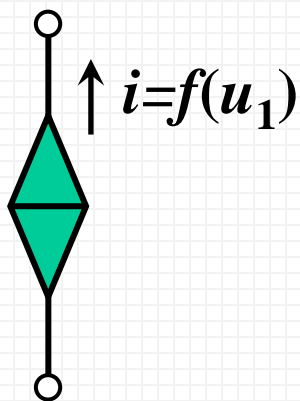


## 线性受控源



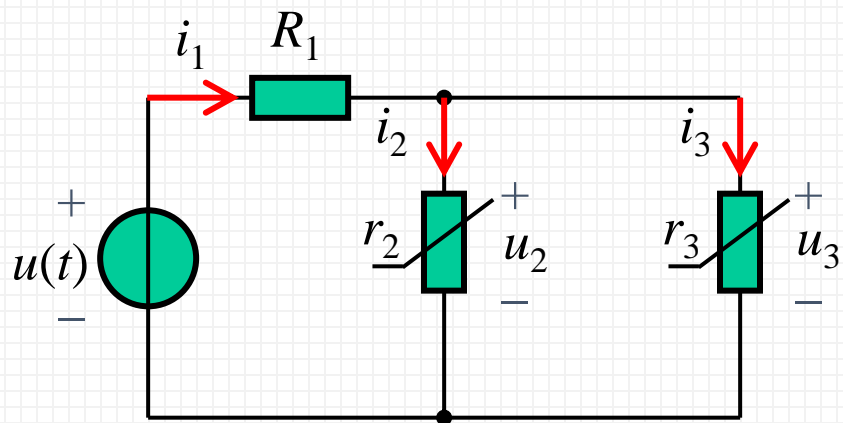
线性受控源

## 非线性受控源



线性受控源

**例1** 已知  $u(t)=7+U_m\sin\omega t$  V,  $\omega=100\text{rad/s}$ ,  $U_m\ll 7\text{V}$ ,  $R_1=2\Omega$ 。

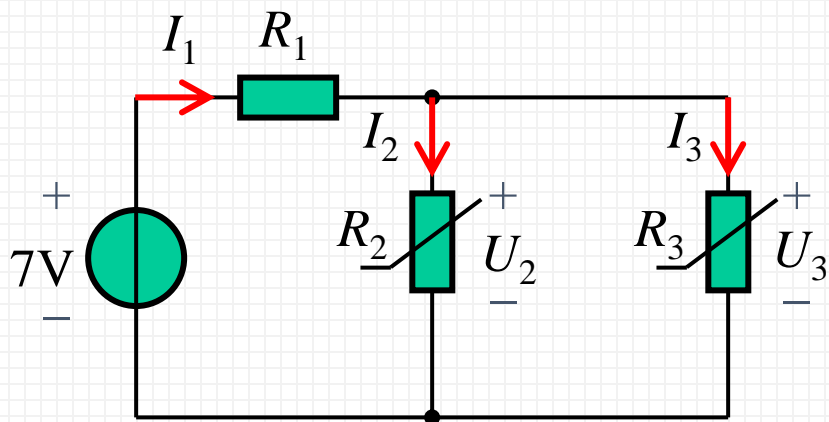


$$r_2: u_2 = i_2 + 2i_2^3$$

$$r_3: u_3 = 2i_3 + i_3^3$$

求电压  $u_2$  和电流  $i_1$ 、 $i_2$ 、 $i_3$ 。

**第1步：** 直流电压单独作用，求解静态工作电压，电流。



$$2I_1 + U_2 = 7$$

$$U_2 = U_3$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$U_2 = I_2 + 2I_2^3$$

$$U_3 = 2I_3 + I_3^3$$



$$I_1 = 2\text{A}$$

$$I_2 = 1\text{A}$$

$$I_3 = 1\text{A}$$

$$U_2 = 3\text{V}$$

$$U_3 = 3\text{V}$$





## 第2步：求两个非线性电阻的小信号模型

$$R_{2d} = \left. \frac{du_2}{di_2} \right|_{I_2=1A} = 1 + 6i_2^2 \Big|_{I_2=1A} = 7\Omega$$

