微积分（2）期中考题 答案

一．填空题（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{\log xy}=$______________。

答案：0

2. 函数 $f(x,y)=x^y y^x$ 在 $(1,2)$ 点的全微分为______________。

答案：$2(\ln 2+2)dx+dy$

3. 设函数 $f(u,v)$ 可微，函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$ 确定，则偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$______________。

答案：$-\dfrac{f_u+2xf_v}{f_u+2zf_v}$

4. 函数 $x^2+2y^2+3z^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处函数值**递增**最快的方向为______________。

答案：$(1,2,3)$

5. 向量值函数 $\mathbf{f}(x,y)=(x^3y^2,x^3-y^2)$ 的 Jacob 矩阵 $J\mathbf{f}=$______________。

答案：$\begin{pmatrix}3x^2y^2 & 2x^3y\\ 3x^2 & -2y\end{pmatrix}$

6. $u=f(x^2+y^2)$，其中 f 为 $C^{(2)}$ 类函数，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=$______________。

答案：$4xyf''(x^2+y^2)$

7. $y=y(x),z=z(x)$ 为由方程组 $\begin{cases}x+y+z=0\\ x^2+y^2+z^2=1\end{cases}$ 确定的隐函数，$y\neq z$，则 $\dfrac{dy}{dx}=$______________。

答案：$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{z-x}{z-y}$

8. 函数 $f(x,y)=x^y$ 在点 $(x,y)=(1,1)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式为

____。

答案：$x^y=1+(x-1)+(x-1)(y-1)+o(\rho^2)$，　$\rho^2=(x-1)^2+(y-1)^2$

9. 曲面 $x=u+e^{u+v},\ y=u+v,\ z=e^{u-v}$ 在 $(2,0,e^2)$ 点的切平面方程为________________。

答案：$\begin{cases} x-2=2(u-1)+(v+1) \\ y=(u-1)+(v+1) \\ z-e^2=e^2(u-1)-e^2(v+1) \end{cases}$

10. 曲面 $x^2+y^2+\sin y=z^2$ 在 $(1,0,1)$ 点的切平面方程为__________________________。

答案：$2(x-1)+y=2(z-1)$

11. 曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ z=xy \end{cases}$ 在点 $(1,2,2)$ 处的切线方程为____________________________。

答案：$\begin{cases} (x-1)+2(y-2)+2(z-2)=0 \\ z-2=2(x-1)+(y-2) \end{cases}$

12. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 处的法线方程为_______________________。

答案：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-2}{4}$

13. 设 $\alpha>0$，已知广义积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x^\alpha)dx$ 收敛，则 α 的范围为____________________。

答案：$\alpha>1$

14. 设 $p>0,q>0,r>0$，利用 Beta 函数，积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^r)^{q-1}dx$ 可以表示为

__________________________________。

答案：$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^r)^{q-1}dx = \frac{1}{r}B(\frac{p}{r},q), p>0, q>0, r>0;$

15. 设 $F(x)=\int_x^{2x} e^{\sin(xy)}dy$，则 $F'(x)=$______________________________。

答案：$F'(x)=\int_x^{2x} y\cos(xy)e^{\sin(xy)}dy + 2e^{\sin(2x^2)} - e^{\sin x^2}$

二．**计算题**（每题 10 分，共 40 分）

1. 求函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在原点的偏导数 $f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$，

并考察 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的连续性和可微性.

解： $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\Delta x)^3}{(\Delta x)^3}=1$， ··························2 分

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}-\dfrac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^3}=-1$. ·······················2 分

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续。···3 分

若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，则 $dz=\Delta x-\Delta y$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-dz}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0$$

而 $\Delta z = f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\dfrac{(\Delta x)^3-(\Delta y)^3}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$.

因此, 当 $\Delta x=-\Delta y$ 时,

$$\frac{\Delta z-dz}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{\Delta x\Delta y(\Delta x-\Delta y)}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{3/2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

从而 $\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\dfrac{\Delta z-dz}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\neq 0$, 矛盾! 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微. ·········3 分

2. 设φ为二阶连续可微函数，$z=z(x,y)$为由方程$x^3+y^3+z^3=\varphi(z)$确定的隐函数，

求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$并说明其存在的条件。

解：$3x^2+3z^2\dfrac{\partial z}{\partial x}=\varphi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ……………………………………………………2 分

$3y^2+3z^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\varphi'(z)\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ……………………………………………………2 分

隐函数存在的条件为：$\varphi'(z)-3z^2\neq 0$ …………………………………………2 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{(6z-\varphi''(z))}{\varphi'(z)-3z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{9x^2y^2(6z-\varphi''(z))}{\left(\varphi'(z)-3z^2\right)^3}$$ ………………………………4 分

3. 求椭圆$x^2+3y^2=12$的一个内接等腰三角形,使其底边平行于长轴,且其面积最大.

