习题讨论课10题目：数项级数

热身：应该熟知一些例子

例 1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为（　　　）。

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$（B）$\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{2n})$（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

例 2. 设 $0<a_n<\frac{1}{n}$ 则下列级数中肯定收敛的是（　　　）。

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$; (B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$; (C) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$; (D) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2\ln n$

例 3. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则（　　　）。

(A) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 小于1；

(B) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 小于等于1；

(C) 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 其值小于1；

(D) 若极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 存在, 其值小于等于1。

Cauchy 收敛准则

例 4. 设常数 $\lambda\neq 0$，$a_n>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\frac{\lambda}{n})a_{2n}$（　　　）[A]。

（A）绝对收敛。（B）条件收敛。（C）发散。（D）收敛性与λ有关。

例 5. 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，$\{x_n\}$ 单调减，利用Cauchy收敛原理证明：$\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=0$。

D'Alembert 比值判别法与 Cauchy 根式判别法

例 6. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n n!}{n^n}$ 的收敛性。

例 7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$

比较法对条件收敛失效

例 8. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛，$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$。问级数$\sum_{n=1}^{\infty}y_n$是否收敛?

Leibniz，Dirichlet，Abel 判别法

例 9. 设 $a_n>0$，单调减，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？证明结论。

例 10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$

例 11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}$ $(a>0)$.

例 12. 已知任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$发散，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$ 也发散。

Taylor 展开和比阶法

例 13. 设 $a_n>0,\ p>0, \lim\limits_{n\to\infty}\left[n^p(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)a_n\right]=1$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则 p 的取值范围是（　　　）。

例 14. 设参数 $a\neq 0$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+a^2})$ 收敛性的结论是（　　　）
（A）绝对收敛。（B）条件收敛。（C）发散。（D）与参数a取值有关。

例 15. 设 $p>0$。讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$ 的收敛性。

例 16. 设 $f\in\mathscr{C}^2[-1,1]$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$。证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

例 17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$;

例 18. (常数项级数和积分的估值) 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^p}$ 的收敛性。

计算级数的和

例 19. 已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=2,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}=5$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=$（　　　）。

例 20. 设两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，记它们交点坐标的绝对值为 a_n。
（1）求这两条抛物线所围成的平面图形的面积;
（2）求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$的和。

例 21. 利用 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\to\gamma\ (n\to\infty)$，其中 γ 是 Euler 常数，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的下述更序级数的和：$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots$。