牛顿定律是瞬时的规律。

在有些问题中，

往往只关心过程中力的效果

——**力对时间和空间的积累效应**

力的时间积累作用

对平动——**动量定理**

对转动——**角动量定理**

**能量、动量和角动量是最基本的物理量。**

**它们的守恒定律是自然界中的基本规律，**

**适用范围远远超出了牛顿力学。**

# 第三章　动量与角动量

# （Momentum and Angular Momentum）

# §3.1　冲量与动量定理

## 一. 力的冲量

力的时间积累称为冲量（**impulse**）：

$$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t$$

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t')\mathrm{d}t'$$

是过程量

## 二. 质点运动的动量定理

牛顿第二定律→质点的动量定理

$$\mathrm{d}\vec{I} = \vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$$

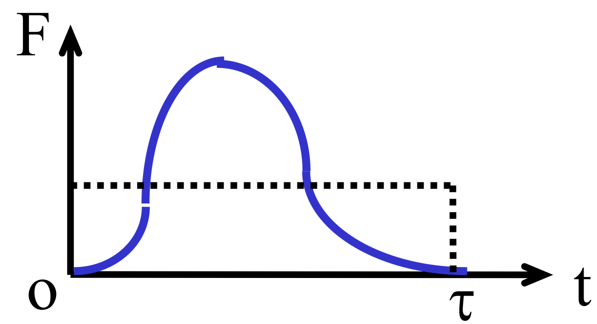
动量定理（微分形式）

$$\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}(t')\mathrm{d}t' = \vec{p} - \vec{p}_0$$

动量定理（积分形式）

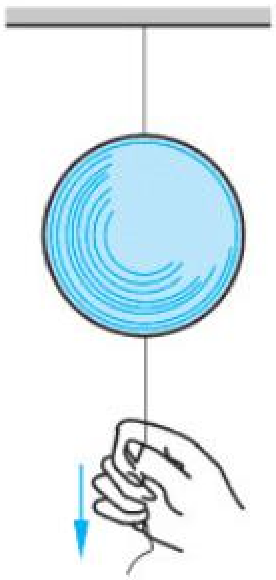
**动量定理常用于碰撞过程**

**碰撞过程的平均冲力：**

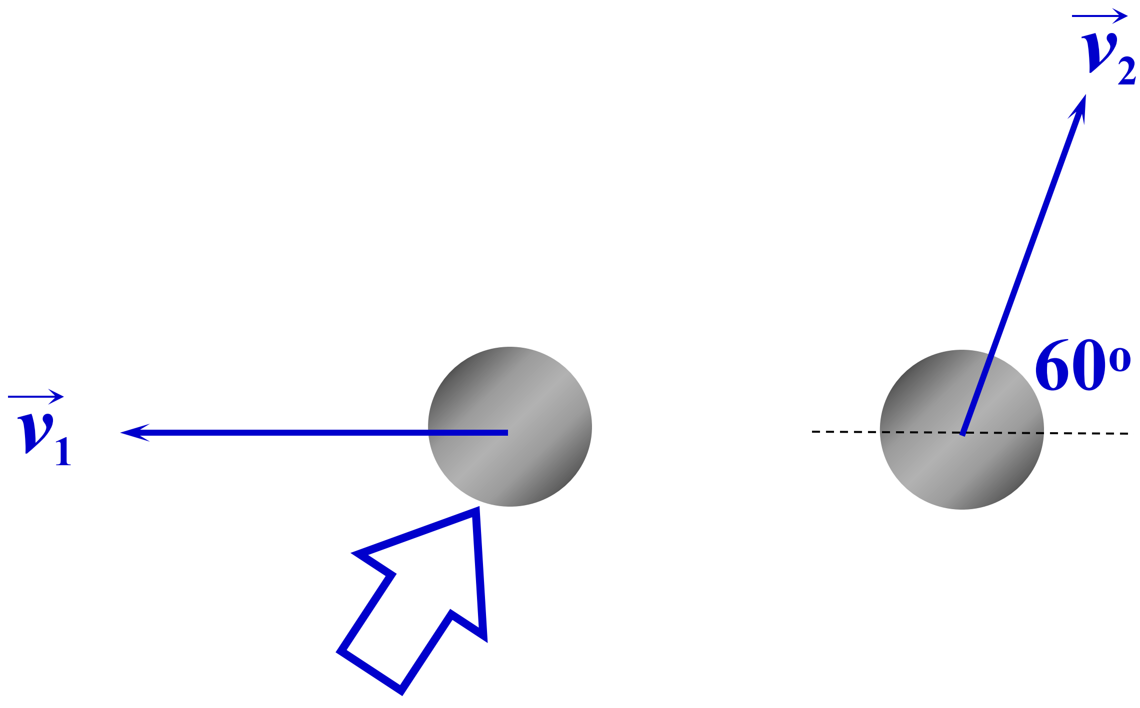



$$\overline{\vec{F}} = \frac{\vec{I}}{t - t_0} = \frac{\int_{t_0}^{t} \vec{F}\mathrm{d}t}{t - t_0} = \frac{\vec{p} - \vec{p}_0}{t - t_0}$$

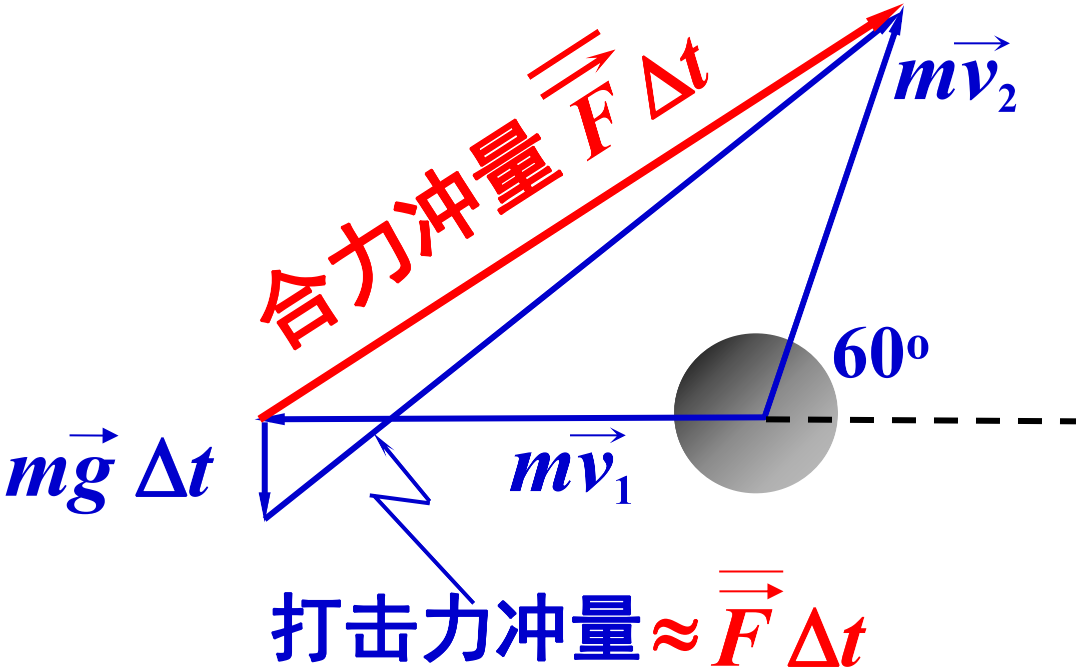
【例】如图所示，一重球的上下两面系同样的两根线，今用其中一根线将球吊起，而用手向下拉另一根线，如果向下猛一拖，则下面的线断而球未动。如果用力慢慢拉线，则上面的线断开，为什么?



**【例】** 质量$m$=140g的垒球以速率 $v$ = 40m/s 沿水平方向飞向击球手，被击后以相同速率沿仰角 60°飞出。求棒对垒球的平均打击力。设棒和球的接触时间为 $\Delta t$ =1.2 ms。



重力、阻力的冲量可以忽略。




$$\overline{\vec{F}}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

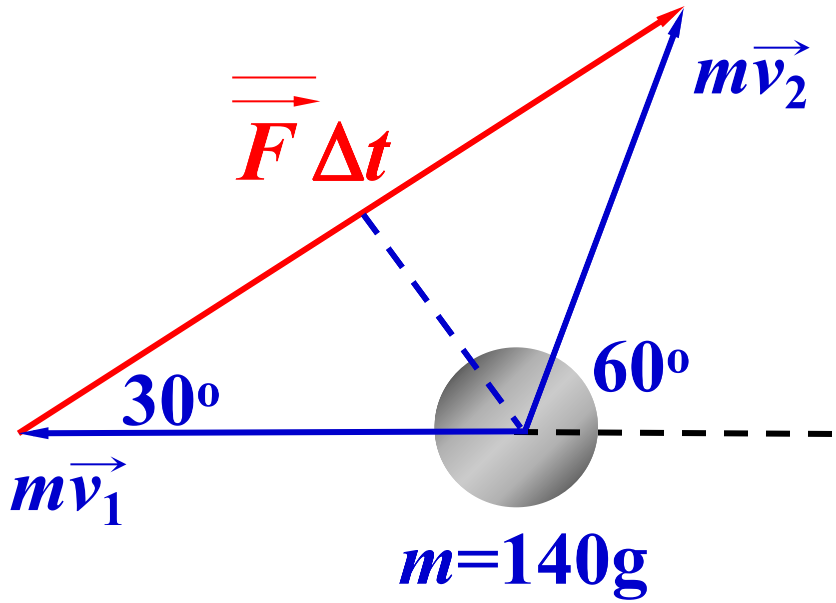
$$\overline{\vec{F}}\Delta t = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

$$v_2 = v_1 = v$$

$$\overline{F} = \frac{2mv\cos 30^\circ}{\Delta t}$$

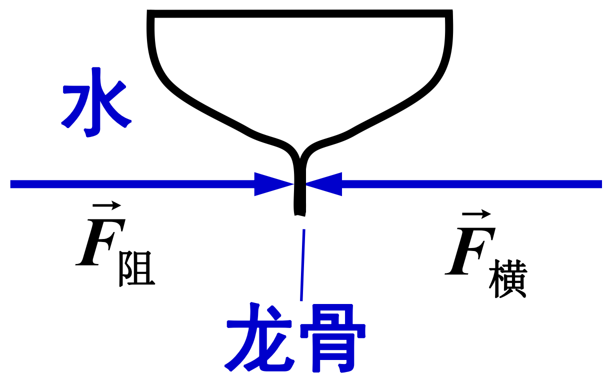
$$= \frac{2\times 0.14\times 40\times\cos 30^\circ}{1.2\times 10^{-3}}$$

