第五章　刚体定轴转动

§5.1 刚体转动的描述

刚体是特殊的质点系，其上各质点间的相对位置保持不变

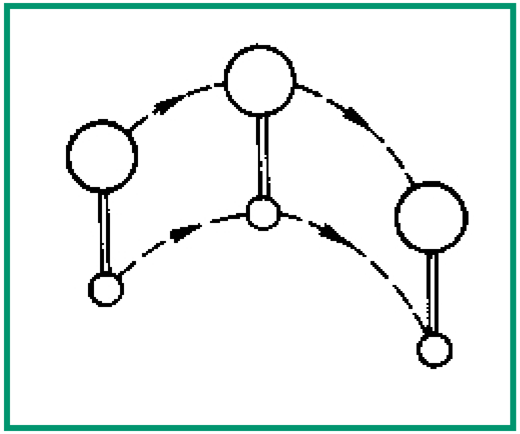
一. 刚体的运动形式

1. 平动（translation）

平动时，刚体上所有点运动都相同

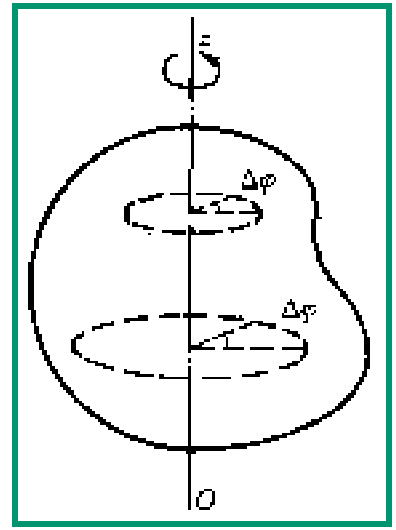
运动规律同刚体质量集中在

其质心上的一个质点的运动



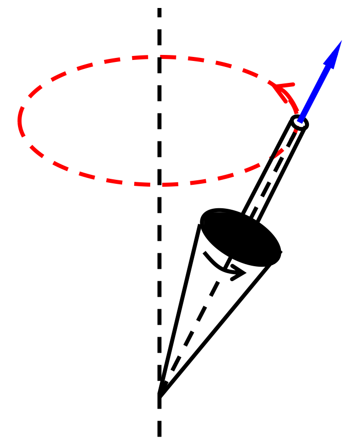
质心定理描述了刚体平移的动力学规律

2. 转动（rotation）



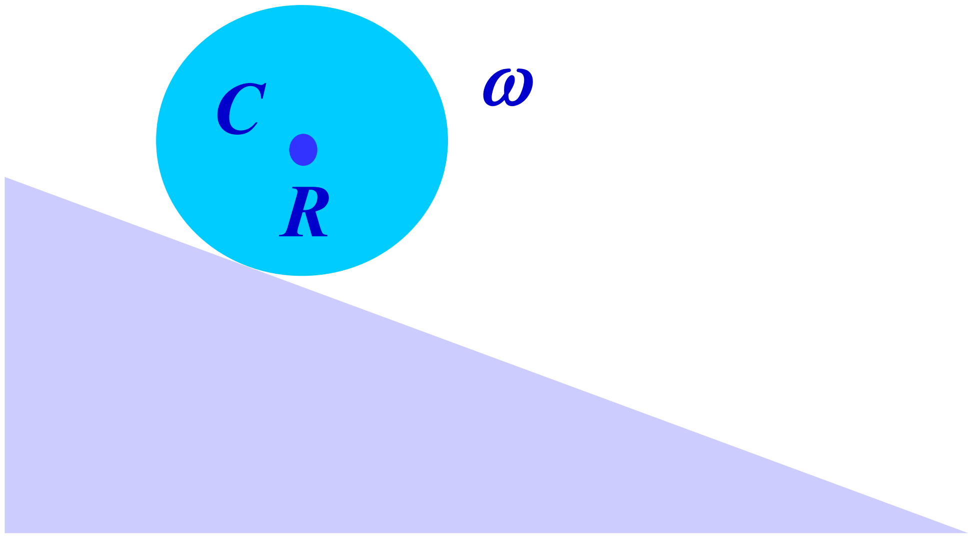
定轴转动： 运动中各质元均做圆周运动，且各圆心都在同一条固定的直线（转轴）上

定点转动： 运动中刚体上只有一点固定不动，整个刚体绕过该定点的某一瞬时轴线转动



3. 平面运动

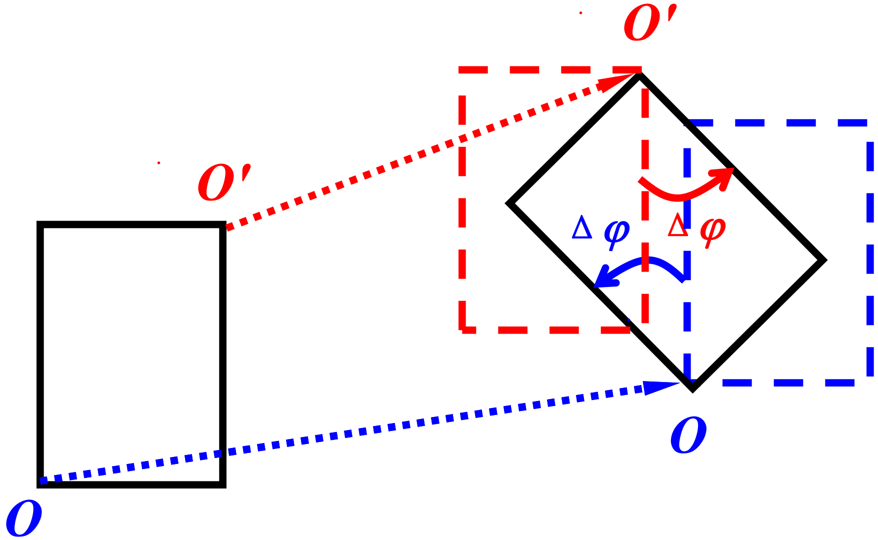
刚体上各点都平行于某一固定平面的运动称为刚体的平面运动，又称为刚体的平面平行运动。



