习题讨论课4解答：曲线，Taylor公式，极值

一．空间曲线的表达形式，切线和法平面

1. 空间曲线的参数形式

   曲线方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta), \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} (\alpha \le t \le \beta)$$

   $x(t), y(t), z(t)$ 可微，且 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 不全为零。

   切线：

$$\begin{cases} x = x_0 + x'(t_0)(t - t_0) \\ y = y_0 + y'(t_0)(t - t_0) \\ z = z_0 + z'(t_0)(t - t_0) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

   或（消去参数 t）

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

   法平面：曲线切向量是法平面的法向量

$$x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + x'(t_0)(z - z(t_0)) = 0.$$

2. 空间曲线的方程组形式

   曲线方程

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \quad (S_1) \\ G(x, y, z) = 0 \quad (S_2) \end{cases}$$

   几何解释：两个曲面 S_1 与 S_2 的交线，其中 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y,z)}$ 满行秩（或者等价地，∇F 和 ∇G 线性无关）。隐函数定理保证在任何点的局部 x, y, z 中总有两个变量可以写成第三个变量的可微函数。

   切线

$$\begin{cases} F_1(P_0)(x - x_0) + F_2(P_0)(y - y_0) + F_3(P_0)(z - z_0) = 0 \quad (S_1\text{的切平面}) \\ G_1(P_0)(x - x_0) + G_2(P_0)(y - y_0) + G_3(P_0)(z - z_0) = 0 \quad (S_2\text{的切平面}) \end{cases}$$

   其中 $P_0(x_0, y_0, z_0)$。几何解释：曲面交线的切线是切平面的交线，切线上的向量 $P - P_0$ 与 $\nabla F(P_0)$ 和 $\nabla G(P_0)$ 都垂直。

切向量

$$\nabla F(P_0)\times\nabla G(P_0)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ F_1(P_0) & F_2(P_0) & F_3(P_0)\\ G_1(P_0) & G_2(P_0) & G_3(P_0)\end{vmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\det\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\\ \det\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\\ \det\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\end{pmatrix}_{P_0}$$

（形式上，分母中 x,y,z 轮转；向量的第几个分量，其分母就缺第几个自变量。分子中函数的顺序是按叉乘中向量的顺序）

法平面

法平面上的向量 $P-P_0$ 是 $\nabla F(P_0)$ 和 $\nabla G(P_0)$ 的线性组合

$$\begin{vmatrix}x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ F_1(P_0) & F_2(P_0) & F_3(P_0)\\ G_1(P_0) & G_2(P_0) & G_3(P_0)\end{vmatrix}=0$$

或（切向量是法平面的法向量）

$$\det\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}(x-x_0)+\det\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}(y-y_0)+\det\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}(z-z_0)=0$$

例 1. 求螺线 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=ct\end{cases}$ $(a>0,c>0)$ 在点 $M(\frac{a}{\sqrt2},\frac{a}{\sqrt2},\frac{\pi c}{4})$ 处的切线与法平面。

解. 由于点 M 对应的参数为 $t_0=\frac{\pi}{4}$，所以螺线在 M 处的切向量是

$$\mathbf{v}=\left(x'\left(\frac{\pi}{4}\right),y'\left(\frac{\pi}{4}\right),z'\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^T=\left(\frac{-a}{\sqrt2},\frac{a}{\sqrt2},c\right)^T$$

因而所求切线的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{a}{\sqrt2}-\frac{a}{\sqrt2}t,\\ y=\frac{a}{\sqrt2}+\frac{a}{\sqrt2}t,\\ z=\frac{\pi}{4}c+ct,\end{cases}$

法平面方程为 $-\frac{a}{\sqrt2}(x-\frac{a}{\sqrt2})+\frac{a}{\sqrt2}(y-\frac{a}{\sqrt2})+c(z-\frac{\pi}{4}c)=0.$ □

例 2. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2-6=0\\ z-x^2-y^2=0\end{cases}$ 在点 $M_0(1,1,2)$ 处的切线方程。

解法1. 把方程组线性化

$$\begin{cases}2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)-6=0,\\(z-z_0)-2x_0(x-x_0)-2y_0(y-y_0)=0\end{cases},$$

即

$$\begin{cases}2(x-1)+2(y-1)+4(z-2)-6=0,\\(z-2)-2(x-1)-2(y-1)=0\end{cases},\begin{cases}x+y+2z-6=0,\\-2x-2y+z+2=0.\end{cases}$$

□

解法2. 取 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6$，$G(x,y,z)=z-x^2-y^2$，则

$$\nabla F(M_0)=(2,2,4)^T,\quad \nabla G(M_0)=(-2,-2,1)^T.$$

所以曲线在 $M_0(1,1,2)$ 处的切向量为

$$\mathbf{v}=\nabla F(M_0)\times\nabla G(M_0)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&2&4\\-2&-2&1\end{vmatrix}=(10,-10,0)^T$$

于是所求的切线方程为 $\begin{cases}x=1+10t\\y=1-10t\\z=2.\end{cases}$ □

你更喜欢哪个解法？

例 3. 设曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$，求曲线上一点，使曲线在该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$。