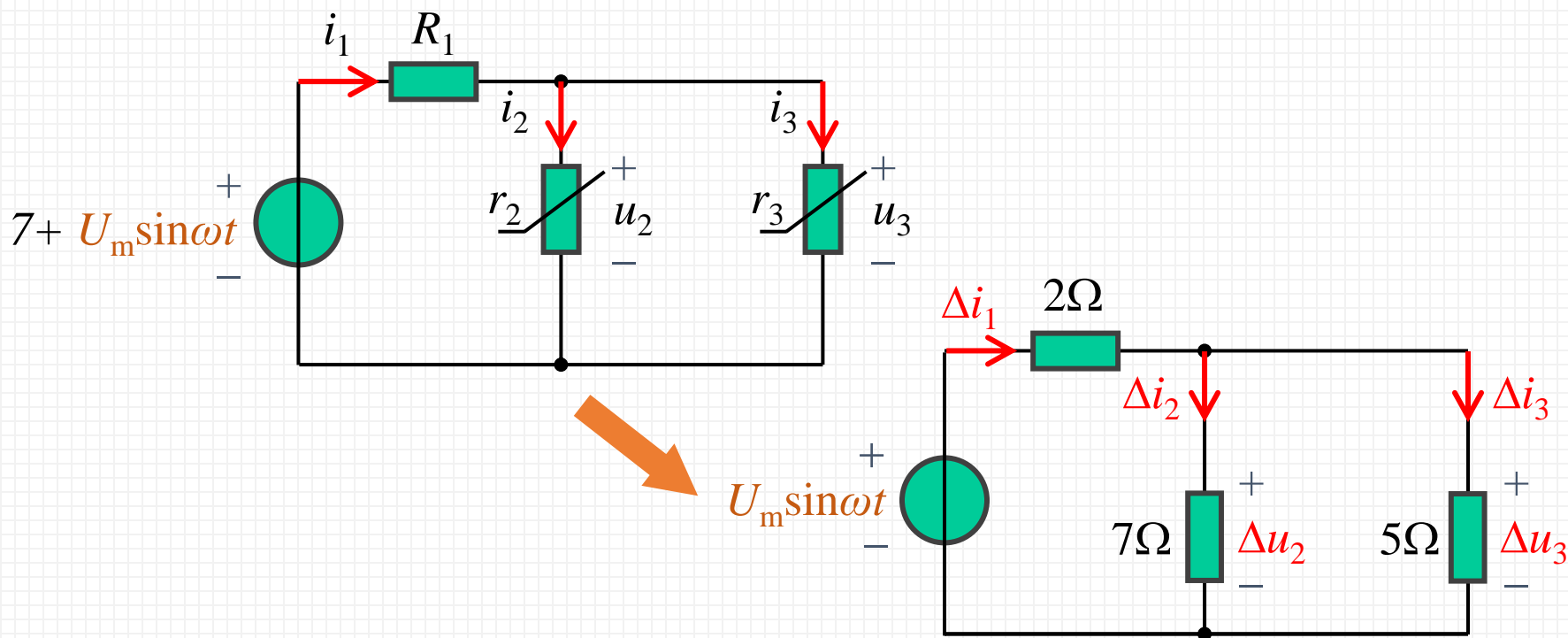
$$R_{3d} = \left. \frac{du_3}{di_3} \right|_{I_3=1A} = 2 + 3i_3^2 \Big|_{I_3=1A} = 5\Omega$$

