清华大学2022春季学期

电路原理C

第3次应用介绍课

正弦稳态电路的应用

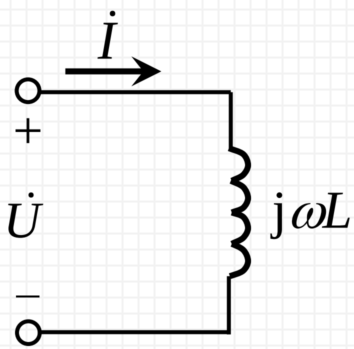
内容

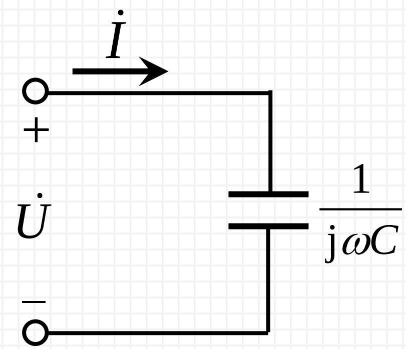
本讲重难点

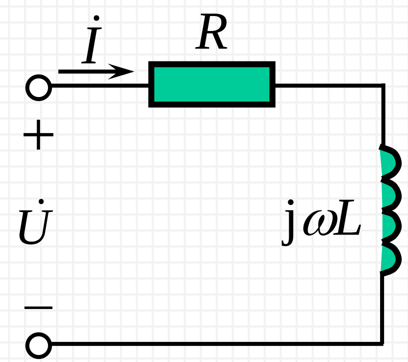
- 滤波器的**截止频率**
- 空心变压器的**引入阻抗**
- 理想变压器的 u-i **关系**
  – 双绕组
  – 三绕组

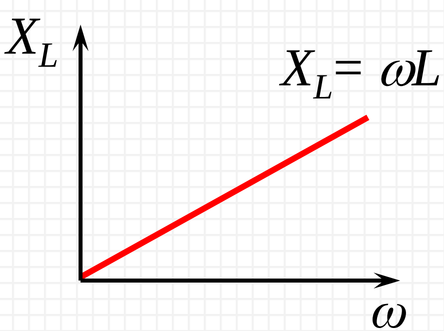
1、频率特性

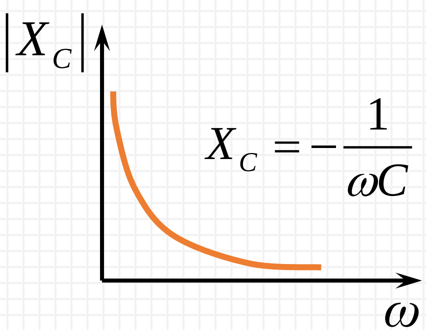
(1) 频率特性 (frequency characteristics)











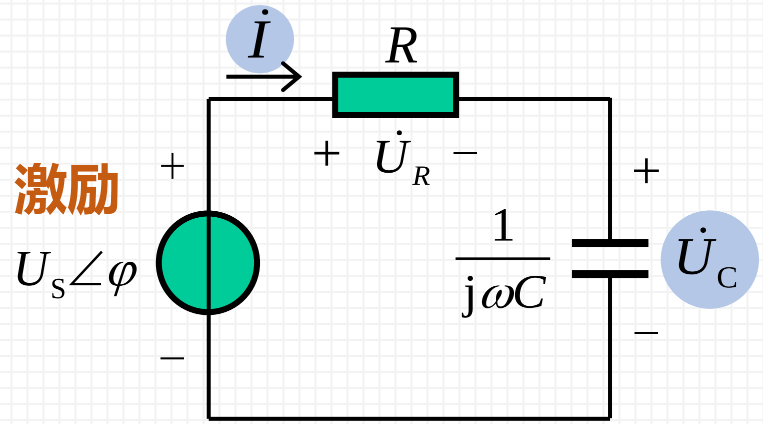
$$Z = R + \mathrm{j}\omega L$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\varphi = \arctan \omega L / R$$

端口入端**阻抗**的**幅值**和**相角**随**频率**的变化而变化

激励

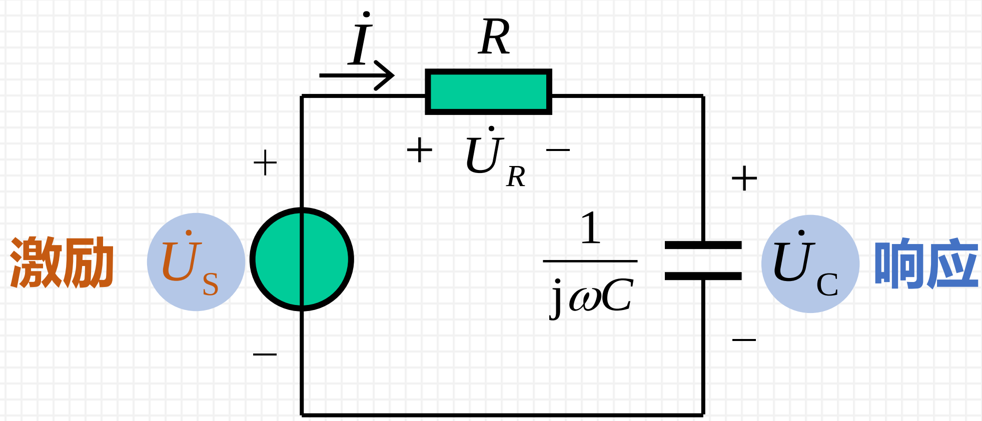


响应

$$\dot{I}=\frac{U_S\angle\varphi}{R-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}}=\frac{U_S}{\sqrt{R^2+(1/\omega C)^2}}\angle(\varphi+\arctan 1/\omega RC)$$

$$\dot{U}_C=\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I}=\frac{U_S}{\sqrt{(\omega RC)^2+1}}\angle(\varphi+\arctan 1/\omega RC-90°)$$

电路**响应**的**幅值**和**相角**均随**频率**的变化而变化



$$H=\frac{\text{响应（相量）}}{\text{激励（相量）}}$$

网络函数
传递函数

$$H=\frac{\dot{U}_o}{\dot{U}_i}=\frac{\dot{U}_C}{\dot{U}_S}=\frac{1/j\omega C}{R+1/j\omega C}$$

$$=\frac{1}{1+j\omega RC}\quad=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\angle-\arctan(\omega RC)$$

网络函数的**幅值**和**相角**均随**频率**的变化而变化

电路的**频率响应** ⟷ 电路的**频率特性**

改变电路激励的**频率**（维持其幅值不变）对电路造成的**影响**

阻抗	支路电压电流	输入输出关系
阻抗频率特性	电压频率特性	
电抗频率特性	电流频率特性	网络函数/传递函数

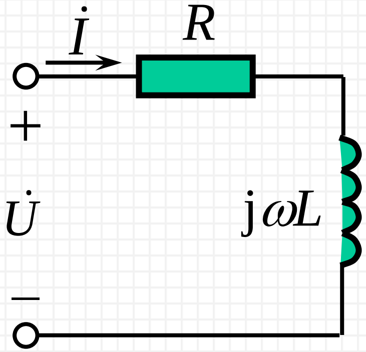
$X_L = \omega L$

$$\dot{I} = \frac{U_S}{\sqrt{R^2 + \left(1/\omega C\right)^2}} \angle\left(\varphi + \arctan 1/\omega RC\right)$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{\text{响应}}{\text{激励}}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \angle - \arctan(\omega RC)$$

