第四周习题课（多元函数极限、连续、可微及偏导）

一. 多元函数极限的多种形式

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$：

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f(x,y)=A$：

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,+\infty)} f(x,y)=A$：

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(-\infty,y_0)} f(x,y)=A$：

例.1 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$ 。

例.2 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{x}, & x\neq 0;\\ y, & x=0\end{cases}$，求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$。

讨论在其他点 (x_0,y_0) 的极限：$(x_0,y_0)\neq(0,0)$？

例.3 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$

二. 累次极限与重极限

例.4 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\cdot y\neq 0\\ 0, & x\cdot y=0\end{cases}$

例. 5 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$

例.6 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$，证明：$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$，而二重极限

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在。

例.7 记 $D=\{(x,y)\,|\,x+y\neq 0\}$， $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y},(x,y)\in D$ 。证明：

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1,\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$，但是 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in D}} f(x,y)$ 不存在。

一般结论：

（1）重极限与累次极限没有关系。

（2）若重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y),\quad \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 均存在，

则有 $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y),\quad \lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 均存在但不等，$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 不存在。

（3）函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的去心邻域有定义，若

（i）存在 x_0 的去心邻域 $\{x \mid 0<|x-x_0|<r\}$，使得 $\forall x\in\{x \mid 0<|x-x_0|<r\}$，$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=g(x)$ 存在；

（ii）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=h(y)$ 关于 y_0 的某个去心邻域 $\{y \mid 0<|y-y_0|<\eta\}$ 上**一致**，则

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=\lim_{y\to y_0} h(y)$$

即 $$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)\text{。}$$

证明：因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=h(y)$ 关于 y_0 的某个去心邻域 $\{y \mid 0<|y-y_0|<\eta\}$ 上**一致**，所以

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta(\varepsilon)>0,\quad \forall x',x'':0<|x'-x_0|<\delta, 0<|x''-x_0|<\delta,\quad 0<|y-y_0|<\eta,$$

都有 $|f(x',y)-f(x'',y)|<\varepsilon$。

令 $y\to y_0$，则 $|g(x')-g(x'')|\le\varepsilon$，故由 Cauchy 准则，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，记 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$。

因此 $\forall\varepsilon>0,\quad \exists\delta_1>0,\quad \forall x:0<|x-x_0|<\delta_1, |g(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{3}$。

又由条件（ii），当 $0<|y-y_0|<\mu,\quad |h(y)-f(x,y)|<\dfrac{\varepsilon}{3}$。

取定 $\bar{x}\in\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta_1\}$。由（i），$\exists\delta_2\in(0,\eta),\ \forall y: 0<|y-y_0|<\delta_2$，

$|f(\bar{x},y)-g(\bar{x})|<\dfrac{\varepsilon}{3}$。

从而 $\forall y:0<|y-y_0|<\delta_2$，

$$|h(y)-A|\le|h(y)-f(\bar{x},y)|+|f(\bar{x},y)-g(\bar{x})|+|g(\bar{x})-A|<\varepsilon,$$

于是 $\lim\limits_{y\to y_0} h(y)=A$。

例.8 求下列极限：

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}$；　　（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\ln(x^2+y^2)$；

（3）$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；　　（4）$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$；

（5）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$

例. 9　记 $D=\{(x,y)\mid x+y\neq 0\}$，讨论 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$。

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^3-y^3}$，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^6}{x^3+y^3}$ 是否存在？

例. 10　设一元函数 $f(t)$ 在 R 上连续可微，定义 $g(x,y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$　$(x\neq y)$，求

$\lim\limits_{(x,y)\to(t,t)}g(x,y)$。

三．极限与连续的性质

例. 11　若 $z=f(x,y)$ 在 R^2 上连续，且 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$，证明 函数 f 在 R^2 上一定有最小值点。

例. 12　$f(\mathbf{x})$ 在 R^n 上连续, 且

(1)　$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ 时，　$f(\mathbf{x})>0$

(2)　$\forall c>0,\quad f(c\mathbf{x})=cf(\mathbf{x})$

例. 13　设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0;\\ y, & x=0\end{cases}$，讨论其在定义域的连续性。