习题讨论课1题目：多元函数极限、连续

零、回顾

1. 在微积分中，极限与距离有关。在有限维线性空间中，距离通常由范数确定，范数 $\|\cdot\|$ 是一个函数，满足

   (a) 正定：$\forall \mathbf{x}$，$\|\mathbf{x}\| \geq 0$；$\|\mathbf{x}\| = 0$ 当且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$；

   (b) 正齐次：$\forall \mathbf{x}$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$；

   (c) 三角形不等式：$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}$，$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$。

   $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ 确定了线性空间中 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 之间的距离。

   在（实数域或复数域上的）有限维空间中，所有范数是等价的：对任意两个范数 $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$，总存在常数 $b > a > 0$ 使得对任意 $\mathbf{x}$，

   $$a\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|' \leq b\|\mathbf{x}\|.$$

   从而，极限、连续、可微等概念与空间中范数的选择无关。在处理实际问题时，可以选用方便的范数。常用范数有：欧氏范数 $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{m} |x_i|^2}$，$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum\limits_{k=1}^{m} |x_i|$，以及 $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\limits_{1 \leq k \leq m} |x_i|$。

2. 点列收敛和点列极限：$\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x} \iff \lim\limits_{n \to +\infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| = 0$。

3. 一些拓扑概念

   (a) 闭集：E 中任何收敛点列的极限也在 E 中；

   (b) 聚点：存在 $\mathbf{x}_n \in E$，满足 $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}$，且 $\mathbf{x} = \lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{x}_n$。

   (c) 邻域：U 是 $\mathbf{a}$ 的邻域 $\iff \exists \delta > 0$ 使得 $\forall \mathbf{x}, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \mathbf{x} \in U$。

   (d) 内点：$\mathbf{a}$ 是 E 的内点 $\iff E$ 是 $\mathbf{a}$ 的邻域。

   (e) 开集：U 是其每个点的邻域。

   (f) 边界点：$\mathbf{a}$ 既不是 E 的内点，也不是 $\mathbb{R}^m \backslash E$ 的内点。**后面学习曲面积分时，涉及曲面的边界，与这里拓扑边界有区别。**

   (g) 连续：$f : E \to \mathbb{R}^n$ 在 $\mathbf{a}$ 连续，$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ 使得

   $$\forall \mathbf{x} \in E, \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})\| < \varepsilon.$$

   (h) （道路）连通：$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$，存在连续映射 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^m$ 使得 $f(t) \in E$（$\forall 0 \leq t \leq 1$），$f(0) = \mathbf{x}$，$f(1) = \mathbf{y}$。

4. 一些结论：

(a) 在 $\mathbb{R}^m$ 中，点列收敛当且仅当每个坐标数列收敛；有界点列总有收敛子列；任何 Cauchy 点列都收敛。

(b) 连续映射把有界闭集映为有界闭集（最大值最小值定理）；连续映射把（道路）连通集映为（道路）连通集（介值定理）。

一、多元函数极限的多种形式

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$：

   - $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，$\forall(x,y):0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta(\varepsilon)$，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.
   - $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，$\forall(x,y):0<\max\{|x-x_0|,|y-y_0|\}<\delta(\varepsilon)$，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.
   - (x_0,y_0) 的邻域与去心邻域有多种形式，根据具体情况选定

2. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}} f(x,y)=A$：

   $\forall\varepsilon>0$，$\exists M(\varepsilon)>0$，$\forall(x,y):|x|>M(\varepsilon),|y|>M(\varepsilon)$，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

3. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to+\infty}} f(x,y)=A$：

   $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，$\forall(x,y):0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon),y>\frac{1}{\delta(\varepsilon)}$，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\y\to y_0}} f(x,y)=A$：

   $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，$\forall(x,y):x<-\frac{1}{\delta(\varepsilon)},|y-y_0|<\delta\varepsilon$，都有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$.

上述这些极限过程与 $(x,y)\to\infty$ 有什么不同？

例 1. 求 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right|^{x^2}$.

例 2. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin xy}{x}, & x\neq 0;\\ y, & x=0,\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$。讨论在其他点 (x_0,y_0) 的极限：$(x_0,y_0)\neq(0,0)$？

例 3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$

二、累次极限与重极限

例 4. $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$

例 5. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{3xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

例 6. $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，证明：$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$，而二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 不存在.