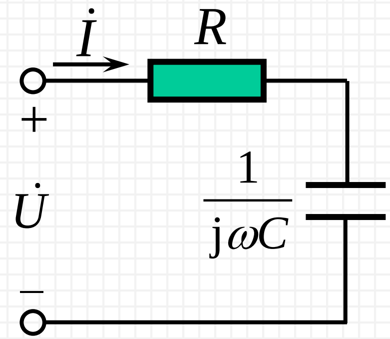
例1 画图示电路入端阻抗频率特性。



$$Z=R+\mathrm{j}\omega L$$

$$|Z|=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$$

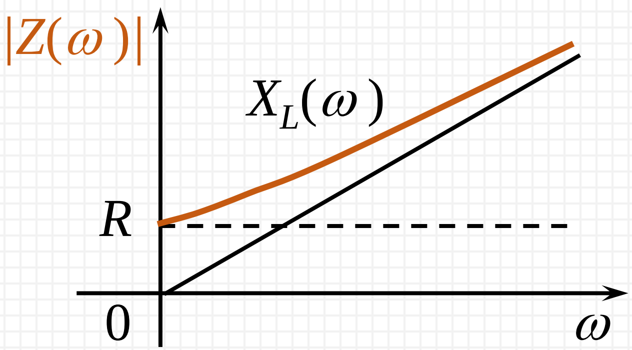
$$\varphi=\arctan\frac{\omega L}{R}$$

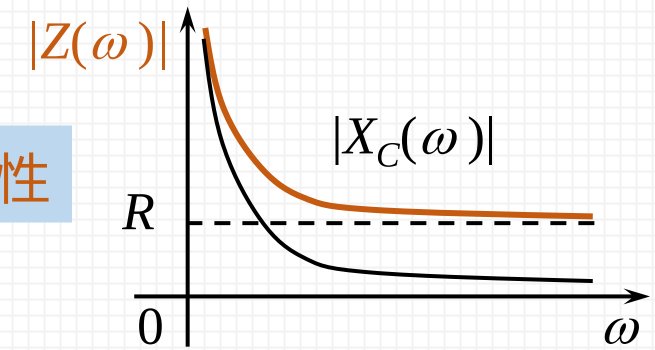


$$Z=R-\mathrm{j}\frac{1}{\omega C}$$

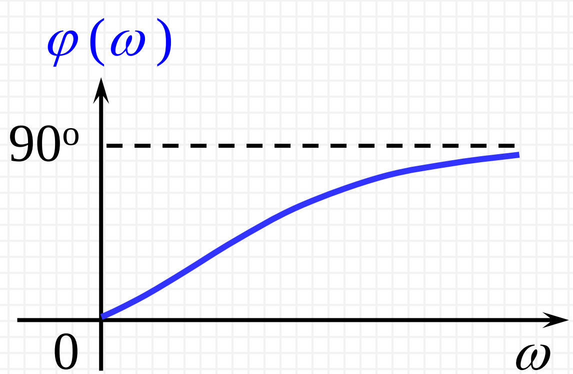
$$|Z|=\sqrt{R^2+(\frac{1}{\omega C})^2}$$

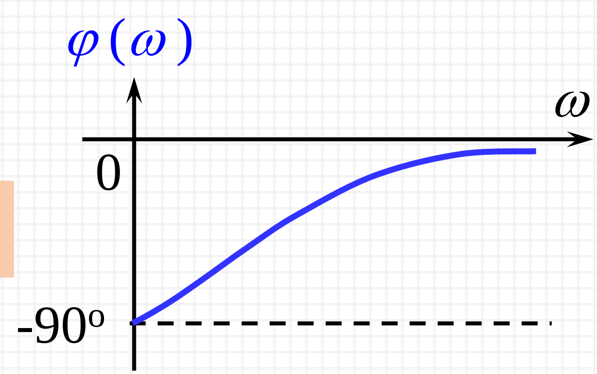
$$\varphi=-\arctan\frac{1}{\omega CR}$$





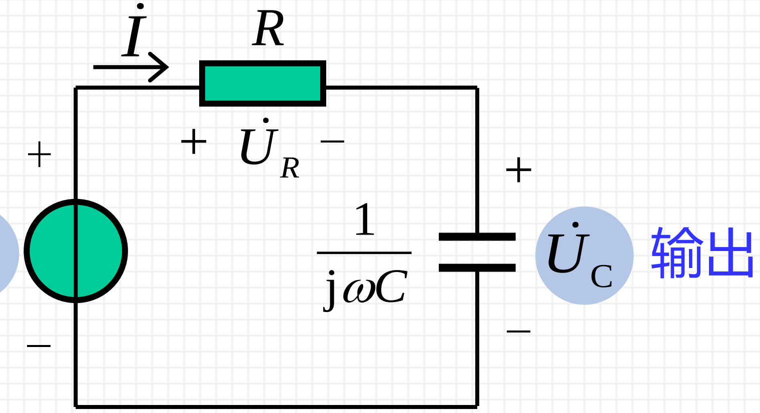
幅值频率特性



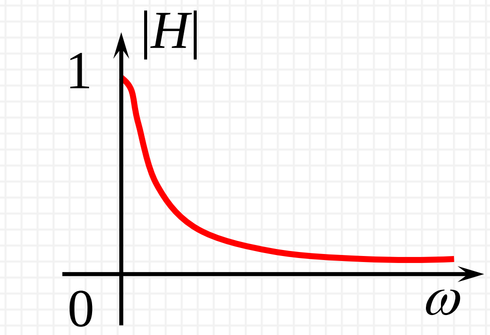


相位频率特性

例2 画图示电路网络函数的频率特性。

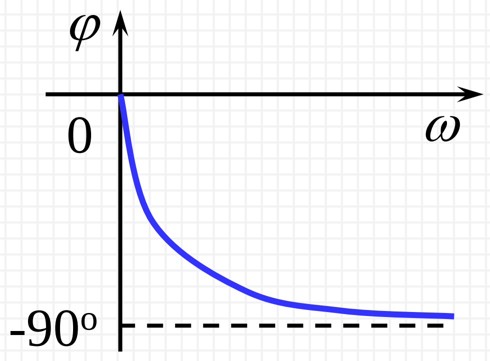


$$H(\omega)=|H|\angle\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\angle-\arctan(\omega CR)$$



设 $RC=1$

ω /(rad/s)	$\lvert H\rvert$	φ (°)
0	1	0
1	0.707	-45
5	0.196	-78.7
10	0.1	-84.3
20	0.05	-87.1
100	0.01	-89.4



实际应用中，经常会出现

- **待考察量**的变化非常大
- **频率范围**非常宽

阻抗、电压电流、传递函数

$10^{-4} < |H| < 10^{+3}$

1mHz ~ 1GHz

幅值/相位频率特性的波形特点被掩盖

$-4 < \lg|H| < +3$

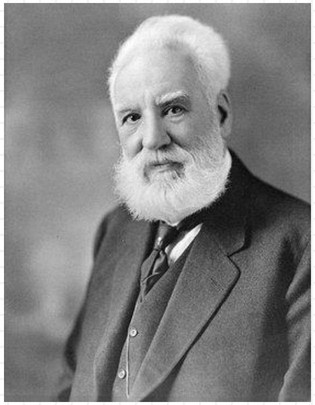
用对数来表示

-3 ~ 9

分贝(decibel)

$$H_{\mathrm{dB}} = 20\lg|H|$$

dB的由来和好处



Bell

- 人们在研究声音有多响亮的过程中，提出两种用log方式描述比例大小的手段
- 声音响亮的程度与功率成正比
- 声音的功率与声压平方成正比
- 好处
  - 从容地表示大比例
  - 对 >**1**和 <**1**区分明显

$$\eta = \lg \frac{A}{B}(\mathrm{Bell})$$

$$\mathrm{dB} = 10\lg \frac{A}{B}$$

$$\mathrm{dB} = 10\lg \frac{P_2}{P_1}$$

$$\mathrm{dB} = 10\lg \frac{U_2^2}{U_1^2} = 20\lg \frac{U_2}{U_1}$$

2、滤波器(Filter)

去除噪声的装置称为**滤波器**

噪声是无处不在的

假设信号与噪声的频带不重合

估计信号特征，从而提高信噪比

经典滤波器

现代滤波器

用模拟系统实现

用数字系统实现

现代信号处理

模拟滤波器

数字滤波器

用无源元件实现

用有源元件实现

数字信号处理

无源滤波器

有源滤波器

电路与系统

模拟电子技术基础

电力电子技术基础

模拟滤波器

从功能上分类

低通(LP)　高通(HP)　带通(BP)　带阻(BS, Notch)　全通(FP)

