

清华大学2022春季学期

电路原理C

第3讲

电路的等效变换

目录

1 电阻等效变换

1.1 串并联

1.2 平衡电桥

1.3 Y- Δ 变换

1.4 含受控源二端网络的入端电阻

对等效
的理解

2 电源等效变换

2.1 理想独立源等效变换

2.2 实际独立源等效变换

两个电路等效：两个电路 u - i 关系的**形式**和**参数**均一样



1 电阻等效变换

1.1 串并联

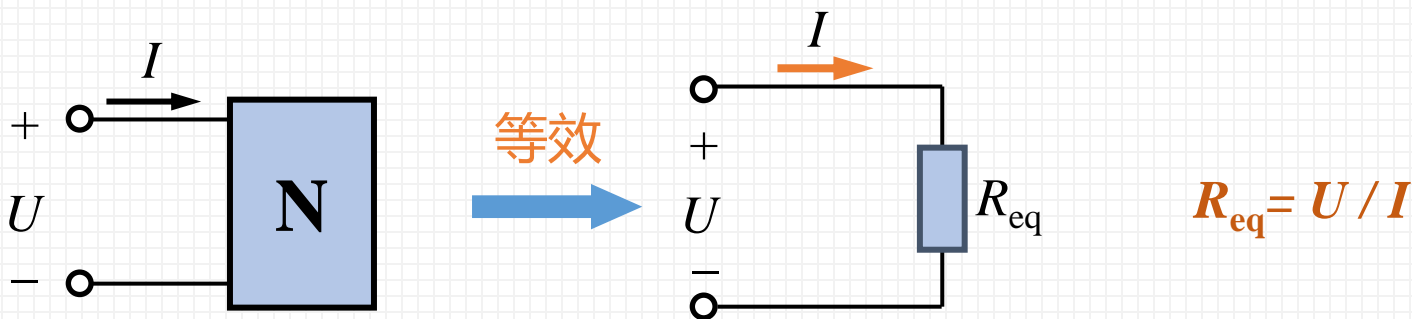
二端网络：与外部只有两个接线端相连的网络。

无独立源二端网络：网络内部没有独立源的二端网络。

理由？

戴维南定理L5

一个无独立源二端电阻网络可以用端口的**入端电阻**来等效。



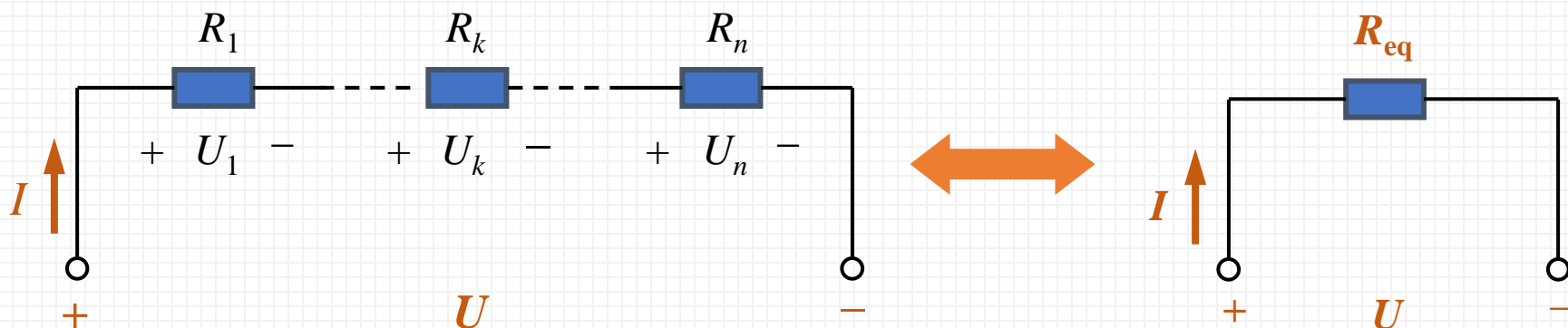
两个(子)电路等效：(从外边看进来)两个(子)电路具有**相同的 $u-i$ 关系**
(形式和参数)



I、电阻元件串联 (无分叉地首尾相连)

等效电路具有相同的端口 $u-i$ 关系等效电阻 R_{eq}

等效的相对性: 对 (端口) 外等效, 对内不等效



KVL

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_k + \dots + U_n$$

欧姆定律

$$U_k = R_k I \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$U = (R_1 + R_2 + \dots + R_k + \dots + R_n) I$$

$$U = R_{eq} I$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

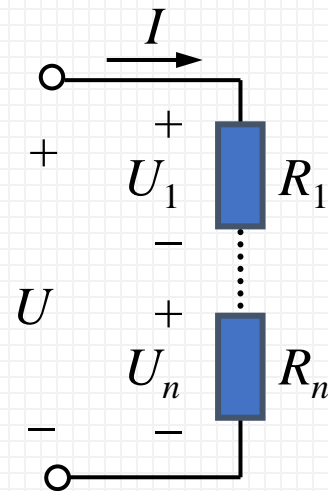


串联电阻元件的分压

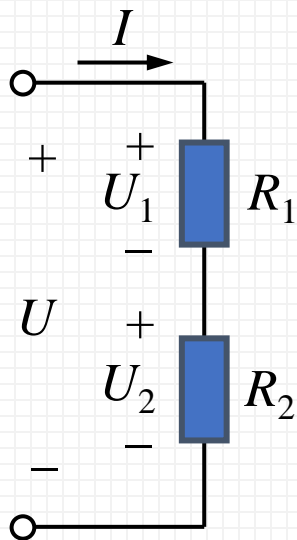
$$\frac{U_k}{U} = \frac{R_k I}{R_{\text{eq}} I} = \frac{R_k}{R_{\text{eq}}}$$

$$U_k = \frac{R_k}{R_{\text{eq}}} U$$

电阻越大，压降越大

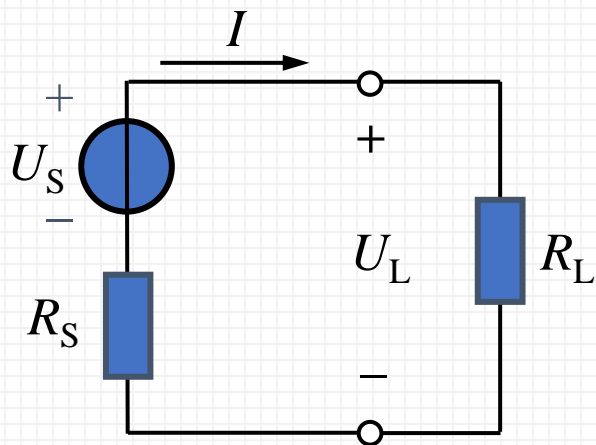


例



$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U$$

$$U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U$$



U_S : 电压形式表示的信号源

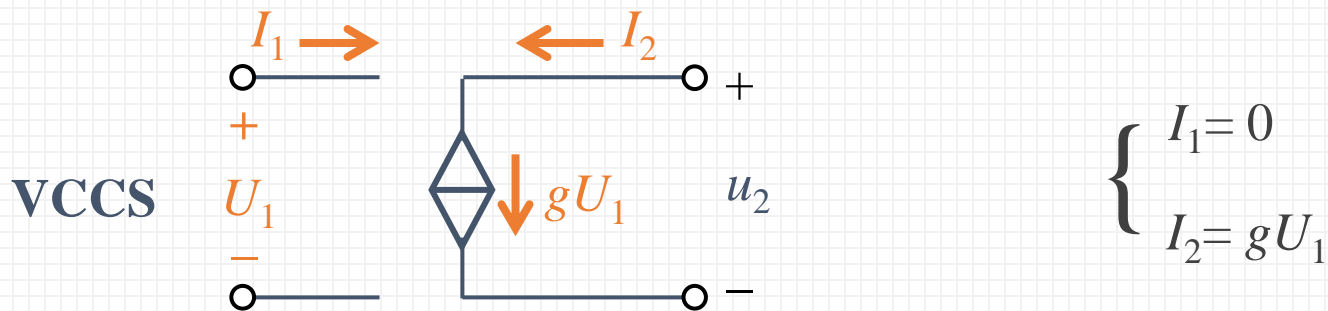
R_S : 信号源内阻

R_L : 负载电阻

$$U_L = \frac{R_L}{R_L + R_S} U_S$$

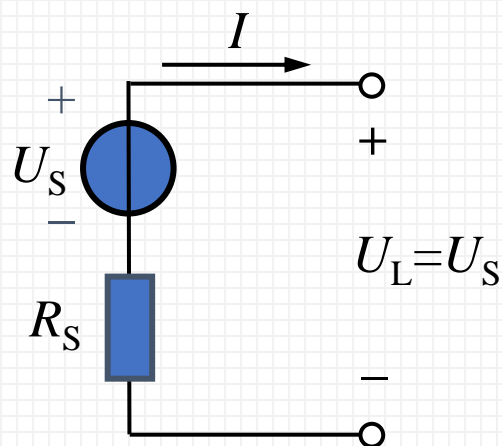
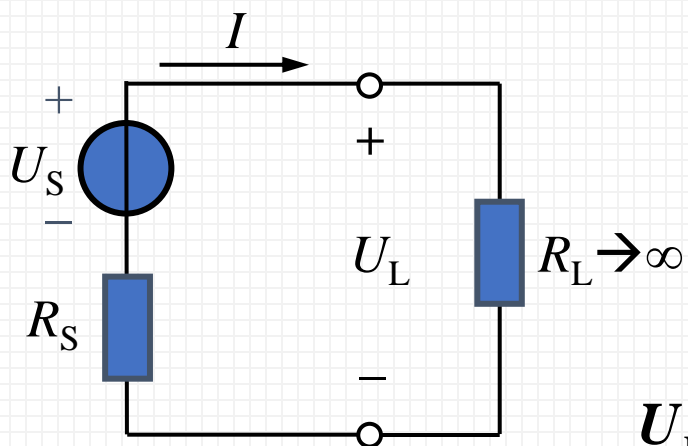
负载电阻 R_L 相对越**大**, 负载上得到的信号越**大**。

电压源**内阻** R_S 相对越**小**, 为负载提供信号的能力越**强**。

L2中, **压控电流源** Voltage Controlled Current Source (**VCCS**)

为什么要有一个**开路**的控制端口?

