第七章　　波动

§7.1 机械波的形成和特征

§7.2 行波　简谐波

△§7.3　物体的弹性形变

△§7.4　波动方程与波速

§7.5　波的能量

§7.6　惠更斯原理与波的反射和折射

§7.7　波的叠加　驻波

△§7.8-10　声波　地震波　水波

§7.11　多普勒效应

§7.12　行波的叠加和群速度

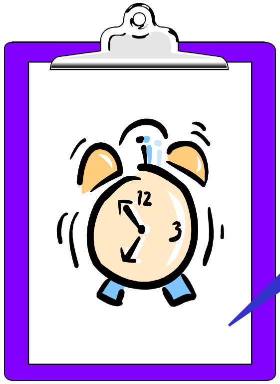
*§7.13　孤子

§7.1 机械波的形成和特征

一. 波的产生

1. 机械波产生的条件

波源　弹性介质

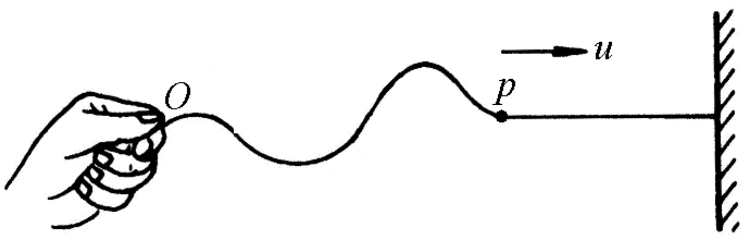


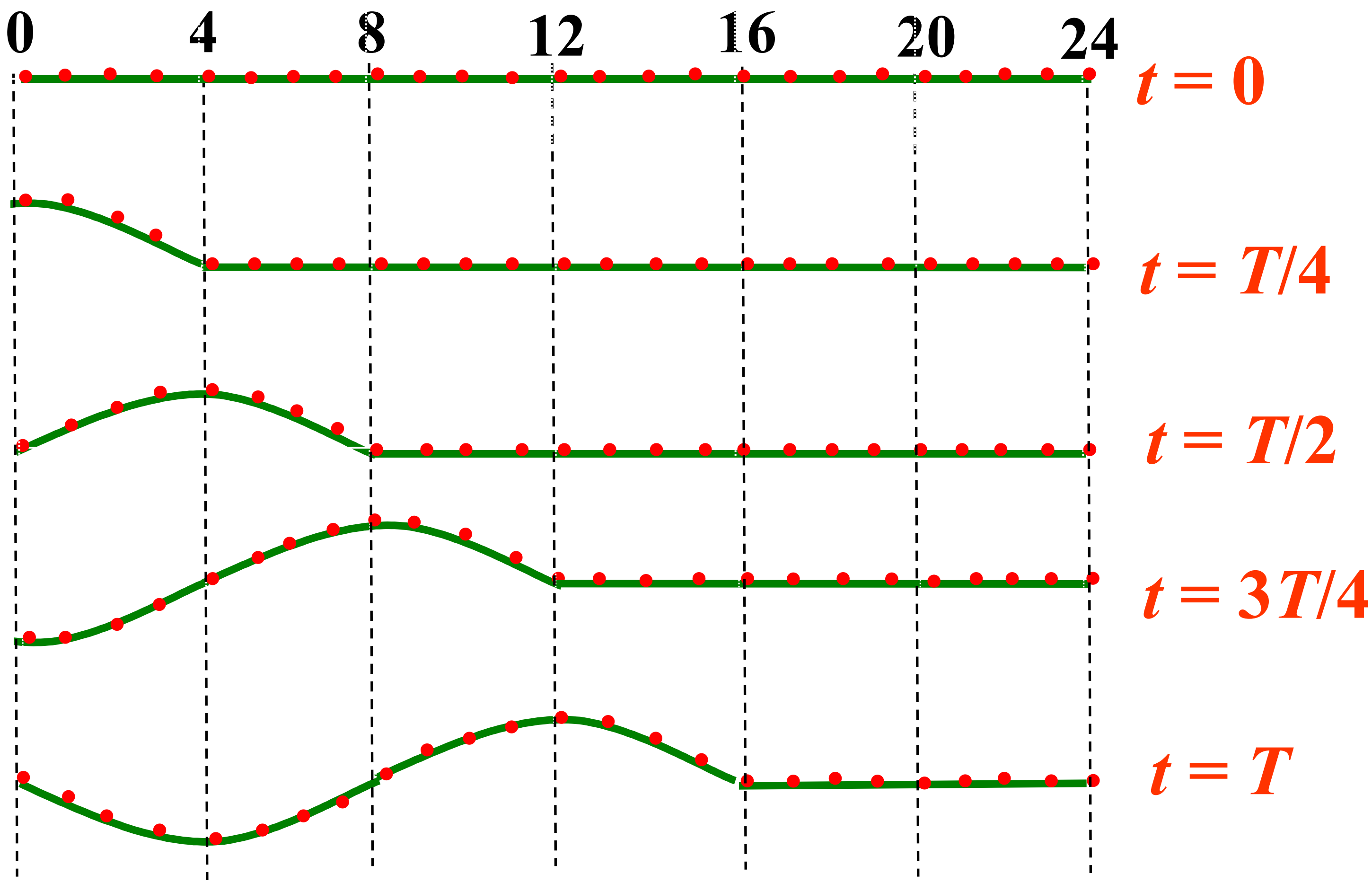
真空

2. 电磁波　波源, 不需传播介质

二. 传播特征

实例：绳上的波




0
4
8
12
16
20
24
t = 0
t = T/4
t = T/2
t = 3T/4
t = T

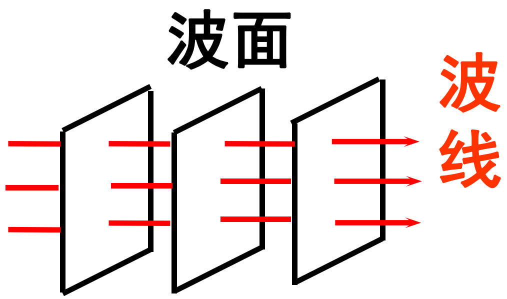
特征

1. 行波是振动状态的传播，而不是介质的传播。
各质元只在自己的平衡位置附近作振动。

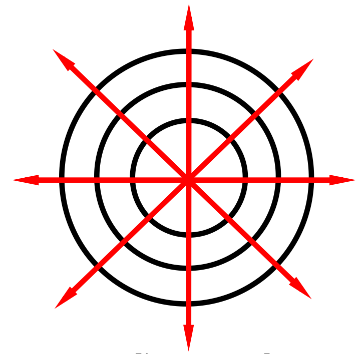
2. 下游各质点的振动依次比上游的启动晚！
t 时刻某质点的振动状态，经Δt 传到下游相距Δx 处（$\Delta t = \Delta x/u$）

换言之：波传播线上的任一质点 x , 在 t 时刻的振动状态是上游x_0处质点， 在 $t - \Delta t$ 时刻的振动状态。

三、波的几何描述



平面波



球面波

波线

表示波的传播方向的射线（波射线）

波面

媒质振动相位相同的点组成的面（同相面）

波阵面

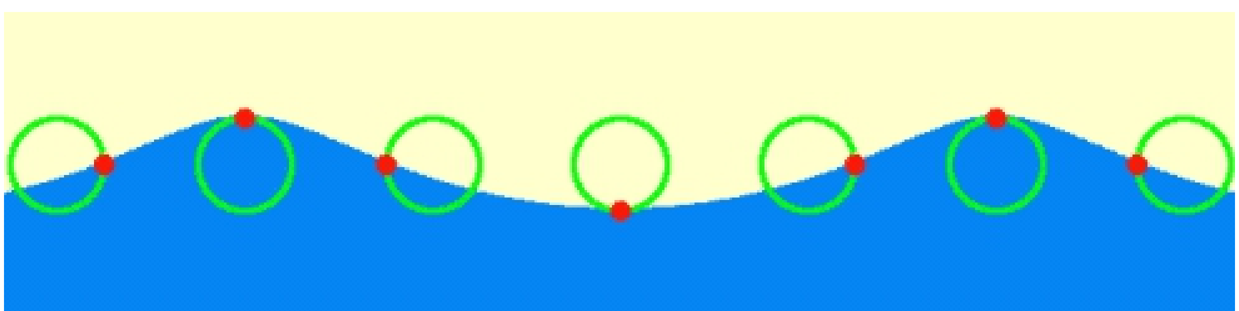
某时刻波到达的各点所构成的面（波前）

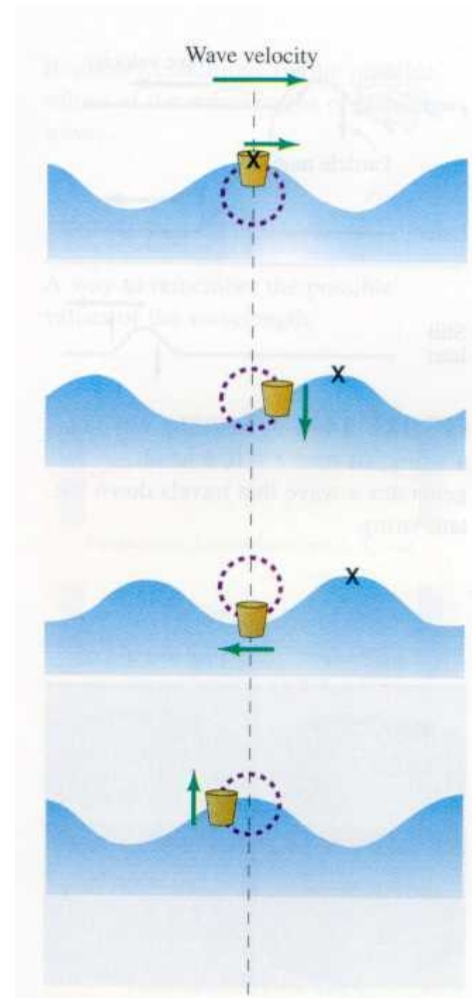
四 、波的分类

按波的性质：机械波、电磁波、…

按波线与振动方向关系：横波、纵波

【演示实验】横、纵波模型





按波面形状
- 平面波
- 球面波
- 柱面波

按复杂程度
- 简谐波
- 复波

按持续时间
- 连续波
- 脉冲波

按是否传播
- 行波
- 驻波

…　…

五、波的特征量

1、波速 u：振动状态传播的速度。

它由介质的性质决定，与波源情况无关。

2、周期T：

一个完整的波通过波线上的某点所需的时间。

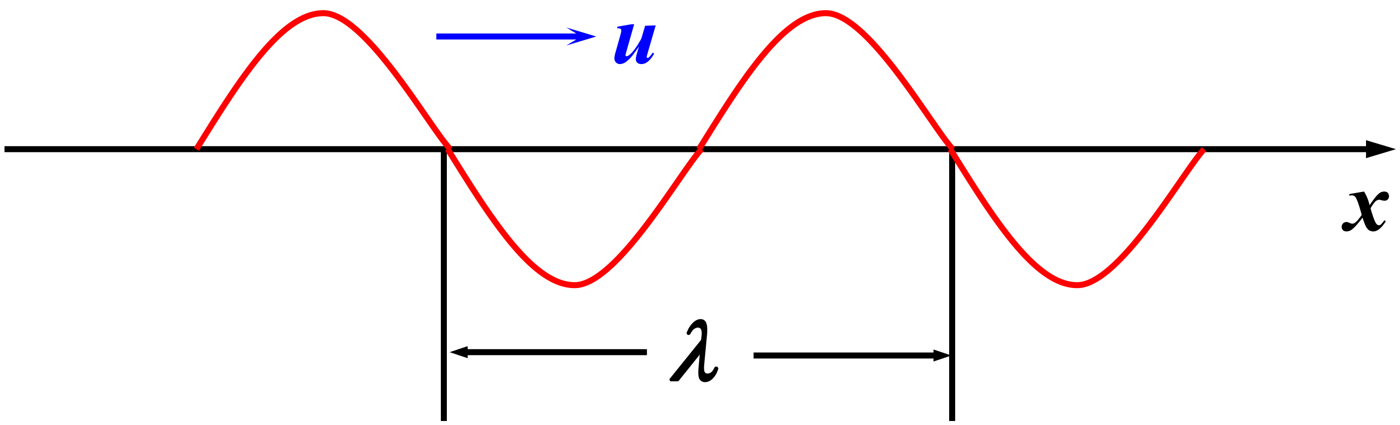
它由波源决定（波源、观测者均不动时）

频率 $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$

角频率 $\boxed{\omega = 2\pi\nu}$

3、波长 λ

波线上相邻的振动状态相同的两质元间的距离。



$$\boxed{\lambda = uT}$$

它由波源和介质共同决定

波长表示波的空间周期性

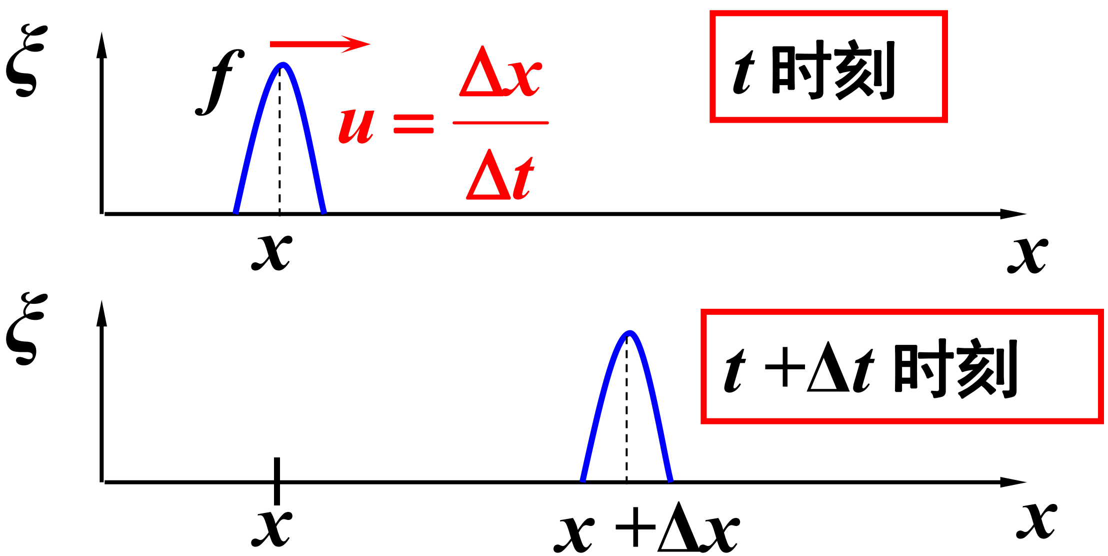
§7.2 行波　简谐波

一、行波

某种物理量的扰动的传播称为行波。

设 ξ 为传播的物理量，它沿 x 轴传播，则

$\boxed{\xi = f(t - \dfrac{x}{u})}$ 为沿 $+x$ 向传播的行波，u 为波速。



$$\because \ \Delta x = u\Delta t$$

$$\therefore \ f(t + \Delta t - \frac{x + \Delta x}{u})$$

$$= f(t - \frac{x}{u})$$

即 $\xi(x+\Delta x, t+\Delta t)=\xi(x, t)$

$\therefore \quad \xi = f(t-\dfrac{x}{u})$ 具有沿+x向传播的性质。

同理，$\xi = f(t+\dfrac{x}{u})$ 具有沿-x向传播的性质。

行波的波函数：

$$\boxed{\xi(x,t) = f\left(t \pm \frac{x}{u}\right)}$$

—— 描述行波传播时，物理量ξ随位置和时间的变化。

二、简谐波

如果波传播的扰动是简谐振动的话，这样的波称为**简谐波**（余弦波，单色波）

1. 一维平面简谐波的波函数

以机械波的横波为例，设平面波沿 x方向以速度 u 传播， 媒质均匀、无限大，无吸收。在 $x=0$ 处质元振动方程为 $y(0,t)=A\cos\omega\, t$,