从实现方式上分类

无源滤波器

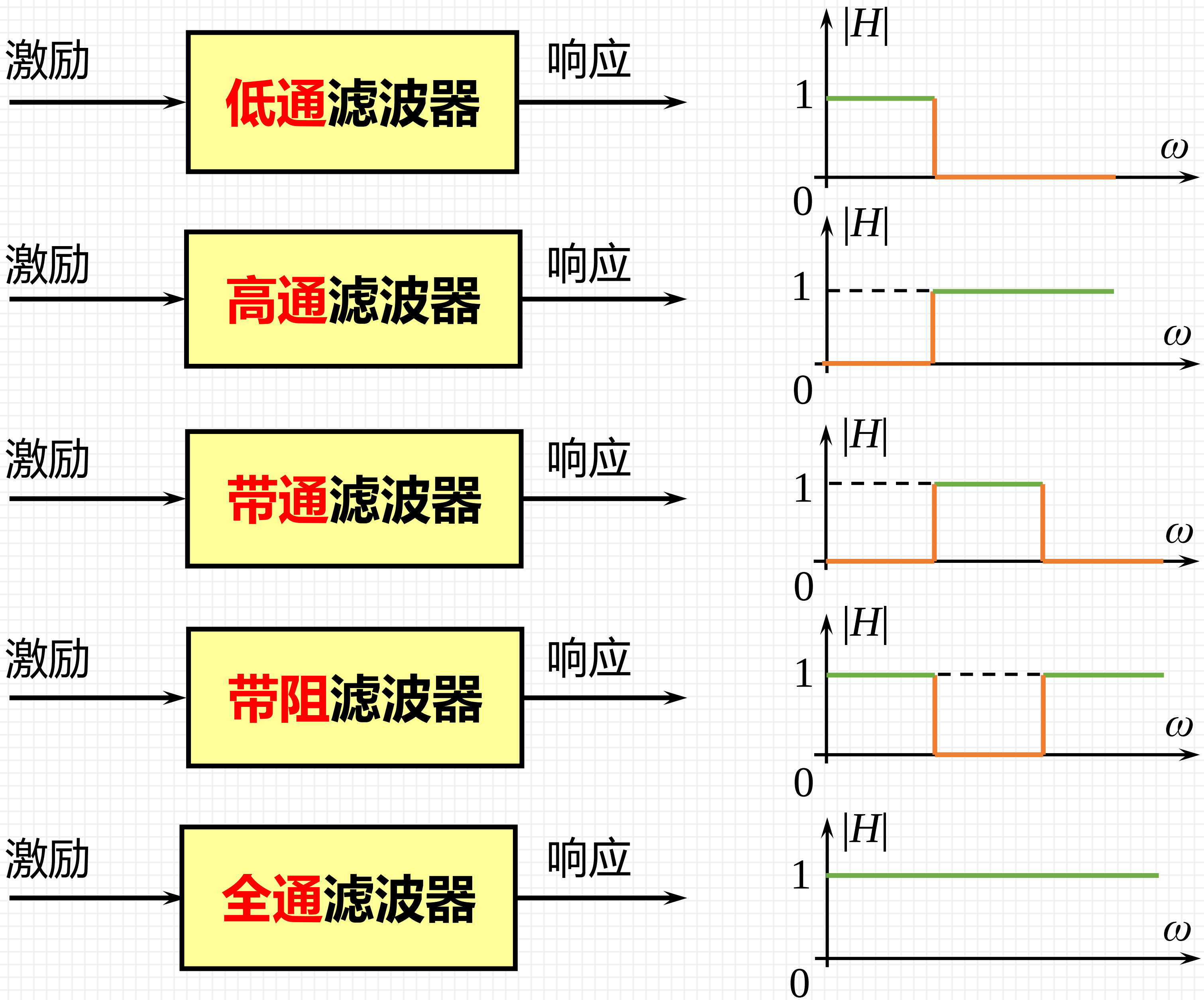
RC　LC

用无源元件实现

有源滤波器

Op Amp　电力电子器件

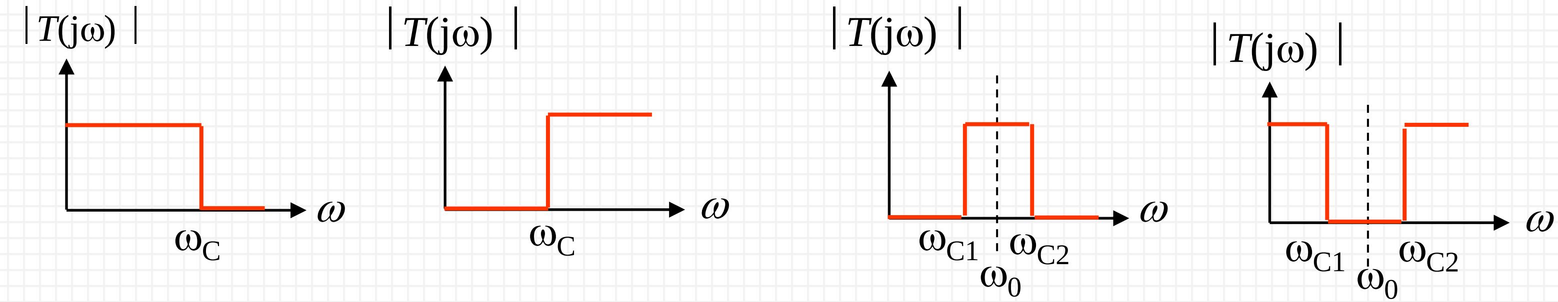
用有源元件实现


激励
低通滤波器
响应
高通滤波器
带通滤波器
带阻滤波器
全通滤波器
|H|
1
0
ω

无源滤波器

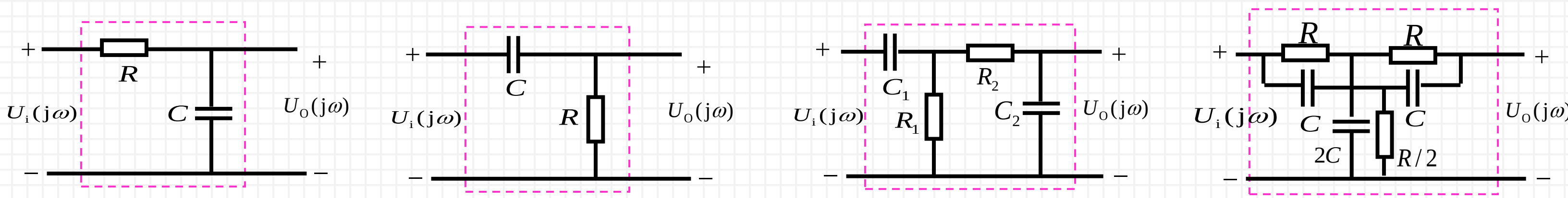
扩展知识

理想滤波器的幅频特性曲线



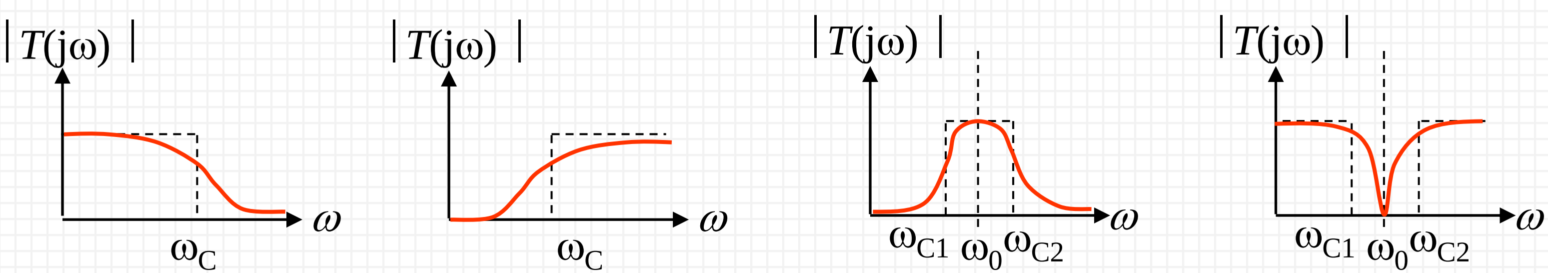
低通　高通　带通　带阻

实际的滤波器



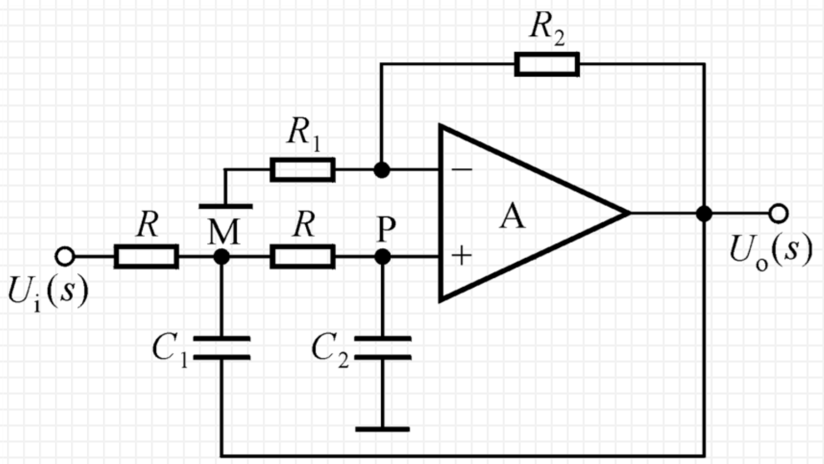
高通 + 低通　　双T带阻滤波器

