微积分A(2)

教师：晏平
email: yanping@mail.tsinghua.edu.cn
office: 数学系荷二办公室219
Tel:　　627985584，13521977278

◆ 教材:

《高等微积分教程》（下册），章纪民、闫浩、刘智新编，清华大学数学科学系。

◆考核方式:

平时20% + 期中30% + 期末50%

◆答疑：线下(周三8:00-9:20,荷二219)

线上(微信群、网络学堂)

◆收发作业(电子版？)

◆习题课(待定)

◆多关注网络学堂

第一章 多元函数及其微分学

§1. n维Euclid空间$\mathbb{R}^n$

1. n维实线性空间

集合$\mathbb{R}^n=\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\middle|\,x_i\in\mathbb{R},i=1,2,\cdots,n\right\}$

实数域$\mathbb{R}$　　两种运算：加法、数乘

加法：$(x_1,x_2,\cdots,x_n)+(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

$$\triangleq(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$$

数乘：$\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_n)\triangleq(\lambda x_1,\lambda x_2,\cdots,\lambda x_n)$

结论：集合$\mathbb{R}^n$是数域$\mathbb{R}$上的(n维)线性空间

2. n维Euclid空间

Def. 设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$，$x$与$y$之间的Euclid距离定义为$\|x-y\|\triangleq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$. 赋以Euclid距离的$n$维线性空间$\mathbb{R}^n$称为$n$维Euclid空间.

Prop. $\mathbb{R}^n$中的Euclid距离满足以下性质：

1)正定性：$\|x-y\|\geq 0,\forall x,y\in\mathbb{R}^n$; 且$\|x-y\|=0\Leftrightarrow x=y$;

2)对称性：$\|x-y\|=\|y-x\|,\forall x,y\in\mathbb{R}^n$;

3)三角不等式：$\|x-y\|\leq\|x-z\|+\|y-z\|,\forall x,y,z\in\mathbb{R}^n$.

清華大學

Remark. n维线性空间$\mathbb{R}^n$上的运算$\mathrm{d}(x,y)$满足正定性、对称性和三角不等式，则称$\mathrm{d}(\cdot,\cdot)$为$\mathbb{R}^n$上的距离.

Question1. 能否定义$\mathbb{R}^n$上的其它距离?

Question2. 为什么要定义$\mathbb{R}^n$上的距离?

3. n维Euclid空间中的开集和闭集

Def. 设$x\in\mathbb{R}^n,\delta>0.$

点x的δ邻域： $B(x,\delta)=\left\{y\in\mathbb{R}^n:\|x-y\|<\delta\right\};$

点x的去心δ邻域： $B_0(x,\delta)=\left\{y\in\mathbb{R}^n:0<\|x-y\|<\delta\right\}.$

Remark. 邻域的几何意义.

Def. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$.

(1)称x为Ω的一个内点, 若存在$\delta > 0, s.t.\ B(x,\delta) \subset \Omega$;

(2)称x为Ω的一个边界点, 若$\forall \delta > 0$,

$$B(x,\delta) \cap \Omega \neq \phi \text{ 且 } B(x,\delta) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \neq \phi;$$

(3)若Ω中每一点均为内点, 则称Ω为开集;

(4)若Ω的余集$\mathbb{R}^n \setminus \Omega$为开集, 则称$\Omega$为闭集;

(5)由Ω的所有内点构成的集合称为Ω的内部, 记作$\mathring{\Omega}$;

(6)Ω的所有边界点构成的集合称为Ω的边界, 记作$\partial\Omega$;

(7)称集合$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$为集合$\Omega$的闭包.

(8)称 $x_0\in\mathbb{R}^n$为集合 Ω 的聚点, 若x_0 的任意去心邻域中都含有 Ω 中的点.

Remark. (1)Ω为闭集 $\Leftrightarrow$ Ω的任意聚点都包含于Ω.

(2)全集 $\mathbb{R}^n$和空集 ϕ 既是开集又是闭集.

(3)任意多个开集之并仍为开集;有限个开集之交仍为开集.

(4)任意多个闭集之交仍为闭集;有限个闭集之并仍为闭集.

(5) $\mathring{\Omega}$ 是开集, $\bar{\Omega}$是闭集.

Question3. 任意多个开集之交是否仍为开集? $(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})$

Question4. 任意多个闭集之并是否仍为闭集? $[\frac{1}{n},1]$

Def. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$. 若存在$M>0$, 使得$\forall x\in\Omega$, 有$\|x\|<M$, 则称$\Omega$为有界集合.

例. $B(x,\delta)$是__有界开__集, $B_0(x,\delta)$是__有界开__集.

$\partial B(x,\delta)=\underline{\{y\in\mathbb{R}^n:\|x-y\|=\delta\}}$, 这是一个__有界闭__集.