例 7. 记 $D=\{(x,y)|x+y\neq 0\}$，$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y},(x,y)\in D$. 证明：$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=1,\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=-1$，但是 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in D}}f(x,y)$ 不存在。

一般结论：

1. 重极限与累次极限，它们的存在性没有必然的联系。

2. (1) 若重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A$ 且对 x_0 的一个去心邻域中极限 $\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$。从而 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A$。

   (2) 若重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 均存在，则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$。

   (3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 均存在但不等，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 不存在。

3. 函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某去心邻域内有定义，若

   (a) 存在 x_0 的去心邻域 $U=\{x|0<|x-x_0|<r\}$，使得 $\forall x\in U$，$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=g(x)$存在；

   (b) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=h(y)$ 关于 y_0 的某个去心邻域 $\{y|0<|y-y_0|<\eta\}$ 上**一致**，

   则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 和 $\lim\limits_{y\to y_0}h(y)$ 都存在，并且相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$。

   证明. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=h(y)$ 关于 y_0 的某个去心邻域 $\{y|0<|y-y_0|<\eta\}$ 上一致，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$ 使得 $\forall x,x':0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon),0<|x'-x_0|<\delta(\varepsilon)$ 以及 $\forall y:0<|y-y_0|<\eta$，都有

$$|f(x,y)-h(y)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |f(x',y)-h(y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

   从而

$$|f(x,y)-f(x',y)|\leq|f(x,y)-h(y)|+|f(x',y)-h(y)|<\varepsilon.$$

令 $y \to y_0$（此时 $\delta(\varepsilon)$ 与 y 无关保持不变），则 $|g(x)-g(x')| \le \varepsilon$。故由 Cauchy 准则，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，记 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$。

让 $x' \to 0$，得到：对任意 $0 < |x-x_0| < \delta(\varepsilon)$，$|g(x)-A| \le \varepsilon$。

下证 $\lim\limits_{y\to y_0} h(y) = A$。

对任意 $y : 0 < |y-y_0| < \eta$ 以及任意 $x : 0 < |x-x_0| < \delta(\varepsilon)$，

$$\begin{aligned}|h(y)-A| &\le |h(y)-f(x,y)| + |f(x,y)-g(x)| + |g(x)-A| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |f(x,y)-g(x)| + \varepsilon.\end{aligned}$$

固定一个 $x : 0 < |x-x_0| < \delta(\varepsilon)$，于是，存在 $0 < \delta'(x,\varepsilon) < \eta$ 使得对任意 $0 < |y-y_0| < \delta'(x,\varepsilon)$，$|f(x,y)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$。所以

$$|h(y)-A| < 2\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{y\to y_0} h(y) = A$。 □

讨论：如何验证“$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = h(y)$ 关于 y_0 的某个去心邻域 $\{y|0 < |y-y_0| < \eta\}$ 上一致”呢？

我们给出以下这个容易验证的（充分）条件：存在常数 $M > 0$ 使得在 (x_0,y_0) 的一个去心邻域中，都有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| < M.$$

此时

$$|f(x,y)-f(x',y)| \le M|x-x'|$$

从而 $f(x,y)$ 当 $x \to x_0$ 时满足 Cauchy 条件，并且对 y_0 附近的 y 一致。

4. 3 中条件是否蕴涵重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在？

5. 如果 f 在 (x_0,y_0) 的一个矩形邻域内连续，则是否有 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) = \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = f(x_0,y_0)$？

例 8. 求下列极限：

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} (x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$；

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\ln(x^2+y^2)$；

3. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；

4. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x+y)}$;

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\mathrm{e}^{x^2y^2}}$

例 9. 记 $D=\{(x,y)|x+y\neq 0\}$，讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^6}{x^3+y^3}$ 是否存在？

此例说明，对多元多项式，无穷小比阶不能仅看多项式的次数。

例 10. 设一元函数 $f(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续可微，定义 $g(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\quad(x\neq y)$，求 $\lim\limits_{(x,y)\to(t,t)}g(x,y)$。

问：如果 f' 不连续，结论对吗？

三、极限与连续的性质

例 11. 若 $z=f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$，证明函数 f 在 $\mathbb{R}^2$ 上一定有最小值点。

例 12. $f(\mathbf{x})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续,且

1. $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 时, $f(\mathbf{x})>0$，

2. $\forall c>0$, $f(c\mathbf{x})=cf(\mathbf{x})$

证明：存在 $a>0,b>0$ 使得 $a\|\mathbf{x}\|\leq f(\mathbf{x})\leq b\|\mathbf{x}\|$。

例 13. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0;\\ y, & x=0\end{cases}$，讨论其在定义域中的连续性。