希望对电路进行无损的电压采样! L3讨论

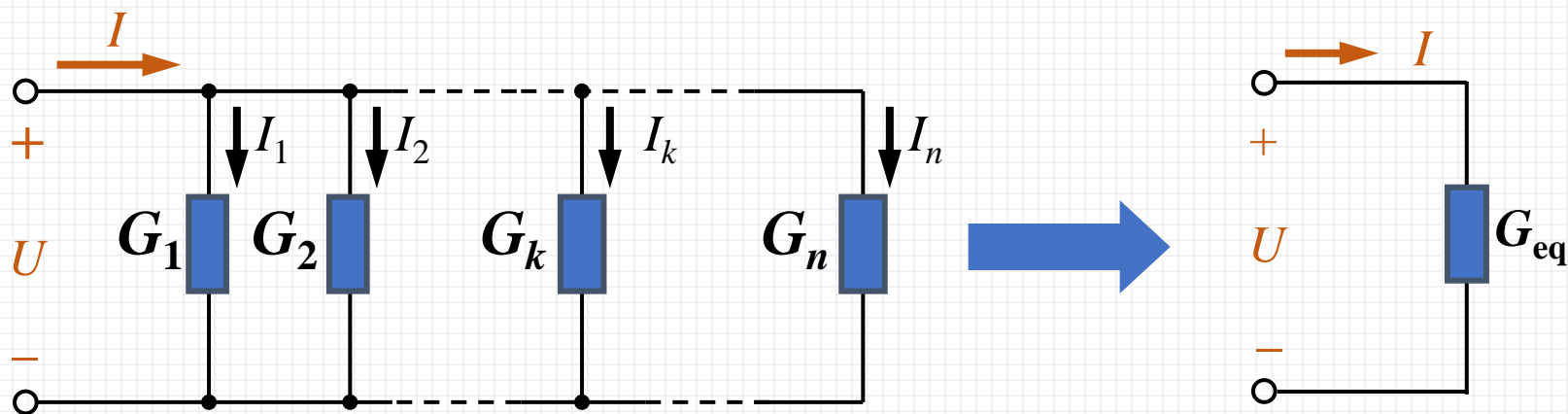




II、 并联电阻元件（元件共用两个接线端）

等效电导 G_{eq}

把所有关于串联电阻的结论中：
 U 改为 I 、 I 改为 U ， R 改为 G 即可



KCL $I = I_1 + I_2 + \dots + I_k + \dots + I_n$

$$I_k = G_k U$$

$$= UG_1 + UG_2 + \dots + UG_n = U(G_1 + G_2 + \dots + G_n) = U G_{eq}$$

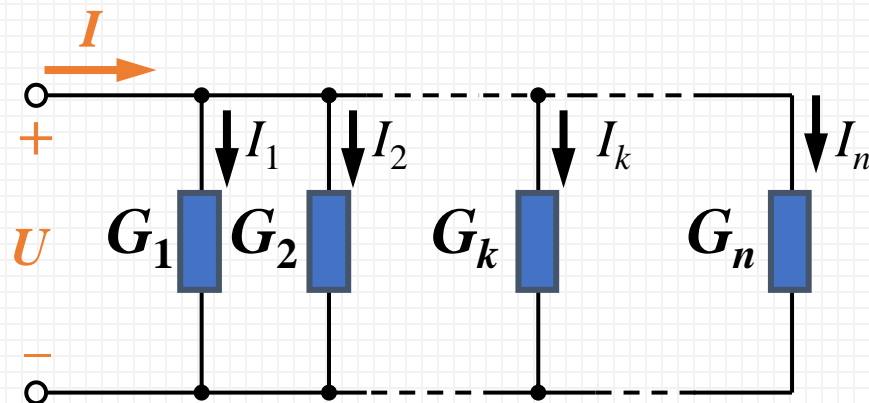
$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$



并联电阻器的分流

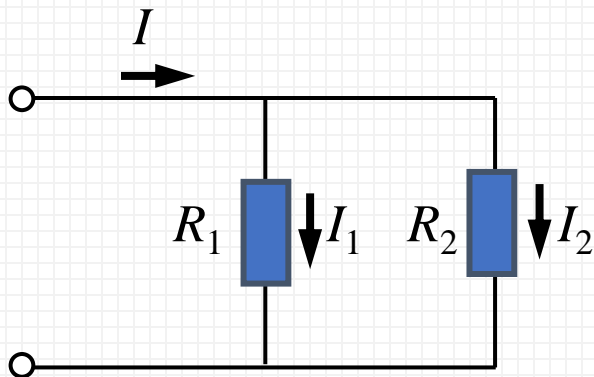
$$\frac{I_k}{I} = \frac{G_k U}{G_{\text{eq}} U} = \frac{G_k}{G_{\text{eq}}}$$

$$I_k = \frac{G_k}{G_{\text{eq}}} I$$



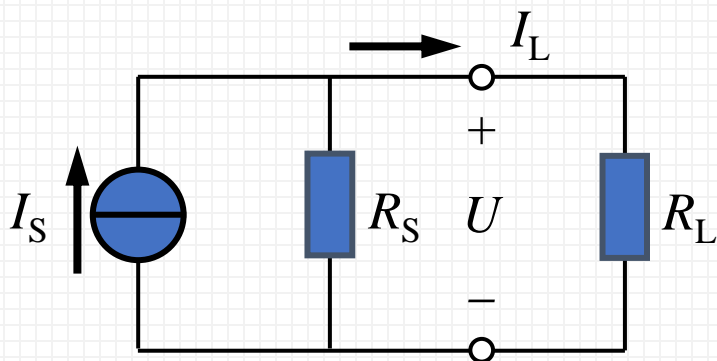
电导越大（电阻越小），电流越大。

例



$$I_1 = \frac{1/R_1}{1/R_1 + 1/R_2} I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$$

$$I_2 = \frac{1/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$



I_S : 电流形式表示的信号源

R_S : 电流信号源的内阻

R_L : 负载电阻

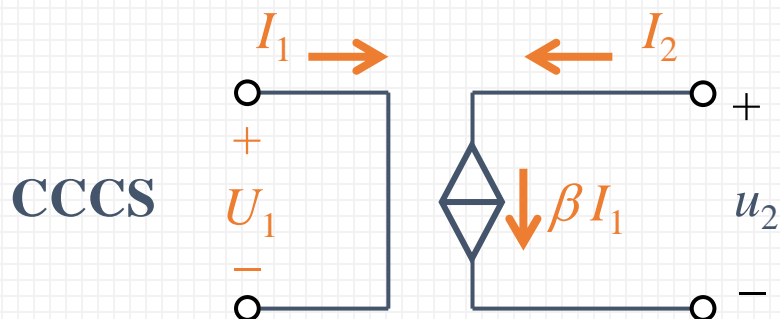
$$I_L = \frac{R_S}{R_L + R_S} I_S$$

负载电阻 R_L 相对越小, 负载上得到的信号越大

电流源内阻 R_S 相对越大, 为负载提供信号的能力越强



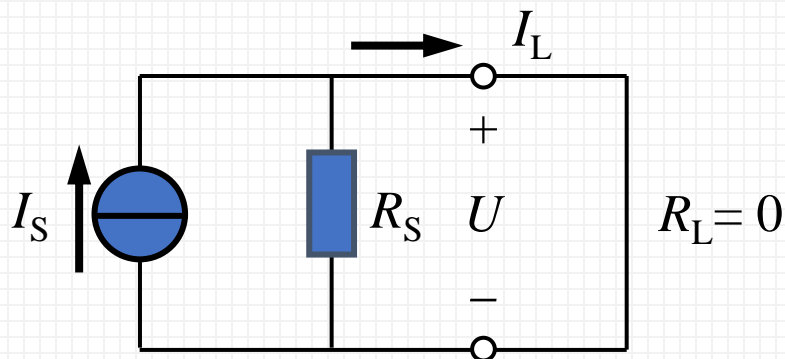
L2中 流控电流源 Current Controlled Current Source (CCCS)