则应有： $\boxed{y(x,t)=A\cos\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)}$ —— 波函数

（因无吸收，故振幅 A不变）

上面波函数式中的 $\omega\left(t-\dfrac{x}{u}\right)$ 为波的相位。

波在某点的相位反映该点媒质的“运动状态”。

所以简谐波的传播也是媒质振动相位的传播。

设 t 时刻 x 处的相位经 $\mathrm{d}t$ 传到（$x+\mathrm{d}x$）处，

则应有 $$\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)=\omega\left[\left(t+\mathrm{d}t\right)-\frac{x+\mathrm{d}x}{u}\right]$$

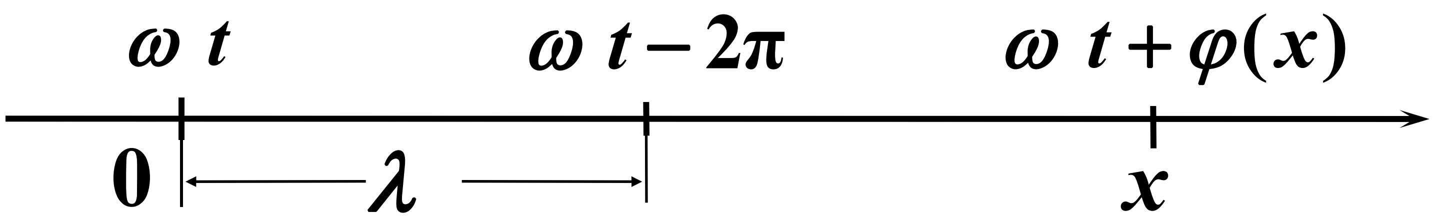
于是得到 $$u=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$ —— 相速度（相速）

即简谐波的波速就是相速。

2. 一维简谐波函数的另一种常用的表示

$$\left.\begin{aligned} y(x,t) &= A\cos\omega\left(t-\frac{x}{u}\right) \\ u &= \frac{\lambda}{T} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{y(x,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)}$$

说明：



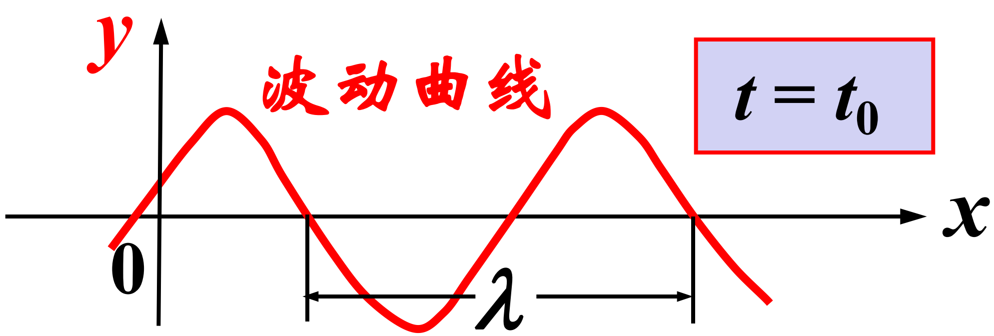
沿波传播方向每增加λ 的距离，相位落后2π

$$\therefore \qquad \varphi(x) = -\frac{x}{\lambda}2\pi$$

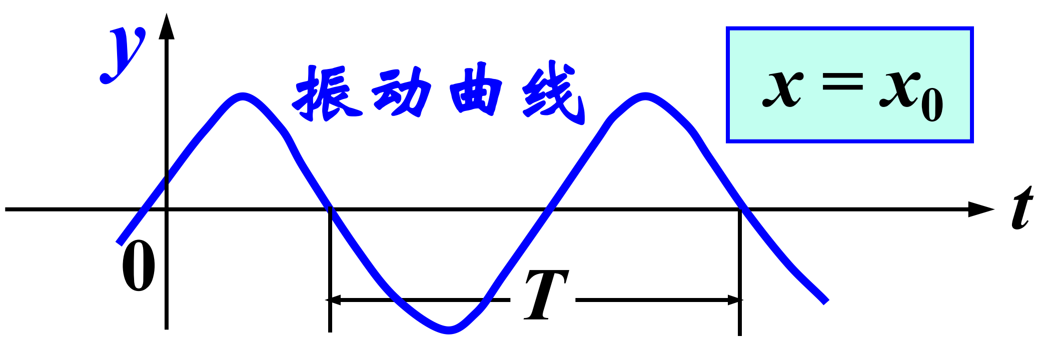
3、波函数的意义

$$y(x,t)=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

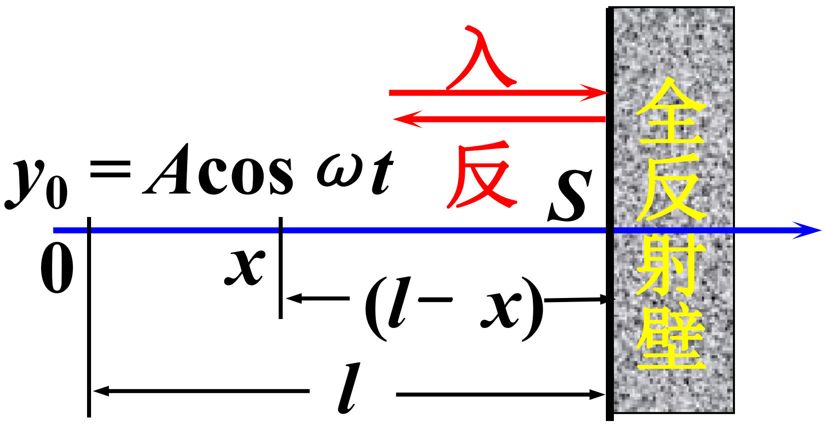
（1） $t=t_0$， $y\sim x$ 给出 t 时刻空间各点位移分布。



（2） $x=x_0$，$y\sim t$ 给出 x 点的振动函数。



例 如图，**已知：**$y_0 = A\cos\omega t$ ，波长为λ ，



反射波在S处相位改变π。

求： 反射波函数 $y'(x, t)$

解： 全反射， A不变。

波由0经壁反射到 x 传播了距离$l + (l - x) = 2l - x$，

相位落后了$2\pi(2l-x)/\lambda$，在壁处反射相位改变π ，

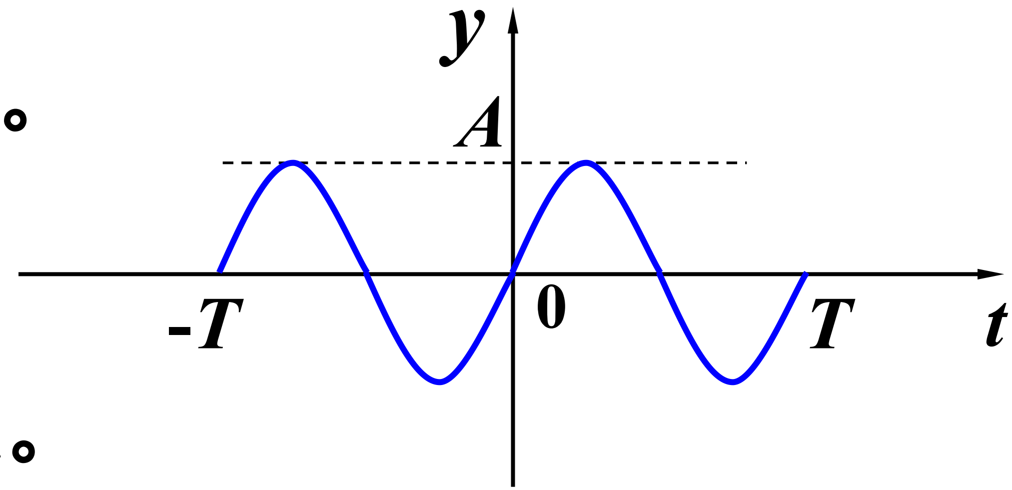
$$\therefore \quad y'(x,t) = A\cos\left[\omega t - \frac{2l - x}{\lambda}2\pi \pm \pi\right]$$

$$= A\cos\left[\omega t + \frac{x}{\lambda}2\pi - \frac{2l}{\lambda}2\pi \pm \pi\right]$$

"+"表示沿 $-x$ 方向传播

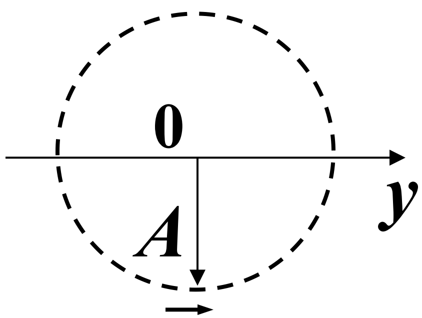
取+、–均可

例　已知： 一个向右传播的波在 $x = 0$ 点的振动曲线如图所示。

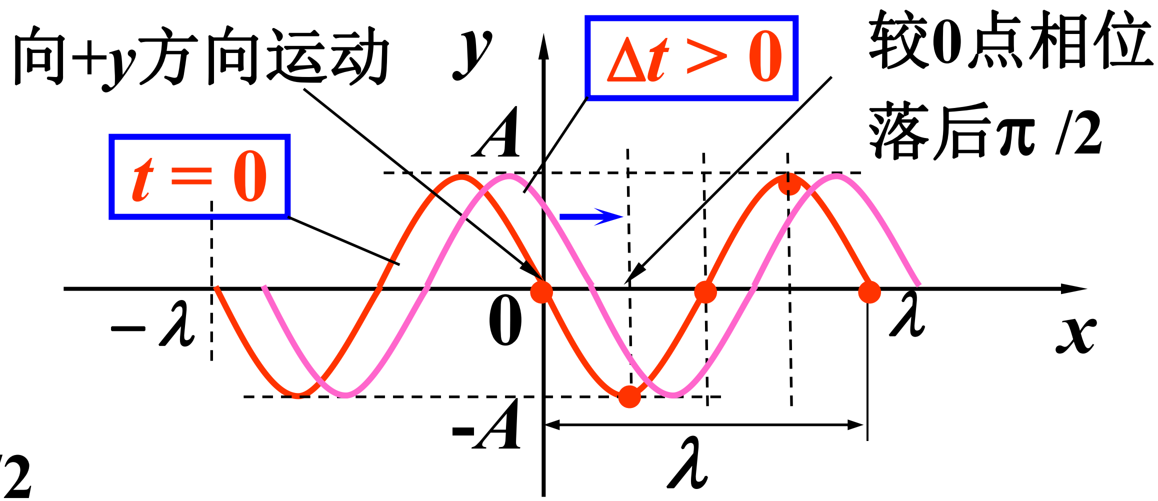


要求： 画出该波在 $t = 0$ 时的波形曲线。

解：



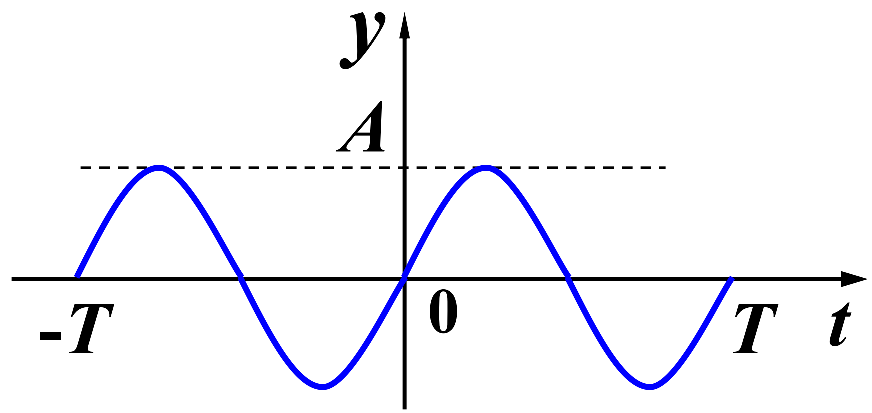
0点初相位为- π /2



【例】已知一个向右传播的波在 $x=0$点的振动曲线如图所示。

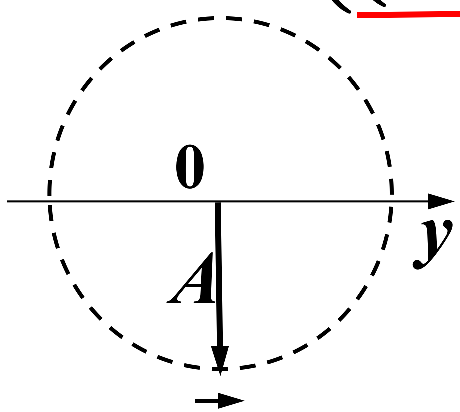
试画出该波在

$t=0$ 时的波形曲线。

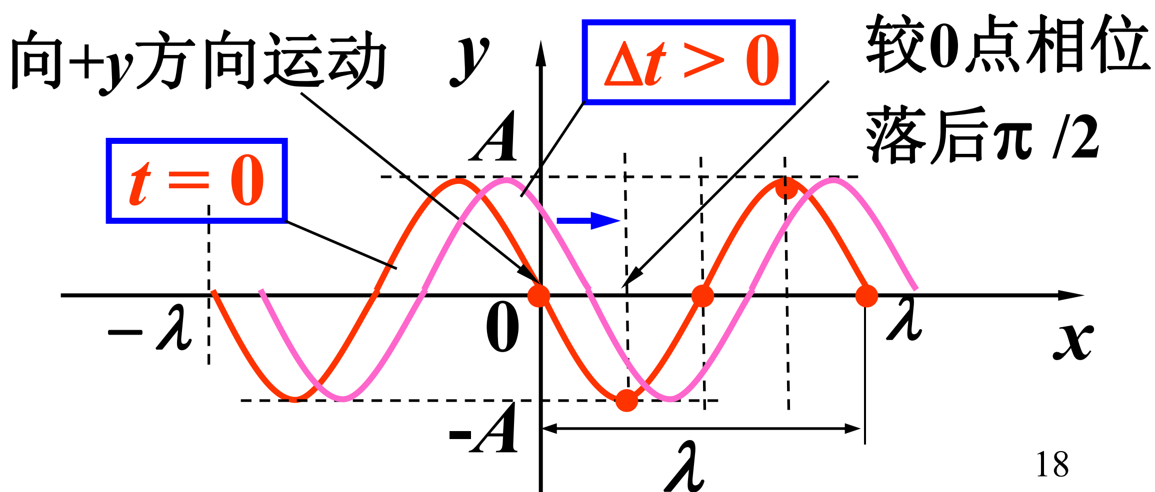


解:

$$y=A\cos\left(\underline{\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{2\pi}{\lambda}x\right),\; y_{t=0}=A\cos\left(-\frac{2\pi}{\lambda}x-\frac{\pi}{2}\right)$$



x=0点初相位为－π /2



4. 一维波函数的另几种常见的表示式

$$y = A\cos(\omega t \mp kx)，\quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ —— 波数 (wave number)

$$y = A\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} \mp \frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y = A\cos k(ut \mp x)$$

$$y = Ae^{i(\omega t \mp kx)} \quad (\mathrm{Re})$$

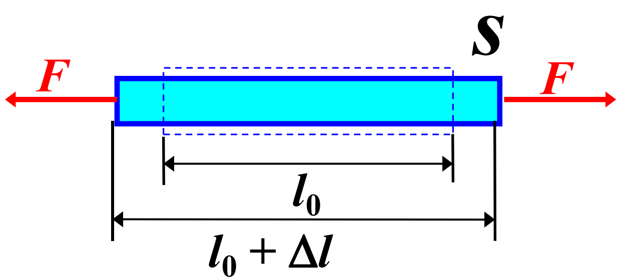
$$= \underbrace{Ae^{\mp ikx}}_{\text{空间因子（复振幅）}} \cdot \underbrace{e^{i\omega t}}_{\text{振动因子}} \quad (\mathrm{Re})$$

