

清华大学2022春季学期

电路原理C

第4讲

线性电阻电路的一般分析方法

内容

熟练掌握任意复杂结构电路方程的列写方法

支路电流法 (已预习)

—— 基础

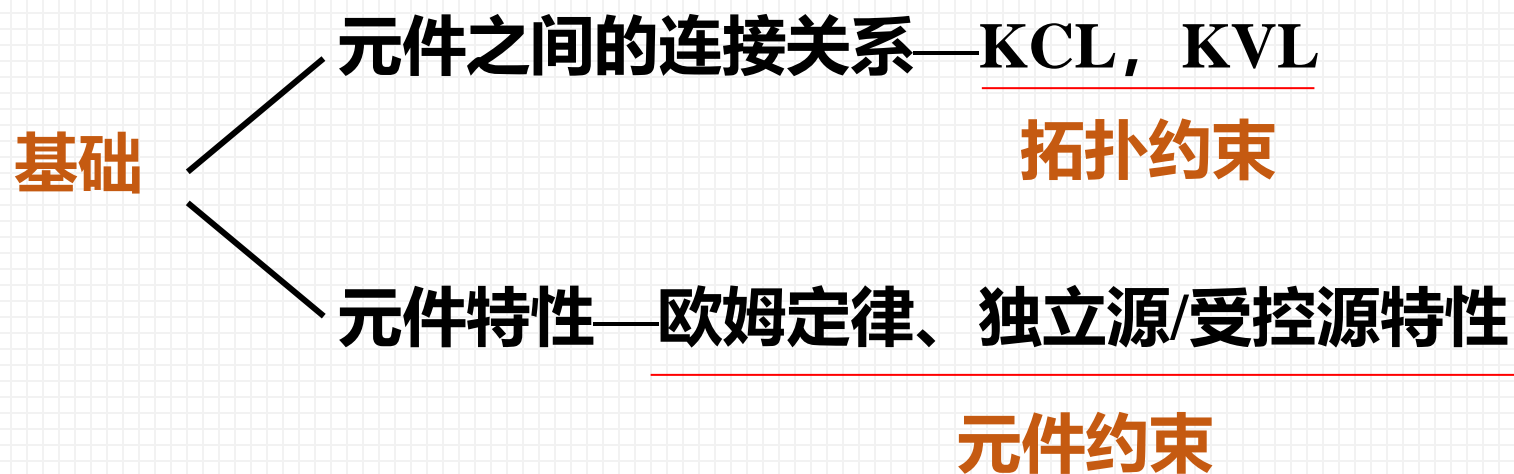
节点电压法

回路电流法

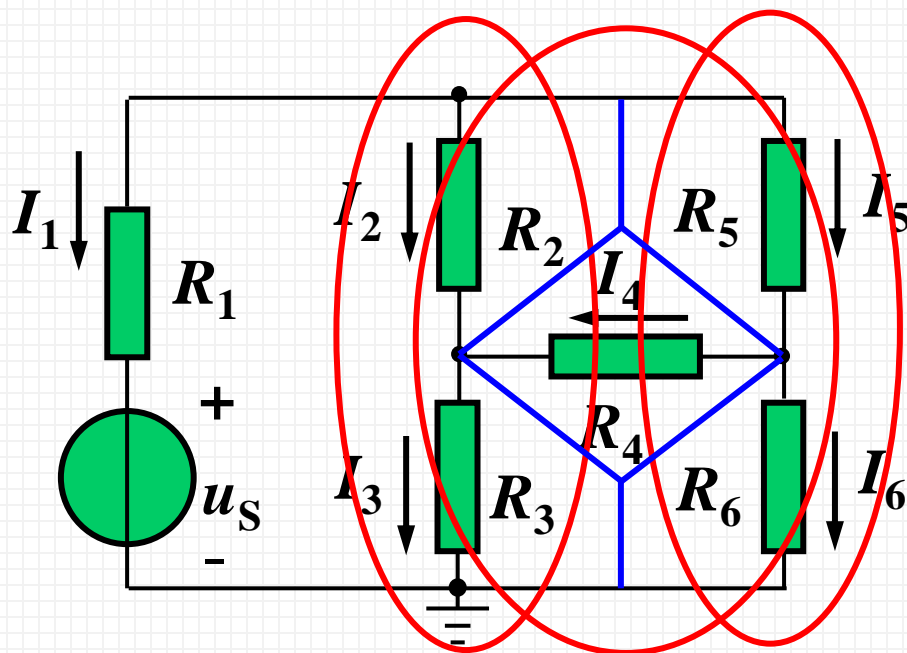
} 重点



对象：含独立源、受控源和电阻的任意复杂网络



所有支路电压与电流采用**关联**参考方向。求电流 $I_1 \sim I_6$ 。



支路数 $b = 6$

节点数 $n = 4$

(1) 桥平衡

(2) $Y \rightarrow \Delta$

(3) $\Delta \rightarrow Y$

(4) $2b$ 法: $2b$ 个支路电压/电流作变量,

b 个元件约束, $n-1$ 个KCL, $b-n+1$ 个KVL

(5) 支路电流法: b 个支路电流作变量,

$n-1$ 个KCL, $b-n+1$ 个KVL(需要用元件约束)

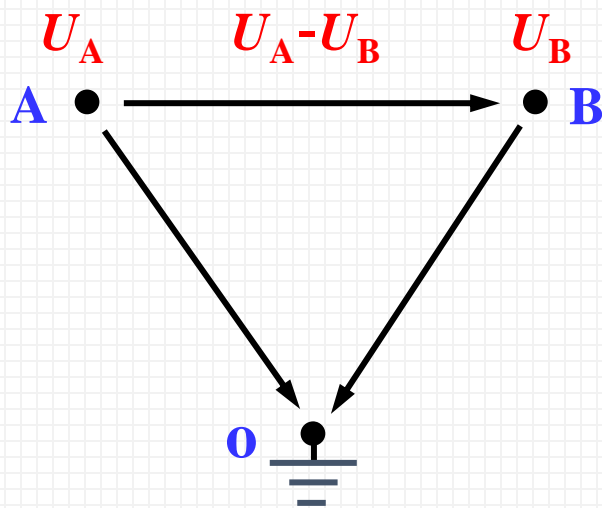
如何减少方程的数量?

支路电流法需要: $b-n+1$ 个 KVL 方程

$n-1$ 个 KCL 方程



? 假定存在一组变量, 使之自动满足 KVL 方程, 从而减少联立方程的个数。



任意选择参考点

其他点电位定义为节点电压

如果选择节点电压作变量

1、支路电压可由节点电压求出

2、KVL 自动满足

$$-U_A + (U_A - U_B) + U_B \equiv 0$$

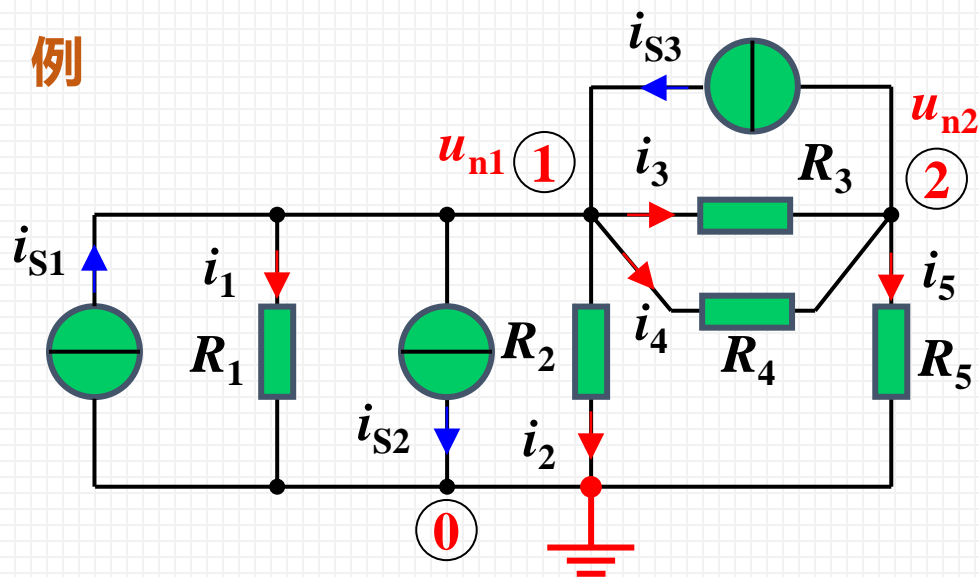
3、只需列写 KCL 方程即可

关键思路: 求解支路量 \rightarrow 求解节点量

1、节点电压法 (node voltage method)