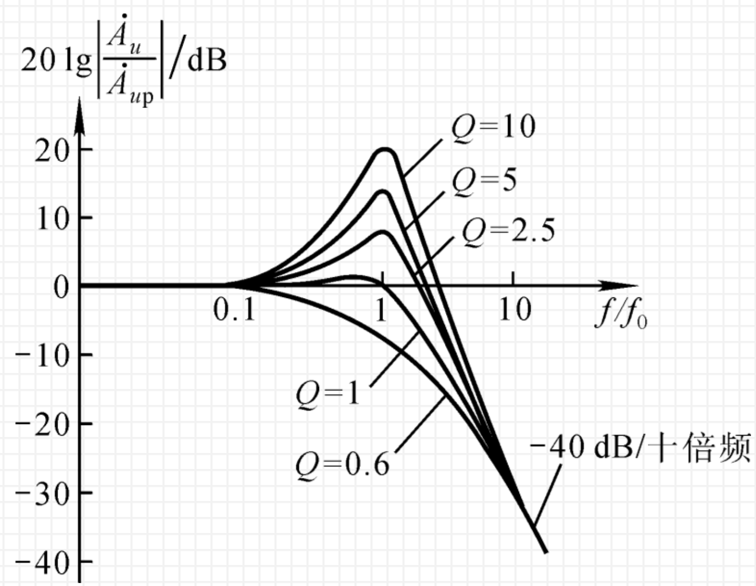
实际的滤波器幅频特性曲线



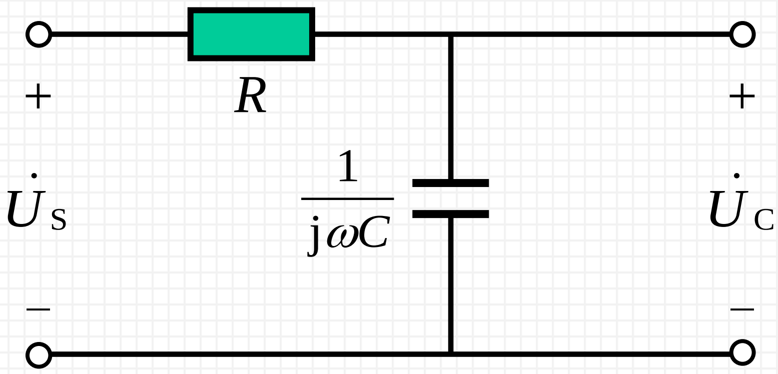
压控电压源二阶LPF(有源滤波器)

扩展知识



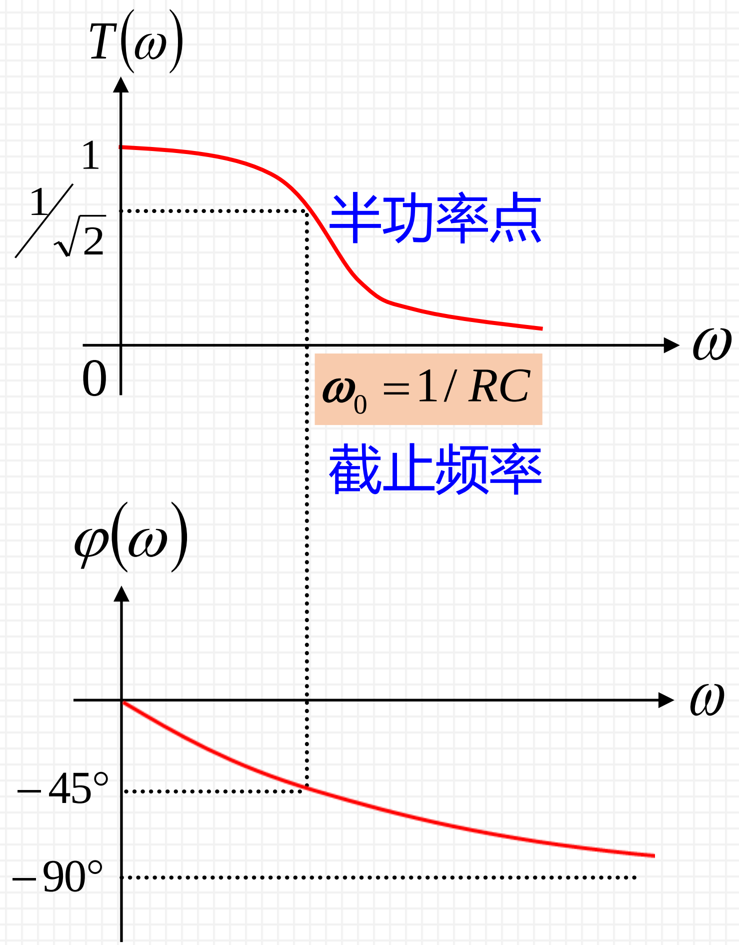


例1 RC低通滤波器

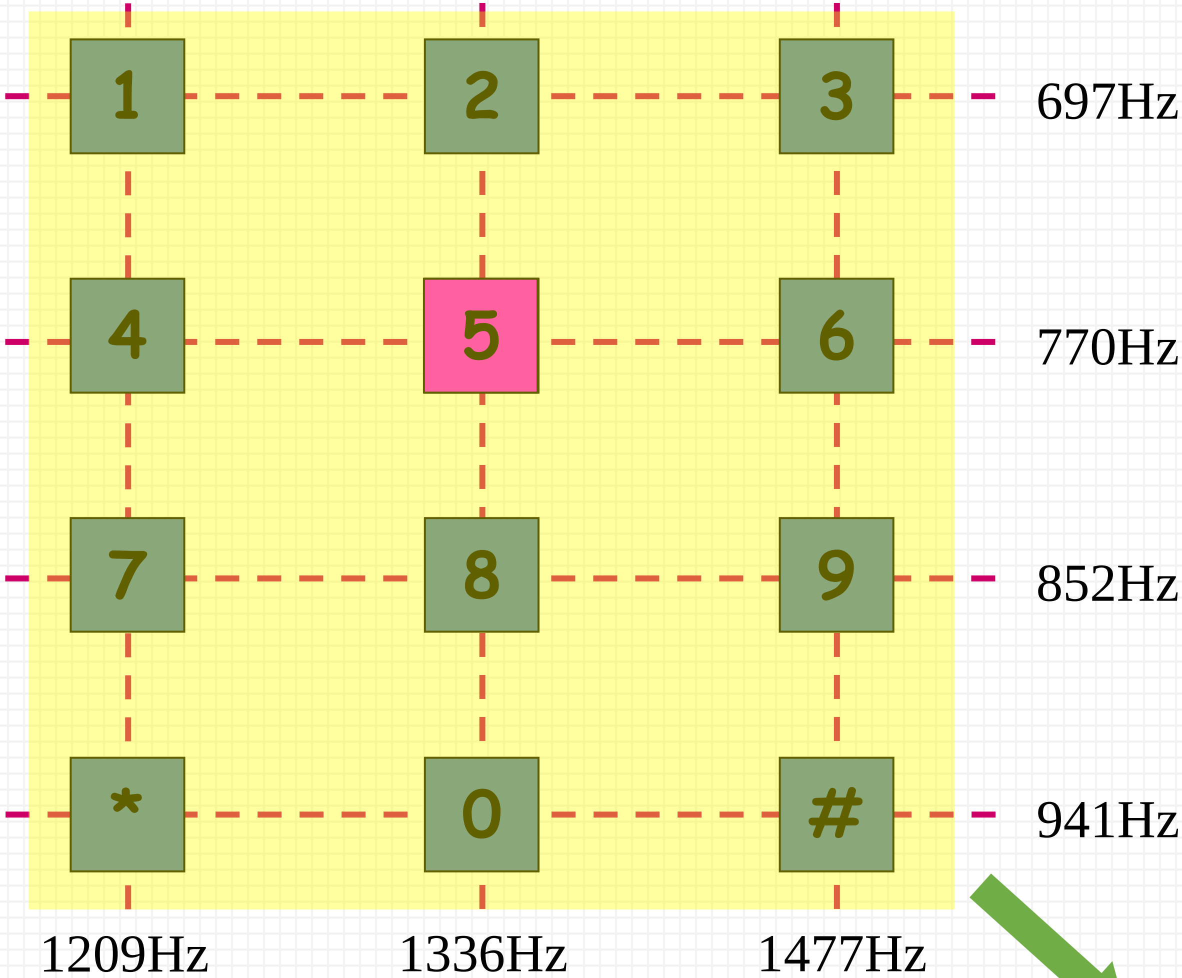


$$H(\omega)=|H|\angle\varphi$$

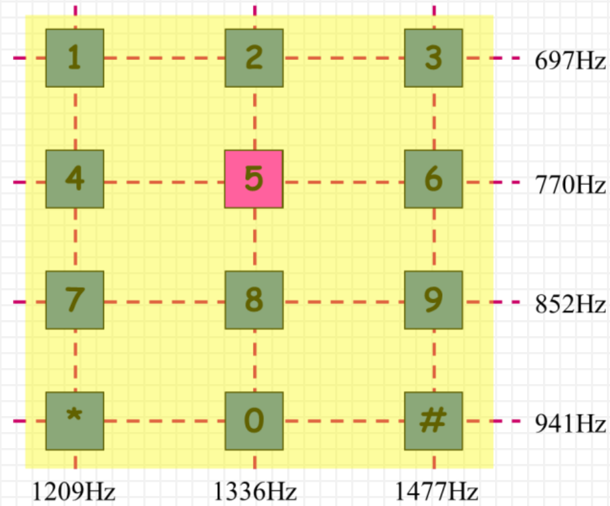
$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega CR)^2}}\angle-\arctan(\omega CR)$$