△§7.3 物体的弹性变形

（自学书第7.3节）

着重搞清线变、切变和体变的概念，以及与三种变化相应的材料的弹性模量。

(1) 长变



$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}$$

(长变应力)　(长变应变)

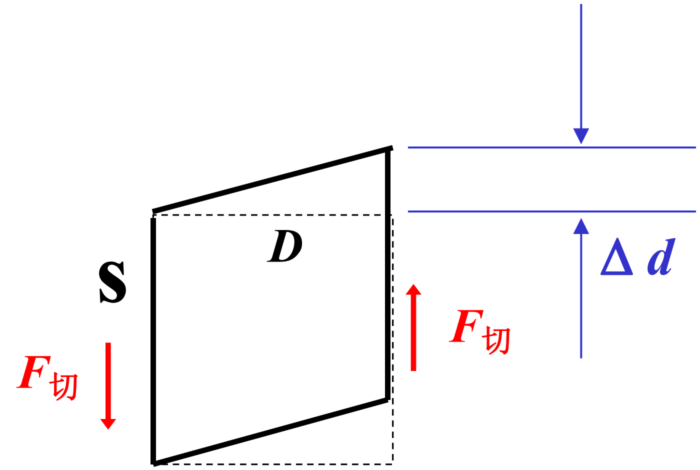
E - 杨氏弹性模量

(2) 切变

$$\frac{F}{S} = G\frac{\Delta d}{D}$$

(切变应力)　　(切变应变)

G **- 切变弹性模量**

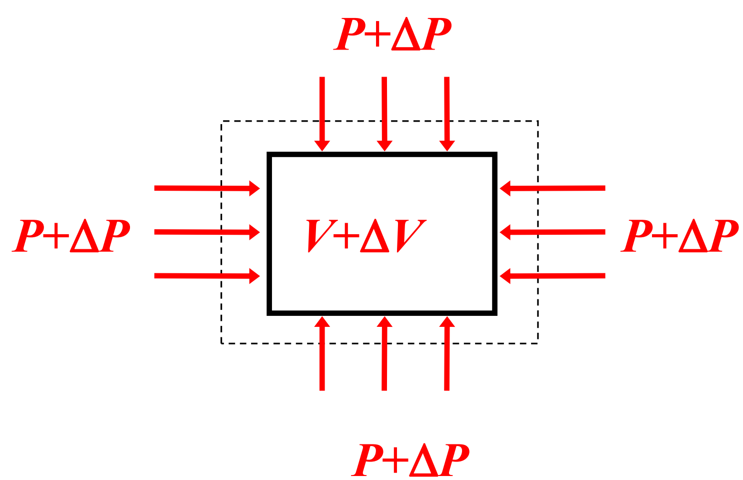


(3) 容变

$$\Delta P = -K\frac{\Delta V}{V}$$

(容变应力)　(容变应变)

K **- 容变弹性模量**



容变

△§7.4 波动方程

一、一维波动方程

以任意一个沿x正方向传播的行波为例

$$y = f\left(t - \frac{x}{u}\right),\quad 设\ \alpha = t - \frac{x}{u}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2},\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$$

比较可得

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0}$$

u为波速

——波动方程，描述经典波动过程的普遍方程。任何行波，包括平面简谐波，都是它的解。

波动方程虽由行波波函数得到，但其解并不限于行波。任何物理量，无论是位移，还是电场或磁场，只要它与坐标、时间的函数关系是波动方程的解，那么该物理量的运动形式就一定是波动。

波动：运动函数满足波动方程

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

的运动。

二. 波速 u 与媒质性质的关系（公式不必记忆）

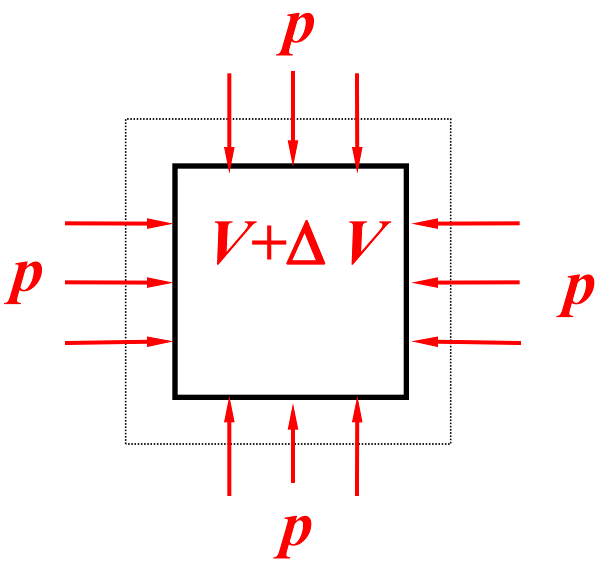
气体中 $u=\sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$ ，

γ —— 比热比

液体中 $u=\sqrt{\dfrac{K}{\rho}}$ ，

$$K=-\frac{\Delta P}{\Delta V/V}$$

（体积模量）



体变

弹性绳上的横波 $u = \sqrt{\dfrac{F}{\rho_l}}$

F —绳的初始张力，ρ_l — 绳的线密度

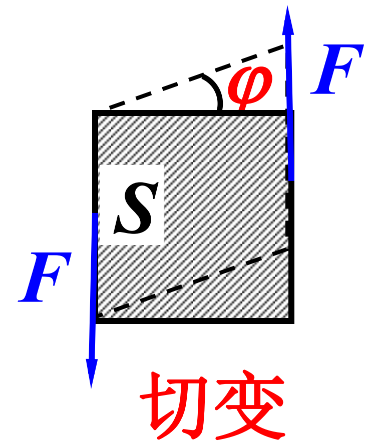
固体中

横波 $u_t = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$，$G = \dfrac{F/S}{\varphi}$

F/S —— 切应力

φ —— 切应变

（切变模量）

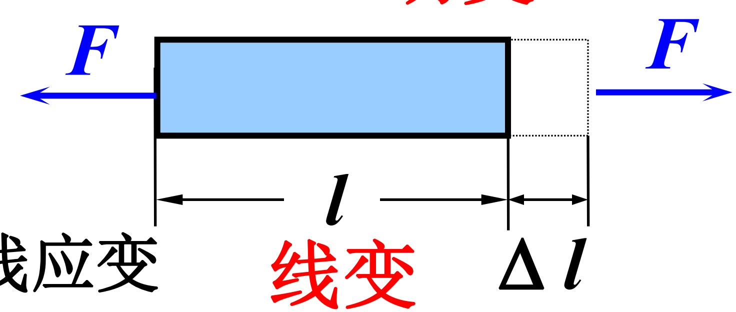


纵波 $u_l = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$，$E = \dfrac{F/S}{\Delta l/l}$

F/S —— 应力

$\Delta l/l$ —— 线应变

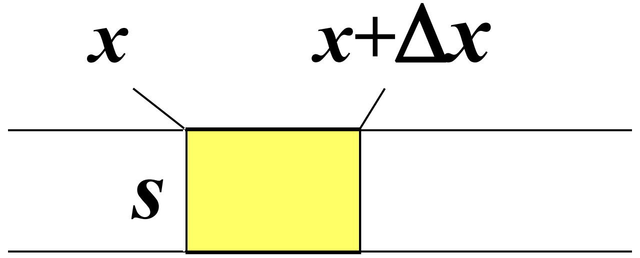
（杨氏模量）



书表2.2：$u_l > u_t$（地震波传播)

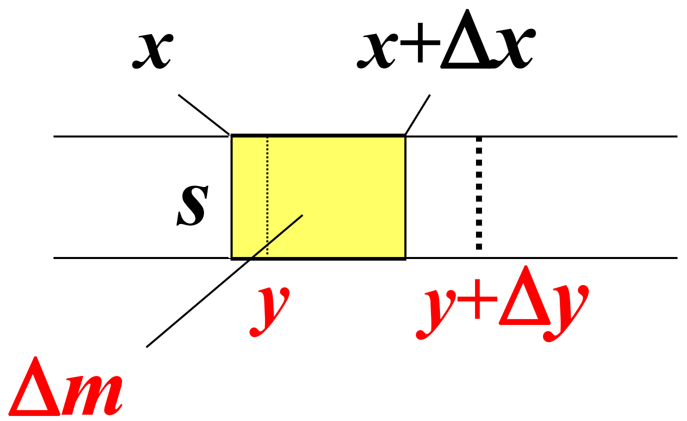
例：棒中纵波的波动方程

考虑细长棒上一段小质元 Δx，如图：



当有平面波传播时，

x 处，端面位移y，$y+\Delta y$



两端拉力

$$\frac{F_x}{S} = E\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x \qquad \frac{F_{x+\Delta x}}{S} = E\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+\Delta x}$$

$$F_{x+\Delta x} - F_x = SE[(\frac{\partial y}{\partial x})_{x+\Delta x} - (\frac{\partial y}{\partial x})_x] = SE\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x$$

由牛顿第二定律得

$$SE\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = \rho S\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} ,$$

§7.5 波的能量

一. 弹性波的能量　能量密度

随着波的行进，能量在传播。

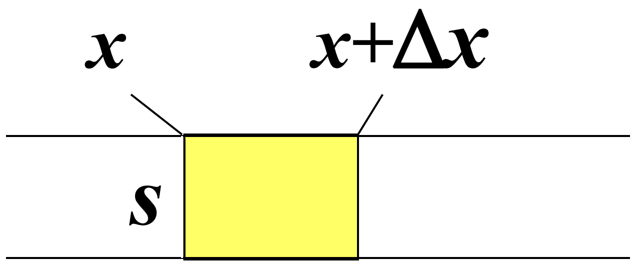
波在弹性媒质中传播时，各质元都在振动，

波的能量 = 振动动能 + 形变势能

以沿 x 轴传播的平面简谐纵波为例：

◆ **动能密度**

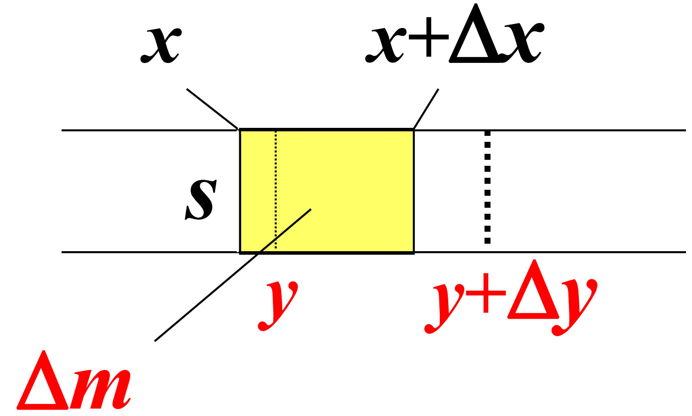
考虑细长棒上一段小质元 Δx，如图：



当有平面波传播时，

x 处，纵向位移

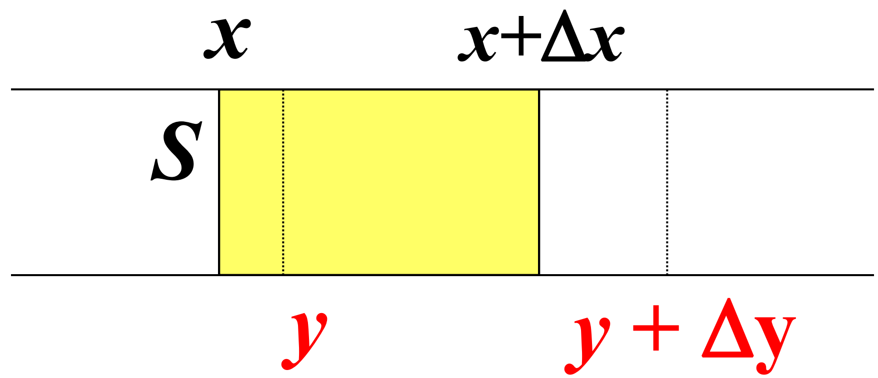
$$y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{u}\right)$$



小质元动能 $\Delta W_K = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}\rho S\Delta x\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

动能密度为: $w_K = \frac{\Delta W_K}{S\Delta x} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

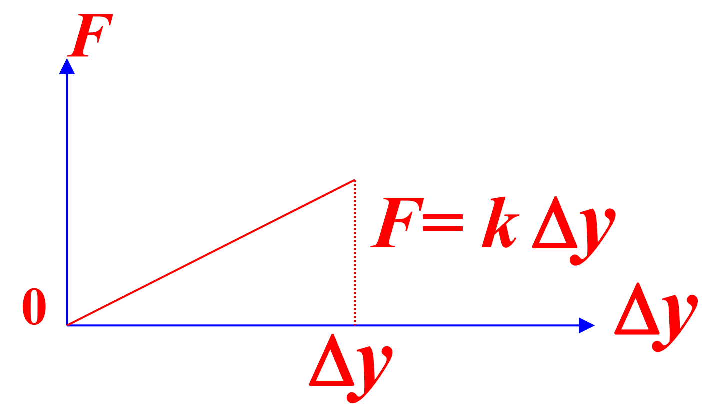
◆ 势能密度



考虑细棒上小质元的弹性长变Δy，

若两端弹性拉力由 $0 \rightarrow F$,

$$F = k\,\Delta y$$



弹性势能 =弹性拉力作的功

（变力的功） $\dfrac{1}{2}F\Delta y$

势能密度为:

$$w_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\frac{F\Delta y}{S\Delta x}$$

因 $\frac{F}{S} = E\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\boxed{\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}}$

所以棒中有纵波时

$$w_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

- **能量密度**

$$w = w_{\mathrm{k}} + w_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

$$w = w_{\mathrm{k}} + w_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

对沿 x 轴传播的平面简谐波 $y(x,t)=A\cos(\omega t\text{-}kx)$

由于 $k^2 = \dfrac{\omega^2}{u^2}$; $E=\rho u^2$;

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{E}{\rho}}}$$

$$w_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

$$w_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$$

w_{k}、w_{p} 均随 t 周期性变化, 两者同相同大

$$\boxed{w = w_{\mathrm{k}} + w_{\mathrm{p}} = \rho\omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t\text{-}x/u)}$$

为什么动能和势能之和不等于常数, 也不相互转化 ?