节点电压法：以节点电压为未知变量列写电路KCL方程分析电路的方法。

例



(1) 选定**参考节点**，标明其余 $n-1$ 个独立节点的电压

(2) 列**KCL**方程：

$$\sum i_{\text{出}} = \sum i_{\text{入}}$$

$$\begin{cases} i_1 + i_{S2} + i_2 + i_3 + i_4 = i_{S1} + i_{S3} \\ i_5 + i_{S3} = i_3 + i_4 \end{cases}$$

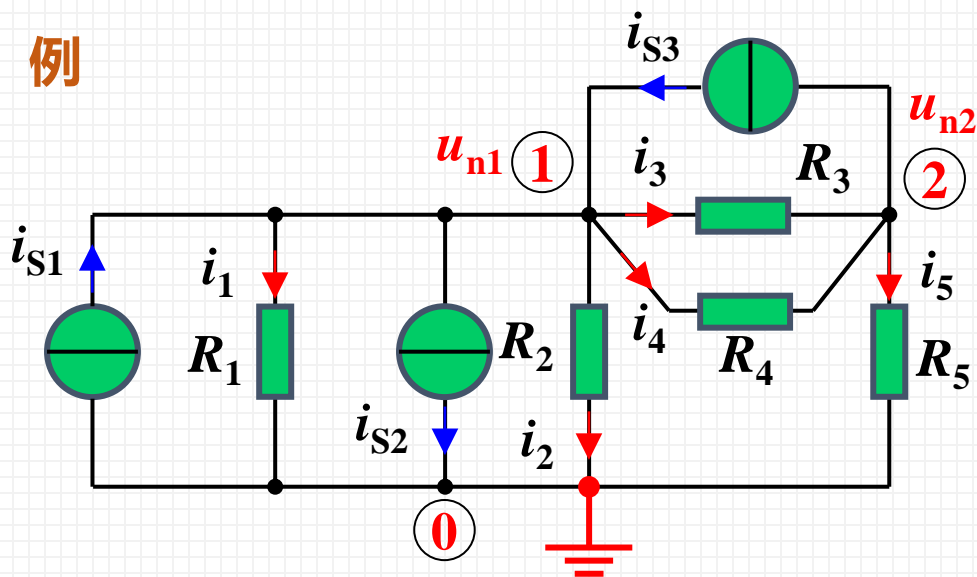
$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = i_{S1} - i_{S2} + i_{S3} \\ -i_3 - i_4 + i_5 = -i_{S3} \end{cases}$$

方程左边的电流之和有什么物理意义
(考虑正负号)?

1、节点电压法 (node voltage method)

节点电压法：以节点电压为未知变量列写电路KCL方程分析电路的方法。

例



某节点上**从电阻流出**该节点的电流
等于**从电源流入**该节点的电流

(1) 选定**参考节点**，标明其余 $n-1$ 个独立节点的电压

(2) 列**KCL**方程：

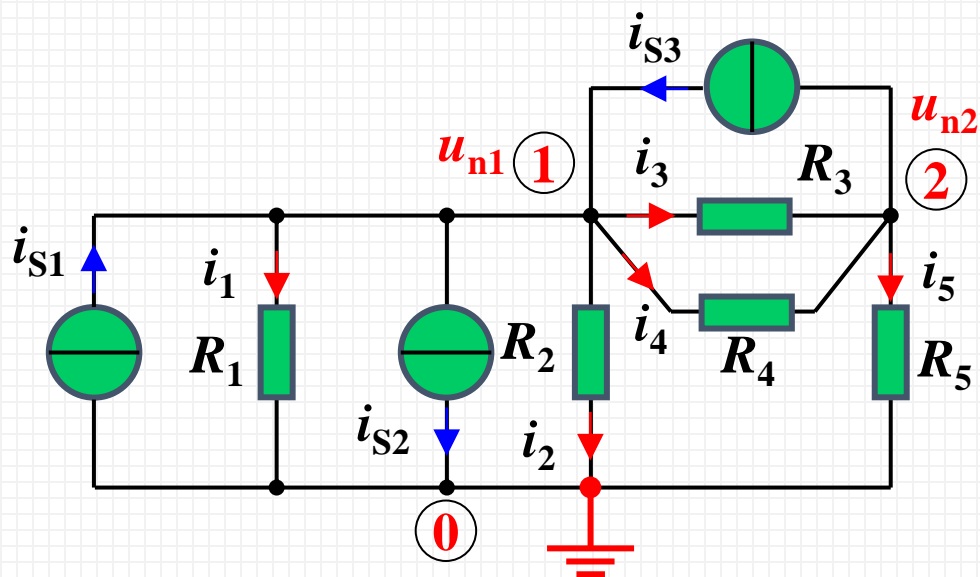
$$\sum i_{\text{出}} = \sum i_{\text{入}}$$

$$\begin{cases} i_1 + i_{s2} + i_2 + i_3 + i_4 = i_{s1} + i_{s3} \\ i_5 + i_{s3} = i_3 + i_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = i_{s1} - i_{s2} + i_{s3} \\ -i_3 - i_4 + i_5 = -i_{s3} \end{cases}$$

$$\sum i_{R\text{出}} = \sum i_{is\text{入}}$$

下一步：用节点电压来表示电流



$$\begin{cases} i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = i_{s1} - i_{s2} + i_{s3} \\ -i_3 - i_4 + i_5 = -i_{s3} \end{cases}$$

$$i_1 = \frac{u_{n1}}{R_1} \quad i_2 = \frac{u_{n1}}{R_2} \quad i_3 = \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_3} \quad i_4 = \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_4} \quad i_5 = \frac{u_{n2}}{R_5}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{u_{n1}}{R_1} + \frac{u_{n1}}{R_2} + \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_3} + \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_4} = i_{s1} - i_{s2} + i_{s3} \\ & -\frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_3} - \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_4} + \frac{u_{n2}}{R_5} = -i_{s3} \end{aligned} \right.$$