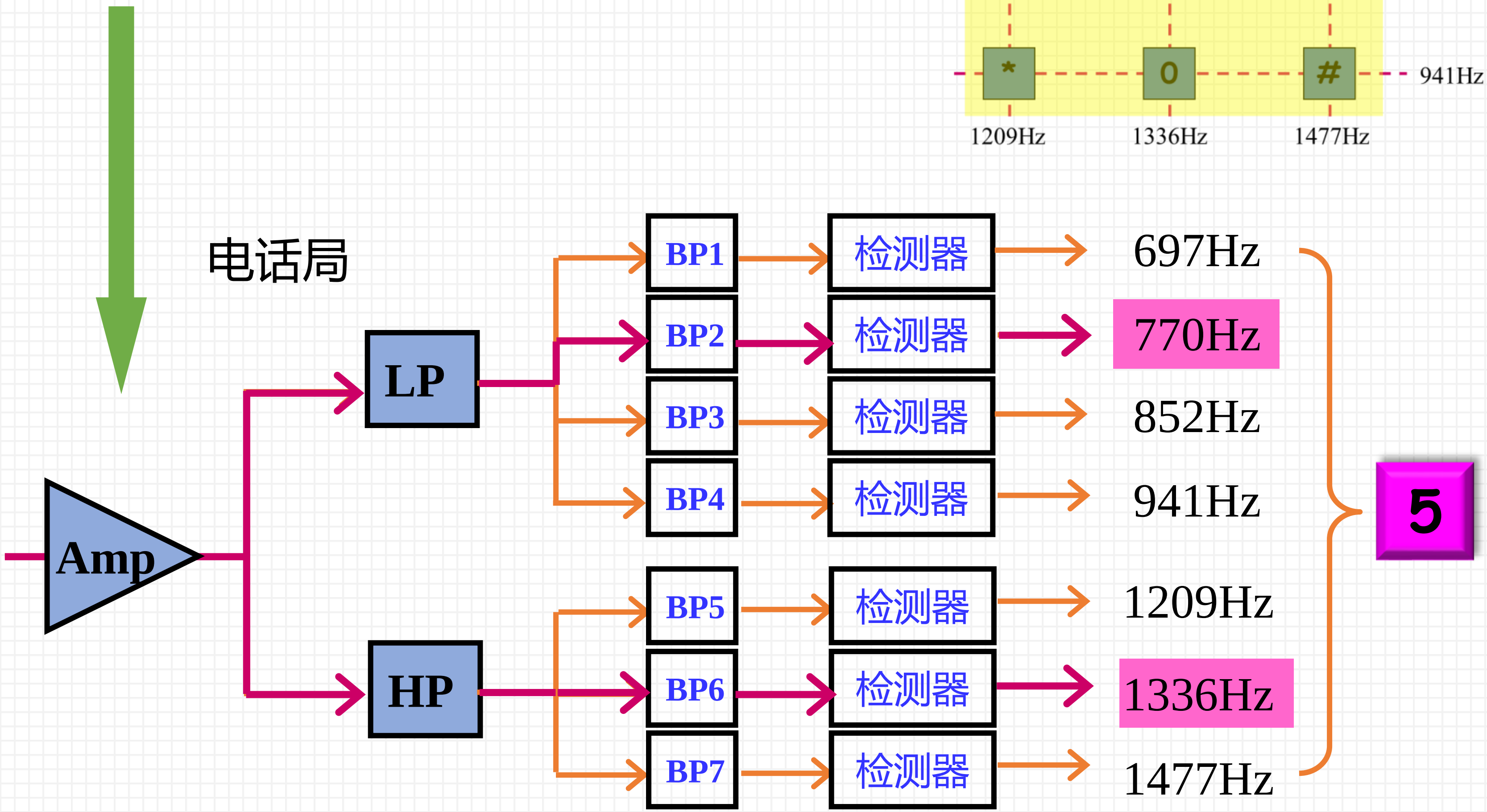
例2　按键式电话（tone，双音频电话）



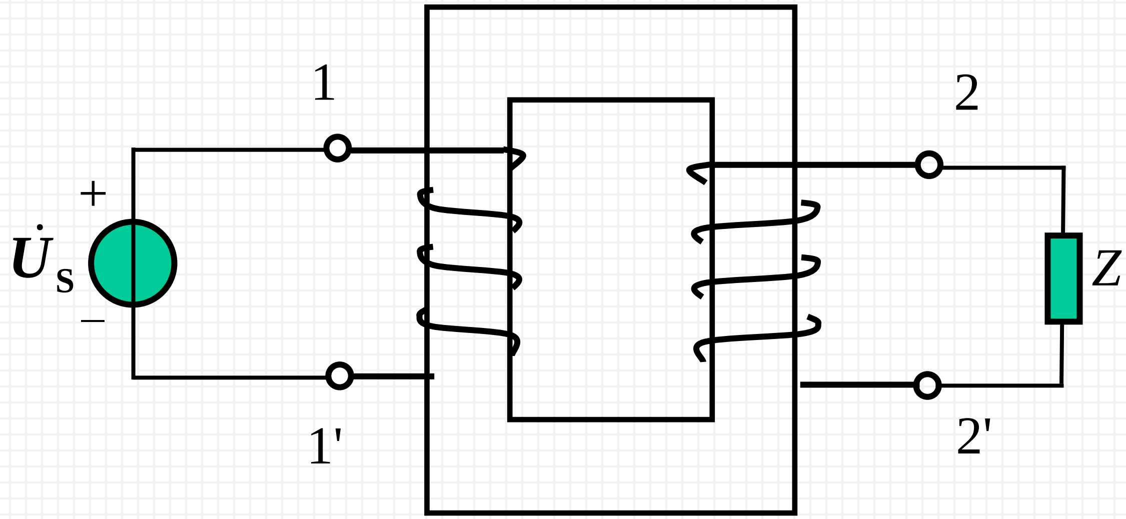
770Hz + 1336Hz



770Hz + 1336Hz



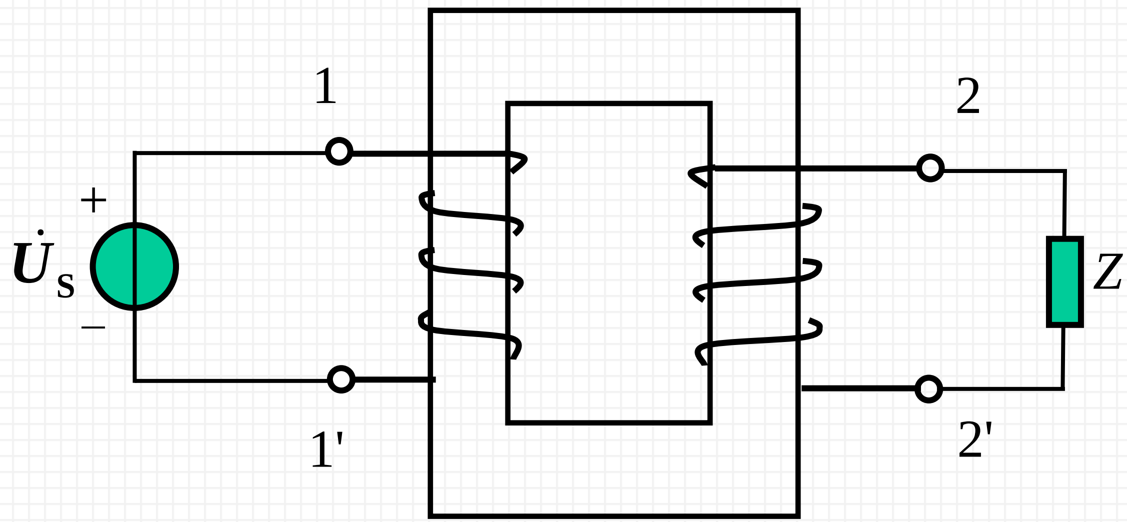
3、**变压器** (Transformer)



