

Review

- 多元函数的无条件极值

Thm. n 元函数 f 在 x_0 的邻域中可微, x_0 为 f 的极值点,则 x_0 为 f 的驻点,即 $\text{grad}f(x_0) = 0$.

Thm. n 元函数 f 在 x_0 的邻域中二阶连续可微,
 $\text{grad}f(x_0) = 0$,

(1)若 $H_f(x_0)$ 正定,则 $f(x_0)$ 严格极小.

(2)若 $H_f(x_0)$ 负定,则 $f(x_0)$ 严格极大.

(3)若 $H_f(x_0)$ 不定,则 $f(x_0)$ 不是极值.

§ 10. 条件极值

最简单的条件极值问题: $(P_1) \begin{array}{ll} \max(\min) & f(x, y) \\ s.t. & g(x, y) = 0 \end{array}$

称 $f(x, y)$ 为目标函数, $g(x, y) = 0$ 为约束条件.

求解问题 (P_1) 的思路: 若 $g(x, y) = 0$ 确定了隐函数

$$y = y(x), y'(x) = -g'_x(x, y) / g'_y(x, y),$$

则原问题 (P_1) 转化为一元函数的无条件极值问题

$$\max(\min) \quad \varphi(x) = f(x, y(x)).$$

Question. 可行性? 隐函数的求解.

1. 一个约束的条件极值问题

$$\begin{aligned} (P_2) \quad & \max(\min) \ f(x) \\ & s.t. \quad \varphi(x) = 0 \end{aligned}$$

Thm. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为开区域, $f, \varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 均一阶连续可微, 且 $\text{grad} \varphi(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$. 若 $x_0 \in \Omega$ 是条件极值问题 (P_2) 的最值(极值)点, 则存在 $\lambda_0 \in \mathbb{R}, s.t. (x_0, \lambda_0)$ 为

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda \varphi(x)$$

的驻点. 称 $L(x, \lambda)$ 为**Lagrange函数**, 称 λ 为**Lagrange乘子**.

Proof. 已知 $\text{grad} \varphi(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$, 不妨设 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x_0) \neq 0$, 则

$\varphi(\mathbf{x}) = 0$ 在 $\mathbf{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)})$ 的邻域中确定了隐函数,
存在 $\hat{\mathbf{x}}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)})$ 的邻域 $B(\hat{\mathbf{x}}_0, \eta)$, 及函数

$$x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1}) = g(\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{x}} \in B(\hat{\mathbf{x}}_0, \eta),$$

$$\text{s.t.} \quad \varphi(\hat{\mathbf{x}}, g(\hat{\mathbf{x}})) = \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0,$$

$$\text{且} \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \bigg/ \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (*)$$

不妨设 \mathbf{x}_0 是 $f(\mathbf{x})$ 在 $\Omega_1 = \{\mathbf{x} : \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$ 上最(极)大值点,
则 $\exists \delta \in (0, \eta)$, s.t.

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) \cap \Omega_1.$$

$$g(x_1, \dots, x_{n-1}) \text{ 在 } \hat{\mathbf{x}}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n-1)}) \text{ 连续, } \exists \delta_1 \in (0, \frac{\delta}{2}), \text{ s.t.}$$

$$\left| g(\hat{\mathbf{x}}) - x_0^{(n)} \right| < \frac{\delta}{2}, \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}}_0, \delta_1) \subset \mathbb{R}^{n-1}.$$

于是 $\forall \hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}}_0, \delta_1)$, 有

$$\|(\hat{\mathbf{x}}, g(\hat{\mathbf{x}})) - \mathbf{x}_0\| \leq \|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0\| + |g(\hat{\mathbf{x}}) - x_0^{(n)}| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

即 $(\hat{\mathbf{x}}, g(\hat{\mathbf{x}})) \in \mathbf{B}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap \Omega_1$, 从而

$$f(\hat{\mathbf{x}}, g(\hat{\mathbf{x}})) \leq f(\mathbf{x}_0) = f(\hat{\mathbf{x}}_0, g(\hat{\mathbf{x}}_0)), \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \mathbf{B}(\hat{\mathbf{x}}_0, \delta_1).$$