从电阻**流出**节点1
电流代数

从电流源**流入**节点1
电流代数

节点电压方程的初级形式

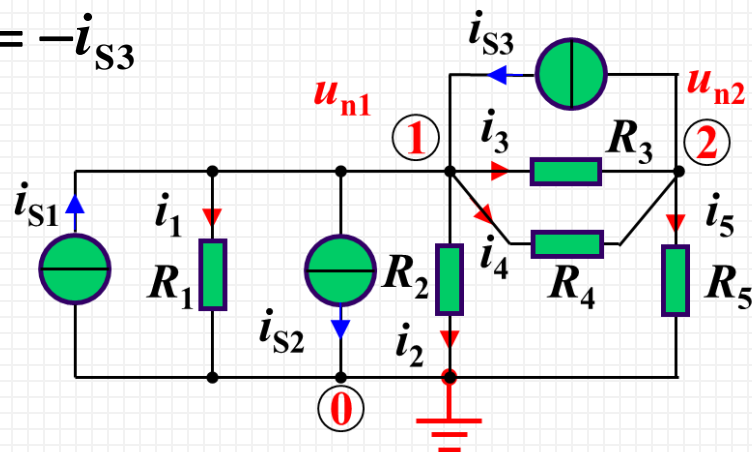
$$\begin{cases} \frac{u_{n1}}{R_1} + \frac{u_{n1}}{R_2} + \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_3} + \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_4} = i_{S1} - i_{S2} + i_{S3} \\ -\frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_3} - \frac{u_{n1} - u_{n2}}{R_4} + \frac{u_{n2}}{R_5} = -i_{S3} \end{cases}$$

整理，得

节点电压方程的标准形式

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) u_{n1} - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) u_{n2} = i_{S1} - i_{S2} + i_{S3} \\ -\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) u_{n1} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) u_{n2} = -i_{S3} \end{cases}$$

u_{n1} 的系数有何特点？



$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_{n1} - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_{n2} = i_{s1} - i_{s2} + i_{s3} \\ - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_{n1} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) u_{n2} = -i_{s3} \end{cases}$$

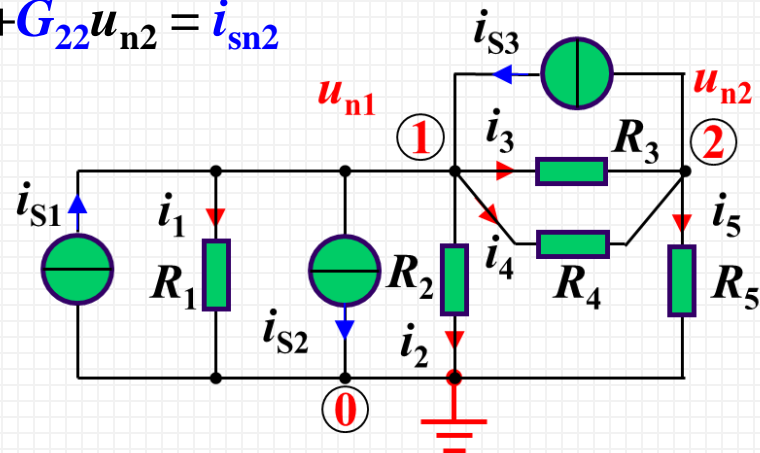
G_{11} 节点1的**自电导**，等于接在节点1上所有支路的电导之和

G_{22} 节点2的**自电导**，等于接在节点2上所有支路的电导之和

$$G_{12} = G_{21}$$

节点1与节点2之间的
互电导，等于接在节点1与节点2之间的所有支路的电导之和，并冠以负号

$$\begin{cases} G_{11}u_{n1} + G_{12}u_{n2} = i_{sn1} \\ G_{21}u_{n1} + G_{22}u_{n2} = i_{sn2} \end{cases}$$

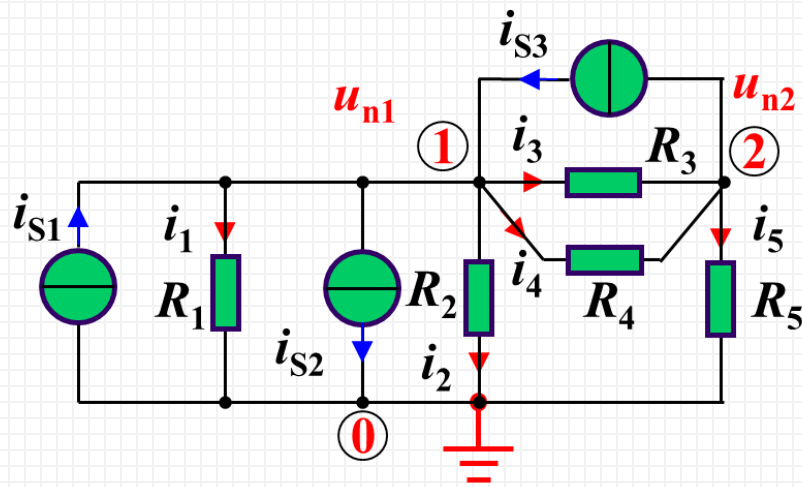


$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_{n1} - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_{n2} = i_{s1} - i_{s2} + i_{s3} \\ -\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_{n1} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)u_{n2} = -i_{s3} \end{cases}$$

i_{s1} 流入节点1的电流源电流的代数和

i_{s2} 流入节点2的电流源电流的代数和

*** 流入节点电流源电流取正号，流出取负号。**



$$\begin{cases} G_{11}u_{n1} + G_{12}u_{n2} = i_{sn1} \\ G_{21}u_{n1} + G_{22}u_{n2} = i_{sn2} \end{cases}$$



一般情况

(n 个独立节点)

$$\left\{ \begin{array}{l} G_{11}u_{n1} + G_{12}u_{n2} + \dots + G_{1n}u_{nn} = i_{Sn1} \\ G_{21}u_{n1} + G_{22}u_{n2} + \dots + G_{2n}u_{nn} = i_{Sn2} \\ \dots\dots\dots \\ G_{n1}u_{n1} + G_{n2}u_{n2} + \dots + G_{nn}u_{nn} = i_{Snn} \end{array} \right.$$

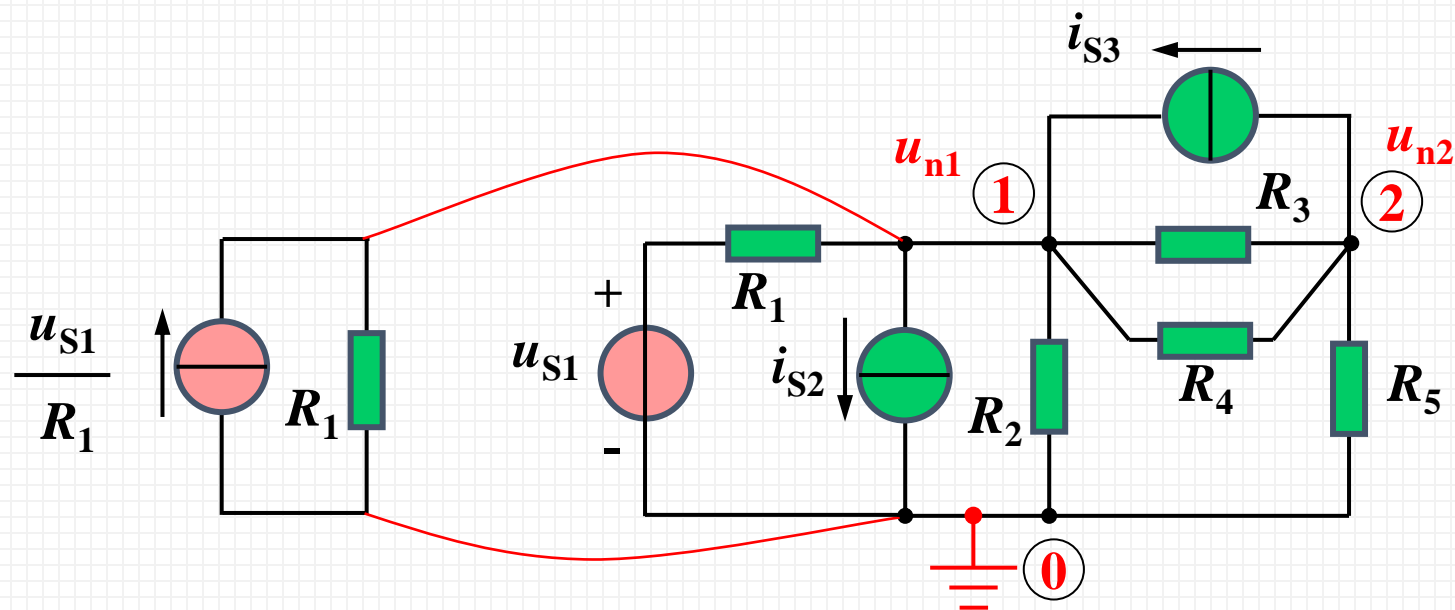
其中 G_{ii} **自电导**，等于接在节点 i 上所有支路的电导之和。自电导**总为正**。