$$\begin{cases} U_1 = 0 \\ I_2 = \beta I_1 \end{cases}$$

β : 转移电流比

短路的控制端口：无损的电流采样 L3讨论

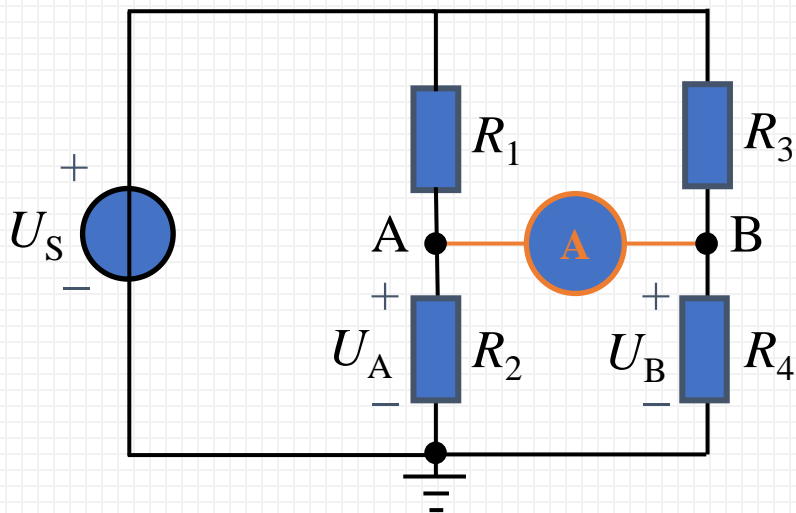


$$I_L = \frac{R_S}{R_L + R_S} I_S$$

$$I_L = I_S$$



1.2 平衡电桥



$$U_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S$$

$$U_B = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_S$$

如果

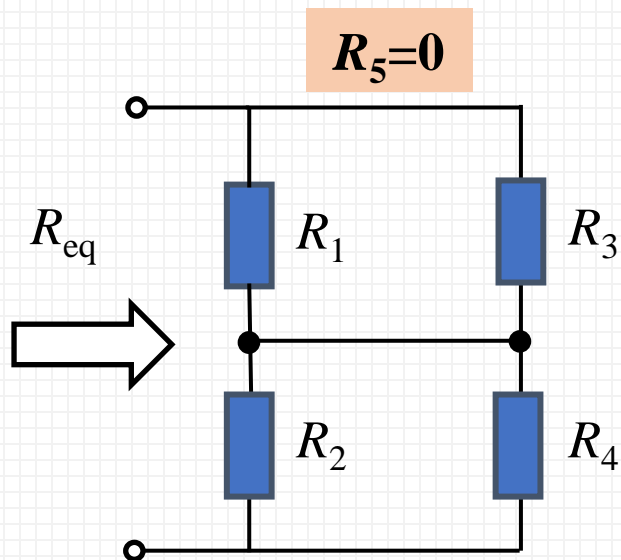
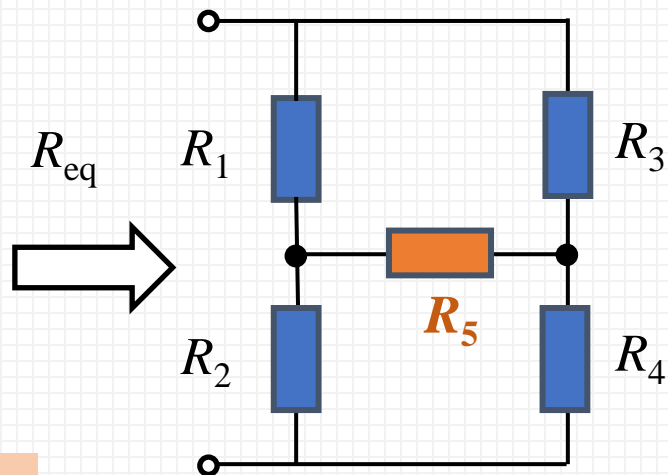
$$R_1 R_4 = R_2 R_3$$

$$U_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S = \frac{R_2}{\frac{R_2 R_3}{R_4} + R_2} U_S = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_S = U_B$$

A-B为 “等电位点”

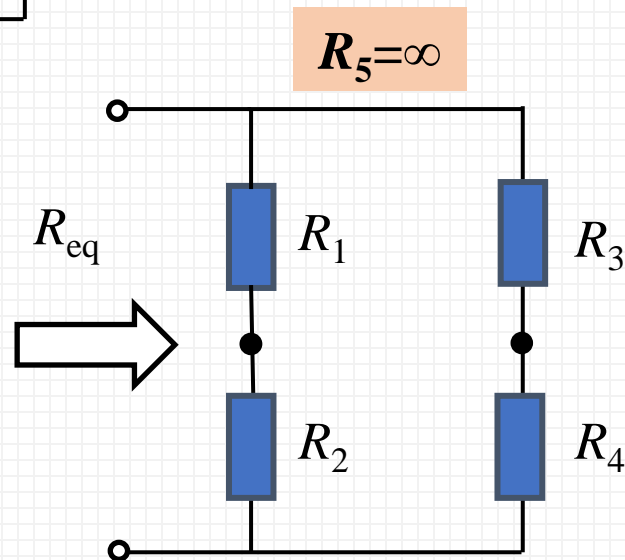
A-B间(开路)电压为零

等电位点间接任意电阻(含开短路)不影响
电路的电压电流分布 (L5解释)



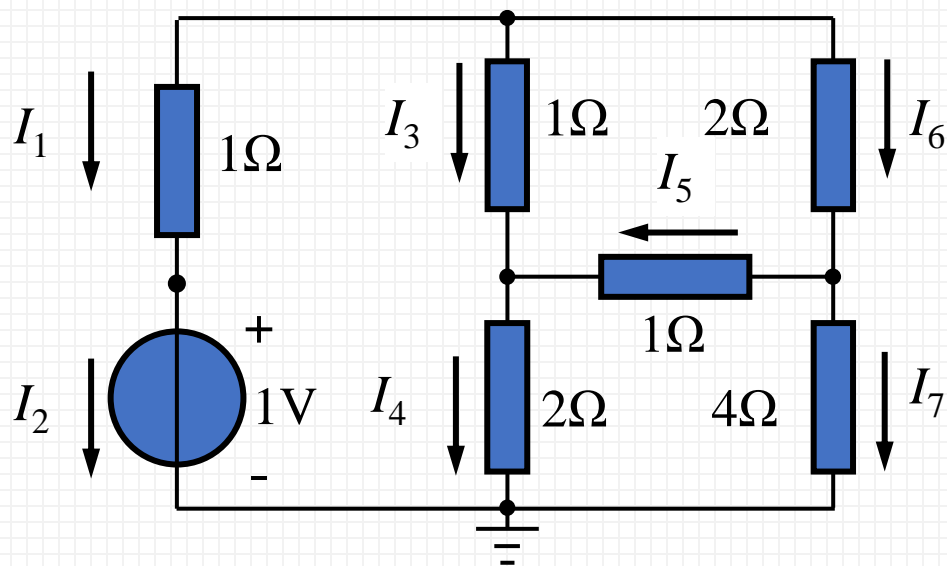
$$\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

$$\underline{\underline{R_1 R_4 = R_2 R_3}}$$

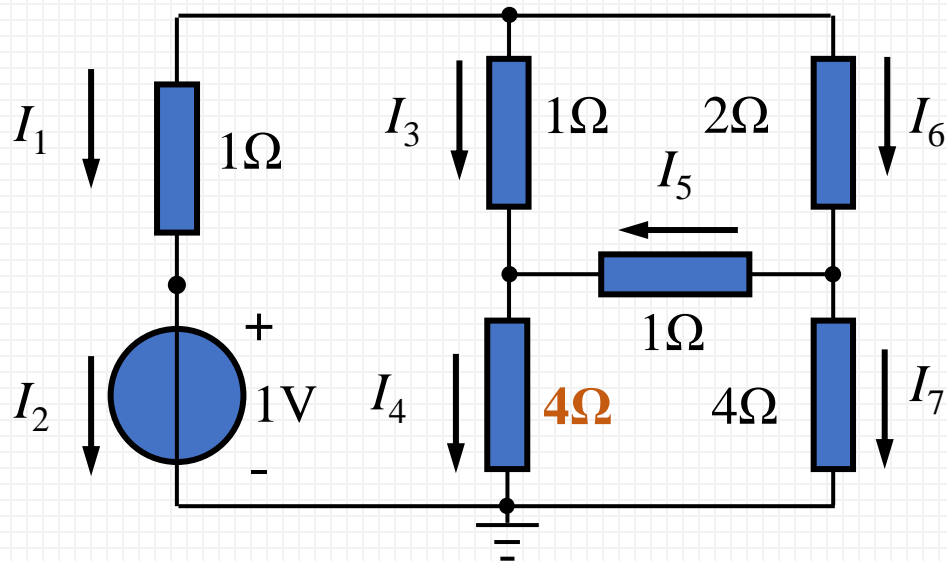


$$\frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{(R_1 + R_2) + (R_3 + R_4)}$$

是否平衡电桥?

