Review

- 变量替换下二重积分的计算

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

$$(x, y) \in D \leftrightarrow (u, v) \in \Omega$$

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega f(x(u, v), y(u, v)) \left| \det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

- $\det \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1 \Big/ \det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$

§4. 三重积分

- 三重积分的几何与物理背景
- 三重积分的定义
- 三重积分的性质
- 三重积分在直角坐标系下的计算
- 三重积分在柱坐标下的计算
- 三重积分的变量替换

1. 三重积分的几何与物理背景

设Ω为$\mathbb{R}^3$中有界闭区域. 与二重积分一样, 通过分划, 取点, 求*Riemann*和与取极限的过程, 可以定义三重积分.

- Ω的质量: $f(x,y,z)$为(x,y,z)处的点密度.

$$\sum_{i,j,k} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \to \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

- Ω的体积 $\iiint_{\Omega} \mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

体积微元

2. 三重积分的定义

Def. f在$\Omega=[a,A]\times[b,B]\times[c,C]$上有定义, 对$\Omega$的任意分划 $T: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=A,$

$$b=y_0<y_1<y_2<\cdots<x_m=B,$$

$$c=z_0<z_1<z_2<\cdots<z_l=C,$$

及任意标志点$P_{ijk}(\xi_{ijk},\eta_{ijk},\varsigma_{ijk})\in\Omega_{ijk}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\times[z_{k-1},z_k],1\le i\le n,1\le j\le m,1\le k\le l,$若

*Riemann*和

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(\xi_{ijk},\eta_{ijk},\varsigma_{ijk})\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$$

的极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(\xi_{ijk},\eta_{ijk},\varsigma_{ijk})\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k$$

存在,则称 f 在 Ω 上(*Riemann*)可积,记作 $f\in R(\Omega)$,

并称该极限为 f 在 Ω 上的三重积分, 记作

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{\lambda(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} f(\xi_{ijk},\eta_{ijk},\varsigma_{ijk})\Delta x_i\Delta y_j\Delta z_k .$$

其中$\iiint$是三重积分号,Ω是积分域, f是被积函数.

Def. $\Omega\subset\mathbb{R}^3$为有界闭集, f为Ω上有界函数. 若存在

$\mathrm{E}=[a,\mathrm{A}]\times[b,B]\times[c,C]$, $s.t.\ \Omega\subset\mathrm{E}$, 且

$$f_{\mathrm{E}}(x,y,z)=\begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z)\in\Omega \\ 0 & (x,y,z)\in\mathrm{E}\setminus\Omega \end{cases}\in R(\mathrm{E}),$$

则称f在Ω上Riemann可积, 且f在Ω上的积分定义为

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\mathrm{E}} f_{\mathrm{E}}(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

3. 三重积分的性质

1)(可积的充分条件)若$\mathbb{R}^3$中有界闭集Ω的边界为零体积集, f为定义在Ω上的有界函数, f在Ω上的间断点集合为零体积集, 则$f \in R(\Omega)$.

2)(线性性质) $f, g \in R(\Omega)$, 则$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g \in R(\Omega)$, 且

$$\iiint_\Omega (\alpha f + \beta g)\mathrm{dxdydz} = \alpha \iiint_\Omega f\mathrm{dxdydz} + \beta \iiint_\Omega g\mathrm{dxdydz}$$

3)(区域可加性)Ω_1,Ω_2为$\mathbb{R}^3$中有界闭集,$\Omega_1\cap\Omega_2$为零体积集,$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$,则

$$f\in R(\Omega)\Leftrightarrow f\in R(\Omega_i),i=1,2,$$

且 $$\iiint_{\Omega} f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega_1} f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_{\Omega_2} f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

4)(保序性) $f,g\in R(\Omega)$, $f\le g$,则

$$\iiint_{\Omega} f\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\le\iiint_{\Omega} g\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

5)(积分中值定理) $\Omega\subset\mathbb{R}^3$连通、有界闭,$\partial\Omega$为零体积集,

$f\in C(\Omega), g\in R(\Omega), g$不变号,则存在$(\xi,\eta,\varsigma)\in\Omega$, s.t.

