习题讨论课2解答：微分、偏导数、梯度、方向导数

一、回顾

仅以二元函数为例。

（一）概念

- $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处可微：

  $f(x,y)=f(a,b)+A(x-a)+B(y-b)+o(r),\quad r=\|(x,y)-(a,b)\|\to 0.$

  微分 $\mathrm{d}f(a,b)$ 是线性函数：

  $$\mathrm{d}f(a,b)(\xi,\eta)=A\xi+B\eta.$$

  $$\mathrm{d}f(a,b)=A\mathrm{d}x+B\mathrm{d}y,$$

  其中 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 是向量的坐标函数 $\mathrm{d}x(a,b)(\xi,\eta)=\xi,\mathrm{d}y(a,b)(\xi,\eta)=\eta$。

- 偏导数
  $$f_x'(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+t,b)-f(a,b)}{t},$$
  也记为 $f_x(a,b),f_1(a,b),f^{(1,0)}(a,b),\partial_x f(a,b),\partial_1 f(a,b),\mathrm{D}_x f(a,b),\mathrm{D}_1 f(a,b)$ 等形式。类似地有关于 y 的偏导数。偏导数就是把多元函数当作求导变量的一元函数，计算导数。

- 高阶偏导数 $f'''_{xxy}=f_{xxy}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x\partial x}=f'''_{1,1,2}=f^{(2,1)}$，最后这个符号中 $(2,1)$ 表示对第一个自变量求导两次，对第二个自变量求导一次。

- 沿向量的导数
  $$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

- 方向导数：$\mathbf{v}$ 是一个单位向量
  $$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{v})-f(\mathbf{x}_0)}{t}=\lim_{\substack{x\to\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}\text{ 位于以 }\mathbf{x}_0\text{ 为起点沿 }\mathbf{v}\text{ 方向的射线上}}}\frac{f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}.$$

- 梯度 ∇f 是一个向量，满足

  $$\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}=\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{v},\quad \forall\mathbf{v}.$$

  直角坐标系（单位正交基）下，

  $$\nabla f(\mathbf{x}_0)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\end{pmatrix}$$

（二）关系

- f 可微 $\Longrightarrow f$ 存在偏导数，且 $\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0)\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\mathrm{d}y$，$f$ 的 Jacobi 矩阵（即 $\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)$ 的坐标表示）为 $\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0)\end{pmatrix}$。
- f 偏导函数连续 $\Longrightarrow f$ 可微。
- f 可微 $\Longrightarrow$

  $$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(\mathbf{x}_0)=\mathrm{d}f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}=\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)\xi_i=\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{v}.$$

  其中 $\mathbf{v}=(\xi_1,\dots,\xi_m)^T$。

  梯度方向是函数的方向导数最大的方向，即函数值增长最快的方向；梯度的大小是函数最大的方向导数值。
- 若 f 的 k 阶偏导数都连续，则高阶偏导数的值与求导顺序无关。

（三）计算

- 一阶微分的链索法则：$\mathrm{d}(f\circ G)(\mathbf{x})=\mathrm{d}f(G(\mathbf{x}))\circ \mathrm{D}G(\mathbf{x})$，其坐标形式为 Jacobi 矩阵的乘积。

  等价描述：一阶微分的形式不变性，

  $$\mathrm{d}z=\sum_i\frac{\partial z}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i=\sum_j\frac{\partial z}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j,$$

  第一个求和中 $z=f(\mathbf{y})$，第二个求和中 $z=f(G(\mathbf{x}))$。

  复合函数求偏导，可以用微分，可以用 Jacobi 矩阵，也可以直接求导（利用自变量与因变量之间的树状结构，每条路径上用乘积，所有路径上进行求和）。练习：画出 $f(u(x,y),v(x,xy))$ 的树状结构图。

  梯度

  $$\nabla(f\circ G)(\mathbf{x})=(\mathrm{D}G(\mathbf{x}))^T\,\nabla f(\mathbf{y}),\quad \mathbf{y}=G(\mathbf{x}),$$

  这是因为

  $$\begin{aligned}\nabla(f\circ G)(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}&=\mathrm{d}(f\circ G)(\mathbf{x})\mathbf{v}=\mathrm{d}f(\mathbf{y})\mathrm{D}G(\mathbf{x})\mathbf{v}\\&=\nabla f(\mathbf{y})\cdot\mathrm{D}G(\mathbf{x})\mathbf{v}=(\mathrm{D}G(\mathbf{x}))^T\nabla f(\mathbf{y})\cdot\mathbf{v}\end{aligned}$$