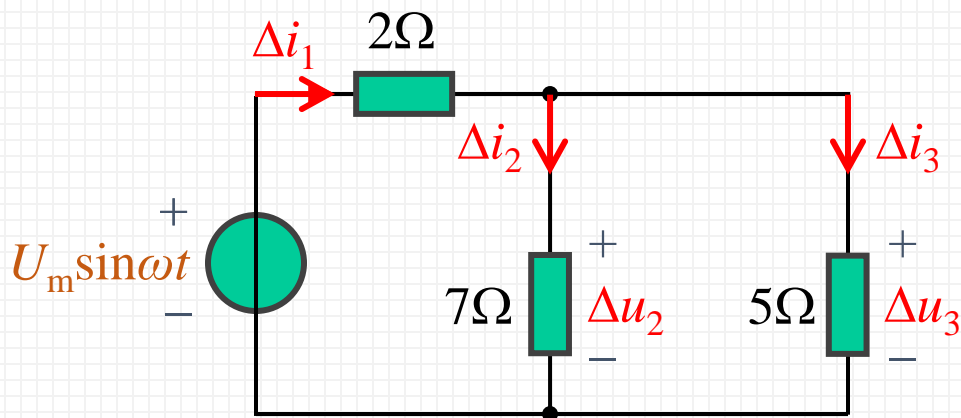
$$r_2: u_2 = i_2 + 2i_2^3$$

$$r_3: u_3 = 2i_3 + i_3^3$$

$$I_2 = I_3 = 1A \quad I_1 = 2A$$

画出小信号工作等效电路，求  $\Delta u$ ， $\Delta i$ 。





$$\Delta i_1 = U_m \sin \omega t / (2 + 5 // 7) = 0.2033 U_m \sin \omega t$$

$$\Delta i_2 = \Delta i_1 \times 5/12 = 0.0847 U_m \sin \omega t$$

$$\Delta i_3 = \Delta i_1 \times 7/12 = 0.1186 U_m \sin \omega t$$

$$\Delta u_2 = 7 \times \Delta i_2 = 0.593 U_m \sin \omega t$$



直流偏置:  $I_2 = I_3 = 1\text{A}$   $I_1 = 2\text{A}$

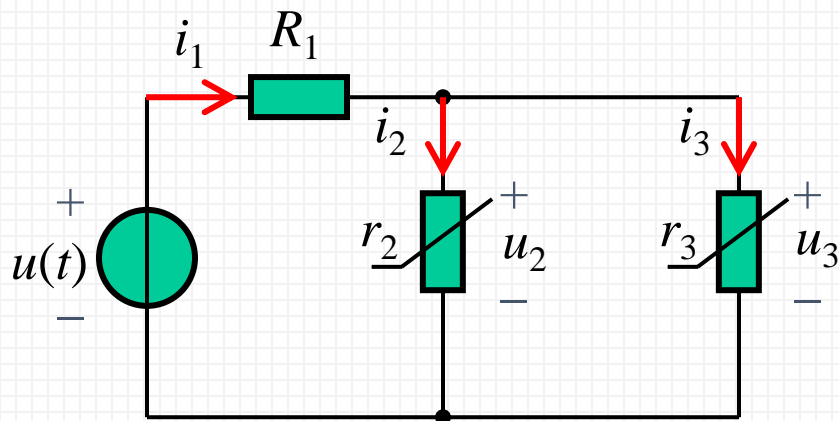
$$U_2 = U_3 = 3\text{V}$$

小信号响应:  $\Delta i_1 = 0.2033 U_m \sin \omega t$

$$\Delta i_2 = 0.0847 U_m \sin \omega t$$

$$\Delta i_3 = 0.1186 U_m \sin \omega t$$

$$\Delta u_2 = 0.593 U_m \sin \omega t$$



第3步: 合成

$$i_1 = 2 + 0.2033 U_m \sin \omega t \text{ A}$$

$$i_2 = 1 + 0.0847 U_m \sin \omega t \text{ A}$$

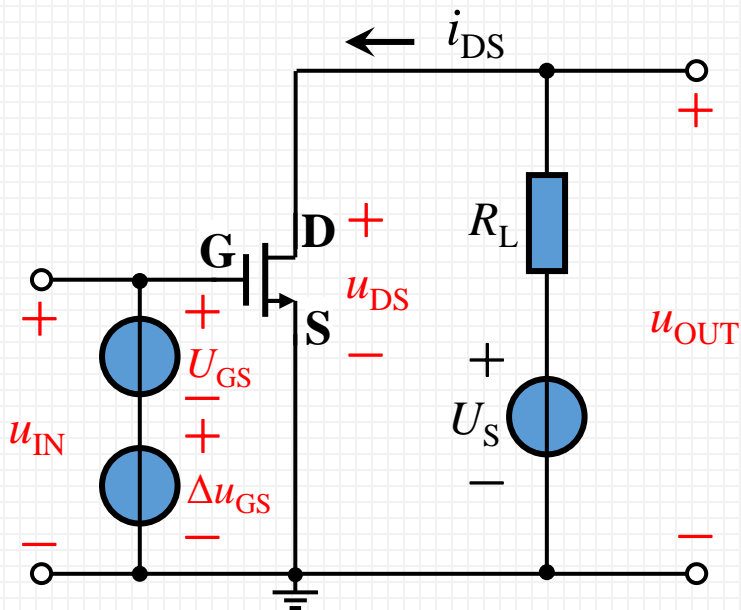
$$i_3 = 1 + 0.1186 U_m \sin \omega t \text{ A}$$