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= f(\xi,\eta,\varsigma)\iiint_\Omega g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

6)(轮换不变性)设$f\in R(\Omega)$, Ω关于x,y轮换不变, 即

$(x,y,z)\in\Omega\Leftrightarrow(y,x,z)\in\Omega$,则

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega f(y,x,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

7)(对称性)设$f \in R(\Omega)$,Ω关于oxy平面对称,

- 若$f(x,y,z)$关于z为奇函数,则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0;$$

- 若$f(x,y,z)$关于z为偶函数,记Ω_1为Ω位于oxy平面上方的部分,则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

4. 三重积分在直角坐标系下的计算

1) 化为"先一后二"型累次积分

若Ω为$\mathbb{R}^3$中柱体, 分别以$z_2(x,y)$和$z_1(x,y)$为上顶下底, 在平面oxy上的投影为D_{xy},即Ω可表示为

$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_{xy},\\ z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y).\end{cases}$$

设密度函数为$f(x,y,z)$, 为计算Ω的质量, 想象把Ω压缩成平行于xy平面的薄片, 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\triangleq \iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

若D_{xy}又可表示为$D_{xy}:\begin{cases} a \le x \le b, \\ y_1(x) \le y \le y_2(x), \end{cases}$则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

其意义是先固定x和y对z积分,再固定x,对y积分,最后对x积分.

2)化为"先二后一"型累次积分

用Ω_z表示平行于oxy坐标的平面截Ω得到的截面在oxy平面的投影, Ω可以表示为

$$\Omega:\begin{cases} c \le z \le d \\ (x,y) \in \Omega_z \end{cases}.$$

设密度函数为$f(x,y,z)$, 为计算Ω的质量, 想象把Ω压缩成平行于z轴的细线, 则有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

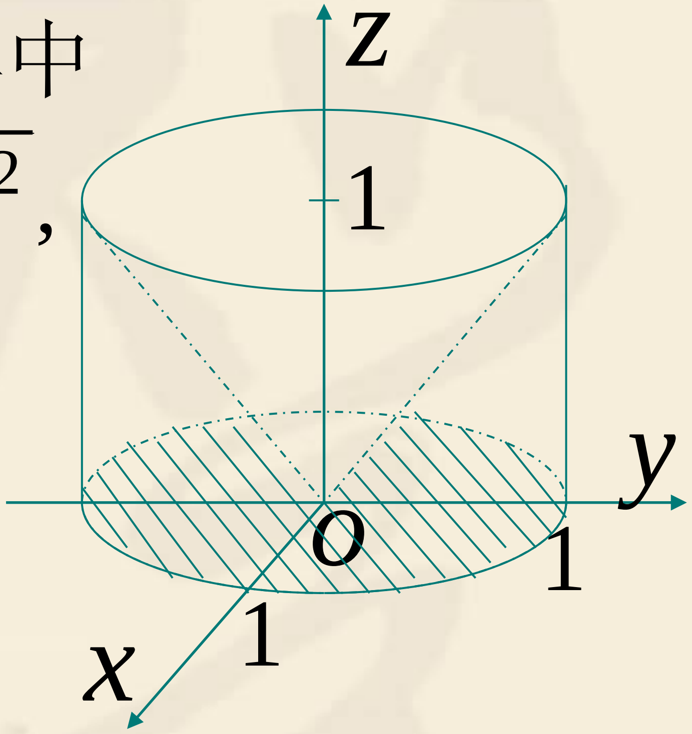
$$=\int_c^d \left[\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z$$

$$\triangleq \int_c^d \mathrm{d}z \iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例: $I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中

Ω由$x^2+y^2=1$, 曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$,

和$z=0$围成.