- 乘积求导的 Leibniz 公式

  $$\mathrm{d}(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}))=f(\mathbf{x})\mathrm{d}g(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})\mathrm{d}f(\mathbf{x}).$$

  $$\nabla(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}))=f(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}).$$

  $$\mathrm{d}(\mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{G}(\mathbf{x}))\mathbf{v}=\mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{v}\cdot\mathbf{G}(\mathbf{x})+\mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot\mathrm{D}\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{v}.$$

  $$\nabla(\mathbf{F}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{G}(\mathbf{x}))=(\mathrm{D}\mathbf{F}(\mathbf{x}))^T\mathbf{G}(\mathbf{x})+(\mathrm{D}\mathbf{G}(\mathbf{x}))^T\mathbf{F}(\mathbf{x}).$$

- 线性

二、习题

例 1. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内有定义，$f(0,0)=0$，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = a$$

a 为常数。证明：

1. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续；
2. 若 $a\neq -1$，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，但不可微；
3. 若 $a=-1$，则 $f(x,y)$在点 $(0,0)$ 处可微。

证明. 已知条件即 $\frac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = a+o(1)$（$(x,y)\to(0,0)$）。

$$f(x,y) = (a+1)\sqrt{x^2+y^2} + o(\sqrt{x^2+y^2}), \quad (x,y)\to(0,0). \tag{*}$$

(1) 由上式知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$，再根据已知 $f(0,0)=0$，因此 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续。

(2) 若 $a\neq -1$，则 $f(x,0)=(a+1)|x|+o(|x|), \quad x\to 0$，$f$ 不可微；

(3) 若 $a=-1$，则 $f(x,y)=o(\sqrt{x^2+y^2}), \quad (x,y)\to(0,0)$，从而 f 在点 $(0,0)$ 处可微，$\mathrm{d}f(0,0)=0$。 □

注：由 (*) 式知，f 在点 $(0,0)$ 处可微当且仅当 $z=(a+1)\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处可微。当 $a\neq 1$ 时，曲面 $z=(a+1)\sqrt{x^2+y^2}$ 是圆锥面，它在顶点处没有切平面，所以函数不可微。具体而言， $z=(a+1)\sqrt{x^2+y^2}$ 是一次齐次的，即：若 (x,y,z) 在该曲面上，则整个射线 (tx,ty,tz)（$t\geq 0$） 都位于该曲面上。因此 $z=(a+1)\sqrt{x^2+y^2}$ 在原点可微当且仅当它是平面，但这只有 $a=-1$ 是才成立。

例 2. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点处的连续性和可微性。

解. (1) $\left|\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2)\right| \leq \sqrt{|xy|}\to 0, \quad (x,y)\to 0$，从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。

(2) 因为

$$f(x,x) = \frac{|x|\sin(2x^2)}{2x^2} = |x|+o(|x|), \quad x\to 0$$

所以 f 沿直线 (x,x) 在 $x=0$ 时不可微，所以 f 不可微。 □

注：$f(x,y)=\sqrt{|xy|}(1+o(1))=\sqrt{|xy|}+o(\sqrt{|xy|})=\sqrt{|xy|}+o(r)$，所以 f 在原点可微当且仅当 $z=\sqrt{|xy|}$ 在原点可微。 $z=\sqrt{|xy|}$ 是一次齐次函数，但它不是平面，所以在原点处不可微。

问题：函数 $g(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点是多少阶连续可微性的？怎样证明你的结论？

例 3. 下列条件成立时能够推出 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点可微，且全微分 $\mathrm{d}f=0$ 的是

(A) 偏导数 $f'_x(x_0,y_0)=f'_y(x_0,y_0)=0$；

(B) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$；

(C) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=\frac{\sin((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$；

(D) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的全增量 $\Delta f=((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$。

解. (A) 例2中的函数满足 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$，但 f 在 $(0,0)$ 处并不可微。

(B) $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在 $(0,0)$ 处无极限（$f(x,kx)=\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$），所以不连续，从而不可微。

(C) 记 $r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则

$$\Delta f=\frac{\sin r^2}{r}=\frac{r^2+o(r^2)}{r}=r+o(r),\quad r\to 0,$$

所以 f 连续，但不可微（理由同例1）。

(D) $\Delta f=o(r)$，$r=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$，从而 f 可微，且 $\mathrm{d}f(x_0,y_0)=0$。 □

例 4. 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，则在 $(0,0)$ 点（）

(A) 连续，但偏导数不存在； (B) 偏导数存在，但不可微；

(C) 可微； (D) 偏导数存在且连续.

