习题讨论课7题目：三重积分，第一型曲线和曲面积分

一. 三重积分

例 1. 设 $f \in \mathscr{C}[0,+\infty)$，

$$F(t) = \int\limits_{\Omega_t} \left(z^2 + f(x^2+y^2)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\Omega_t = \left\{(x,y,z) | 0 \le z \le h, x^2+y^2 \le t^2\right\} (t>0)$。求 $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$.

例 2. 求三重积分 $I = \int\limits_{\Omega} (x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的值，其中

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}, z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

例 3. 求由曲面 $S : (x^2+y^2)^2 + z^4 = z^2$ 所围有界集 Ω 的体积。

例 4. 设 $A = (a_{ij})$ 为 3×3 实对称正定矩阵，$\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 1$ 表示三维空间的一个椭球面。证明该椭球面所包围立体 V 的体积为 $|V| = \frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$。

例 5. 求由六个平面 $3x-y-z=\pm 1$，$-x+3y-z=\pm 1$，$-x-y+3z=\pm 1$ 所围成的有界区域的体积。

例 6. 设 $h = \sqrt{a^2+b^2+c^2} > 0$，$f \in \mathscr{C}[-h,h]$。证明：

$$\int_{x^2+y^2+z^2\le 1} f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)\mathrm{d}t.$$

二. 第一型曲线和曲面积分

例 7. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长记为 a。求 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}l$。

例 8. 计算螺旋面 S：$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = r\varphi$（$0 \le r \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$）的面积。

例 9. 求圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被抛物柱面 $z = R^2-x^2$ 及平面 $z=0$ 所截部分 S 的侧面积。

例 10. 记 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2x$ 所截的有限部分。规定曲面 S 的正向向下，所得的定向曲面记为 S^+。求下面两个积分的值。
(i) $\iint_S z\mathrm{d}S$。
(ii) $\iint_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y)$.

例 11. 设一元函数 $f(u)$ 于整个实轴上连续，S 代表单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$。证明 Poisson 公式

$$\iint_S f(ax+by+cz)\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\rho t)\mathrm{d}t,$$

这里 $\rho=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。（课本习题4.3第11题，page 187）。

例 12. 记 S^+为圆柱面 $S: x^2+y^2=1$ 位于 $0\le z\le 2$ 的部分，外法向为正，计算曲面积分

$$I=\iint_{S^+} x(y-z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+(x-y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$