解法一: (″先一后二″)

$$\Omega:\begin{cases} x^2+y^2\le 1, \\ 0\le z\le\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$I=\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2)z\mathrm{d}z.$$

$$=\iint_{x^2+y^2\le 1}\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\mathrm{d}r=\frac{\pi}{6}.\square$$

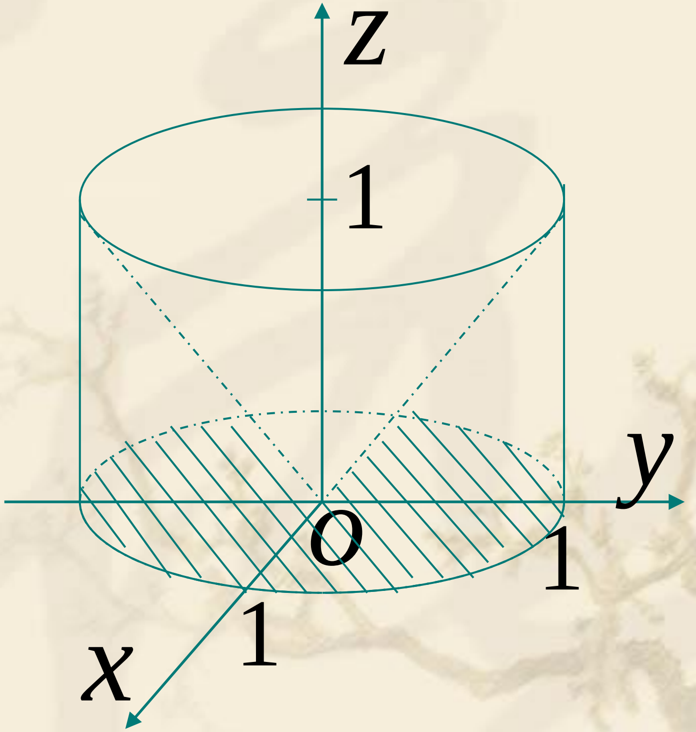
解法二:（"先二后一"） $\Omega:\begin{cases}0\le z\le 1,\\ z^2\le x^2+y^2\le 1.\end{cases}$

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}z\iint_{z^2\le x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 z\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_z^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_0^1 z\cdot\frac{1}{4}(1-z^4)\mathrm{d}z$$

$$=\pi/6.\square$$



5. 用柱坐标计算三重积分

$$\Omega \leftrightarrow \Omega^*$$

$$(x, y, z) \leftrightarrow (r, \theta, z)$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

Remark: 当积分区域在坐标平面上的投影为圆域或圆域的一部分,而被积函数具有形如

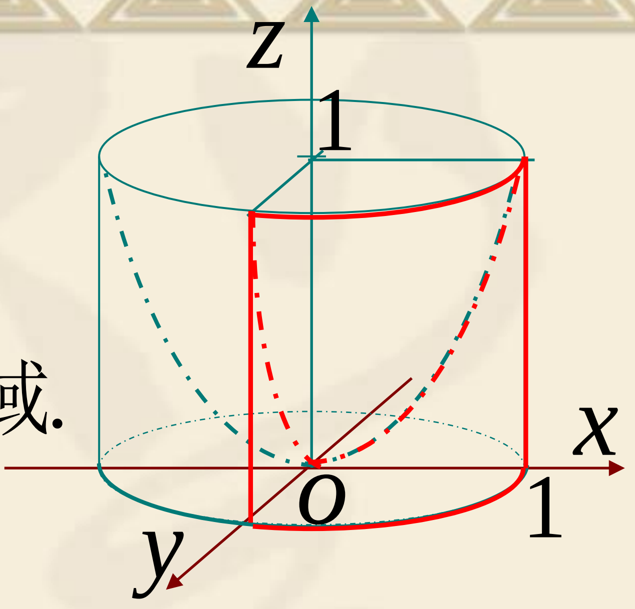
$$f(x^2+y^2,z),\ f(x^2+z^2,y),\ f(y^2+z^2,x)$$

等形式时,宜用柱坐标代换.

例:$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中

Ω为第一卦限中由曲面$z=x^2+y^2$,

$x^2+y^2=1$及三坐标平面围成的区域.