$$u_2 = 3 + 0.5932 U_m \sin \omega t \text{ V}$$



### 3、MOSFET小信号放大器电路分析

小扰动  $\rightarrow$  (小) 待放大信号

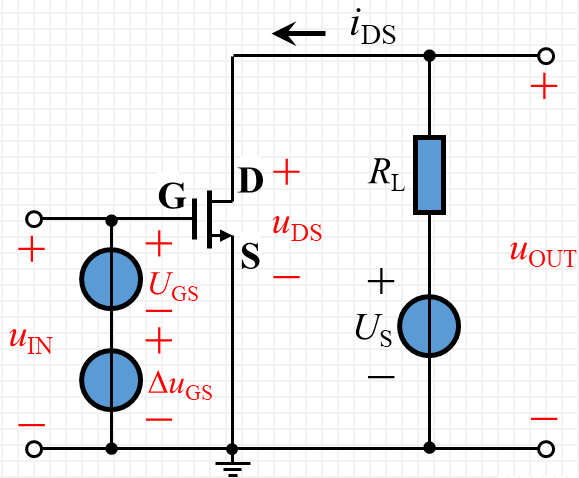


全信号 = 直流偏置 + (小)待放大信号

$$u_{\text{IN}} = u_{\text{GS}} = U_{\text{GS}} + \Delta u_{\text{GS}}$$

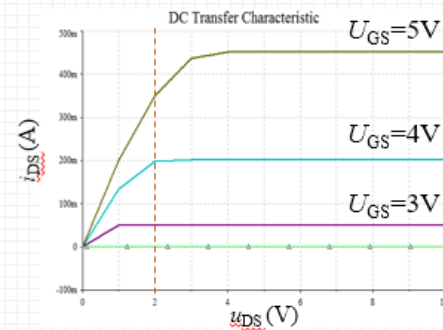
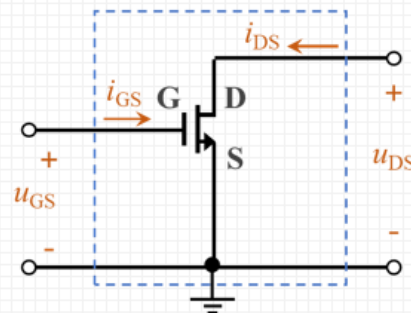
$$u_{\text{OUT}} = u_{\text{DS}} = U_{\text{DS}} + \Delta u_{\text{DS}}$$

全信号 = 直流偏置 + (小)放大后信号



N沟道增强型MOSFET，在给定的 $u_{DS}$ 下，随 $u_{GS}$ 的增加，该元件会从截止区逐渐过渡到\_\_\_\_区和\_\_\_\_区。

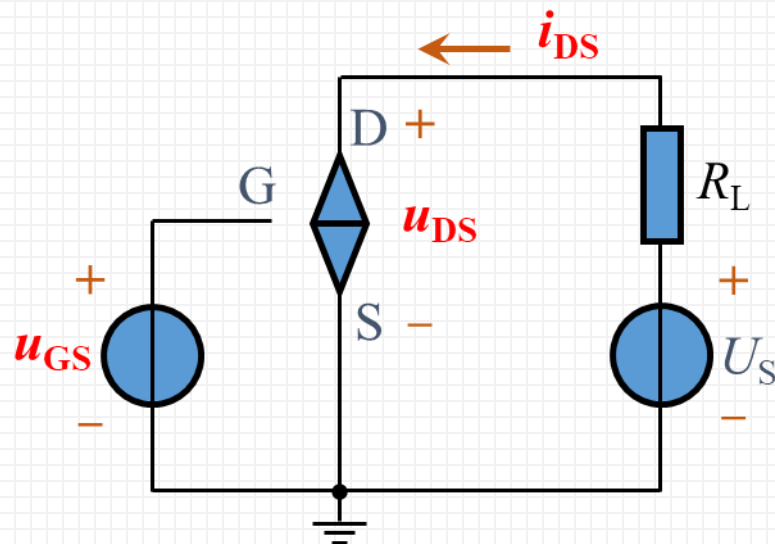
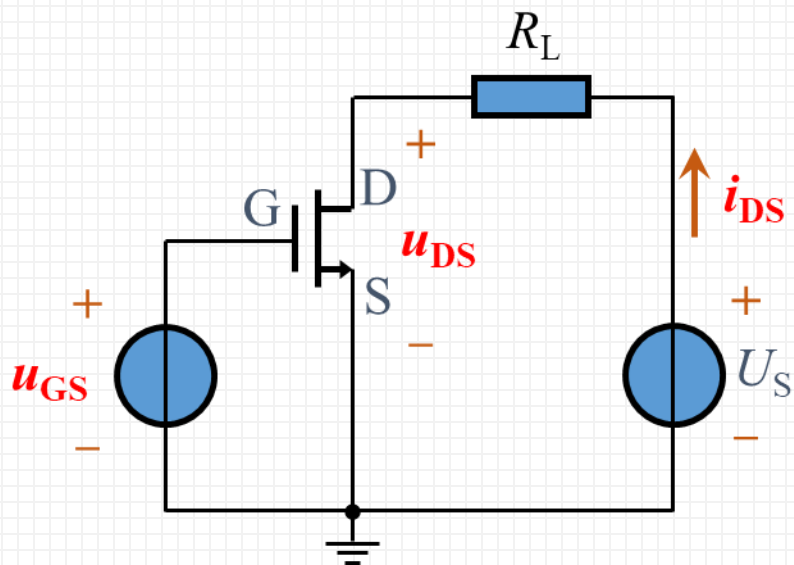
- A 电阻，电流源
- B 电流源，电阻



