§2. n元函数与n元向量值函数

1. n元函数f

$$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto y$$

$x\in\mathbb{R}^n$:自变量

$y\in\mathbb{R}$:因变量

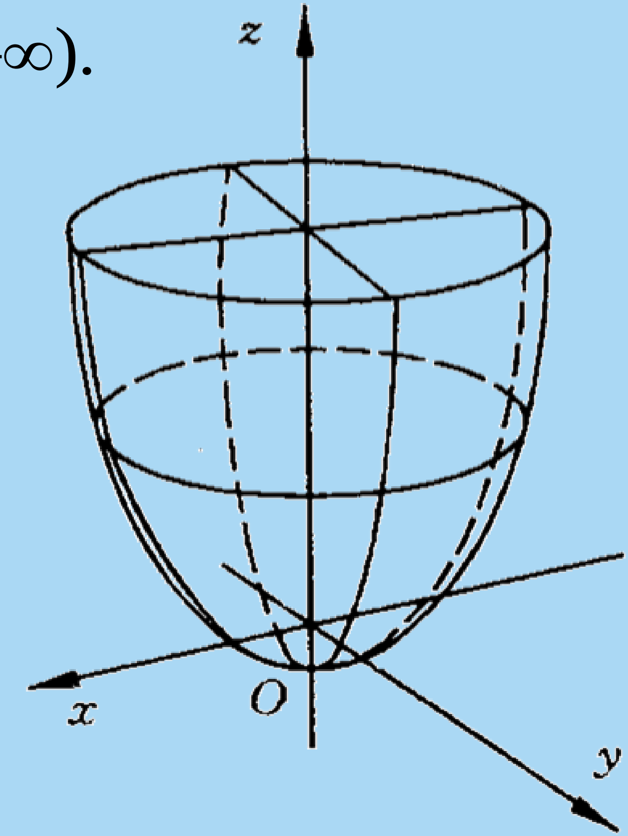
Ω : f的定义域

$f(\Omega)\triangleq\left\{y\in\mathbb{R}\,\middle|\,\exists x\in\Omega, s.t. y=f(x)\right\}$称为$f$的值域

例. 旋转抛物面 $z = x^2 + y^2, (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

这是一个2元函数.

定义域: $\mathbb{R}^2$. 值域: $[0, +\infty)$.



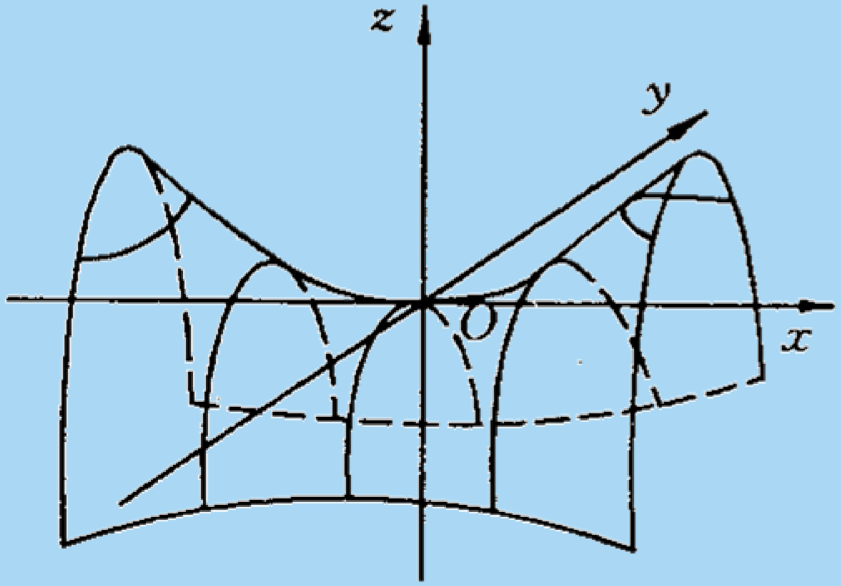
例. 马鞍面 $z=\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2},(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (a,b>0$为给定参数$)$.