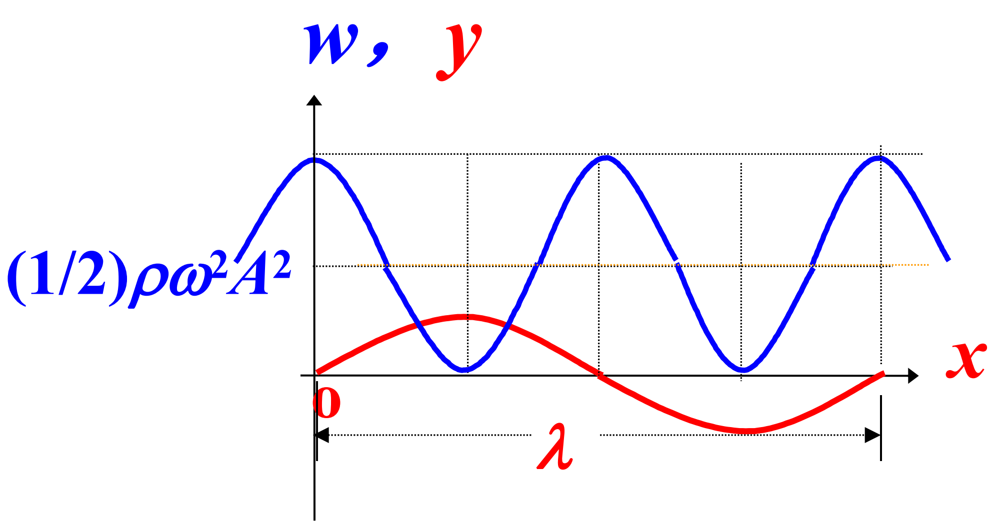
其能量密度:

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$w = \rho\omega^2 A^2 \sin^2 \omega(t-x/u)$$

$$= \rho\omega^2 A^2 \left[\frac{1-\cos 2\omega(t-x/u)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 - \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \cos 2\omega(t-x/u)$$



随着波形的传播，能量“一堆堆”地向前传播，

其传播速度也是波速u；

角频率为2ω；

在y=0处附近，能量最集中（动能势能都最大）

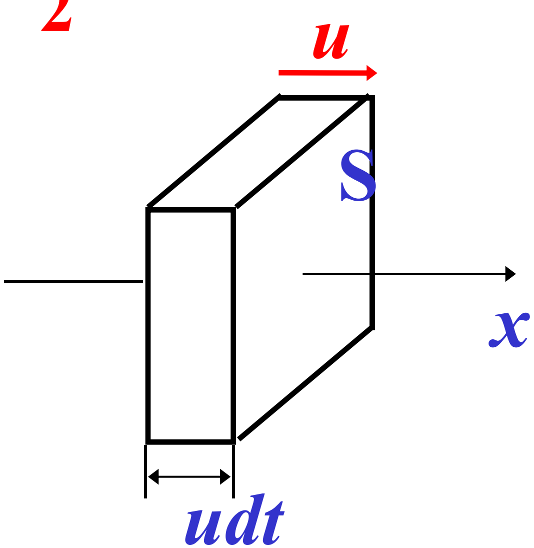
二. 平均能流密度(波的强度)

单位时间内通过垂直于波的传播方向的单位面积的平均能量, **称为平均能流密度**, 又称为 **波的强度 I** 。

因为 $w = w_k + w_p = \rho\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kx)$

按周期平均的平均能量密度为 $\overline{w} = \dfrac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$

平均能流密度(波的强度)即



$$I = \frac{\overline{w}udtS}{dt\,S} = \overline{w}u = \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A^2$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\rho\, u A^2\omega^2}$$

单位: $\mathrm{W/m^2}$

- $I \propto \rho u$ 媒质的特性阻抗 $Z=\rho u$
- $I \propto \omega^2$ 超声波比声波的强度大。

$$\boxed{I=\frac{1}{2}\rho\, uA^2\omega^2}$$

- $I \propto A^2$

对无吸收媒质： 利用 $I=\frac{1}{2}Z\omega^2A^2$ 和能量守恒，

可以证明： 平面波 $A=\text{const}.$

球面波 $Ar=\text{const}.$， $A\propto\frac{1}{r}$

柱面波 $A\sqrt{r}=\text{const}.$， $A\propto\frac{1}{\sqrt{r}}$

例. 点波源，各向同性媒质中，球面简谐波的波函数：

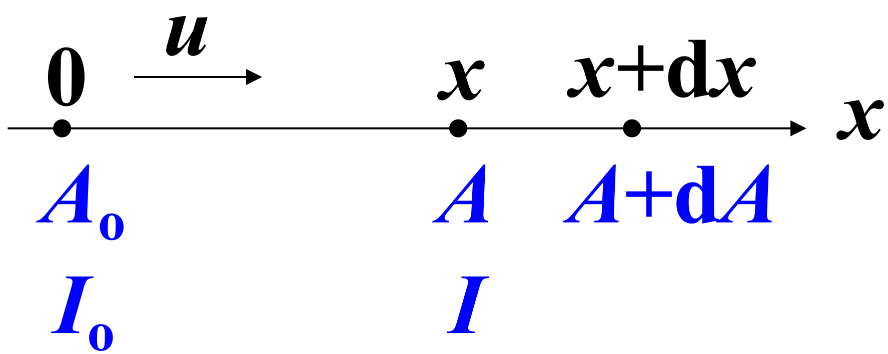
$$\boxed{y=\frac{A'}{r}\cos\left(\omega\, t-k\, r\right)}$$

r —— 场点到波源的距离

*补充：波的吸收

媒质是要吸收波的能量的(内摩擦, 热传导, 分子碰撞等)。波的能量衰减的规律为

$$\boxed{I = I_0 \mathrm{e}^{-2\alpha x}}$$



证明:

$$-\mathrm{d}A = \alpha A \,\mathrm{d}x$$

$$\int_{A_0}^{A} -\frac{\mathrm{d}A}{A} = \int_0^x \alpha \,\mathrm{d}x \rightarrow \ln\frac{A}{A_0} = -\alpha x$$

$$\rightarrow A = A_0 \mathrm{e}^{-\alpha x} \rightarrow I = I_0 \mathrm{e}^{-2\alpha x}$$

α 称为媒质的吸收系数，$\alpha = -\dfrac{\mathrm{d}A}{A\,\mathrm{d}x}$

与媒质的性质有关；与波的频率有关。

♦ $\alpha_{固} < \alpha_{液} < \alpha_{气}$（趴在铁轨上听远处火车声）

例：对5MHz 的超声波

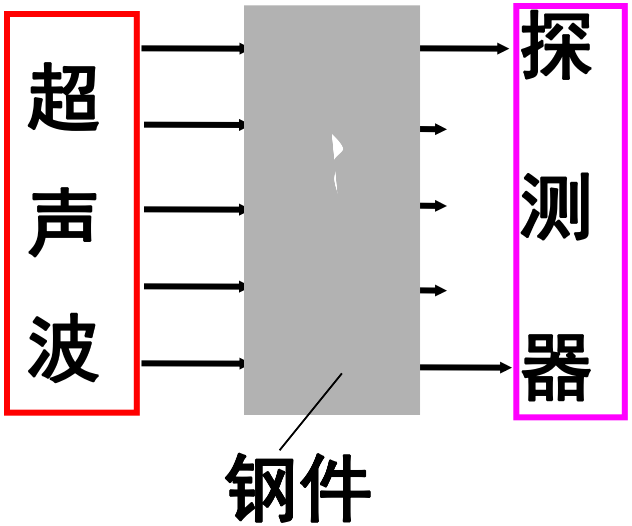
在钢中 $\alpha = 2/\mathrm{m}$,

前进1.15m 强度衰减为百分之一。

在空气中 $\alpha = 500/\mathrm{m}$,

前进0.05m 强度衰减为百分之一。

超声波探伤:



♦ $\omega\uparrow$ 则 $\alpha\uparrow$ 空气中低频波可传得很远。

(广场上有乐队，你在远处只听到大鼓声)

§7.6 惠更斯原理（Huygens principle）

一. 惠更斯原理

波如何传播？

原则上：应给出波函数——定量但复杂

惠更斯提出　原理(作图法)—— 简洁　普适

原理（作图法）

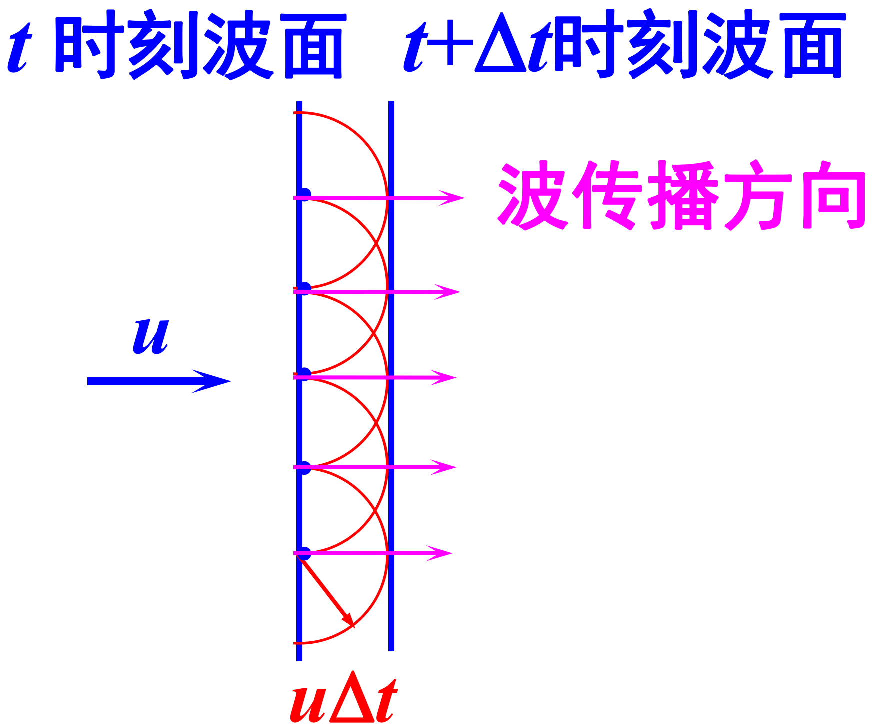
① 波传到的每点是发射子波（次级波）的点波源

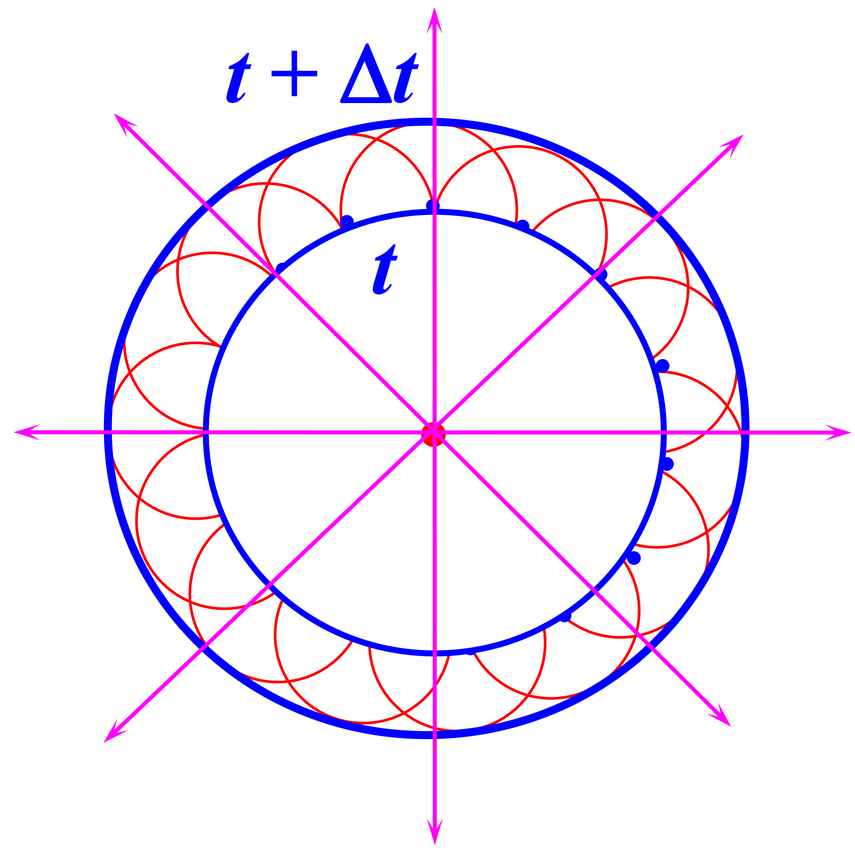
② 各子波面的包络面是下一时刻的新波面

二. 惠更斯原理的应用

1. 波的传播

已知t 时刻的波面$\rightarrow$ $t+\Delta t$ 时刻的波面，从而可进一步给出波的传播方向。

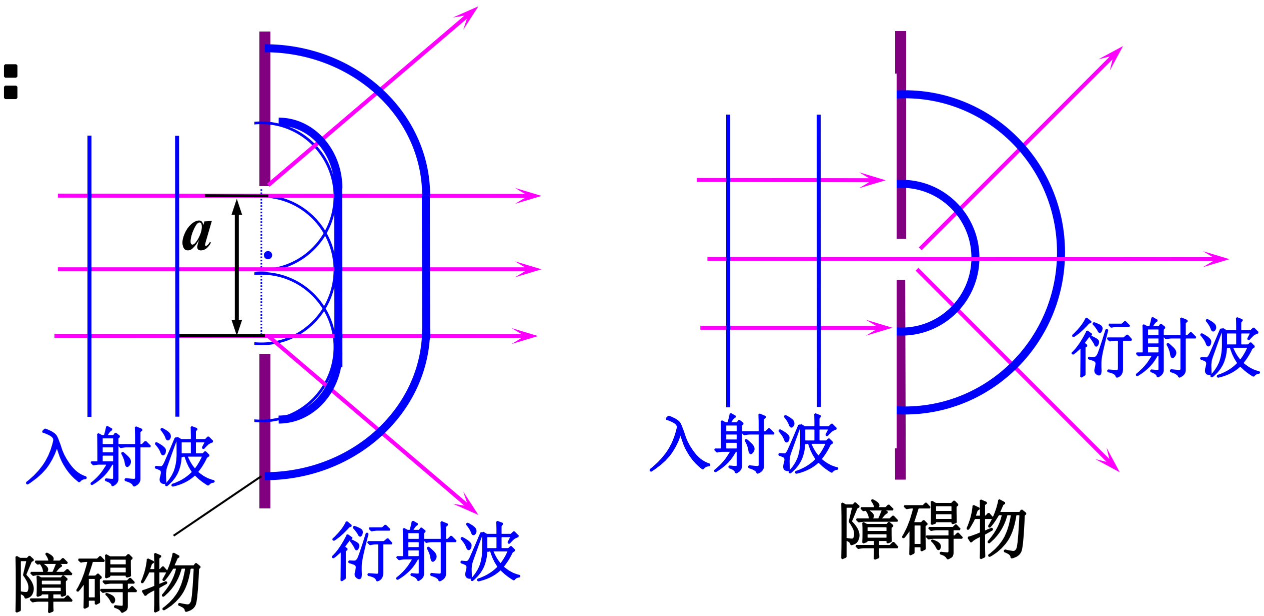




2. 波的衍射

衍射：波传播过程中，当遇到障碍物时，**能绕过障碍物边缘而偏离直线传播的现象。**

例如：



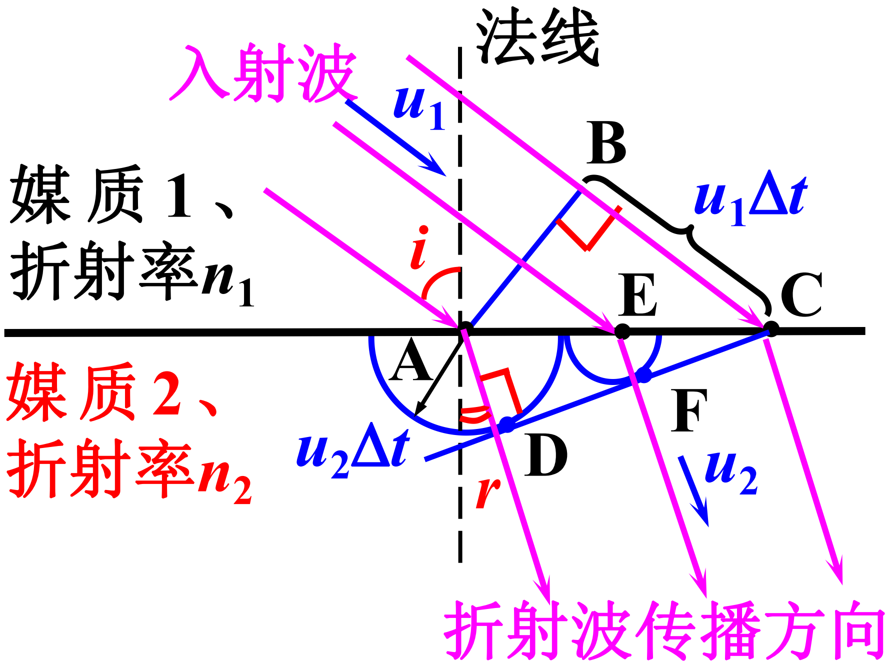
相对于波长而言，障碍物的线度越大衍射现象越不明显，障碍物的线度越小衍射现象越明显。

