



# Review

- $f(x)$  以  $2l$  为周期, 在  $[-l, l]$  上可积或广义绝对可积, 则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right).$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$



• 定义内积  $(f, g) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ , 则

$$\{\varphi_n\} = \left\{ \sqrt{2}/2, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \right\}$$

为  $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$  中标准正交函数系.

$$\begin{aligned} & \bullet \left\| f(x) - \left( \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right) \right\| \\ &= \min_{\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{R}} \left\| f(x) - \left( \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^n (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx) \right) \right\| \end{aligned}$$



## • Bessel不等式

$$f(x) \sim \frac{a_0}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

$$\bullet f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi] \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0. \end{cases}$$



## § 2. Fourier级数的收敛性

### 1. Riemann-Lebesgue引理

设 $f$ 在 $[a, b]$ 上可积或广义绝对可积, 记为 $f \in \mathfrak{R}[a, b]$ .

上一节我们证明, 若 $f \in \mathfrak{R}[-\pi, \pi]$ , 则Fourier系数 $a_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

这一结论可以推广为更一般的情形.



**Lemma (Riemann-Lebesgue).**  $f \in \mathcal{R}[a, b]$ , 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

**Proof.** 只证第一式, 第二式同理.

**Case1.** 设  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $f$  在  $[a, b]$  上有界, 即

$$\exists M > 0, \text{ s.t. } |f(x)| \leq M, \forall x \in [a, b].$$

任意给定  $\lambda > 1$ , 令  $n = \lfloor \sqrt{\lambda} \rfloor$ .  $n$  等分  $[a, b]$ :

$$x_i = a + (b - a)i/n, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

$$\omega_i(f) = \sup \{ f(\xi) - f(\eta) : \xi, \eta \in [x_{i-1}, x_i] \}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$



$f$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i = 0$ . 于是

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos \lambda x \, dx \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - f(x_i)) \cos \lambda x \, dx \right| + \left| \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \lambda x \, dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i + \sum_{i=1}^n |f(x_i)| \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cos \lambda x \, dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i + \frac{2Mn}{\lambda} = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{\lambda} \rfloor} \omega_i(f) \Delta x_i + \frac{2M \lfloor \sqrt{\lambda} \rfloor}{\lambda} \\ &\rightarrow 0, \text{ 当 } \lambda \rightarrow +\infty \text{ 时.} \end{aligned}$$



Case2.  $f$  在  $[a, b]$  上广义绝对可积, 不妨设  $a$  为唯一的瑕点.

则  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{s.t.}, f$  在  $[a + \delta, b]$  上可积, 且

$$\int_a^{a+\delta} |f(x)| dx < \varepsilon/2.$$

从而  $\left| \int_a^{a+\delta} f(x) \cos \lambda x dx \right| \leq \int_a^{a+\delta} |f(x)| dx < \varepsilon/2,$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{a+\delta}^b f(x) \cos \lambda x dx = 0.$$

于是  $\exists \Lambda > 0$ , 当  $\lambda > \Lambda$  时,  $\left| \int_{a+\delta}^b f(x) \cos \lambda x dx \right| < \varepsilon/2$ , 进而有

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \right| &\leq \left| \int_a^{a+\delta} f(x) \cos \lambda x dx \right| + \left| \int_{a+\delta}^b f(x) \cos \lambda x dx \right| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \forall \lambda > \Lambda. \square \end{aligned}$$



例.  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$

解: 由广义积分的Dirichlet判别法,  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$  收敛. 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\lambda\pi} \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin \lambda t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{t} dt. \end{aligned}$$

恒等式  $\frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$  两边在  $[0, \pi]$  上积分, 得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt = \frac{\pi}{2}.$$





令  $g(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$ , 往证  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin(n + 1/2)t dt = 0$ .

$$\lim_{t \rightarrow 0} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{t}{2} - t}{2t \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t - t}{2t \sin t} = 0.$$

故  $t = 0$  是  $g(t)$  的可去间断点. 由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi g(t) \sin(n + 1/2)t dt = 0. \square$$



## 2. Fourier级数前n项和的积分表示

$f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ , 即  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上可积或广义绝对可积, 则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

**Question.** Fourier级数的逐点收敛性?

$$\text{着手点: } S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$



设 $f$ 以 $2\pi$ 为周期, 且 $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ .

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\tau \right] d\tau \quad (\text{令 } \tau = t-x) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k\tau \right] d\tau \quad (2\pi\text{周期性}) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \left( \int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} \right) f(x+\tau) \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau}{2\sin\frac{\tau}{2}} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+\tau) + f(x-\tau)}{2\sin\frac{\tau}{2}} \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau d\tau \end{aligned}$$



$$\forall \delta > 0, g(\tau) \triangleq \frac{f(x_0 + \tau) + f(x_0 - \tau)}{2 \sin \frac{\tau}{2}}, g(\tau) \in \mathcal{R}[\delta, \pi].$$

$$\begin{aligned} S_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g(\tau) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \tau \, d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\delta g(\tau) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \tau \, d\tau + \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi g(\tau) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \tau \, d\tau \\ &\triangleq A_n(x_0) + B_n(x_0). \end{aligned}$$

由Riemann-Lebesgue引理,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n(x_0) = 0$ . 因此,  $S_n(x_0)$  是否收敛仅仅取决于  $f$  在  $x_0$  附近的性质.



### 3. Fourier级数逐点收敛的判别法

**Thm (Dini判别法)**  $f$ 以 $2\pi$ 为周期, 且 $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ ,  
 $x_0 \in [-\pi, \pi]$ , 若 $\exists s \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, s.t.$

$$\frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s}{t} \in \mathcal{R}[0, \delta],$$

则 $f$ 的Fourier级数在 $x_0$ 点收敛于 $s$ .

**Proof.** 
$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t \, dt,$$

往证 $S_n(x_0) \rightarrow s$ .



为估计  $|S_n(x_0) - s|$ , 应将  $s$  表示成相应的积分形式. 恒等式

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin t/2}$$

两边在区间  $[0, \pi]$  上积分, 得

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+1/2)t}{2 \sin t/2} dt = \frac{\pi}{2},$$

$$s = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2s}{2 \sin t/2} \cdot \sin(n+1/2)t dt.$$



$$l(t) \triangleq \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s}{2 \sin t/2}, \text{ 则}$$

$$S_n(x_0) - s = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi l(t) \sin(n + 1/2)t \, dt \triangleq I_n(x_0).$$

$$\text{已知 } h(t) \triangleq \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s}{t} \in \mathfrak{R}[0, \delta], f \in \mathfrak{R}[0, \pi],$$

$$\text{则 } h(t) \in \mathfrak{R}[0, \pi], \quad J_n(x_0) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi h(t) \sin(n + 1/2)t \, dt,$$

由Riemann-Lebesgue引理,  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x_0) = 0$ .

欲证  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = s$ , 只要证  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n(x_0)$ .





$$\begin{aligned} I_n(x_0) - J_n(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (l(t) - h(t)) \sin(n + 1/2)t \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left( \frac{1}{2 \sin t/2} - \frac{1}{t} \right) (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \, dt \end{aligned}$$

$$w(t) \triangleq \frac{1}{2 \sin t/2} - \frac{1}{t} = \frac{t - 2 \sin t/2}{2t \sin t/2},$$

补充定义  $w(0) = 0$ , 则  $w \in C[0, \pi]$ . 从而

$$w(t) (f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s) \in \mathfrak{R}[0, \pi],$$

由Riemann-Lebesgue引理,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n(x_0) - J_n(x_0)) = 0. \square$



**Def.** 记 $f$ 在 $x_0$ 的左、右极限为 $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ , 若 $\exists \delta > 0, L > 0, \alpha > 0, s.t.$

$$\begin{aligned} |f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)| &\leq Lt^\alpha, \\ |f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)| &\leq Lt^\alpha, \end{aligned} \quad \forall t \in (0, \delta),$$

则称 $f$ 在 $x_0$ 附近满足广义 $\alpha$ 阶Lipschitz条件.

