清华大学2022春季学期

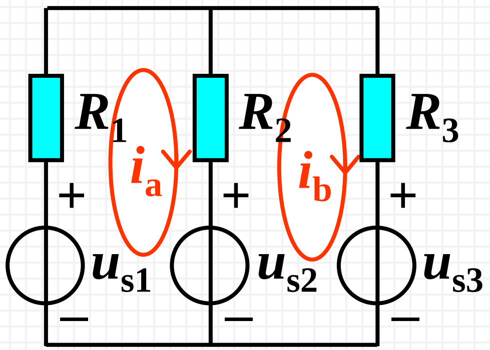
电路原理C

第5讲

电路的定理

内容

1 叠加定理 (*Superposition Theorem*)



由回路法

$$R_{11}i_a+R_{12}i_b=u_{s11}$$
$$R_{21}i_a+R_{22}i_b=u_{s22}$$

其中

$R_{11}=R_1+R_2$

$R_{12}= R_{21}= -R_2$

$R_{22}=R_2+R_3$

$u_{s11}=u_{s1}-u_{s2}$

$u_{s22}=u_{s2}-u_{s3}$

$$\Delta=\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix} = R_{11}R_{22}-R_{12}R_{21}$$

$$i_a=\frac{\begin{vmatrix} u_{s11} & R_{12} \\ u_{s22} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}=\frac{R_{22}}{\Delta}u_{s11}+\frac{-R_{12}}{\Delta}u_{s22}$$

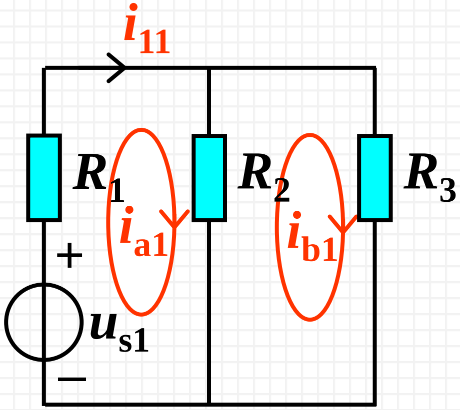
u_{s11}: $u_{s1}-u_{s2}$ $\qquad$ u_{s22}: $u_{s2}-u_{s3}$

$$=\frac{R_{22}}{\Delta}u_{s1}-\frac{R_{12}+R_{22}}{\Delta}u_{s2}+\frac{R_{12}}{\Delta}u_{s3}$$

$$y=ax_1+bx_2+cx_3$$

$$y'=ax_1$$
$$y''=bx_2$$
$$y'''=cx_3$$

$$y=y'+y''+y'''$$



u_{S2}和u_{S3}不作用

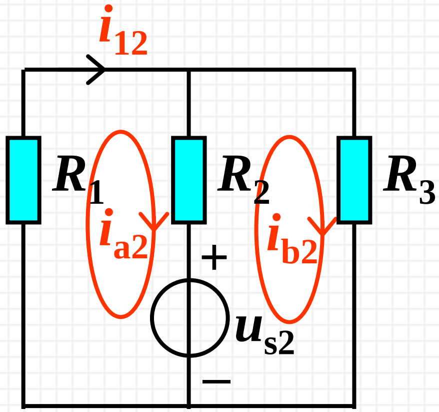
$R_{11}i_{a1}+R_{12}i_{b1}=u_{s1}$

$R_{21}i_{a1}+R_{22}i_{b1}=0$

$$i_{a1}=\frac{\begin{vmatrix} u_{s1} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{R_{22}}{\Delta}u_{s1}$$

$y'=ax_1$



u_{S1}和u_{S3}不作用

$R_{11}i_{a2}+R_{12}i_{b2}=-u_{s2}$

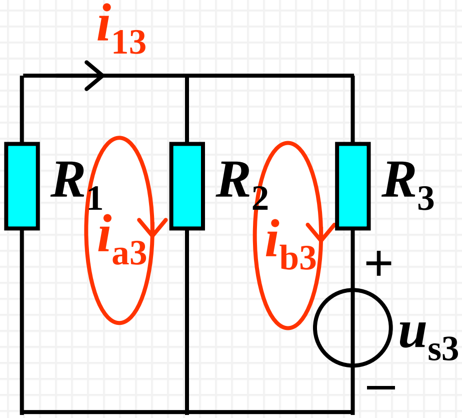
$R_{21}i_{a2}+R_{22}i_{b2}=u_{s2}$

$$i_{a2}=\frac{\begin{vmatrix} -u_{s2} & R_{12} \\ u_{s2} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{R_{22}}{\Delta}(-u_{s2})+\frac{-R_{12}}{\Delta}u_{s2}$$

$$=-\frac{R_{12}+R_{22}}{\Delta}u_{s2}$$

$y''=bx_2$



u_{S1}和u_{S2}不作用

$R_{11}i_{a3}+R_{12}i_{b3}=0$

$R_{21}i_{a3}+R_{22}i_{b3}=-u_{s3}$

$$i_{a3}=\frac{\begin{vmatrix} 0 & R_{12} \\ -u_{s3} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}}$$

$$=-\frac{R_{12}}{\Delta}(-u_{s3})$$

$$=\frac{R_{12}}{\Delta}u_{s3}$$

$y'''=cx_3$

$$y = ax_1 + bx_2 + cx_3$$

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{a}} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}11} & \boldsymbol{R}_{12} \\ \boldsymbol{u}_{\mathrm{s}22} & \boldsymbol{R}_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \boldsymbol{R}_{11} & \boldsymbol{R}_{12} \\ \boldsymbol{R}_{21} & \boldsymbol{R}_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\boldsymbol{R}_{22}}{\Delta}\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}11} + \frac{-\boldsymbol{R}_{12}}{\Delta}\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}22} = \frac{\boldsymbol{R}_{22}}{\Delta}\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}1} - \frac{\boldsymbol{R}_{12}+\boldsymbol{R}_{22}}{\Delta}\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}2} + \frac{\boldsymbol{R}_{12}}{\Delta}\boldsymbol{u}_{\mathrm{s}3}$$

$$\boldsymbol{i}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{i}_{\mathrm{a}1} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{a}2} + \boldsymbol{i}_{\mathrm{a}3}$$

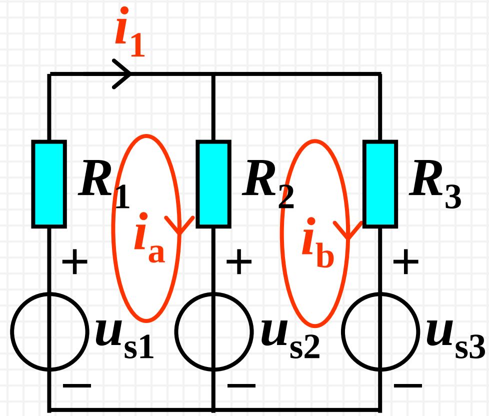
$$y = y' + y'' + y'''$$

$$i_{\mathrm{a}1} = \frac{\begin{vmatrix} u_{\mathrm{s}1} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}} = \frac{R_{22}}{\Delta}u_{\mathrm{s}1}$$

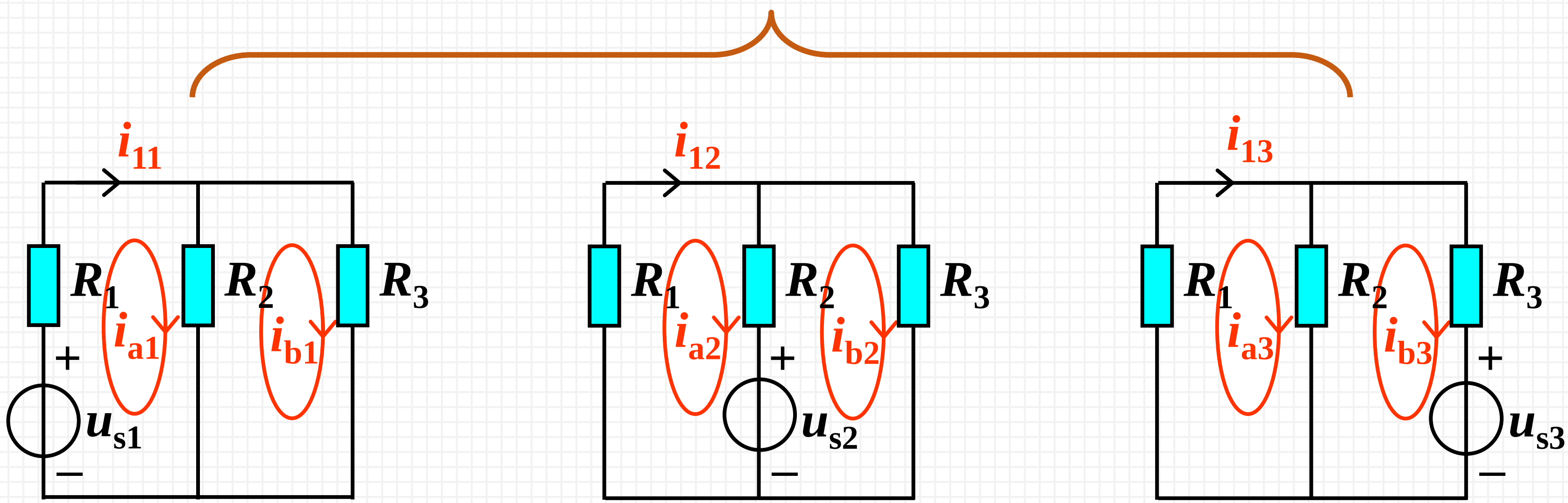
$$i_{\mathrm{a}2} = \frac{\begin{vmatrix} -u_{\mathrm{s}2} & R_{12} \\ u_{\mathrm{s}2} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}} = \frac{R_{22}}{\Delta}(-u_{\mathrm{s}2}) + \frac{-R_{12}}{\Delta}u_{\mathrm{s}2} = -\frac{R_{12}+R_{22}}{\Delta}u_{\mathrm{s}2}$$

$$i_{\mathrm{a}3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & R_{12} \\ -u_{\mathrm{s}3} & R_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}} = -\frac{R_{12}}{\Delta}(-u_{\mathrm{s}3}) = \frac{R_{12}}{\Delta}u_{\mathrm{s}3}$$

$$y' = ax_1 \qquad y'' = bx_2 \qquad y''' = cx_3$$



$i_a = i_{a1} + i_{a2} + i_{a3}$



u_{S2}和u_{S3}不作用　　u_{S1}和u_{S3}不作用　　u_{S1}和u_{S2}不作用

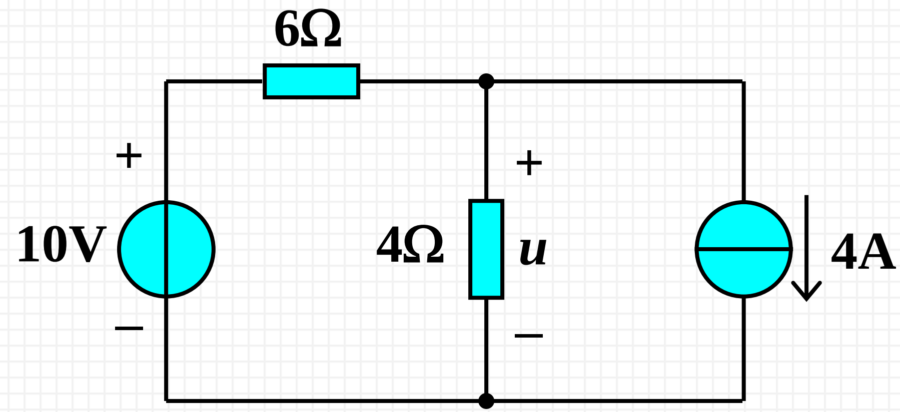
3个独立电源共同作用的效果与单个独立电源作用的效果之和相同

叠加定理：

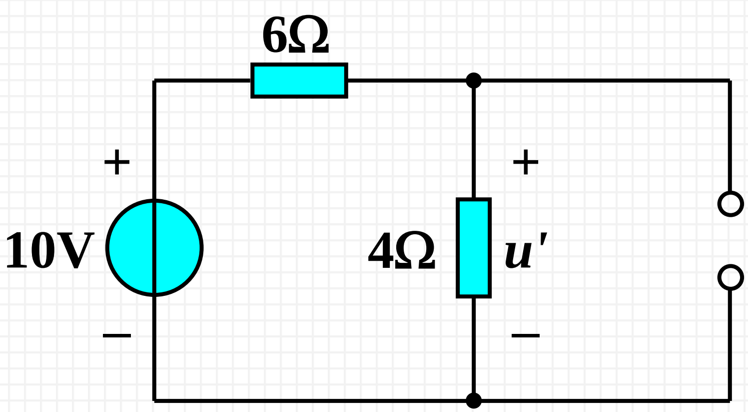
在**线性**电路中，任一支路电流(或电压)都是电路中各个**独立电源单独作用**时，在该支路产生的电流(或电压)的**代数和**。