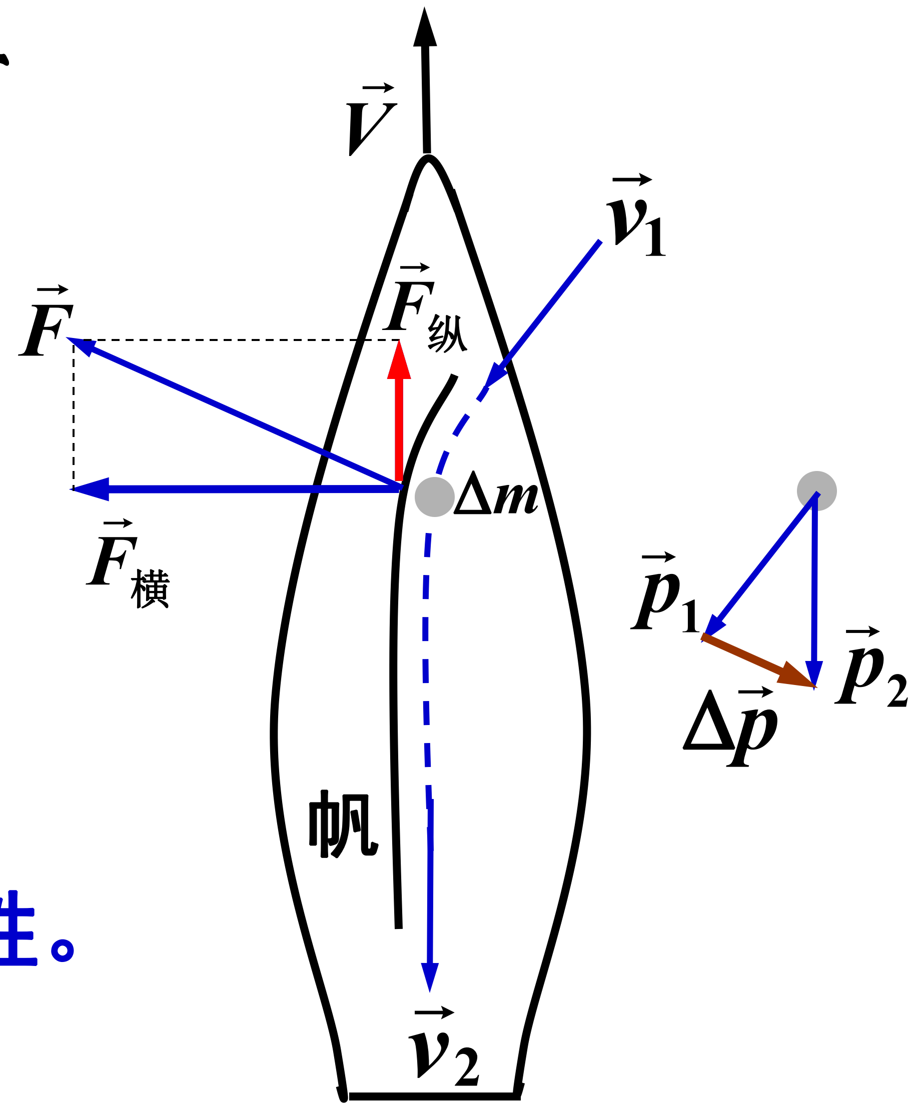
$$= 8.1\times 10^{3}(\mathrm{N})$$




**平均打击力约为垒球自重的5900倍！在碰撞过程中，物体之间的碰撞冲力是很大的。**

**【演示实验】逆风行舟**




显示动量定理的矢量性。

**【思考】在逆风行舟实验中，能否顶风前进？**

# § 3.2 动量守恒定律

## 一、质点系

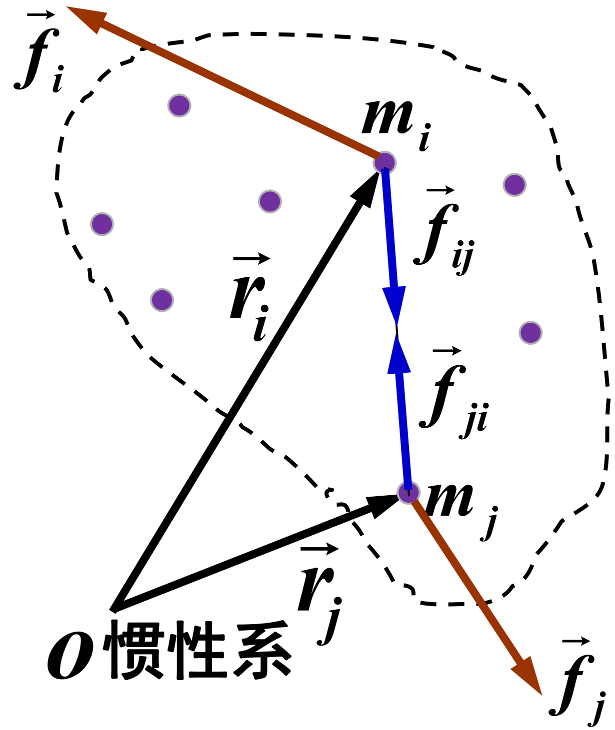
由$N$个质点构成

### 1、内力和外力

内力：$\vec{f}_{ij}=-\vec{f}_{ji}$

外力：$\vec{f}_i\ ,\ \vec{f}_j$

$i,j=1,2,\cdots,N$




### 2、过程中包括的质点不变

【思考】为什么要求过程中包括的质点不变？

## 二、质点系的动量定理

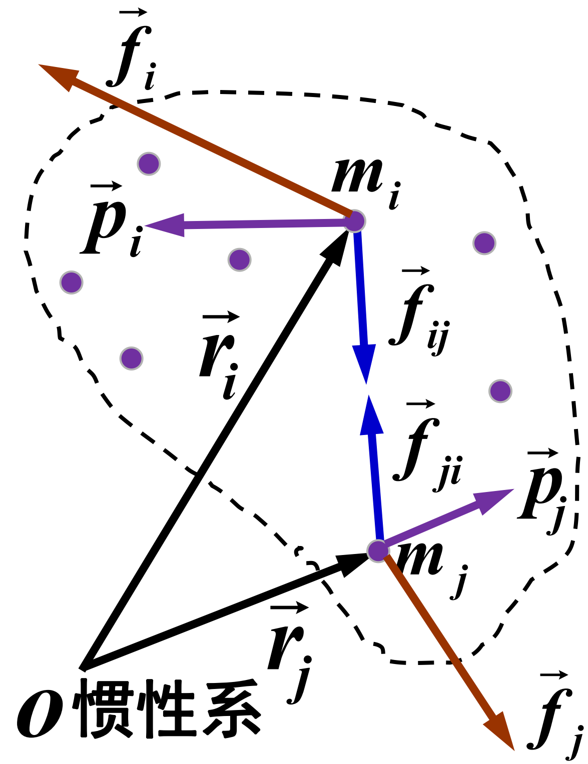
对质点 $i$：

$$(\vec{f}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}) \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_i$$

对质点系：

$$\sum_i (\vec{f}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}) \mathrm{d}t = \sum_i \mathrm{d}\vec{p}_i$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} = 0$$



质点系总动量的时间变化率等于所受合外力

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{F}=\sum_i \vec{f}_i$$ ：合外力

$$\vec{P}=\sum_i \vec{p}_i$$ ：总动量

内力可改变各质点的动量，但合内力为零，对总动量无影响。

应用质点系动量定理不必考虑内力。

## 三. 动量守恒定律

$$若\ \vec{F}_{外} = 0,\ 则\ \vec{P} = 常量$$

**分量守恒：** 若 $(t_1, t_2)$ 时间内总有 $F_{外} \neq 0$，但在某方向 $l$ 上的分量 $F_{l外} = 0$，则此期间 $P_l = 常量$

**孤立系统动量守恒：** 孤立系统不受外力作用，$F_{外} = 0$ 动量守恒——自然界最普遍的规律之一

## 几点说明

1. 动量定理及动量守恒定律只适用于惯性系

2. 动量若在某一惯性系中守恒，则在其它任何惯性系中均守恒

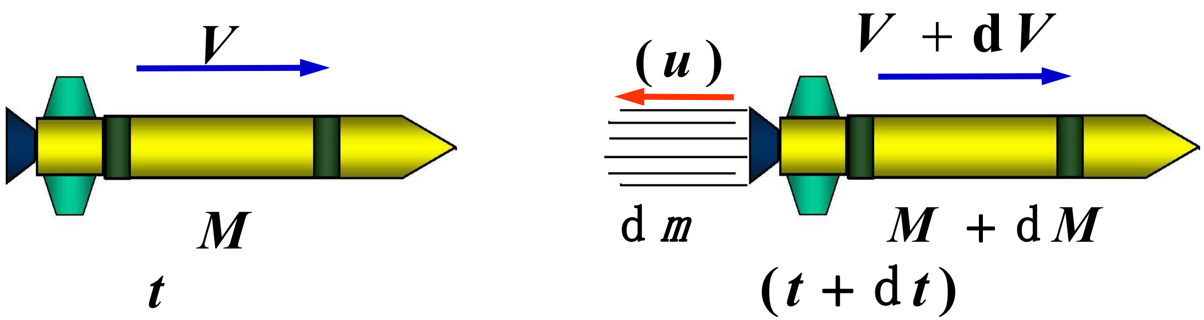
3. 当外力<<内力，且作用时间极短时，可略去外力的冲量，认为动量守恒。

4. 动量守恒定律是比牛顿定律更普遍、更基本的定律

# §3.3 火箭飞行原理-- 变质量问题

特征：火箭体在飞行过程中, 由于不断地向外喷气, 所以火箭体的质量不断地变化。

系统：火箭箭体和 $\mathrm{d}t$ 间隔内喷出的气体




$t$ 火箭体质量为 $M$ 速度 $V$

$t+\mathrm{d}t$ $\qquad M+\mathrm{d}M \qquad V+\mathrm{d}V$

喷出的气体 $\mathrm{d}m \qquad (V+\mathrm{d}V)-u$

$$\boxed{(M+\mathrm{d}M)(V+\mathrm{d}V)+\mathrm{d}m(V+\mathrm{d}V-u)-MV=0}$$

注意 $dm=-dM$

$$MdV+udM=0$$

$$\int_{V_0}^{V}\mathrm{d}V=\int_{M_0}^{M}-u\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