解法一:在柱坐标$x=r\cos\theta$,

$y=r\sin\theta, z=z$变换下, Ω在oxy平面的投影为

$$E_{r\theta}=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi/2\right\},$$

Ω上下两边界面的方程为$z=0$和$z=r^2$.于是,Ω在柱坐标下的表示为

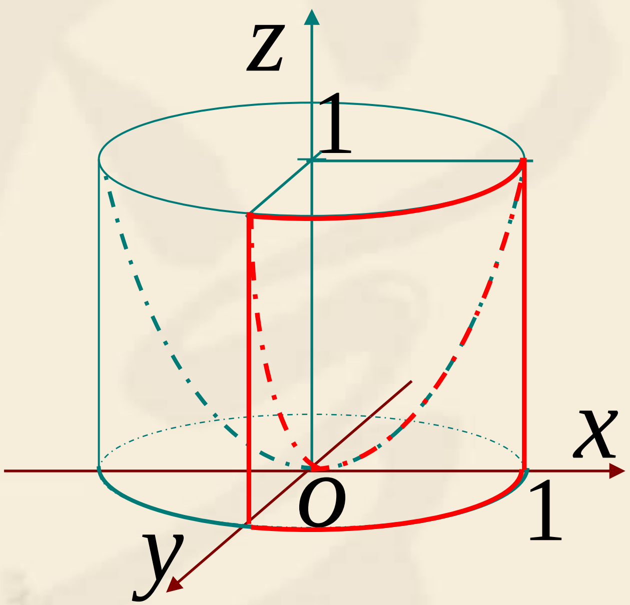
$$\Omega^*=\left\{(r,\theta,z)\middle|0\le r\le 1, 0\le\theta\le\pi/2, 0\le z\le r^2\right\}.$$

$$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega^*}(r^2+z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{E_{r\theta}}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\int_0^{r^2}(r^2+z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{r^2}(r^2+z)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r(r^4+\frac{1}{2}r^4)\mathrm{d}r=\pi/8.\square$$



解法二:"先二后一"

$$I=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{\Omega_z}(r^2+z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{z}}^1(r^2+z)r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\left[(1-z^2)/4+z(1-z)/2\right]\mathrm{d}z=\pi/8.\square$$

例:$I = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2} \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}$, $(h > R)$.

解:令$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z.$

$$I = \int_{-R}^{R}\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$$

$$= \pi\int_{-R}^{R}\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{\mathrm{d}r^2}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}$$

$$= 2\pi\int_{-R}^{R}\left[\sqrt{R^2+h^2-2hz}-(h-z)\right]\mathrm{d}z = \frac{4\pi R^3}{3h}.\square$$

Question: $a^2+b^2+c^2>R^2$时,

$$I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}=?$$

$$猜想:\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

6. 三重积分的变量替换

与二重积分类似,对三重积分引入一一映射

$$\begin{cases} x = x(u,v,w), \\ y = y(u,v,w), \\ z = z(u,v,w), \end{cases} \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0, \forall (u,v,w) \in \Omega^*.$$

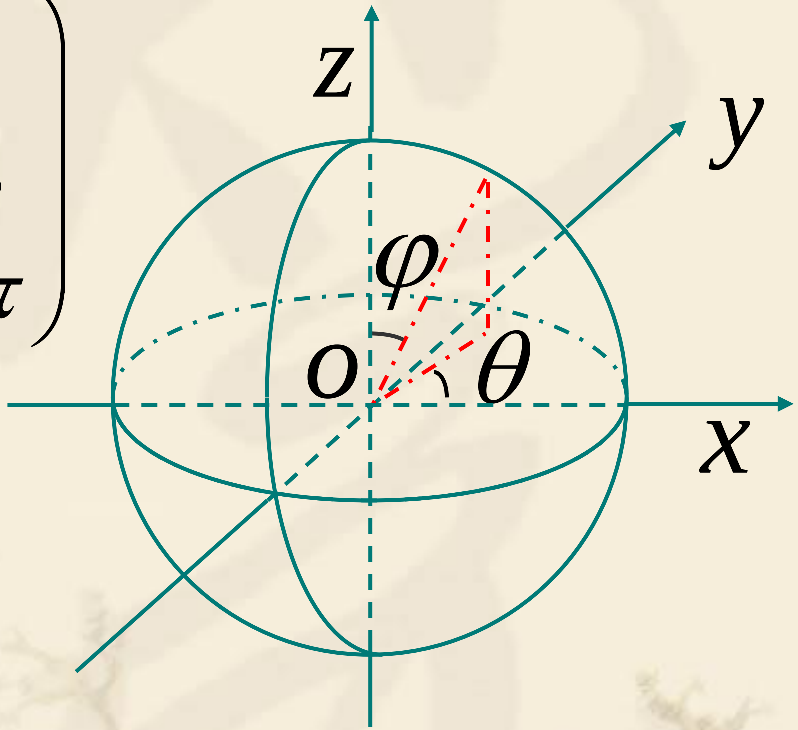
将$ouvw$空间的区域Ω^*映成$oxyz$空间的区域Ω. 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega^*} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \cdot \left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w.$$