因此, $\hat{\mathbf{x}}_0$ 是 $f(\hat{\mathbf{x}}, g(\hat{\mathbf{x}})) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, g(x_1, \dots, x_{n-1}))$ 的极大值点, 故

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\hat{\mathbf{x}}_0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

利用(*),得

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

于是 $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}, s.t.$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \lambda_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

即
$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0, \lambda_0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

而 $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(\mathbf{x}_0, \lambda_0) = \varphi(\mathbf{x}_0) = 0$. 故 $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ 为 $L(\mathbf{x}, \lambda)$ 的驻点. \square

例: 求 $f = xy$ 在圆周 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 上的最大(小)值.

解: $\max(\min) f(x, y) = xy$
 $s.t. \quad g(x, y) = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0$

构造Lagrange函数

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda [(x-1)^2 + y^2 - 1]$$

求解

$$\begin{cases} L'_x = y - 2\lambda(x-1) = 0 \\ L'_y = x - 2\lambda y = 0 \\ L'_\lambda = (x-1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

得驻点 (不需求出 λ 的值) $(x_1, y_1) = (0, 0)$,

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (x_3, y_3) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

一方面,连续函数 $f(x, y)$ 在有界闭集上能够达到最大(小)值. 另一方面, 达到最大(小)值的点一定对应于 $L(x, y, \lambda)$ 的驻点. 所以最大(小)值一定在上述三点中的某两点达到. 而

$$f(0,0) = 0, f\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}, f\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

故 f 在 $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 取得最大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 在 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 取得

最小值 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$. \square

Question. Lagrange乘子法的几何意义?

$$\begin{aligned} & \max(\min) f(x, y, z) \\ & s.t. \quad g(x, y, z) = 0 \end{aligned} \quad (P_3)$$

其中 $g'_x{}^2 + g'_y{}^2 + g'_z{}^2 > 0$. (正则性条件)

结论: 构造辅助函数

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z),$$

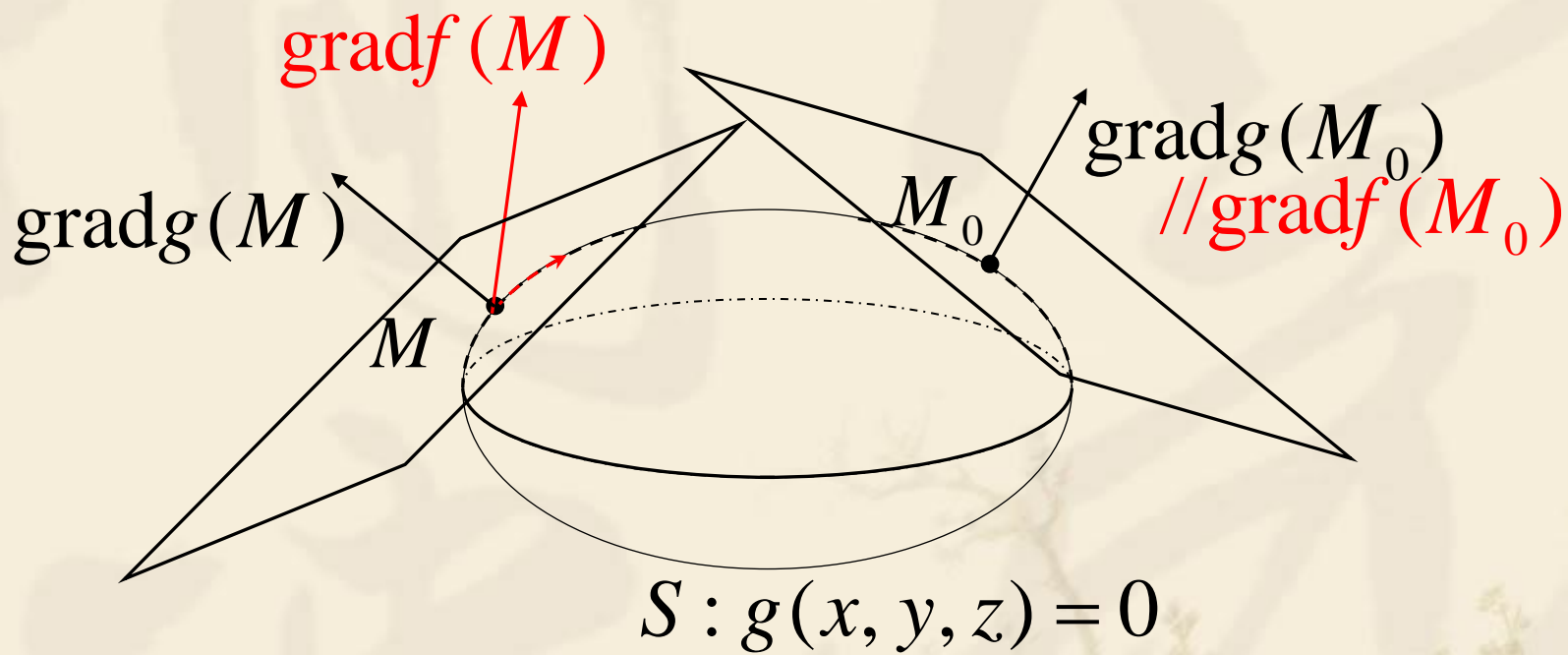
若 (P_3) 在 (x_0, y_0, z_0) 取得极值, 则 $\exists \lambda_0, s.t. (x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ 是 $L(x, y, z, \lambda)$ 的驻点. 因此在点 $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ 处,