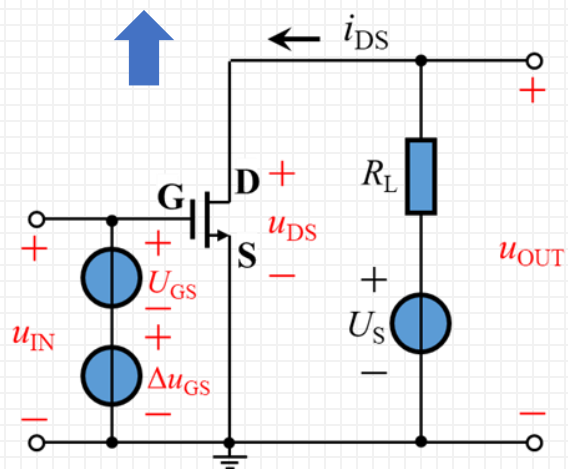


## 设MOSFET工作在恒流源区

确定工作区(L8)

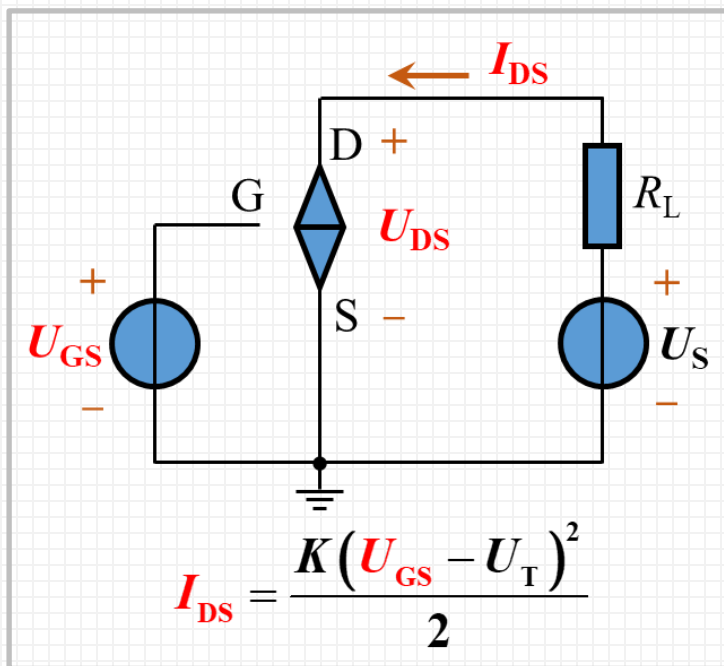


$$i_{DS} = \frac{K(u_{GS} - U_T)^2}{2}$$



前述工作点+小扰动信号的分析方法

可以用来分析和设计工作点+(小)待放大信号的电路



### (1) 求直流工作点 (解析法)

$$U_{OUT} = U_{DS} = U_S - I_{DS} R_L$$

$$U_{OUT} = U_S - \frac{K(U_{GS} - U_T)^2}{2} R_L$$

$$U_S = 10V, \quad U_{GS} = 2.5V, \quad K = 0.5mA/V^2, \quad U_T = 1V, \quad R_L = 10k\Omega$$

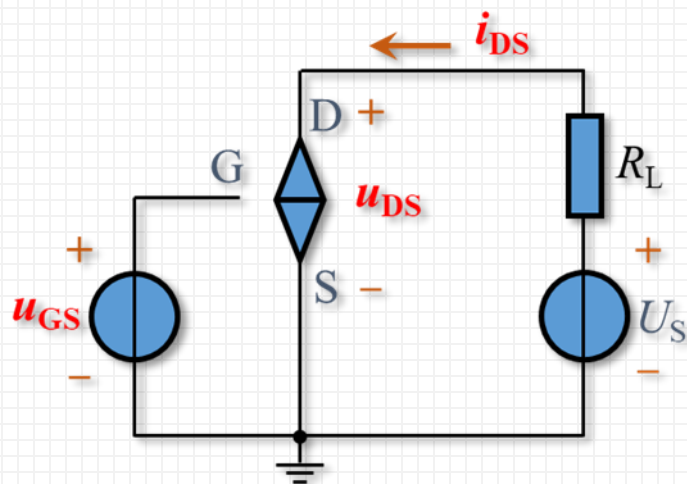
$$U_{OUT} = U_{DS} = 10 - \frac{0.5 \times (2.5 - 1)^2}{2} \times 10 = 4.375V$$