解:设(x,y)为椭圆上任一点,则过椭圆上点 $(x,y),(-x,y)$ 与$(0,2)$的内接等腰三角形面积

为$S=x(2-y)$,(不妨设$x>0,y<0$). ……………………………………………2 分

考虑

$$L(x,y,\lambda)=x(2-y+\lambda(x^2+3y^2-12)$$ ………………………………3 分

求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2-y+2\lambda x=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=-x+6\lambda y=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+3y^2-12=0\end{cases}$$ ，得条件驻点$(3,-1)$。 …………………………3 分

由问题的实际意义,面积最大的内接等腰三角形必存在,从而过椭圆上点 $(3,-1),(-3,-1)$ 与

$(0,2)$的等腰三角形即为所求. ……………………………………………2 分

4. 已知$0<a<b$，$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，求积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}dx$。

解：因为 $\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}=\int_{a^2}^{b^2} e^{-x^2y}dy$ ……………………………………3 分

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_{a^2}^{b^2} e^{-x^2y}dy\,.$$

易证含参量反常积分$\int_0^{+\infty} e^{-x^2y}dx$在$[a^2,b^2]$上一致收敛, 由于$e^{-x^2y}$在$[0,+\infty)\times[a^2,b^2]$上连续, 知交换积分顺序, 值不变, ……………………………………1 分

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-a^2x^2}-e^{-b^2x^2}}{x^2}dx=\int_{a^2}^{b^2}dy\int_0^{+\infty} e^{-x^2y}dx$$

$$=\int_{a^2}^{b^2}\frac{1}{\sqrt{y}}dy\int_0^{+\infty} e^{-x^2y}dx\sqrt{y}$$

……………………6 分

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{a^2}^{b^2}\frac{1}{\sqrt{y}}dy=\sqrt{\pi}(b-a)$$

三．证明题

1. （7 分）证明如下二元函数的罗尔（Rolle）定理：设二元函数$f(x,y)$在开圆盘D_R：$x^2+y^2<R^2$内可微，在闭圆盘 $\overline{D_R}$： $x^2+y^2\le R^2$上连续。若$f(x,y)$在圆周∂D_R：$x^2+y^2=R^2$上取常数值，则$f(x,y)$在开圆盘D_R内必有驻点，即存在点$\xi\in D_R$，使得 $\nabla f(\xi)=0$。

证明：若函数$f(x,y)$在整个闭圆盘$\overline{D_R}$： $x^2+y^2\le R^2$上常数函数， 则它的梯度在开圆盘上处处为零。结论成立。设$f(x,y)$在闭圆盘$\overline{D_R}$不是常数函数，那么$f(x,y)$在闭圆盘$\overline{D_R}$上的最大值或最小值在开圆盘D_R内的某一点ξ取得。根据极值的必要条件可知$\nabla f(\xi)=0$。证毕。

2. （8 分）证明：当$p>\frac{1}{2}$时，广义积分$\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}\right]dx$收敛。

解：

$$\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}\right]dx=\int_0^1\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}\right]dx+\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}\right]dx$$

$\int_0^1\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}\right]dx=\int_0^1\left[\ln\left(1+x^p\right)-\frac{1}{1+x^p}-\ln x^p\right]dx$ 一定收敛；

$x\to+\infty$ 时，

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)=\frac{1}{x^p}-\frac{1}{2x^{2p}}+\frac{1}{3x^{3p}}+\cdots$$

$$\frac{1}{1+x^p}=\frac{1}{x^p}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^p}}\right)=\frac{1}{x^p}-\frac{1}{x^{2p}}+\frac{1}{x^{3p}}+\cdots$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}=\frac{1}{2x^{2p}}-\frac{2}{3x^{3p}}+\cdots$$

故当 $p>\frac{1}{2}$ 时，广义积分 $\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)-\frac{1}{1+x^p}\right]dx$ 收敛。