$$\begin{cases} L'_x = f'_x + \lambda_0 g'_x = 0 \\ L'_y = f'_y + \lambda_0 g'_y = 0 \\ L'_z = f'_z + \lambda_0 g'_z = 0 \\ L'_\lambda = g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{grad} f(M_0) \\ = -\lambda_0 \text{grad} g(M_0). \end{aligned}$$

Remark. (几何解释) 求解 (P_3) 就是求函数 f 在曲面 $S: g(x, y, z) = 0$ 上的最大(小)值. (P_3) 在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 取得极值, 则 $\exists \lambda_0, s.t.$ $\text{grad} f(M_0) = -\lambda_0 \text{grad} g(M_0)$,

即 M_0 处 f 的最速上升(下降)方向 $\pm \text{grad} f(M_0)$ 与曲面 S 在 M_0 的法向量平行. 如图



2. 多个约束的条件极值问题

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & f(x, y, z) \\ \text{s.t.} \quad & g(x, y, z) = 0 \\ & h(x, y, z) = 0 \end{aligned} \quad (\text{P}_4)$$

结论: 若 $\text{rank} \frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y, z)} = 2$, 构造 *Lagrange* 函数

$$L = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z).$$

若 (P_4) 在 (x_0, y_0, z_0) 取得极值, 则 $\exists \lambda_0, \mu_0, \text{s.t.}$

$(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ 为 $L(x, y, z, \lambda, \mu)$ 的驻点. 即

$$(1) \begin{cases} L'_x = f'_x + \lambda_0 g'_x + \mu_0 h'_x = 0 \\ L'_y = f'_y + \lambda_0 g'_y + \mu_0 h'_y = 0 \\ L'_z = f'_z + \lambda_0 g'_z + \mu_0 h'_z = 0 \\ L'_\lambda = g = 0 \\ L'_\mu = h = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & -\text{grad}f(M_0) \\ &= \lambda_0 \text{grad}g(M_0) \\ &+ \mu_0 \text{grad}h(M_0) \end{aligned}$$

因此,求解条件极值问题(P_4),可以先求函数 L 的驻点 $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ (对具体问题不需出 λ, μ 的值),再判断(P_4)是否在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 取得极值.

Remark:(几何解释)条件极值问题(P_3)就是求函数 f 在曲线

$$L: \begin{cases} g(x, y, z) = 0 \\ h(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

上的最大(小)值. 设 f 在 L 上一点 M_0 取得极值, 则由(1),

$$-\text{grad}f(M_0) = \lambda_0 \text{grad}g(M_0) + \mu_0 \text{grad}h(M_0),$$

而 L 在点 M_0 的切向量 T 与

$$\text{grad}g(M_0) \times \text{grad}h(M_0)$$

平行. 故 $f(x, y, z)$ 在曲线 L 上一点 M_0 处取得极值时, f 的最速上升方向 $\text{grad}f(M_0)$ 与 L 在点 M_0 的切向量 T 垂直.