特别地, 在球坐标变换

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \rho \geq 0, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{pmatrix}$$



下,
$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \rho^2\sin\varphi.$$

于是 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \iiint_{\Omega^*} f\left(x(\rho,\varphi,\theta), y(\rho,\varphi,\theta), z(\rho,\varphi,\theta)\right)$$

$$\cdot\,\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta.$$

例: $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right.\right\}.$$

解: Ω关于oxy平面对称, 故z的奇函数$\frac{xz}{ac}$, $\frac{yz}{bc}$, 在Ω上的积分都为0. 同理$\frac{xy}{ab}$在Ω上的积分也为0.于是

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

椭球坐标变换 $\begin{cases} x = a\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases}$ 下,Ω表示为

$$\Omega^* = \{(\rho,\varphi,\theta): 0 \le \rho \le 1, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = abc\rho^2\sin\varphi.$$

故 $$I = \iiint_\Omega \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^2 \cdot abc\rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho$$

$$= 2\pi abc \int_0^{\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^4 \mathrm{d}\rho = 4\pi abc/5. \square$$

例: $I=\iiint_{\Omega}(x^2+2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega: 0\le z\le\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

解: 被积函数x^2+2y^2是z的偶函数, 可将积分扩展到整个球域$\Omega_1: x^2+y^2+z^2\le R^2$.

$$I=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega_1}(x^2+2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由Ω_1的轮换对称性

$$\iiint_{\Omega_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega_1}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

于是, $I=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega_1}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{R}\rho^4\mathrm{d}\rho=2\pi R^5/5.\square$$

例. $I=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$,

$(a^2+b^2+c^2>R^2)$

解. 作正交变换$Oxyz\leftrightarrow Ouvw$, 使w轴过(a,b,c).

记$h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, 则$(a,b,c)\leftrightarrow(0,0,h)$,

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathrm{A}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}* & * & a/h\\ * & * & b/h\\ * & * & c/h\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix},$$

其中A为正交阵, 即$\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}=\mathrm{I}$. 于是

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\det \mathrm{A}=\pm 1;$$

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

$$=\left\|\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right\|^2=\left\|\mathrm{A}\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}-\mathrm{A}\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}\right\|^2=\left\|\mathrm{A}\begin{pmatrix}u\\v\\w-h\end{pmatrix}\right\|^2$$

$$=(u,v,w-h)\mathrm{A}^{\mathrm{T}}\mathrm{A}\begin{pmatrix}u\\v\\w-h\end{pmatrix}=u^2+v^2+(w-h)^2;$$

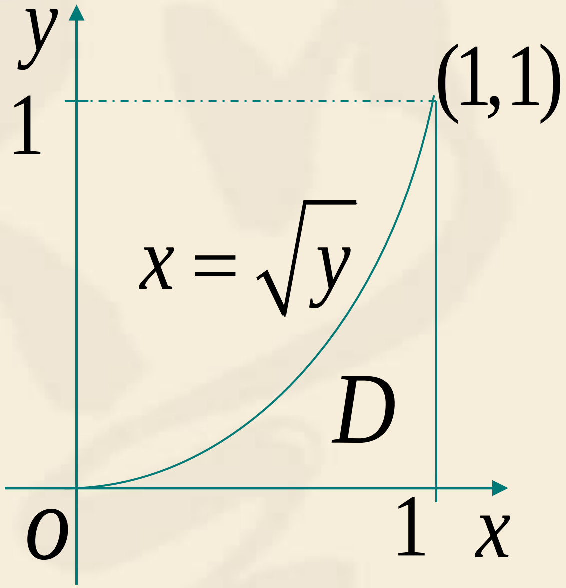
(正交变换保长度)