水波通过窄缝时的衍射

3. 波的反射和折射

△ 波的反射

波的折射： 用惠更斯作图法导出折射定律



$$\overline{BC} = u_1\Delta t = \overline{AC}\sin i$$

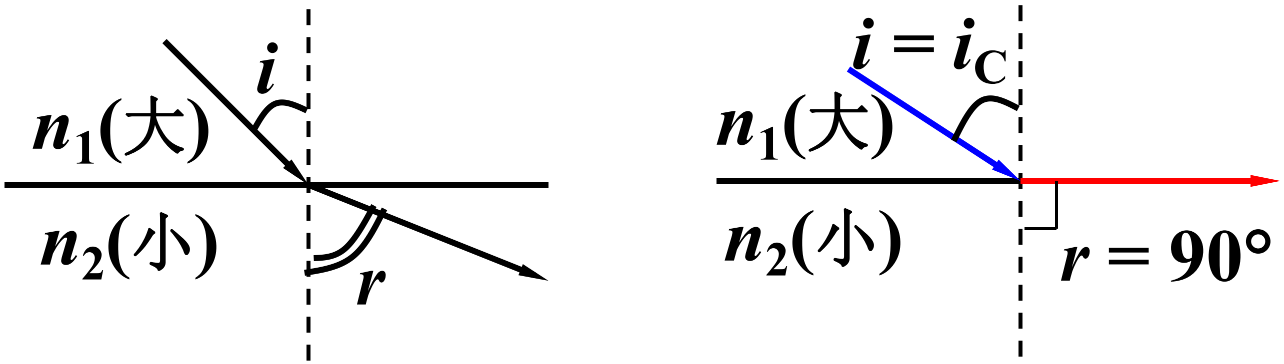
$$\overline{AD} = u_2\Delta t = \overline{AC}\sin r$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{n_2}{n_1} = \text{const.}$$

光波 $u_1 = \dfrac{c}{n_1}$， $u_2 = \dfrac{c}{n_2}$

得到 $\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin r}$ ——折射定律

光密媒质→光疏媒质时，折射角r >入射角 i



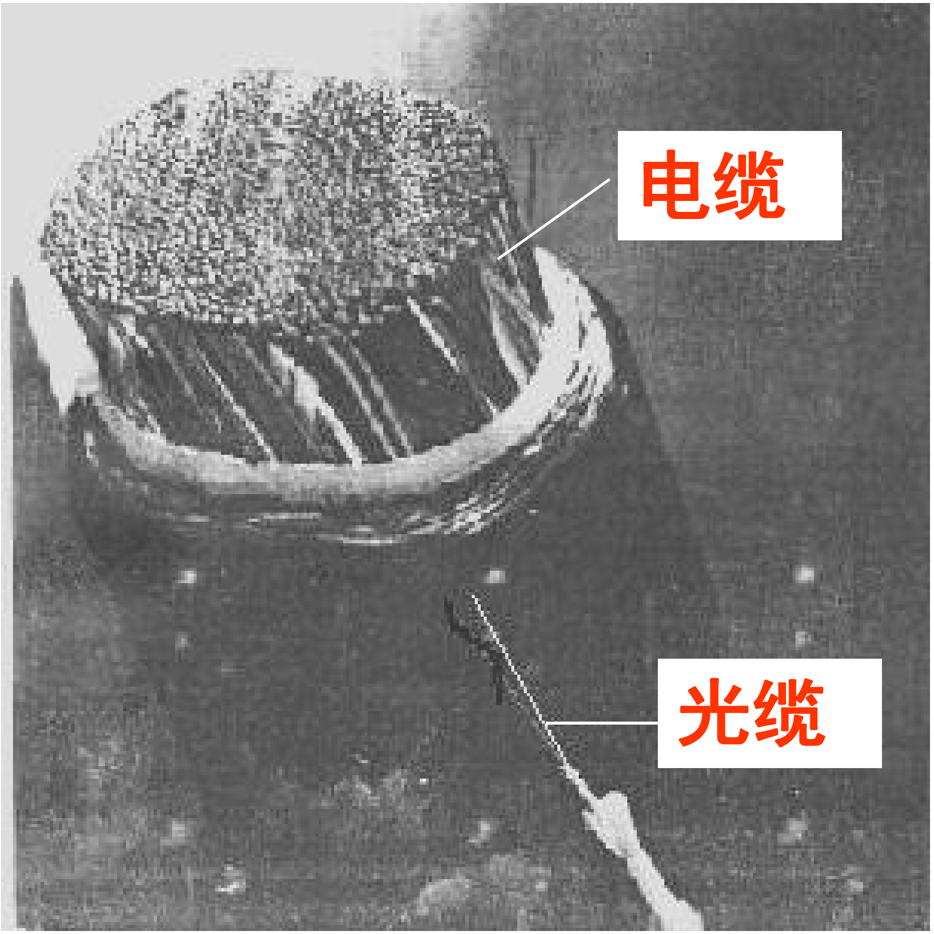
$$\boxed{\sin i_C = \frac{n_2}{n_1}}$$

i_C — 临界角

当入射i >临界角 i_C 时，将无折射光—全反射

全反射的一个重要应用是光导纤维（光纤）

它是现代光通信技术的重要器件。



图中细光缆和粗电缆的通信容量相同

光纤通信容量大，而且损耗小。

在不加中继站的情况下，光缆传输距离可达300公里。而同轴电缆只几公里， 微波也只有几十公里。

我国电信的主干线早已全部为光缆。

§7.7 波的叠加 驻波

一. 波的叠加原理

原理包含两方面内容：

1）波的传播的独立性

各振源在介质中独立地激起相应频率的波；
每列波的传播特性不因其他波的存在而改变。

▲ 红、绿光束空间交叉相遇

▲ 听乐队演奏

▲ 空中无线电波很多

2）叠加

在各波的相遇区，各点的振动是各列波**单独**在此激起的振动的合成。

$$\xi_P=\xi_1+\xi_2$$

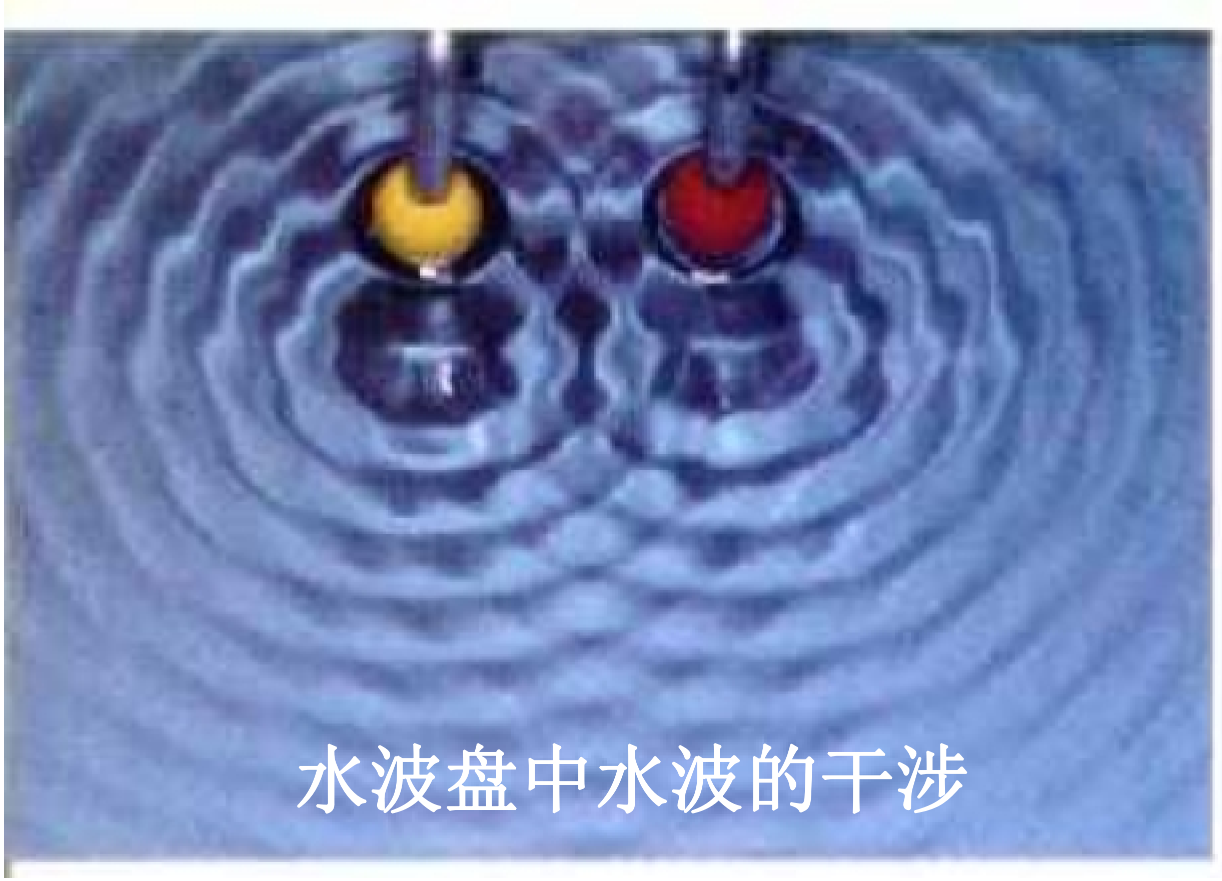
线性叠加

波的叠加原理是干涉、衍射的基本依据。

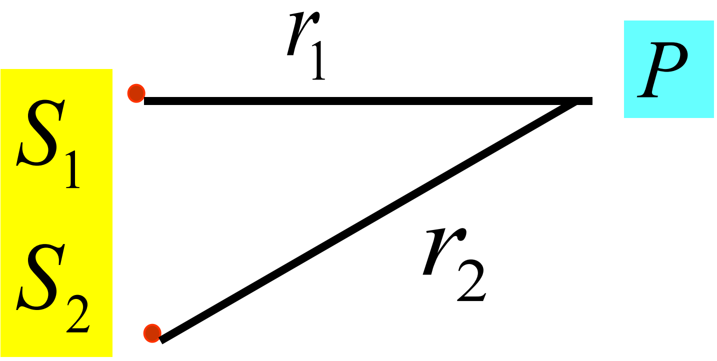
叠加原理由波动方程的线性所决定，当波强度过大时，媒质形变与弹力的关系不再呈线性，叠加原理也就不再成立了。

二． 波的干涉现象

波叠加时在空间出现**稳定的振动加强和减弱**的分布叫**波的干涉**。



- **相干条件：** ① 频率相同；
  ② 振动方向相同；
  ③ 有固定的相位差。



P点：两同方向同频率的SHM的合成

三. 驻波

能够传播的波叫行波

两列相干的行波沿相反方向传播而叠加时，就形成驻波，它是一种常见的重要干涉现象。

1. 驻波的描述

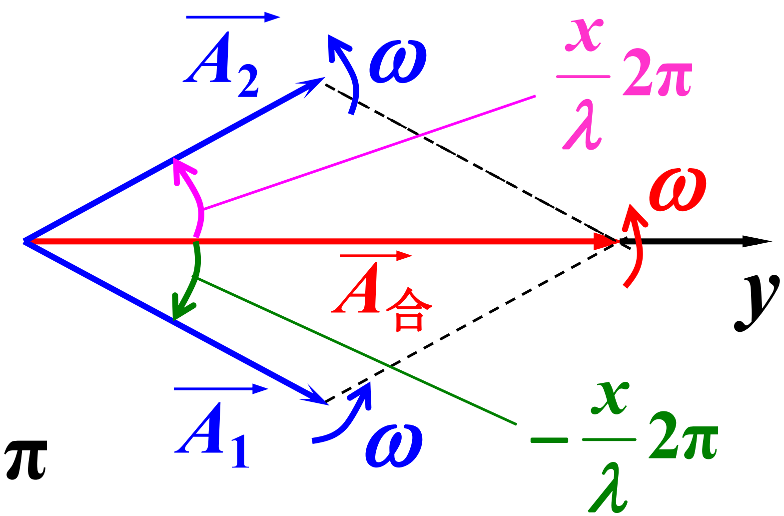
设两列行波分别沿 x 轴的正向和反向传播，在 $x=0$ 处两波的初相均为 0：

$$\rightarrow x: \quad y_1 = A\cos\left(\omega t - \frac{x}{\lambda}2\pi\right)$$

$$\leftarrow x: \quad y_2 = A\cos\left(\omega t + \frac{x}{\lambda}2\pi\right)$$

$$y = y_1 + y_2$$

令 $\left|A_1\right| = \left|A_2\right| = A$



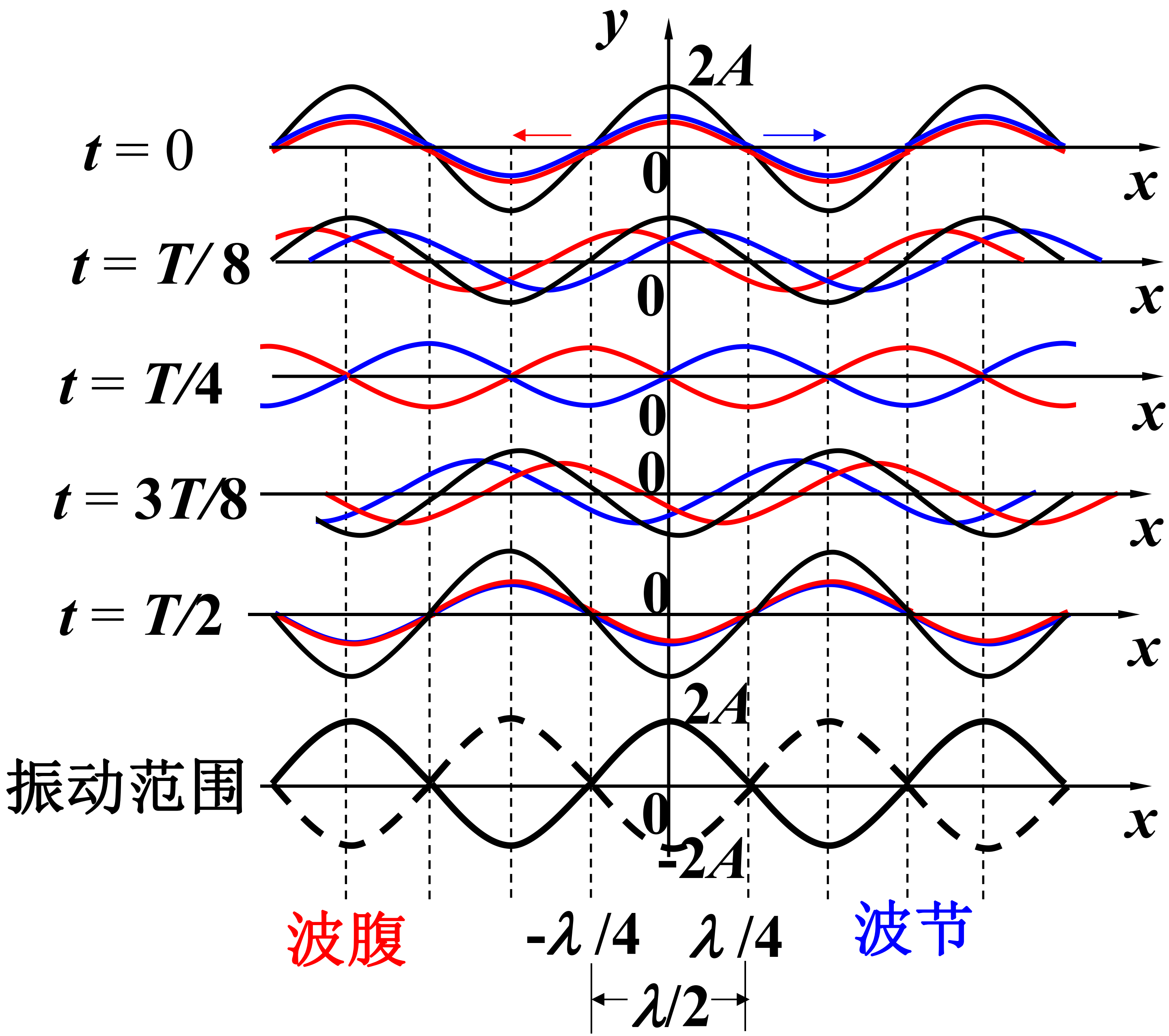
如图 $A_{合} = 2A\cos\frac{x}{\lambda}2\pi$