4. 例

例1: 求曲面 $S_1: z = x^2 + y^2$ 到平面 $\Pi: x + y - 2z = 2$ 的最短距离.

解: 平面 Π 外一点 (x, y, z) 到平面的距离为

$$\frac{1}{\sqrt{6}}|x + y - 2z - 2|.$$

对条件极值问题

$$\begin{aligned} \min \quad & (x + y - 2z - 2)^2 \\ \text{s.t.} \quad & x^2 + y^2 - z = 0 \end{aligned}$$

构造辅助函数

$$L(x, y, z, \lambda) = (x + y - 2z - 2)^2 + \lambda(x^2 + y^2 - z).$$

由
$$\begin{cases} L'_x = 2(x + y - 2z - 2) + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 2(x + y - 2z - 2) + 2\lambda y = 0 \\ L'_z = -4(x + y - 2z - 2) - \lambda \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

得 $(x, y, z) = (1/4, 1/4, 1/8).$

根据题意距离的最小值一定存在,而驻点唯一,故必在 $(1/4, 1/4, 1/8)$ 处取得最小值:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \left| \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{8} - 2 \right| = \frac{7}{4\sqrt{6}}. \quad \square$$

例2. 设 $\alpha, \beta > 0, 1/\alpha + 1/\beta = 1$. 求证, $\forall x, y > 0$,

$$xy \leq \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} + \frac{1}{\beta} y^{\beta}.$$

分析: 欲证 $f(x, y) \geq g(x, y)$. 只要证明, \forall 常数 C , 条件

极值问题

$$\min f(x, y)$$

$$s.t \quad g(x, y) = C$$

的最小值不小于 C .

解: 对条件极值问题

$$\min f(x, y) = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} + \frac{1}{\beta} y^{\beta}$$

$$s.t \quad xy = C(> 0),$$

Question:

约束条件换成 $f = C$?

$$\text{令 } L(x, y, \lambda) = \frac{1}{\alpha} x^{\alpha} + \frac{1}{\beta} y^{\beta} + \lambda(xy - C).$$

$$\text{由 } \begin{cases} L'_x = x^{\alpha-1} + \lambda y = 0 \\ L'_y = y^{\beta-1} + \lambda x = 0 \\ L'_\lambda = xy - C = 0 \end{cases} \quad \text{得驻点 } \begin{cases} x_0 = C^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}, \\ y_0 = C^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}. \end{cases}$$

$$f(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) C^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}} = C^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}} = C.$$

又当 $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ 时, $f(x, y) \rightarrow +\infty$, 因此 f 在曲线 $L: xy = C (x, y > 0)$ 上有最小值, 且最小值为 C .

由 C 的任意性, $\frac{1}{\alpha} x^{\alpha} + \frac{1}{\beta} y^{\beta} \geq xy$. \square

例3. $A = (a_{ij})$ 为 $n \times n$ 对称矩阵, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 求 n 元函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = x^T A x$$

在单位球面 $S = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$ 上的最大值和最小值.

解: 构造辅助函数

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j - \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 \right).$$

$L(x, y, z, \lambda)$ 的驻点满足方程组:

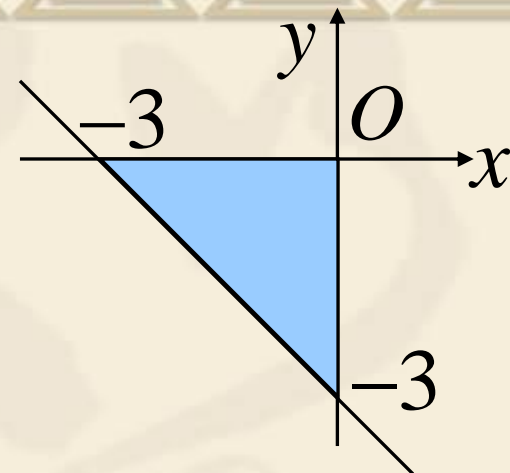
$$\begin{cases} L'_{x_i} = 2[a_{i1}x_1 + \dots + (a_{ii} - \lambda)x_i + \dots + a_{in}x_n] = 0, \\ L'_\lambda = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

即 $\begin{cases} \mathbf{A}x - \lambda x = 0 \\ x^T x = 1. \end{cases}$ 即 λ 为 \mathbf{A} 的特征值, x 为与之对应的单位长度的特征向量.