解. 曲线切线平行于平面，即曲线切向量与平面法向量垂直。

曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 的切向量 $(1,2t,3t^2)^T$，平面 $x+2y+z=4$ 法向量 $(1,2,1)^T$，所以

$$1+2(2t)+3t^2=0$$

解得 $t=-1$ 或 $t=-\frac{1}{3}$。代入曲线求得相应的点。 □

二、Taylor 公式

例 4. 函数 x^y 在 $x=1,y=0$ 处的二阶 Taylor 多项式

解.

$$x^y=e^{y\ln(1+t)}=e^{y(t+o(t))}=1+y(t+o(t))=1+yt+o(yt)=1+y(x-1)+o(''2'')$$

其中 $o(''n'')$ 表示比2阶无穷小更高阶的无穷小量。于是二阶Taylor多项式为 $1+(x-1)y$。 □

注：间接展开比直接求导更方便

例 5. 函数 $f(x,y)=\frac{\cos x}{y+1}$ 在点 $(0,0)$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式。

解. 先求 Peano 余项 Taylor 展开，

$$f(x,y)=(1+o(x))(1-y+o(y))=1-y+o(\text{"}1\text{"}).$$

再计算二阶 Lagrange 余项

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}f(\theta x,\theta y)&=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{-x\sin\theta x}{1+\theta y}+\frac{y\cos\theta x}{(1+\theta y)^2}\right]\\&=\frac{-x^2\cos\theta x}{1+\theta y}+\frac{2xy\sin\theta x}{(1+\theta y)^2}-\frac{y^2\cos\theta x}{(1+ty)^3}.\end{aligned}$$

所以

$$f(x,y)=1-y+\frac{1}{2}(x,y)\begin{pmatrix}-\frac{\cos\theta x}{1+\theta y} & \frac{\sin\theta x}{(1+\theta y)^2}\\ \frac{\sin\theta x}{(1+\theta y)^2} & \frac{2\cos\theta x}{(1+\theta y)^3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad \theta\in(0,1)$$

□

例 6. 函数 $\sin(xy)$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶 Taylor 多项式

。

解.

$$\begin{aligned}\sin[(1+u)(1+v)]&=\sin(1+u+v+uv)\\&=\sin 1\cos(u+v+uv)+\cos 1\sin(u+v+uv)\\&=\sin 1\left(1-\frac{(u+v+uv)^2}{2}+o(\text{"}2\text{"})\right)\\&\quad+\cos 1\cdot(u+v+uv+o(\text{"}2\text{"}))\\&=\sin 1+(u+v)\cos+\cos 1\cdot uv-\frac{(u+v)^2}{2}\sin 1+o(\text{"}2\text{"})\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\sin(xy)&=\sin 1+\cos 1\cdot(x+y-2)\\&\quad+\cos 1\cdot(x-1)(y-1)-\sin 1\cdot\frac{(x+y-2)^2}{2}+o\left((x-1)^2+(y-1)^2\right).\end{aligned}$$

□

例 7. $x+y+z+xyz^3=0$ 在点 $(0,0,0)$ 邻域内确定隐函数 $z=z(x,y)$. 求 $z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor 公式。

解法1.

$$z=-x-y-xyz^3=-x-y+O(''5'')=-x-y+o(''4'').$$

事实上，可以很方便地求出更高阶的 Taylor 展开，

$$\begin{aligned}z&=-x-y-xy(-x-y-xyz^3)^3=-x-y-xy(-x-y+o(''4''))^3\\&=-x-y-xy(-x-y)^3+o(''8'').\end{aligned}$$

□

解法2. $z(0,0)=0$，$z_x(0,0)=z_y(0,0)=-1$，$z_{xx}(0,0)=z_{xy}(0,0)=z_{yy}(0,0)=0$，$z(x,y)$ 在原点的带 Peano 余项的二阶 Taylor公式为 $z=-x-y+o(\rho^3)$。 □

注：你觉得哪种方法更好？

问题：如何求可微映射的可微逆映射的 Taylor 展开？

三、无条件极值

例 8. 求函数 $f(x,y)=2x^4+y^4-2x^2-2y^2$ 的所有局部极值.

解法1. 由

$$\frac{\partial f}{\partial x}=8x^3-4x=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y^3-4y=0$$

解得驻点，并计算相应的

$$A=f_{xx}=24x^2-4,\quad B=f_{xy}=0,\quad C=f_{yy}=12y^2-4,$$

(x,y)	Hesse 矩阵	正定性	极值
$(0,0)$	$\begin{pmatrix}-4&0\\0&-4\end{pmatrix}$	负定	极大值
$(0,\pm1)$	$\begin{pmatrix}-4&0\\0&8\end{pmatrix}$	鞍形	非极值
$(\pm\frac{1}{\sqrt2},0)$	$\begin{pmatrix}8&0\\0&-4\end{pmatrix}$	鞍形	非极值
$(\pm\frac{1}{\sqrt2},\pm1)$	$\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}$	正定	极小值
$(\pm\frac{1}{\sqrt2},\mp1)$	$\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}$	正定	极小值