单独作用：一个电源作用，其余电源不作用。

例1 用叠加定理求图中电压 u。

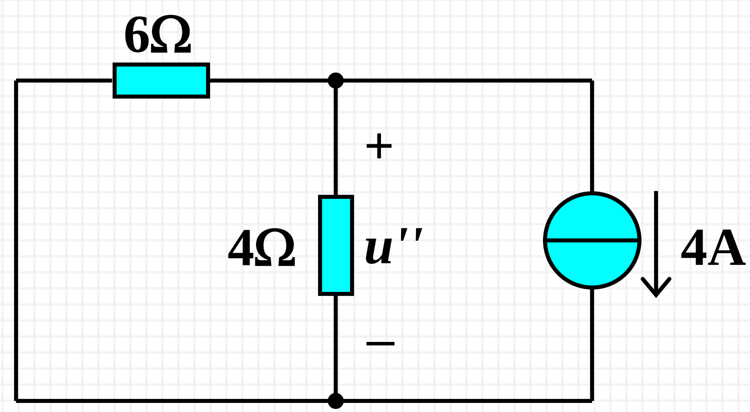


解: (1) 10V电压源单独作用，
4A**电流源开路**



$u'=4\text{V}$

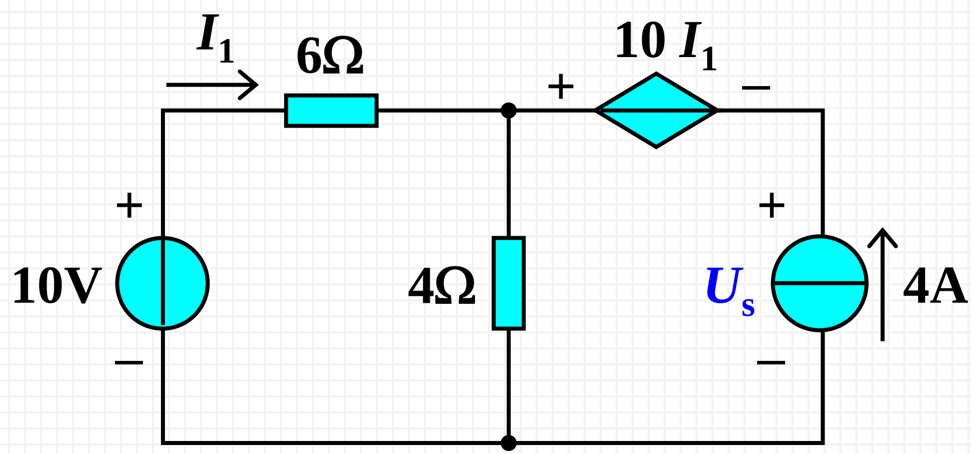
(2) 4A电流源单独作用，
10V**电压源短路**



$u''= 4\times(-2.4)= -9.6\text{V}$

共同作用：$u=u'+u''= 4+(-9.6)= -5.6\text{V}$

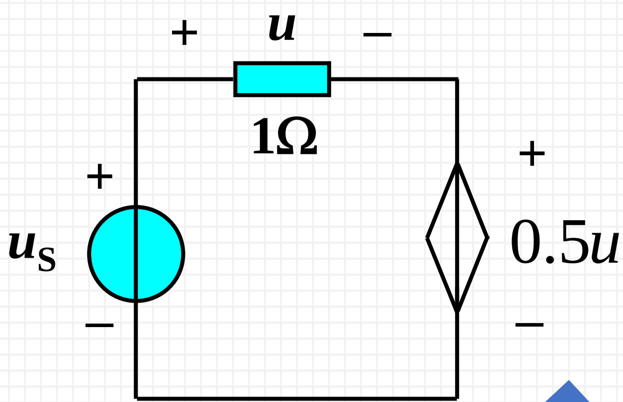
例2 用叠加定理求电压U_s 。



可以将CCVS看作独立源进行叠加吗?

不行!

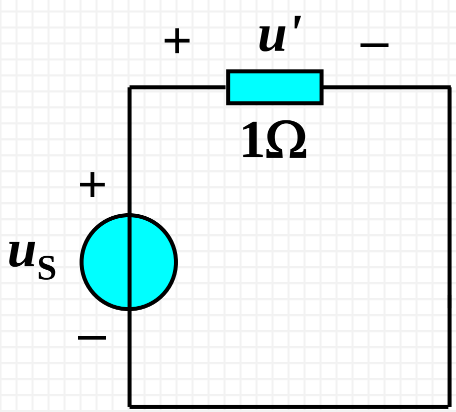
- **受控源不是**能量和信号的“**源**”
- **支路量**无法表示为受控源的参数和独立源参数的**线性组合**



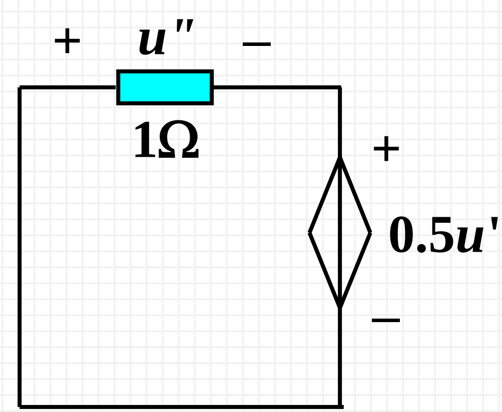
如果一意孤行用**受控源叠加**求：u

$$u + 0.5u = u_S \Rightarrow u = 0.667u_S$$

受控源不参与叠加



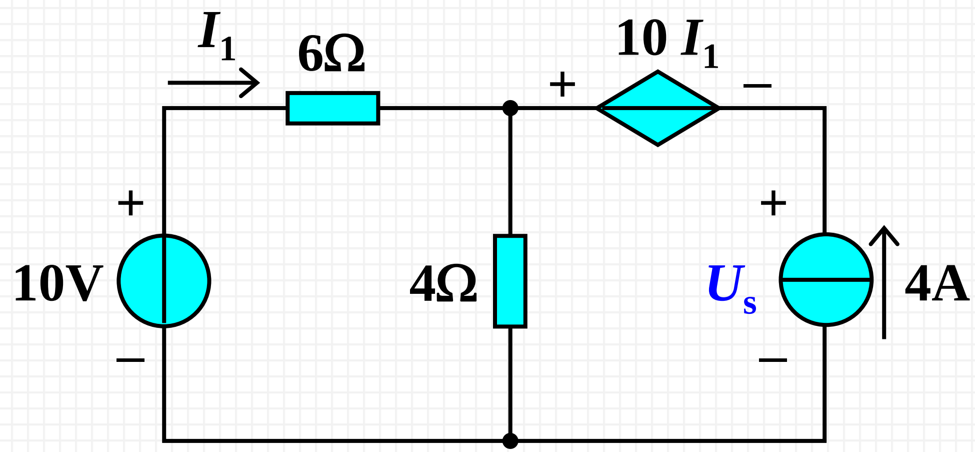
$$u' = u_S$$



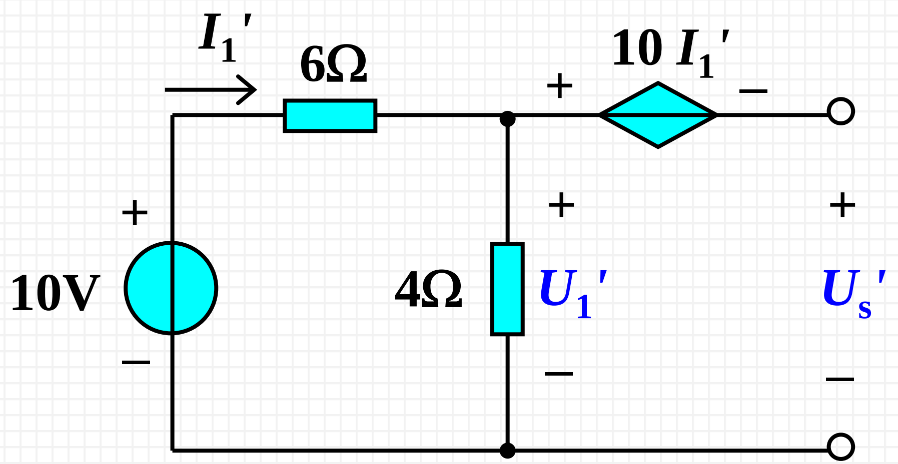
$$u'' = 0$$

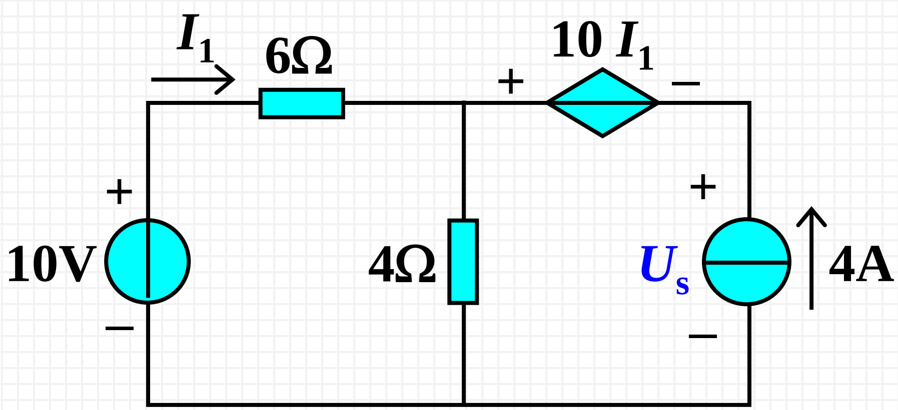
$$u = u' + u'' = u_S$$

例2 用叠加定理求电压U_s 。



解: (1) 10V电压源单独作用:

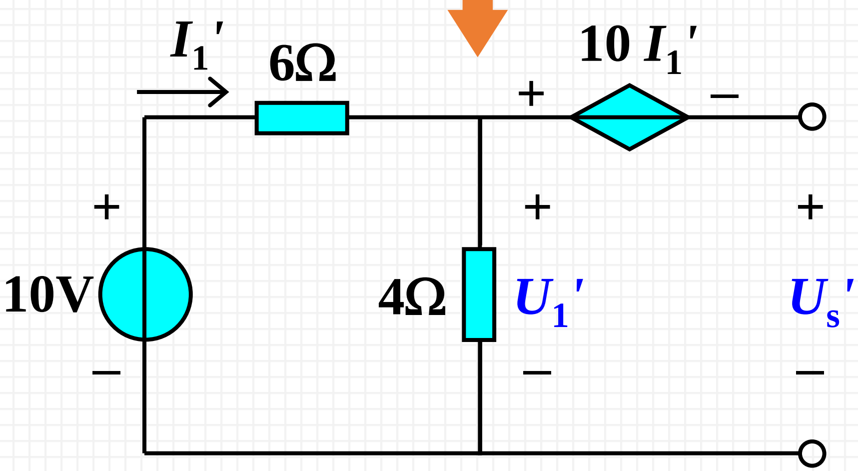




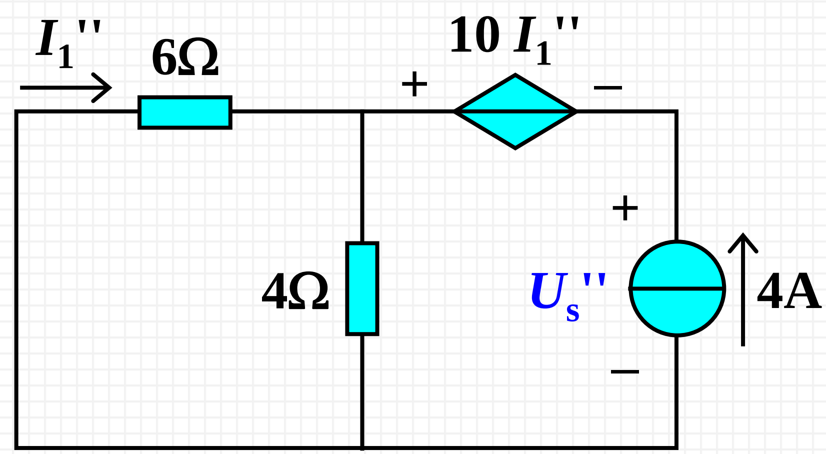
$$U_s'' = -10I_1'' - 6I_1''$$

$$I_1'' = -\frac{4}{4+6} \times 4 = -1.6\text{A}$$

$$U_s'' = -10I_1'' - 6I_1'' = 25.6\text{V}$$



$U_s' = -6\text{V}$

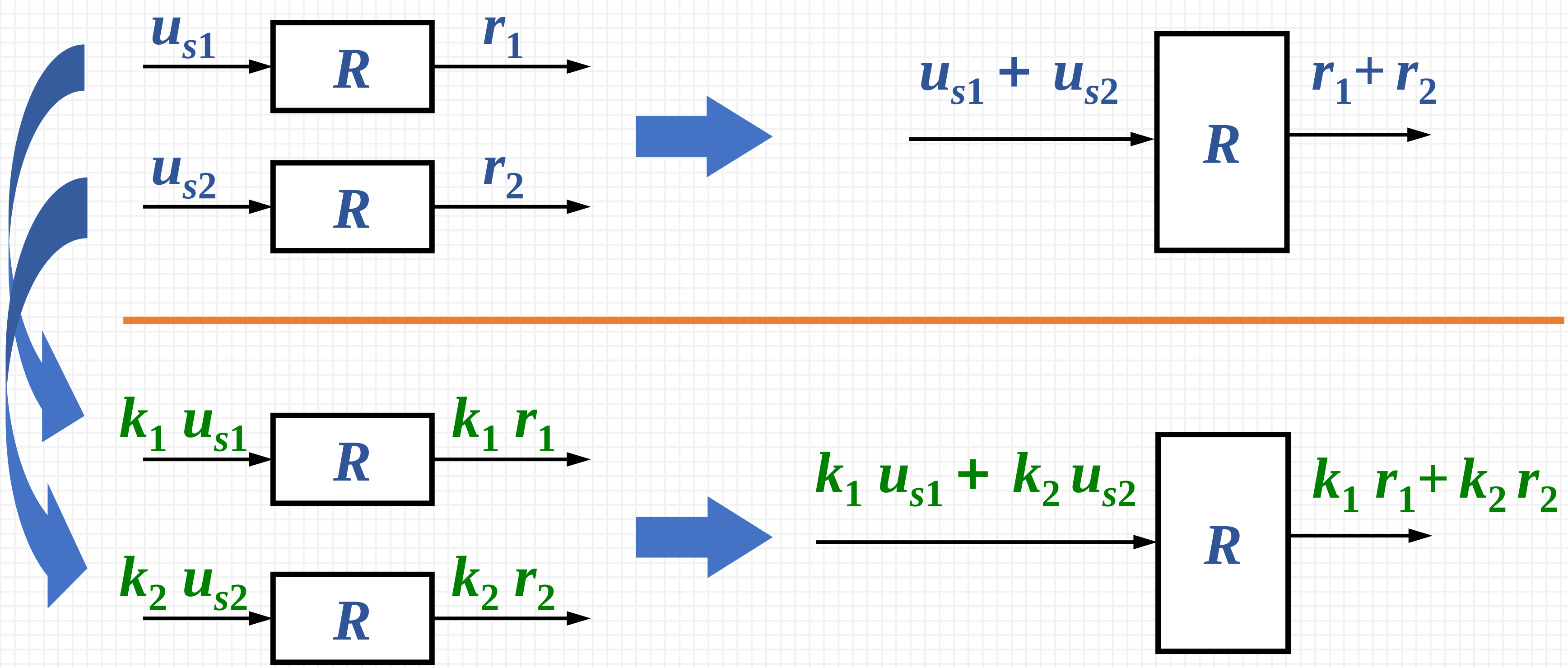


共同作用： $U_s = U_s' + U_s'' = -6 + 25.6 = 19.6\text{V}$

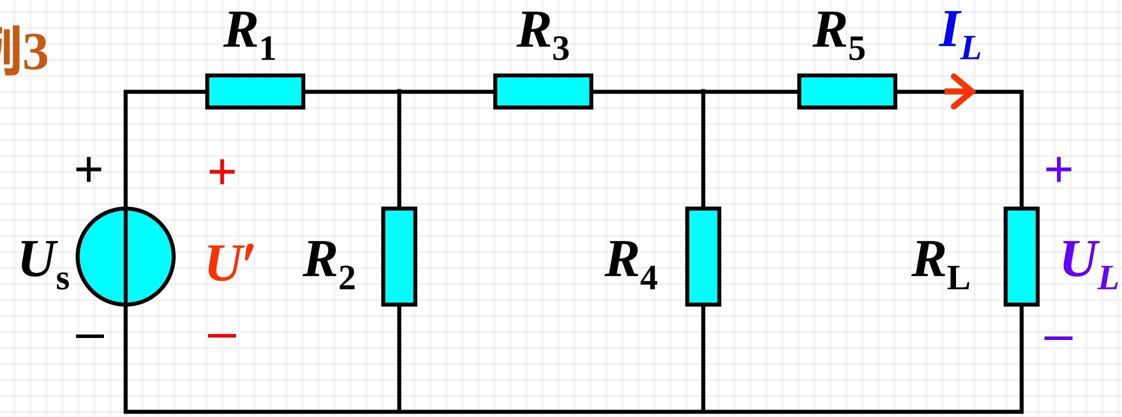
齐性原理 (*homogeneity property*)

当电路中只有一个激励(独立源)时，则响应(电压或电流)与激励成正比。

可加性 (*additivity property*)



例3



已知：如图

求：**电流** I_L

解　法一：分压、分流

法二：电源变换

法三：节点/回路

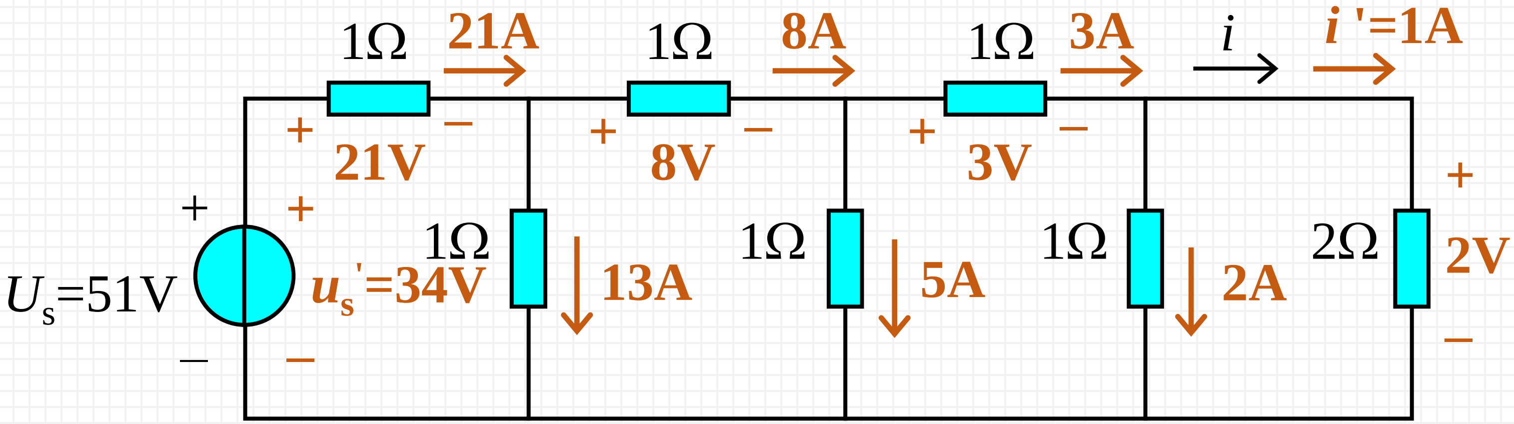
法四：齐性原理（**单位电流法**）

设 $I'_L=1\text{A}$ → U'