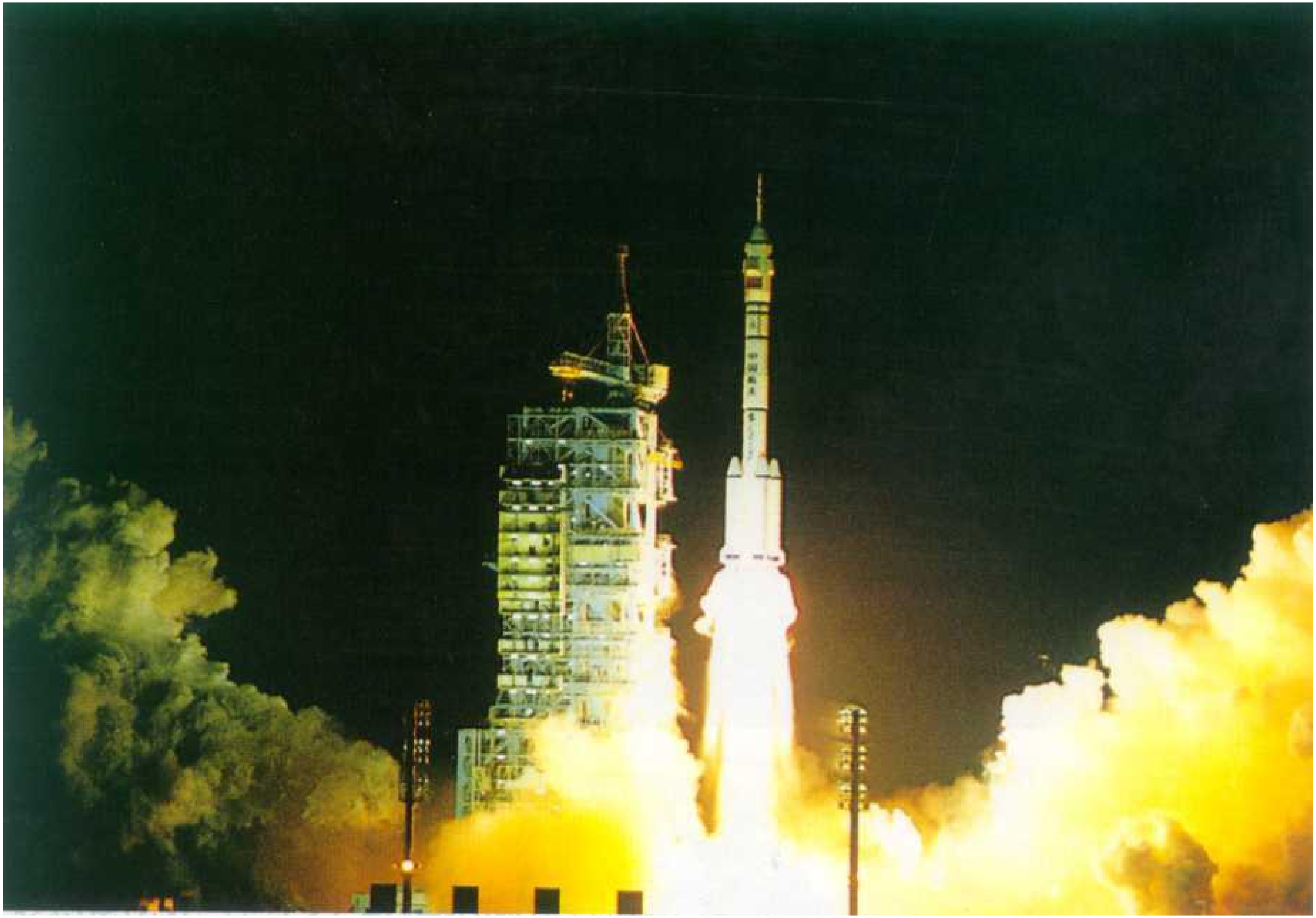
$$\boxed{V-V_0=u\ln\frac{M_0}{M}}$$

提高火箭速度的途径 $\begin{cases}\text{提高 } u \\ \text{提高 } \dfrac{M_0}{M}\end{cases}$

优质燃料　多级火箭

在引力场中起飞

$$\boxed{\Delta \mathrm{V}=u\ln\frac{M_0}{M}-gt}$$



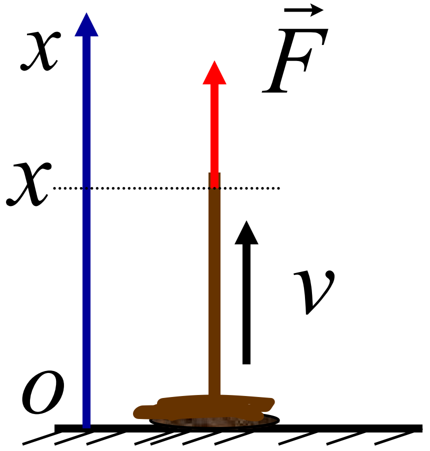
“神州”号飞船升空

柔绳问题

系统：已提升的质量（主体）$m$ 将提升的质量 $dm$

$\boldsymbol{t}$ $mv$ $0$

$\boldsymbol{t} + \mathbf{d}\boldsymbol{t}$ $m(v + dv)$ $\mathrm{d}m(v + dv)$

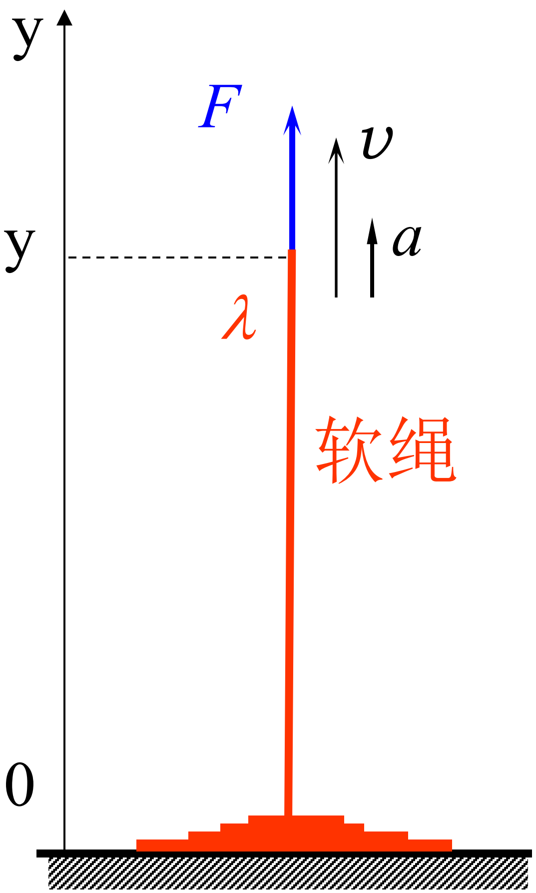


例题： 已知： 如图示， 软绳的线密度为$\lambda$。（单位长度的质量）

（1） $v = \text{const.}$

（2） $a = \text{const.}$

求：$F = ?$




【解】

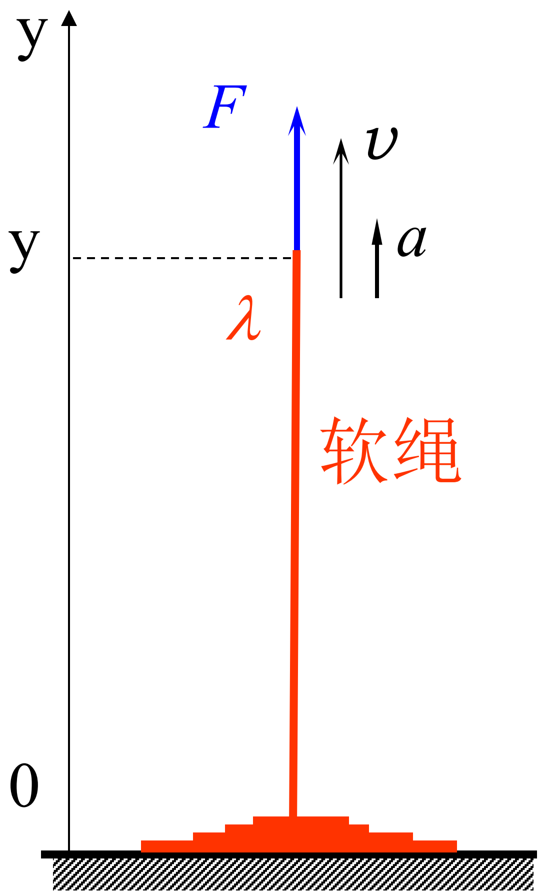
以被拉起的绳为变质量系统。

$$F - \lambda y g = \frac{\mathrm{d}(\lambda y v)}{\mathrm{d}t}$$

$$= \lambda v \frac{dy}{dt} + \lambda y \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \lambda v^2 + \lambda y a$$

$$F - \lambda y g = \lambda v^2 + \lambda y a$$

$$F = \lambda y g + \lambda v^2 + \lambda y a$$




回答第一问：

（1） $v$ =const. $\longrightarrow$ $a = 0$

$$\therefore F = \lambda y g + \lambda v^2$$

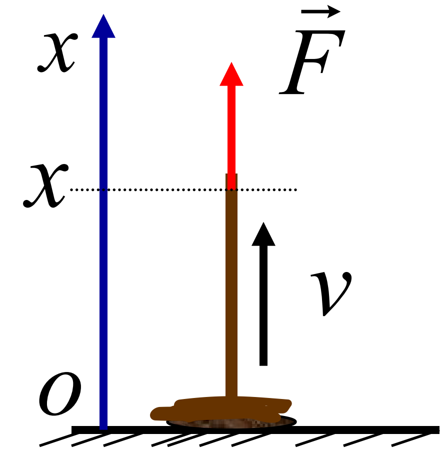
回答第二问：

（2） $a$ =const. $\longrightarrow$ $v^2 = 2ay$

$$\therefore F = \lambda y g + 3\lambda y a$$

系统:已提升的质量 $m = \lambda y$ 将提升的质量 $dm = \lambda dy$

| | | |
|---|---|---|
| $t$ | $\lambda y v$ | $\boxed{0}$ |
| $t + \mathrm{d}t$ | $\lambda y(v+dv)$ | $\lambda dy(v+dv)$ |