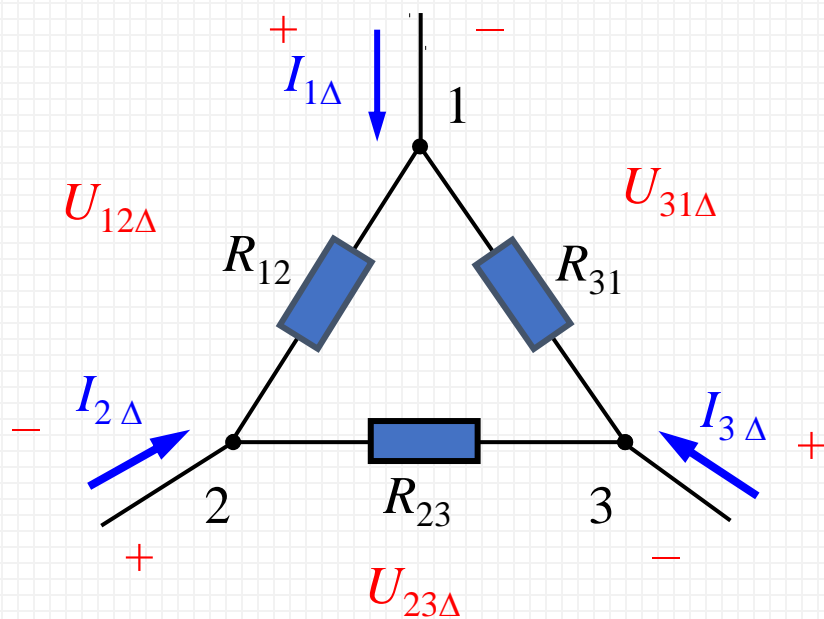


如何求解?

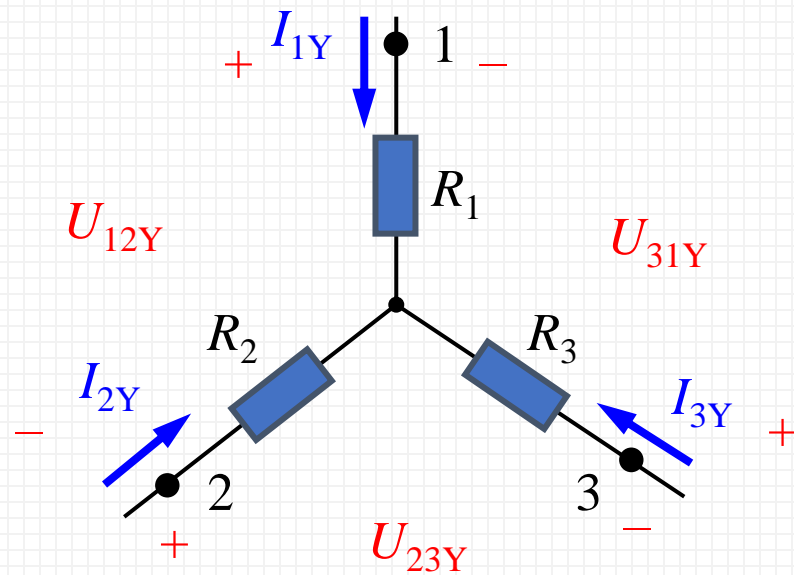




1.3 Y— Δ 变换



Δ 网络

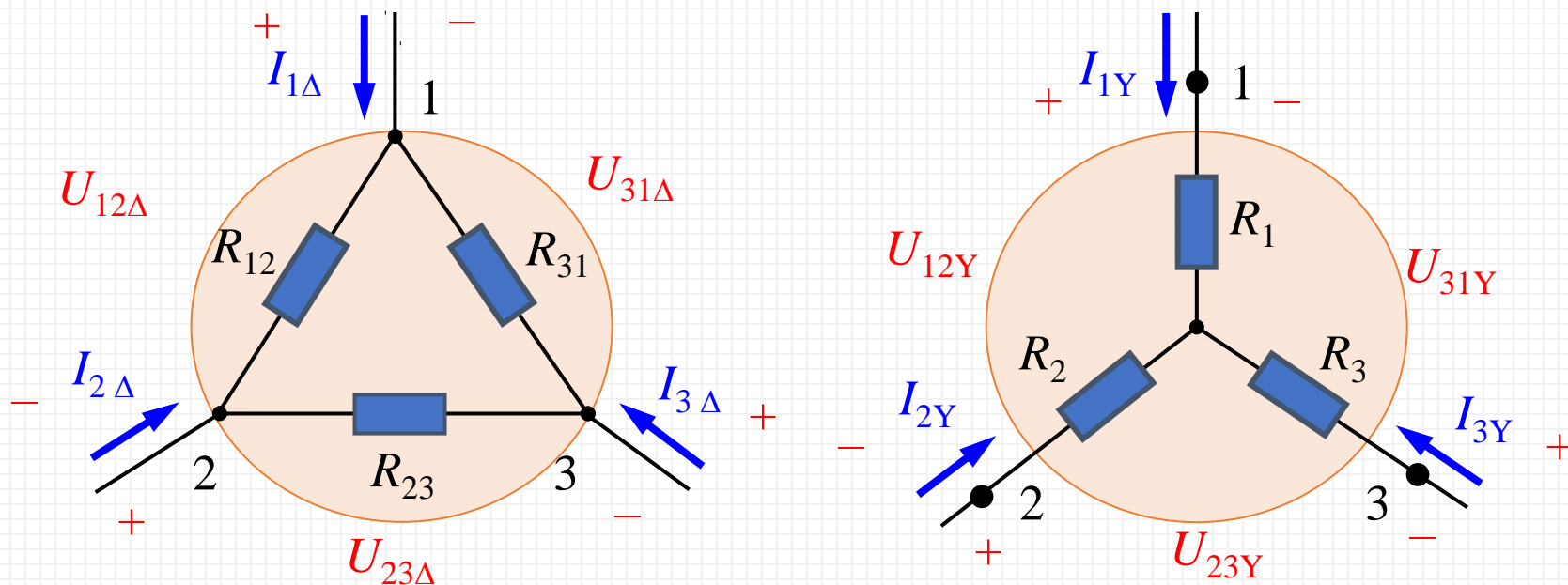


Y 网络

在怎样的条件下，上面的 Δ 和Y网络对外等效？



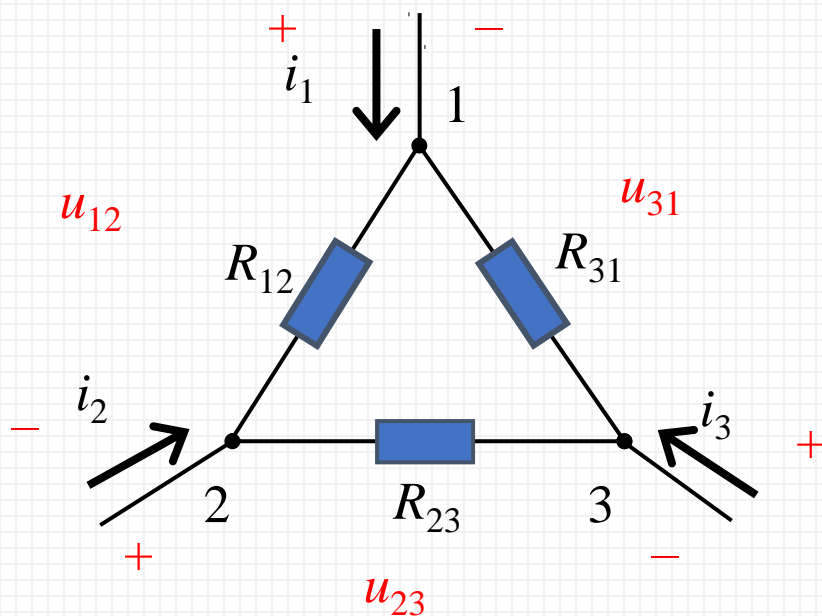
Δ —Y 等效条件: 等效电路具有相同的端口 u - i 关系



$(I_{1\Delta}, I_{2\Delta}, I_{3\Delta}, U_{12\Delta}, U_{23\Delta}, U_{31\Delta})$ 之间满足的关系

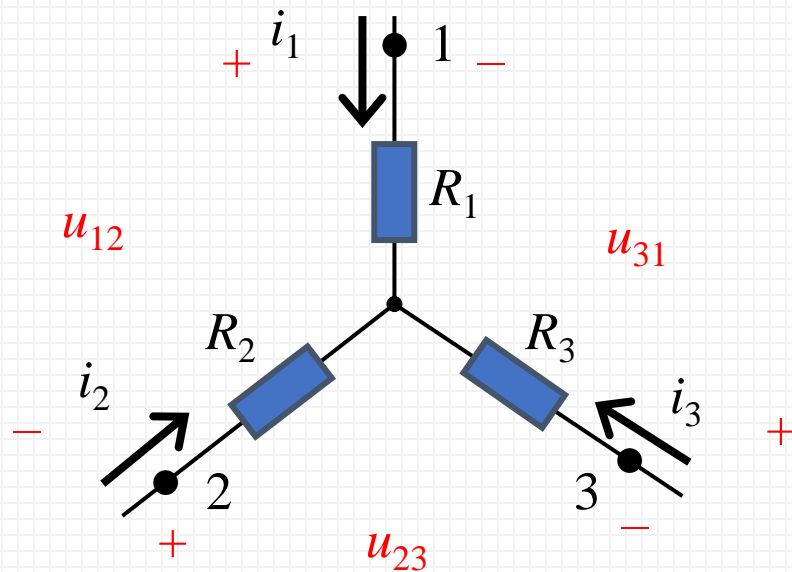


$(I_{1Y}, I_{2Y}, I_{3Y}, U_{12Y}, U_{23Y}, U_{31Y})$ 之间满足的关系



Δ : 用电压来表示电流

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= u_{12}/R_{12} - u_{31}/R_{31} \\ i_2 &= u_{23}/R_{23} - u_{12}/R_{12} \\ i_3 &= u_{31}/R_{31} - u_{23}/R_{23} \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ u_{12} + u_{23} + u_{31} &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