解. (D) 蕴涵 (C)。由例2中的方法知 f 不可微，所以 (C) 假，从而 (D) 假。

$$f(x,0)=0=f(0,y)$$

所以存在偏导数，因此 (A) 假，(B) 真。 □

例 5. 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性，偏导数存在性，偏导函数连续性，以及可微性。

解.

$$f(x,y)=O(xy)=o(\sqrt{x^2+y^2}),\quad (x,y)\to(0,0),$$

所以 f 在 $(0,0)$ 处可微，从而连续。$\mathrm{d}f(0,0)=0$，从而 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=0$。当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，f 为初等函数，所以 f 偏导数连续。

$$f'_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+xy\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

而

$$xy\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\cos^2\theta\sin\theta\cos\frac{1}{r},$$

所以极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ 不存在，所以 f 的偏导数在 $(0,0)$ 处不连续。 □

例 6. 设 $f(x,y)=(x+y)\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 求 $\mathrm{d}f(0,0)$。

有如下做法：

$\mathrm{d}f(x,y)=[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_x(x,y)]\,\mathrm{d}x+[\varphi(x,y)+(x+y)\varphi_y(x,y)]\,\mathrm{d}y$。

令 $x=0,y=0$, $\mathrm{d}f(0,0)=\varphi(0,0)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$。

指出上述方法的错误，并给出正确做法。

解. 上述做法中使用了 φ 可微这个原题未提供的条件。

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(0,0)&=(x+y)\varphi(x,y)=(x+y)\left[\varphi(0,0)+o(1)\right]\\&=\varphi(0,0)(x+y)+o(x+y)\\&=\varphi(0,0)(x+y)+o(\sqrt{x^2+y^2}),\quad (x,y)\to(0,0).\end{aligned}$$

□

例 7. 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处可微，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+x,b)-f(a,b-x)}{x}$。

证明.

$$\begin{aligned}f(a+x,b)-f(a,b-x)&=\left[f(a,b)+f'_x(a,b)x+o(x)\right]-\left[f(a,b)+f'_y(a,b)(-x)+o(x)\right]\\&=\left[f'_x(a,b)+f'_y(a,b)\right]x+o(x),\quad x\to0.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(a+x,b)-f(a,b-x)}{x}=f'_x(a,b)+f'_y(a,b)$。 □

例 8. 设 $z(x,y)$ 定义在矩形区域 $D=\{(x,y)|\,0\le x\le a,0\le y\le b\}$ 上的 $\mathscr{C}^2$ 函数。证明：

1. $z(x,y)=f(y)\Longleftrightarrow\forall(x,y)\in D,\ \frac{\partial z}{\partial x}=0$；

2. $z(x,y)=f(x)+g(y) \Longleftrightarrow \forall (x,y)\in D,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$

证明. (1) $\Rightarrow$: 显然。

$\Leftarrow$:

$$z(x,y)-z(a,y)=z'_x(\xi,y)(x-a)=0.$$

(2) $\Rightarrow$: $g(y)=z(a,y)-f(a)$ 是可微函数，所以

$$z'_y(x,y)=g'(y),\quad z^{(2)}_{yx}(x,y)=0.$$

$\Leftarrow$: 由(1)知，$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)=h(y)$，由条件知 h 连续。于是

$$z(x,y)-z(x,b)=\int_b^y z'_y(x,t)\mathrm{d}t=\int_b^y h(t)\mathrm{d}t=:g(y).$$

□

例 9. 设 $z=\arcsin\frac{x}{y}$，求$\mathrm{d}z$.

解.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\frac{1}{y},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

,

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\frac{1}{y}\mathrm{d}x+\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y$$

□

另解.

$$x=y\sin z$$

两边求微分得到

$$\mathrm{d}x=\sin z\mathrm{d}y+y\cos z\mathrm{d}z,$$

从而

$$\mathrm{d}z=\frac{1}{y\cos z}\mathrm{d}x-\frac{\sin z}{y\cos z}\mathrm{d}y=\frac{1}{y\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\mathrm{d}x-\frac{x/y}{y\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\mathrm{d}y.$$

这样避免了直接求反三角函数的导数。 □

例 10. 设函数 $z=2\cos^2(x-\frac{y}{2})$，证明 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

证明. $z=f(x-\frac{y}{2})$。所以 $\mathrm{d}z=f'(x-\frac{y}{2})(\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\mathrm{d}y)$，从而

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-2\frac{\partial z}{\partial y}.$$