$$(F - \lambda y g)dt = \lambda(y+dy)(v+dv) - \lambda y v$$

$$(F - \lambda y g)dt = \lambda v dy + \lambda y dv + \lambda dy dv$$

略

$$F = \lambda y g + \lambda v^2 + \lambda y a$$

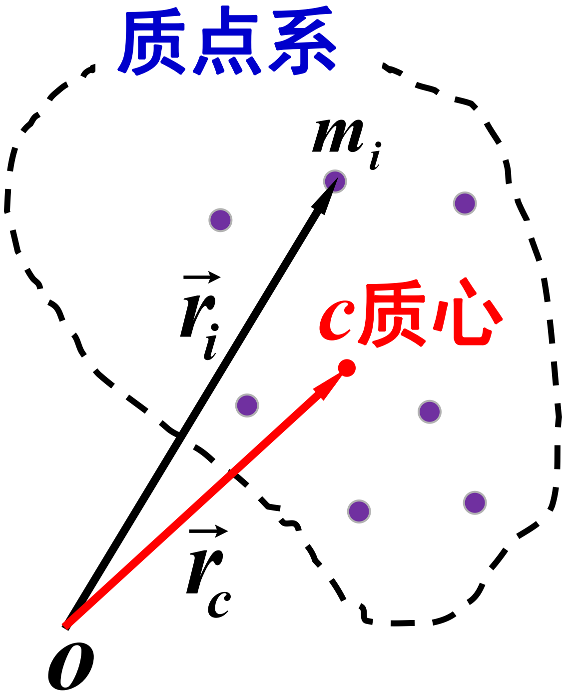
# § 3.4 质心

## 概念的提出：研究质点系总体的运动

解决质点系问题方法：动量定理；　质心方法

## 1、质心的位矢

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}$$




【思考】写出分量形式？

对连续分布的物质，分成$N$个小质元计算

$$\vec{r}_c = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \Delta m_i \Big/ m = \int \vec{r} dm \Big/ m$$

**2、质心的速度** $\vec{v}_c = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_c}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i \Big/ m$

**3、质心的动量** $\vec{P}_c = m\vec{v}_c = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \vec{P}$

在任何参考系中，质心的动量都等于质点系的总动量。

**4、质心的加速度** $\vec{a}_c = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_c}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i \Big/ m$

说明:

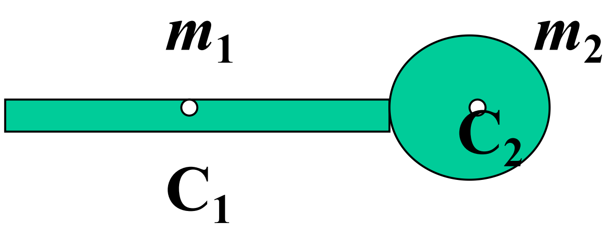
1. 不太大物体，质心与重心重合

2. 均匀分布的物体，质心在几何中心

3. 质心是位置的加权平均值，质心处不一定有质量

4. 具有可加性，计算时可分解

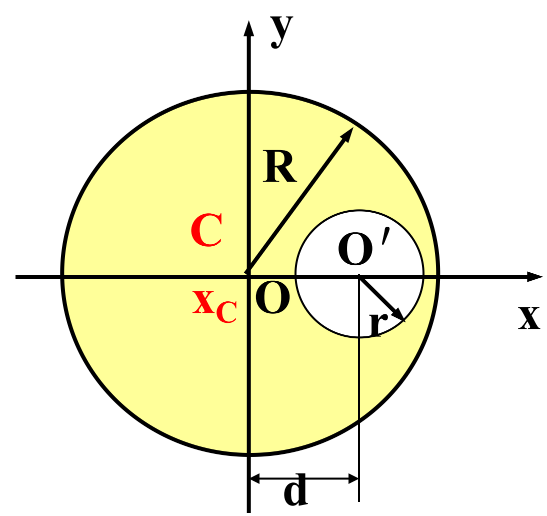
如图，由$C_1,C_2 \rightarrow C$



【例】如图示，从半径为R的均质圆盘上挖掉一块半径为r的小圆盘，两圆盘中心O和O′相距为d，且（d + r）< R

求：挖掉小圆盘后，该系统的质心坐标

解: 令σ为圆盘的质量面密度




$$x\text{、} = \frac{-d\cdot\sigma\cdot\pi r^2 + 0}{\sigma\cdot\pi R^2 - \sigma\cdot\pi r^2}$$

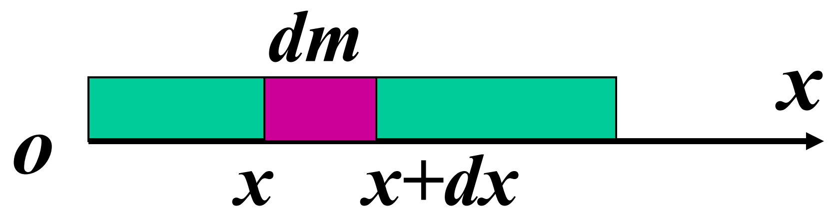
$$= -\frac{d}{(R/r)^2 - 1}$$

$$y_C = 0$$

【例】：长度为$l$的细杆如图，质量线密度为

$$\lambda = cx$$

求：质心坐标




解：

$$x_{§} = \frac{\int x\,dm}{M} = \frac{\int_0^{é} x\lambda\,dx}{\int_0^{é} \lambda\,dx}$$

$$= \frac{\int_0^{é} x^{P}\,dx}{\int_0^{é} x^{0}\,dx} = \frac{3\,l}{4}$$

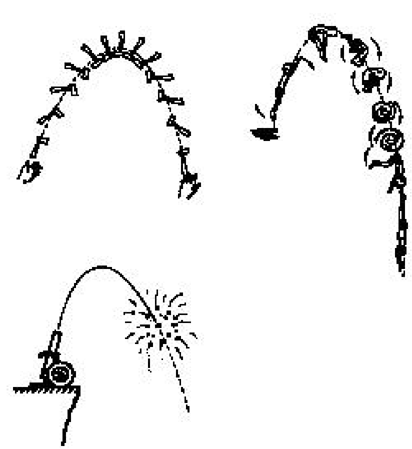
# § 3.5 质心运动定理

## 一. 质心运动定理

由 $$\vec{F}_{外} = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{\mathrm{v}}_C) = m\frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}_C}{\mathrm{d}t}$$

有 $$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}_c}$$ —质心运动定理

**质心的运动和把全部外力，全部质量集中于该处时的质点的运动相同。**



## 二、动量守恒与质心的运动

若合外力为零 → 质点系动量守恒

→ $\vec{a}_c = 0 \rightarrow \vec{v}_c = \text{const}.$

同理，若 $\sum_i F_{ix} = 0$

⟹ 分动量守恒；$v_{cx} = const.$

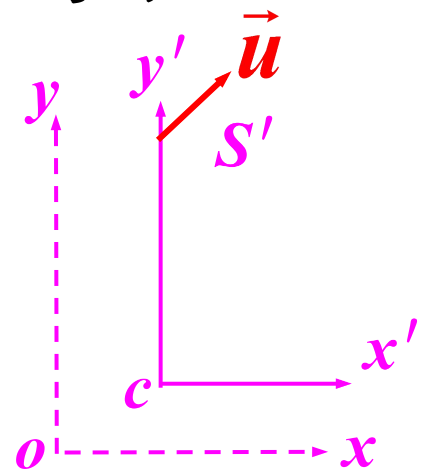
**质点系动量守恒和质心匀速运动等价**

## 三. 质心（参考）系

**质心系：** 固结在质心上的平动参考系

(1) $\sum m_i r'_i = 0$

(2) $\sum m_i \vec{v}'_i = (\sum m_i)\vec{v}'_C = 0$



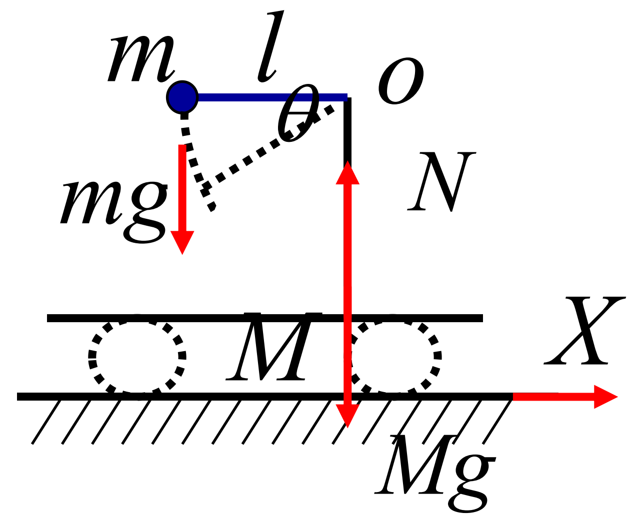

质心系是“零动量系”