此时 $f(x) = x^T \mathbf{A}x = \lambda x^T x = \lambda.$

于是, f 在单位球面 S 上的最大(小)值分别是矩阵 \mathbf{A} 的最大(小)特征值. \square

例: 求 $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ 在闭区域 $\{(x, y) | x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\}$ 中的最大值与最小值.



分析: 最值能在内部达到, 也可能在边界上达到.

解: (1) 研究函数在区域内部的情况.

$$\text{由} \begin{cases} z'_x = 2x - y + 1 = 0 \\ z'_y = 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \text{得驻点 } x = y = -1,$$

此时 $z(-1, -1) = -1$.

(2) 研究函数在边界上的情况.

•当 $x = 0$ 时, $z = y^2 + y (-3 \leq y \leq 0)$, 此时

$$z_{\max}|_{x=0} = z(0, -3) = 6, z_{\min}|_{x=0} = z(0, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}.$$

•当 $y = 0$ 时, $z = x^2 + x (-3 \leq x \leq 0)$,

$$z_{\max}|_{y=0} = z(-3, 0) = 6, z_{\min}|_{y=0} = z(-\frac{1}{2}, 0) = -\frac{1}{4}.$$

•当 $x + y = -3$ 时, $z = 3(x^2 + 3x + 2) (-3 \leq x \leq 0)$,

$$z_{\max}|_{x+y=-3} = z(0, -3) = z(-3, 0) = 6.$$

$$z_{\min}|_{x+y=-3} = z(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}.$$

综上所述, 在点 $(0, -3)$ 和 $(-3, 0)$ 处函数取最大值6,
在点 $(-1, -1)$ 处函数取最小值-1. \square

例. D 为有界开区域, $f \in C^2(D)$, $f \in C(\bar{D})$, 且

$$\begin{cases} f''_{xx} + f''_{yy} = f & \text{in } D \\ f > 0 & \text{on } \partial D \end{cases}.$$

求证: (1) $f \geq 0$ in D . (2) $f > 0$ in D .

Pf. (1)反证法. 若结论不成立, 则 f 在 \bar{D} 上的最小值必在 D 中达到. 于是 $\exists (x_0, y_0) \in D, s.t.$

$$0 > f(x_0, y_0) = \min_{(x,y) \in \bar{D}} f(x, y).$$

x_0 是 $f(x, y_0)$ 在 $\{x \in \mathbb{R} : (x, y_0) \in D\}$ 的极小值点, 因此 $f''_{xx}(x_0, y_0) \geq 0$. 同理 $f''_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$. 由已知条件可得

$$f''_{xx}(x_0, y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0) = f(x_0, y_0) < 0. \text{ 矛盾.}$$

$$(2) \text{ 令 } g(x, y) = f(x, y) - \frac{\alpha}{2\beta} e^x, \text{ 其中}$$

$$\alpha = \min_{(x,y) \in \partial D} f(x, y) > 0, \quad \beta = \max_{(x,y) \in \partial D} e^x > 0.$$

$$\text{于是,} \quad \begin{cases} g''_{xx} + g''_{yy} = g & \text{in } D \\ g > 0 & \text{on } \partial D \end{cases}.$$

$$\text{由(1)中结论知:} \quad g(x, y) \geq 0, \forall (x, y) \in D.$$

$$f(x, y) = g(x, y) + \frac{\alpha}{2\beta} e^x > 0, \quad \forall (x, y) \in D. \square$$



作业：习题1.9

No. 7 (3), 8, 9 (3), 10 (1)