$G_{ij} = G_{ji}$ **互电导**，等于接在节点 i 与节点 j 之间的所有支路的电导之和，并**冠以负号**。互电导**总为负**。如果 i - j 之间**无电导**相连，则**为零**。

i_{Sni} **流入**节点 i 的所有电流源电流的代数和。

* 当电路不含受控源时，系数矩阵一般为对称阵。

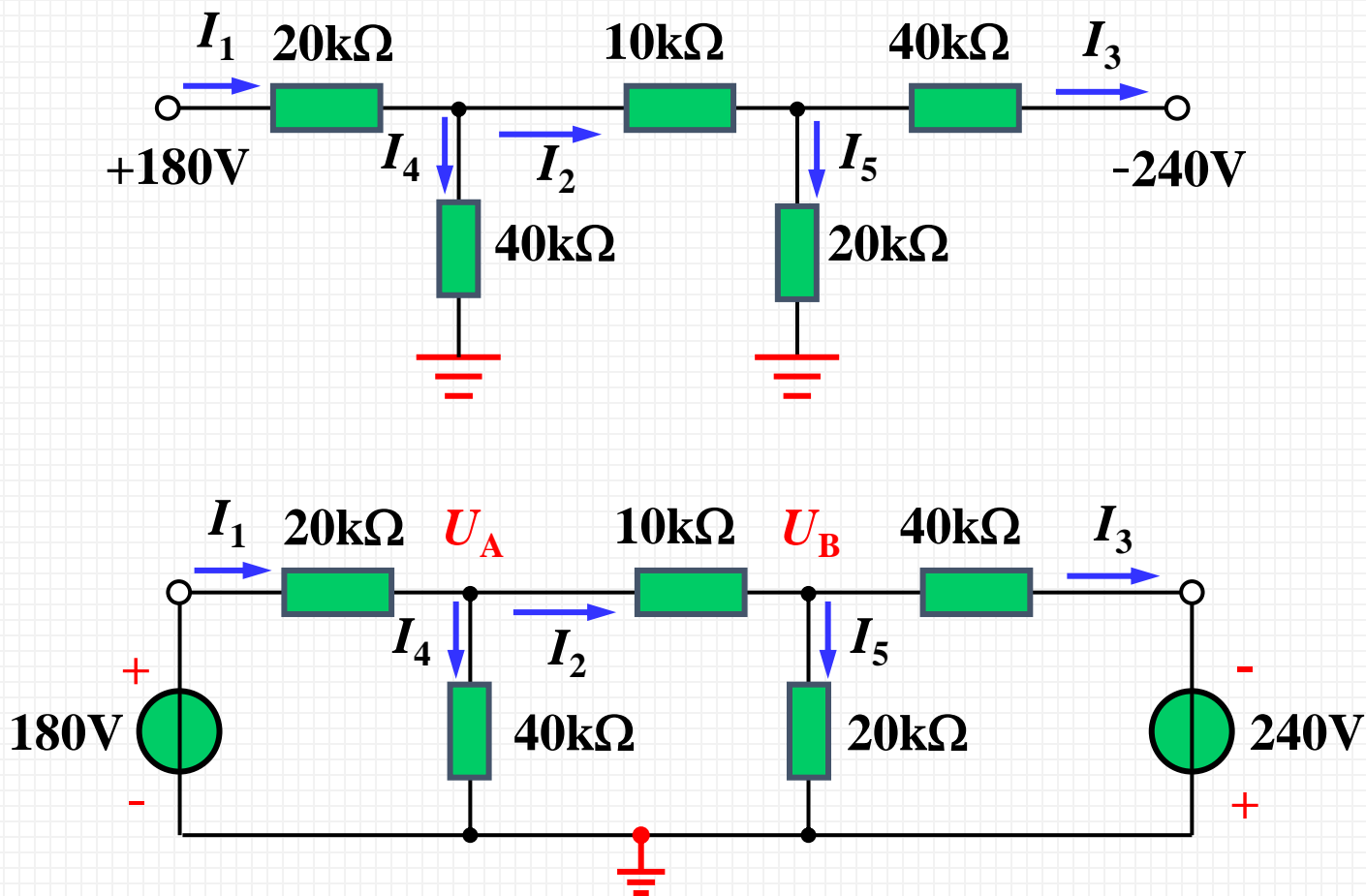
特殊情况1：电路中含电压源与电阻串联的支路。

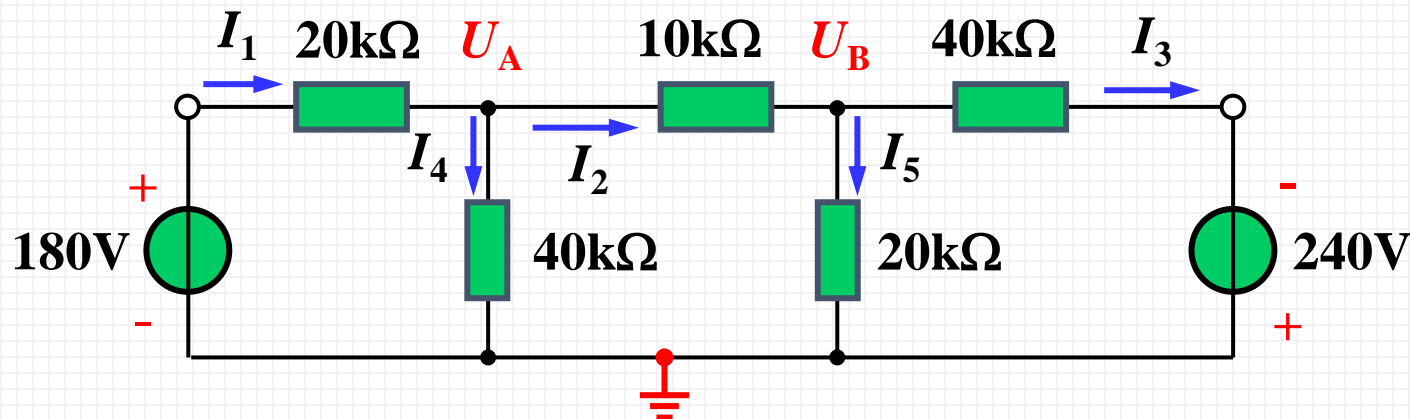


$$\begin{cases} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_{n1} - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_{n2} = \frac{u_{S1}}{R_1} - i_{S2} + i_{S3} \\ - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) u_{n1} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) u_{n2} = -i_{S3} \end{cases}$$

等效电流源电流

例1 用节点法求各支路电流。





解

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{10} \right) U_A - \frac{1}{10} U_B = \frac{180}{20} \\ -\frac{1}{10} U_A + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40} \right) U_B = -\frac{240}{40} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} U_A = 47.27\text{V} \\ U_B = -7.27\text{V} \end{cases}$$