$$I = \iiint\limits_{u^2+v^2+w^2 \le R^2} \frac{\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w}{\sqrt{u^2+v^2+(w-h)^2}}$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3h} = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \square$$

Remark. 画出积分区域Ω的立体图是化重积分为累次积分的关键.但是有时Ω的边界比较复杂,其立体图难以作出.这时候就得寻求不画立体图,而只画投影区域或截面区域的平面图的方法来确定累次积分的积分限.

例: $I=\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$由$y=0, z=0, x+z=1, x=\sqrt{y}$围成.



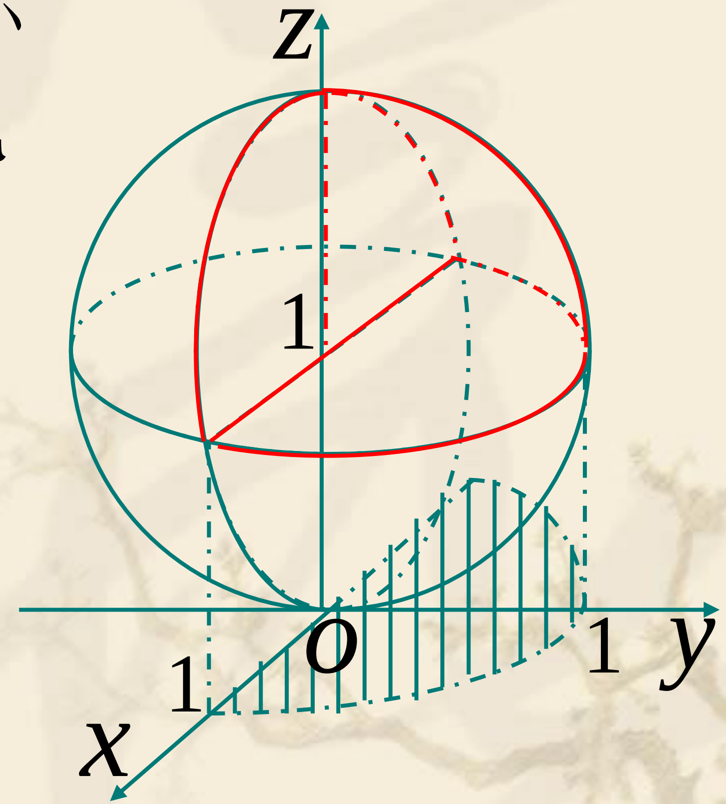
解: 被积函数不含z,先对z积分比较方便.故先将Ω向oxy投影,设投影区域为D.则D应由$y=0, x=\sqrt{y}$,及由$z=0, x+z=1$消去z后得到的$x=1$所围成. 于是

$$I=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}z=\iint_D(1-x)\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