恒流区工作条件:  $0 < (U_{GS} - U_T) < U_{DS}$  满足

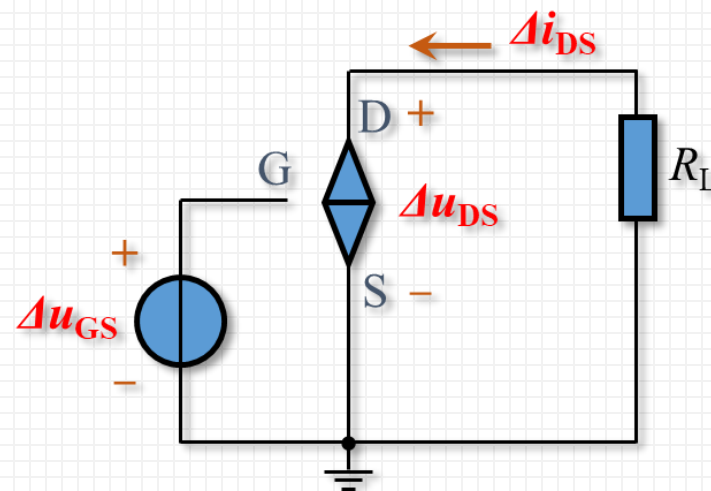
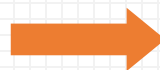
还需验证MOSFET不工作在电阻区(略)



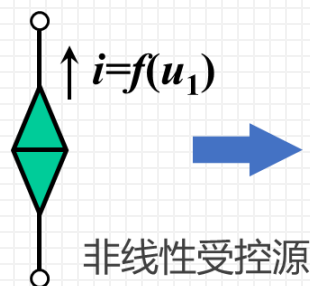
## (2) 画小信号电路，求小信号解



$$i_{DS} = \frac{K(u_{GS} - U_T)^2}{2}$$



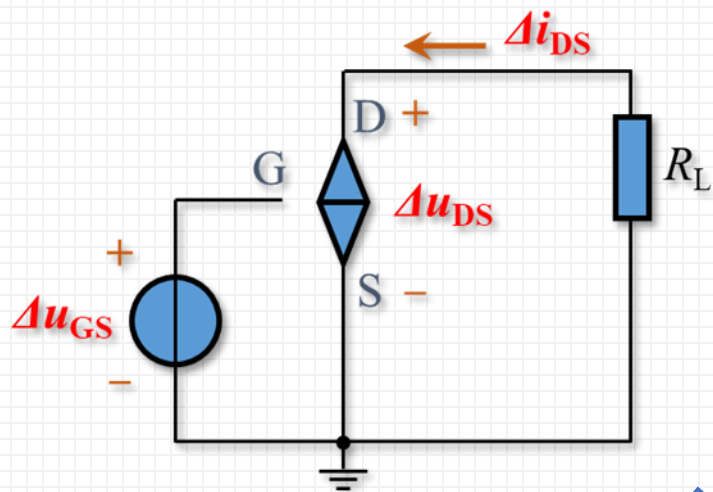
$$\Delta i_{DS} = \frac{d\left(\frac{K(u_{GS} - U_T)^2}{2}\right)}{du_{GS}} \bigg|_{u_{GS}=U_{GS}} \Delta u_{GS}$$



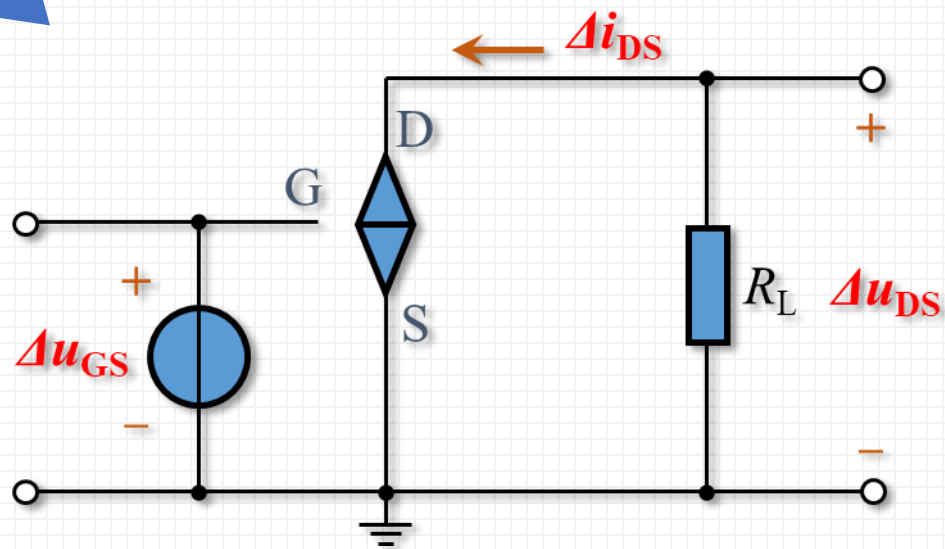
$$\Delta i = \frac{df(u_1)}{du_1} \bigg|_{u_1=U_1} \Delta u_1$$