各支路电流

$$I_1 = (180 - U_A) / 20 = 6.64\text{mA}$$

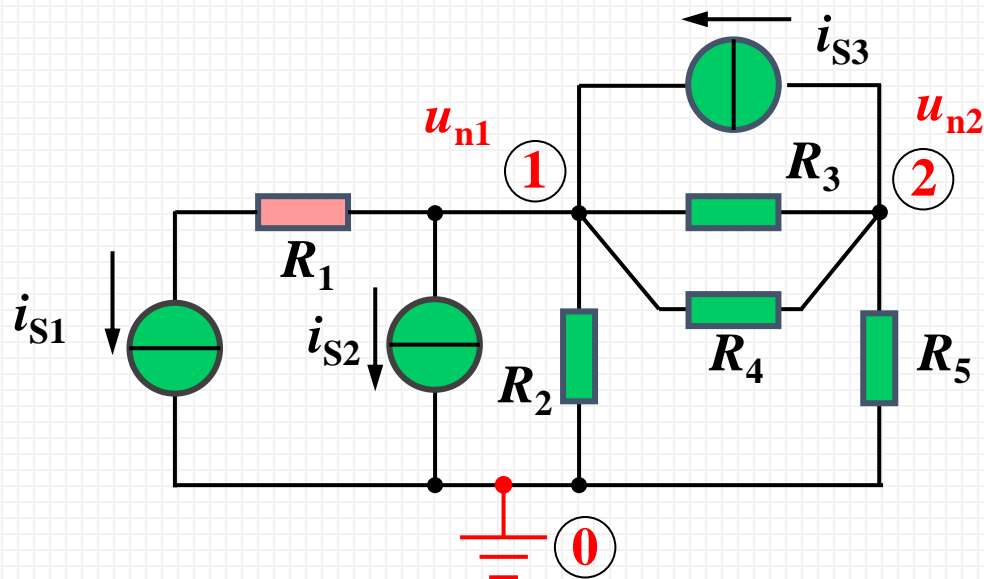
$$I_2 = (U_A - U_B) / 10 = 5.45\text{mA}$$

$$I_3 = (U_B + 240) / 40 = 5.82\text{mA}$$

$$I_4 = U_A / 40 = 1.18\text{mA}$$

$$I_5 = U_B / 20 = -0.364\text{mA}$$

特殊情况2：电路中电流源与电阻串联的支路。



$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_{n1} - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_{n2} = -i_{S1} - i_{S2} + i_{S3} \quad ? \quad \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_{n1} - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_{n2} = -i_{S1} - i_{S2} + i_{S3} \\ -\left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right)u_{n1} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right)u_{n2} = -i_{S3} \end{array} \right.$$

