习题讨论课6题目：重积分

一. 二重积分

例 1. 对连续函数 f，改变累次积分顺序 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x \int_0^{\frac{3-x}{2}} f(x,y)\mathrm{d}y$。

例 2. 计算积分 $\iint\limits_{\substack{0\le x\le 2\\ 0\le y\le 2}} [x+y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。这里 $[t]$ 表示不超过 t 的最大整数。

例 3. 计算二重积分：$\iint\limits_D |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为圆盘：$x^2+y^2\le R^2$。

例 4. 求由曲线 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = x^2+y^2$（$x^2+y^2>0$）所围的平面图形面积。

例 5. 试作适当变换，计算下列积分:

(1) $\iint\limits_D (x+y)\sin(x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\{(x,y)|0\le x+y\le\pi, 0\le x-y\le\pi\}$；

(2) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D=\{(x,y)|x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

例 6. 试作适当变换,把 $\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)||x|+|y|\le 1\}$ 化为单重积分。

例 7. 在变量替换下

$$x = u\cos^4 v, y = u\sin^4 v$$

把积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为累次积分，其中

$$D=\{(x,y)|\sqrt{x}+\sqrt{y}\le\sqrt{a}, x\ge 0, y\ge 0\}.$$

例 8. 设 $f(x,y)$ 为连续函数,且 $f(x,y)=f(y,x)$。证明:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(1-x,1-y)\mathrm{d}y.$$

例 9. 对积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le x+y\le 1\}$ 进行极坐标变换并写出变换后不同顺序的累次积分。

例 10. 利用二重积分理论，证明以下积分不等式。设 $f,g\in\mathscr{C}[a,b]$，则

1. $\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x$。
2. $\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b (f(x))^2\mathrm{d}x \int_a^b (g(x))^2\mathrm{d}x$。
3. 设 $f(x)>0$，$\forall x\in[a,b]$，证明 $\iint\limits_{[a,b]^2} \frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \ge (b-a)^2$。

例 11. 计算 $I=\iint\limits_{D}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(y\frac{\partial f}{\partial x}-x\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le R^2\}$。

。

例 12. 证明$\iint_{[0,1]^2}(xy)^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 t^t\mathrm{d}t$（第三章的总复习题题9， page 171）

二. 三重积分

例 13. 设 $f\in\mathscr{C}[0,+\infty)$，

$$F(t)=\int\limits_{\Omega_t}\left(z^2+f(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\Omega_t=\left\{(x,y,z)|0\le z\le h,x^2+y^2\le t^2\right\}(t>0)$。求 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^2}$.

例 14. 求三重积分 $I=\int\limits_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的值，其中

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},z\ge\sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

例 15. 求由曲面 $S:(x^2+y^2)^2+z^4=z^2$ 所围有界区域 Ω 的体积。

例 16. 设 $A=(a_{ij})$ 为 3×3 实对称正定矩阵，$\sum\limits_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j=1$ 表示三维空间的一个椭球面。证明该椭球面所包围立体 V 的体积为 $|V|=\frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}$。

例 17. 求由六个平面 $3x-y-z=\pm 1$，$-x+3y-z=\pm 1$，$-x-y+3z=\pm 1$ 所围成的有界区域的体积。

例 18. 设 $h=\sqrt{a^2+b^2+c^2}>0$，$f\in\mathscr{C}[-h,h]$。证明：

$$\int_{x^2+y^2+z^2\le 1}f(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)f(ht)\mathrm{d}t.$$