□

解法2.

$$f_x(x,y)=8x^3-4x=4x(2x^2-1),$$

所以对任何固定的 y，

- $f(x,y)$ 关于 x 在区间 $(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}})$ 上严格减，
- 在区间 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ 上严格增，
- 在区间 $(0,\frac{1}{\sqrt{2}})$ 上严格减，
- 在区间 $(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty)$ 上严格增。

$$f_y(x,y)=4y(y^2-1),$$

所以对任何固定的 x，

- $f(x,y)$ 关于 y 在区间 $(-\infty,-1)$ 上严格减，
- 在区间 $(-1,0)$ 上严格增，
- 在区间 $(0,1)$ 上严格减，
- 在区间 $(1,+\infty)$ 上严格增。

综合以上信息知，对 $x<-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 以及 $y<0$，

$$f(x,y)\geq f(-\frac{1}{\sqrt{2}},y)\geq f(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1),$$

所以 $(-\frac{1}{\sqrt{2}},-1)$ 是极小值点。

类似讨论讨论可得其他临界点的极值性质。

由 $f(x,y)=(2x^4+y^4)(1+o(1))\to+\infty$（$x^2+y^2\to+\infty$），所以 f 无上界，因此没有最大值，但 f 有最小值。 □

解法3.

$$f(x,y)=2\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+(y^2-1)^2-\frac{3}{2}$$

从而易得最小值点。

为什么会有极大值？为什么会有鞍点？ □

例 9. 求函数 $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 的极值.

解. 考虑一元函数 $f(t)=t\mathrm{e}^{-t}$（$t\geq 0$），

$$f'(t)=(1-t)\mathrm{e}^{-t},$$

所以 f 在 $t=1$ 取得最大值，$f(0)$ 是最小值。所以 $z=f(x^2+y^2)$ 在 $(0,0)$ 点取得最小值，在 $x^2+y^2=1$ 的每个点处取得最大值。 □

注：要善于观察函数的构造，并利用一元函数单调性的相关结论。

例 10. （隐函数的极值）设 $z=z(x,y)$ 由 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 确定，求该函数的极值。

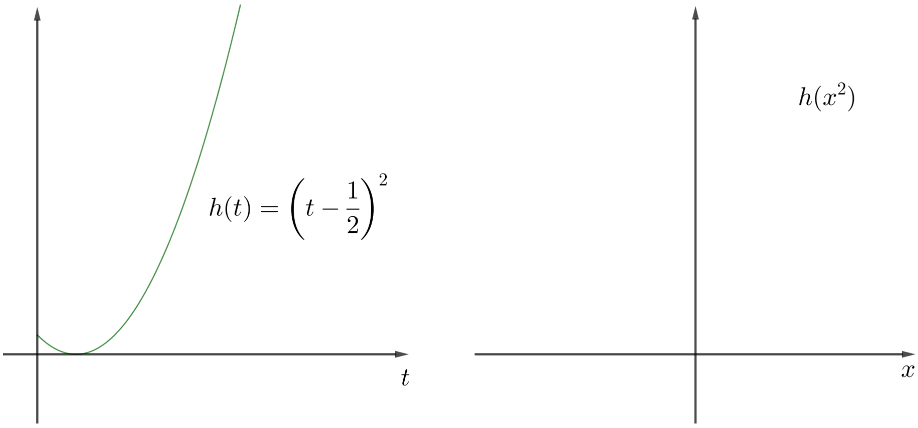

图 1: 请依据左图中 h 的图像，在右图中画出 $h(x^2)$ 的图像

解法1. 虽然由原方程可解得

$$z = \frac{-8x + 1 \pm \sqrt{(8x-1)^2 - 64(x^2+y^2)}}{2} = \frac{-8x + 1 \pm \sqrt{1 - 16x - 64y^2}}{2},$$

这是两个函数，但它们的导数计算较繁琐，因此我们选择用隐函数的办法。

方程求微分

$$4x\mathrm{d}x + 4y\mathrm{d}y + 2z\mathrm{d}z + 8x\mathrm{d}z + 8z\mathrm{d}x - \mathrm{d}z = 0,$$

将 $\mathrm{d}z = 0$ 代入得到 $4x\mathrm{d}x + 4y\mathrm{d}y + 8z\mathrm{d}x = 0$，解得 $4x + 8z = 0, 4y = 0$，在联立原方程，得到

$$\begin{cases} 4x + 8z = 0, \\ 4y = 0, \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0 \end{cases}$$

解得 $y = 0$，$\begin{cases} x = \frac{16}{7}, \\ z = -\frac{8}{7} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -2, \\ z = 1. \end{cases}$

当 $\begin{cases} x = -2, \\ y = 0, \\ z = 1 \end{cases}$ 时，用 $x = -2 + u, z = 1 + v$ 代入方程，得到

$$\begin{aligned} 0 &= 2(-2+u)^2 + 2y^2 + (1+v)^2 + 8(-2+u)(1+v) - (1+v) + 8 \\ &= 2u^2 + 2y^2 - 15v + o(v) \end{aligned}$$