特殊情况3：电路中含受控电流源。

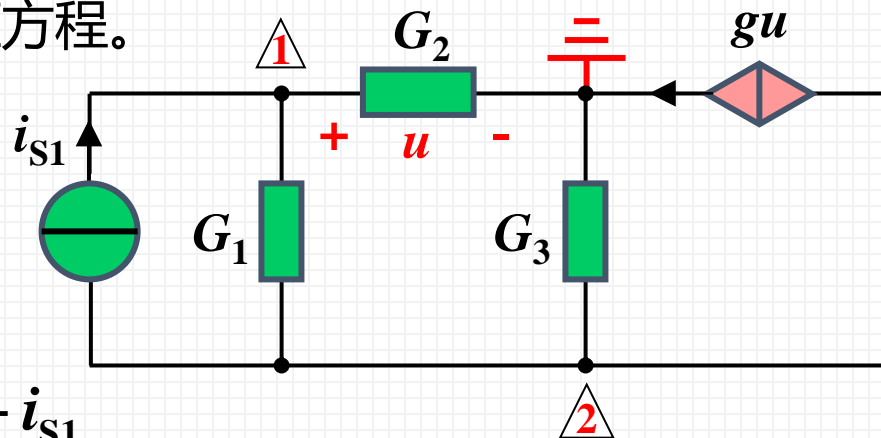
CCCS如何处理？

例3 列写下图含VCCS电路的节点电压方程。

(1) 把受控源当作独立源，列方程

$$(G_1 + G_2)u_{n1} - G_1u_{n2} = i_{S1}$$

$$-G_1u_{n1} + (G_1 + G_3)u_{n2} = -gu - i_{S1}$$



(2) 用节点电压表示控制量。

$$u = u_{n1}$$

* 有一个控制量（电压或电流），就要增加一个控制量和节点电压的补充方程。

(3) 整理，得

$$(G_1 + G_2)u_{n1} - G_1u_{n2} = i_{S1}$$

$$(g - G_1)u_{n1} + (G_1 + G_3)u_{n2} = -i_{S1}$$

** 由于含受控源，方程的系数矩阵一般不对称。

特殊情况4：电路中含无串联电阻的独立电压源支路。

例4 试列写下图含理想电压源电路的节点电压方程。

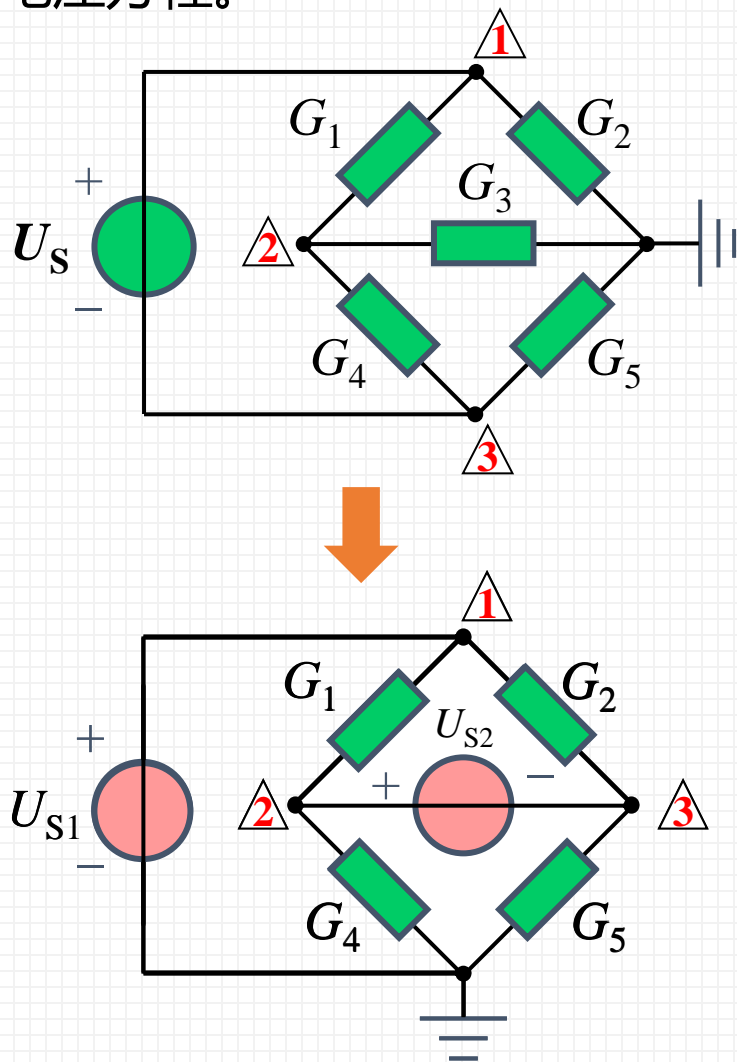
方法1： 选择合适的参考点

$$U_1 = U_S$$

$$-G_1 U_1 + (G_1 + G_3 + G_4) U_2 - G_3 U_3 = 0$$

$$-G_2 U_1 - G_3 U_2 + (G_2 + G_3 + G_5) U_3 = 0$$

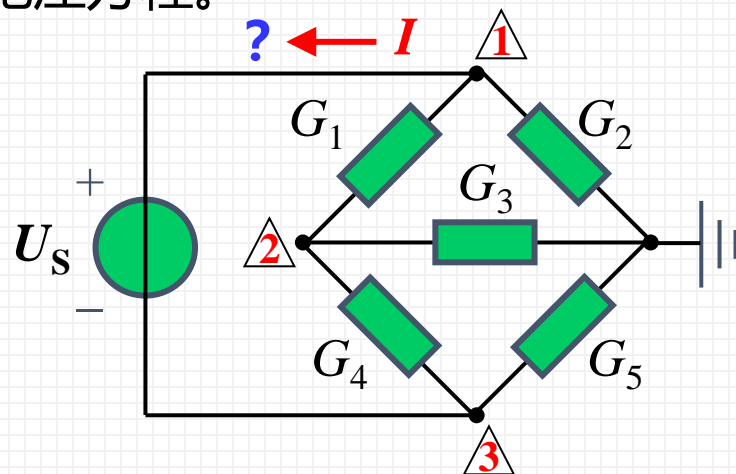
问题： 如果存在两个电压源支路怎么办？



例4 试列写下图含理想电压源电路的节点电压方程。

方法2 设电压源电流变量，视为流过电源的电流，列方程

$$\begin{cases} (G_1+G_2)U_1-G_1U_2 = \boxed{-I} \\ -G_1U_1+(G_1+G_3+G_4)U_2-G_4U_3=0 \\ -G_4U_2+(G_4+G_5)U_3=\boxed{I} \end{cases}$$



增加节点电压与电压源电压间的关系

$$U_1 - U_3 = U_s$$

每增加一个**变量**，就要增加一个**补充方程**。

↑
电流

↑
KVL

其他方法：**超节点法**



节点电压法

方程变量—节点电压

独立节点到参考节点之间的电压

电路中要设定参考节点

方程形式—KCL

电阻上**流出**节点的电流 = 电流源**流入**节点的电流

$$\sum i_{R\text{出}} = \sum i_{iS\text{入}}$$

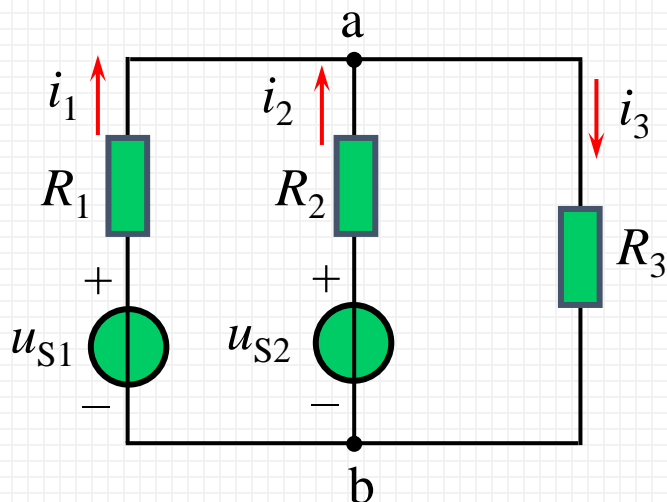
重新考虑减少方程数量的问题

支路电流法用支路电流作为变量，需要 $b-n+1$ 个KVL方程， $n-1$ 个KCL方程。

节点电压法用节点电压作为变量，只需要 $n-1$ 个KCL方程。

用 $n-1$ 个节点电压表示支路电压和支路电流
 $b-n+1$ 个KVL方程自动满足

是否存在只需要 $b-n+1$ 个KVL方程的电路求解方法？



$$b = 3$$

$$n = 2$$

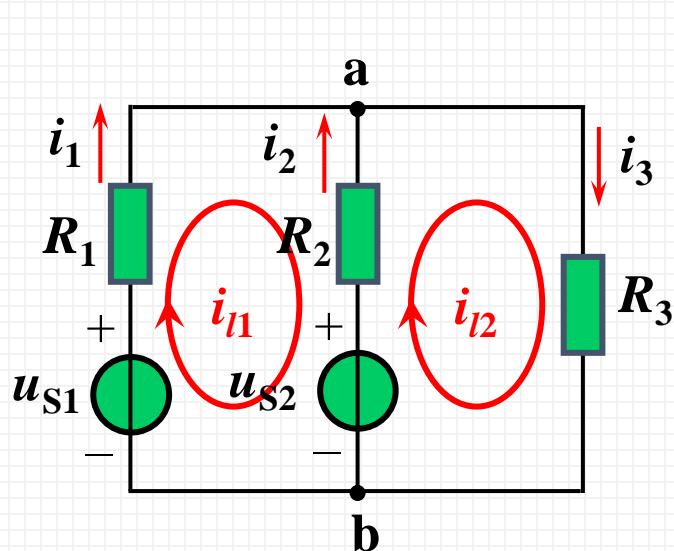
$$b - n + 1 = 2$$

用 $b-n+1$ 个 $?$ 表示支路电压和支路电流?
 $n-1$ 个KCL方程自动满足。

(听话的)回路电流

2 回路电流法 (loop current method)

基本思想：以**假想的（听话的）回路电流**为独立变量。各支路电流可用回路电流的线性组合来表示。



★ **假想的回路电流分别为** i_{l1} , i_{l2}

只按照回路方向流动，不会分叉的电流

如果选择回路电流 i_{l1} , i_{l2} 作变量

1、支路电流可由回路电流求出

$$i_1 = i_{l1} \quad i_2 = i_{l2} - i_{l1} \quad i_3 = i_{l2}$$

2、KCL自动满足

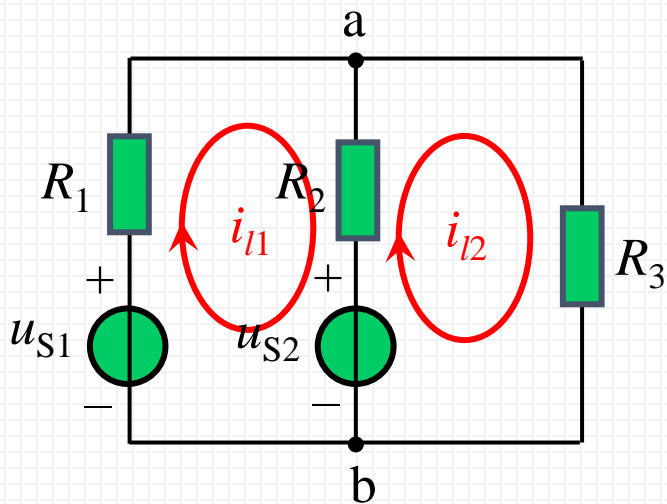
$$i_1 + i_2 - i_3 = i_{l1} + (i_{l2} - i_{l1}) - i_{l2} \equiv 0$$

3、只需列写KVL方程即可

关键思路：

求解支路量 → 求解回路量

回路电流法：以回路电流为未知变量列写电路KVL方程分析电路的方法。



回路1: $R_1 i_{l1} + R_2(i_{l1} - i_{l2}) + u_{S2} - u_{S1} = 0$

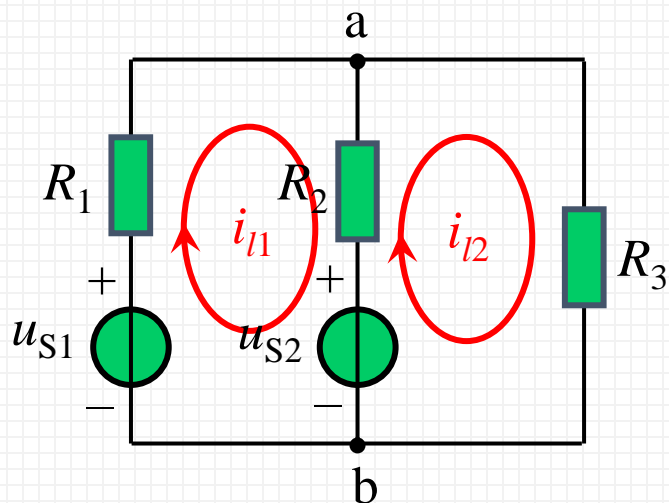
回路2: $R_2(i_{l2} - i_{l1}) + R_3 i_{l2} - u_{S2} = 0$

