习题讨论课8题目：第二型曲线积分与 Green 公式

一. 全微分（有势场）、保守场（积分和路径无关）和无旋条件

【知识要点】

1. $\int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$，与路径无关。

2. （环量-旋度形式的 Green 公式）$\oint_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \iint \mathrm{rot}\,\mathbf{F} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，对应于微分形式的积分：
$$\int_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}(P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}Q) = \iint_D (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
旋度 $\mathbf{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = Q_x - P_y$。

3. 积分与路径无关（保守场）$\Leftrightarrow$ 全微分（梯度向量场，有势场）$\Rightarrow$（区域单连通时，$\Leftrightarrow$） 无旋场（$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0$，$P_y = Q_x$）

例 1. 计算积分
$$\int_{(1,\pi)}^{(2,\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y,$$
其中路径为沿任一条不与坐标轴相交的曲线。

例 2. 设 f 为可微函数满足：$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$，且积分 $\int_L \omega$ 与路径无关，其中 $\omega = (x + xy\sin x)\mathrm{d}x + \frac{f(x)}{x}\mathrm{d}y$。

1. 求 f；

2. 对(1)中求得的 f，求函数 $u = u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u = \omega$；

3. 对(1)中求得的 f，求$\int_{A(\pi,1)}^{B(2\pi,0)} \omega$。

例 3. 设 $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$，满足 $f'(0) = 0$，且使得
$$[f(x) + y(x - f(x))]\mathrm{d}x + f'(x)\mathrm{d}y$$
是全微分，且该微分形式由 $A(-1,1)$ 到 $B(1,0)$ 逐段光滑曲线 L 上积分的值为 $\frac{\pi^2}{8}$。求 f。

二. 用 Green 公式化曲线积分为重积分

例 4. 设 L^+ 为 $|x| + |y| = 1$，逆时针为正向。计算线积分
$$I = \oint_{L^+} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2 + y^2}.$$

例 5. 设函数 f 在上半平面 $D=\{(x,y)|\,y>0\}$ 内有连续偏导数，且

$$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y),\quad \forall t>0,\forall(x,y)\in D.$$

求证：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$$\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

例 6. 设 $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R})$，$f>0$，$D$ 为圆心在原点的单位开圆盘。证明：

1. $$\int\limits_{\partial D^+} xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x=\int\limits_{\partial D^+}-yf(x)\mathrm{d}x+\frac{x}{f(y)}\mathrm{d}y;$$

2. $$\int\limits_{\partial D^+} xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\geq 2\pi.$$

三. 散度公式，梯度和 Laplace 和调和函数

【知识要点】

1. （通量-散度形式的 Green 公式）$\oint_{\partial D}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}l=\iint\operatorname{div}\mathbf{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，对应于微分形式的积分：

   $$\int_{\partial D}P\mathrm{d}y-Q\mathrm{d}x=\iint_D\mathrm{d}(P_x\mathrm{d}x-Q_y\mathrm{d}Q)=\iint_D(P_x+Q_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

   散度 $\operatorname{div}\mathbf{F}=\nabla\cdot\mathbf{F}=P_x+Q_y$。

2. 梯度 ∇f：

   $$\nabla f\cdot\mathbf{v}=\mathrm{d}f(\mathbf{v})=\frac{\partial f}{\partial\mathbf{v}}.$$

3. 散度的 Leibniz 公式

   $$\nabla\cdot(u\mathbf{F})=\nabla u\cdot\mathbf{F}+u\nabla\cdot\mathrm{F}.$$

4. Laplace

   $$\Delta u=\operatorname{div}\nabla f=\nabla\cdot\nabla\mathbf{F}.$$

5. 调和函数 $\Delta u=0$。

例 7. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为有界开区域，它的边界 ∂D 是逐段光滑曲线，$\mathbf{n}$ 是 ∂D 的外单位法向量，设函数 $f\in\mathscr{C}^1(\overline{D})$，且 f 在 D 内为调和函数，即 $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\equiv 0$，$\forall(x,y)\in D$。求证：

1. $\oint_{\partial D}\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}\mathrm{d}l=0$；

2. $\oint_{\partial D} f\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}l = \iint\limits_{D} \|\nabla f\|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

3. 若在边界 ∂D 上，$f(x,y)\equiv 0$，求证 $f(x,y)\equiv 0$，$\quad\forall (x,y)\in D$。

例 8. 设 $D_t = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big|\ x^2+y^2 < t^2, t>0\}$，$f\in\mathscr{C}(\overline{D_t})\cap\mathscr{C}^1(D_t)$，$f(0,0)=1$。若 f 在 D_t 上满足方程

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}f,$$

记 $\mathbf{n}$ 为 ∂D_t 的单位外法向量，求极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{1-\cos t}\oint_{\partial D_t}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}l.$$

例 9 (教材P.229，第9题)**.** 设 u 为开集 $D\subset\mathbb{R}^2$ 内的调和函数：$\Delta u=0,\forall (x,y)\in D$。证明：

1. $$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi R}\oint_L u(x,y)\mathrm{d}l$$

   其中 L 为以 (x_0,y_0) 为圆心，R 为半径的位于 $D\subset\mathbb{R}^2$ 内的圆周。

2. $$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\oint_{\partial D}\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial \mathbf{n}}-\ln r\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathrm{d}l$$

   其中 $\mathbf{n}$ 为 D 的单位外法向量，$(x_0,y_0)\in D$，$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$；