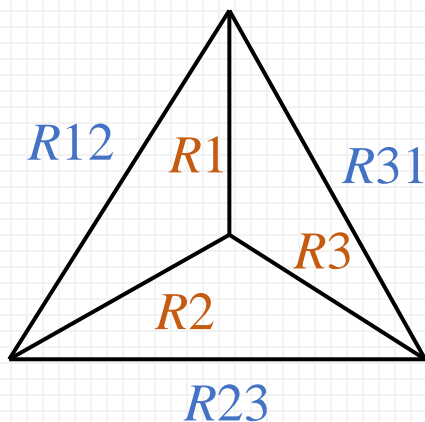


Y: 用电流来表示电压

$$\left. \begin{aligned} u_{12} &= R_1 i_1 - R_2 i_2 \\ u_{23} &= R_2 i_2 - R_3 i_3 \\ u_{31} &= R_3 i_3 - R_1 i_1 \\ i_1 + i_2 + i_3 &= 0 \\ u_{12} + u_{23} + u_{31} &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

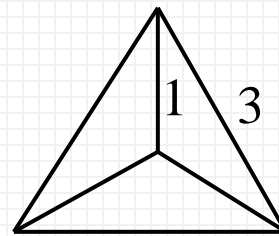


特别地： Δ 或Y的三个电阻具有相同阻值



$Y \rightarrow \Delta$

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3} \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \\ R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_3 R_1}{R_2} \end{aligned}$$



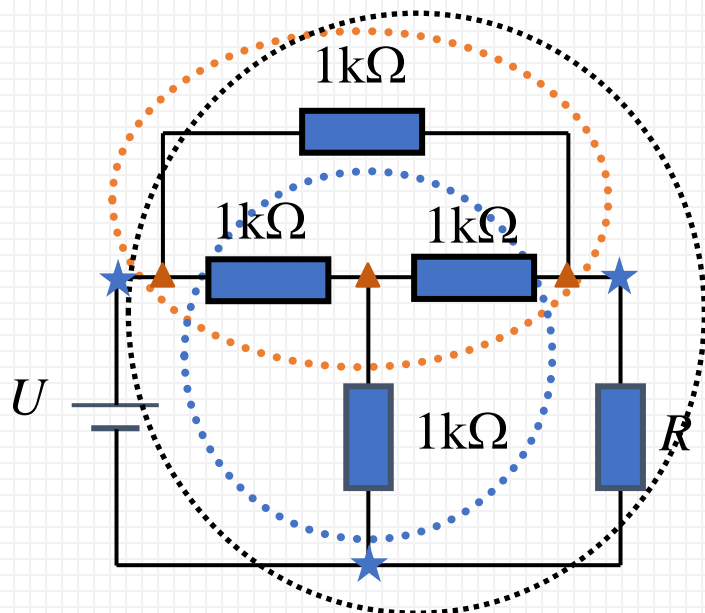
$\Delta \rightarrow Y$

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_2 &= \frac{R_{23} R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \\ R_3 &= \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \end{aligned}$$

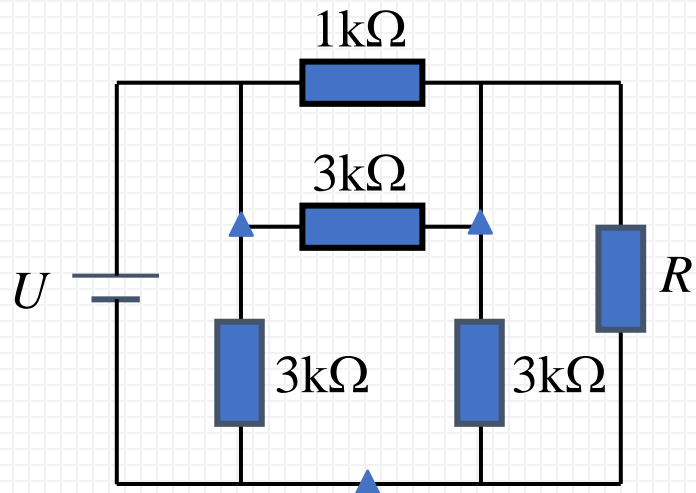
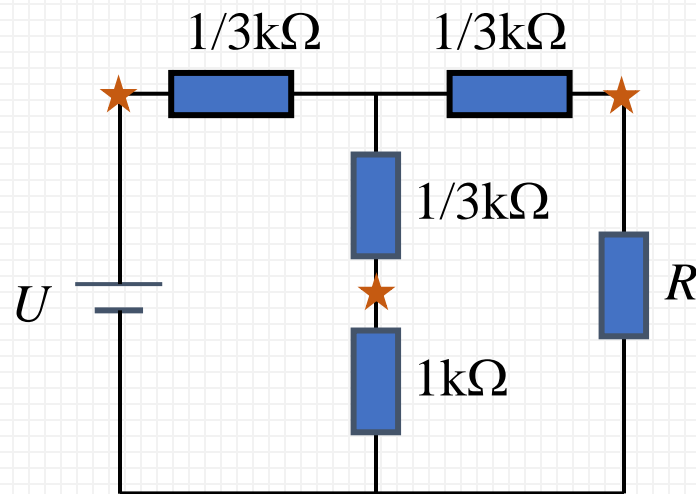
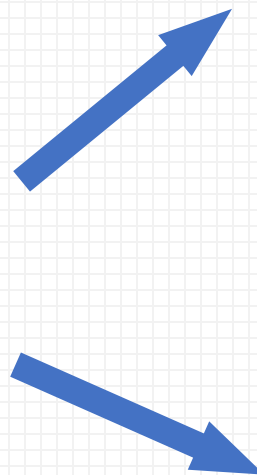
$$R_{\Delta} = 3R_Y$$