- 用$x=x_0$截曲面,得

$$z=-\frac{y^2}{b^2}+\frac{x_0^2}{a^2},$$

- 用$y=y_0$截曲面

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2},$$



- 用$z=z_0$截曲面,得 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z_0,\ z_0>0,\ z_0<0,z_0=0?$

Question. $z=xy,(x,y)\in\mathbb{R}^2$也是马鞍面,为什么?

2. n元函数的隐函数表示法与参数表示法

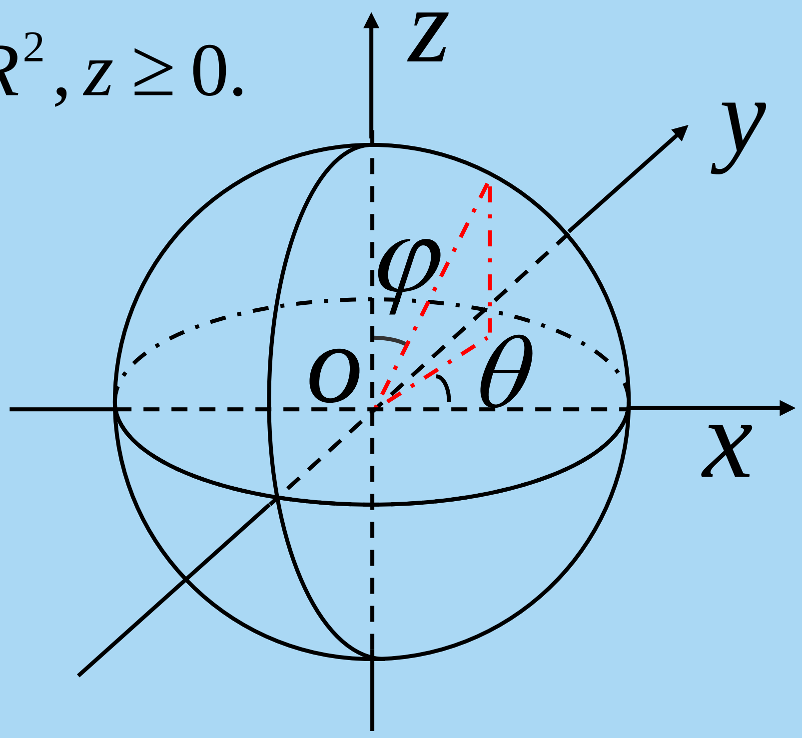
例. 半球面$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $(R>0)$

隐函数表示法: $x^2+y^2+z^2=R^2, z\geq 0.$

参数表示法:

$$\begin{cases} x=R\sin\varphi\cos\theta, \\ y=R\sin\varphi\sin\theta, \\ z=R\cos\varphi, \end{cases}$$

$$0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}, 0\leq\theta<2\pi$$



Question. 椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的参数方程?

3. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$的向量值函数$f$

$$f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m \qquad x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$
$$x\mapsto y \qquad y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$$

Ω: f的定义域

$f(\Omega)\triangleq\left\{y\in\mathbb{R}^m \middle| \exists x\in\Omega, s.t. y=f(x)\right\}$称为$f$的值域

f可以看成m个n元函数构成的向量$f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^{\mathrm{T}}$,即

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \qquad\vdots \\ y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n). \end{cases}$$