U_S → I_L

$$\frac{I_L}{1\text{A}}=\frac{U_s}{U'}$$

练习：如图，求：电流 i



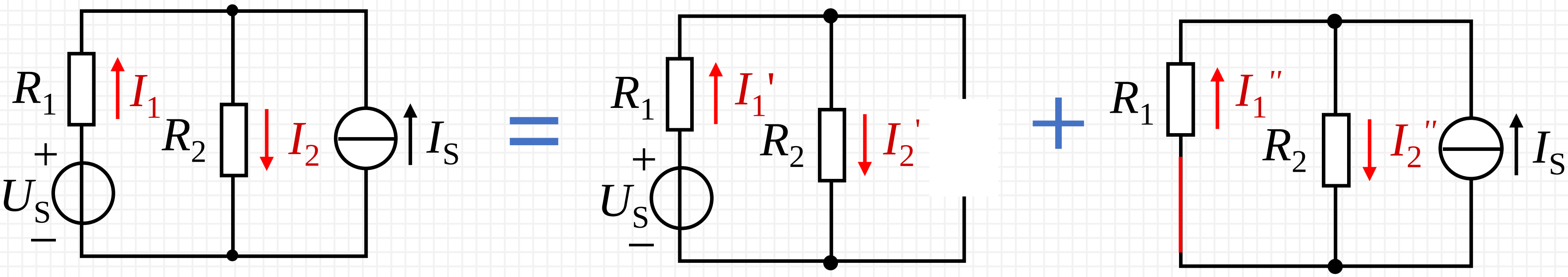
设 $i'=1\text{A}$

$$\frac{i}{i'}=\frac{u_s}{u_s'}$$

$$i=\frac{u_s}{u_s'}i'=\frac{51}{34}\times 1=1.5\text{A}$$

应用叠加原理还需注意的问题

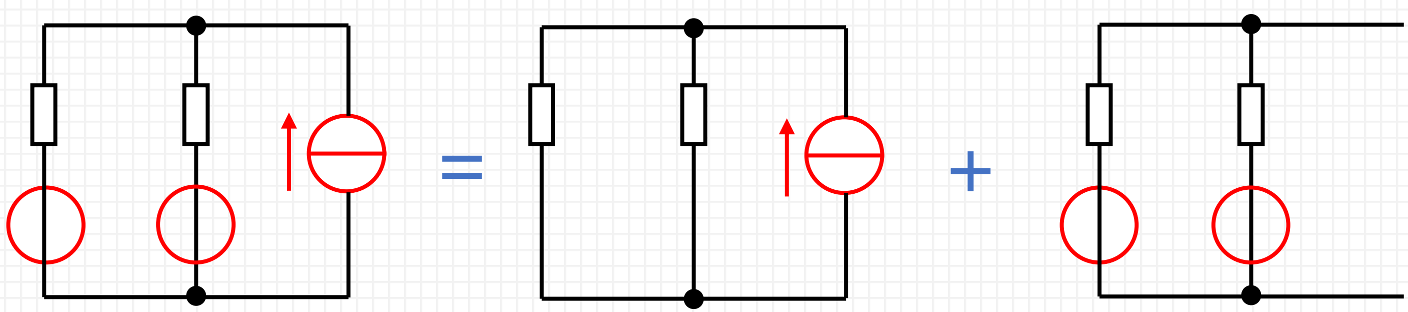
❖ 电压或电流可以叠加，但**功率不能叠加**。如：



计算电阻R_1消耗的功率 $$P_1 \overset{?}{=} (I_1')^2 R_1 + (I_1'')^2 R_1 \quad ✕$$

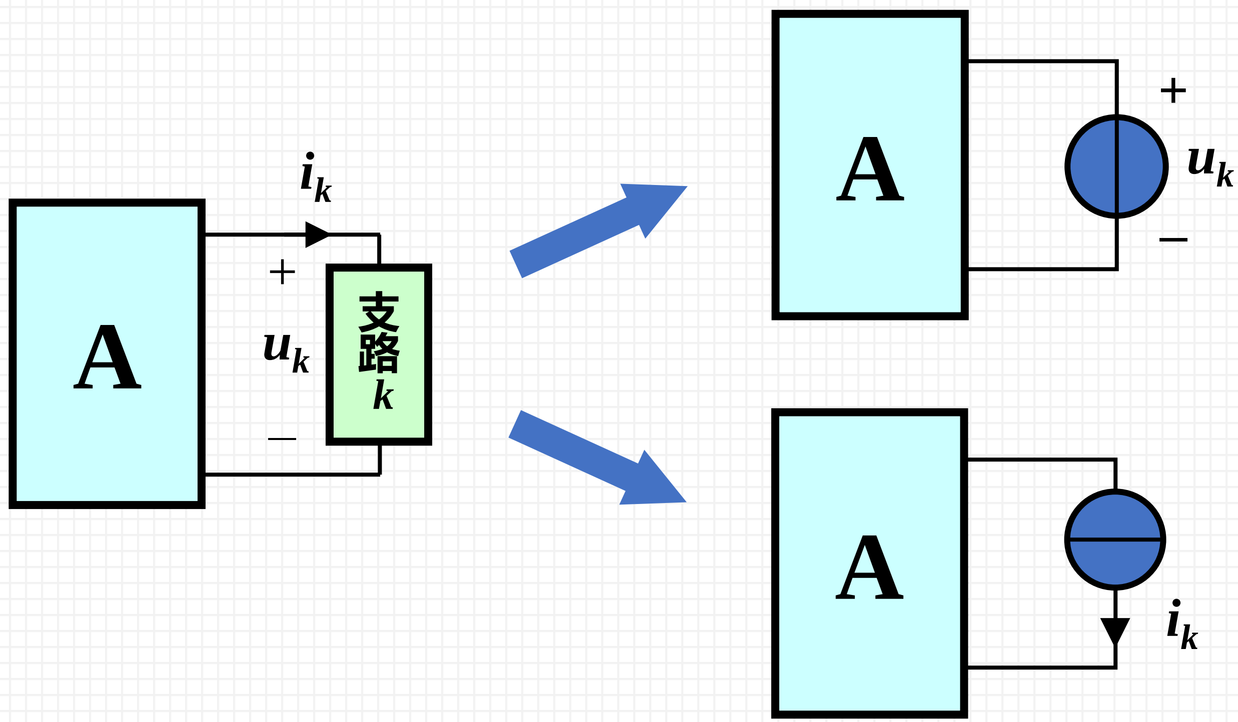
因为 $$P_1 = I_1^{\ 2} R_1 = (I_1' + I_1'')^2 R_1 \neq (I_1')^2 R_1 + (I_1'')^2 R_1$$

❖ 运用叠加定理时也可以把**电源分组**求解，每个分电路的电源个数可以不止一个。

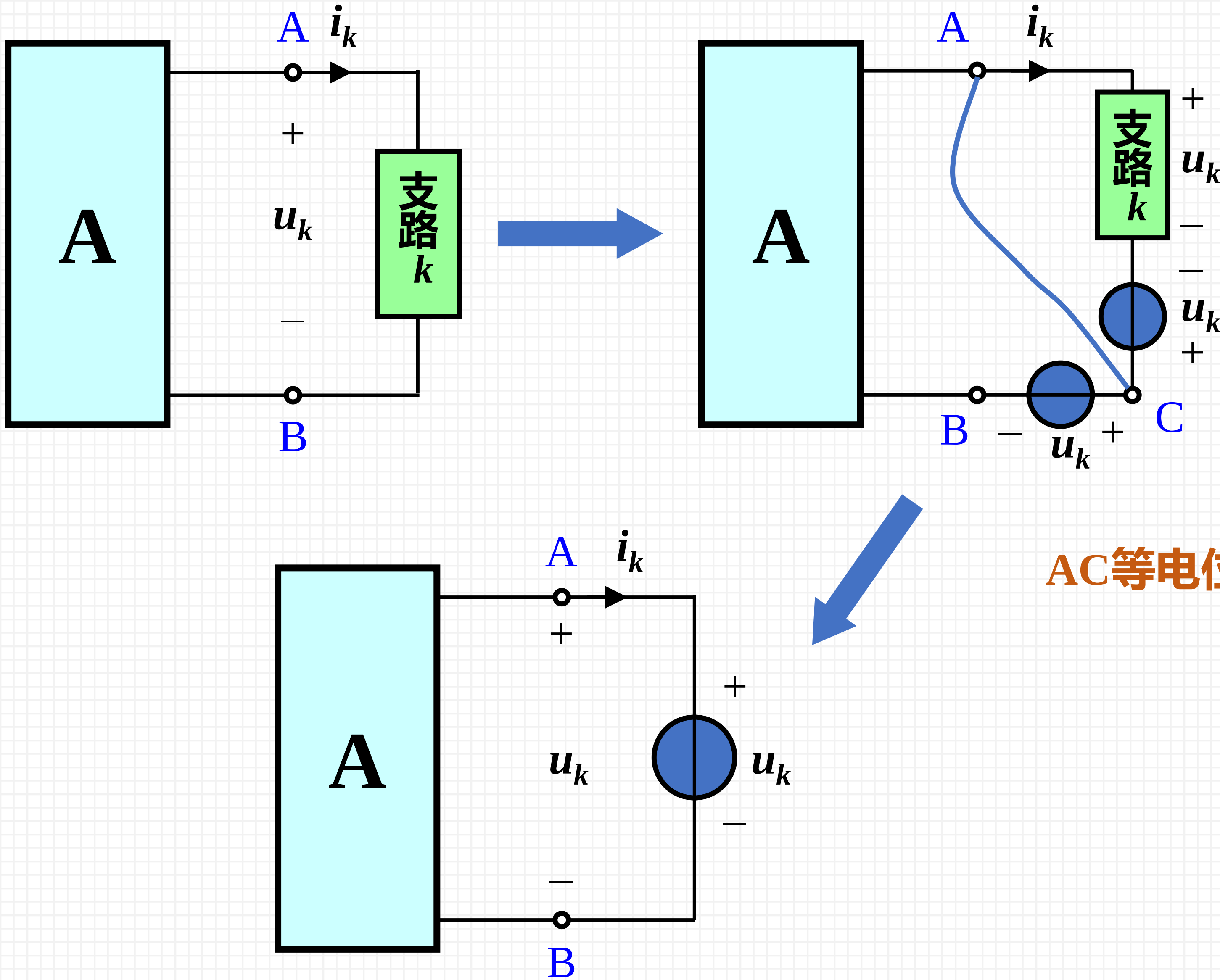


2 替代定理（*Substitution Theorem*）

任意一个电路，其中**第 k 条支路**的**电压已知为** u_k（**电流为** i_k），那么就可以用一个电压等于 u_k 的**理想电压源**（**电流等于 i_k 的理想电流源**）来**替代该支路**，替代前后电路中各处电压和电流均保持不变。

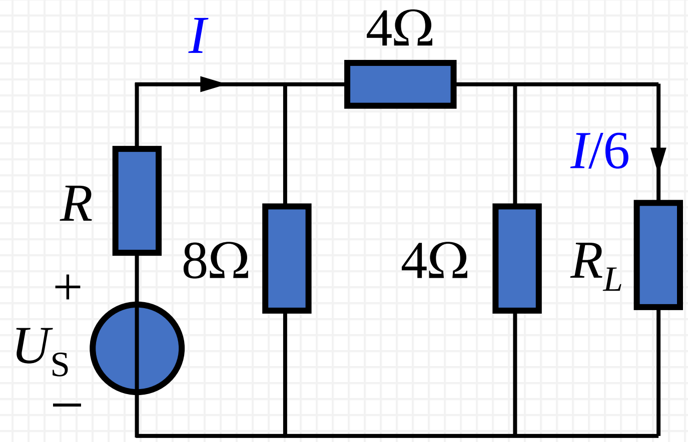


证明:

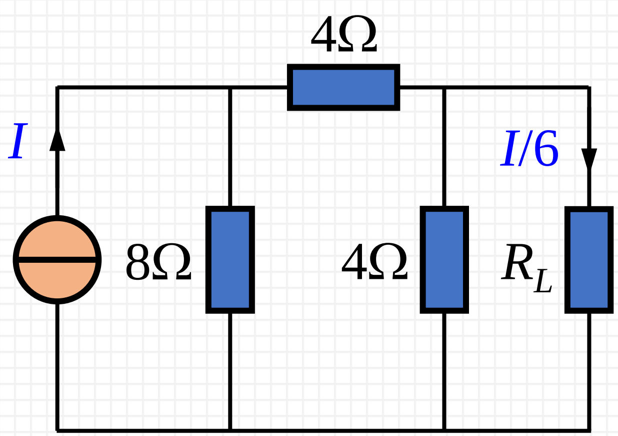


AC等电位

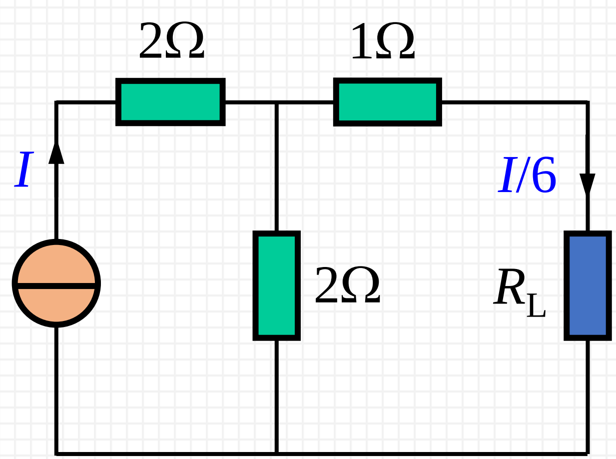
例4 已知如图。现欲使负载电阻 $\boldsymbol{R_L}$ 的电流为电源支路电流 I 的1/6，求此电阻值。



应用替代定理



Y - Δ 变换



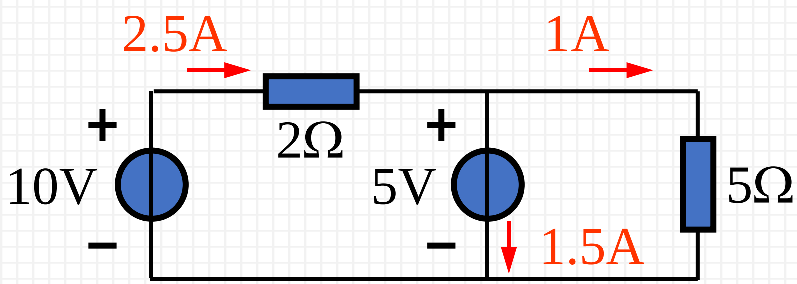
$$\frac{I}{6} = \frac{2}{3+R_L} I$$

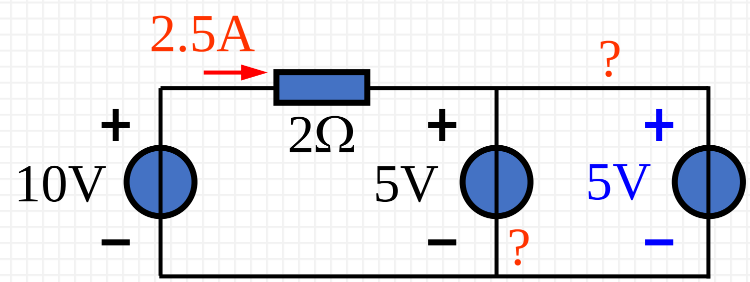
$$R_L = 9\Omega$$

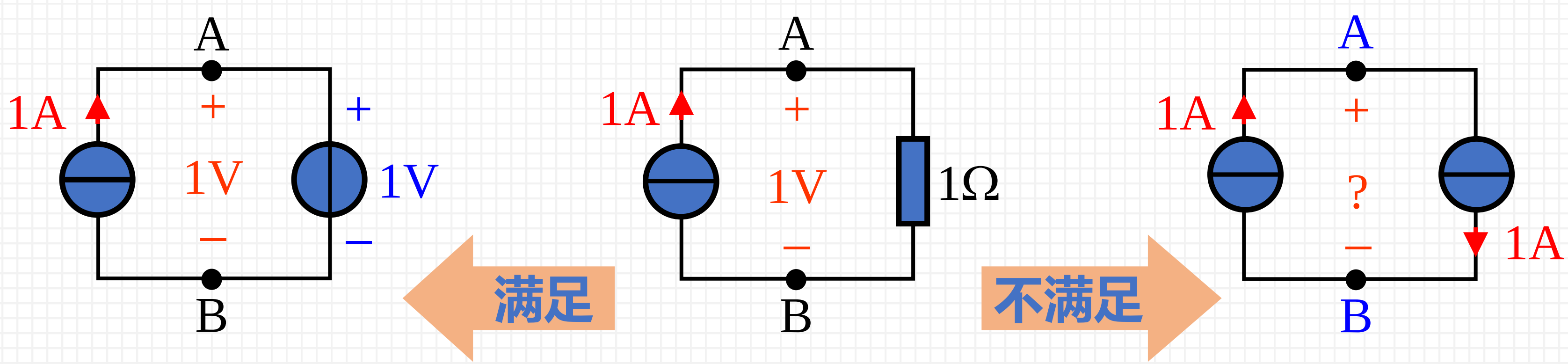
说明 1. 替代定理适用于**线性、非线性电路、定常**和**时变电路**。

2. 应用替代定理必须满足的条件:

1) 原电路和替代后的电路必须有**唯一解**。

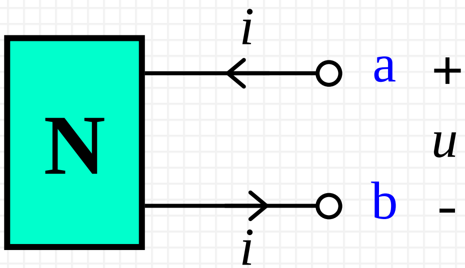




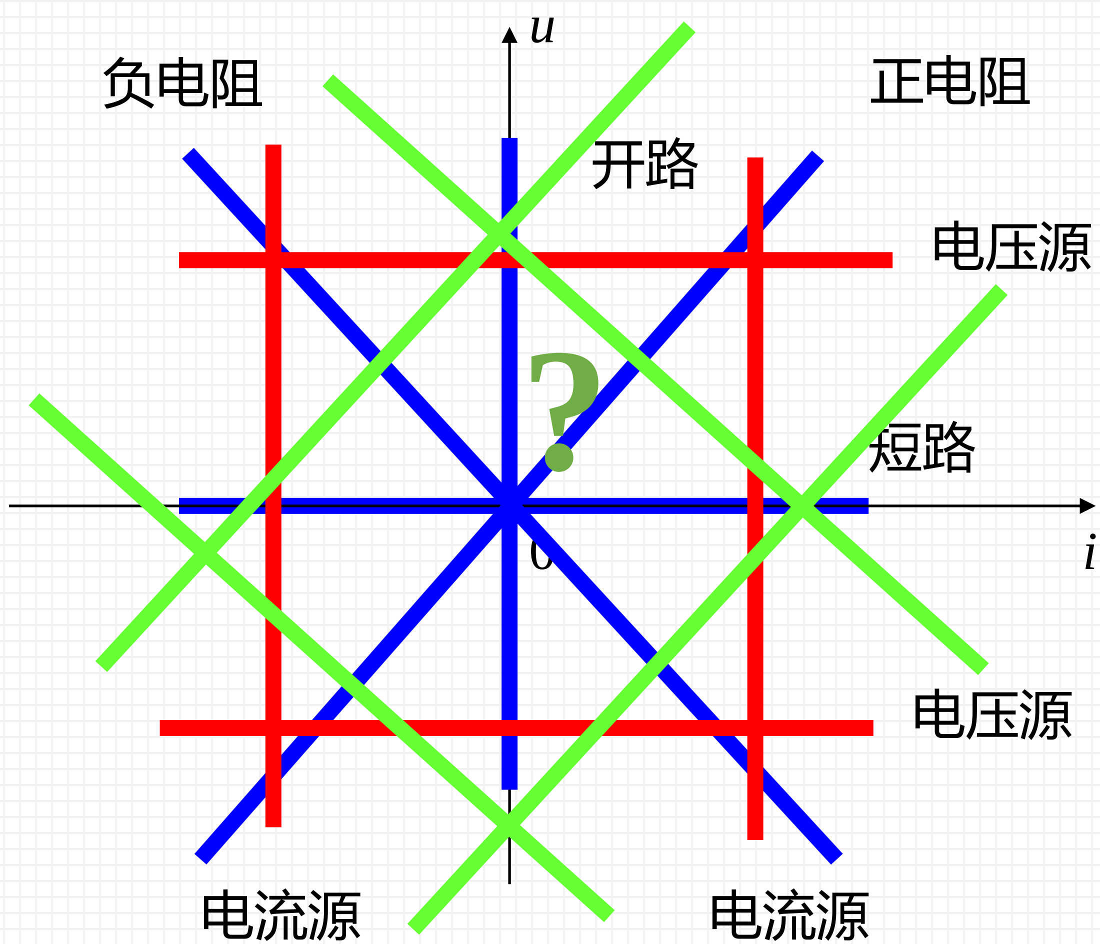


2) 被替代的支路和电路其它部分应**无耦合关系**。

讨论



一般线应该对应怎样的等效电路?



3 戴维南定理和诺顿定理 (*Thevenin-Norton Theorem*)

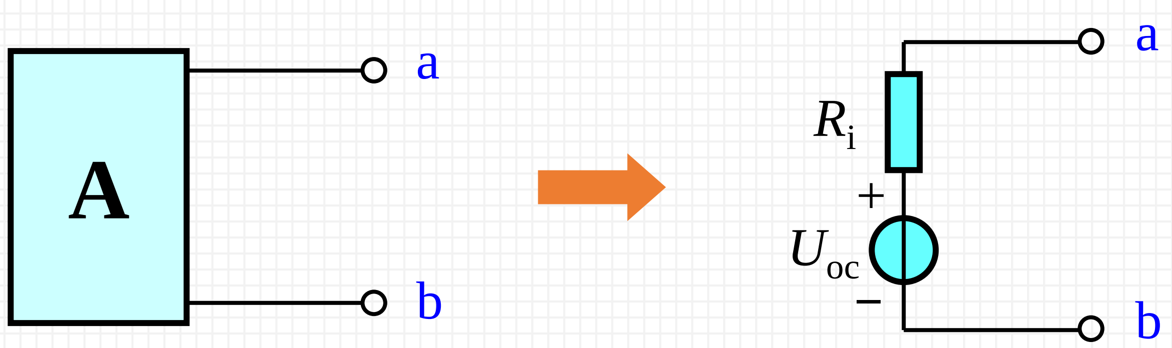
戴维南定理

任何一个**含**有独立电**源**、线性电阻和线性受控源的**一端口网络**，

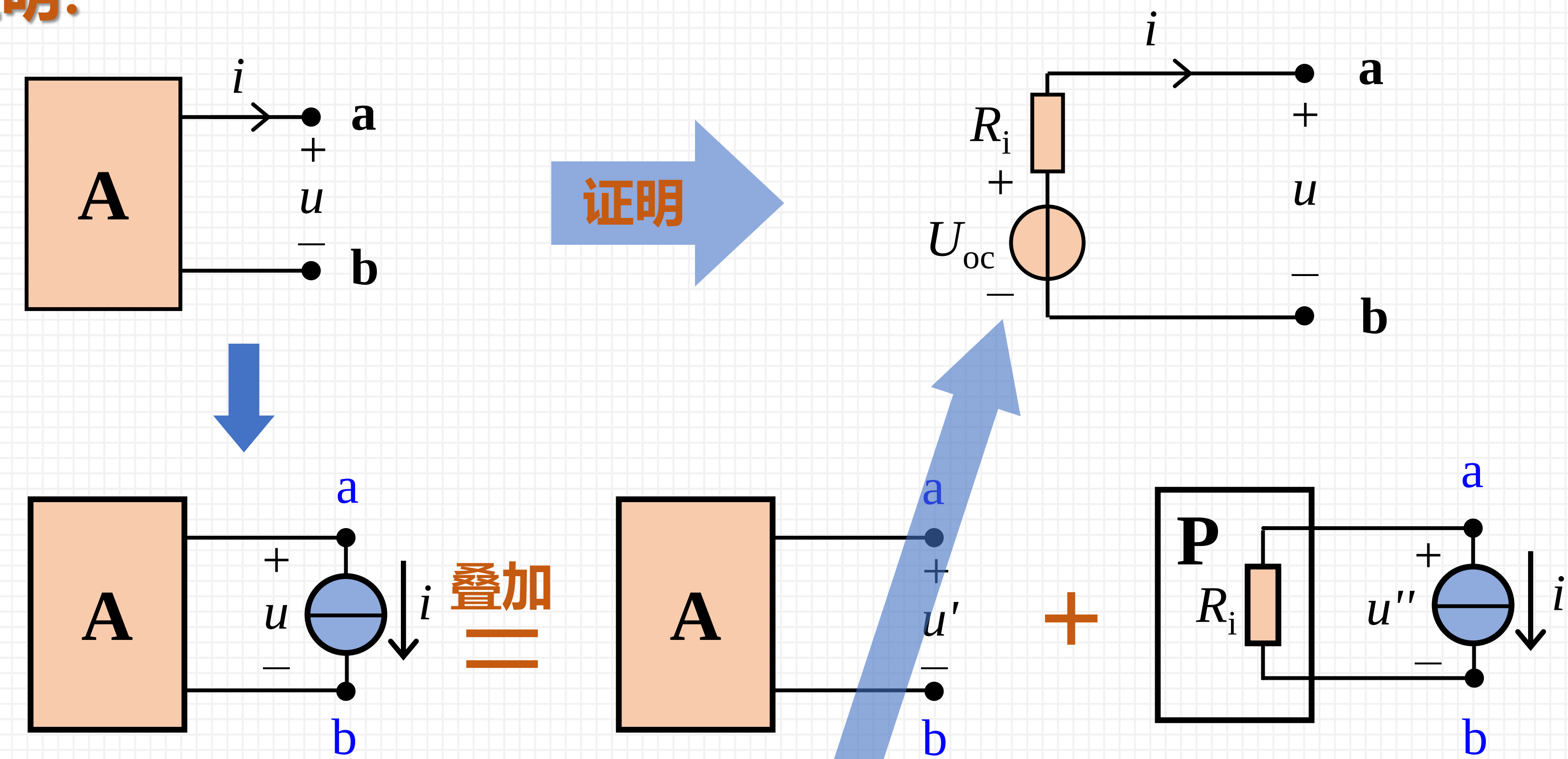
可以用一个**独立电压源** U_{oc} **和电阻** R_i **的串联**组合来**等效**替代，

其中电压 U_{oc} 等于端口**开路电压**，

电阻 R_i 等于端口中所有独立电源置零后端口的**入端等效电阻。**



证明:



电流源 ***i*** 为零　　　　网络**A**中独立源全部置零

$$\begin{cases} u' = U_{oc} \\ u'' = -R_i i \end{cases}$$

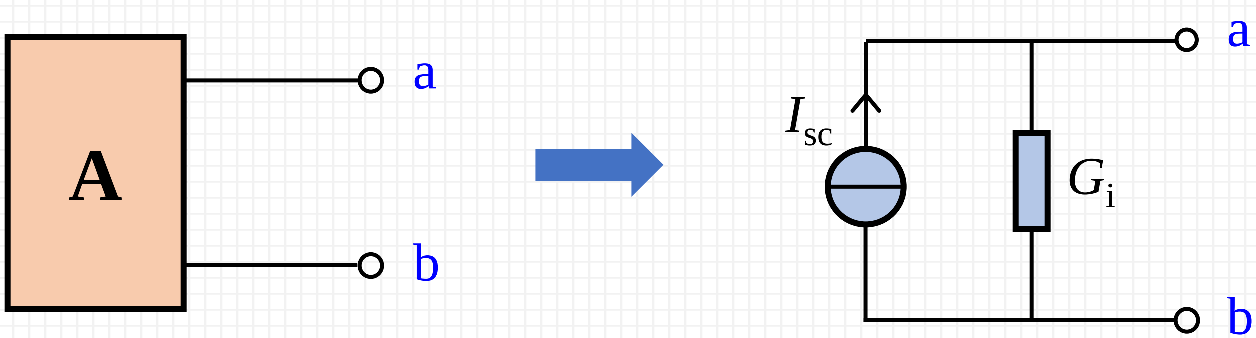
(外电路开路时a 、b间开路电压)