例：求 R 上电压



电桥



等效的**相对性**：只对端口以外的子电路等效



1.4 含受控源二端网络的入端电阻

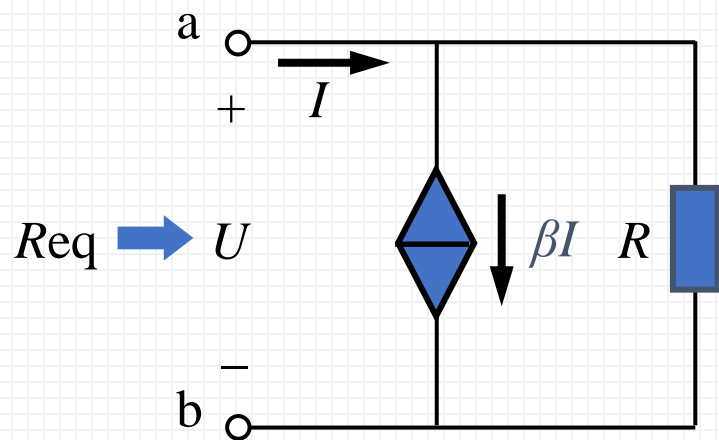
求入端
等效电阻



求端口上的
电压电流关系

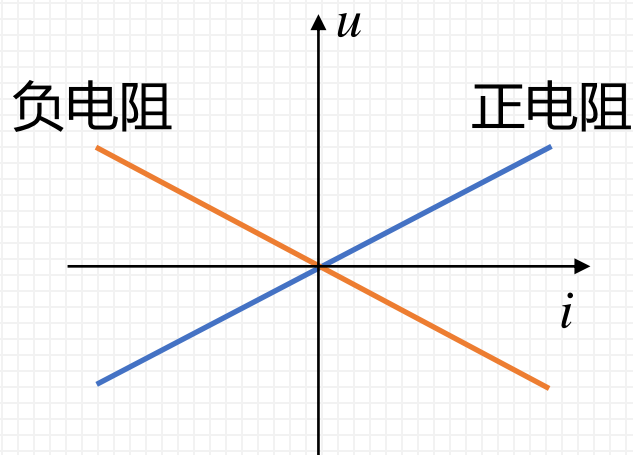


加压求流或
加流求压



$$I = \beta I + \frac{U}{R} \quad \longrightarrow \quad U = R(1 - \beta)I$$

$$R_{eq} = U/I = (1 - \beta)R$$



当 $\beta < 1$, $R_{ab} > 0$, 正电阻

当 $\beta > 1$, $R_{ab} < 0$, 负电阻



第1部分总结： 如何求二端网络的入端电阻

串并联

平衡电桥

Δ —Y变换

加压求流

加流求压

电阻二端网络求解顺序

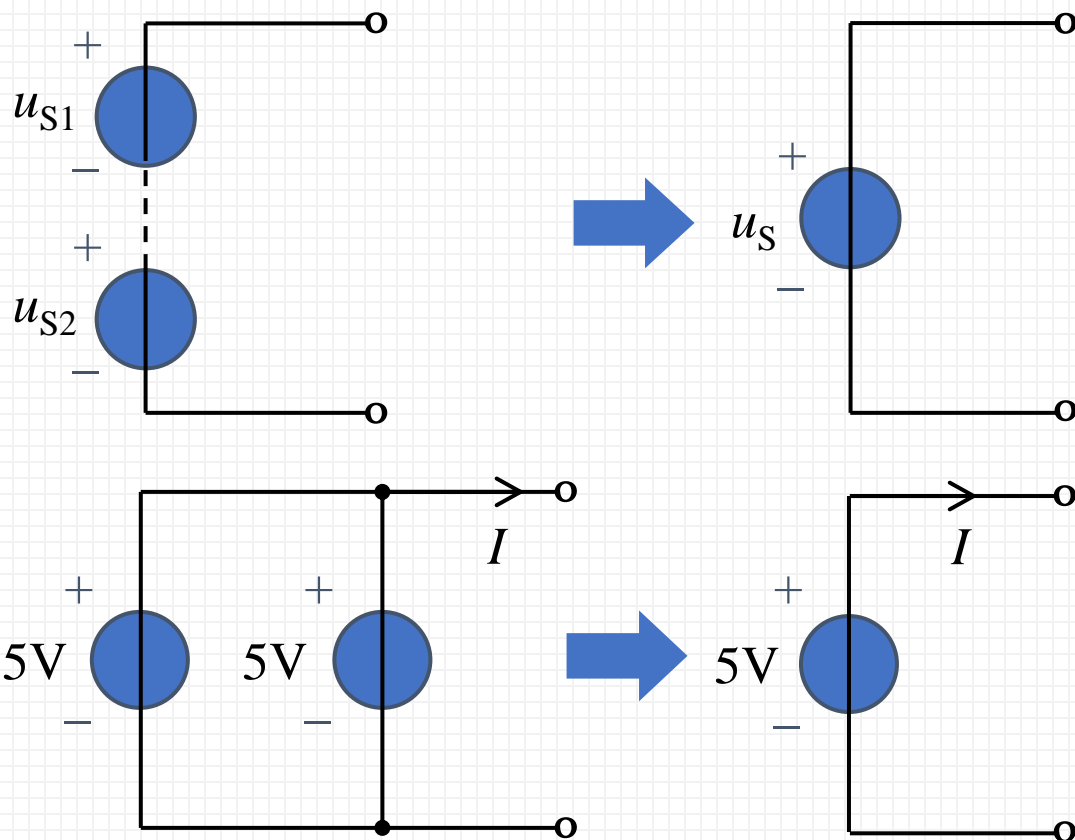
含受控源二端网络入端电阻



2 电源的等效变换

2.1 理想独立源的串并联

1、理想电压源的串并联



串联:

$$u_S = \sum u_{Sk}$$

(注意参考方向)

$$u_S = u_{S1} + u_{S2}$$

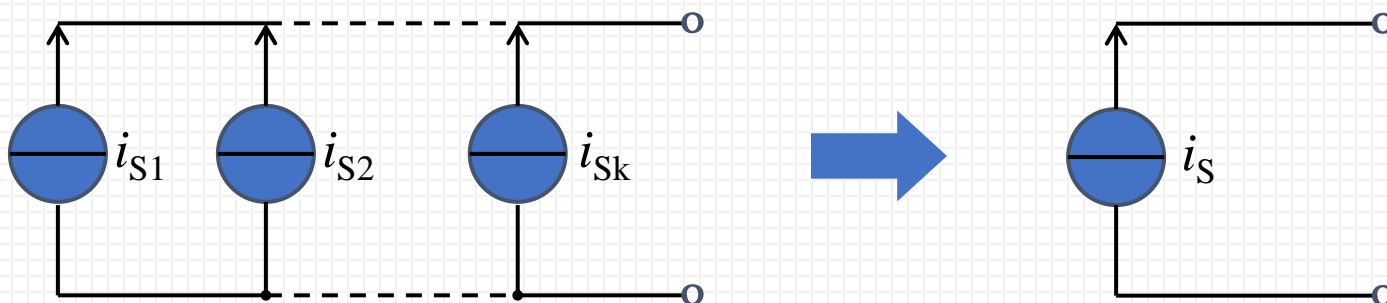
并联:

电压相同的电压源才能并联，且每个电源的电流不确定。

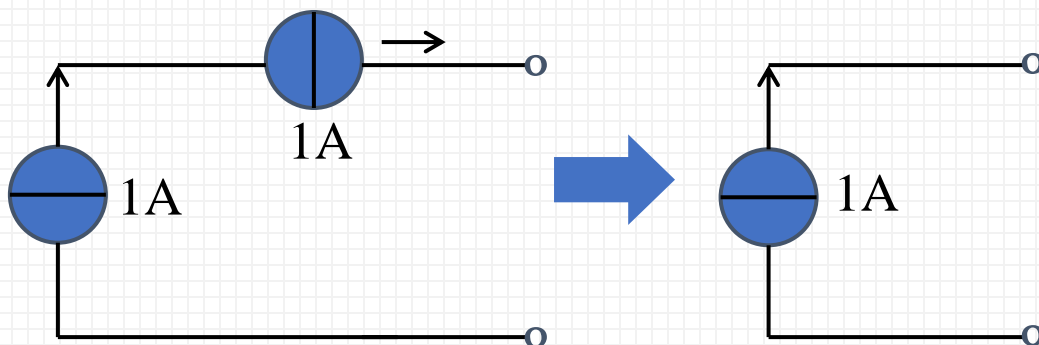


2、理想电流源的串并联

并联： 可等效成一个理想电流源 i_S （注意参考方向）



$$i_S = \sum i_{Sk}, \quad i_S = i_{S1} + i_{S2} + \cdots + i_{Sk}$$

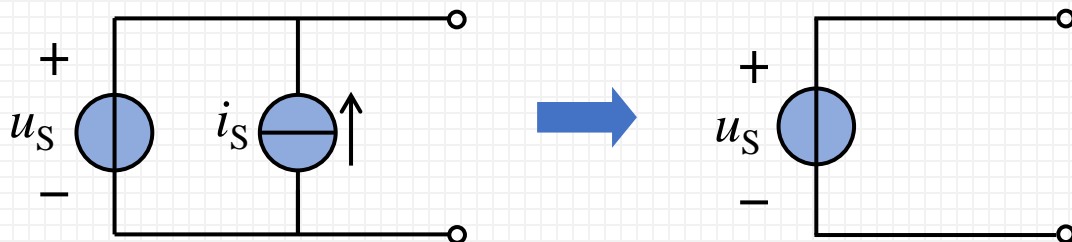


串联：

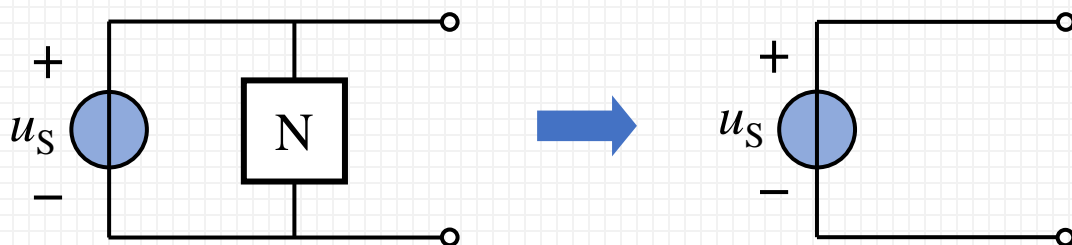
电流相同的理想电流源才能串联, 并且每个电流源的端电压不能确定。



例1:



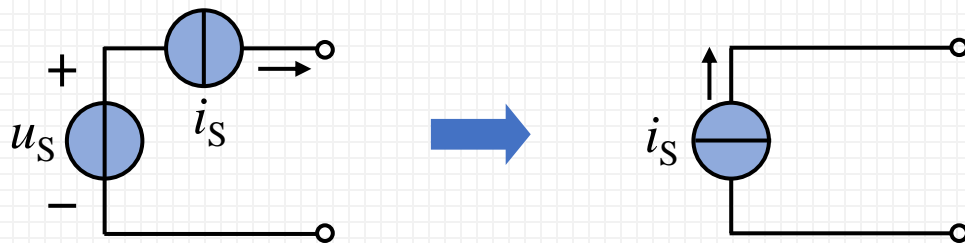
推广:



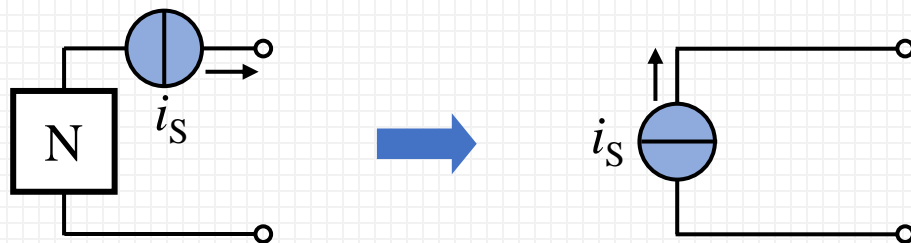
和电压源并联的支路（网络）对除电压源以外的电路求解没有影响，它仅仅改变流过电压源的电流。



例2:



推广:

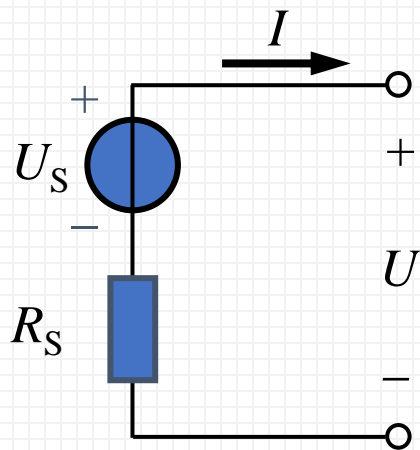


和电流源串联的支路（网络）对除电流源以外的电路求解没有影响，它仅仅改变加在电流源两端的电压。

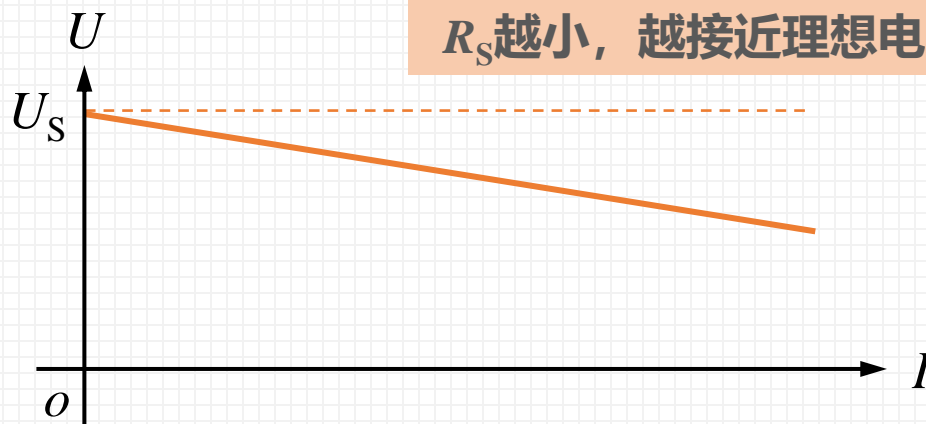


2.2 实际独立源的等效变换

I、实际独立电压源



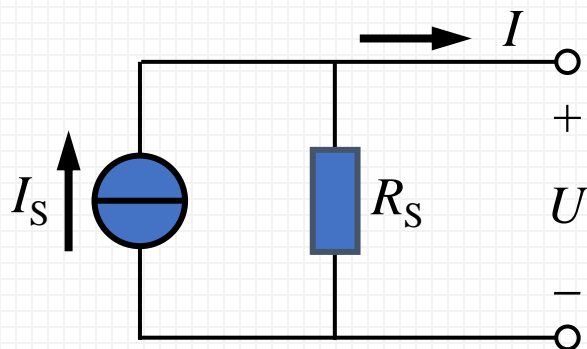
$$U = U_s - R_s I$$



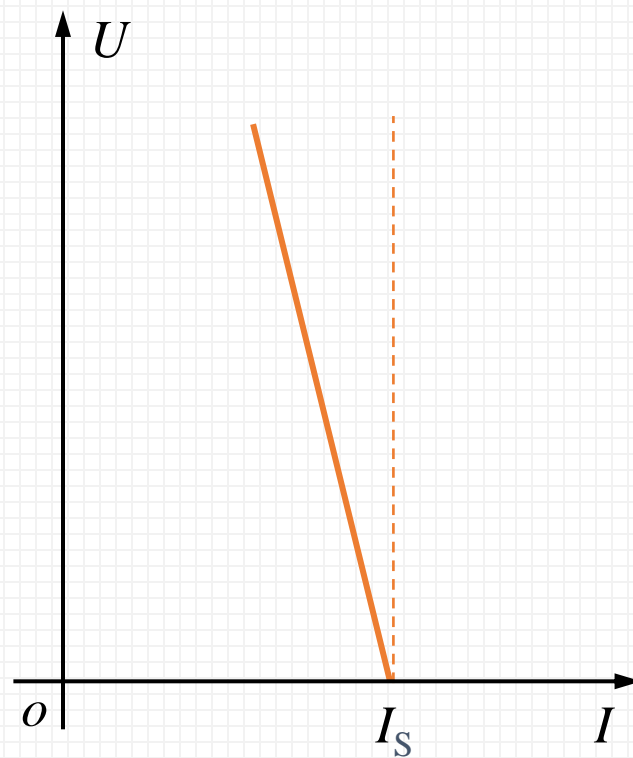
R_s 越小, 越接近理想电压源特性曲线



II、实际独立电流源



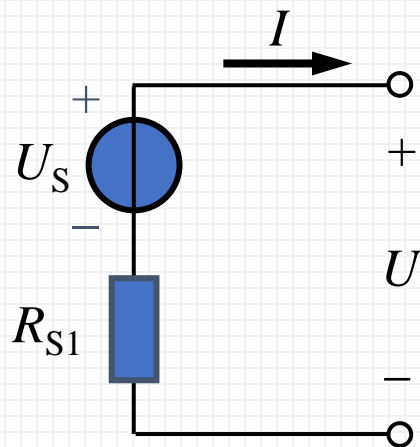
$$I = I_S - U/R_S$$



R_S 越大，越接近理想电流源特性



III、电源等效变换



二者如何等效?

$$U = U_S - R_{S1} I$$



$$U = R_{S2} I_S - R_{S2} I$$

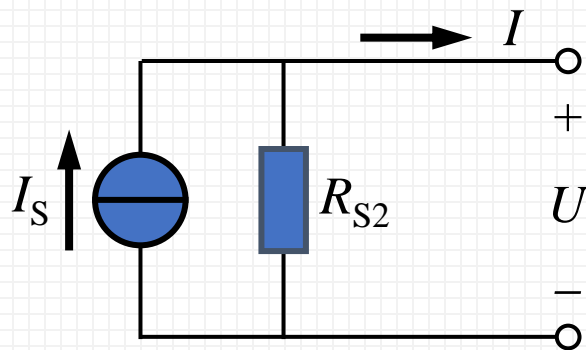


$$I = I_S - U/R_{S2}$$

$$I_S = U_S / R_S$$

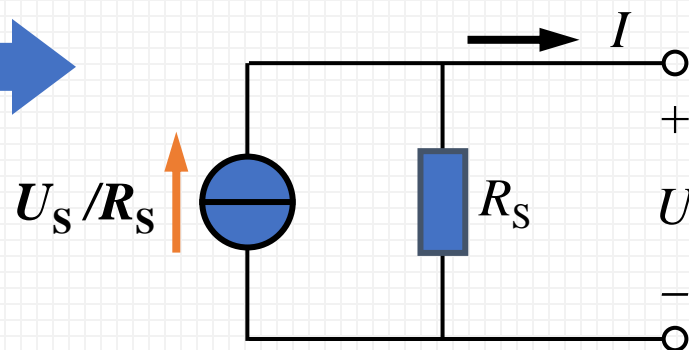
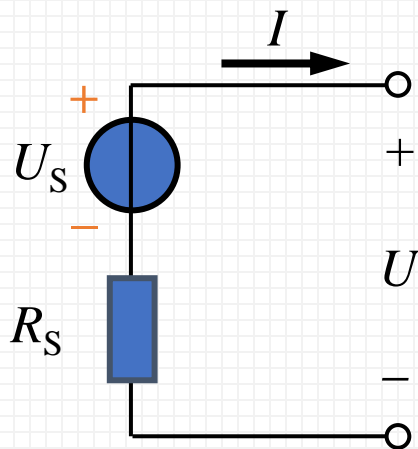
$$U_S = R_S I_S$$

$$R_{S1} = R_{S2} = R_S$$

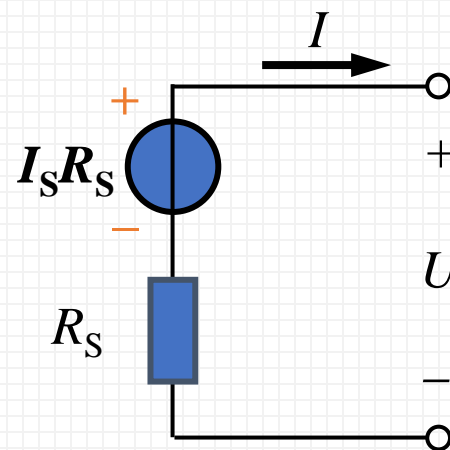
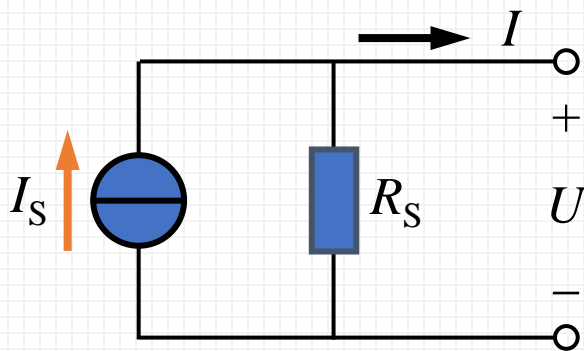