4. 一般运动

刚体不受任何限制的的任意运动, 称为刚体的一般运动

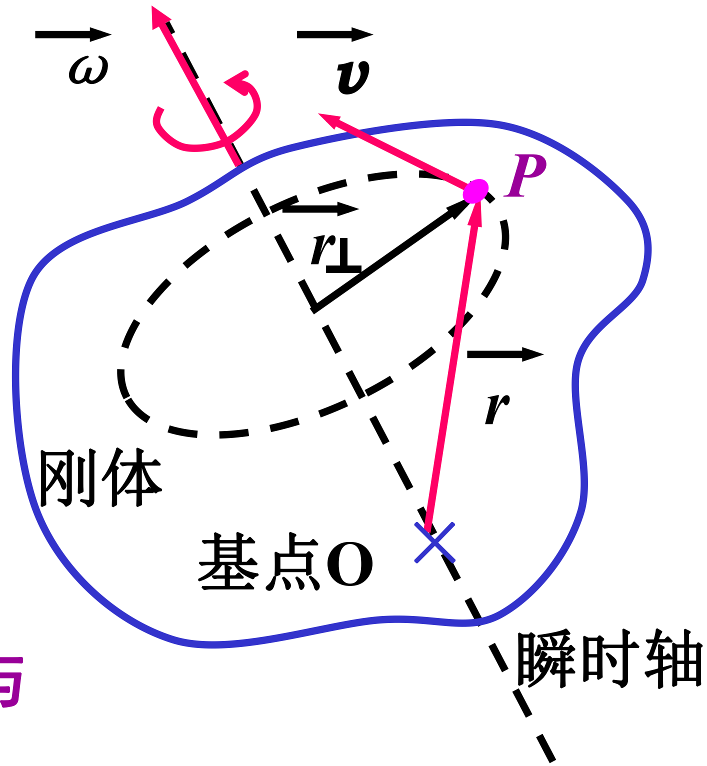
一般运动 = (平动)+(转动)　　　基点



二. 刚体转动的描述

1 定点转动

运动描述



角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$

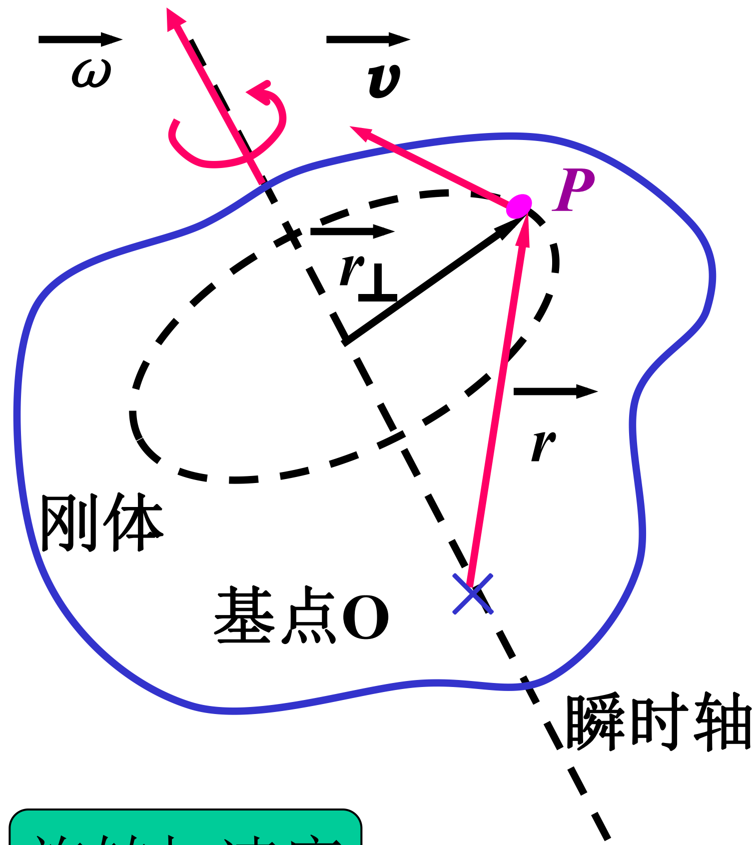
规定：角速度方向沿顺时轴, 且与刚体转向成右手螺旋关系

反映瞬时轴的方向及刚体转动快慢

角加速度 $\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$

不一定沿着瞬时轴

线量和角量的关系



P点线速度

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$\vec{r}_{\perp}$ —对圆心的位矢。

P点线加速度

旋转加速度

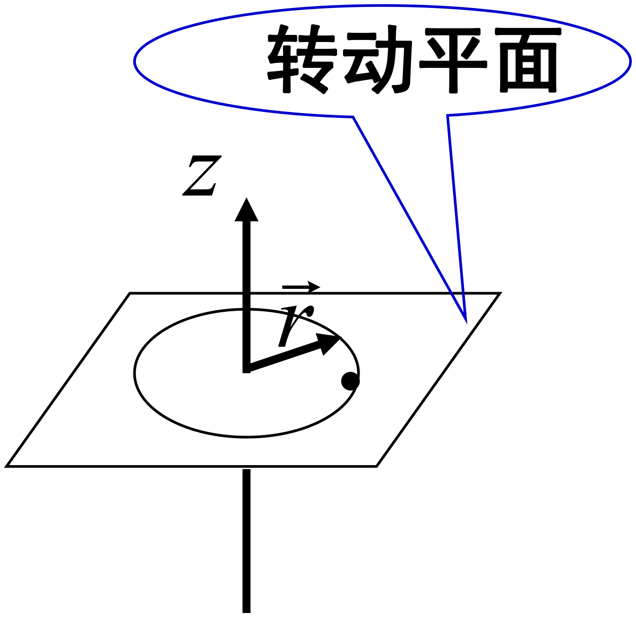
向轴加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{\perp} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{\perp}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\perp} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

2 定轴转动

$\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ 退化为代数量

任一质点圆周运动的线量和角量的关系



$$\boxed{\begin{aligned} v &= \omega r \\ a_n &= r\omega^2 = v\omega \\ a_t &= r\alpha \end{aligned}}$$

$$\alpha = const.$$

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ (\theta - \theta_0) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

§5.2　转动定律

一个一般的转动可以由按一定次序绕3个轴垂直的转动来合成，定轴转动是任意转动的基本元素。

线性动量正比于速度，

角动量与角速度是否也有类似的关系，

与惯性质量对应的是什么量

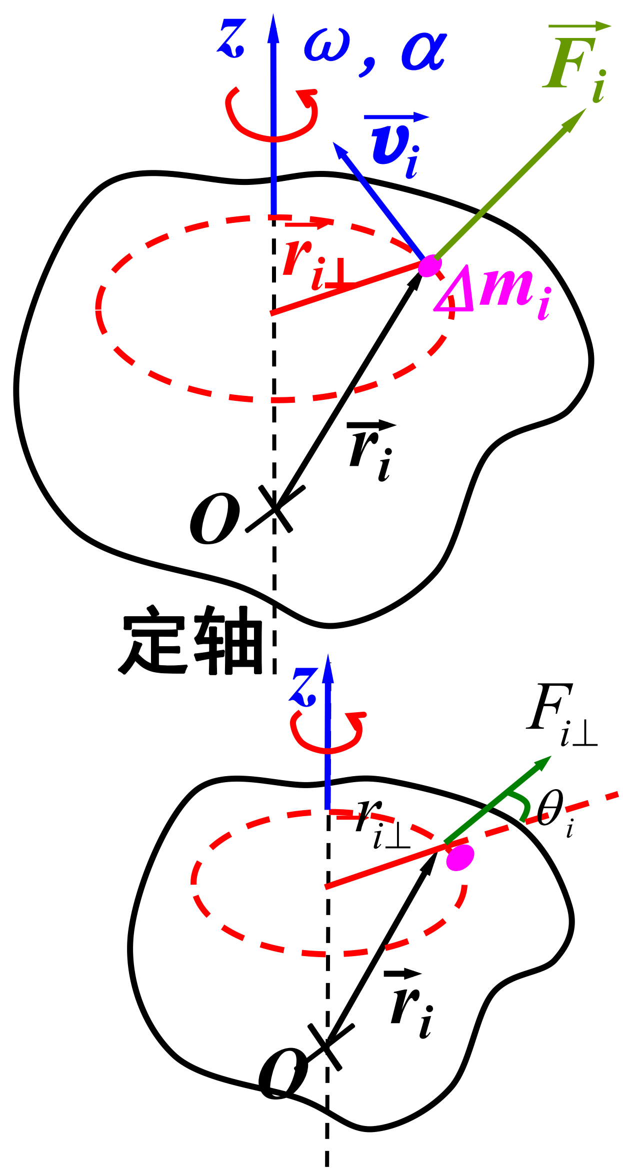
方程的得出

$$\vec{M}_{外} = \frac{d\vec{L}}{dt} \qquad (对o点)$$

$$M_{外z} = \frac{dL_z}{dt} \qquad (对z轴)$$

$$M_{i外z} = \vec{M}_{i外}\cdot\hat{z} = (\vec{r}_i\times\vec{F}_i)\cdot\hat{z}$$

$$= ((\vec{r}_{i\perp}+\vec{r}_{i//})\times(\vec{F}_{i\perp}+\vec{F}_{i//}))\cdot\hat{z}$$



$$=(\vec{r}_{i\perp}\times\vec{F}_{i\perp})\cdot\hat{z}+(\vec{r}_{i\perp}\times\vec{F}_{i//})\cdot\hat{z}+(\vec{r}_{i//}\times\vec{F}_{i\perp})\cdot\hat{z}+(\vec{r}_{i//}\times\vec{F}_{i//})\cdot\hat{z}$$

$$=(\vec{r}_{i\perp}\times\vec{F}_{i\perp})\cdot\hat{z}=F_{i\perp}r_{i\perp}\cdot\sin\theta_i$$

$$\boxed{M_{外z}=\sum_i F_{i\perp}r_{i\perp}\cdot\sin\theta_i}$$

$$L_{iz}=\vec{L}_i\cdot\hat{z}=\vec{r}_i\times\left(\Delta m_i\vec{v}_i\right)\cdot\hat{z}=\Delta m_i\left(\vec{r}_{i\perp}+\vec{r}_{i//}\right)\times\vec{v}_i\cdot\hat{z}$$

$$=(\Delta m_i\vec{r}_{i\perp}\times\vec{v}_i)\cdot\hat{z}+(\Delta m_i\vec{r}_{i//}\times\vec{v}_i)\cdot\hat{z}$$

$$=(\Delta m_i\vec{r}_{i\perp}\times\vec{v}_i)\cdot\hat{z}=\Delta m_i r_{i\perp}v_i$$

$$\boxed{L_z=\sum_i\Delta m_i r_{i\perp}v_i=\sum_i\Delta m_i r_{i\perp}^2\omega}$$

$$\boxed{令\ J_z = \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2}$$ 刚体对定轴的转动惯量