因此

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0.$$

□

注：(1) 如果求解微分方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，先做因式分解 $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial y}\right)$。再做变量替换 $u=x+ay,v=bx+y$，则对 $z=f(x+ay,bx+y)$，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial y}\right)z\\
=&\frac{\partial}{\partial y}\left(f^{(1,0)}(u,v)+f^{(0,1)}(u,v)b+2f^{(1,0)}(u,v)a+2f^{(0,1)}(u,v)\right)\\
=&f^{(2,0)}(u,v)(a+2a^2)+f^{(1,1)}(u,v)(1+ab+4a)+f^{(0,2)}(u,v)(b+2).
\end{aligned}
$$

取 $a=0$，$b=-2$，则 $0=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}+2\frac{\partial}{\partial y}\right)z=f^{(1,1)}(u,v)$，解得

$$z=g(u)+h(v)=g(x)+h(-2x+y).$$

(2) 也可以设 $w=\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}$，则 $\frac{\partial w}{\partial y}=0$，从而 $w=w(x)$。再解一阶微分方程

$$\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=w(x).$$

我们用**特征线法**求解这个一阶偏微分方程。考虑 $z(x(t),y(t))$，对 t 求导，得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial z}{\partial y}y'(t),$$

于是取 $x(t)=x_0+t,y(t)=y_0+2t$，因此

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(x_0+t,y_0+2t)=w(x_0+t),$$

从而

$$z(x_0+t,y_0+2t)=z(x_0,y_0)+\int_0^t w(x_0+s)\mathrm{d}s,$$

于是

$$z(x,y)=z(0+x,y-2x+2x)=z(0,y-2x)+\int_0^x w(s)\mathrm{d}s=h(y-2x)+g(x).$$

(3) 二阶偏微分方程 $Az^{(2,0)}+Bz^{(1,1)}+Cz^{(0,2)}=0$ 称为**双曲型方程**，如果 $B^2-4AC>0$。双曲型方程总可以经适当换元分解为两个一阶线性偏微分方程组成的方程组，对后者可以用特征线法求解。

例 11. 设函数 $z=(x+2y)^{xy}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解.

$$
\begin{aligned}
z&=\mathrm{e}^{xy\ln(x+2y)}.\\
\frac{\partial z}{\partial x}&=\mathrm{e}^{xy\ln(x+2y)}\left[y\ln(x+2y)+\frac{xy}{x+2y}\right]\\
\frac{\partial z}{\partial x}&=\mathrm{e}^{xy\ln(x+2y)}\left[x\ln(x+2y)+\frac{2xy}{x+2y}\right]
\end{aligned}
$$

□

例 12. 求 $f(x,y)$ 使 $\mathrm{d}f(x,y)=y^2\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+2y\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y$。

解. 直接凑。

$$\begin{aligned}
&y^2\mathrm{e}^{x+y}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+2y\mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y\\
=&y^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}\mathrm{e}^x+y^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^x\mathrm{e}^y\mathrm{d}y^2\\
=&y^2\mathrm{e}^y\mathrm{d}\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x\mathrm{d}\left[y^2\mathrm{e}^y\right]\\
=&\mathrm{d}\big(y^2\mathrm{e}^{x+y}\big),
\end{aligned}$$

所以函数 $f(x,y)=y^2\mathrm{e}^{x+y}+C$。 □

解. 通过路径积分得到。

$$f(x,y)=f(x,0)+\int_0^y f'_y(x,t)\mathrm{d}t=f(0,0)+\int_0^x f'_x(s,0)\mathrm{d}s+\int_0^y f'_y(x,t)\mathrm{d}t.$$

其中

$$f'_x(x,y)=y^2\mathrm{e}^{x+y},\quad f'_y(x,y)=y^2\mathrm{e}^{x+y}+2y\mathrm{e}^{x+y}.$$

□

注：如果存在可微函数 f 使得 $\mathrm{d}f=M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y$，则称 f 为 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y$ 的一个**原函数**。此时，微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的通解就是 $f(x,y)=C$。

问题：$y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$ 是否有原函数？为什么？你能给出 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y$ 具有原函数的一个必要条件吗？判断 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y$ 是否有原函数的问题将在第二型曲线积分时解决。

例 13. 设 $f\in C^1(\mathbb{R}^2)$，且 $f(x,x^2)\equiv 1$。

1. 若 $f'_x(x,x^2)=x$，求 $f'_y(x,x^2)$；
2. 若 $f'_y(x,y)=x^2+2y$，求 $f(x,y)$。

解. (1) 为避免符号引起歧义，我们记 $f'_1(x,y)$ 表示在点 (x,y) 处对 f 的第一个自变量求偏导数，记 $f'_2(x,y)$ 表示在点 (x,y) 处对 f 的第二个自变量求偏导数。于是 $f'_1(x,x^2)=1$。