得

$$\begin{cases} R_1 i_{l1} + R_2(i_{l1} - i_{l2}) = u_{S1} - u_{S2} \\ R_2(i_{l2} - i_{l1}) + R_3 i_{l2} = u_{S2} \end{cases}$$

上面这两个式子等号左边是什么意思？

回路电流法：以回路电流为未知变量列写电路KVL方程分析电路的方法。



得

$$\begin{cases} R_1 i_{l1} + R_2(i_{l1} - i_{l2}) = u_{S1} - u_{S2} \\ R_2(i_{l2} - i_{l1}) + R_3 i_{l2} = u_{S2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (R_1 + R_2) i_{l1} - R_2 i_{l2} = u_{S1} - u_{S2} \\ -R_2 i_{l1} + (R_2 + R_3) i_{l2} = u_{S2} \end{cases}$$

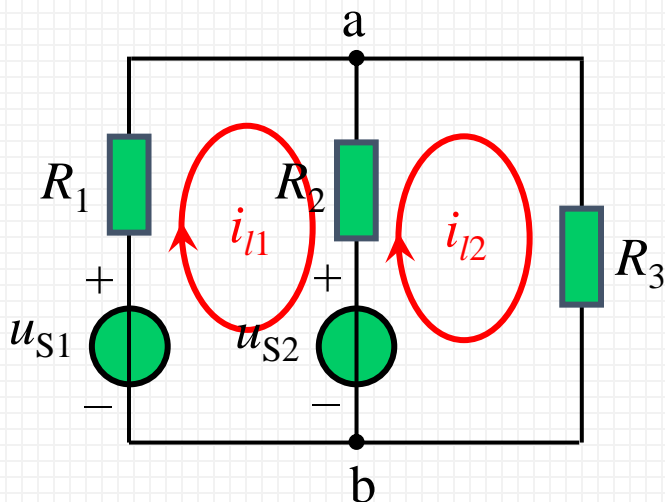
回路中电阻上
电压降的代数和

回路中电压源上
电压升的代数和

$R_{11} = R_1 + R_2$ 代表回路1的总电阻 (**自电阻**)

$R_{22} = R_2 + R_3$ 代表回路2的总电阻 (**自电阻**)

$R_{12} = -R_2$, $R_{21} = -R_2$ 代表回路1和回路2的**公共电阻** (**互电阻**)



$$(R_1 + R_2) i_{l1} - R_2 i_{l2} = u_{S1} - u_{S2}$$

$$-R_2 i_{l1} + (R_2 + R_3) i_{l2} = u_{S2}$$

$$R_{11} = R_1 + R_2 \quad \text{自电阻}$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 \quad \text{自电阻}$$

$$R_{12} = -R_2, \quad R_{21} = -R_2 \quad \text{互电阻}$$

$$u_{S1} = u_{S1} - u_{S2}$$

$$u_{S2} = u_{S2}$$

回路1中所有电压源电压升的代数和

回路2中所有电压源电压升的代数和

$$\begin{cases} R_{11} i_{l1} + R_{12} i_{l2} = u_{S1} \\ R_{21} i_{l1} + R_{22} i_{l2} = u_{S2} \end{cases}$$

回路电流方程的标准形式

电阻电路回路电流方程系数矩阵对称

推广到 l 个回路

$$\begin{cases} R_{11}i_{l1} + R_{12}i_{l2} + \dots + R_{1l}i_{ll} = u_{s1} \\ R_{21}i_{l1} + R_{22}i_{l2} + \dots + R_{2l}i_{ll} = u_{s2} \\ \dots \\ R_{l1}i_{l1} + R_{l2}i_{l2} + \dots + R_{ll}i_{ll} = u_{sl} \end{cases}$$

其中

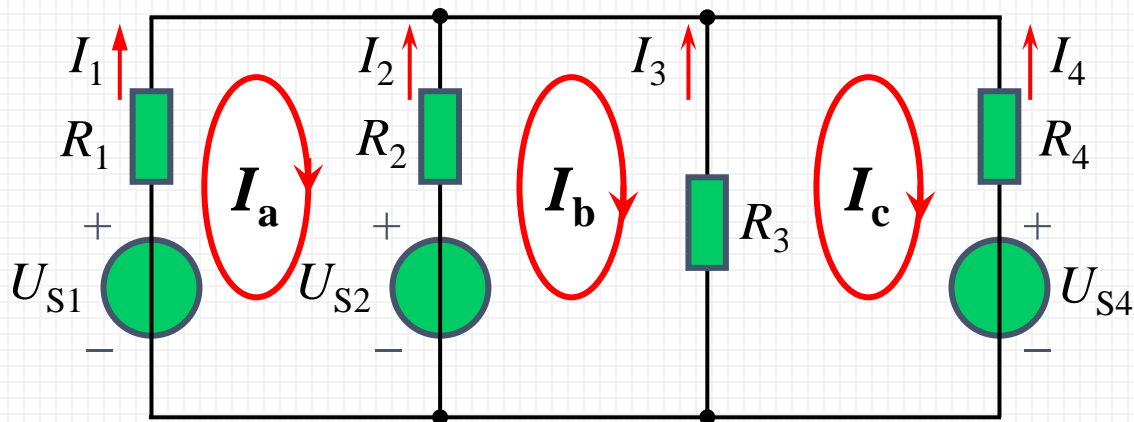
R_{kk} : 自电阻(为正), $k = 1, 2, \dots, l$

R_{jk} : 互电阻

- $+$: 流过互阻两个回路电流方向相同
- $-$: 流过互阻两个回路电流方向相反
- 0 : 两个回路没有公共电阻

网孔电流法:

对平面电路, 若以**网孔为独立回路**, 此时回路电流也称为**网孔电流**, 对应的分析方法称为网孔电流法。

**例1 用回路法求各支路电流。****解**

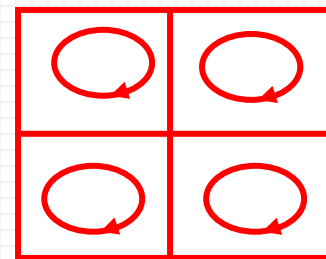
(1) 设独立回路电流 (顺时针)