**质心系不一定是惯性系，只有合外力为零时质心系才是惯性系。**

【例】已知：$M, m, l$

地面光滑,初：单摆水平，静止

求：下摆至 $\theta$ 时，车的位移




解：质心运动定理

$$\because \quad F_X = 0$$

$$v_{ct} = v_{c0} = 0$$

即，质心位置不变

$$X_c = \frac{mX_m + MX_M}{M+m}$$

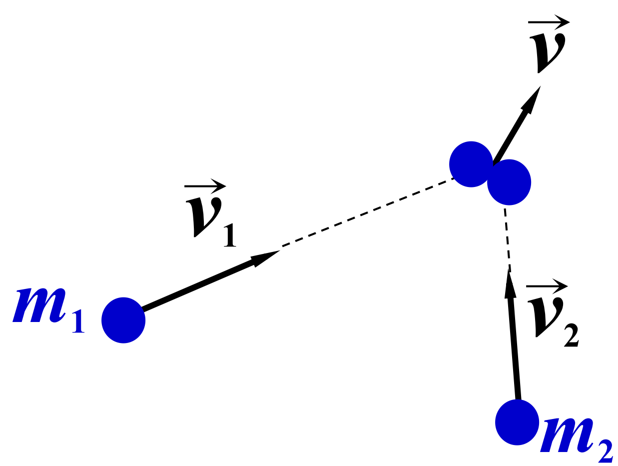
$$m\Delta X_m + M\Delta X_M = 0 \quad (1)$$

$$\Delta X_m = \Delta X'_{mM} + \Delta X_M \quad (2)$$

得解

$$\Delta X_M = -\frac{m}{M+m} l(1-\cos\theta)$$

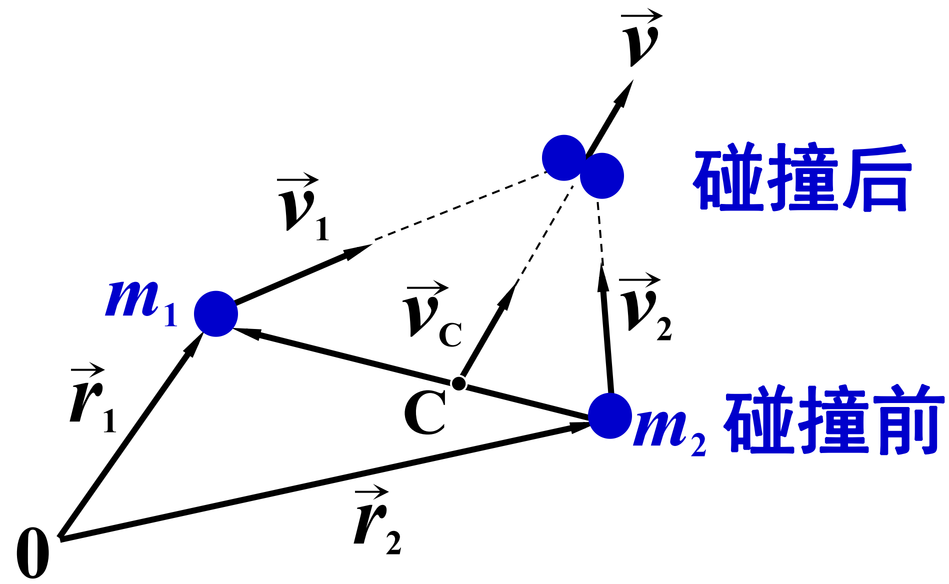
【例】在光滑平面上，$m_1$ 和 $m_2$ 以 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$ 碰撞后合为一体（完全非弹性碰撞）。求碰撞后二者的共同速度$\vec{v}$。在质心参考系观察，碰撞前后二者的运动如何？



## 1、在惯性系中观察

碰撞前质心速度

$$\vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$



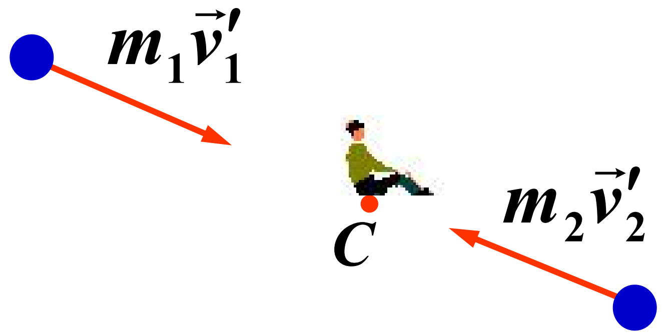

无外力，质心速度不变。碰撞后二者共同速度为质心速度

$$\vec{v} = \vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

## 2、在质心系中观察

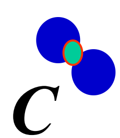
**质心系是零动量系。**

**碰前二者速度共线反向：**




$$m_1\vec{v}_1' = -m_2\vec{v}_2'$$

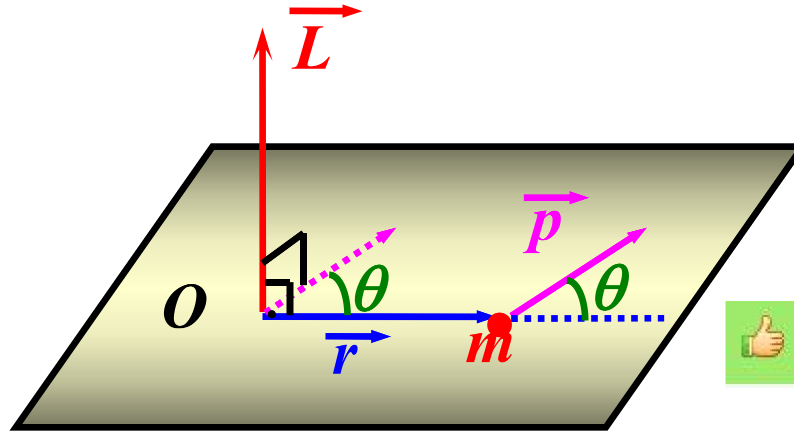
**碰后二者相对静止：**



# §3.6 质点的角动量和角动量定理

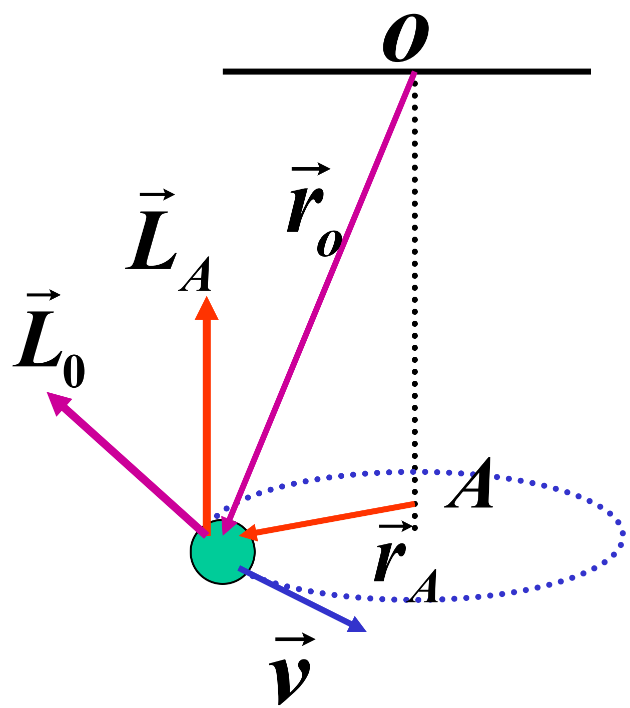
## 一.质点的角动量

定义 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{P}$




称质点对定点的角动量

$$L = |\vec{r}||\vec{P}|\sin\theta$$




方向：垂直 $\vec{r}$, $\vec{P}$ 组成的平面

SI 单位 $kgm^2/s$或$J.s$

必须指明定点！

## 二、 质点的角动量定理，力矩

**质点的角动量定理：**质点所受的合外力矩，等于质点角动量对时间的变化率

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

合外力矩：$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ ，角动量：$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$

$\vec{M}$ 和$\vec{L}$都是相对惯性系中同一定点定义的。

积分形式：

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1}$$

$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t$ —冲量矩，力矩的时间积累。

**牛顿定律 → 角动量定理：**

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}$$

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}=0$$

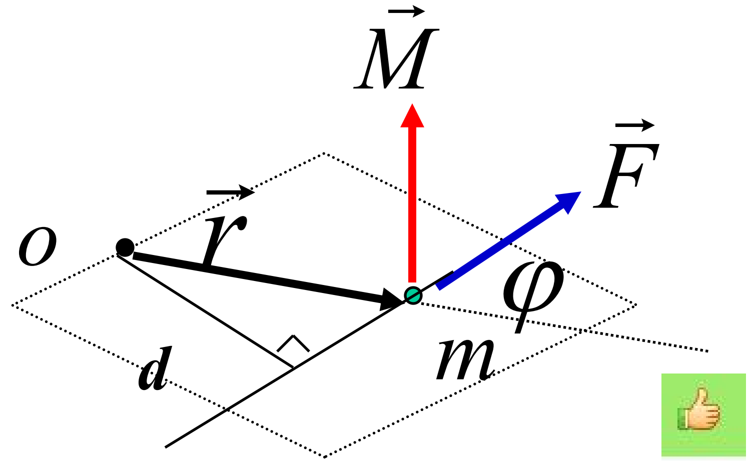
$$\therefore\quad\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{M}$$

**因是牛顿定律的推论，则只适用于惯性系。**

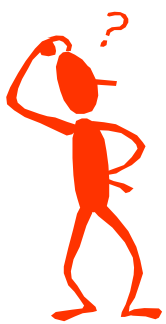
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

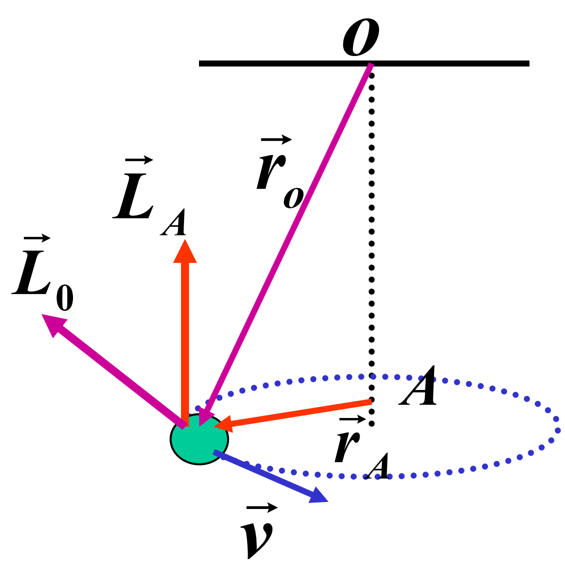
$$M = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin\varphi = F \cdot d$$

$d$ 称力臂




力矩?