利用**互感**的作用来**传递能量**

- 交流变压、变流
- 电隔离
- 传送功率
- 阻抗匹配

研究思路



1) 考虑线圈内阻，求从原边(副边)看的等效电路

空芯变压器模型

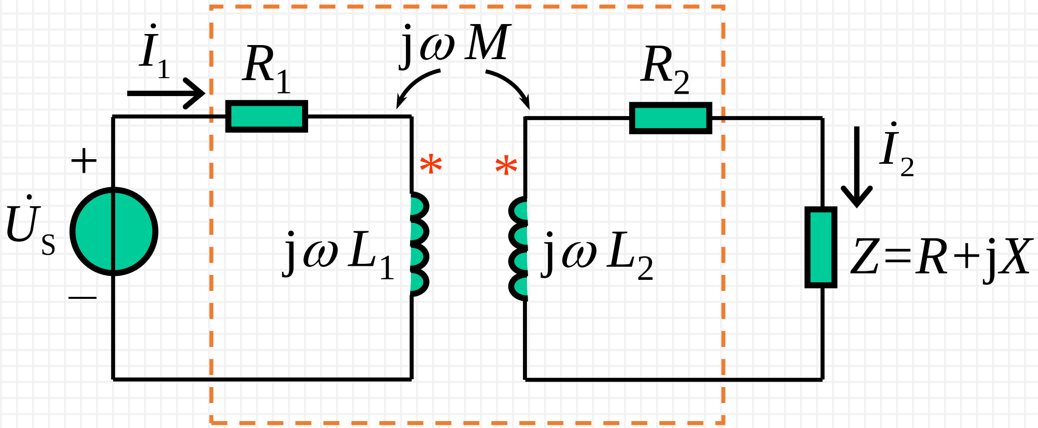
2) 忽略考虑线圈内阻，耦合系数为1

全耦合变压器模型

3) 感值趋向于无穷大

理想变压器模型

(1) 空心变压器



原边回路总抗阻

$Z_{11}=R_1+\mathrm{j}\omega L_1$

副边回路总阻抗

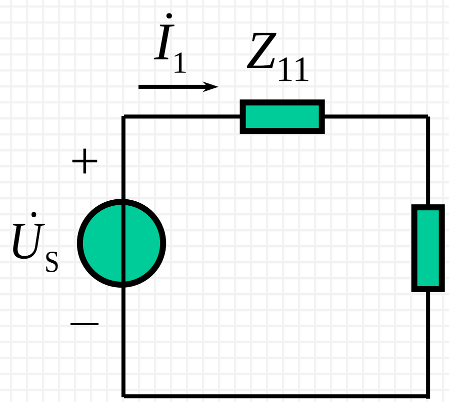
$Z_{22}=(R_2+R)+\mathrm{j}(\omega L_2+X)$

$$\begin{cases} Z_{11}\dot{I}_1 - \mathrm{j}\omega M\dot{I}_2 = \dot{U}_S \\ -\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$Z_{in} = \frac{\dot{U}_S}{\dot{I}_1} = Z_{11} + \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1}{Z_{22}}$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_S}{Z_{11} + \dfrac{(\omega M)^2}{Z_{22}}}$$



$$Z_l \overset{\text{def}}{=} \frac{(\omega M)^2}{Z_{22}}$$

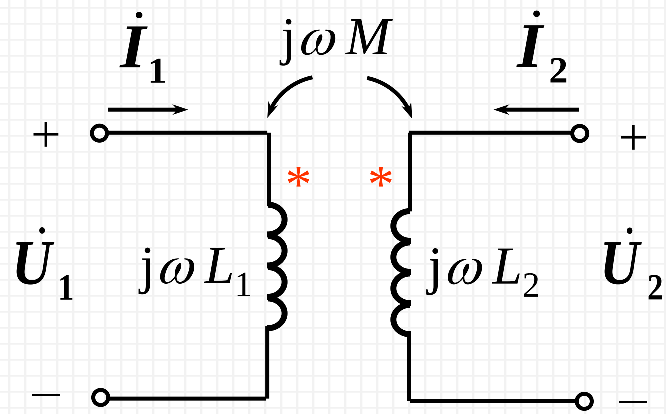
引入阻抗

原边等效电路

(2) 全耦合变压器 (unity-coupled transformer)

$$M=\sqrt{L_1L_2}$$

忽略电阻



$$\dot{U}_1=\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega M\dot{I}_2$$

$$=\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega\sqrt{L_1L_2}\,\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_2=\mathrm{j}\omega M\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2$$

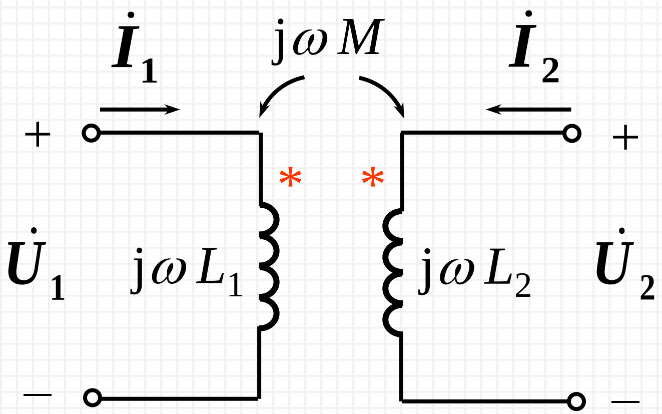
$$=\mathrm{j}\omega\sqrt{L_1L_2}\,\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2$$

$$\dot{U}_1\sqrt{L_2}=\dot{U}_2\sqrt{L_1}$$

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}=\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}=\frac{N_1}{N_2}=n \rightarrow \text{变比}$$

变压器实现变压

全耦合变压器电压、电流关系



$$\boxed{\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = n}$$

$$\boxed{M = \sqrt{L_1 L_2}}$$

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2$$

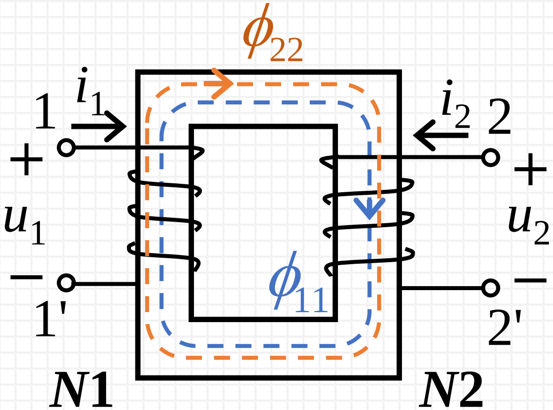
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} - \frac{M}{L_1}\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} - \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{L_1}\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} - \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\dot{I}_2$$

$$\boxed{\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{j\omega L_1} - \frac{1}{n}\dot{I}_2}$$

原边1000匝，副边5000匝的变压器和原边1匝，副边5匝的变压器，**有什么区别?**

全耦合变压器电压、电流关系
$$\begin{cases} \dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = n \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - \dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$

(3) 理想变压器 (ideal transformer)



全耦合变压器

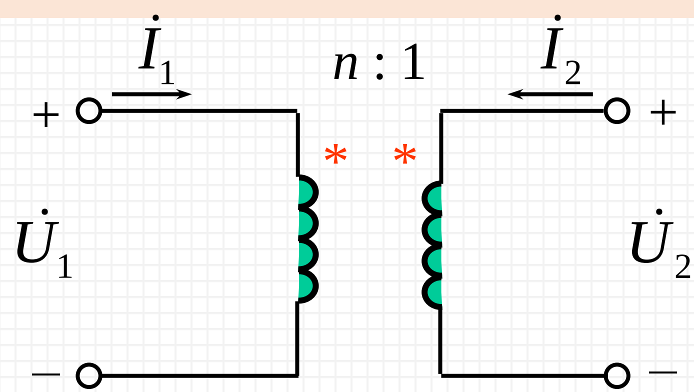
$$\begin{cases} \dfrac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = n \\ \dot{I}_1 = \dfrac{\dot{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1} - \dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$

$$n = \frac{N_1}{N_2}$$

若 $L_1 \to \infty$ (原因可以是磁导率 $\mu \to \infty$ 或者匝数 $N_1 \to \infty$)，同时确保 L_1/L_2 **比值不变** ($L_2 \to \infty$)，且全耦合($M \to \infty$)， 有

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$

理想变压器的元件特性

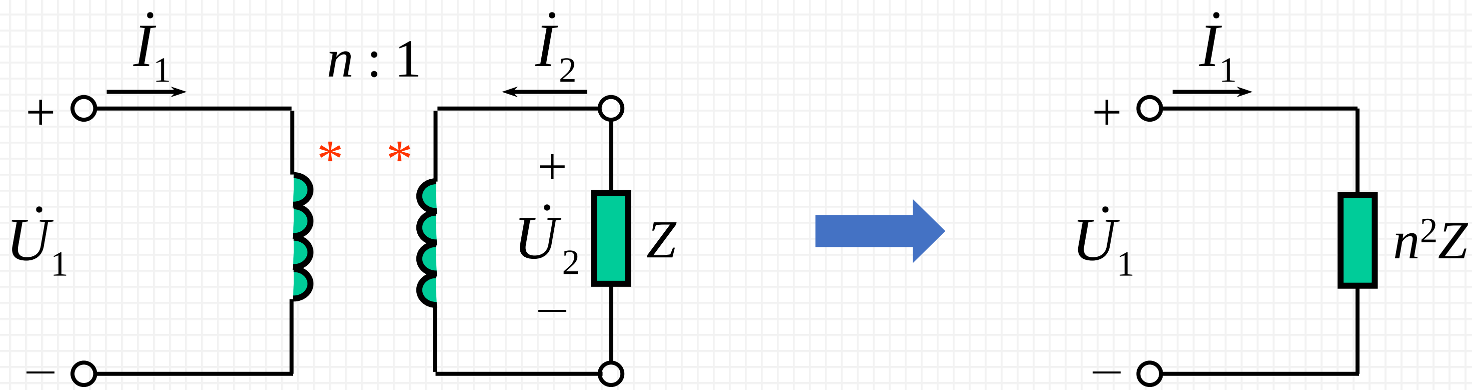


理想变压器的电路模型

理想变压器模型看不出电感!