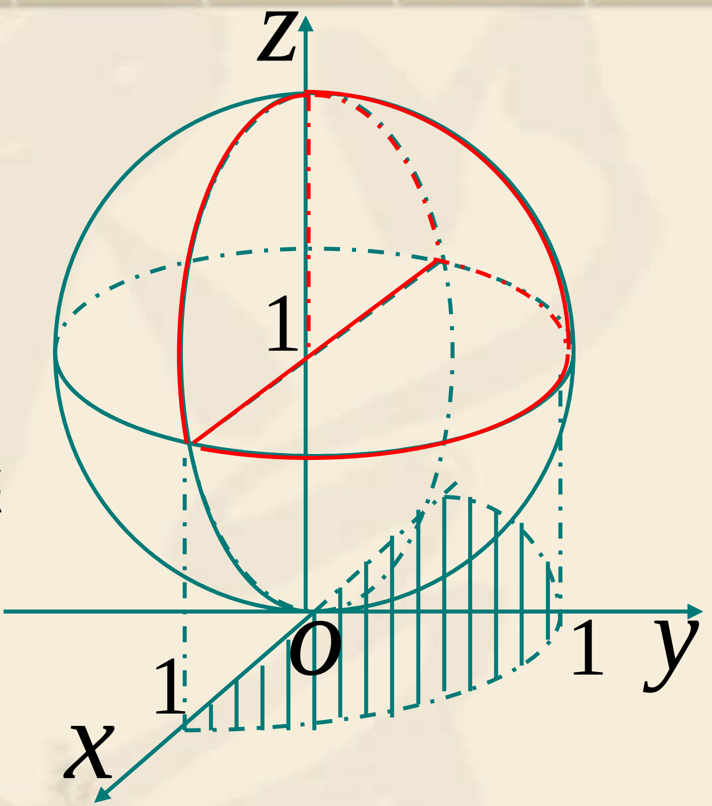
$$=\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^1(1-x)x^3\mathrm{d}x=1/30.$$

例. $I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}z.$

解: 直角坐标系下所给累次积分十分困难,改变积分顺序也无法简化计算. 积分区域为球域$x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$在平面$z=1$上方满足$y\ge 0$的部分. 故考虑球坐标变换.



令 $\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \\ z = \rho\cos\varphi. \end{cases}$



则 •$0 \le \theta \le \pi$.(这是因为$y \ge 0$.)

•$0 \le \varphi \le \pi/4$. 这是因为交线

$\begin{cases} z = 1 \\ x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$ 上

$\begin{cases} \rho\cos\varphi = z = 1 \\ \rho^2\sin^2\varphi = x^2 + y^2 = 2z - z^2 = 1, \end{cases}$ 此时$\varphi = \pi/4$.

•$1/\cos\varphi \le \rho \le 2\cos\varphi$. 因为平面$z = 1$上, $\rho = 1/\cos\varphi$,

球面$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$上, $\rho = 2\cos\varphi$.

故变量替换后积分区域为

$$\left\{(\rho,\theta,\varphi)\left|\begin{array}{l}0\le\theta\le\pi,0\le\varphi\le\pi/4,\\1/\cos\varphi\le\rho\le 2\cos\varphi.\end{array}\right.\right\}$$

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_{1/\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\rho\sin\varphi\mathrm{d}\rho$$

$$=\pi\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\sin\varphi\left[4\cos^2\varphi-1/\cos^2\varphi\right]\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{2\pi}{3}(1-\frac{1}{2\sqrt{2}})-\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1).\square$$

例: 设f可导, 且$f(0)=0, \Omega_t: x^2+y^2+z^2 \le t^2$.

求 $\lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{1}{\pi t^4} \iiint_{\Omega_t} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解: $\iiint_{\Omega_t} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho = 4\pi\int_0^t f(\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho$$

$\to 0, (t\to 0^+$时.) 故可用L'Hospital法则求极限.

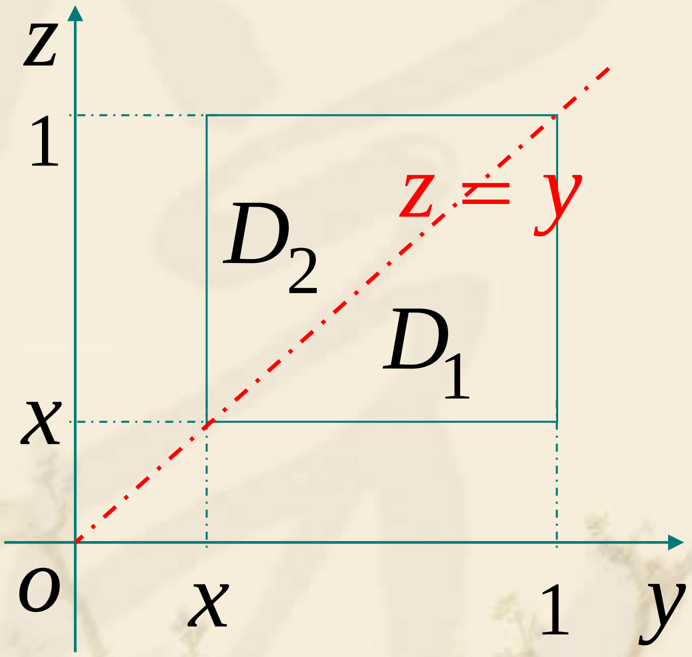
$$原式 = \lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi\int_0^t f(\rho)\rho^2\mathrm{d}\rho}{\pi t^4} = \lim_{t\to 0^+}\frac{4\pi f(t)t^2}{4\pi t^3}$$