线性受控源

$$\Delta i_{DS} = K(U_{GS} - U_T) \Delta u_{GS}$$

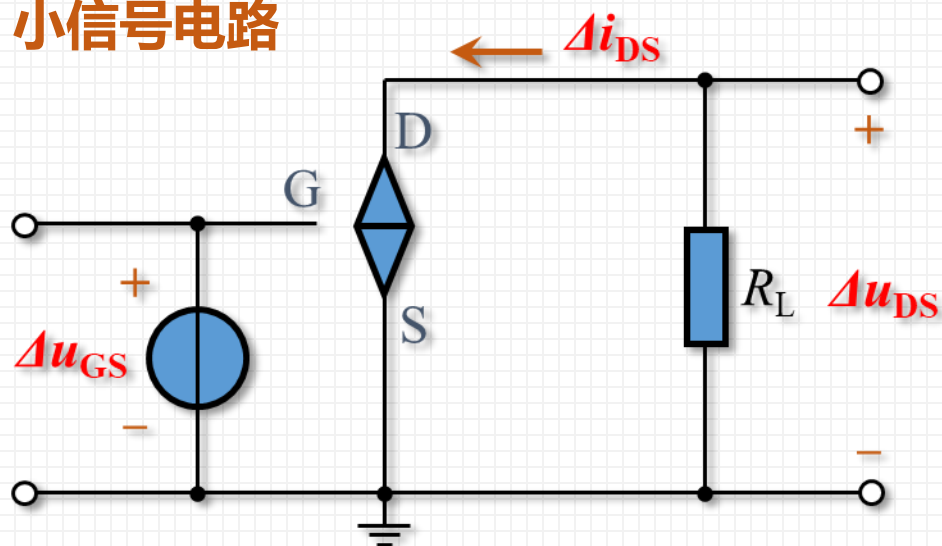


小信号电路





## 小信号电路

跨导,  $g_m$ 

$$\Delta i_{DS} = K(U_{GS} - U_T) \Delta u_{GS}$$

$$\Delta u_{DS} = -\Delta i_{DS} R_L = -K(U_{GS} - U_T) R_L \Delta u_{GS}$$

已知:  $U_{GS} = 2.5V$ ,  $K = 0.5mA/V^2$ ,  $U_T = 1V$ ,  $R_L = 10k\Omega$

$$\frac{\Delta u_{OUT}}{\Delta u_{IN}} = \frac{\Delta u_{DS}}{\Delta u_{GS}} = -K(U_{GS} - U_T) R_L = -0.5 * (2.5 - 1) * 10 = -7.5$$

放大倍数  $K(U_{GS} - U_T) R_L$

小信号电压放大了7.5倍

**第3步：合成****共源极MOSFET放大器**

$$u_{\text{OUT}} = U_{\text{OUT}} + \Delta u_{\text{OUT}}$$

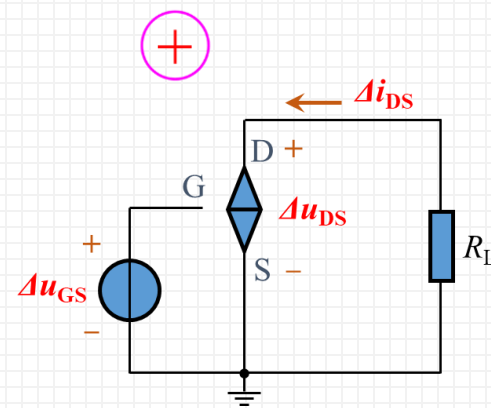
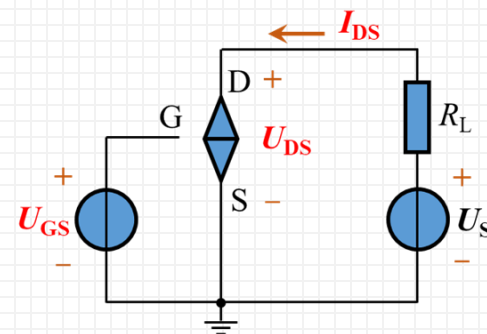
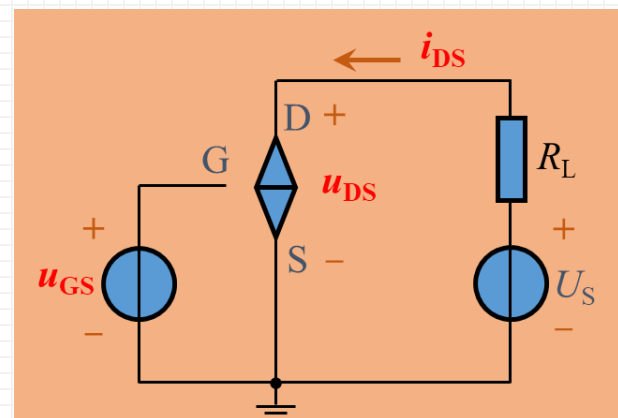
$$U_{\text{OUT}} = U_{\text{S}} - \frac{K(U_{\text{GS}} - U_{\text{T}})^2}{2} R_{\text{L}}$$