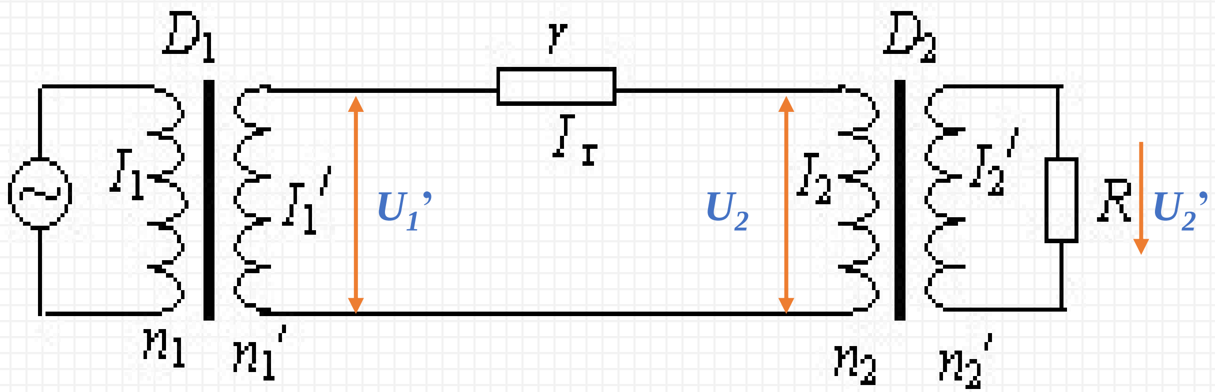
理想变压器的阻抗变换性质：

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n\dot{U}_2 \\ \dot{I}_1 = -\dfrac{1}{n}\dot{I}_2 \end{cases}$$



$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{n\dot{U}_2}{-\frac{1}{n}\dot{I}_2} = n^2\left(-\frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}\right) = n^2 Z$$

输电线路高压传输降低损耗原理：



这是输电线路完整的模型图。升压变压器副边电压U_1'，降压变压器原边电压U_2，副边电压U_2'

$$Z_R=\left(\frac{U_2}{U_2'}\right)^2\times R$$

则

$$I_r=\frac{U_1'}{r+Z_R}=\frac{U_1'}{r+\left(\frac{U_2}{U_2'}\right)^2\times R}$$

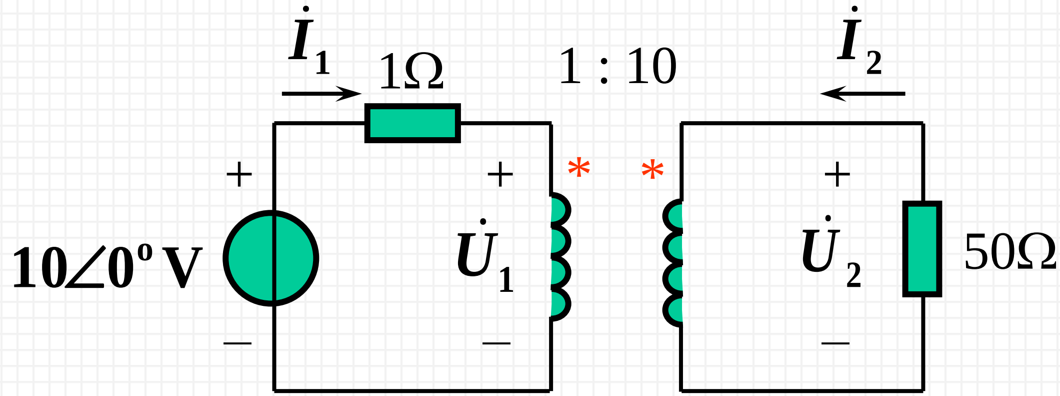
这里，R是定值，U_2'是定值，比如220V，U_1'约等于U_2，由于 r 跟后一项比很小，则：

$$I_r=\frac{U_2'^2}{U_2\times R}$$

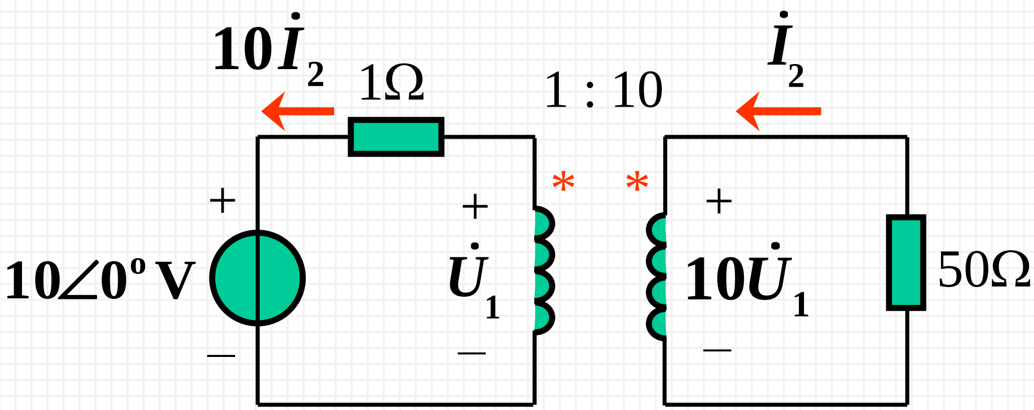
这样我们可以看到，线路中的电流主要受U_2影响，而U_2就是升压变压器副边出来的电压。

所以电压提高了，线路电流减小，线损减小。

例 求图中电压 $\dot{U}_2$



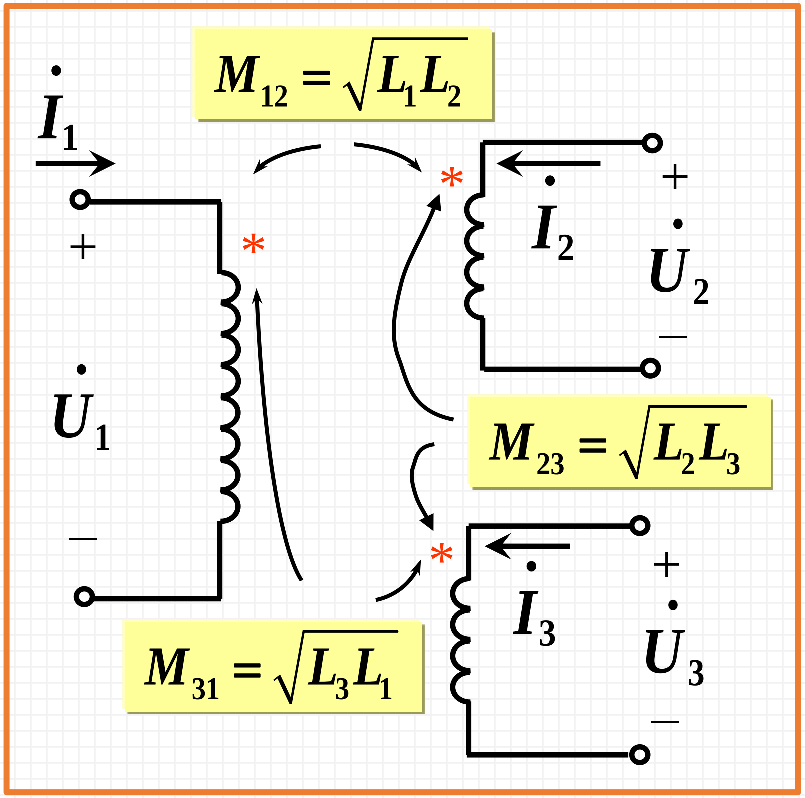
解:



$$\begin{cases} 10\dot{U}_1 = -50\dot{I}_2 \\ 10\dot{I}_2 + 10 = \dot{U}_1 \end{cases}$$

$$\boxed{\dot{U}_2 = 33.3\angle 0^{\circ}\ \text{V}}$$

拓展：3绕组全耦合变压器的性质



$$\begin{cases}\dot{U}_1=\mathrm{j}\omega L_1\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega\sqrt{L_1L_2}\,\dot{I}_2+\mathrm{j}\omega\sqrt{L_1L_3}\,\dot{I}_3\\ \dot{U}_2=\mathrm{j}\omega\sqrt{L_1L_2}\,\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega L_2\dot{I}_2+\mathrm{j}\omega\sqrt{L_2L_3}\,\dot{I}_3\\ \dot{U}_3=\mathrm{j}\omega\sqrt{L_1L_3}\,\dot{I}_1+\mathrm{j}\omega\sqrt{L_2L_3}\,\dot{I}_2+\mathrm{j}\omega L_3\dot{I}_3\end{cases}$$