$$\boxed{L_z = J_z \omega}$$

$$M_{外z} = \frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt}$$

$$\boxed{M_{外z} = J_z \alpha}$$ 转动定律

是刚体定轴转动的基本动力学方程！

定轴情况下，可不写下标z，记作：

$$\boxed{M = J\alpha}$$

1、由质点系角动量定理向固定转轴投影得到。

2、适用于转轴固定于惯性系中的情况。

3、适用于转轴通过质心的情况，而无论质心是否是惯性系。

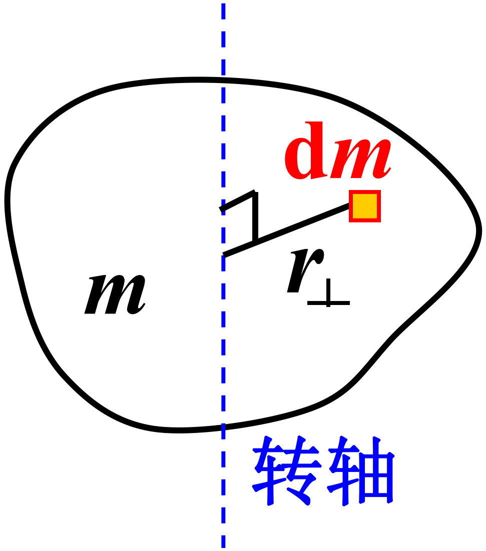
$$\boxed{\vec{M} = J\vec{\alpha}}$$

与牛顿第二定律相比，有：

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

§5.3 转动惯量的计算

1 转动惯量的计算

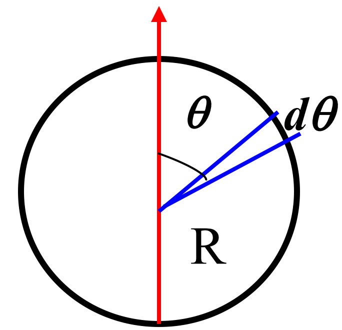


质点系 $J=\sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

连续体 $J=\int_m r_\perp^2 \cdot \mathrm{d}\,m$

J 由质量对轴的分布决定。

例．求质量为m，半径为R的园环沿着直径的转动惯量



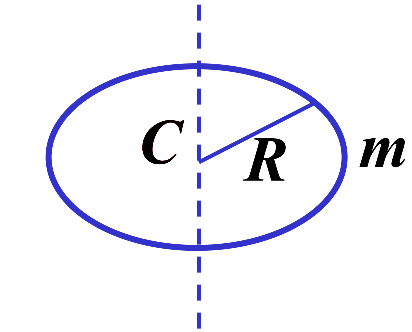
解：由转动惯量定义 $J=\int_m r_{\perp}^2\cdot \mathrm{d}\,m$

$$J=2\int_0^{\pi}(R\sin\theta)^2\frac{m}{2\pi R}Rd\theta$$

$$=mR^2\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2\theta d\theta$$

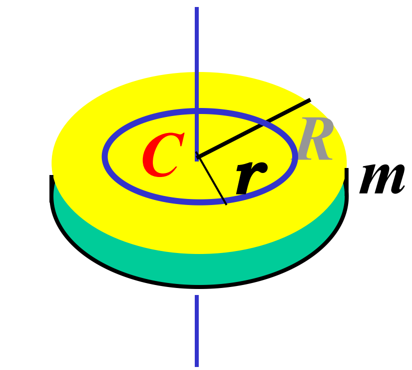
$$=\frac{1}{2}mR^2$$

2. 常用的几种转动惯量表示式



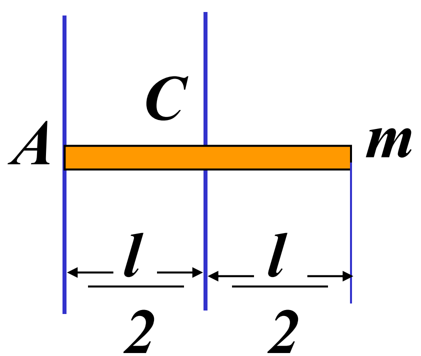
均匀圆环：

$$J_c = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$$



均匀圆盘：

$$J_C = \int r^2 dm = \int r^2 \frac{m}{\pi R^2} 2\pi r dr = \frac{1}{2} mR^2$$



均匀杆：

$$J_c = \int x^2 dm = 2\int_0^{l/2} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{12} ml^2$$

$$J_A = \int x^2 dm = \int_0^{l} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{1}{3} ml^2$$

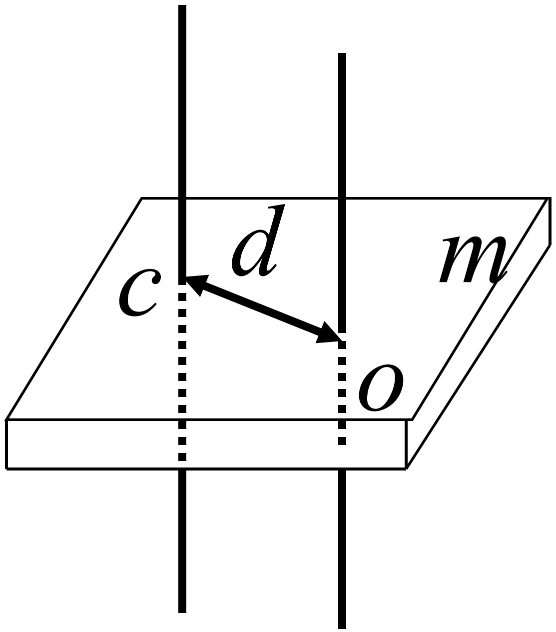
3. 计算J的几条规律

- 对同一轴*J*具有可叠加性

$$\boxed{J = \sum J_i}$$

- 平行轴定理

$$\boxed{J_o = J_c + md^2}$$

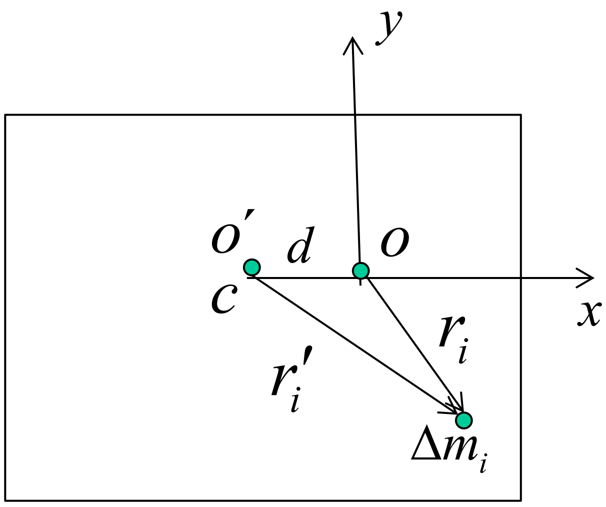


$$\therefore J_c = J_{\min}$$

$$\boxed{r_i^2 = x_i^2 + y_i^2} = (x_i' - d)^2 + y_i'^2$$

$$= x_i'^2 + y_i'^2 + d^2 - 2x_i'\, d$$

$$\boxed{r_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2}$$



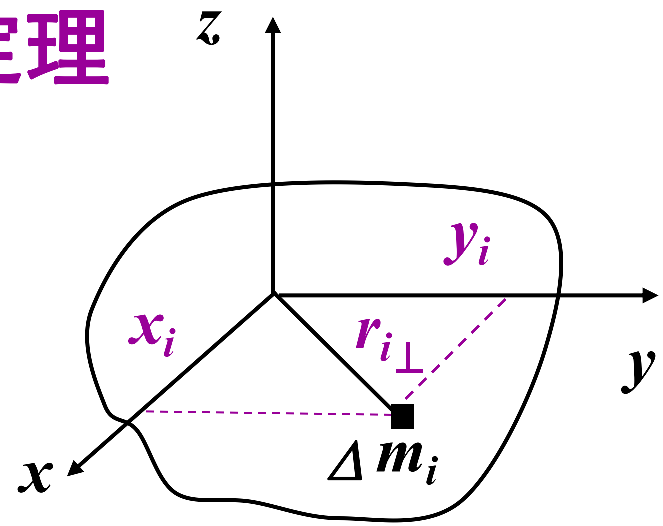
$$J_o = \sum_i \Delta m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + d^2 - 2x_i'\, d)$$

$$= \sum_i \Delta m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + d^2 \sum_i \Delta m_i - 2d \sum_i \Delta m_i x_i' \quad \boxed{\Rightarrow 0}$$