所以 $v = \frac{2}{15}(u^2 + y^2) + o(u^2 + y^2)$。所以

$$z = 1 + \frac{2}{15}((x+2)^2 + y^2) + o((x+2)^2 + y^2),$$

因此 $z=1$ 是极小值。

对一阶微分

$$4x\mathrm{d}x+4y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z+8x\mathrm{d}z+8z\mathrm{d}x-\mathrm{d}z=0$$

再求一阶微分，（对自变量 x,y，$\mathrm{d}^2x=\mathrm{d}^2y=0$）得到

$$4(\mathrm{d}x)^2+4(\mathrm{d}y)^2+2(\mathrm{d}z)^2+2z\mathrm{d}^2z+8\mathrm{d}x\mathrm{d}z+8x\mathrm{d}^2z+8\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{d}^2z=0$$

代入 $x=\frac{16}{7},y=0,z=\frac{-8}{7}$ 以及 $\mathrm{d}z=0$，上式化简为

$$4(\mathrm{d}x)^2+4(\mathrm{d}y)^2-\frac{16}{7}\mathrm{d}^2z+\frac{128}{7}\mathrm{d}^2z-\mathrm{d}^2z=0,$$

即

$$\mathrm{d}^2z=-\frac{4}{15}\left[(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2\right],$$

所以 $z=-\frac{8}{7}$ 是极大值。 □

解法2. 记原方程为 $F(x,y,z)=0$。它定义隐函数 $z=z(x,y)$ 的充分条件是

$$F_z(x,y,z)=2z+2x-1\neq 0.$$

解法1中得到的驻点都满足这个条件。

于是

$$\begin{cases}
2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0, & F=0,\\
4x+2zz_x+8z+8xz_x-z_x=0, & \frac{\partial}{\partial x}(x,y,z(x,y))=0\\
4y+2zz_y+8xz_y-z_y=0, & \frac{\partial}{\partial y}(x,y,z(x,y))=0\\
z_x=0 & \text{临界点}\\
z_y=0 & \text{临界点}\\
4+2(z_x)^2+2zz_{xx}+16z_x+8xz_{xx}-z_{xx}=0, & \frac{\partial^2}{\partial x^2}(x,y,z(x,y))=0\\
2z_yz_x+2zz_{xy}+8z_y+8xz_{xy}-z_{xy}=0, & \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(x,y,z(x,y))=0\\
4+2(z_y)^2+2zz_{yy}+8xz_{yy}-z_{yy}=0, & \frac{\partial^2}{\partial y\partial y}(x,y,z(x,y))=0
\end{cases}$$

由第1-5个方程解得解法1中 x,y,z 的结果。代入第6-8个方程解得二阶导数，判断 Hesse 矩阵的类型，进而得到极值结论。 □

解法3. 方程配方得到

$$2(x+2z)^2+2y^2-7(z+\frac{1}{14})^2+\frac{225}{28}=0$$

所以

$$\left|z+\frac{1}{14}\right|=\sqrt{\frac{2(x+2z)^2+2y^2}{7}+\frac{225}{196}}\geq\frac{15}{14},$$

所以 $z\geq 1$ 或 $z\leq-\frac{8}{7}$。易见等号可以成立。

实际上，上述方程定义的曲面为双叶双曲面。 □

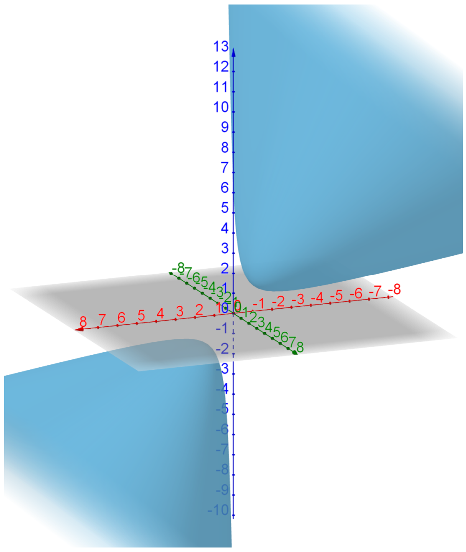

图 2: 双叶双曲面

解法4.

$$-(8+7z)(z-1) = -7z^2 - z + 8 = -2y^2 - 2(x+2z)^2 \le 0,$$

所以 $z \ge 1$ 或 $z \le -\frac{8}{7}$。

$z=1$ 时，$x=-2, y=0$；$z=-\frac{8}{7}$ 时，$x=\frac{16}{7}, y=0$。上述不等式说明了 $z=1$ 和 $z=-\frac{8}{7}$ 分别是极小值和极大值。 □

四、条件极值

例 11. 例10 可以该写为条件极值问题

$$\begin{cases} f(x,y,z) = z, \\ \text{s.t.} \quad 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0. \end{cases}$$