$$\Delta u_{\text{OUT}} = -K(U_{\text{GS}} - U_{\text{T}}) R_{\text{L}} \Delta u_{\text{IN}}$$

$$U_{\text{S}} = 10\text{V}, \quad U_{\text{GS}} = 2.5\text{V}, \quad K = 0.5\text{mA/V}^2,$$

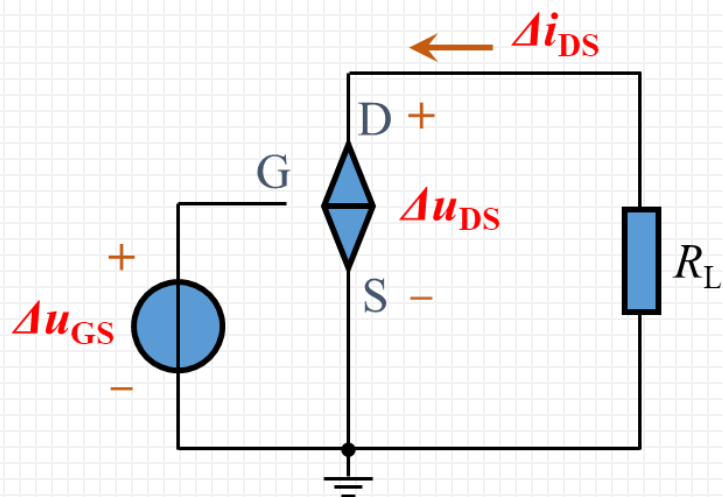
$$U_{\text{T}} = 1\text{V}, \quad R_{\text{L}} = 10\text{k}\Omega$$

$$u_{\text{OUT}} = 4.375 - 7.5\Delta u_{\text{IN}}$$





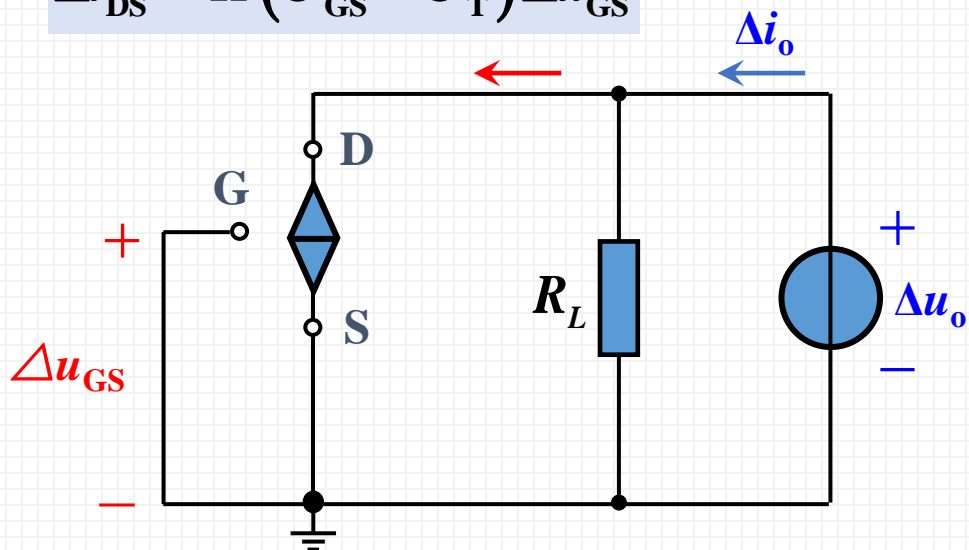
## 共源极MOSFET小信号放大电路的输入输出电阻



$$R_i = \infty$$

够大

$$\Delta i_{DS} = K(U_{GS} - U_T)\Delta u_{GS}$$



$$R_o = R_L = 10\text{k}\Omega$$

不够小

怎么办?