$$= \sum_i \Delta m_i (x_i'^2 + y_i'^2) + d^2 \sum_i \Delta m_i$$

$$\boxed{J_o = J_c + md^2}$$

- **对薄平板刚体的正交轴定理**



$$J = \sum \Delta m \quad r_{\perp}$$

$$= \sum \Delta m \quad x^{2} + \sum \Delta m \quad y^{2}$$

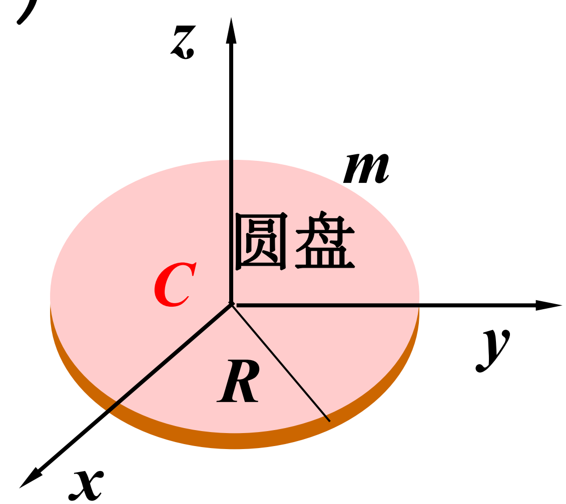
$$J_{ń} = J_{ě} + J_{ī}$$

例：已知圆盘 $J_{§} = \dfrac{1}{2} mR^{2}$

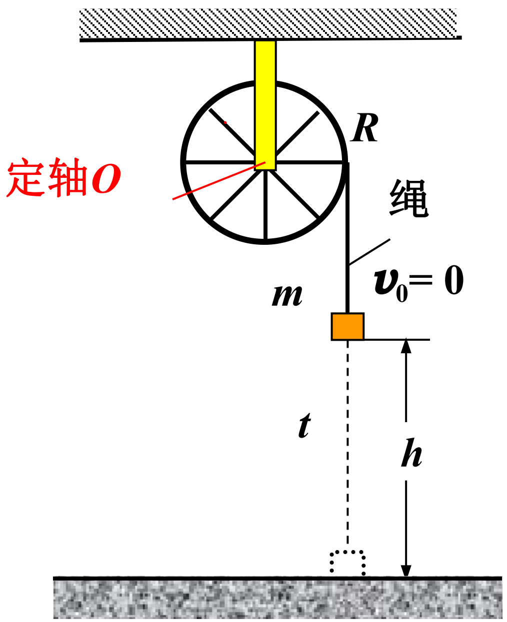
求对圆盘的一条直径的J_x（或J_y）

由 $\begin{cases} J_z = J_y + J_x \\ J_x = J_y \end{cases}$

$\therefore \quad J_x = J_y = \dfrac{1}{4} mR^2$



§5.4 转动定律的应用



例1：已知：

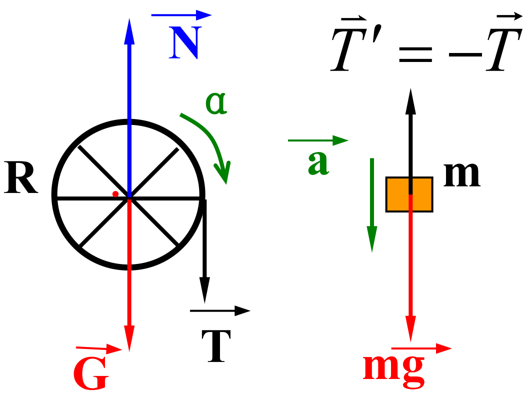
R =0.2m, m=1kg, v_0=0, h=1.5m

绳轮无相对滑动，绳不可伸长，

下落时间t=3s

求：轮对0 轴 J=?

解：动力学关系：



对轮：$TR = J\alpha$ (1)

对m：$mg - T = ma$ (2)

运动学关系： $$\alpha = \frac{a}{R} \qquad (3)$$

$$h = \frac{1}{2}at^2 \qquad (4)$$

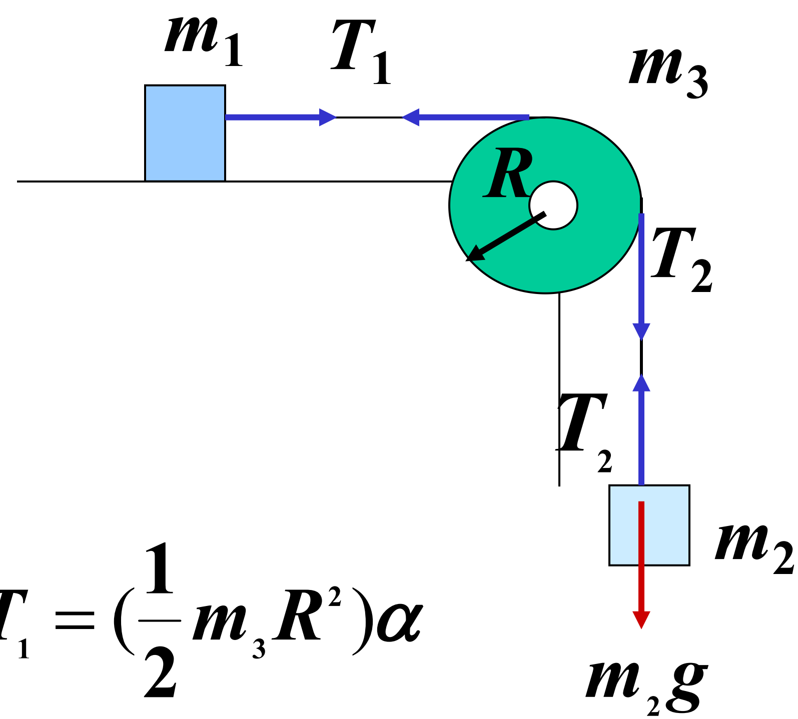
(1)~(4)联立解得： $J = (\frac{gt^2}{2h} - 1)mR^2$

$$= (\frac{9.8 \times 3^2}{2 \times 1.5} - 1) \times 1 \times 0.2^2 = 1.14\,\mathrm{kg \ m^2}$$

例2 如图，定滑轮看作匀质圆盘，轴光滑，**无相对滑动**，桌面水平光滑。已知 m_1, m_2, m_3， R.

求：两侧绳拉力。

解：各物受力如图



对m_1, m_2，由牛顿定律

$$T_1 = m_1 a_1$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 a_2$$

对m_3, 由转动定理 $$RT_2 - RT_1 = (\frac{1}{2}m_3 R^2)\alpha$$

无相对滑动： $$a_1 = a_2 = \alpha R$$

解得 $$T_1 = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + m_3 / 2} \qquad T_2 = \frac{m_1(m_2 + m_3 / 2)g}{m_1 + m_2 + m_3 / 2}$$

§5.5 角动量守恒

力矩对时间的积累效应。

质点系：

对点：$\vec{M}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$，$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_{外}\,\mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$

对轴：$\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\,\mathrm{d}t = L_{2z} - L_{1z}$

刚体：$L_z = J_z\omega$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\,\mathrm{d}t = J_z\omega_2 - J_z\omega_1}$$

——刚体定轴转动的角动量定理

刚体定轴转动的角动量守恒定律：

$$\boxed{M_{外z} = 0，\ 则\ J_z\omega = \mathrm{const}.}$$

单一刚体： $\omega = c$

刚体系： $\sum_i L_{iz} = const.$

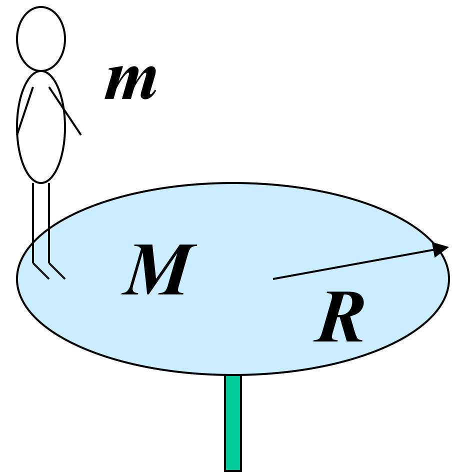
此时角动量可在系统内部各刚体间传递，

而却保持刚体系对转轴的总角动量不变。

例1 转盘上站立一人，沿边缘行走一周。

求：转盘转过的角度。

解：人+转盘, L_z 守恒：



$$mR^2\omega + \frac{1}{2}MR^2\Omega = 0$$

相对运动：$\omega = \omega' + \Omega$

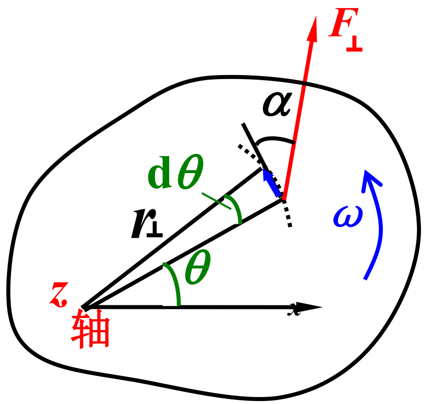
解得 $$\Omega = \frac{-mR^2}{mR^2 + \frac{1}{2}MR^2}\omega'$$

$$\Delta\Theta = \int_0^t \Omega dt = -\frac{2m}{2m+M}\int_0^t \omega' dt = -\frac{2m}{2m+M}2\pi$$