解.

$$L(x,y,z,\lambda) = z - \lambda(2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8).$$

求导

$$\begin{cases} L_x = -\lambda(4x+8z) = 0 \\ L_y = -\lambda \cdot 4y = 0 \\ L_z = 1 - \lambda(2z + 8x - 1) = 0 \\ L_\lambda = -(2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8) = 0 \end{cases}$$

由方程 3 知 $\lambda \ne 0$，所以由方程 2 知 $y=0$，再由方程 1 解得 $x=-2z$ 代入方程 4 解得

$$x=-2, y=0, z=1, \lambda=-\frac{1}{15}; \quad \text{或 } x=\frac{16}{7}, y=0, z=-\frac{8}{7}, \lambda=\frac{1}{15}.$$

当 $x=-2,y=0,z=1,\lambda=-\frac{1}{15}$ 时，约束条件的切向量 (ξ,η,ζ) 满足

$$-8\xi+2\zeta+8\xi-16\zeta-\zeta=0$$

即 $\zeta=0$，

$$\mathrm{d}^2_{x,y,z}L=-\lambda(4\xi^2+4\eta^2+\zeta^2+8\xi\zeta)=\frac{1}{15}(4\xi^2+4\eta^2)>0$$

所以 $z=1$ 是极小值。

类似讨论 $z=-\frac{8}{7}$。 □

例 12. 求原点到曲面 $z^2=xy+x-y+4$ 的最短距离.

解法1.

$$\begin{cases}\min \quad x^2+y^2+z^2\\ \text{s.t. } z^2=xy+x-y+4.\end{cases}$$

令

$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(z^2-xy-x+y-4).$$

则

$$\begin{cases}L_x=2x-\lambda(y+1)=0\\ L_y=2y+\lambda(-x+1)=0\\ L_z=2z+2\lambda z=0 \qquad \Rightarrow z=0 \text{ 或 } \lambda=-1\\ L_\lambda=z^2-xy-x+y-4=0\end{cases}$$

前两个方程有解当且仅当 $\lambda=2$ 或 $\begin{cases}x=\frac{\lambda}{\lambda+2},\\ y=\frac{-\lambda}{\lambda+2},\\ \lambda\neq\pm2.\end{cases}$

当 $\lambda=-1$ 时，解得 $x=-1,y=1,z=\pm1$。此时 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{3}$。

当 $\lambda=2$ 时，解得 $z=0$，$\begin{cases}x=y+1\\ xy+x-y+4=0\end{cases}$ 无实数解。

当 $\lambda=-2$ 时，方程组无界。

当 $\lambda\notin\{-1,2,-2\}$ 时，$z=0$，$\begin{cases}x=\frac{\lambda}{\lambda+2},\\ y=\frac{-\lambda}{\lambda+2},\\ xy+x-y+4=0\end{cases}$，此时 $\begin{cases}x=1\pm\sqrt{5}\\ y=-1\mp\sqrt{t}\\ \lambda=\frac{\mp2(1\pm\sqrt{5})}{\sqrt{t}}.\end{cases}$

此时 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=2\sqrt{3\pm\sqrt{5}}$。

原点到曲面的距离为 $\sqrt{3}$。 □

解法2. 当 $x=1$ 时，由约束条件得到 $z^2=5$，此时 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{6+y^2}\geq\sqrt{6}$。

当 $x\neq 1$ 时，从 $z^2=xy+x-y+4$ 解得 $y=\frac{z^2-4-x}{x-1}$，此时

$$d^2=f(x,z)=x^2+\left(\frac{z^2-4-x}{x-1}\right)^2+z^2,$$

由

$$f_x=\frac{2(x^2+z^2-2x-4)(x^2-z^2-x+5)}{(x-1)^3}=0,\quad f_z=\frac{2z(x^2+2z^2-4x-7)}{(x-1)^2}=0$$

解得 $x=z=-1$ 或 $x=-1,z=1$，或者 $x=1\pm\sqrt{5},z=0$。比较相应的 $d=\sqrt{f(x,z)}$ 的值以及 $\sqrt{6}$，得到其中的最小值。 □

解法3. 将 $z^2=xy+x-y+4$ 代入 $d^2=x^2+y^2+z^2$，得到

$$\begin{aligned}f(x,y)=d^2&=x^2+xy+y^2+x-y+4\\&=\left(x+\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-1)^2+3\geq 3,\end{aligned}$$

且当 $x=-1,y=1$ 时，$f(x,y)=3$，$d=\sqrt{3}$ 是最小距离。 □

解法4. 将 $z^2=xy+x-y+4$ 代入 $d^2=x^2+y^2+z^2$，得到

$$f(x,y)=d^2=x^2+xy+y^2+x-y+4.$$

求导

$$f_x=2x+y+1=0,\quad f_y=x+2y-1=0,$$

解得 $x=-y=-1$。

当 $x<-\frac{y+1}{2}$ 时，$f_x<0$；当 $x>-\frac{y+1}{2}$ 时，$f_x>0$；所以对任意 y，$f(x,y)$ 关于 x 在 $x=-\frac{y+1}{2}$ 时取最小值。