# 三、 质点对轴的角动量

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \rightarrow \begin{cases} M_x = \dfrac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t}, \\ M_y = \dfrac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t}, \\ M_z = \dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

$M_x, M_y, M_z$

力对（相应）轴的矩

# §3.7 角动量守恒定律

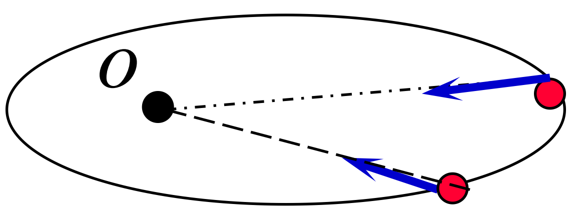
$$\boxed{\vec{M}=0 \quad \Delta\vec{L}=0}$$ 角动量守恒定律

讨论

$$\vec{M}=0\begin{cases}\vec{F}=0\,, \\ \vec{F}\text{过}O\text{点：中心力（如行星受中心恒星的万有引力）}\end{cases}$$

**中心力：力始终过某一点**

$$\vec{L}=\vec{r}\times(m\vec{v})=\text{常矢量}$$




（1） $mv\,r\,\sin\alpha=\text{const.}$

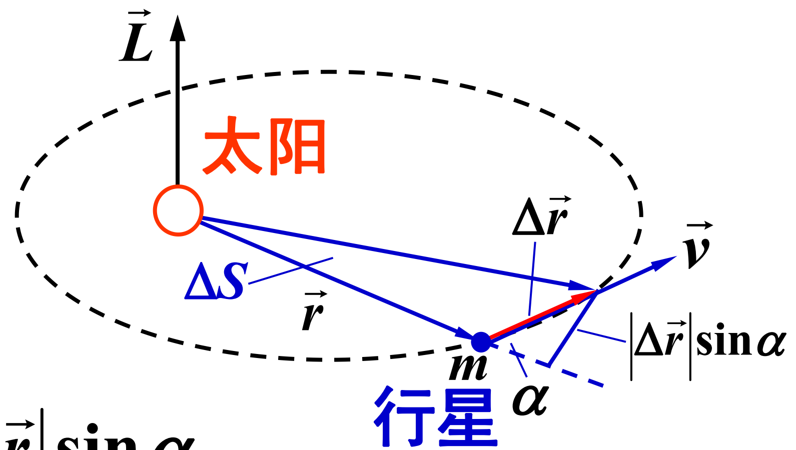
（2）轨道在同一平面内

行星运动是平面运动，在速度和有心力的平面

【例】证明开普勒第二定律：行星相对太阳的矢径在相等的时间内扫过相等的面积。

**有心力→力矩为零 →角动量为常矢量**

角动量方向不变，$\left|\vec{L}\right|=$常数




$$\left|\vec{L}\right|=rm\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|\sin\alpha$$

$$=m\frac{r\left|\Delta\vec{r}\right|\sin\alpha}{\Delta t},\quad \Delta S=\frac{1}{2}r\left|\Delta\vec{r}\right|\sin\alpha$$

$$=2m\frac{\Delta S}{\Delta t}=\text{常数}$$

所以，面速度 $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=$常数。

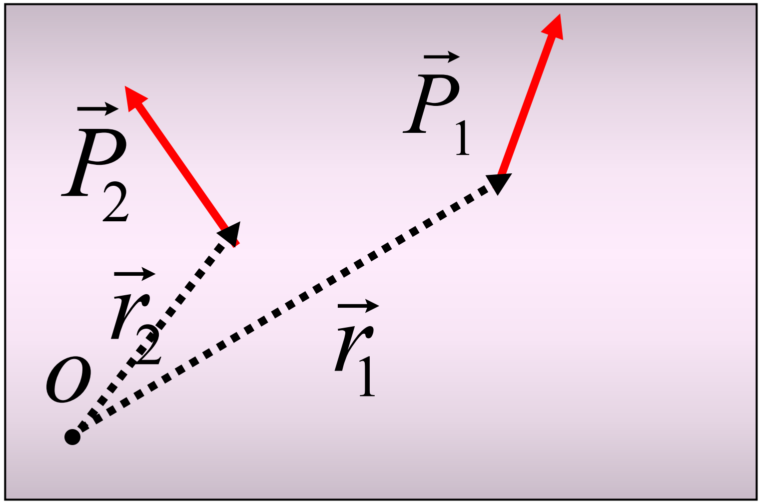
行星相对太阳的矢径在相等的时间内扫过相等的面积。在近日点转得快，在远日点转得慢。

$$\boxed{\text{若 } M_z = 0 \text{，则 } L_z = \text{const.}}$$

——质点对轴的角动量守恒定律

动量守恒与角动量守恒是相互独立的定律

# §3.8 质点系的角动量定理




## 1. 对定点的角动量

$$\vec{L}=\sum_i \vec{L}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{P}_i$$

## 2. 角动量定理和守恒定律

一个质点系所受的合外力矩，等于该质点系的总角动量对时间的变化率

$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

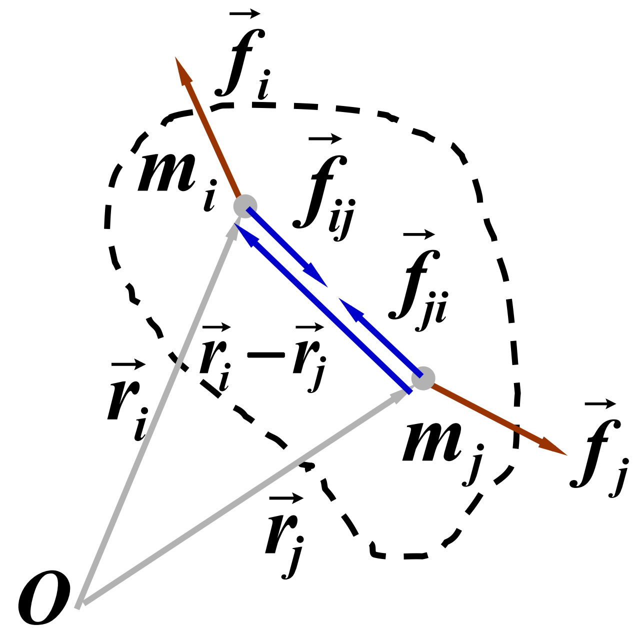
合外力矩：$\vec{M}=\sum_i \vec{M}_i=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i$ 同一定点

【思考】为什么不考虑内力矩？

# 质点的角动量定理→质点系的角动量定理

$$\vec{r}_i \times \left( \vec{F}_i + \sum_{j(\neq i)} \vec{f}_{ij} \right) = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \sum_{j(\neq i)} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \vec{L}_i$$




其中，合内力矩为零：

$$\sum_i \sum_{j(\neq i)} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j(i\neq j)} \left( \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i,j(i\neq j)} \left( \vec{r}_i - \vec{r}_j \right) \times \vec{f}_{ij} = 0$$

$$\boxed{若\ \vec{M}_{外} = 0，则\ \vec{L} = \text{const}.}$$

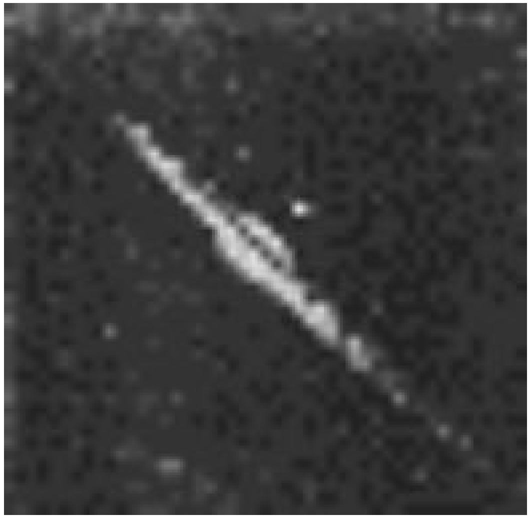
**——质点系角动量守恒定律**

注意：①是矢量和守恒

②$\sum(\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \mathbf{0}$ 与 $\sum\limits_i \vec{F}_i = \mathbf{0}$ 相互独立！