$\partial B_0(x,\delta)=\underline{\{y\in\mathbb{R}^n:\|x-y\|=\delta\}\cup\{x\}}$, 这是一个__有界闭__集.

$\overline{B}(x,\delta)=\underline{\{y\in\mathbb{R}^n:\|x-y\|\le\delta\}}$, 这是一个__有界闭__集.

$\overline{B_0}(x,\delta)=\underline{\{y\in\mathbb{R}^n:\|x-y\|\le\delta\}}$, 这是一个__有界闭__集.

$\mathring{B}(x,\delta)=\underline{B(x,\delta)}$, $\mathring{B}_0(x,\delta)=\underline{B_0(x,\delta)}$.

清華大學

4. $\mathbb{R}^n$中集合的连通性

Def. 集合$\Omega\subset\mathbb{R}^n$称为(道路)连通的, 如果对$\Omega$中的任意两点$x, y$, 都存在$\Omega$中的一条折线将两点连接起来, 否则, 称$\Omega$为非(道路)连通集.

Def. $\mathbb{R}^n$ 中非空的连通开集称为开区域, 开区域的闭包称为闭区域.

例. $B(x,\delta)$ 与 $B_0(x,\delta)$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的开区域.

例. $\{(x,y): |x|<1, |y|<2\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的开区域.

例. $\{(x,y,z): 1\le x^2+y^2+z^2\le 2\}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的闭区域.

清華大學

5. $\mathbb{R}^n$中点列

$\mathbb{R}^n$ 中点列$\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$ 也记作$\{x_k\}$.

$$x_k=\left(x_k^{(1)},x_k^{(2)},\cdots,x_k^{(n)}\right)\in\mathbb{R}^n,\quad k=1,2,\cdots,\infty.$$

Def. $\mathrm{A}=\left(a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(n)}\right)\in\mathbb{R}^n,\{x_k\}\subset\mathbb{R}^n$. 称点列$\{x_k\}$收敛于A, 或点列$\{x_k\}$以A为极限, 记作 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=\mathrm{A}$, 如果 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^+,s.t.$

$$\|x_k-\mathrm{A}\|<\varepsilon,\qquad \forall k>N.$$

Remark. (1) $n=1$时与实数列的极限定义一致.

(2) $\lim\limits_{k\to+\infty}x_k=\mathrm{A}$的几何意义.

Thm. 设$x_k=\left(x_k^{(1)},x_k^{(2)},\cdots,x_k^{(n)}\right)\in\mathbb{R}^n,\quad k=1,2,\cdots,\infty.$

$\mathrm{A}=\left(a^{(1)},a^{(2)},\cdots,a^{(n)}\right)\in\mathbb{R}^n$,则

$$\lim_{k\to+\infty}x_k=\mathrm{A}\Leftrightarrow\lim_{k\to+\infty}x_k^{(i)}=a^{(i)},i=1,2,\cdots,n.$$

Proof.

$$\max_{1\le i\le n}\left\{\left|x_k^{(i)}-a^{(i)}\right|\right\}$$

$$\le\left\|x_k-\mathrm{A}\right\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_k^{(i)}-a^{(i)}\right)^2}$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left|x_k^{(i)}-a^{(i)}\right|.\square$$

Thm. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$为闭集,$\{x_k\} \subset \Omega$, $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = \mathrm{A}$,则$\mathrm{A} \in \Omega$.

Proof. 反证法.假设$\mathrm{A} \notin \Omega$,则$\mathrm{A} \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.因$\Omega$为闭集, $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$为开集.于是$\exists \varepsilon > 0$, $s.t.\, B(\mathrm{A}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, $\underline{B(\mathrm{A}, \varepsilon) \bigcap \Omega = \phi}$.

另一方面, $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = \mathrm{A}$,因此对上述$\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}^+$, $s.t. \forall k > N$,有$\|x_k - \mathrm{A}\| < \varepsilon$,即$x_k \in B(\mathrm{A}, \varepsilon)$. 又$\{x_k\} \subset \Omega$,故$\underline{B(\mathrm{A}, \varepsilon) \bigcap \Omega \neq \phi}$,矛盾.□

Remark. 上面的定理说明,闭集的聚点都落在该集合中.反之可证,若$\Omega(\subset \mathbb{R}^n)$的聚点都包含于$\Omega$,则$\Omega$为闭集.因此,

$$\Omega\text{为闭集} \Leftrightarrow \Omega\text{的任意聚点都包含于}\Omega.$$

Def. 称$\{x_k\}\subset\mathbb{R}^n$为Cauchy列,如果$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}^+, s.t.$

$$\|x_l-x_m\|<\varepsilon,\quad \forall l,m>N.$$

Thm. $x_k=\left(x_k^{(1)},x_k^{(2)},\cdots,x_k^{(n)}\right)\in\mathbb{R}^n,\quad k=1,2,\cdots,\infty.$则

$$\{x_k\}\text{为Cauchy列}\Leftrightarrow\left\{x_k^{(i)}\right\}\text{为Cauchy列}, i=1,2,\cdots,n.$$

Thm. $\mathbb{R}^n$ 中收敛列与Cauchy列等价.