记 $g(y)=f(-\frac{y+1}{2},y)$。则

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}=f_y(-\frac{y+1}{2},y)=-\frac{y+1}{2}+2y-1=\frac{3(y-1)}{2},$$

所以当 $y<1$ 时，$g'(y)<0$；当 $y>1$ 时，$g'(y)>0$。所以 g 在 $y=1$ 处取得最小值。

所以 $f(x,y)$ 在 $(-1,1)$ 取得最小值 $f(-1,1)=3$。所求最小距离为 $\sqrt{3}$。 □

问题：上面四种解法哪个是错的？

解法1和解法2的补救：需要证明这个问题存在最小值。

目标函数在非空有界闭集 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq 4,z^2=xy+x-y+4\}$（它含有 $(-1,1,1)$）上有最小值，且最小值不大于 4。

在 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2>4, z^2=xy+x-y+4\}$ 中，任何函数值（如果存在）必然大于4。

所以此约束极值问题有最小值。

另外，这个目标函数在约束条件下没有最大值，因为对任意正整数 n，点 $(n,n,\sqrt{n^2+4})$ 满足约束条件，它到原点距离大于 n。

解法3和解法4的补救：事实上，约束条件 $z^2=xy+x-y+4$ 有个潜在的约束是 $xy+x-y+4\geq 0$。所以解法4需要说明 $(-1,1)$ 满足这个条件。有些学生可能以为把约束条件代入目标函数就万事大吉了，这里的讨论（即潜在约束的存在）说明情况并非想象的那样简单。

例 13. 当 $x,y,z>0$ 时，求函数 $u=\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值，这里 $r>0$. 由此进一步证明，对于任意正实数 a,b,c，下述不等式成立

$$ab^2c^3\leq 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

解. 令

$$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z-\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2).$$

由

$$L_x=\frac{1}{x}-2\lambda x=0,\quad L_y=\frac{2}{y}-2\lambda y=0,\quad L_z=\frac{3}{z}-2\lambda z=0,\quad L_\lambda=0$$

解得

$$x=\sqrt{\frac{1}{2\lambda}},\quad y=\sqrt{\frac{1}{\lambda}},\quad z=\sqrt{\frac{3}{2\lambda}},\quad \lambda=\frac{1}{2r^2}.$$

从而

$$x=r,\quad y=\sqrt{2}r,\quad z=\sqrt{3}r,\quad \lambda=\frac{1}{2r^2}.$$

$u(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)=6\ln r+\ln 6\sqrt{3}$。

当 $\min\{x,y,z\}\to 0$ 时，

$$u\leq \ln\min\{x,y,z\}+3\ln\max\{x,y,z\}\leq \ln\min\{x,y,z\}+3\ln(\sqrt{6}r)\to-\infty.$$

所以存在 $0<\delta<r$ 使得当 $\min\{x,y,z\}<\delta$ 时，$u(x,y,z)<u(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)$。

对包含 $(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)$ 的非空有界闭集

$$K=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=6r^2, x,y,z\geq\delta\}$$

$u(x,y,z)$ 在 K 上连续，所以有最大值。

因此 $u(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)=6\ln r+\ln 6\sqrt{3}$ 是 u 在 $\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=6r^2, x,y,z>0\}$ 中的最大值。

于是

$$xy^2z^3\leq\sqrt{108}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3.$$

余下的留给读者自己完成吧。 □

例 14. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y+z=1$ 的交线（椭圆）的长轴、短轴的长。

解法1. 设 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2) 为椭圆上的两点。它们是长轴两个端点，当且仅当它们是以下问题的解。（问题：短轴的两个端点是否为 min 的解？为什么？）

$$\begin{cases}\max\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2\right]\\ z_1=x_1^2+y_1^2\\ x_1+y_1+z_1=1\\ z_2=x_2^2+y_2^2\\ x_2+y_2+z_2=1\end{cases}$$

从约束条件中尽量解出一些变量，以减少变量个数。

$$\begin{cases}\max\left[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+((1-x_1-y_1)-(1-x_2-y_2))^2\right]\\ x_1^2+y_1^2=1-(x_1+y_1)\\ x_2^2+y_2^2=1-(x_2+y_2)\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\max\left[2(x_1-x_2)^2+2(x_1-x_2)(y_1-y_2)+2(y_1-y_2)^2\right]\\ x_1^2+x_1+y_1^2+y_1=1\\ x_2^2+x_2+y_2^2+y_2=1\end{cases}$$

这是条件极值问题, 接下来用Lagrange乘子法的过程留作练习。

另外，上述约束条件等价于

$$x_i+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta_i,\quad y_i+\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta_i,$$

此时目标函数为

$$3(\cos\theta_1-\cos\theta_2)^2+3(\cos\theta_1-\cos\theta_2)(\sin\theta_1-\sin\theta_2)+3(\sin\theta_1-\sin\theta_2)^2.$$