(2) 列 KVL 方程

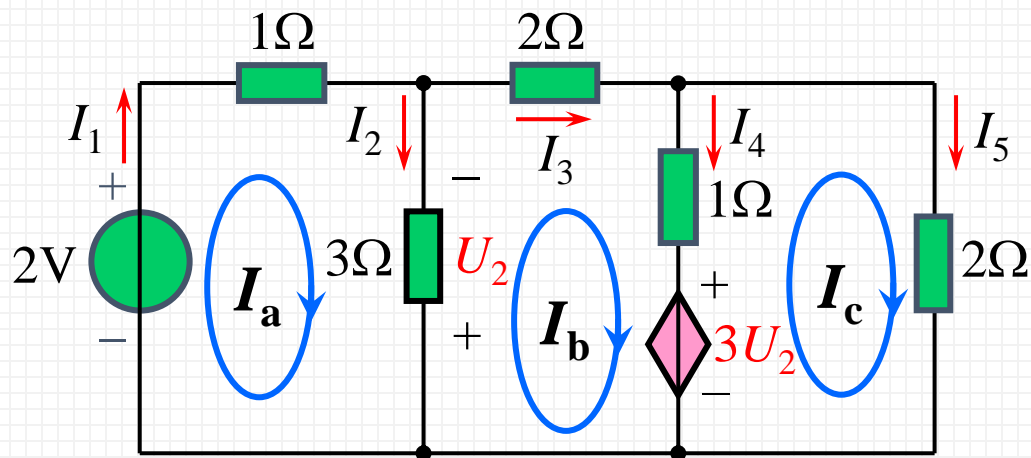
$$(R_1 + R_2)I_a - R_2I_b + 0 = U_{S1} - U_{S2}$$

$$-R_2I_a + (R_2 + R_3)I_b - R_3I_c = U_{S2}$$

$$0 - R_3I_b + (R_3 + R_4)I_c = -U_{S4}$$

(3) 求解回路电流方程, 得 I_a, I_b, I_c (4) 求各支路电流: $I_1 = I_a, I_2 = I_b - I_a, I_3 = I_c - I_b, I_4 = -I_c$ **网孔法同转向
互电阻为负**

例2 用回路法求各支路电流。



① 将VCVS看作独立源建立方程；

$$\begin{cases} 4I_a - 3I_b = 2 \\ -3I_a + 6I_b - I_c = -3U_2 \\ -I_b + 3I_c = 3U_2 \end{cases}$$

② 找出控制量和回路电流关系。

$$U_2 = 3(I_b - I_a)$$

得
$$\begin{cases} 4I_a - 3I_b = 2 \\ -12I_a + 15I_b - I_c = 0 \\ 9I_a - 10I_b + 3I_c = 0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} I_a = 1.19\text{A} \\ I_b = 0.92\text{A} \\ I_c = -0.51\text{A} \end{cases}$$

各支路电流

$$I_1 = I_a = 1.19\text{A}$$

$$I_2 = I_a - I_b = 0.27\text{A}$$

$$I_3 = I_b = 0.92\text{A}$$

$$I_4 = I_b - I_c = 1.43\text{A}$$

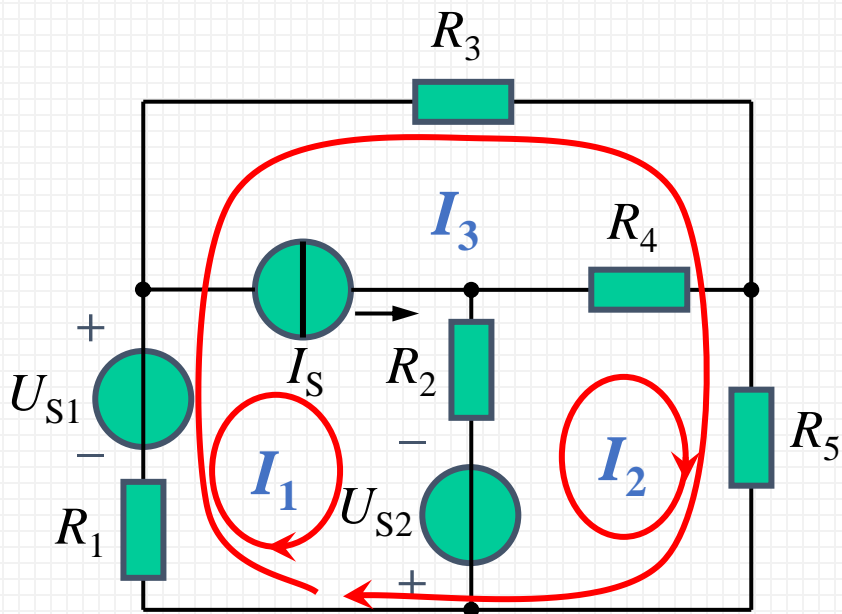
$$I_5 = I_c = -0.52\text{A}$$

❖ 有一个控制量（电压或电流），就要增加一个控制量和回路电流关系的补充方程。

❖ 由于含受控源，方程的系数矩阵一般不对称。

例3 用回路法列写含有**理想电流源支路**的电路方程。

方法1: 选取独立回路时, 使**理想电流源支路**仅仅属于一个回路, 该回路电流即 I_s 。

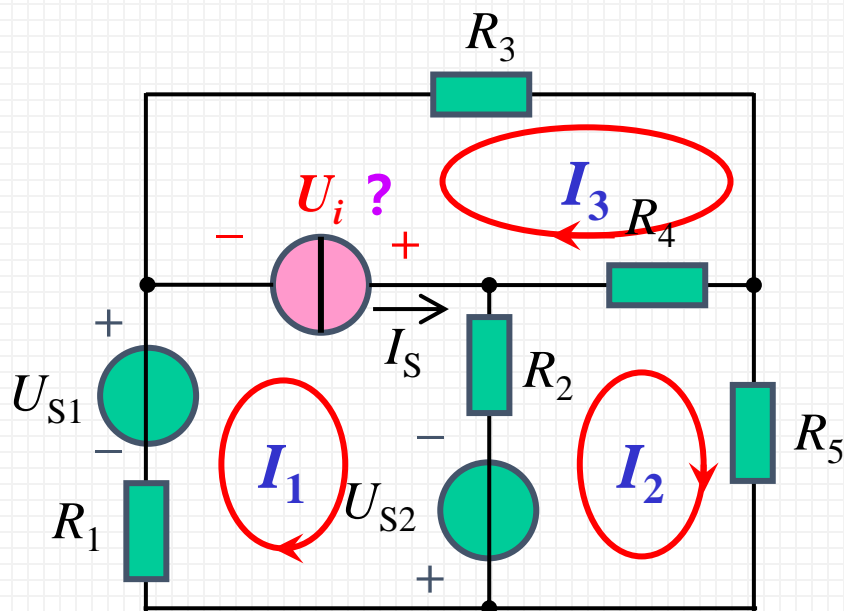


$$I_1 = I_s$$



$$-R_2 I_1 + (R_2 + R_4 + R_5) I_2 + R_5 I_3 = -U_{S2}$$

$$R_1 I_1 + R_5 I_2 + (R_1 + R_3 + R_5) I_3 = U_{S1}$$



方法2

引入电流源的端电压变量
(视为电源上的电压)

$$\begin{cases} (R_1+R_2)I_1-R_2I_2=U_{S1}+U_{S2}+U_i \\ -R_2I_1+(R_2+R_4+R_5)I_2-R_4I_3=-U_{S2} \\ -R_4I_2+(R_3+R_4)I_3=-U_i \end{cases}$$

**** 增加回路电流和电流源电流的关系方程**

$$I_S=I_1-I_3$$

每增加一个变量，就要增加一个补充方程。

电压

KCL

其他方法：超网孔法



回路电流法

方程变量—回路电流

假想的听话的电流

支路电流是回路电流的组合

为什么 $b-n+1$ 个独立回路电流就够?

感兴趣的话看教材附录B

方程形式—KVL

沿回路方向

电阻上的电压降 = 电压源上的电压升

$$\sum U_R \text{ (压降)} = \sum U_S \text{ (压升)}$$



支路法、回路法和节点法的小结和比较

(1) 方程数的比较

	KCL方程	KVL方程	方程总数
支路法	$n-1$	$b-n+1$	b
回路法	0	$b-n+1$	$b-n+1$
节点法	$n-1$	0	$n-1$

- (2) 对于非平面电路，选独立回路不容易，而独立节点较容易。一般来说回路方程系数比较整，手算求解方便。
- (3) 节点法、回路法易于编程。目前用计算机分析网络(电网，集成电路设计等)采用节点法较多。