得　$u = u' + u'' = U_{oc} - R_i i$

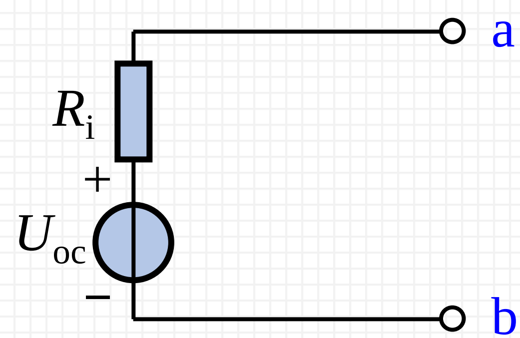
诺顿定理

任何一个含独立电源、线性电阻和线性受控源的一端口，
可以用一个**电流源和电导的并联**来等效替代，

其中电流源的电流等于该一端口的短路电流I_{sc}，
电阻等于把该一端口的全部独立电源置零后的输入电导G_i。



诺顿等效电路可由戴维南等效电路经**电源等效变换**得到。



Hermann von Helmholtz
1821–1894

Léon Charles Thévenin
1857–1926

Hans Ferdinand Mayer
1895–1980

Edward Lawry Norton
1898–1983

戴维南定理（Thevenin's theorem，也译作戴维宁定理）是由法国科学家L.C.戴维南于1883年提出的一个电学定理（由于早在1853年，**亥姆霍兹**也提出过本定理，所以又称亥姆霍兹-戴维南定理）。

诺顿定理是戴维南定理的一个延伸，于1926年由两人分别提出，他们分别是Hause-Siemens研究员汉斯·费迪南·**梅耶尔**(1895年-1980年)及贝尔实验室工程师爱德华·罗里·**诺顿**(1898-1983)。实际上梅耶尔是两人中唯一有在这课题上发表过论文的人，但诺顿只在贝尔实验室内部用的一份技术报告上提及过他的发现。

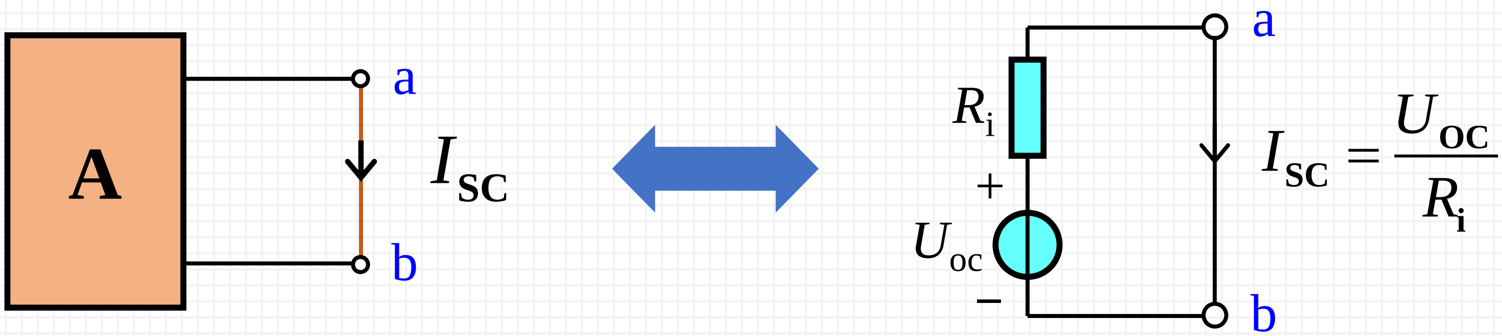
求入端等效电阻的方法:

② ③ 可用于含受控源的线性电路

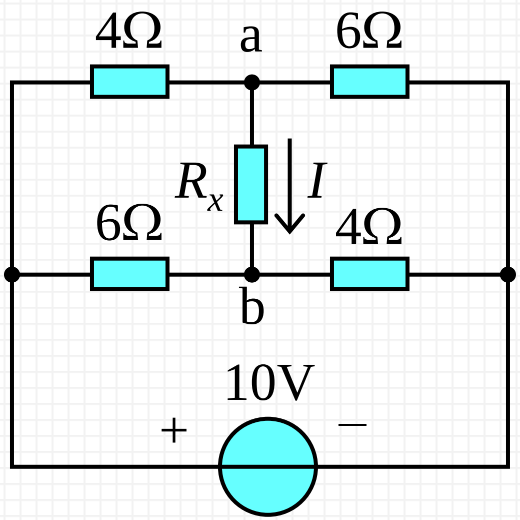
① 无受控源时电阻等效变换(独立源置零)

② 加压求流或加流求压(独立源置零)

③ 开路电压 / 短路电流 $R_i = \dfrac{U_{OC}}{I_{SC}}$



例5

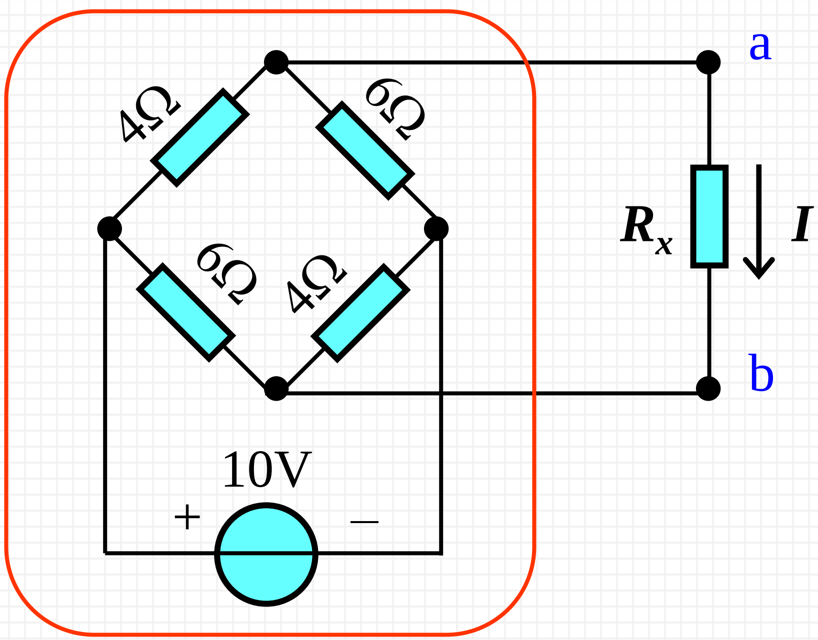


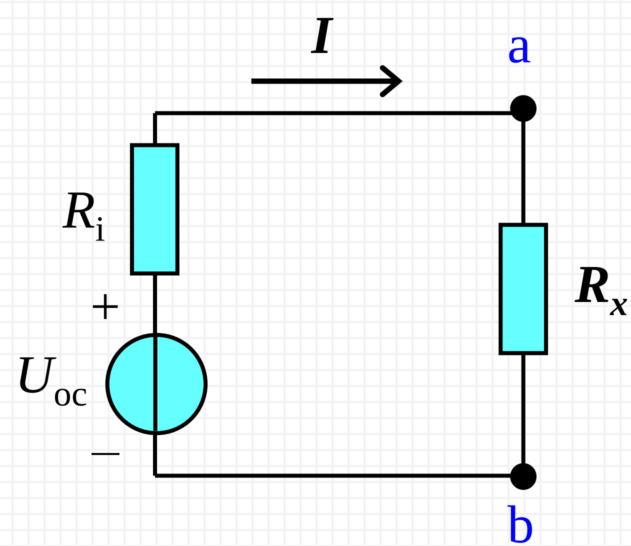
当 R_x=1.2Ω 或 5.2Ω 时计算 I;

Y-Δ 变换 / 节点法 / 回路法?

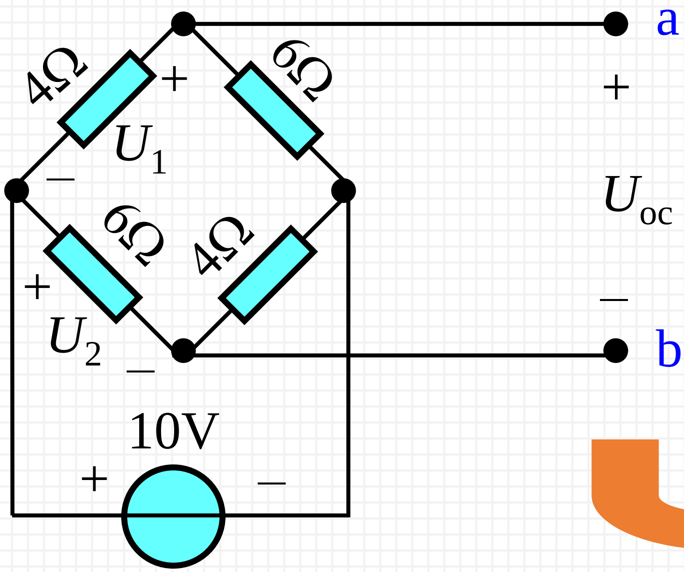
求从 R_x 看进去的戴维南等效电路:

解:





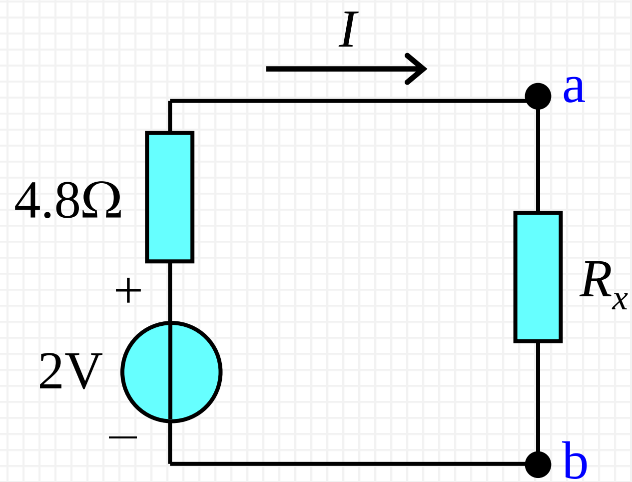
(1) 开路电压



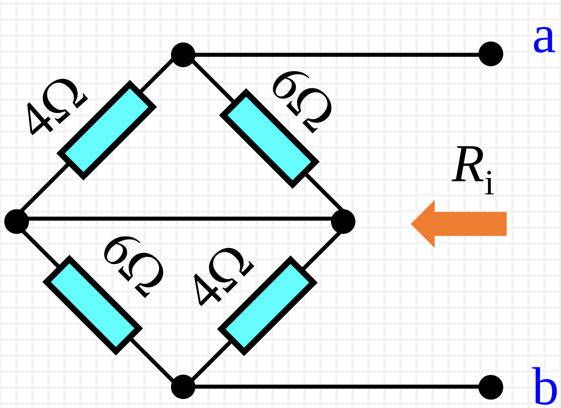
$$U_{oc} = U_1 + U_2$$

$$= -10\times4/(4+6)+10\times6/(4+6)$$

$$= -4+6=2\text{V}$$



(2) 等效电阻 R_i



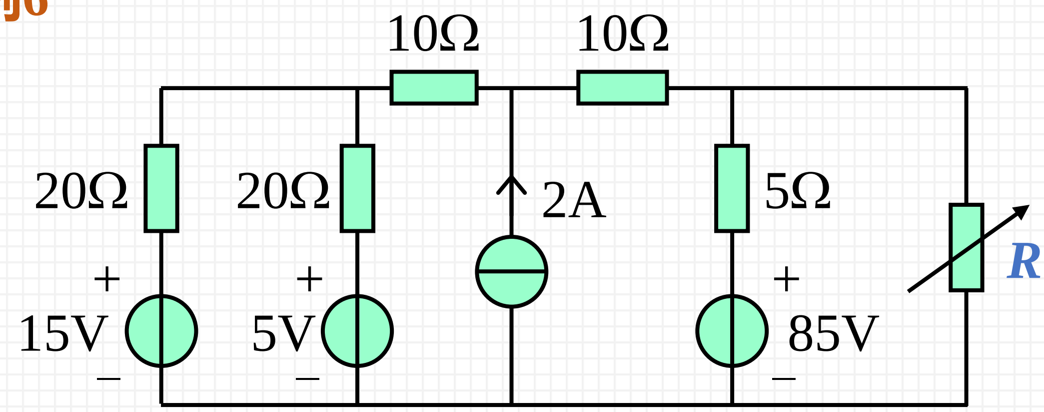
R_i=4//6+6//4=4.8Ω

(3) R_x = 1.2Ω 时，$I = U_{oc}/(R_i + R_x) = 0.33\text{A}$

R_x = 5.2Ω 时，$I = U_{oc}/(R_i + R_x) = 0.2\text{A}$

总结戴维南定理适用的题型

例6

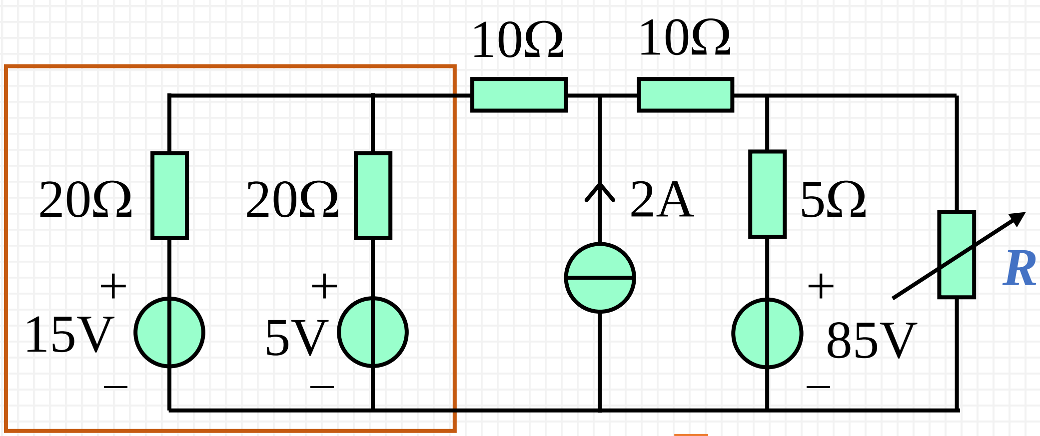


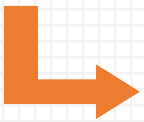
R 多大时能从电路中获得最大功率，并求此最大功率。

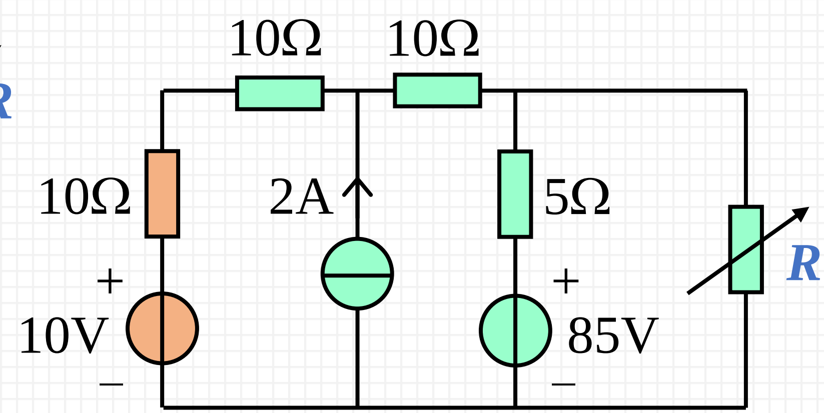
3种方法:
(1) 写*P*与*R*的函数关系，求导。
(2) 电源等效变换。
(3) 戴维南定理。

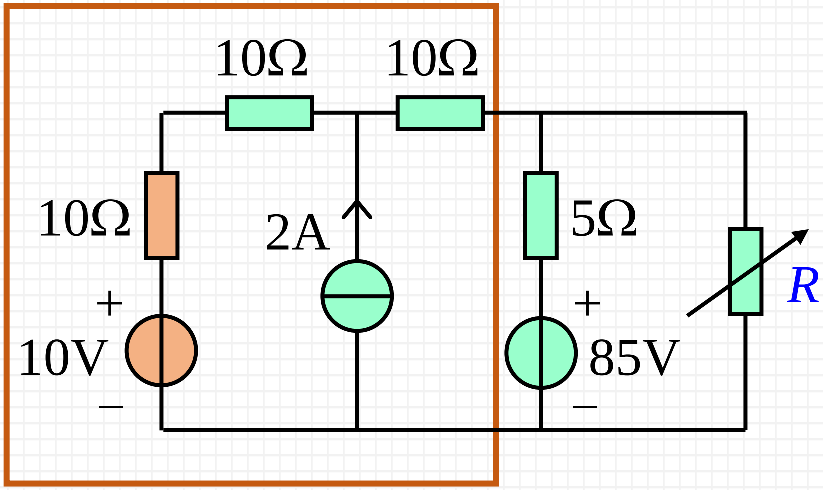
解: 与戴维南定理相关的几个问题:

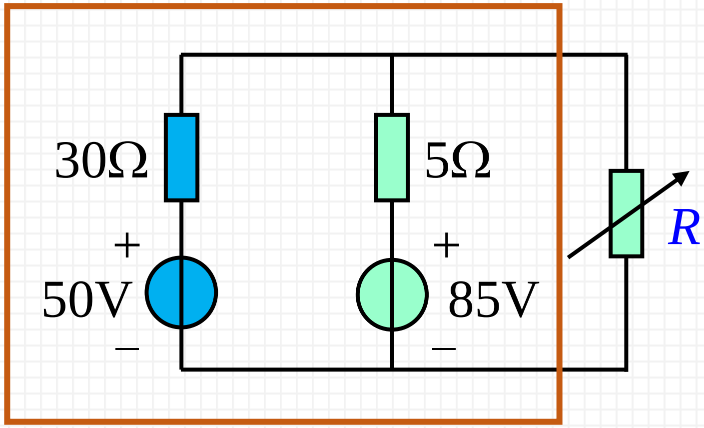
(1) 何时用
(2) 从哪看
(3) 怎么求

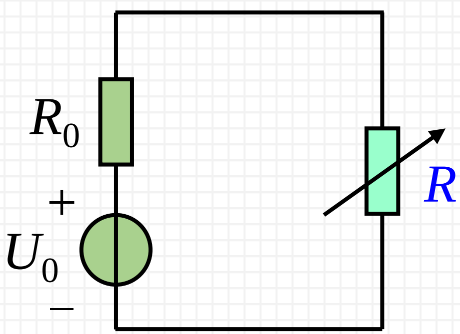












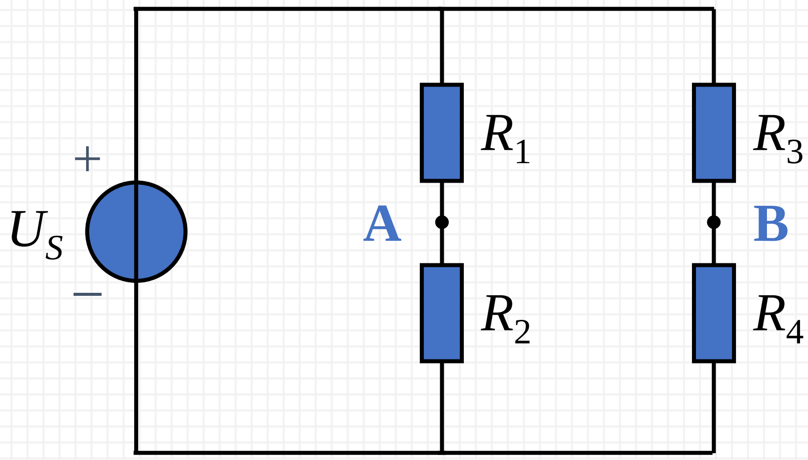
$$U_{oc}=\frac{5}{35}\times 50+\frac{30}{35}\times 85=80\text{V}$$

$$R_i=\frac{30\times 5}{35}=4.29\Omega$$

R =4.29Ω 获最大功率。

$$P_{max}=\frac{80^2}{4\times 4.29}=373\text{W}$$

戴维南定理的应用1：平衡电桥



$$U_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_s \qquad U_B = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_s$$

如果 $R_1 R_4 = R_2 R_3$

A-B等电位点 → **电桥平衡**

为什么?

等电位点间接任意电阻(含开短路)不影响电路的电压电流分布。

戴维南定理的应用2：

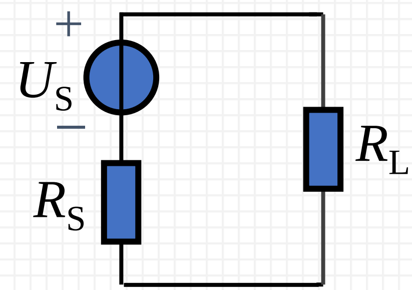
电压型信号处理电路3个最重要的性质

从信号传输的角度：

R_L大好，R_S小好

R_L和R_S不满足

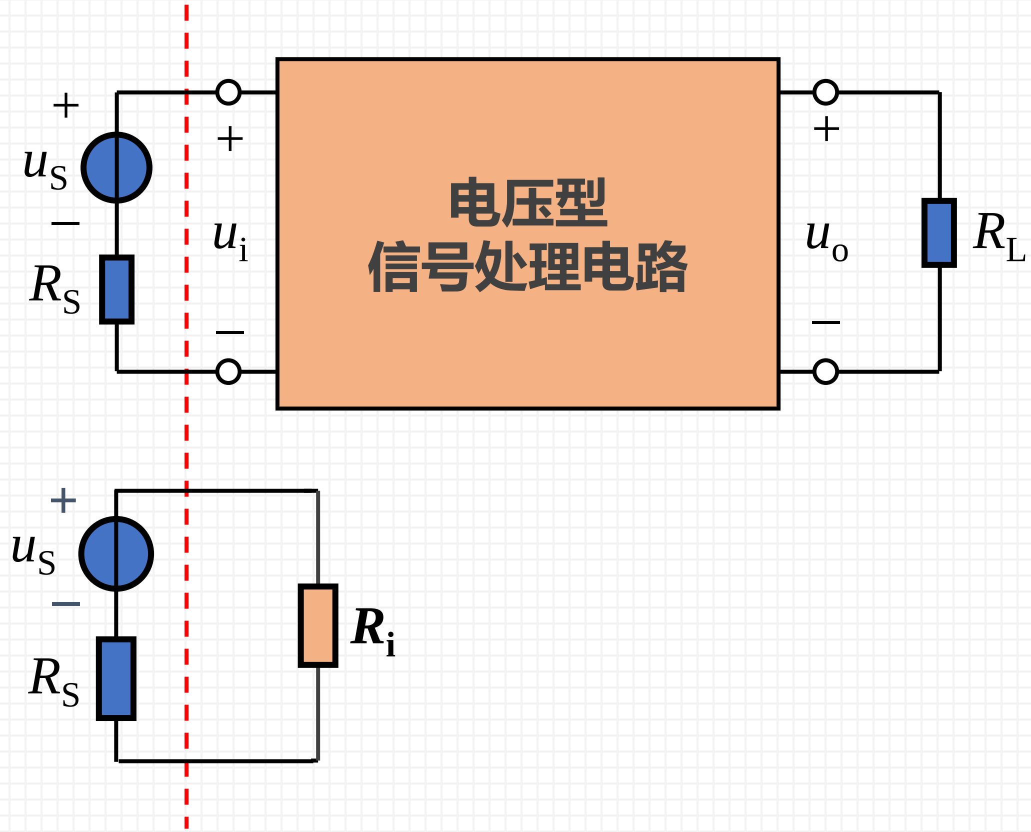
得有处理电路



电压放大倍数 $$A_u = \frac{u_o}{u_i}$$

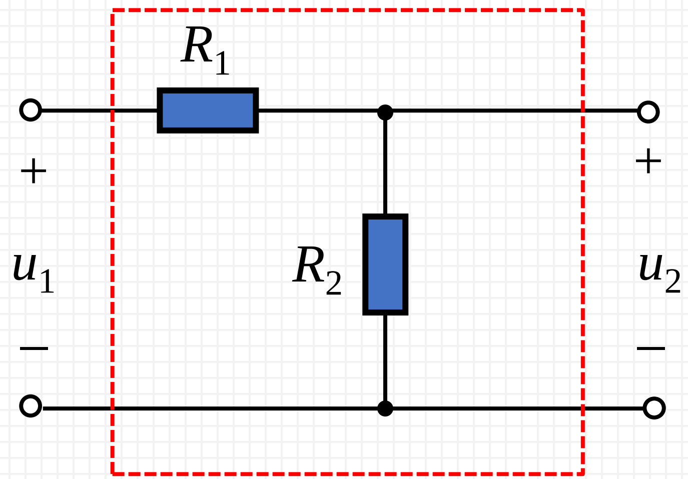
输入电阻R_i 从u_i两端向输出端方向看，那个一端口网络的等效电阻(接或不接负载)