各点都做简谐振动，振幅随位置不同而不同。

$$\therefore \quad y = 2A\cos\frac{x}{\lambda}2\pi \cdot \cos\omega\, t$$

—— 不具备传播的特征

其绝对值为振幅 相位中无 x



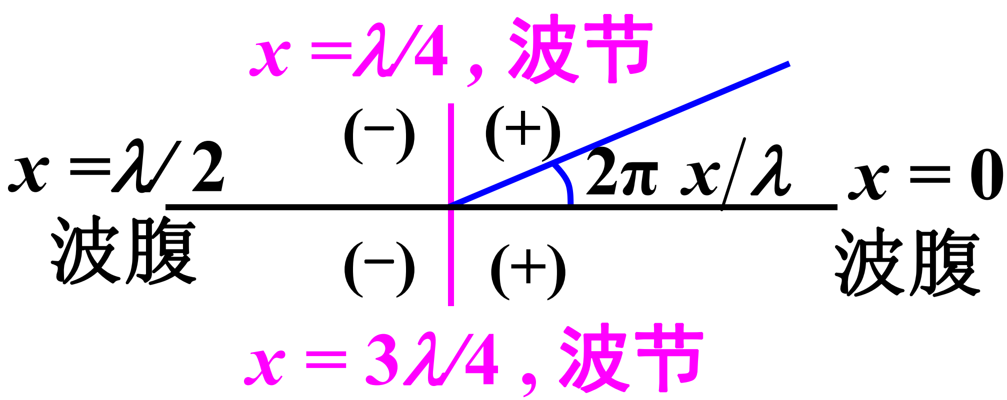
y
2A
t = 0
0
x
t = T/ 8
0
x
t = T/4
0
x
t = 3T/8
0
x
t = T/2
0
x
2A
振动范围
0
-2A
x
波腹
-λ /4
λ /4
波节
λ/2

2. 驻波的特点：

（1）**振幅**：各处不等大，出现了**波腹**（振幅最大处）和**波节**（振幅最小处）

（2）**相位**：没有x 坐标，故**没有了相位的传播**

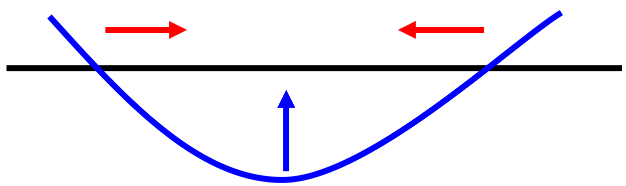
驻波是**分段的振动。**两相邻波节间为一段，同一段振动相位相同；相邻段振动相位相反



（3）能量： 合能流密度为 $\overline{w}\cdot\vec{u}+\overline{w}\cdot(-\vec{u})=0$，

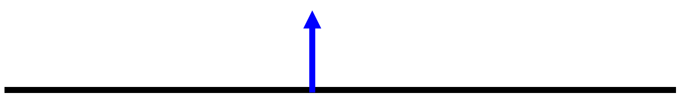
平均说来没有能量的传播，

但各质元间仍有能量的交换。



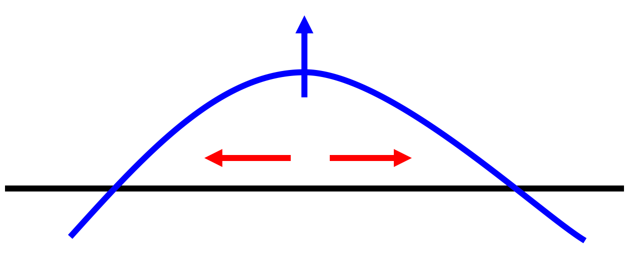
能量由两端向中间传，

势能→动能。



瞬时位移为0，势能为0，

动能最大。



能量由中间向两端传，

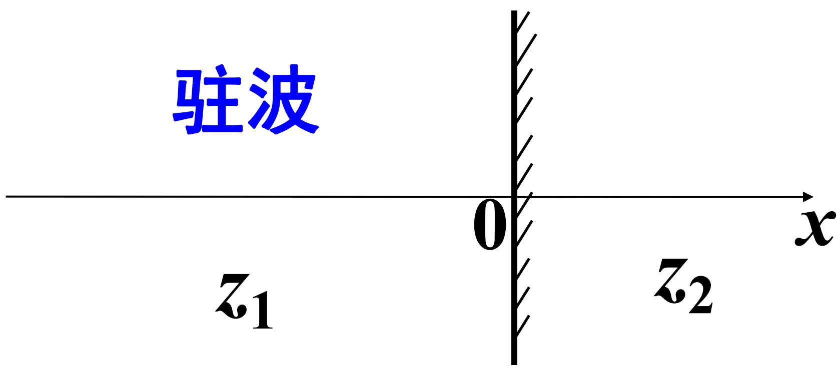
动能→势能。

3、$A_1 \neq A_2$ 的情形： 设 $A_2 = (A_1 + \Delta A) > A_1$，

$$y = \underbrace{2A_1 \cos\frac{x}{\lambda}2\pi \cdot \cos\omega t}_{\text{典型的驻波}} + \underbrace{\Delta A \cos(\omega t + \frac{x}{\lambda}2\pi)}_{\text{行波}}$$