先用三角函数的性质化简这个表达式（降次），然后再研究它的极值和最值。

□

解法2. 曲面与平面的交线 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x+y+z=1\end{cases}$。消去 z 得到

$$\begin{cases}x^2+y^2+x+y-1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}=0,\\ x+y+z=1.\end{cases}$$

由第一个方程可设

$$x=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta,\quad y=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta.$$

代入第二个方程得到

$$z=1-x-y=2-\sqrt{\frac{3}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)=2-\sqrt{3}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right).$$

由此知椭圆中心（对称中心）为 $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2\right)$。

椭圆上的点到椭圆中心的距离

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+(z-2)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+3\cos^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$$

最大值为 $\frac{3}{\sqrt{2}}$，最小值为 $\sqrt{\frac{3}{2}}$。所以椭圆长轴长为 $3\sqrt{2}$，短轴长为 $\sqrt{6}$。 □

五、多元函数的最大值、最小值及其简单应用

例 15. 求 $z=xy(4-x-y)$ 在 $x=1,y=0,x+y=6$ 所围闭区域 $\bar{D}$ 上的最大值。

解法1. 连续函数 $z=xy(4-x-y)$ 在有界闭区域

$$\bar{D}=\{(x,y)|0\le y\le 6-x,1\le x\le 6\}$$

上取得最大值和最小值。

（1）先求开区域D^o内的最大值。

由 $\begin{cases}z_x=4y-2xy-y^2=0\\ z_y=4x-x^2-2xy=0\end{cases}$ 解得 $(0,0),\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right),(0,4),(4,0)$，只有 $\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$ 在 D^o 内，它为驻点。

（2）三条边界上的驻点

$\begin{cases}\max\ xy(4-x-y)\\ x=1\end{cases}$ 此时，$u=y(3-y)$（$0\le y\le 5$）

$\begin{cases}\max\ xy(4-x-y)\\ y=0\end{cases}$ 此时 $u=0$。

$\begin{cases}\max\ xy(4-x-y)\\ x+y=6\end{cases}$ 此时 $u=-2x(6-x)$，$1\le x\le 6$。

余下讨论留给读者完成。 □

解法2.

$$D=\{(x,y)|x\ge 1,y\ge 0,x+y\le 6\}.$$

由于 $(1,1,1)\in D$，此时 $z=2>0$。当 $x+y\geq 4$ 或 $y=0$ 时，$z\leq 0$。所以考虑求最大值只需考虑

$$D_1=\{(x,y)|x\geq 1, y>0, x+y<4\}.$$

此时

$$z\leq\left(\frac{x+y+(4-x-y)}{3}\right)^3=\frac{64}{27}.$$

$x=y=\frac{4}{3}$（它满足 D 的条件）时，z 最大值为 $\frac{64}{27}$。 □

例 16. 设 $u(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leq 1$ 上连续，在 $x^2+y^2<1$ 内有二阶连续偏导数，并且满足

$$\begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u, & x^2+y^2<1,\\ u(x,y)\geq 0 & x^2+y^2=1.\end{cases}$$

证明：当 $x^2+y^2\leq 1$ 时， $u(x,y)\geq 0$。（提示：可用反证法证明）

证明. 设 (a,b) 为 u 的最小值点。若$u(a,b)<0$，则 $a^2+b^2<1$。于是 (a,b) 为极小值点，Hesse 矩阵$H_f(a,b)$ 正定，从而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a,b)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a,b)=\mathrm{tr}H_f(a,b)\leq 0$，但这与 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a,b)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a,b)=u(a,b)<0$ 矛盾。所以 $u(a,b)\geq 0$。 □

例 17. 函数 $z(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的边界上 $z(x,y)=0$，在 D 内部偏导数存在，且满足 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=f(z)$，其中 f 是严格单调函数，且 $f(0)=0$，证明 $z(x,y)=0,\forall(x,y)\in D$。

证明1. $z(x,y)$ 在有界闭区域上连续，所以有最大值和最小值。

假设 $z(x,y)$ 不恒为 0。则 $z(x,y)$ 的最大值和最小值中必有一个非零。又因为在 D 的边界上$z(x,y)=$ D 0，所以 f 的非零最值必在 D 内某点 $P(x_0,y_0)$ 取得，从而 $f(z(P))=\frac{\partial z}{\partial x}(P)+\frac{\partial z}{\partial y}(P)=0=f(0)$。由于 f 是严格单调函数，所以 $z(P)=0$，矛盾。 □

证明2. 假设 $z(x_0,y_0)\neq 0$，则 $(x_0,y_0)\in D^o$。记

$$a=\inf\{t|\forall s\in[t,0], z(x_0+s,y_0+s)\neq 0\},\quad b=\{t|\forall s\in[0,t], z(x_0+s,y_0+s)\neq 0\}.$$

因为 z 连续，$(x_0,y_0)\in D^o$，D 连续是有界闭区域，$z|_{\partial D}=0$，所以 $-\infty<a<0<b<+\infty$。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(x_0+t,y_0+t)=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0+t,y_0+t)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0+t,y_0+t)=f(z(x_0+t,y_0+t)).$$