例. 给定常数$a>0$,

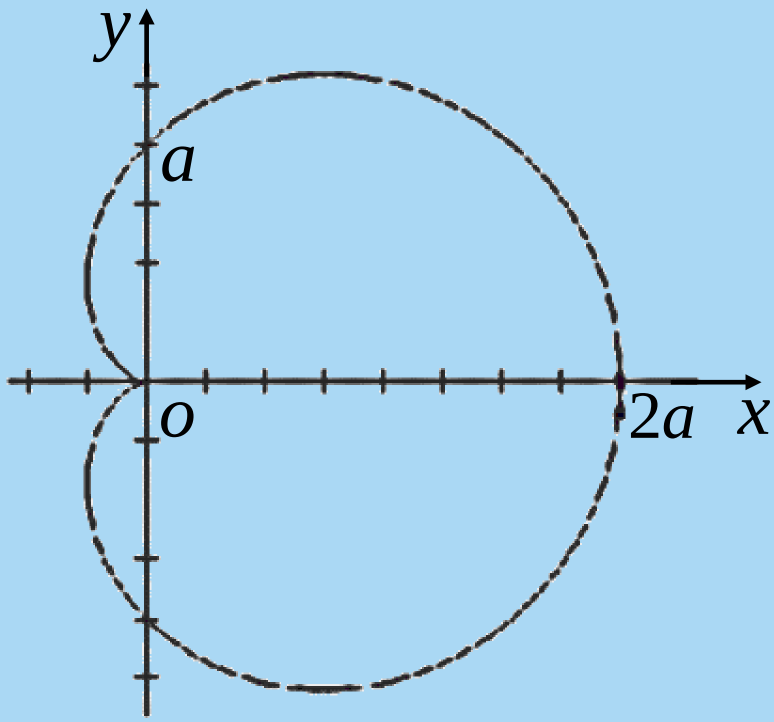
$$\begin{cases} x=a(1+\cos\theta)\cos\theta \\ y=a(1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}, \quad \theta\in[-\pi,\pi)$$

表示一条平面曲线,

称为心脏线 .

此曲线的极坐标表达形式为

$$\rho=a(1+\cos\theta).$$



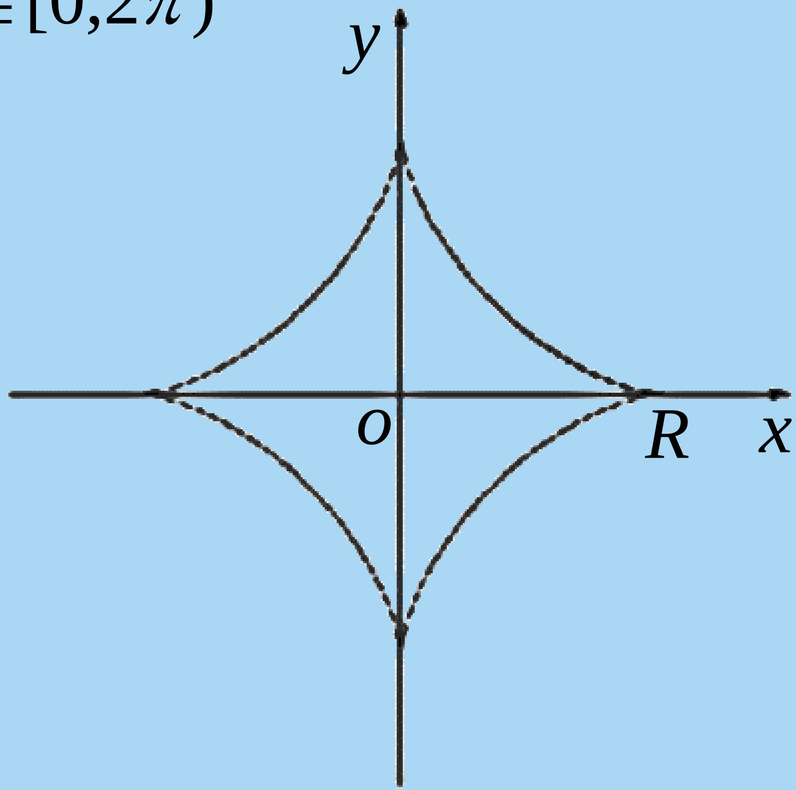
例. 给定常数$R>0$,

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t \\ y = R\sin^3 t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi)$$

为星型线 .

该曲线的隐函数表达式为

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$



例. 给定常数$r, w, v > 0$,

$$\begin{cases} x = r\cos wt \\ y = r\sin wt \ , \quad t \in \mathbb{R} \\ z = vt \end{cases}$$

为空间螺线 .