6. $\mathbb{R}^n$的重要性质

Thm. Euclid空间$\mathbb{R}^n$ 是完备的, 即 $\mathbb{R}^n$ 中的Cauchy列必收敛于 $\mathbb{R}^n$ 中的点.

Thm.(Weierstrass) $\mathbb{R}^n$ 中有界列必有收敛子列.

Proof. 设$\{x_k\}\subset\mathbb{R}^n$有界列,即$\exists M>0, s.t.\|x_k\|<M, \forall k\in\mathbb{N}^+$.

$\|x_k\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_k^{(i)}\right)^2}\geq\left|x_k^{(i)}\right|$,则$\left\{x_k^{(i)}\right\}$均为有界实数列,$i=1,2,\cdots,n$.

下面我们分n步抽取$\{x_k\}$的收敛子列.

Step1.由$\mathbb{R}$中的Weierstrass定理,$\left\{x_k^{(1)}\right\}$有收敛子列$\left\{x_{k_l}^{(1)}\right\}_{l=1}^{+\infty}$,

$s.t.\lim\limits_{l\to+\infty}x_{k_l}^{(1)}=a^{(1)}$.于是, 我们抽出了$\{x_k\}$的一个子列$\{x_{k_l}\}_{l=1}^{+\infty}$,

它的第一个分量构成的实数列收敛到$a^{(1)}$.

Step2.对Step1中抽出的子列$\left\{x_{k_l}\right\}_{l=1}^{+\infty}$, 利用Step1中方法,

可抽出一个子子列$\left\{x_{k_{l_m}}\right\}_{m=1}^{+\infty}$, $s.t.\ \lim\limits_{m\to+\infty} x_{k_{l_m}}^{(2)}=a^{(2)}$.由于$\left\{x_{k_{l_m}}^{(1)}\right\}_{m=1}^{+\infty}$

也是$\left\{x_{k_l}^{(1)}\right\}_{l=1}^{+\infty}$的子列, 所以 $\lim\limits_{m\to+\infty} x_{k_{l_m}}^{(1)}=\lim\limits_{l\to+\infty} x_{k_l}^{(1)}=a^{(1)}$. 至此, 我

们抽出了$\left\{x_k\right\}$的一个子列$\left\{x_{k_{l_m}}\right\}_{m=1}^{+\infty}$, 不妨仍记为$\left\{x_{k_l}\right\}_{l=1}^{+\infty}$, 它

的第i个分量构成的实数列收敛到$a^{(i)}, i=1,2$.

依次类推, 到Step$n$, 可抽出$\left\{x_k\right\}$的一个子列, 不妨仍记为

$\left\{x_{k_l}\right\}_{l=1}^{+\infty}$, 其第$i$个分量构成的实数列收敛到$a^{(i)}, i=1,2,\cdots,n$.

此时有 $\lim\limits_{l\to+\infty} x_{k_l}=\mathrm{A}=\left(a^{(1)},a^{(2)},\cdots a^{(n)}\right)$.□

Def.(集合的直径) 设$F\subset\mathbb{R}^n$,若$F\neq\phi$,定义F的直径为

$$\mathrm{d}(F)=\sup\left\{\|x-y\|:x,y\in F\right\}.$$

若$F=\phi$,则定义F的直径为$\mathrm{d}(F)=0$.

Thm.(闭集套定理) 设$F_k\subset\mathbb{R}^n$ 为非空闭集,$k=1,2,\cdots$,且

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_k\supset F_{k+1}\cdots.$$

若$\lim\limits_{k\to+\infty}\mathrm{d}(F_k)=0$,则集合$\bigcap_{k=1}^{+\infty}F_k$ 中有且仅有一点.

Def. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\{G_\alpha\}(\alpha\in I)$为开集族, 若$\Omega\subset\bigcup_{\alpha\in I}G_\alpha$, 则称$\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$为$\Omega$的一个开覆盖.

例. $\left\{(n-\frac{1}{n},n+\frac{1}{n})\right\}, n=1,2,\cdots,100$, 是一个开集族.

例. $\{(n-2^{-n},n+2^{-n})\}, n\in\mathbb{Z}$, 是一个开集族.

例. $\{(x-1,x+1)\}, x\in\mathbb{R}$, 是$\mathbb{R}$的一个开覆盖.

Thm.(有限覆盖定理) 设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$为有界闭集, $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$为$\Omega$的一个开覆盖, 则$\exists$有限个开集$G_{\alpha_i}, \alpha_i\in I, i=1,2,\cdots,N$, s.t. $\Omega\subset\bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i}$.

选做作业 （不交）

习题1.1 No. 3(3),4(4),5(4)