**Remark.** 令 $s = [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)] / 2$ ,

$$g(t) = \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2s}{t}, \quad \forall t \in (0, \delta).$$

$$\text{则 } |g(t)| \leq \frac{|f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)|}{t} + \frac{|f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)|}{t}.$$



$f$  在  $x_0$  附近满足广义  $\alpha$  阶 Lipschitz 条件, 则  $\exists \delta > 0, L > 0, s.t.$

$$|g(t)| \leq Lt^{\alpha-1}, \forall t \in (0, \delta).$$

从而 
$$\int_0^\delta |g(t)| dt \leq \int_0^\delta Lt^{\alpha-1} dt = \frac{L}{\alpha} t^\alpha \Big|_{t=0}^\delta < +\infty, \quad (\alpha > 0)$$

$g(t) \in \mathfrak{R}[0, \delta]$ . 由 Dini 判别法得以下定理:

**Thm (Lipschitz 判别法)**  $f$  以  $2\pi$  为周期, 且  $f \in \mathfrak{R}[-\pi, \pi]$ ,

$x_0 \in [-\pi, \pi]$ ,  $f$  在  $x_0$  附近满足广义  $\alpha$  阶 Lipschitz 条件, 则

$f$  的 Fourier 级数在  $x_0$  收敛于  $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$ .



**Corollary.**  $f$  以  $2\pi$  为周期, 且

- (1)  $f$  在  $[-\pi, \pi]$  上的不连续点和不可微点至多有限多个;
- (2) 在每一不连续点  $\xi$  处具有第一类间断, 即左、右极限  $f(\xi-0)$  与  $f(\xi+0)$  都存在;
- (3) 在每一不可微点(包括不连续点)  $\eta$ , 以下两极限存在

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(\eta+t) - f(\eta+0)}{t}, \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(\eta-t) - f(\eta-0)}{-t},$$

则  $f$  在每一点  $x_0$  的 Fourier 级数收敛于

$$\frac{1}{2} [f(x_0+0) + f(x_0-0)].$$



**Proof.** 在所给条件下,  $\forall x_0$ , 不论  $x_0$  是否为  $f$  的可微点, 以下两极限存在

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t},$$
$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t}.$$

因而  $f$  在  $x_0$  点满足  $\alpha = 1$  的 Lipschitz 条件

$$|f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)| \leq Lt, \forall t \in (0, \delta).$$

由 Lipschitz 判别法, 命题得证.  $\square$



Remark. 两极限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t},$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{-t}$$

也称为**广义单侧导数**. 若 $x_0$ 是 $f$ 的连续点, 则广义单侧导数就是单侧导数.



**Def.** 称 $f$ 在 $[a, b]$ 上分段可微, 若 $\exists [a, b]$ 的一个分割

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

使得 $\forall i = 1, 2, \cdots, n$ ,

- (1)  $f$ 在 $(x_{i-1}, x_i)$ 内可微;
- (2)  $f$ 在端点 $x_{i-1}, x_i$ 处右、左极限分别存在;
- (3)  $f$ 在端点 $x_{i-1}, x_i$ 处右、左广义导数分别存在.



前面的推论可以等价地描述为:

**Corollary.**  $f$  以  $2\pi$  为周期, 且在  $[-\pi, \pi]$  上分段可微, 则  $f$  在每一点  $x_0$  的 Fourier 级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)].$$

特别地, 若  $f$  在  $x_0$  连续, 则  $f$  在  $x_0$  的 Fourier 级数收敛于  $f(x_0)$ .

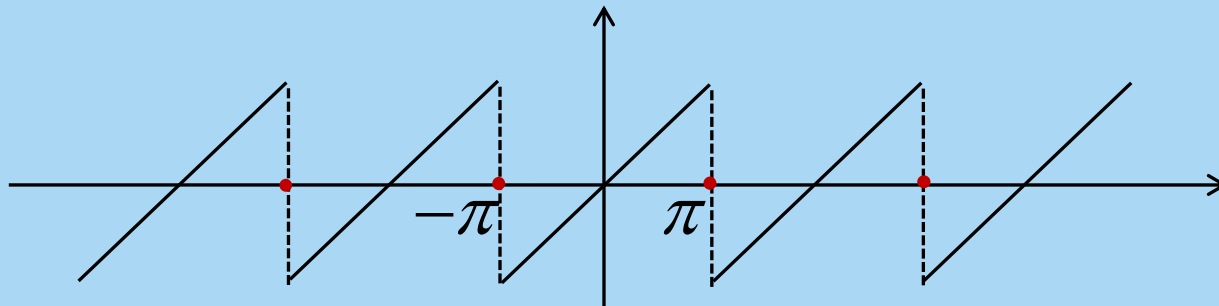
**例.** 将  $f(x) = \cos^2 x$  展开成  $2\pi$  周期的 Fourier 级数.

