# 习题讨论课4题目：曲线，Taylor公式，极值

## 一. 空间曲线的表达形式，切线和法平面

1. 空间曲线的参数形式

   **曲线方程**

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} (\alpha \le t \le \beta), \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} (\alpha \le t \le \beta)$$

   $x(t), y(t), z(t)$ 可微，且 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 不全为零。

   **切线：**

$$\begin{cases} x = x_0 + x'(t_0)(t - t_0) \\ y = y_0 + y'(t_0)(t - t_0) \\ z = z_0 + z'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

   或（消去参数 $t$ ）

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

   **法平面：** 曲线切向量是法平面的法向量

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + x'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

2. 空间曲线的方程组形式

   **曲线方程**

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \quad (S_1) \\ G(x, y, z) = 0 \quad (S_2) \end{cases}$$

   几何解释：两个曲面 $S_1$ 与 $S_2$ 的交线，其中 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y,z)}$ 满行秩（或者等价地，$\nabla F$ 和 $\nabla G$ 线性无关）。隐函数定理保证在任何点的局部 $x, y, z$ 中总有两个变量可以写成第三个变量的可微函数。

   **切线**

$$\begin{cases} F_1(P_0)(x - x_0) + F_2(P_0)(y - y_0) + F_3(P_0)(z - z_0) = 0 \quad (S_1\text{的切平面}) \\ G_1(P_0)(x - x_0) + G_2(P_0)(y - y_0) + G_3(P_0)(z - z_0) = 0 \quad (S_2\text{的切平面}) \end{cases}$$

   其中 $P_0(x_0, y_0, z_0)$。几何解释：曲面交线的切线是切平面的交线，切线上的向量 $P - P_0$ 与 $\nabla F(P_0)$ 和 $\nabla G(P_0)$ 都垂直。

**切向量**

$$\nabla F(P_0)\times\nabla G(P_0)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ F_1(P_0) & F_2(P_0) & F_3(P_0)\\ G_1(P_0) & G_2(P_0) & G_3(P_0)\end{vmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\det\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\\ \det\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\\ \det\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\end{pmatrix}_{P_0}$$

（形式上，分母中 $x,y,z$ 轮转；向量的第几个分量，其分母就缺第几个自变量。分子中函数的顺序是按叉乘中向量的顺序）

**法平面**

法平面上的向量 $P-P_0$ 是 $\nabla F(P_0)$ 和 $\nabla G(P_0)$ 的线性组合

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ F_1(P_0) & F_2(P_0) & F_3(P_0)\\ G_1(P_0) & G_2(P_0) & G_3(P_0)\end{vmatrix}=0$$

或（切向量是法平面的法向量）

$$\det\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\bigg|_{P_0}(x-x_0)+\det\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\bigg|_{P_0}(y-y_0)+\det\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\bigg|_{P_0}(z-z_0)=0$$

**例 1.** 求螺线 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=ct\end{cases}\quad(a>0,c>0)$ 在点 $M(\frac{a}{\sqrt2},\frac{a}{\sqrt2},\frac{\pi c}{4})$ 处的切线与法平面。

**例 2.** 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6=0\\ z-x^2-y^2=0\end{cases}$ 在点 $M_0(1,1,2)$ 处的切线方程。

**例 3.** 设曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$，求曲线上一点，使曲线在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$。

## 二、Taylor 公式

**例 4.** 函数 $x^y$ 在 $x=1,y=0$ 处的二阶 Taylor 多项式

**例 5.** 函数 $f(x,y)=\frac{\cos x}{y+1}$在点 $(0,0)$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式。

**例 6.** 函数 $\sin(xy)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式

。

**例 7.** $x+y+z+xyz^3=0$ 在点 $(0,0,0)$ 邻域内确定隐函数 $z=z(x,y)$. 求 $z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式。

**三、无条件极值**

**例 8.** 求函数$f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$ 的所有局部极值.

**例 9.** 求函数 $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 的极值.

**例 10.** （隐函数的极值）设 $z=z(x,y)$ 由 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定，求该函数的极值。

**四、条件极值**

**例 11.** 例10 可以该写为条件极值问题

$$\begin{cases} f(x,y,z)=z, \\ \text{s.t.}\quad 2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0. \end{cases}$$

**例 12.** 求原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 的最短距离.

**例 13.** 当 $x,y,z>0$ 时，求函数 $u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值，这里 $r>0$. 由此进一步证明，对于任意正实数 $a,b,c$，下述不等式成立

$$ab^2c^3 \leq 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

**例 14.** 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线（椭圆）的长轴、短轴的长。

**五、多元函数的最大值、最小值及其简单应用**

**例 15.** 求 $z=xy(4-x-y)$ 在 $x=1,y=0,x+y=6$ 所围闭区域 $\bar{D}$ 上的最大值。

**例 16.** 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leq 1$ 上连续，在 $x^2+y^2<1$ 内有二阶连续偏导数，并且满足

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u, & x^2+y^2<1, \\ u(x,y)\geq 0 & x^2+y^2=1. \end{cases}$$

证明：当 $x^2+y^2\leq 1$ 时， $u(x,y)\geq 0$。（提示：可用反证法证明）

**例 17.** 函数 $z(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续，在 $D$ 的边界上 $z(x,y)=0$，在 $D$ 内部偏导数存在，且满足 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=f(z)$，其中 $f$ 是严格单调函数，且 $f(0)=0$，证明 $z(x,y)=0,\forall(x,y)\in D$。

**例 18.** 假设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在全平面除原点之外处处满足等式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}>0.$$

求证原点是 $f(x,y)$ 的唯一极小值点．并且满足

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

**例 19.** 设 $p>0$, $q>0$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。求函数 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ 在平面第一象限 $x>0$,$y>0$ 里满足约束条件 $xy=1$ 的最小值。由此进一步证明 Young 不等式

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geq xy,\quad \forall x,y>0.$$

（注：这是课本第一章总复习题第16题，page 97。在一元微分学里，我们已经学习过利用极值理论证明一些不等式。利用多元极值理论，我们同样可以得到一些的不等式。本题就是一个很好的例子。)