等效的相对性

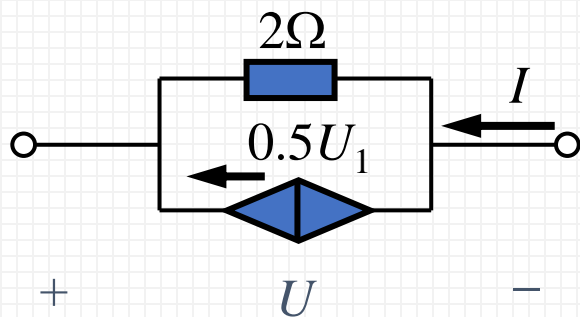


注意参考方向

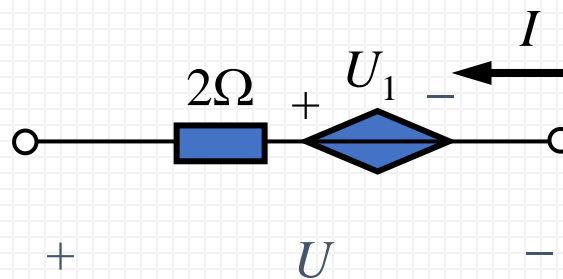




讨论：受控源的等效变换

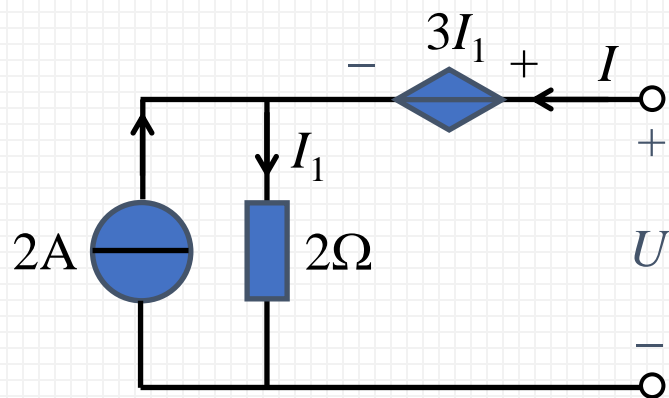


成立吗？
什么条件下成立？

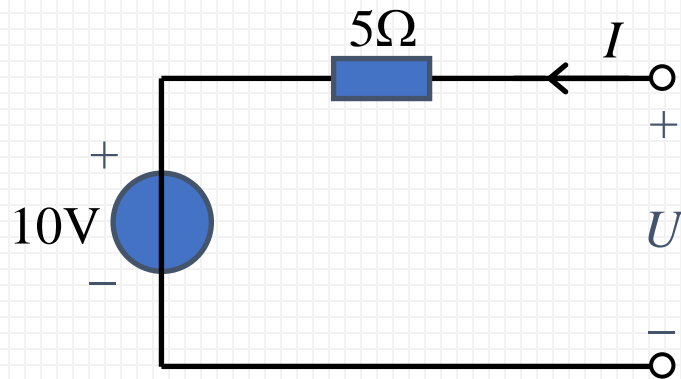
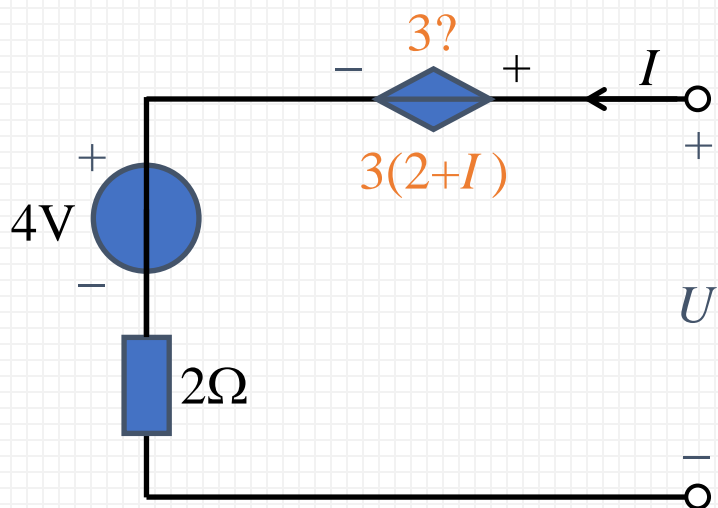




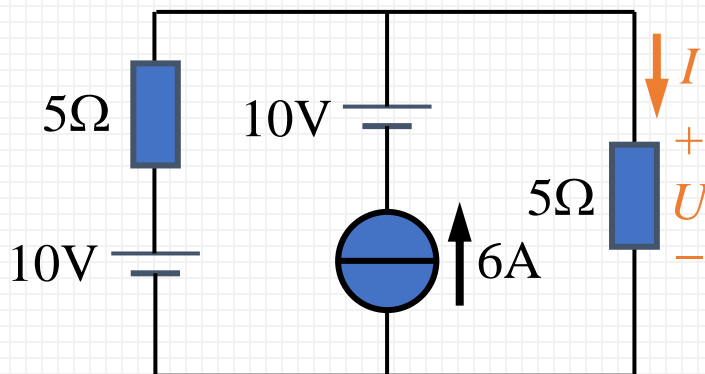
例4



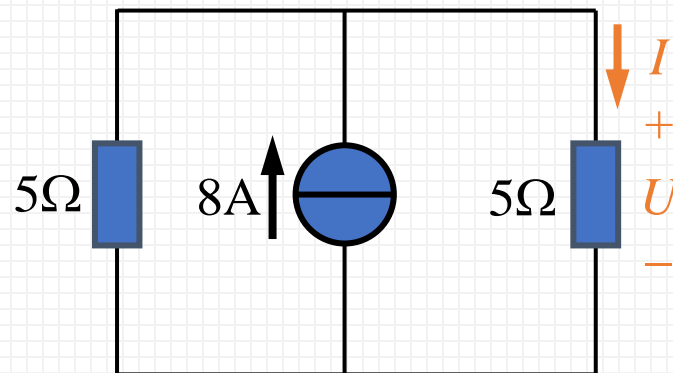
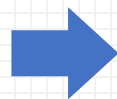
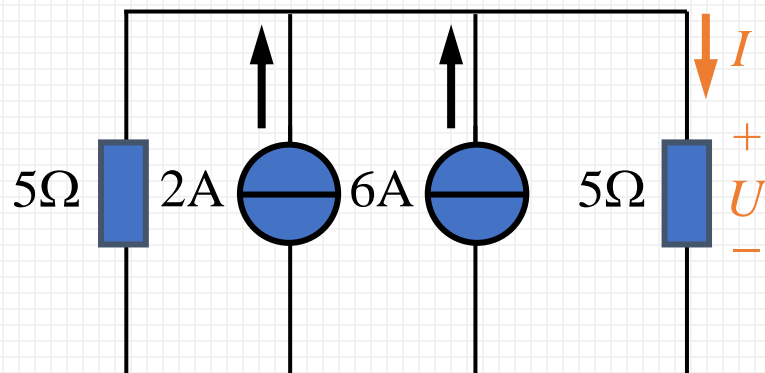
$$U = 3I_1 + 2I_1 = 5I_1 = 5(2 + I) = 10 + 5I$$



$$U = 3(2 + I) + 4 + 2I = 10 + 5I$$

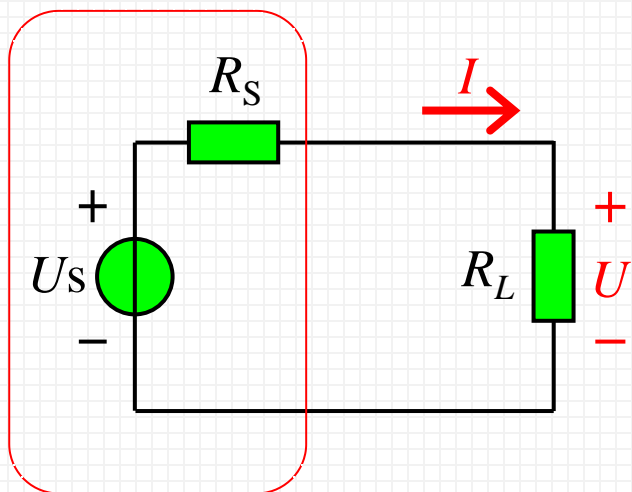
**例5 求电压 U 。**

$$U = 4 \times 5 = 20\text{V}$$





例6: 求能够获得最大功率的 R_L 并求其获得的最大功率。



解: $I = \frac{U_s}{R_s + R_L} \quad P_L = I^2 R_L = \left(\frac{U_s}{R_s + R_L} \right)^2 \cdot R_L$

$$\begin{aligned} \frac{dP_L}{dR_L} &= U_s^2 \left(\frac{1}{(R_s + R_L)^2} - \frac{2R_L}{(R_s + R_L)^3} \right) \\ &= U_s^2 \left(\frac{R_s - R_L}{(R_s + R_L)^3} \right) \end{aligned}$$

$R_L = R_s$ 是 R_L 获得最大功率的充要条件

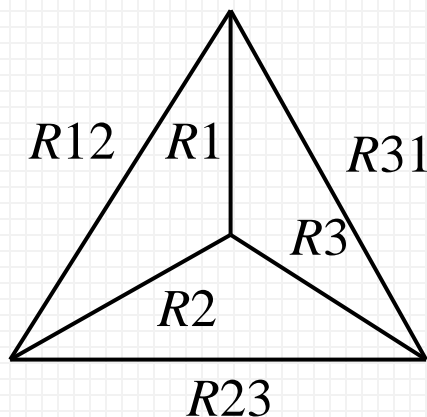
电阻匹配

$$U = \frac{U_s}{2}, \eta = 50\%, P_L = \frac{U_s^2}{4R_s}$$



小结

- 无独立源二端网络 \rightarrow 有等效电阻
 - 求等效电阻方法
 - 无受控源：串并联、桥平衡、 Δ 或Y变换
 - 有受控源：加压求流(加流求压)
- \rightarrow 思考顺序





- 与电压源并联的元件，对外无影响；与电流源串联的元件，对外无影响
- 串联分压公式、并联分流公式要记牢
- 实际电压源 \leftrightarrow 实际电流源关系要记牢

电压源与电阻
的串联



电流源与电阻
的并联

$$i_s = \frac{u_s}{R_i}, \quad G_i = \frac{1}{R_i}$$

$$u_s = \frac{i_s}{G_i}, \quad R_i = \frac{1}{G_i}$$

- 在保持端口电压、电流方向不变的前提下，电流源的电流方向从电压源的负极指向正极。