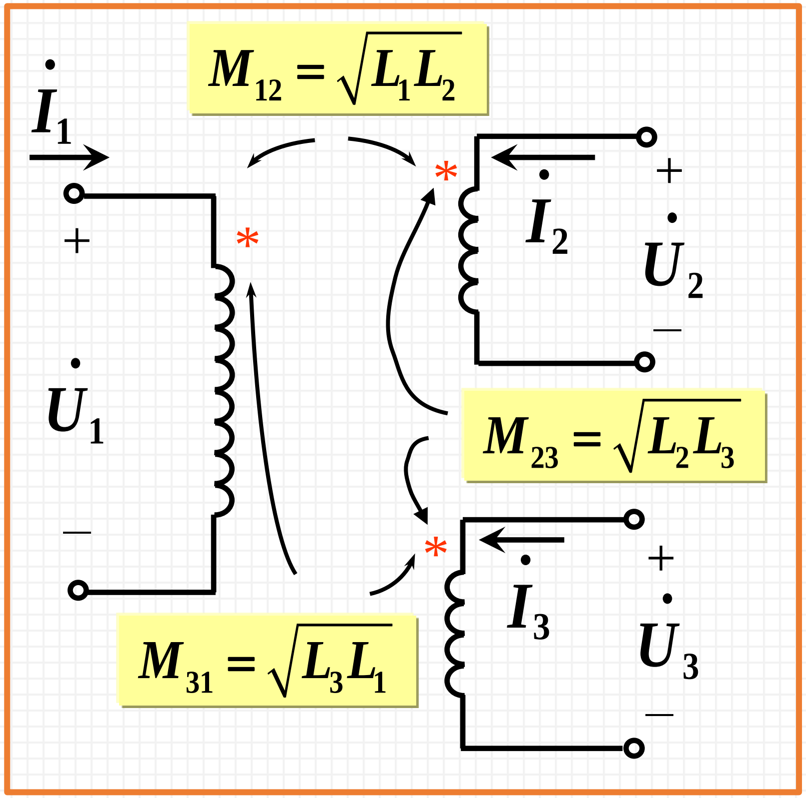
$$\begin{cases}\dot{U}_2=\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}\dot{U}_1=\dfrac{N_2}{N_1}\dot{U}_1\\ \dot{U}_3=\sqrt{\dfrac{L_3}{L_1}}\dot{U}_1=\dfrac{N_3}{N_1}\dot{U}_1\\ \dot{I}_1=\dfrac{\dot{U}_1}{\mathrm{j}\omega L_1}-\sqrt{\dfrac{L_2}{L_1}}\dot{I}_2-\sqrt{\dfrac{L_3}{L_1}}\dot{I}_3\end{cases}$$

$$n_1=\frac{N_1}{N_2}$$

$$n_2=\frac{N_1}{N_3}$$

$$\begin{cases}\dot{U}_1=n_1\dot{U}_2\\ \dot{U}_1=n_2\dot{U}_3\\ \dot{I}_1=\dfrac{\dot{U}_1}{j\omega L_1}-\dfrac{1}{n_1}\dot{I}_2-\dfrac{1}{n_2}\dot{I}_3\end{cases}$$

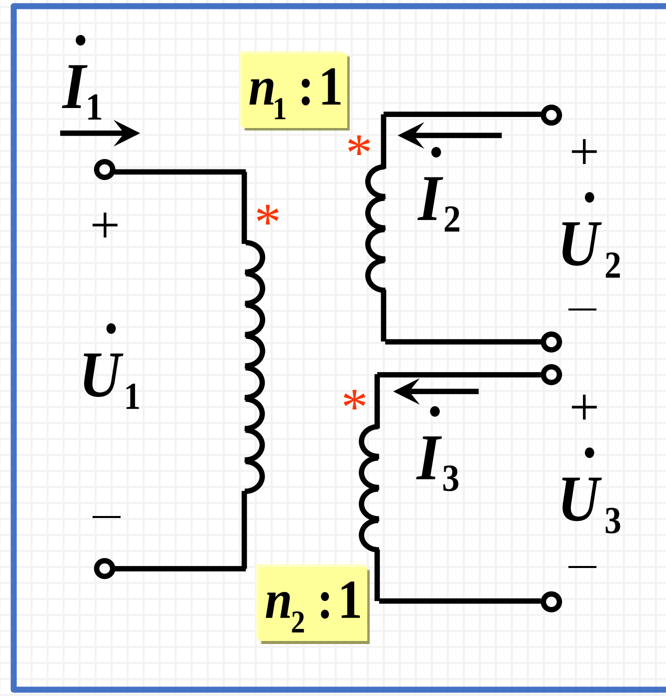
3绕组全耦合变压器的性质



$$n_1=\frac{N_1}{N_2}$$

$$n_2=\frac{N_1}{N_3}$$

3绕组理想变压器的性质

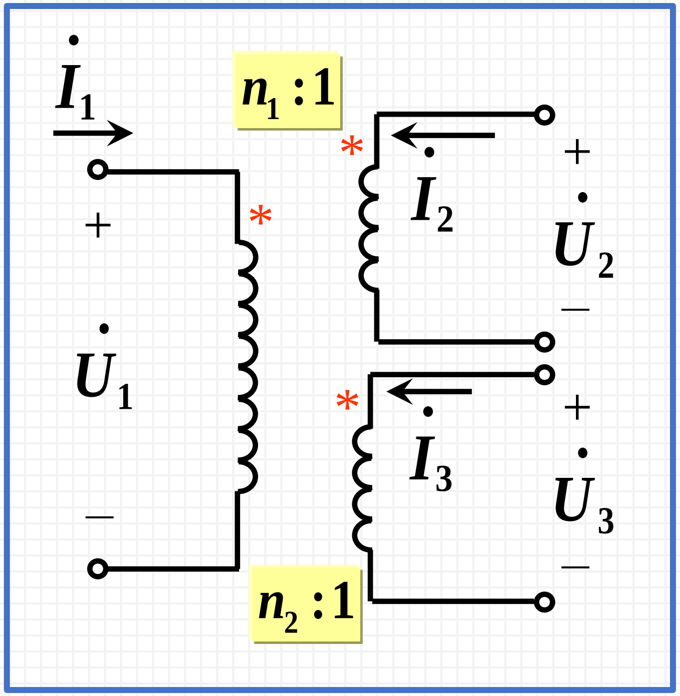


$$\begin{cases}\dot{U}_1=n_1\dot{U}_2\\ \dot{U}_1=n_2\dot{U}_3\\ \dot{I}_1=\dfrac{\dot{U}_1}{j\omega L_1}-\dfrac{1}{n_1}\dot{I}_2-\dfrac{1}{n_2}\dot{I}_3\end{cases}$$

$L_1\to\infty$，同时确保L_1/L_2和L_1/L_3比值不变，且全耦合

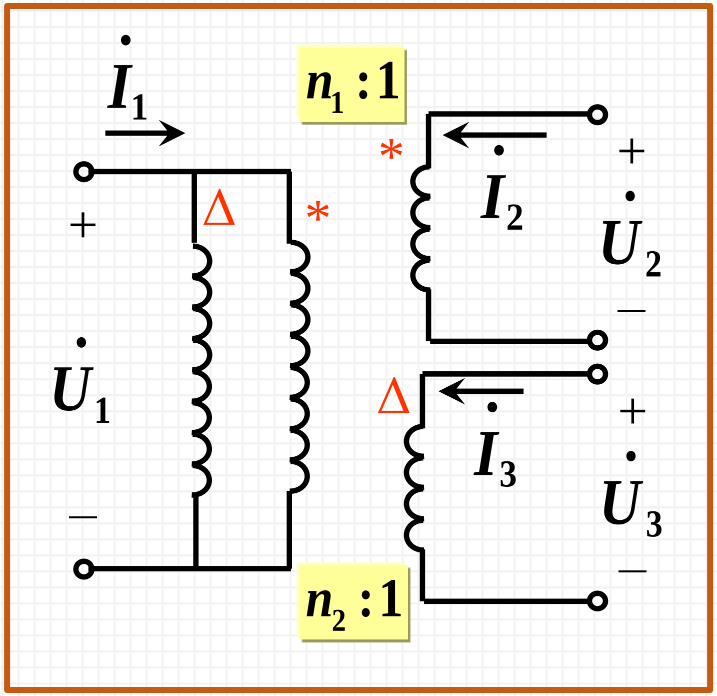
$$\begin{cases}\dot{U}_1=n_1\dot{U}_2\\ \dot{U}_1=n_2\dot{U}_3\\ \dot{I}_1=-\dfrac{1}{n_1}\dot{I}_2-\dfrac{1}{n_2}\dot{I}_3\end{cases}$$

三绕组理想变压器的另一种观点



$$n_1 = \frac{N_1}{N_2}$$

$$n_2 = \frac{N_1}{N_3}$$



$$\begin{cases} \dot{U}_1 = n_1 \dot{U}_2 \\ \dot{U}_1 = n_2 \dot{U}_3 \\ \dot{I}_1 = -\dfrac{1}{n_1}\dot{I}_2 - \dfrac{1}{n_2}\dot{I}_3 \end{cases}$$