**解:**  $f(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x, \quad x \in \mathbb{R}.$





例.  $f(x) = x$  在  $(0, \pi)$  上的  $2\pi$ -周期的正弦Fourier级数为



$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx,$$

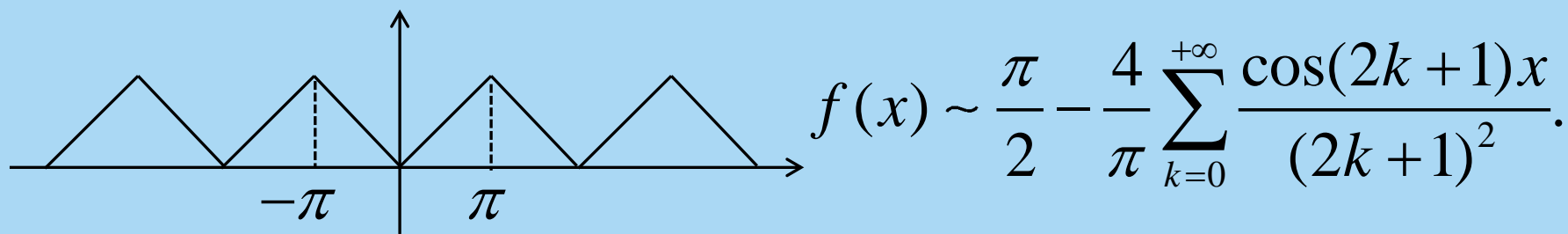
$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, \pi), \\ 0, & x = \pm\pi. \end{cases}$$

令  $x = \frac{\pi}{2}$ , 得

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} + \cdots = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$



例.  $f(x) = x$  在  $(0, \pi)$  上的  $2\pi$ -周期的余弦Fourier级数为



$$x = f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}, \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

令  $x = \pi/4$ , 得

$$\begin{aligned} 1 - \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \right) + \left( \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} \right) + \dots \\ + (-1)^n \left( \frac{1}{(4n-1)^2} + \frac{1}{(4n+1)^2} \right) + \dots = \frac{\sqrt{2}}{16} \pi^2. \quad \square \end{aligned}$$



例.  $f(x) = x^2, \forall x \in [-1, 1], f$  以  $T = 2$  为周期.

$$f(x) \sim \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x.$$

$$x^2 = f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

令  $x = 1$ , 得

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

令  $x = 0$ , 得

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}. \quad \square$$



**Thm (Dirichlet判别法)** 周期为 $2\pi$ 的函数 $f$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段单调且有界, 则 $f$ 的Fourier级数在任意一点 $x_0$ 收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)].$$

**Proof.** 
$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2 \sin t/2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \, dt,$$

只要证 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0 \pm t)}{2 \sin t/2} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \, dt = \frac{1}{2} f(x_0 \pm 0).$$

注意到 
$$\int_0^\pi \frac{\sin(n + 1/2)t}{2 \sin t/2} \, dt = \frac{\pi}{2},$$
 只要证



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)}{2 \sin t/2} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt = 0.$$

$$w(t) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{2 \sin t/2} - \frac{1}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}, \text{ 则 } w \in C[0, \pi]. \text{ 而 } f \text{ 以 } 2\pi \text{ 为}$$

周期, 在  $[-\pi, \pi]$  上分段单调且有界, 则  $f \in \mathfrak{R}[x_0 - \pi, x_0 + \pi]$ ,  
由 Riemann-Lebesgue 引理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi w(t) (f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)) \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt = 0.$$

$$\text{故往证: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)}{t} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) t dt = 0.$$



$\forall x_0, \exists \eta > 0, s.t. f(x_0 \pm t)$  在  $t \in (0, \eta)$  上单调.

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \, dt \\ &= \left( \int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t \, dt \\ &\triangleq A_{n,\delta}(x_0) + B_{n,\delta}(x_0) \end{aligned}$$

$\delta \in (0, \eta)$  时, 由积分第二中值定理,  $\exists \xi \in (0, \delta), s.t.$

$$A_{n,\delta}(x_0) = (f(x_0 \pm \delta) - f(x_0 \pm 0)) \int_\xi^\delta \frac{\sin(n + 1/2)t}{t} \, dt$$



$$\int_{\xi}^{\delta} \frac{\sin(n+1/2)t}{t} dt = \int_{(n+1/2)\xi}^{(n+1/2)\delta} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$$