因为 $z(x_0+a,y_0+a)=0=z(x_0+b,y_0+b)$，所以根据 Rolle 定理，存在 $a<\xi<b$ 使得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}z(x_0+t,y_0+t)\big|_{t=\xi}=0$。于是 $f(z(x_0+\xi,y_0+\xi))=0$。由 f 的严格单调性，$z(x_0+\xi,y_0+\xi)=0$。这与 a,b 的定义矛盾。 □

例 18. 假设 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在全平面除原点之外处处满足等式

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}>0.$$

求证原点是 $f(x,y)$ 的唯一极小值点．并且满足

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

证明. 对任何 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x_0\mathrm{e}^t,y_0\mathrm{e}^t)=x_0\mathrm{e}^tf_1(x_0\mathrm{e}^t,y_0\mathrm{e}^t)+y_0\mathrm{e}^tf_2(x_0\mathrm{e}^t,y_0\mathrm{e}^t)>0,\quad \forall t.$$

所以 $f(x_0\mathrm{e}^t,y_0\mathrm{e}^t)$ 严格增。所以 (x_0,y_0) 都不是极值点。

由连续性，

$$\lim_{t\to-\infty}f(x_0\mathrm{e}^t,y_0\mathrm{e}^t)=f(0,0).$$

所以 $f(0,0)$ 是唯一最小值点。因此 $f_1(0,0)=f_2(0,0)=0$，所以 $\mathrm{d}f(0,0)=0$，因此

$$\lim_{x\to 0,y\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

□

例 19. 设 $p>0$, $q>0$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。求函数 $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ 在平面第一象限 $x>0$,$y>0$ 里满足约束条件 $xy=1$ 的最小值。由此进一步证明 Young 不等式

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geq xy,\quad \forall x,y>0.$$

（注：这是课本第一章总复习题第16题，page 97。在一元微分学里，我们已经学习过利用极值理论证明一些不等式。利用多元极值理论，我们同样可以得到一些的不等式。本题就是一个很好的例子。）

解法1. 作 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}-\lambda(xy-1).$$

解方程组 $\begin{cases}L_x=x^{p-1}-\lambda y=0\\ L_y=y^{q-1}-\lambda x=0\\ L_\lambda=-(xy-1)=0\end{cases}$ 由方程3知$x,y\neq 0$，从而 $\lambda\neq 0$，因此 $x^p=\lambda xy=y^q$，$1=xy=xx^{\frac{p}{q}}$，因此 $x=y=1$。$f(1,1)=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$。

当 $x>p$ 时，$f(x,y)>p^p/p>1=f(1,1)$；当 $y>q$ 时，$f(x,y)>1=f(1,1)$。

当 $0<x<\frac{1}{q}$ 时，$y=\frac{1}{x}>q$；当 $0<y<\frac{1}{p}$ 时，$x=\frac{1}{y}>p$。总有 $f(x,y)>f(1,1)$。

$K=\{(x,y)|xy=1,\frac{1}{q}\le x\le p,\frac{1}{p}\le y\le q\}$ 是含 $(1,1)$ 的有界闭集，f 在 K 上有最小值，此最小值必然是 $f(1,1)$。

所以 $f(1,1)=1$ 是 f 在约束条件 $xy=1$ 下的最小值。

对所有正数 x,y，令

$$X=\frac{x}{(xy)^{1/p}},\quad Y=\frac{y}{(xy)^{1/q}},$$

则 $X>0,Y>0$，$XY=1$，所以

$$\frac{X^p}{p}+\frac{Y^q}{q}\ge 1,$$

等号当且仅当 $X=Y=1$ 时成立。

因此

$$\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\ge xy,$$

等号当且仅当 $x^p=y^q$ 时成立。 □

解法2.

$$f(x)=\frac{x^p}{p}+\frac{1}{qx^q}.$$

则

$$f'(x)=x^{p-1}-x^{-q-1}=x^{-q-1}\left(x^{p+q}-1\right).$$

由此易知 $x=1$ 是 f 的最小值点，$f(1)=1$ 是最小值。 □

六、后续讨论

1. 为什么可以用代入法计算函数的 Taylor 展开？
2. 如何尽量避免求导数来计算隐函数/反函数的 Taylor 展开？
3. 如何只用一阶（偏）导数来研究多元函数的大小变化以及极值？
4. 约束条件的极值是否总要使用 Lagrange 乘子法？如何减少计算的复杂程度？
5. 如何研究函数的（无约束或有约束的）最值问题？
6. 什么是极值点、临界点？它们有什么联系和区别？
7. 如果 Hesse 矩阵退化（即有零特征值），是否极值问题就一定陷入死局了呢？
8. 如何定义函数的凹凸性，以及如何利用凹凸性来解决极值问题？
9. 对带约束条件的极值问题，什么是约束条件的相对内点和边界点？对一个半圆盘区域的边界 D，谁是它的相对内点和边界点？为什么在 D 的直径的两端无法使用 Lagrange 乘子法？