输出电阻R_o 从u_o两端向输入端方向看，那个一端口网络的戴维南电阻



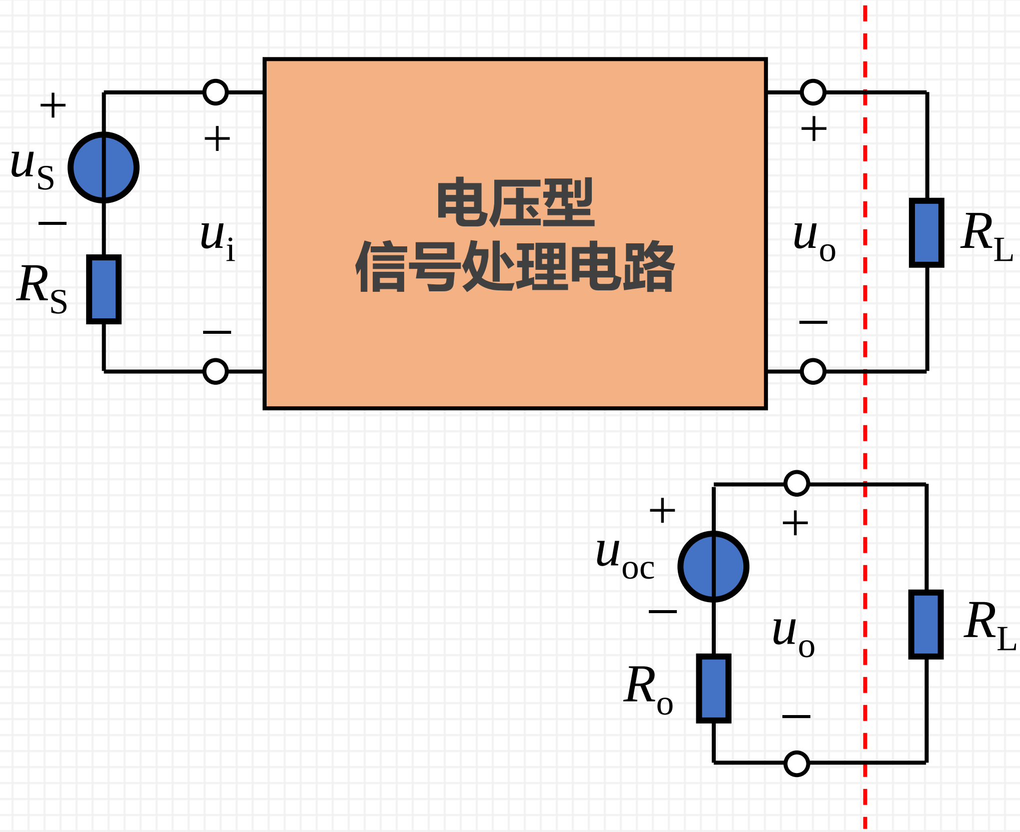
输入电阻R_i 什么值合适?

R_i越大越好 ⟶ 对信号源的影响小



输出端开路，虚线框所示电压型信号处理电路的输入电阻是?

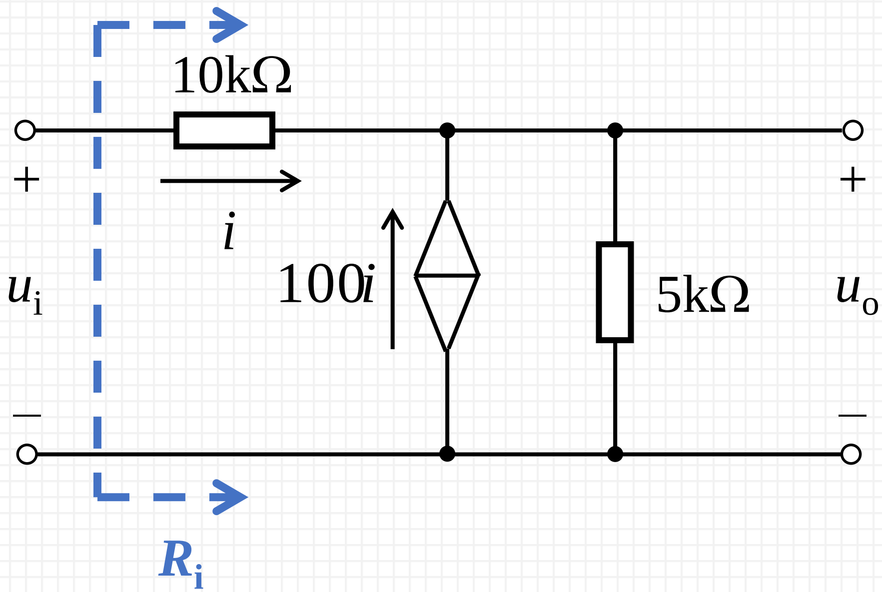
R_1+R_2

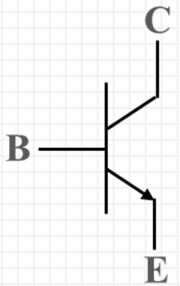


输出电阻R_o 什么值合适?

R_o越小越好 → 信号处理电路提供信号的能力强（带载能力强）

例7 求图示放大器的输入电阻 (u_o开路)





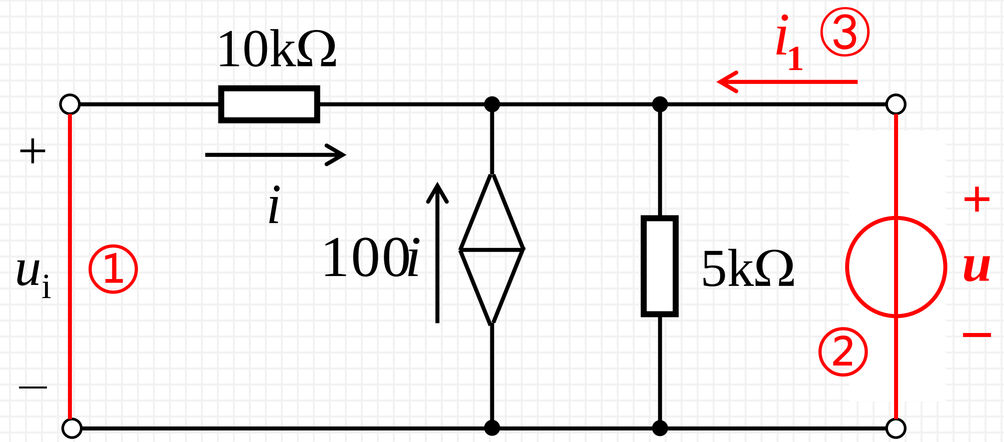
双极型晶体管共集放大器

小信号等效电路

$$10\mathrm{k}i + 5\mathrm{k}(100+1)i = u_i \quad \Rightarrow \quad R_i = \frac{u_i}{i} = 515\mathrm{k}\Omega$$

对信号源的影响小

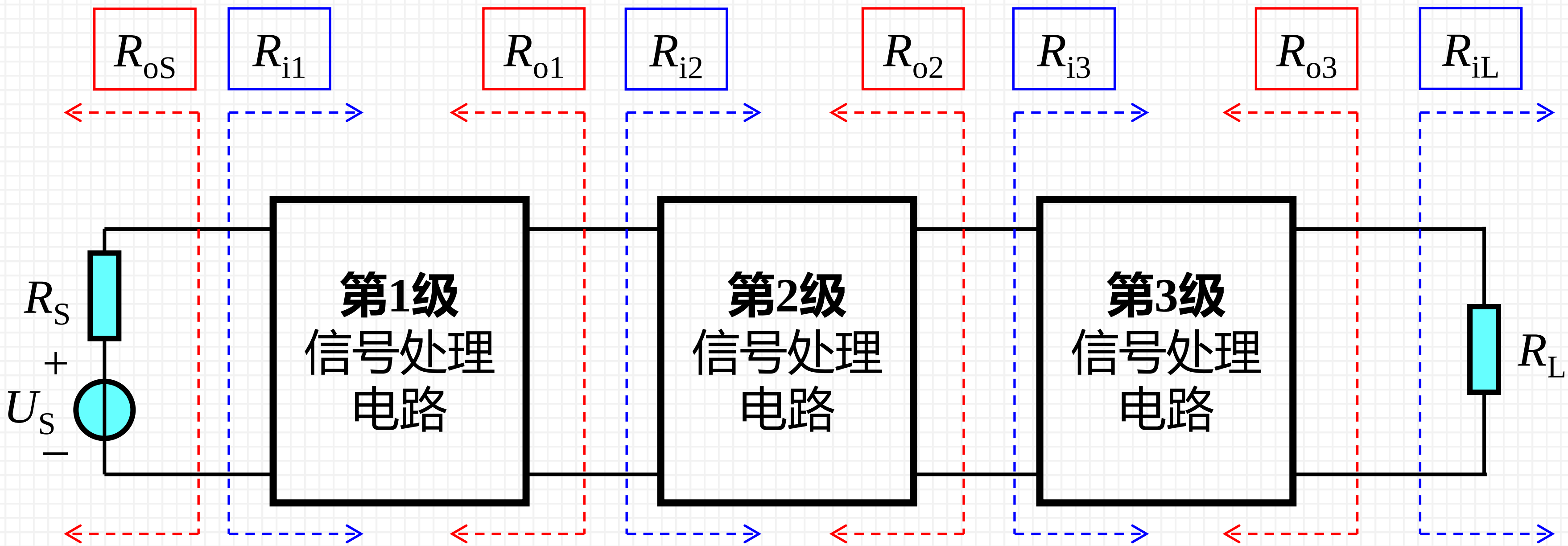
双极型晶体管共集放大器小信号等效电路的**输出电阻**如何求?

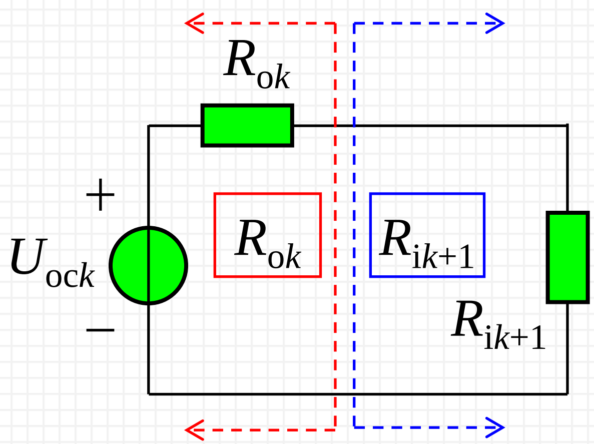


加压求流法!

$$R_O = \frac{u}{i_1} \approx 100\Omega$$ (课后练习求解)

带载能力强





每一级信号处理电路的$\boldsymbol{R_i}$为

从信号**输入端**向输出端看的**戴维南电阻**

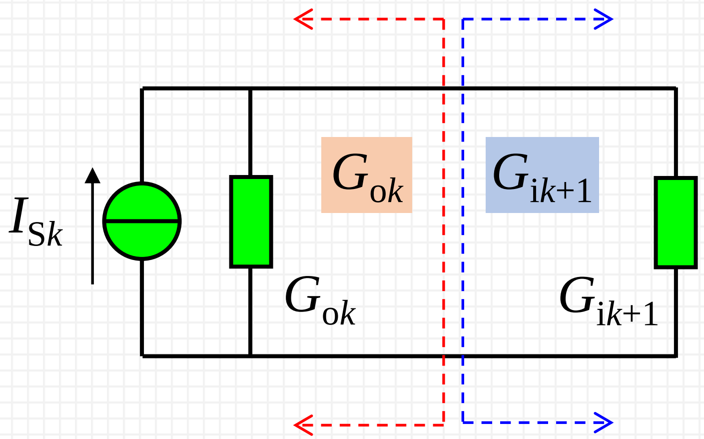
每一级信号处理电路的$\boldsymbol{R_o}$为

从信号**输出端**向输入端看的**戴维南电阻**

R_i越大越好 → 从前一级信号处理电路获得的电压大 → 对前级影响小

R_o越小越好 → 给后一级信号处理电路的电压大 → 带载能力强

关于输入 - 输出电阻的讨论(电流型)



自己思考

G_i 越大越好 ⟶ 从前一级信号处理电路获得的电流大

⟶ 对前级影响小

G_o 越小越好 ⟶ 给后一级信号处理电路的电流大

⟶ 带载能力强