§5.6 转动中的功和能

定轴转动时，功和动能可用角量表示。

1 定轴转动刚体的动能



$$E_k = \sum \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum \Delta m_i r_{i\perp}{}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

2 外力作功

$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_\perp \cos\alpha (r_\perp \, \mathrm{d}\theta)$$

$$= (F_\perp \cos\alpha \cdot r_\perp)\mathrm{d}\theta$$

$$= M \, \mathrm{d}\theta$$

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$$ —力矩的空间积累效应

3 动能定理

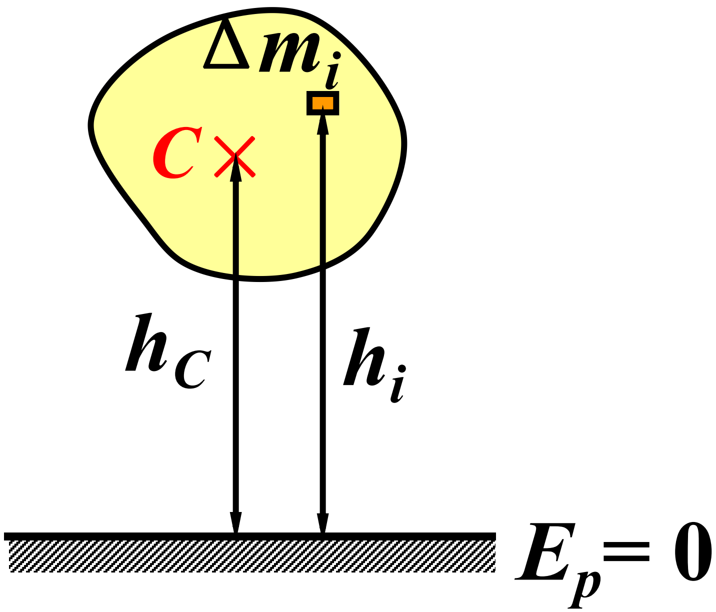
$$\sum_i A_i^{ex}+\sum_i A_i^{in}=E_k-E_{k0}$$

$$\sum A_i^{in}=0$$

刚体定轴转动动能定理

$$\boxed{\int M d\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2}$$

4 刚体的重力势能

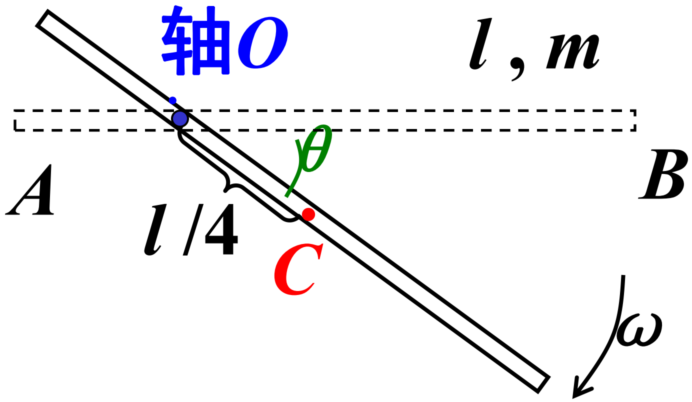


$$E_p = \sum \Delta m_i g h_i = mg \frac{\sum \Delta m_i h_i}{m} = mgh_C$$

◆定轴转动刚体与直线运动质点之间的对比：

质点	$p = mv$	$F = ma$	$E_K = \frac{1}{2} m v^2$
刚体	$L_z = J_z \omega$	$M_z = J_z \alpha$	$E_k = \frac{1}{2} J_z \omega^2$

例 如图示，均匀直杆质量为m，长为l，初始水平静止。轴光滑，$\overline{AO}=\dfrac{l}{4}$



求： 杆摆到θ角时的角速度和对轴的作用力

解： 杆摆动过程，机械能守恒。

初态： $E_{k1}=0,\quad$ 令 $E_{P1}=0$

末态： $E_{k2}=\dfrac{1}{2}J_O\omega^2, E_{P2}=-mg\dfrac{l}{4}\sin\theta$

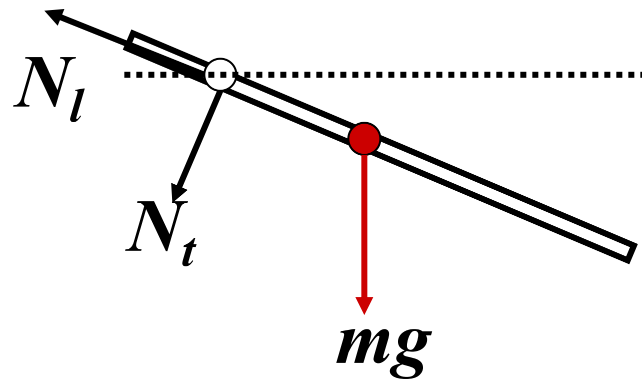
则：$$\frac{1}{2}J_O\omega^2 - mg\frac{l}{4}\sin\theta = 0$$

由平行轴定理 $J_O = J_C + md^2$ ，

有 $$J_O = \frac{1}{12}ml^2 + m(\frac{l}{4})^2 = \frac{7}{48}ml^2$$

解得 $$\boxed{\omega = 2\sqrt{\frac{6g\sin\theta}{7l}}}$$

应用质心运动定理求轴力



$\hat{l}$方向：

$$-mg\sin\theta + N_l = ma_{Cl}$$

$\hat{t}$方向：

$$mg\cos\theta + N_t = ma_{Ct}$$

$$a_{cl} = \omega^2 \frac{l}{4}, \quad a_{ct} = \alpha \frac{l}{4}$$

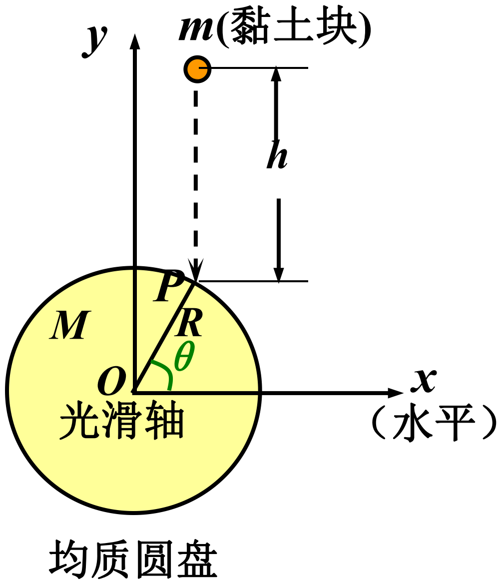
转动定理 $\frac{l}{4} mg\cos\theta = J_o \alpha$

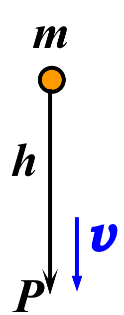
$$N_l = \frac{13}{7} mg\sin\theta, \qquad N_t = -\frac{4}{7} mg\cos\theta$$

例：如图示，已知h，R，$M=2m$，$\theta=60°$

求：碰撞后的瞬刻盘的 $\omega_0=?$

P转到x轴时盘的 $\omega=?$，$\alpha=?$

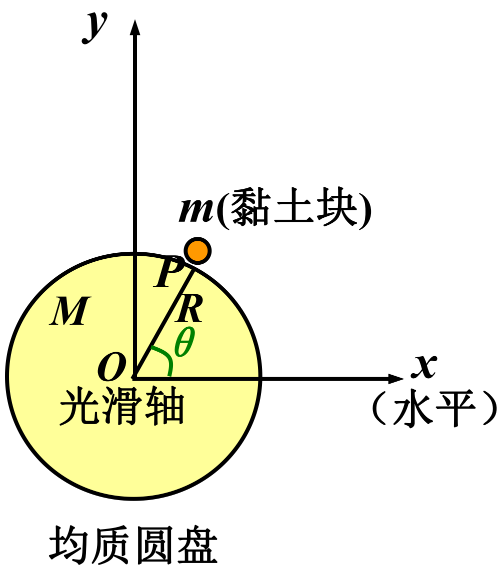




解：m下落：

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$



对（m +盘）系统：

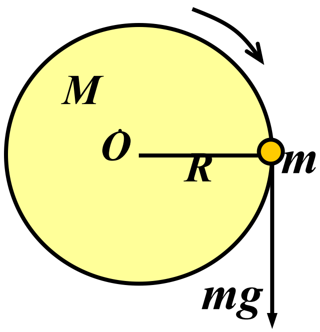
冲力远大于重力，故重力对轴力矩可忽略，系统角动量守恒：

$$mvR\cos\theta = J\omega_0 \qquad (2)$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = 2mR^2 \qquad (3)$$