此时总的仍可叫“驻波”，不过波节处有振动

4、驻波的界面情况　位相突变π（半波损失）



$z_2 > z_1$　位相突变π

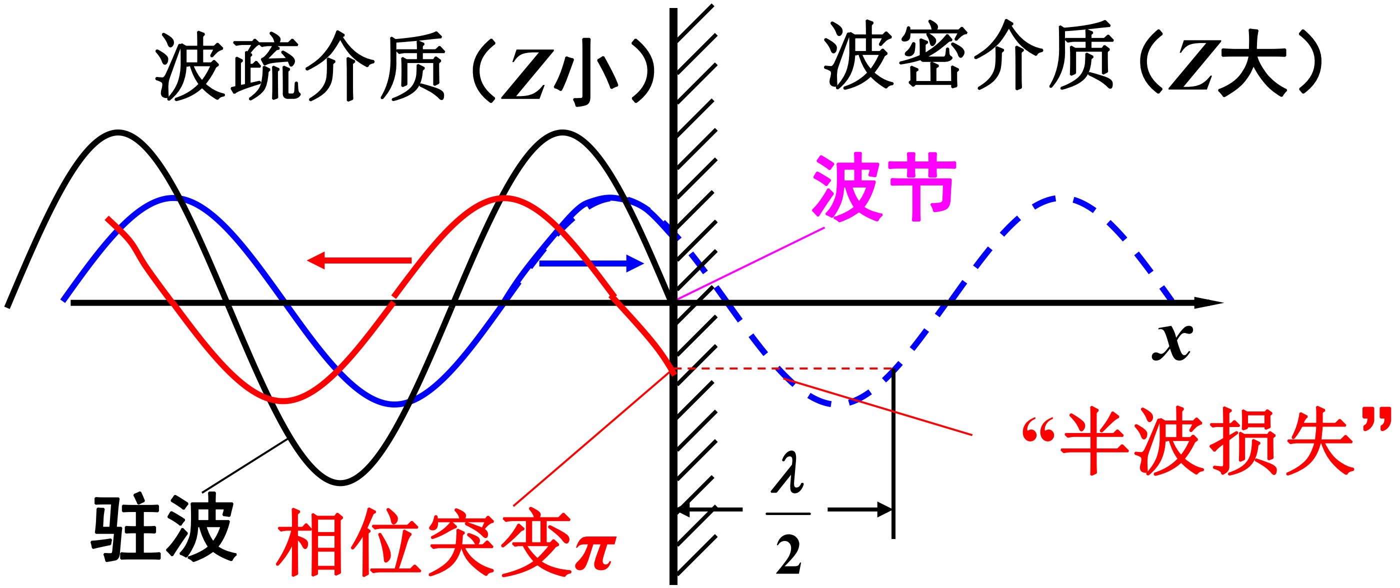
界面上总是波节

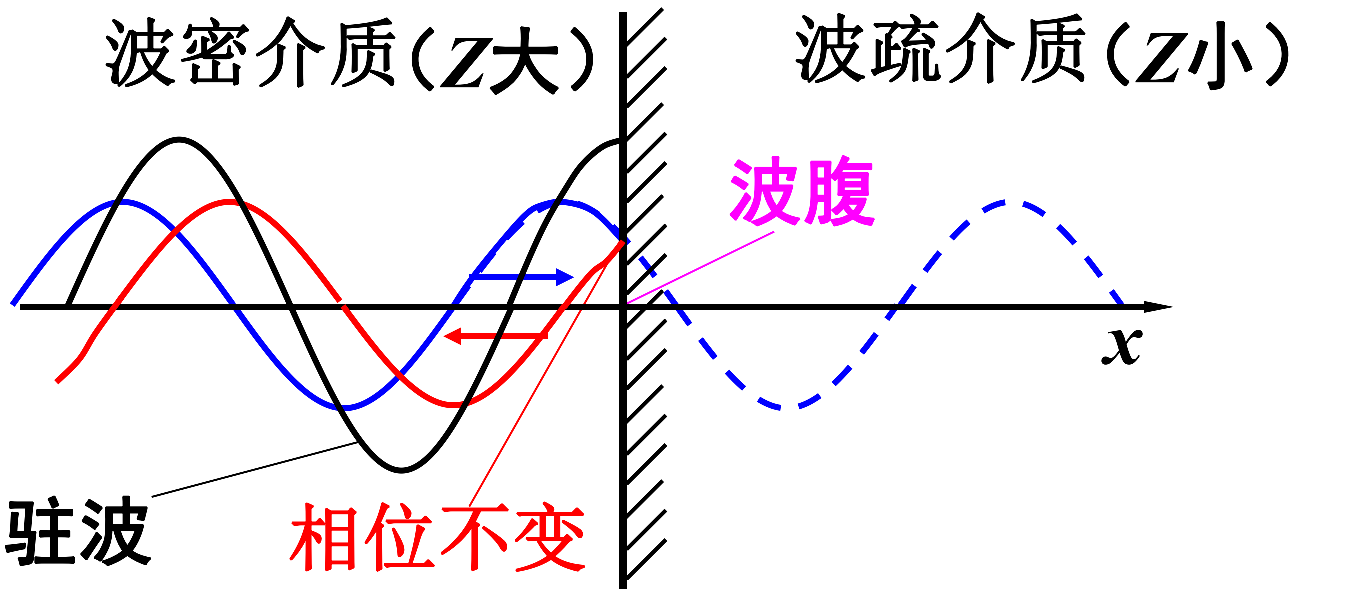
$z_2 < z_1$　位相不变

界面上总是波腹

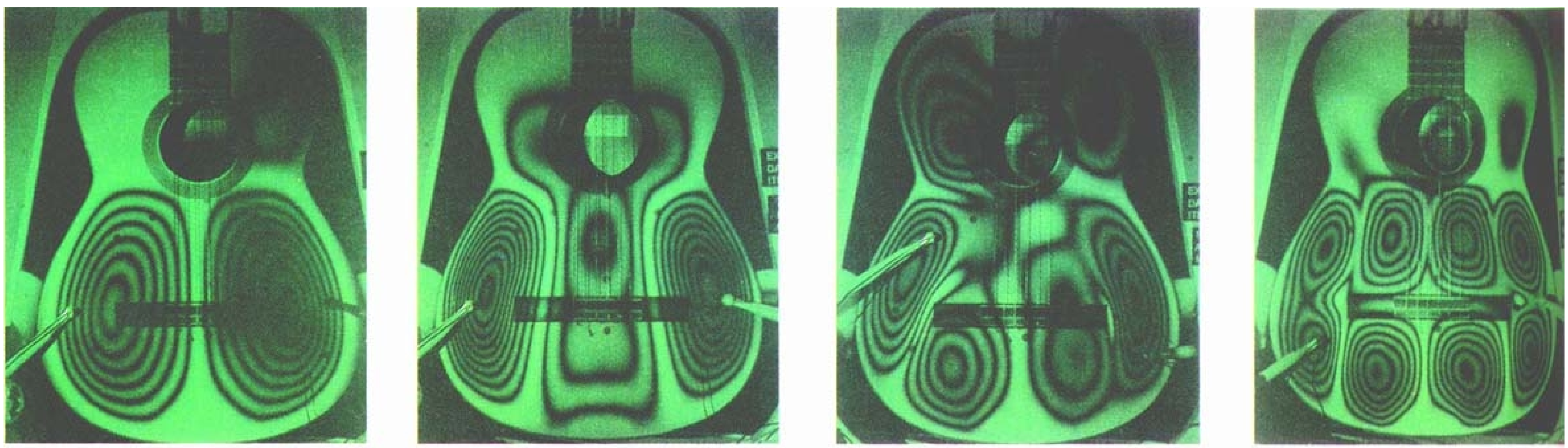
$z = \rho u$ —— 特性阻抗

若忽略透射波，则入射和反射波的波形如下：





4. 平面驻波

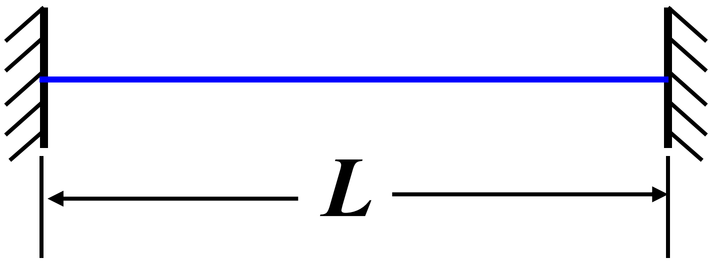


268Hz 553Hz 672Hz 1010Hz

平面驻波：提琴全息振型

四、简正模式

波在一定边界内传播时就会形成各种驻波。如两端固定的弦，形成驻波必须满足以下条件：



$$n\frac{\lambda_n}{2}=L,\quad n=1,2,3\cdots$$

或 $$\lambda_n=\frac{2L}{n}$$

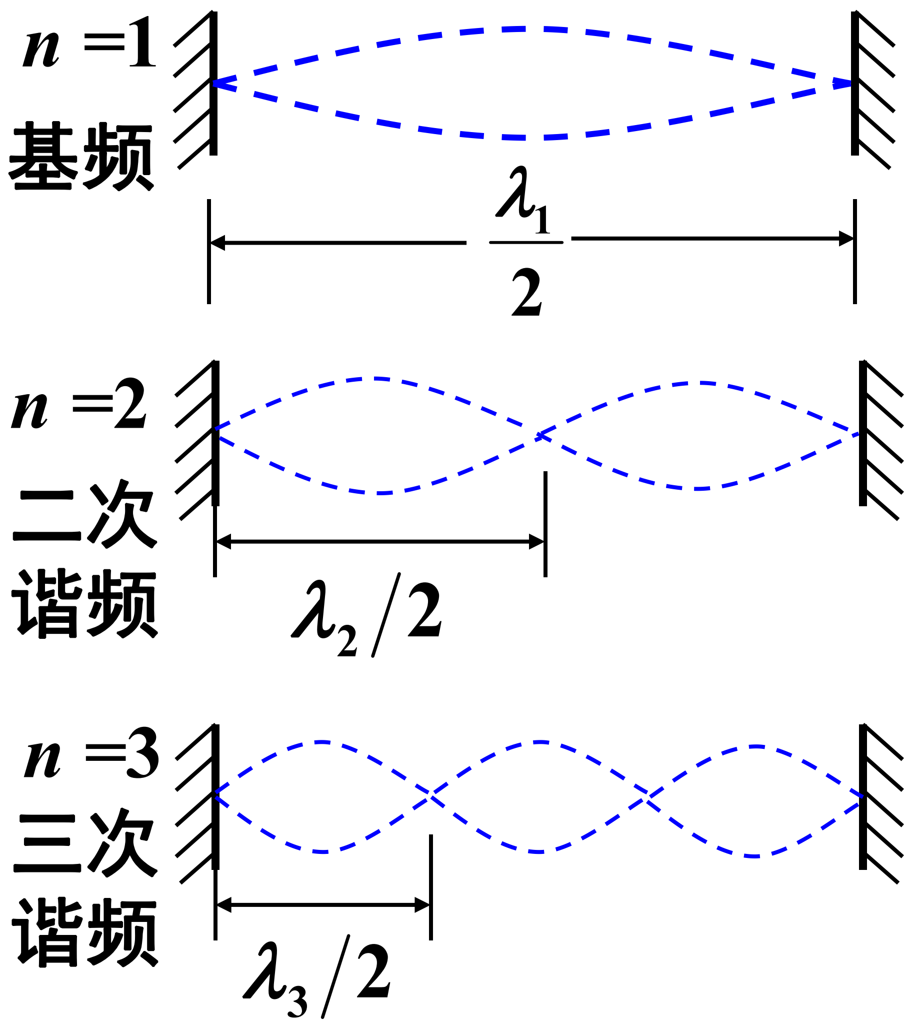
$$\nu_n=\frac{u}{\lambda_n}=n\frac{u}{2L}$$ —系统的固有频率

波速 $$u=\sqrt{\frac{F}{\rho_l}}$$

F—弦中的张力

ρ_l—弦的线密度

每种可能的**稳定振动方式**称作系统的一个**简正模式**。**两端固定的弦：**

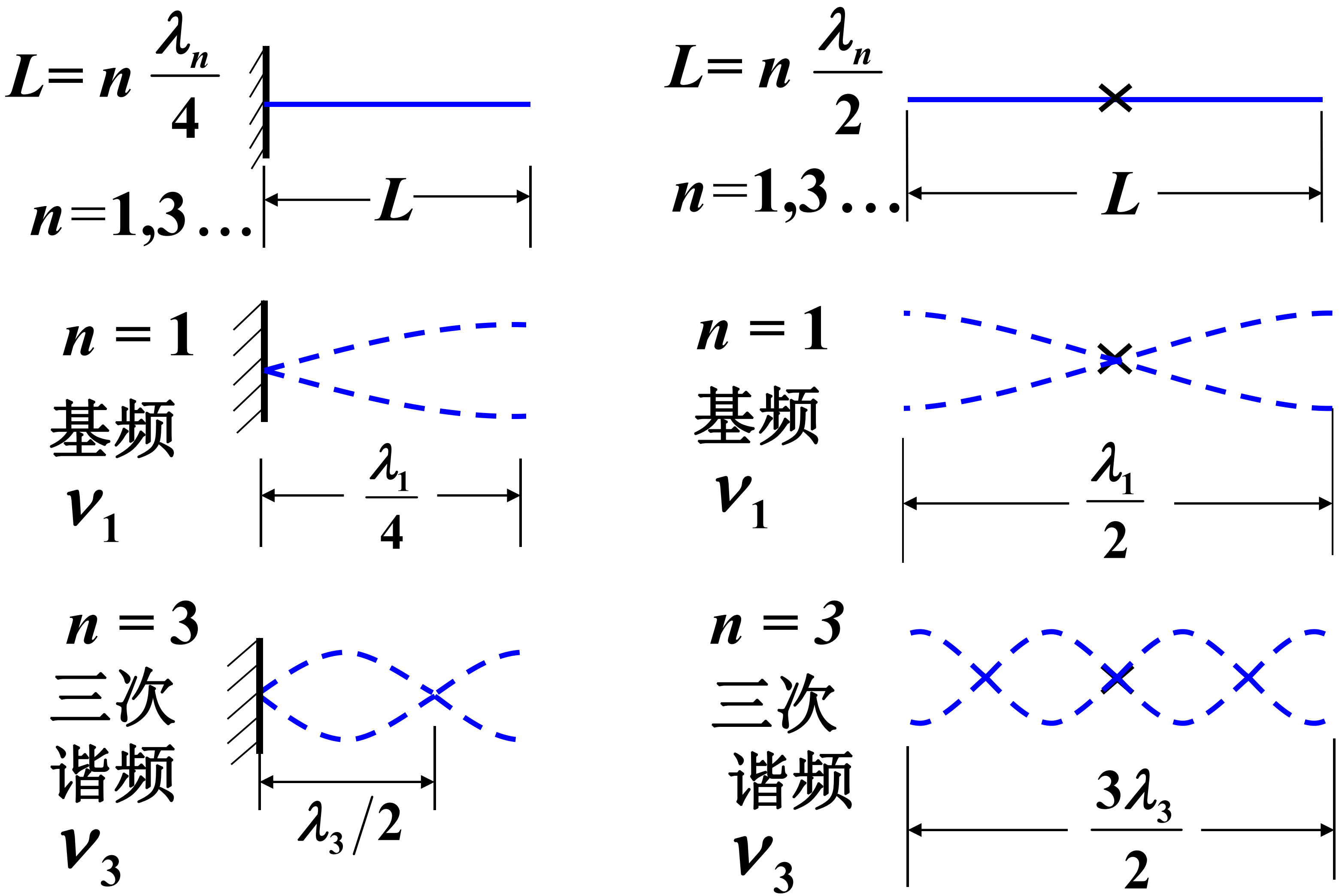


$$n\frac{\lambda_n}{2}=L$$

$$n=1,2,3\cdots$$

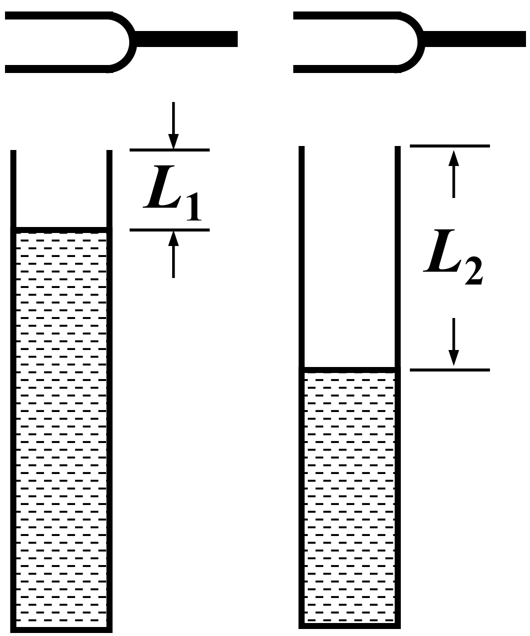
$$\lambda_n=\frac{2L}{n}$$

边界情况不同，简正模式也不同：



例：一频率为248.5Hz的音叉放在盛水的细管口，连续调节水面高度，当空气柱的高度相继为 $L_1 = 0.34$ m 和 $L_2 = 1.03$ m 时发生共鸣。

求：声波在空气中的声速 u



解：发生共鸣时形成驻波，管口为波腹，水面为波节。

空气柱长满足条件：

$$L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \quad n = 0, 1, 2 \cdots$$

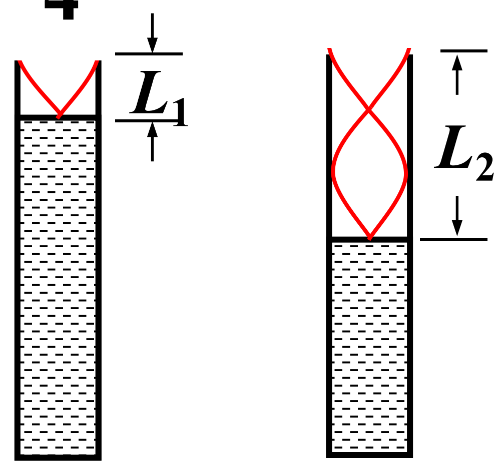
$$\left.\begin{aligned} L_1 &= (2n+1)\frac{\lambda}{4} = 0.34\,\text{m} \\ L_2 &= \left[2(n+1)+1\right]\frac{\lambda}{4} = 1.03\,\text{m} \end{aligned}\right\} L_2 - L_1 = \frac{\lambda}{2} = 0.69\,\text{m}$$

故 $\lambda = 2(L_2 - L_1) = 1.38\,\text{m}$

声速 $u = \lambda\nu = 1.38 \times 248.5 = 343\,\text{m/s}$

因 $L_1 = (2n+1)\dfrac{\lambda}{4} = (2n+1)\dfrac{1.38\,\text{m}}{4} = 0.34\,\text{m}$

得 $n = 0 \rightarrow \begin{cases} L_1 = \dfrac{\lambda}{4} \\ L_2 = \dfrac{3\lambda}{4} \end{cases}$



§7.8 声波 *地震波 *水波

对声波，要求清楚如下概念：

声压： $p = p_{波} - p_{静}$ （可正、可负）

声压振幅： $p_{\mathrm{m}} = \rho u A \omega$

声强 ： $I = \dfrac{1}{2}\rho u \omega^2 A^2$

标准声强： $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W/m^2}$，（$\nu = 1\mathrm{KHz}$）