**质点系角动量守恒和动量守恒也是相互独立的**

**宇宙中的天体可以认为是孤立体系。它们具有旋转盘状结构，成因是角动量守恒。**

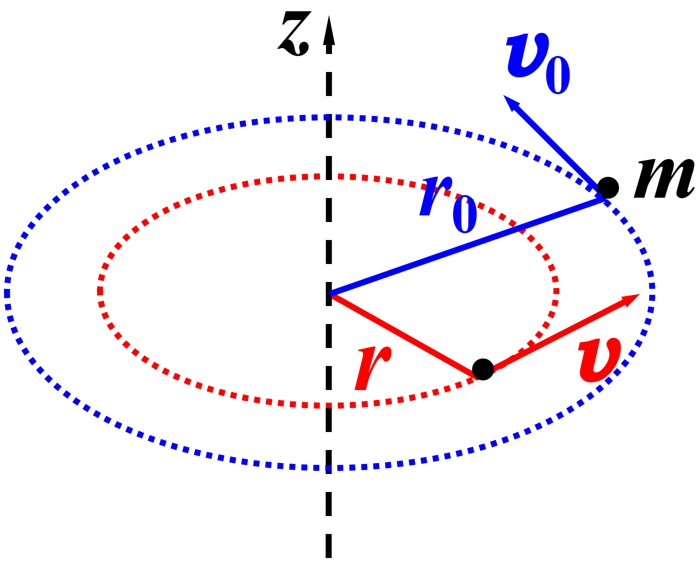
 

如：银河系的盘状结构

粗略的解释：星球具有原始角动量

$$r_0 m \boldsymbol{v}_0 \vec{k}$$

在内部万有引力作用下逐渐收缩




$$L_z = \text{const}.$$

$$r_0 m v_0 = r m v$$

$$\therefore \quad v = \frac{v_0 r_0}{r} \propto \frac{1}{r}$$

$$F_{向} = m\frac{v^2}{r} \propto \frac{1}{r^3}$$

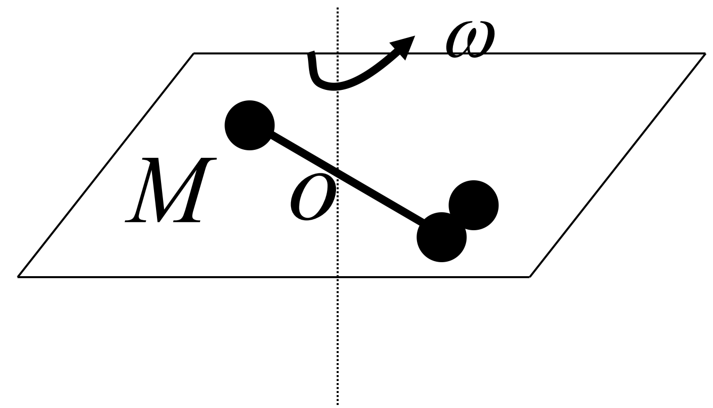
$r\downarrow$到一定程度

$F_{引} = F_{向}$，　　此时 $r$ 就不变了，

引力不能再使 $r$ 减小 。但在$z$ 轴方向却无此限制，可以在引力作用下不断收缩。

【例】在光滑水平面上，有两个质量均相等的质点用一根质量可以忽略的刚性杆相连成哑铃状。如图。

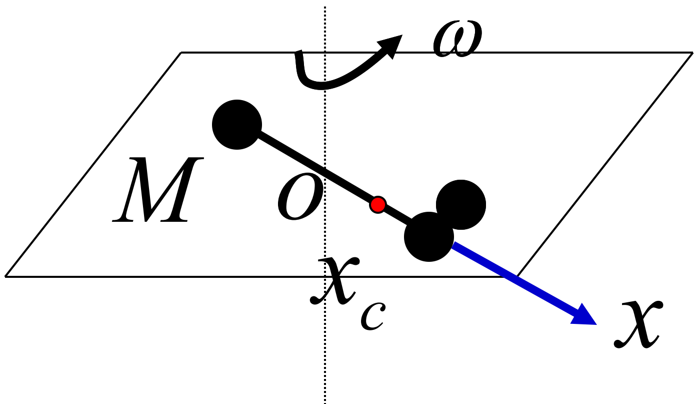
哑铃状系统以角速度$\omega$ 绕自己的质心$O$ 转动。在转动过程中，杆端一质点与质量与其相等的第三个质点正碰并粘在一起。刚性杆长为$a$



**求：1 碰前瞬间三粒子系统的质心位置，质心的速度；**

**2 碰前瞬间和碰后，三粒子系统对质心的角动量；**

**3 碰后系统绕质心的角速度。**



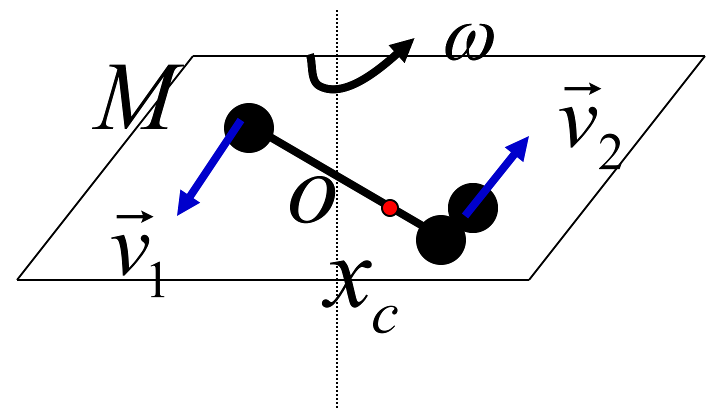

**解：1 建坐标系如图**

质心位置坐标为 $x_c$

$$x_c=\frac{M(-\frac{a}{2})+2M\frac{a}{2}}{3M}=\frac{a}{6}$$

$$\vec{P}=\sum_i m_i\vec{v}_i=3M\vec{v}_c \longrightarrow \boxed{v_c=0}$$

## 2 **碰前**瞬间对质心的角动量




$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times M\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times M\vec{v}_2$$

方向 $\uparrow \vec{L}$

大小 $$L = (\frac{a}{2} + \frac{a}{6})M\omega\underbrace{\frac{a}{2}}_{\vec{v}_1} + (\frac{a}{2} - \frac{a}{6})M\omega\frac{a}{2} = \frac{1}{2}M\omega a^2$$

**碰后**？

碰撞过程合外力矩为零，

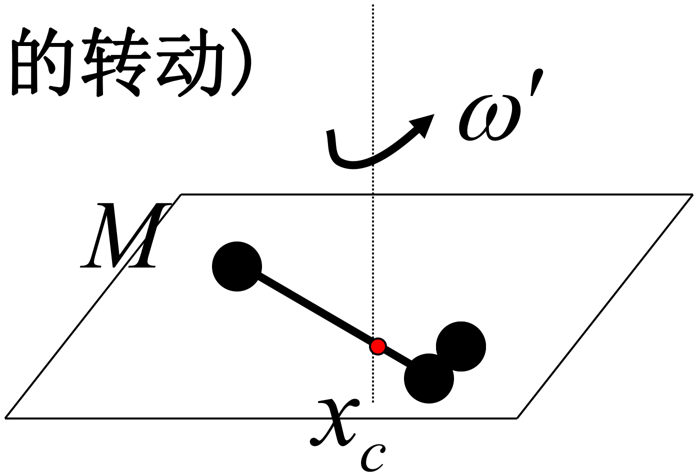
角动量守恒

$$\boxed{L = \frac{1}{2}M\omega a^2}$$

## 3 碰后系统绕质心转动的角速度

碰后，质点系的运动

(随质心的平动)+(绕过质心的轴的转动)




●由质心运动定理

$$\left.\begin{aligned}\vec{F} &= 3M\vec{a}_c \\ F &= 0\end{aligned}\right\}\text{无平动}$$

●绕质心轴的转动　　由角动量守恒

$$\frac{1}{2}M\omega a^2 = M\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{6}\right)^2\omega' + 2M\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{6}\right)^2\omega'$$

$$\boxed{\omega' = \frac{3}{4}\omega}$$

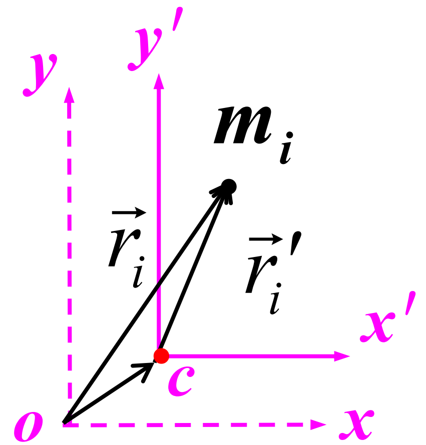
# §3.9 质心系中的角动量定理

无论质心系是否是惯性系，相对质心系，质点系的角动量定理与惯性系中的形式相同

$$\vec{M}'=\frac{\mathrm{d}\vec{L}'}{\mathrm{d}t}$$

质心系合外力矩：$\vec{M}'=\sum_i \vec{r}_i'\times\vec{F}_i$

质心系总角动量：$\vec{L}'=\sum_i m_i\vec{r}_i'\times\vec{v}_i'$



**证明：设质心系相对惯性系以加速度$a_c$平动**

质点$i$质量$m_i$，在质心系中 $\vec{r}_i'$ ,$\vec{v}_i'$

$$\vec{F}_i+\vec{f}_i+(-m_i\vec{a}_c)=\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i')$$

$$\vec{r}_i'\times\vec{F}_i+\vec{r}_i'\times\vec{f}_i+\vec{r}_i'\times(-m_i\vec{a}_c)=\vec{r}_i'\times\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i')$$

$$\frac{d\vec{L}_i'}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i')=\vec{r}_i'\times\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i')+\frac{d\vec{r}_i'}{dt}\times(m_i\vec{v}_i')$$

$$=\vec{r}_i'\times\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i')$$

$$\boxed{\therefore\quad \vec{r}_i'\times\vec{F}_i+\vec{r}_i'\times\vec{f}_i+\vec{r}_i'\times(-m_i\vec{a}_c)=\frac{d\vec{L}_i'}{dt}}$$

对所有质点求和得

$$\sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{f}_i - \sum_i (m_i \vec{r}_i') \times \vec{a}_c = \sum_i \frac{d\vec{L}_i'}{dt}$$

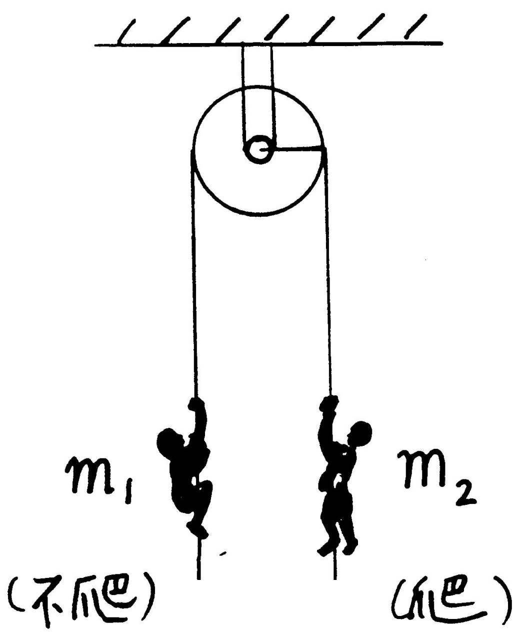
$$\boxed{\sum_i \vec{r}_i' \times \vec{f}_i = 0, \quad \sum_i m_i \vec{r}_i' = m\vec{r}_c' = 0}$$