由(1)(2)(3)得：

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{2R}\cos\theta \qquad (4)$$



（$m+M$+地球），E守恒，

令P、x重合时$E_P=0$，则：

$$mgR\sin\theta+\frac{1}{2}J\omega_0^2=\frac{1}{2}J\omega^2 \quad (5)$$

由(3)(4)(5)得：

$$\omega=\sqrt{\frac{gh}{2R^2}\cos^2\theta+\frac{g}{R}\sin\theta}$$

$$(\theta=60^\circ) \quad =\frac{1}{2R}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}(h+4\sqrt{3}R)}$$

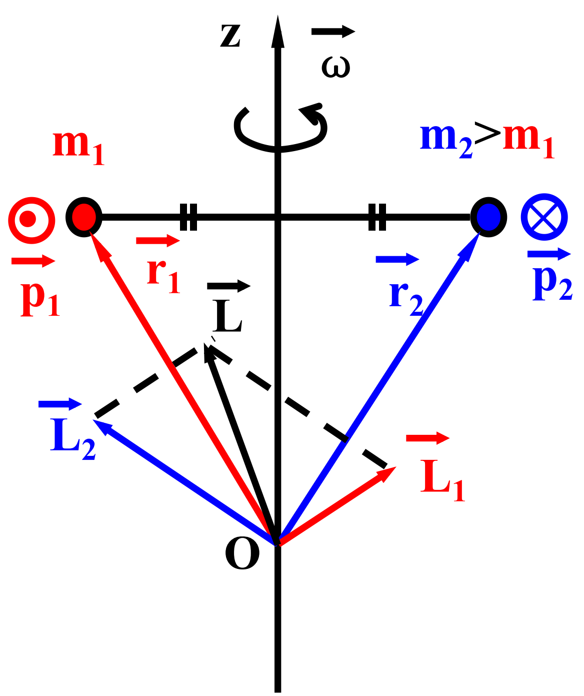
$$\alpha=\frac{M}{J}=\frac{mgR}{2mR^2}=\frac{g}{2R}$$

§5.7 进动 Precession

高速旋转的物体，其自转轴绕另一个轴转动

定轴转动 $\vec{L} = L_z \hat{z} \mathbin{/\!/} \vec{\omega}$

但对定点转动 $\vec{L}$ 还平行于 $\vec{\omega}$ 吗？



显然若 $m_1 \neq m_2$ (不对称)

则 $\vec{L} \not\parallel \omega$ （对 0 点）

但质量分布对称、且刚体绕对称轴转动时，对轴上任一点有：

$$\vec{L} \mathbin{/\!/} \vec{\omega} \mathbin{/\!/} \text{轴}$$

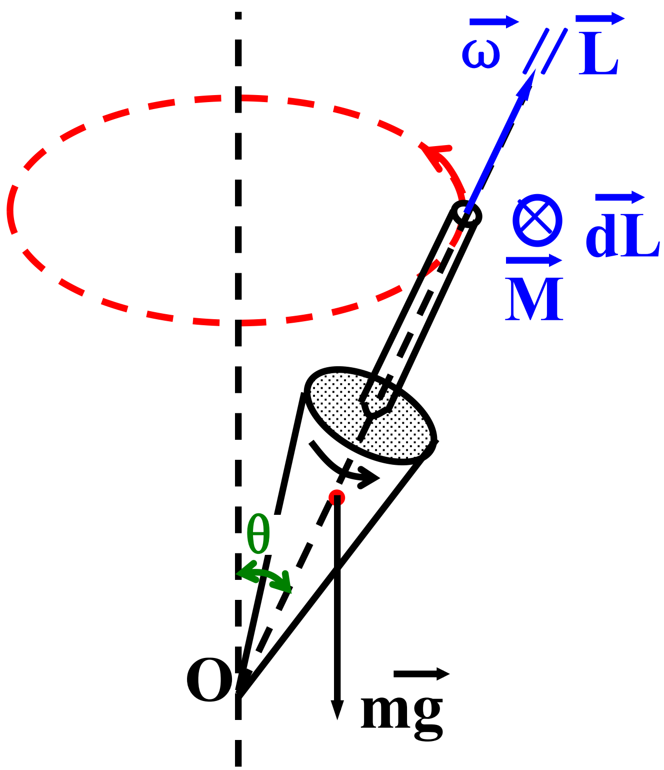
$$\vec{L}(\text{对点}) = L_z \hat{z}(\text{对轴}) = J_z \vec{\omega}$$

只讨论具有对称轴的刚体的旋进问题

一、旋进的产生

陀螺自转：$\vec{L} \parallel \vec{\omega} \parallel$对称轴

c 在对称轴上



$$\vec{M}_o = \vec{r}_{co} \times m\vec{g} \rightarrow \vec{M} \perp \vec{L}$$

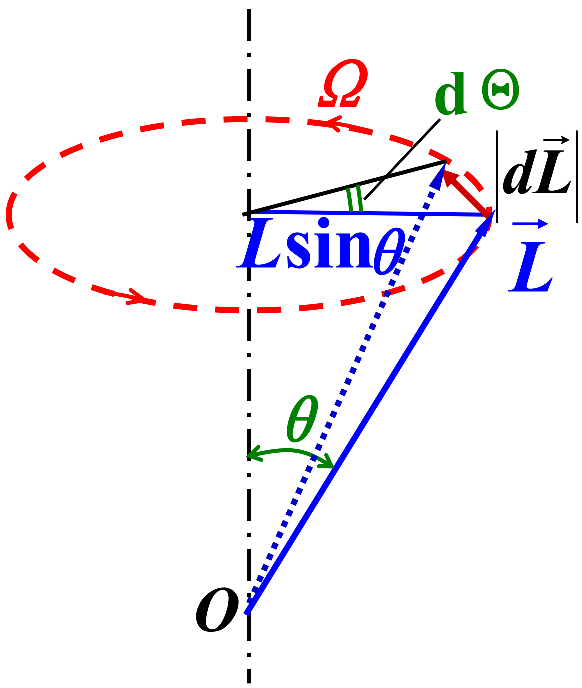
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$d\vec{L} = \vec{M}dt \,//\, \vec{M}$$

当 $\vec{M} \perp \vec{L}$ 时， $d\vec{L} \perp \vec{L}$

$\vec{L}$ 只变方向，不变大小 ——→ 旋进产生

二、旋进角速度



$$\boxed{\Omega = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t}}$$

$$\left|\mathrm{d}\vec{L}\right| = L\sin\theta\,\mathrm{d}\Theta$$

$$M = \frac{\left|\mathrm{d}\vec{L}\right|}{\mathrm{d}t} = \frac{L\sin\theta\,\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} = L\sin\theta\,\Omega$$

$$\boxed{\Omega = \frac{M}{L\sin\theta} = \frac{M}{J\omega\sin\theta}}$$

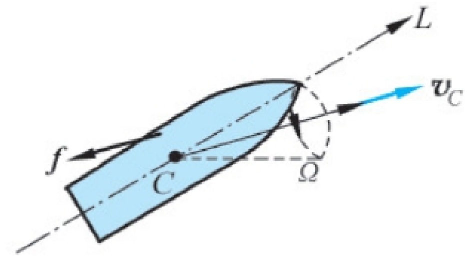
进动

旋进方向？

$$\boxed{\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}}$$

特征：不屈从于外力矩，保持对称轴的稳定。

应用：炮弹出口时的旋转



*说明：讨论有近似！

$\because \quad \vec{\omega}_{总} = \vec{\omega} + \vec{\Omega}$ 只有 $\Omega << \omega$ 才有 $\vec{L} = J\vec{\omega}$