$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = f'_+(0) = f'(0).\square$$

例: 设$f\in C([0,1])$, 证明:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^3.$$

解: $\forall x\in[0,1]$,



$$\int_x^1 \mathrm{d}y\int_x^y f(y)f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_1} f(y)f(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_2} f(y)f(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_1\cup D_2} f(y)f(z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\int_x^1 \mathrm{d}y\int_x^1 f(y)f(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\left(\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right)^2.$$

记$F(x)=\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y$,则$F'(x)=-f(x)$.于是

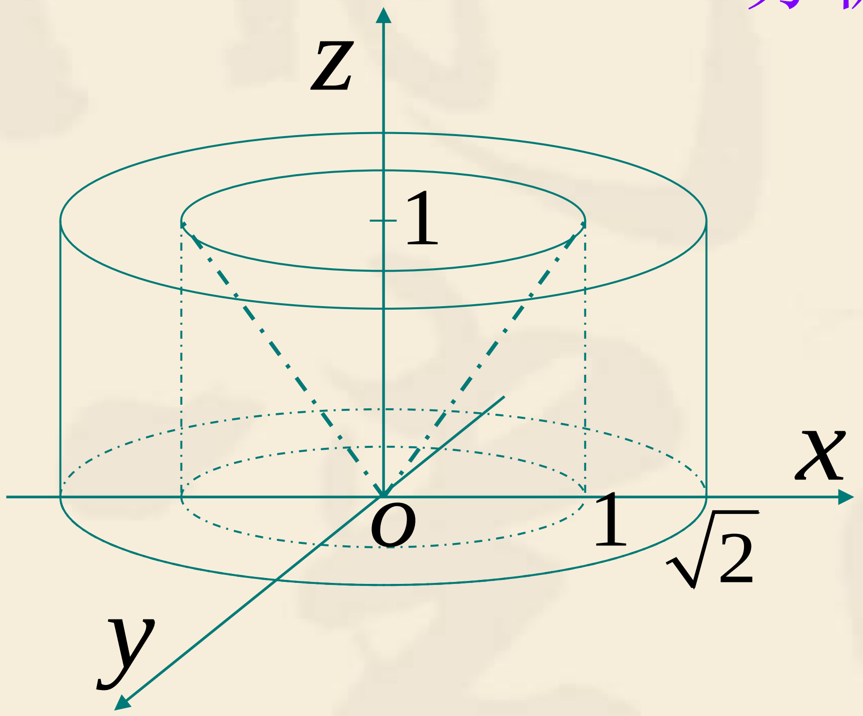
$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{d}y\int_x^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{d}y\int_x^y f(y)f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 f(x)\cdot\frac{1}{2}\left[\int_x^1 f(y)\mathrm{d}y\right]^2 \mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1 F'(x)F^2(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{-1}{6}F^3(x)\Big|_0^1=\frac{1}{6}F^3(0)=\frac{1}{6}\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^3 \square$$

例: 求$\iiint_{\Omega}\left|z-\sqrt{x^2+y^2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$由平面$z=0$, $z=1$及曲面$x^2+y^2=2$围成.



分析: 关键在于去绝对值.

锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$将积分区域Ω分成两部分,应分别积分.

以下留为练习.

作业：习题3.4

No.5(1,4),6,7(2,5),

8,9(7),11