习题讨论课5题目：含参积分与含参广义积分

一．含参积分

例 1. 设 $f(x)=\int_0^x\left[\int_t^x \mathrm{e}^{-s^2}\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$, 求 $f'(x)$ 与 $f(x)$。

例 2. 设 $f(x)=\int_{\sin x}^{\cos x}\mathrm{e}^{x\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$。对 $x\approx\frac{\pi}{4}$，估算 $f(x)$。

例 3. 求 $\lim\limits_{a\to 0}\int_a^{1+a}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+a^2}$。

例 4. 设 $f\in\mathscr{C}[0,1]$，考察函数 $F(t)=\int_0^1\frac{tf(x)}{x^2+t^2}\mathrm{d}x$ 的连续性。

例 5. 计算积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\ln\frac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\mathrm{d}x,\quad(-1<a<1)$。

例 6. 设 $f(t)=\int_0^1\ln\sqrt{x^2+t^2}\mathrm{d}x$，$0\le t\le 1$，求 $f'_+(0)$。

例 7. 求 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$。

例 8. $\lim\limits_{y\to 0}\int_0^1\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\mathrm{d}x=\int_0^1\lim\limits_{y\to 0}\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\mathrm{d}x$ 是否成立?

例 9. 设 $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\quad 0\le x\le 1,0<y\le 1$。

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

是否成立?

二、含参广义积分

两个公式：

1. Poission积分：$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，
2. Dirichlet积分：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$。

例 10. 证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$。

例 11. 求两个 Laplace 积分：

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x,\quad J(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\beta x}{x^2+\alpha^2}\mathrm{d}x,\quad \alpha>0.$$

例 12. 求 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2\beta x)\mathrm{d}x$。

例 13. 证明积分 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(tx)}{x}\mathrm{d}x$ 在区间 $[-a,a]$ 上非一致收敛，其中 $a>0$。(注：这是教材第104页习题2.1第8题)（提示：利用 Dirichlet 积分公式 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$）。

例 14. 利用积分号下求导方法，计算积分 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x$。（课本第115页第二章总复习题第4题（2））

例 15. 设 $f(x,t)$ 在区域 $[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续。假设积分 $I(t)=\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 对任意 $t\in[\alpha,\beta)$ 都收敛，但积分 $\int_a^{+\infty}f(x,\beta)\mathrm{d}x$ 发散。证明积分 $I(t)$ 关于 $t\in[\alpha,\beta)$ 非一致收敛。（课本第103-104页习题2.1第6题）.