这个声强人能够勉强听到，称为闻阈。

声强级： $$L = \log\frac{I}{I_0}(\text{Bel}) = 10\log\frac{I}{I_0}(\text{dB})$$

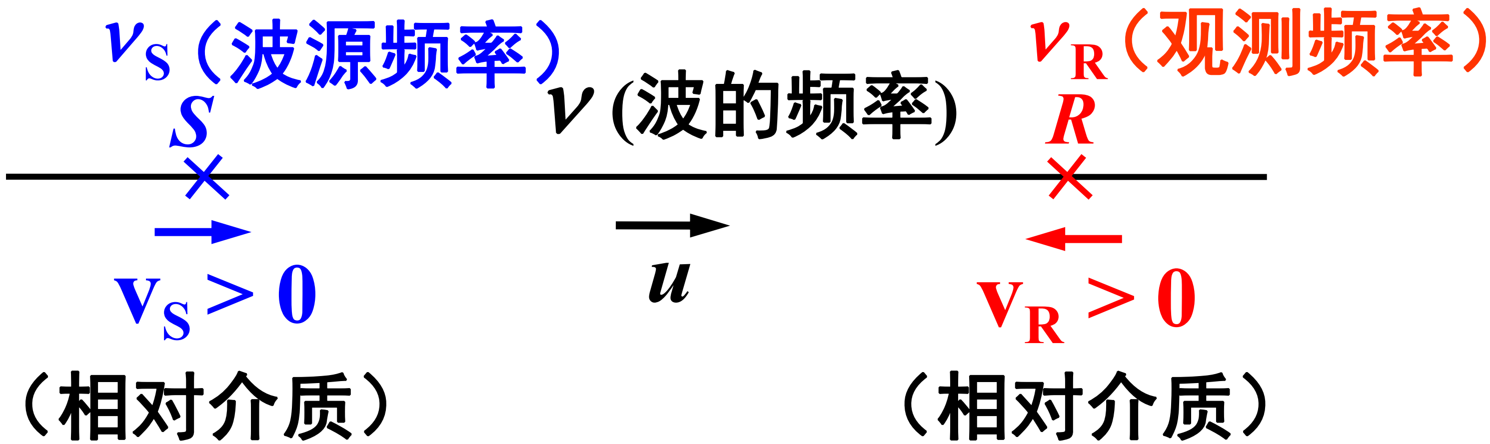
正常说话~60dB，噪声>70dB，炮声~120dB。

§ 7.9 多普勒效应

由于波源和观察者的运动，而使观测的频率不同于波源频率的现象。

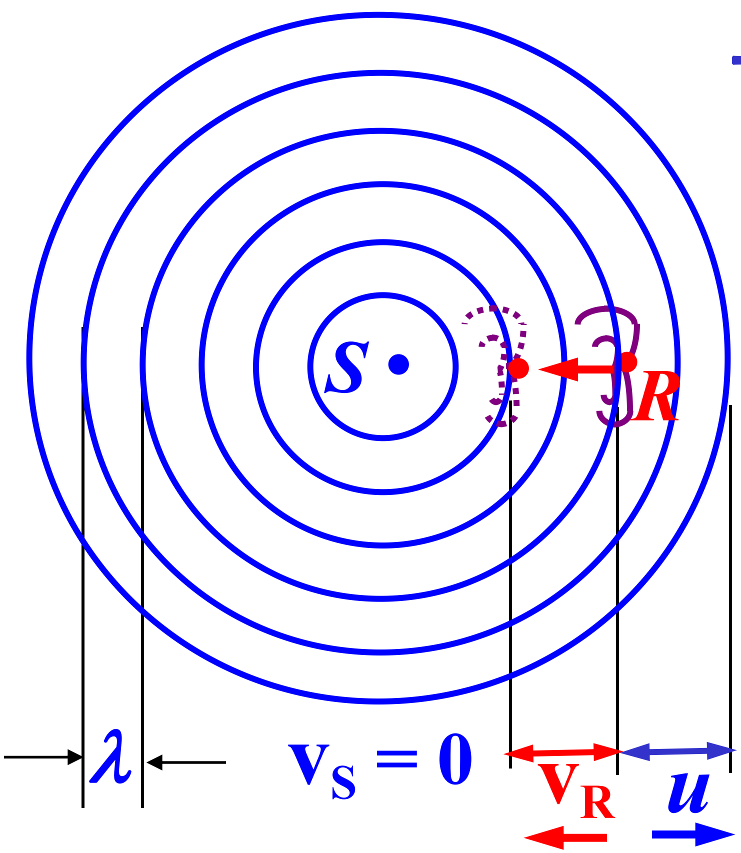
一、机械波的多普勒效应

设运动在波源 S 和观测者 R 的连线方向上，以二者相向运动的方向为速度的正方向。



（1） $v_S = 0$，$v_R \neq 0$，　此时，$\nu = \nu_S$

单位时间内接收波的个数：



$$\nu_R = \frac{u + v_R}{\lambda} = \frac{u + v_R}{u}\nu_S$$

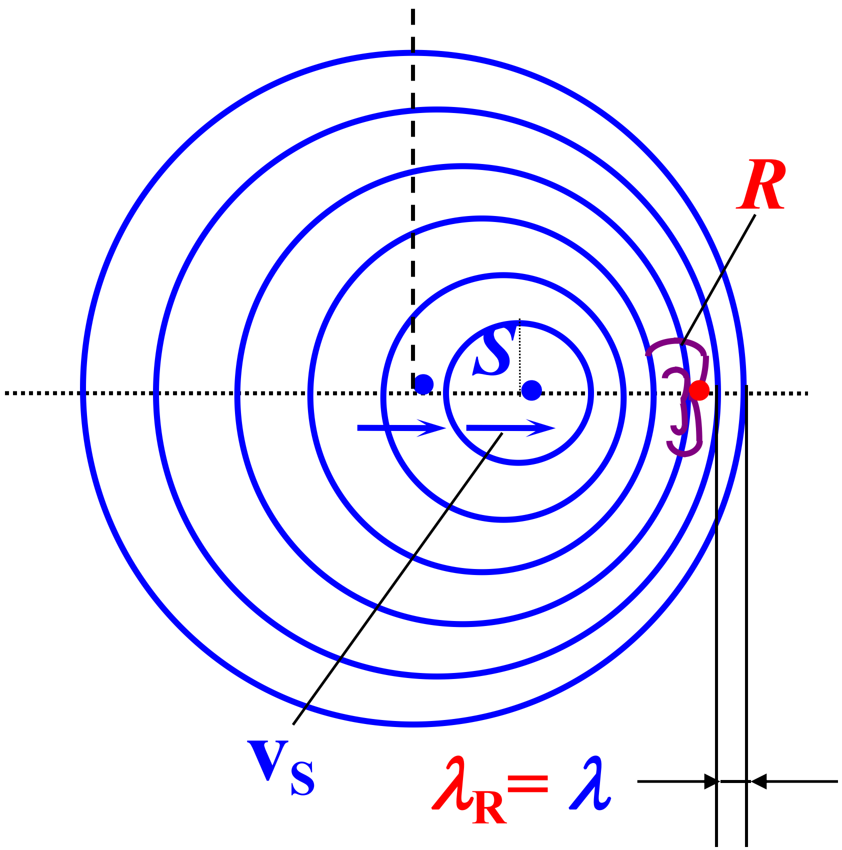
$$\boxed{\nu_R = \frac{u + v_R}{u}\nu_S}$$

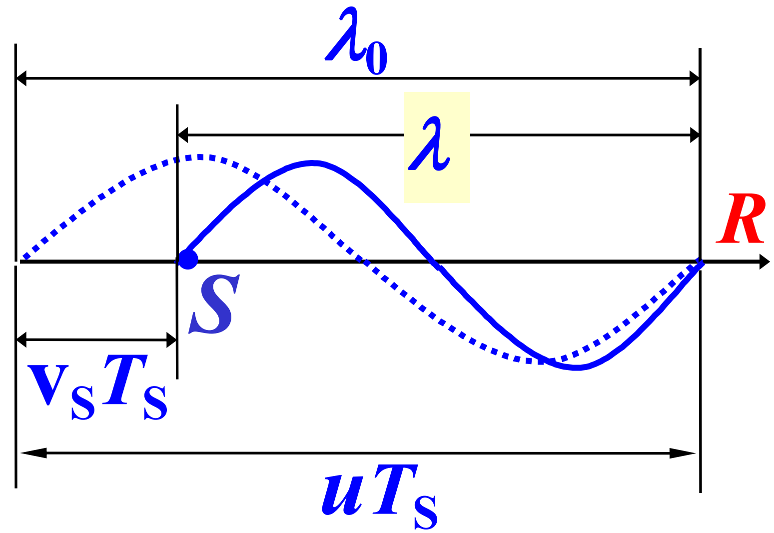
$$(\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{u}{\nu_S})$$

$v_R > 0$（R接近S），$\nu_R > \nu_S$

$v_R < 0$（R远离S），$\nu_R < \nu_S$

（2） $\mathrm{v}_R = 0$， $\mathrm{v}_S \neq 0$， 此时，$\nu_R = \nu$





$$\lambda = (u - \mathrm{v}_S)T_S$$

$$\nu_R = \nu = \frac{u}{\lambda} = \frac{u}{(u - \mathrm{v}_S)T_S}$$

$$\boxed{\nu_R = \frac{u}{u - \mathrm{v}_S}\nu_S}$$

$\mathrm{v}_S > 0$, $\nu_R > \nu_S$

$\mathrm{v}_S < 0$, $\nu_R < \nu_S$

（3）$v_R \neq 0$， $v_S \neq 0$， 此时，$\nu_S \neq \nu \neq \nu_R$

$$\nu_R = \frac{u + v_R}{u}\nu = \frac{u + v_R}{u} \cdot \frac{u}{u - v_S}\nu_S = \frac{u + v_R}{u - v_S}\nu_S$$

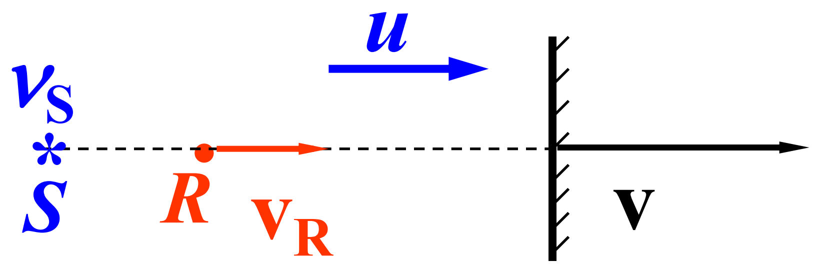
$$\boxed{\nu_R = \frac{u + v_R}{u - v_S}\nu_S}$$

速度v_R、v_S是相对介质而言，并以相向为正。

当 $v_R = -v_S$时（无相对运动）

$$\nu_R = \nu_S$$

【例】一静止声源 S 频率 $\nu_S = 300\text{Hz}$，声速 $u = 330\text{m/s}$，观察者 R 以速度 $\text{v}_R = 60\text{m/s}$ 向右运动，反射壁以 $\text{v} = 100\text{m/s}$ 的速度亦向右运动。求：R 测得的拍频 $\nu_B = ?$



解：

R收到的声源发射波的频率：$\nu_R = \dfrac{u - \text{v}_R}{u}\nu_s$

反射壁收到的声源发射波的频率：$\nu' = \dfrac{u - \text{v}}{u}\nu_s$

R收到的反射壁反射波的频率：

$$\nu'_R = \frac{u + \text{v}_R}{u + \text{v}}\nu' = \frac{u + \text{v}_R}{u + \text{v}} \times \frac{u - \text{v}}{u}\nu_S$$

拍频：

$$\nu_B = |\nu_R - \nu_R'| = 2\frac{\mathrm{v} - \mathrm{v}_R}{u + \mathrm{v}}\nu_s$$

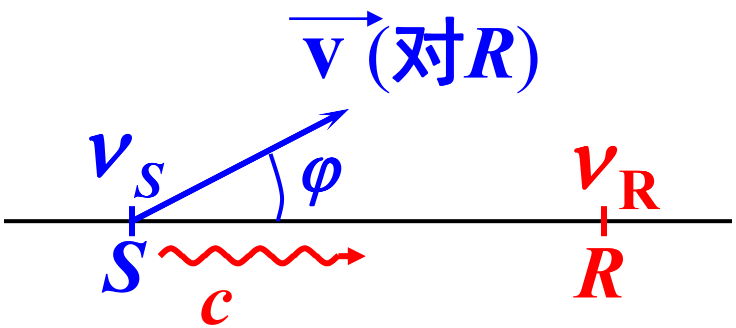
$$= 2 \times \frac{100 - 60}{330 + 100} \times 300$$

$$\approx 55.8\,\mathrm{Hz}$$

实验上，测拍频→反射壁的运动速度。

二、电磁波的多普勒效应

电磁波不同于机械波，不需要介质。由相对论可导出：



$$\boxed{\nu_R = \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c - v\cos\varphi}\nu_S}$$

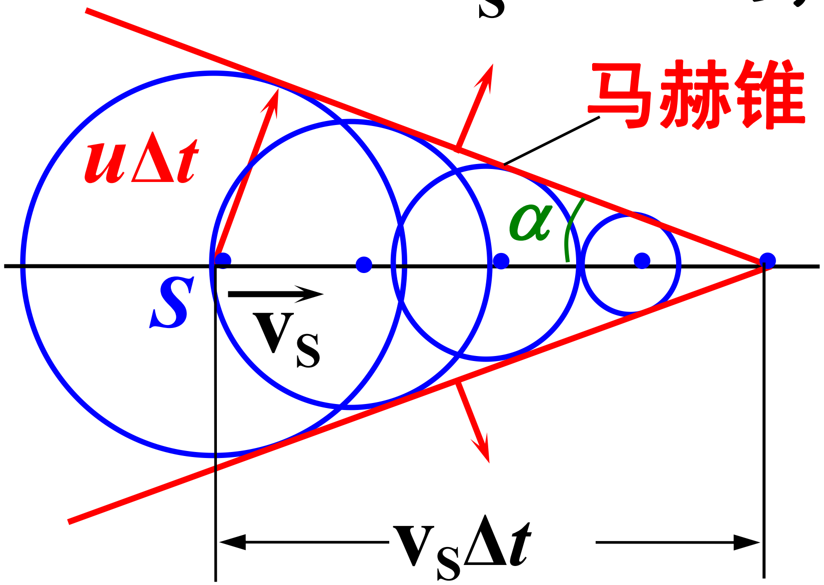
多普勒红移（“大爆炸”宇宙论）

当 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ 时，仍有 $\nu_R \neq \nu_S$

—— 横向多普勒效应

三、冲击波

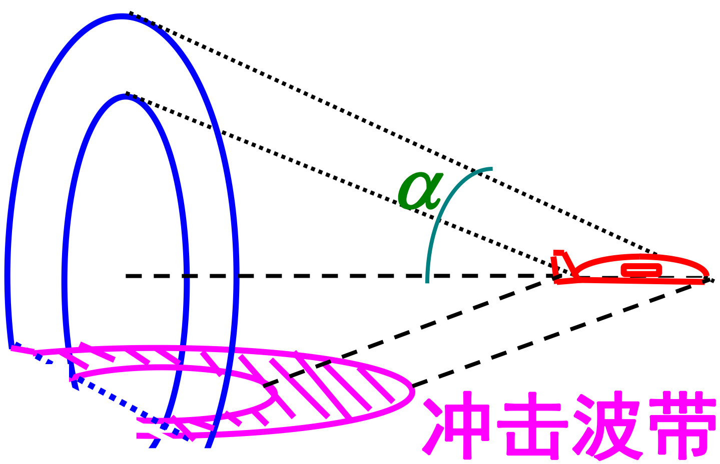
$v_S > u$ 时，$\nu_R < 0$ —后发出的波面



将超越先发出的波面，形成**锥形波阵面—冲击波**

$$\sin\alpha = \frac{u}{v_S}$$

$\frac{v_S}{u}$ ——— **马赫数**（Mach number）



对超音速飞机的最小飞行高度要有一定限制。

超音速的子弹
在空气中形成
的激波
（马赫数为2）

电磁激波—切连柯夫辐射(Cerenkov radiation):

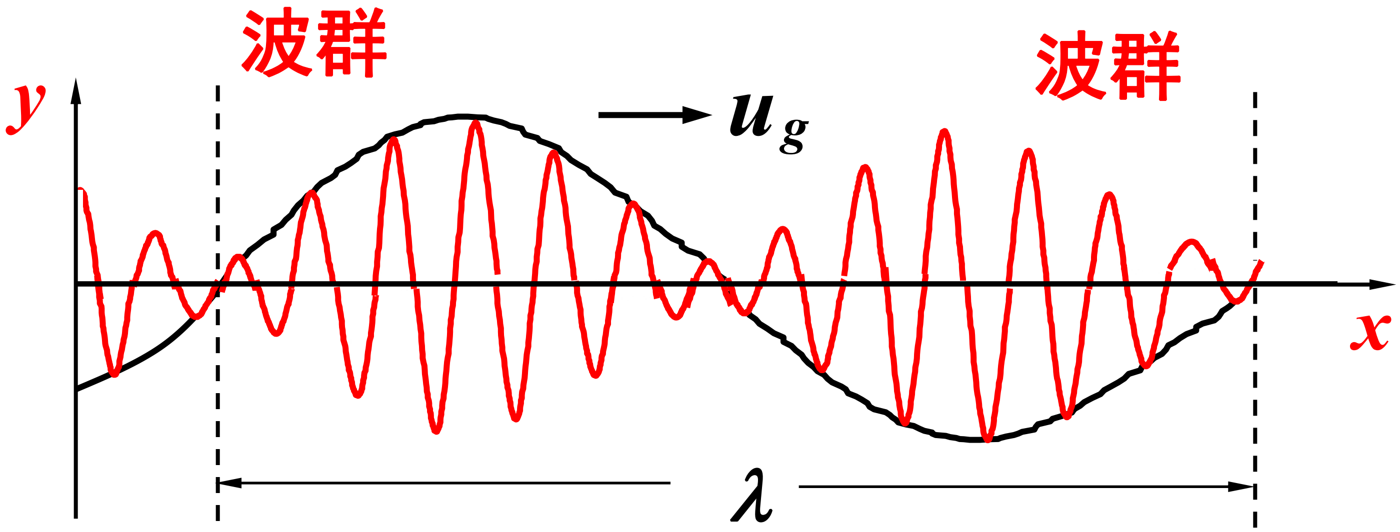
高能带电粒子在介质中的速度超过光在介质中的速度时，将发生锥形的电磁波—切连柯夫辐射。它发光持续时间短（数量级10^{-10}s），不易引起脉冲重叠，可用来探测高能带电粒子。也可用来作起始脉冲和截止脉冲。

*§7.10 复波 群速度

一、复波

若干不同频率的简谐波叠加而成的合成波，它是**非简谐波**。

例如，两个频率相近的简谐波合成的复波为



二、色散

在有些介质中，波速除了与介质有关外，不同频率简谐波的波速也不同。

这种波速与波的频率（波长）有关的现象称为色散。

能产生色散现象的介质称为色散介质。

不产生色散现象的介质称为无色散介质。

三、群速度

波群、波包或信号的传播速度u_{g}，称为群速度

群速度定义为：$\boxed{u_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}}$

由 $\omega = uk$, $\lambda = 2\pi/k$，得 $\boxed{u_g = u - \lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda}}$

对于无色散介质，相速为常数，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}\lambda = 0$

有 $u_g = u$

即，在无色散介质中，群速度等于相速度。

在色散介质中，$\mathrm{d}u/\mathrm{d}\lambda \neq 0$，复波的群速度不等于相速度

$$u_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = u - \lambda \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda} \neq u$$

色散越严重，即$\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda}\right|$越大，$u_g$和$u$相差越大。

色散引起波包扩散。色散严重→波包扩散→消失，群速的概念将失去意义。

只有在$\left|\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\lambda}\right|$较小的情况下，群速才有意义，波包才稳定。

△* § 7.11 孤子（soliton）（自学）

在非线性介质中（相速度和振幅有关），非线性效应有可能使波包被挤压,从而与色散引起的波包扩散相抵消,形成形状不变的孤立波,又称做孤波、或孤子。