对 $f(x,x^2)\equiv 1$ 求导得到

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(f(x,x^2)\Big)=f'_1(x,x^2)\cdot 1+f'_2(x,x^2)\cdot 2x=0,$$

所以当 $x\neq 0$ 时，$f'_2(x,x^2)=-\frac{1}{2}$。再由 f 偏导数连续，得到对任意 x，$f'_2(x,x^2)=-\frac{1}{2}$。

(2) 视 x 固定，对 y 用 Newton-Leibniz 公式

$$\begin{aligned}
f(x,y)&=f(x,x^2)+\int_{x^2}^y f'_y(x,t)\mathrm{d}t=1+\int_{x^2}^y(x^2+2t)\mathrm{d}t\\
&=1+x^2(y-x^2)+(y^2-x^4)=x^2y+y^2+1-2x^4.
\end{aligned}$$

也可以用不定积分，

$$f(x,y)=\int f_y'(x,y)\mathrm{d}y=x^2y+y^2+C,$$

但要**注意**这里 C 是相对于 y 而言的常数，它应该是关于 x 的函数。所以

$$f(x,y)=x^2y+y^2+C(x).$$

再把条件 $f(x,x^2)=1$ 代入，得到

$$1=x^2x^2+x^4+C(x),$$

得到 $C(x)=1-2x^4$。所以 $f(x,y)=x^2y+y^2+1-2x^4$。

为了避免把 C 误当作常数，建议学生使用 Newton-Leibniz 公式，尽量避免使用不定积分。 □

注： 多元微积分中的符号常给学生造成困惑。二元函数 f 经过函数复合后成为一元函数 $g(x)=f(x,x^2)$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(f(x,x^2)\Big)$ 是这个一元函数的导数，即 $g'(x)$，也就是

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,(x+t)^2)-f(x,x^2)}{t}.$$

$f_x'(x,x^2)$ 是二元函数 $f(x,y)$ 对第一个自变量 x 的偏导数在点 (x,x^2) 处的值，即

$$f_x'(x,x^2)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,x^2)-f(x,x^2)}{t}.$$

二者的含义是不同的，前者是先取值后求导，后者是先求导后取值。

例 14. 求函数 $f(x,y)=x^2-y^2$ 在 $P(1,1)$ 点沿与 x 轴成 $\frac{\pi}{3}$ 角方向的方向导数。

解. 方向为 $\mathbf{v}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$。

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,1)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\frac{1}{2}+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\frac{\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}$$

□

例 15. 求函数 $f(x,y)=1-\Big(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\Big)$ 在 $P(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 点沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在该点的内法方向的方向导数。

解. 曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 即 $f(x,y)=0$，梯度 $\nabla f(P)=\Big(-\frac{\sqrt{2}}{a},-\frac{\sqrt{2}}{b}\Big)^T$ 是该曲线在点 $P(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 处的法向量。

沿梯度方向，f 的值增大，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 的值减小，所以梯度方向恰好是曲线内法向，其方向向量为 $\mathbf{n}=\frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|}$。

函数 f 在点 P 处沿向量 $\mathbf{n}$ 的方向导数为

$$\nabla f(P)\cdot\mathbf{n}=\nabla f(P)\cdot\frac{\nabla f(P)}{\|\nabla f(P)\|}=\|\nabla f(P)\|=\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{2}{b^2}}.$$

□

例 16. 设函数 $z=\arctan\frac{x-y}{x+y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\mathrm{d}z$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解.

$$x-y=(x+y)\tan z$$

两边求微分

$$\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=\tan z(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)+(x+y)(1+\tan^2 z)\mathrm{d}z,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\frac{1-\tan z}{(x+y)(1+\tan^2 z)}\mathrm{d}x-\frac{1+\tan z}{(x+y)(1+\tan^2 z)}\mathrm{d}y\\&=\frac{1-\frac{x-y}{x+y}}{(x+y)\left(1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2\right)}\mathrm{d}x-\frac{1+\frac{x-y}{x+y}}{(x+y)\left(1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2\right)}\mathrm{d}y\\&=\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

□

另解. 记 $u=\frac{x-y}{x+y}$，则 $z=\arctan u$，由链式法则，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+u^2}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}\frac{2y}{(x+y)^2}=\frac{y}{x^2+y^2},$$

同理可得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-x}{x^2+y^2}$。从而 $\mathrm{d}z=\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

□

例 17. 若函数 $f(u)$ 有二阶导数，$z=\frac{1}{x}f(xy)+yf(x+y)$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f'(xy)x+f(x+y)+yf'(x+y)=f'(xy)+f(x+y)+yf'(x+y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=yf^{(2)}(xy)+f'(x+y)+yf^{(2)}(x+y).$$

□