质心系

$$\therefore \quad \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i = \sum_i \frac{d\vec{L}_i'}{dt}$$

$$\therefore \quad \vec{M}' = \sum_i \frac{d\vec{L}_i'}{dt}$$

**例：两个同样重的小孩，各抓着跨过滑轮的轻绳的一端如图，他们起初都不动，然后右边的小孩用力向上爬绳，另一个小孩仍抓住绳子不动。忽略滑轮的质量和轴的摩擦。**
**问：哪一个小孩先到达滑轮？**




【解】

设滑轮半径为$R$，两小孩的质量分别为$m_1$、$m_2$，

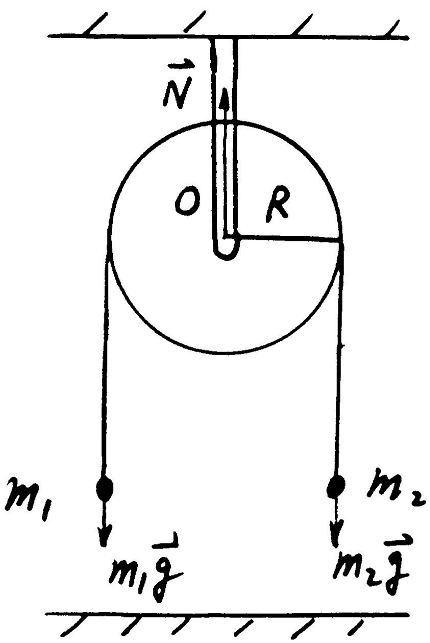
$$m_1 = m_2$$

把小孩看成质点，
以滑轮中心为“固定点”，

对“$m_1+m_2+$ 轻绳 + 滑轮”系统：

外力： $m_1\vec{g}, m_2 g, \vec{N}$

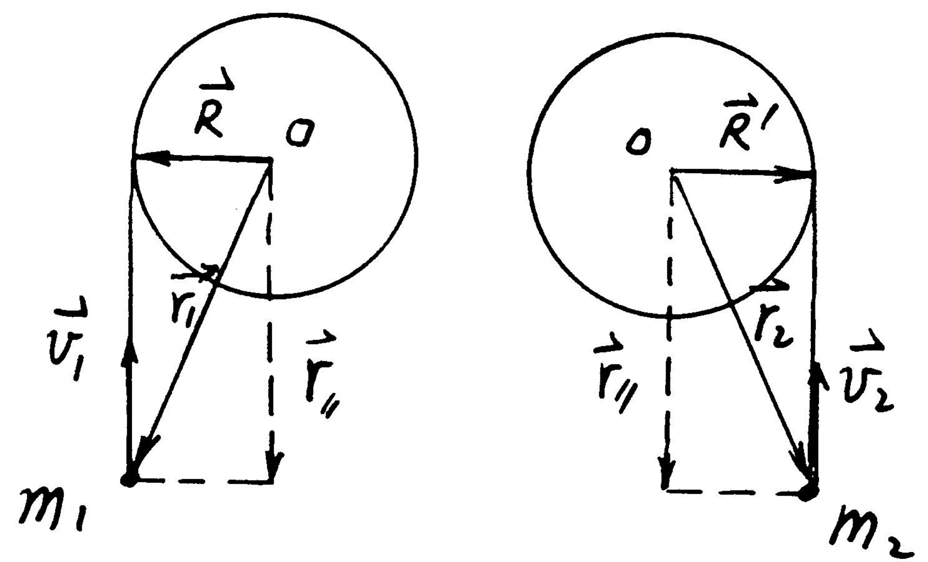
条件： $\vec{M}_{外} = 0$ 角动量守恒 （不考虑内力矩）

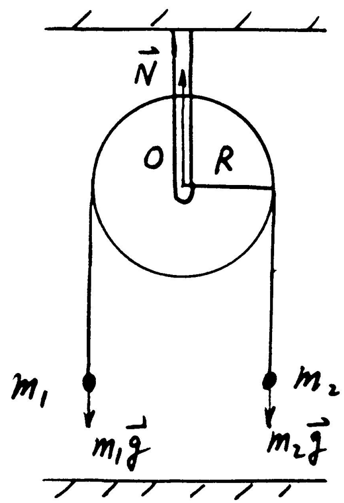


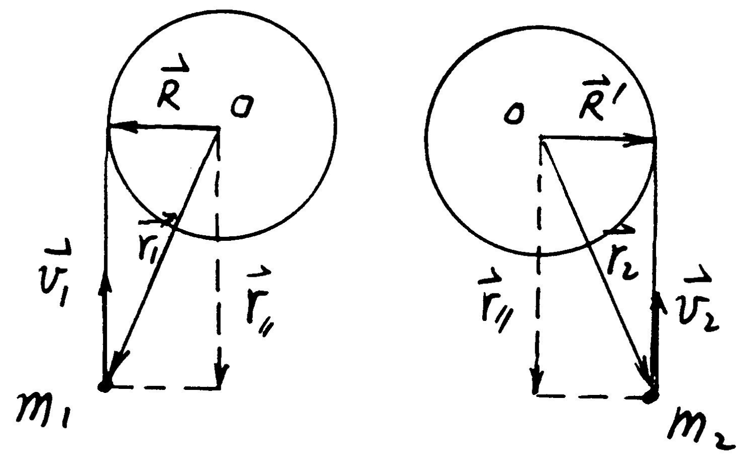

设两小孩

分别以 $\vec{v}_{1,}\vec{v}_2$ 速度上升。

设角动量以指向纸内为正。






$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 = m_1 \vec{r}_1 \times \vec{v}_1$$

$$= m_1(\vec{R} + \vec{r}_{11}) \times \vec{v}_1 = m_1 \vec{R} \times \vec{v}_1$$ （指向纸内）

$$\Rightarrow \quad L_1 = m_1 R v_1$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 = m_2 \vec{r}_2 \times \vec{v}_2$$

$$= m_2(\vec{R}' + \vec{r}_{11}) \times \vec{v}_2 = m_2 \vec{R}' \times \vec{v}_2$$ （指向纸外）

$$\Rightarrow \quad L_2 = -m_2 R v_2$$

系统的角动量守恒： $L_1 + L_2 = 0$

（启动后） （启动前）

$$m_1 R v_1 - m_2 R v_2 = 0$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

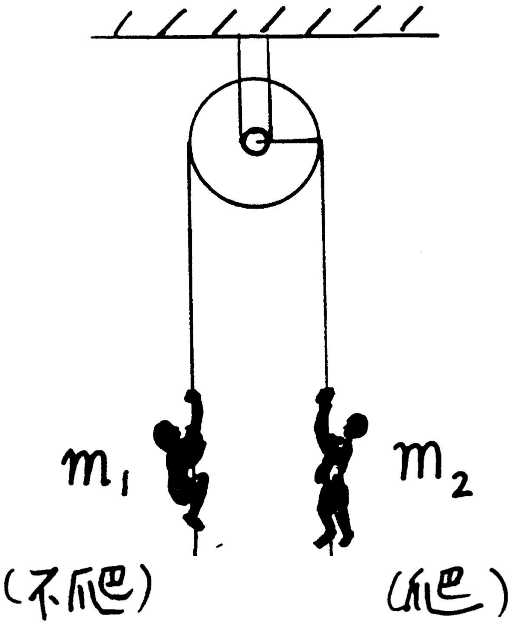
$\because m_1 = m_2$

$\therefore v_1 = v_2$ 爬与不爬，两小孩同时到达滑轮！

思考： 有人说该系统动量守恒，对不对？

$\boxed{\text{讨论}}$ 若 $m_1 \neq m_2$ ，此时系统的角动量也不守恒了，会出现什么情况？

（1）设 $m_1 > m_2$ （右边爬绳的是较轻的小孩）




系统所受的合外力矩为

$$M_{外} = (m_1 - m_2)gR \neq 0$$

思考：$\vec{M}_{外}$ 的方向？

角动量定理应成立 $\vec{M}_{外} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$

（仍以朝向纸内为正）

$\Rightarrow$ $d\vec{L}$ 的方向朝向纸外（为负）

初始时小孩未动， $\vec{L} = 0$ 。

现在 $L = dL = (m_1 v_1 - m_2 v_2)R < 0$

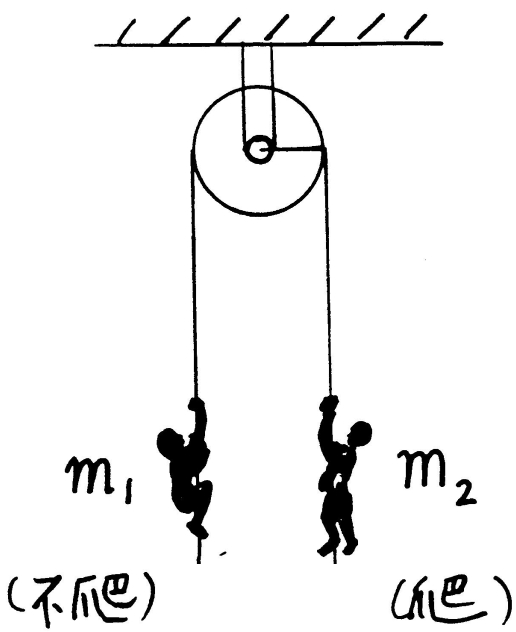
$$m_1 v_1 < m_2 v_2$$

$$m_1 v_1 < m_2 v_2$$

$$\because \boldsymbol{m_1 > m_2} \quad \therefore \boldsymbol{v_2 > v_1}$$

**即质量为 $\boldsymbol{m_2}$（轻的、爬的）小孩先到。**

（2）设 $m_2 > m_1$（右边爬绳的小孩较重）




系统所受的合外力矩为

$$M_{外} = (m_2 - m_1) g R$$

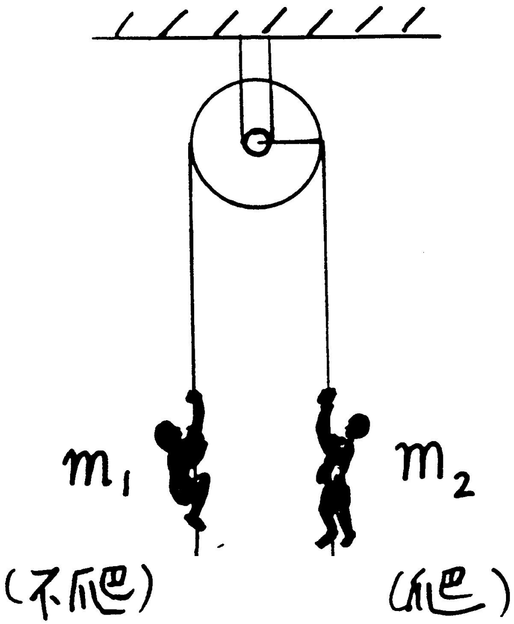
$\vec{M}_{外}$ 的方向朝纸内

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{d\vec{L}}$ 的方向朝向纸内

（为正）

初始时小孩未动， $\vec{L} = 0$ 。

现在




$$L = dL = \left(m_1 v_1 - m_2 v_2\right) R > 0$$

$$m_1 v_1 > m_2 v_2$$

$$\because m_2 > m_1 \quad \therefore v_1 > v_2$$

即质量为 $m_1$ （轻的、不爬的）小孩先到。

总之， 轻的小孩总是先到，
爬绳的小孩不一定先到。