$\vec{\Omega}$ 的影响：自转轴在旋进中出现微小的上下的周期性摆动——章动（nutation）。

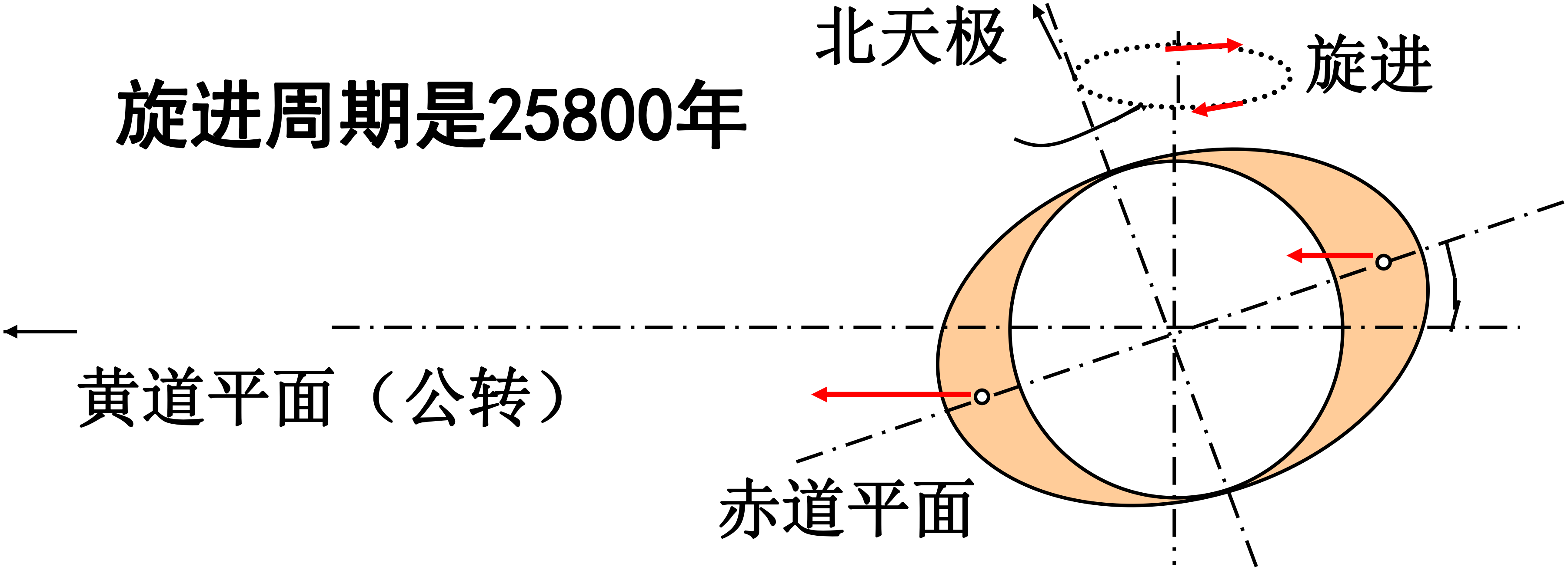
三、地球的旋进：

地球旋进的成因:

1) 地球的非球形（南北半径较小）；

2) 地球自转平面与公转平面不重合。

旋进周期是25800年



旋进结果：赤道平面在太空的方位发生改变。

相关天文现象：1）岁差：春分点和秋分点的位置沿黄道西行，导致一个回归年<一个恒星年，即岁差。

2）北天极（地理北极的指向）的变动：

四千多年前：北天极为天龙座α星，

三千多年前：北天极为小熊星座β星，

现在：小熊星座α星；　**12000年后：将是织女星。**

刚体的无滑动滚动 瞬时转轴（补充）

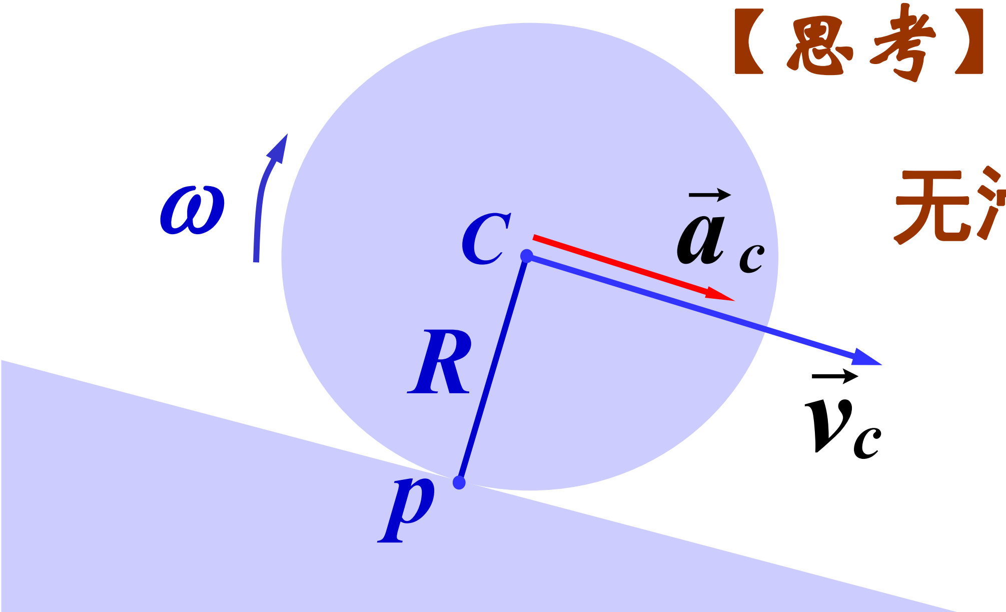
1、平面平行运动

质心做平面运动＋绕过质心垂直轴做转动

只考虑圆柱，球等轴对称刚体的滚动。

2、无滑动滚动：任意时刻接触点P瞬时静止

【思考】下一时刻P点位置？

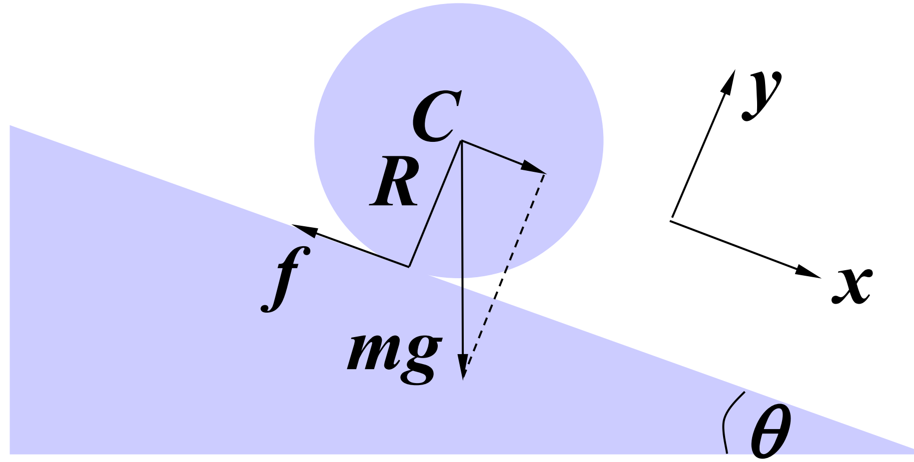


无滑动滚动条件：

$$v_C = R\omega$$

$$a_C = R\alpha$$

【例】两个质量和半径都相同，但转动惯量不同的柱体，在斜面上作无滑动滚动，哪个滚得快？



$$\begin{cases} mg\sin\theta - f = ma_C & \text{质心运动定理} \\ Rf = J_C\alpha & \text{过质心轴转动定理} \\ a_C = R\alpha & \text{纯滚动条件（运动学条件）} \end{cases}$$

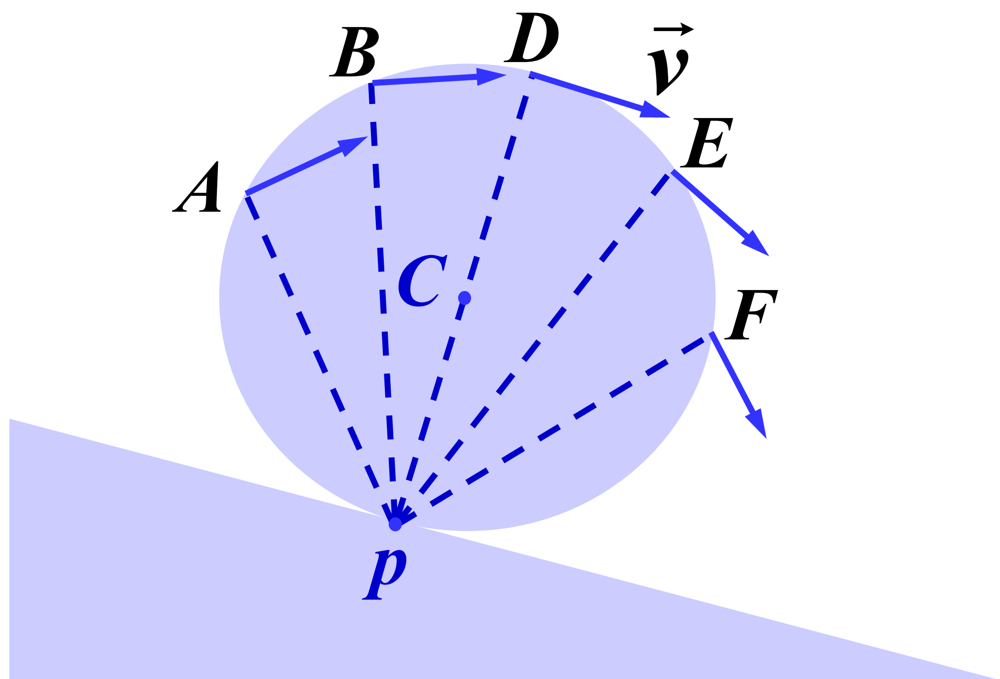
$$\alpha = \frac{mgR\sin\theta}{J_C + mR^2}$$