因为  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau = \pi/2$ , 积分收敛, 因此  $\exists M > 0$ , s.t.

$$\left| \int_0^v \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right| < M, \forall v \in \mathbb{R}.$$

从而

$$\left| \int_{(n+1/2)\xi}^{(n+1/2)\delta} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau \right| < 2M, \forall \delta, \xi > 0.$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in (0, \eta), \text{ s.t. } |f(x_0 \pm \delta) - f(x_0 \pm 0)| < \varepsilon/4M,$$

此时,

$$|A_{n,\delta}(x_0)| < \varepsilon/2.$$



对此 $\varepsilon$ 及 $\delta$ ,由Riemann-Lebesgue引理,  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n,\delta}(x_0) = 0$ .

因此,  $\exists N \geq 1, s.t.$

$$|B_{n,\delta}(x_0)| < \varepsilon/2, \forall n > N.$$

因此 
$$\left| \int_0^\pi \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \right|$$

$$\leq |A_{n,\delta}(x_0)| + |B_{n,\delta}(x_0)|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \forall n > N$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0 \pm t) - f(x_0 \pm 0)}{t} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt = 0. \square$$





## 4. Fourier级数的均方收敛性, Parseval等式

$$(f, g) \triangleq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx, \quad \forall f, g \in R[-\pi, \pi].$$

$$\varphi_0(x) = 1/\sqrt{2},$$

$$\varphi_{2n-1}(x) = \cos nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\varphi_{2n}(x) = \sin nx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$\{\varphi_k(x)\}$  为  $R[-\pi, \pi]$  中标准正交函数系.



**Thm.**  $f$  以  $2\pi$  为周期, 在  $[-\pi, \pi]$  上可积,  $\{\varphi_k\}$  如前,

$c_k = (f, \varphi_k)$ , 则

(1)  $f$  的 Fourier 级数在  $[-\pi, \pi]$  上均方收敛到  $f(x)$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left( f(x) - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \right)^2 dx = 0$$

(此时称  $\{\varphi_k\}$  在  $R[-\pi, \pi]$  中完备);

$$(2) \sum_{k=0}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2. (\text{Parseval 等式})$$

这个定理可以翻译为:



Thm.  $f$  以  $2\pi$  为周期, 在  $[-\pi, \pi]$  上可积,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

(1)  $f$  的 Fourier 级数在  $[-\pi, \pi]$  上均方收敛到  $f(x)$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx = 0,$$

$$\text{其中 } S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx);$$

$$(2) \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. (\text{Parseval 等式})$$



**Proof.** 证明思路如下:

Step1. Fejer和  $\sigma_n(x) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$ .

若  $f \in C[-\pi, \pi]$ , 则  $\sigma_n(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上一致收敛到  $f(x)$ .

Step2.  $f \in R[-\pi, \pi]$ ,  $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in C[-\pi, \pi], s.t. \|f - g\| < \varepsilon$ .

Step3. 由前两步的结论知: 任何函数  $f \in R[-\pi, \pi]$  都可以用三角多项式 (即  $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$  的有限线性组合) 均方逼近, 使得均方误差小于预先给定的正数  $\varepsilon$ .



Step4. 已知  $\{1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$  的前  $n+1$  项线性组合中,  $f$  的 Fourier 级数的部分和  $S_n(x)$  是  $f$  的最佳均方逼近. 于是由 Step3 的结论知:  $\forall f \in R[-\pi, \pi]$ ,  $f$  的 Fourier 级数在  $[-\pi, \pi]$  上均方收敛到  $f(x)$ , 即  $\|f - S_n\| \rightarrow 0$ .

Step5. 在

$$\left\| f - \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n c_k^2$$

中令  $n \rightarrow \infty$ , 得 Parseval 等式.  $\square$



例.  $x^{1000} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), x \in (-\pi, \pi).$  求  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2.$

解: 由Parseval等式,

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^{2000} dx = \frac{2\pi^{2000}}{2001}.$$

$x^{1000}$ 为偶函数, 所以 $b_n=0, \forall n.$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^{1000} dx = \frac{2\pi^{1000}}{1001},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 = \frac{2\pi^{2000}}{2001} - \frac{a_0^2}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = 2\pi^{2000} \left( \frac{1}{2001} - \frac{1}{1001^2} \right). \quad \square$$



**作业：习题7.1 No. 3.**

**习题7.2 No. 1-4.**