转动惯量小的滚得快！

3、轴对称刚体无滑动滚动中的瞬时转轴

时刻t 接触点P 瞬时静止；

在时间（$t\sim t+\Delta t$）内，以P点为原点建立平动坐标系；



时间（$t\sim t+\Delta t$）内，刚体的运动（质心平动、绕质心轴转动）可以看成：绕过P点且垂直于固定平面的转轴的无滑动滚动。

接触点P：瞬时转动中心　瞬时转轴

绕瞬时转轴的转动定理的形式？

虽然p点瞬时静止，但有加速度，所以除了力矩M_p外，还应考虑惯性力矩。

惯性力作用在质心上，方向与p点的加速度方向相反。

下面证明：对于无滑动滚动的轴对称刚体，接触点p的加速度沿过p点的半径方向，因此，关于过p点的转轴，惯性力矩等于零。

轴对称刚体，绕瞬时转轴的转动定理：

$$\boxed{M_p = J_p \alpha}$$

J_p：关于过p点转轴的转动惯量

证明：

$$\vec{a}_p = \vec{a}_C + \vec{a}'_p$$

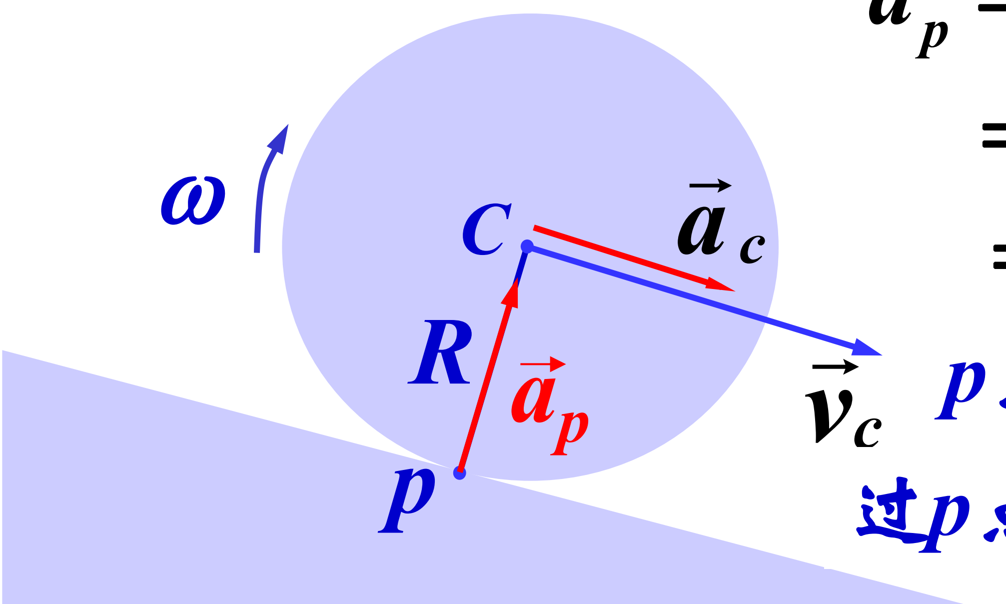
$\vec{a}_p$：p点相对惯性系的加速度

$\vec{a}'_p$：p点相对质心的加速度

按切、法向分解：$\vec{a}'_p = \vec{a}'_{pt} + \vec{a}'_{pn}$

无滑动滚动：$\vec{v}'_{pt} = -\vec{v}_C$，$\vec{a}'_{pt} = -\vec{a}_C$

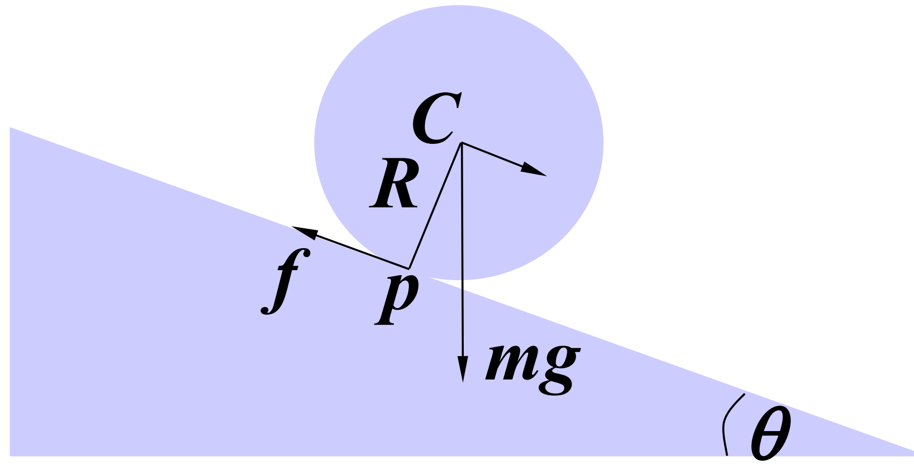
$$\vec{a}_p = \vec{a}_C + \vec{a}'_{pt} + \vec{a}'_{pn}$$
$$= \vec{a}_C - \vec{a}_C + \vec{a}'_{pn}$$
$$= \vec{a}'_{pn}$$



p点加速度沿半径方向

过p点转轴惯性力矩等于零

【例】两个质量和半径都相同，但转动惯量不同的柱体，在斜面上作无滑动滚动，哪个滚得快？



关于瞬转轴列转动定理重解：

$$mgR\sin\theta = J_p \alpha$$

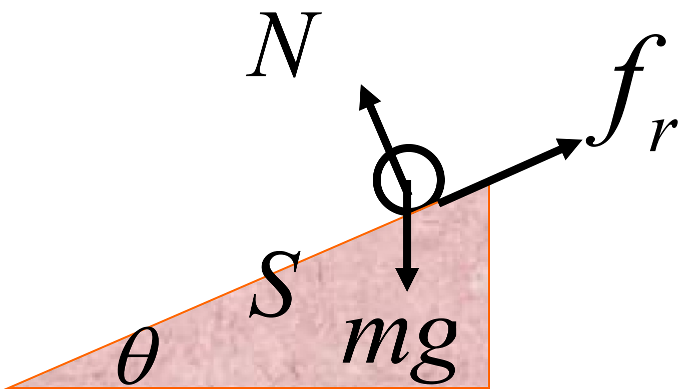
$$J_p = J_C + mR^2$$

$$\alpha = \frac{mgR\sin\theta}{J_C + mR^2}$$

简单多了！

例：均匀质量圆柱体自粗糙的斜面上端由静止开始无滑动的滚动，柱体和斜面间的静摩擦力方向如何？静摩擦力对质心作正功还是负功？静摩擦力的作用？系统机械能守恒否？

解：　受力图



静摩擦力对质心轴的力矩使圆柱滚动

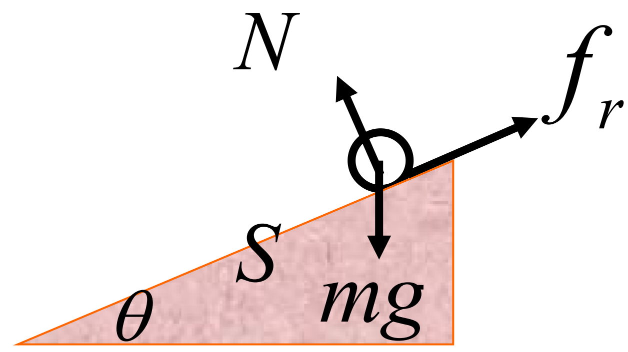
纯滚动条件：

$$v_C = R\omega$$

$$a_C = R\alpha$$

静摩擦力对平动作负功

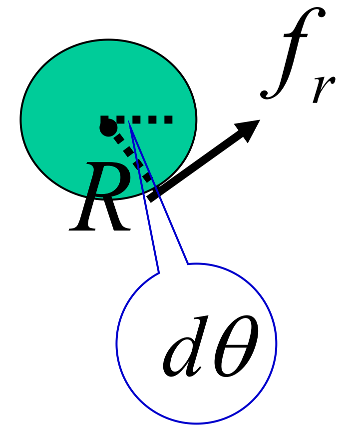
$$\boxed{w_{\text{平动}}=-f_r S}$$



静摩擦力的作用

静摩擦力对质心的轴有力矩

该力矩对圆柱作正功



$$\int_{(S)} f_r R d\theta = \frac{1}{2}J_c\omega^2 - 0$$

$$\int_{(S)} f_r R d\theta = f_r \int_{(S)} ds \xrightarrow{\text{无相对滑动}} = f_r S$$

静摩擦力把一部分平动动能转化为转动动能，静摩擦力的总功为零。

只有重力作功，∴ 系统机械能守恒

*刚体平面运动

平面运动

随质心的平动

绕过质心的轴的转动

*刚体的平衡

刚体平衡的条件是

$$\sum F_{ext} = 0$$ 平动平衡

$$\sum M = 0$$ 转动平衡