

清华大学2022春季学期

电路原理C

第6讲

二端口网络

第6讲 二端口网络 (Two-port Network)

1、二端口网络的定义

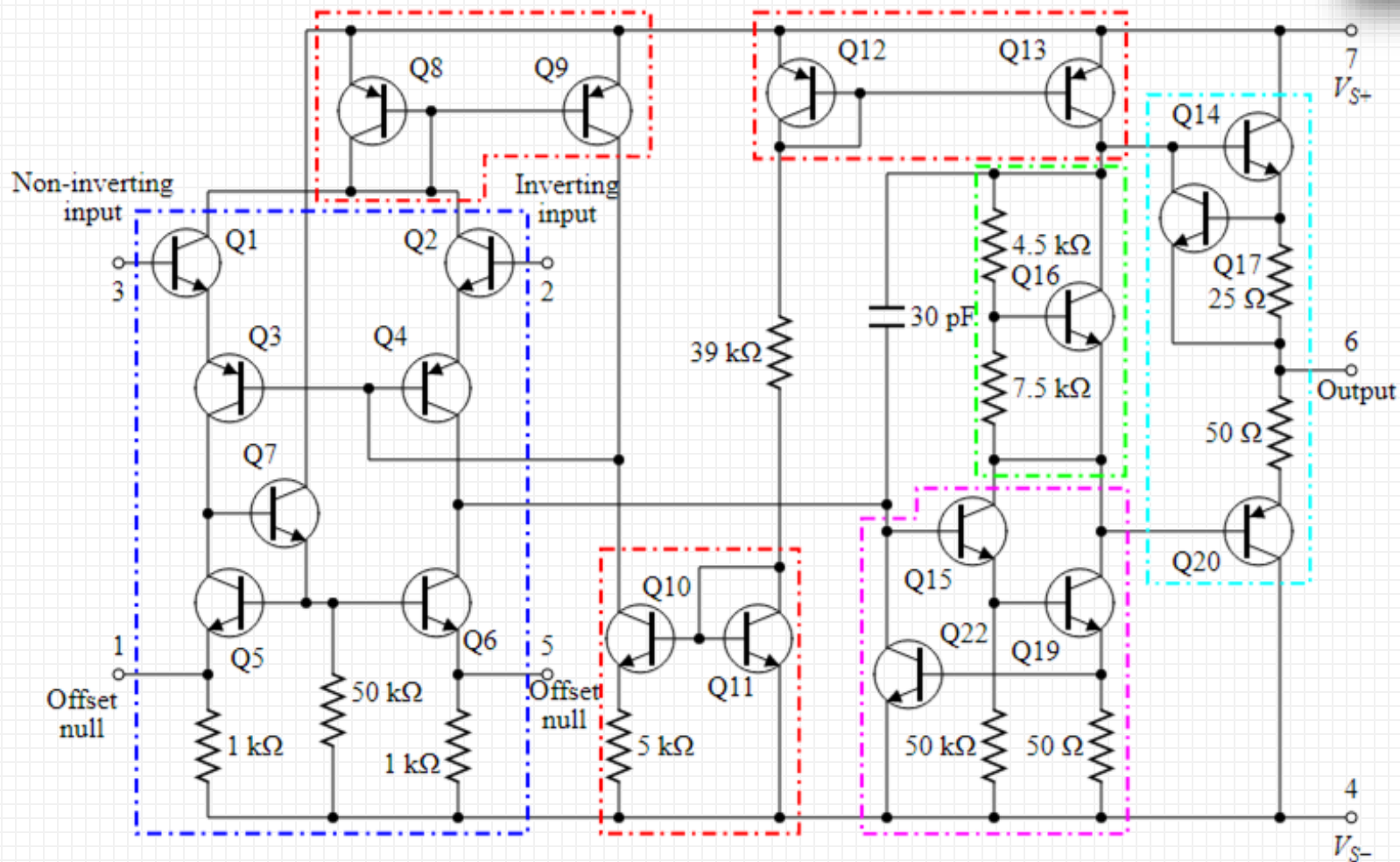
2、二端口网络的参数和方程

根据给定电路求二端口参数

3、二端口网络的等效电路

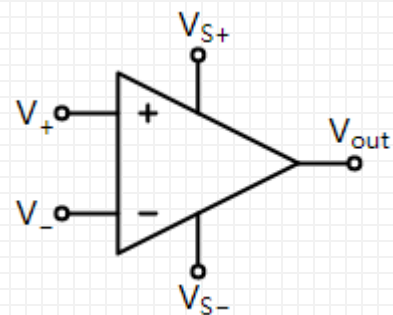
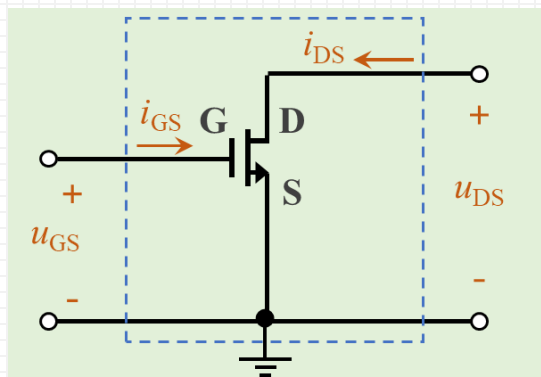
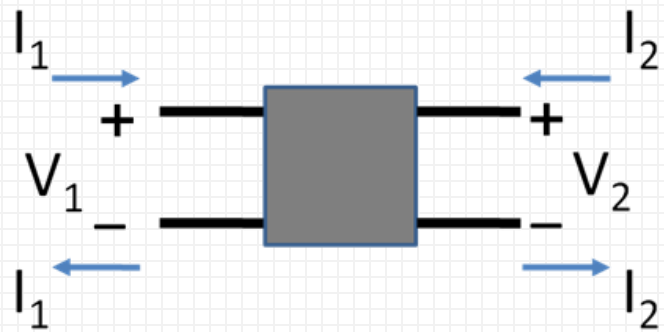
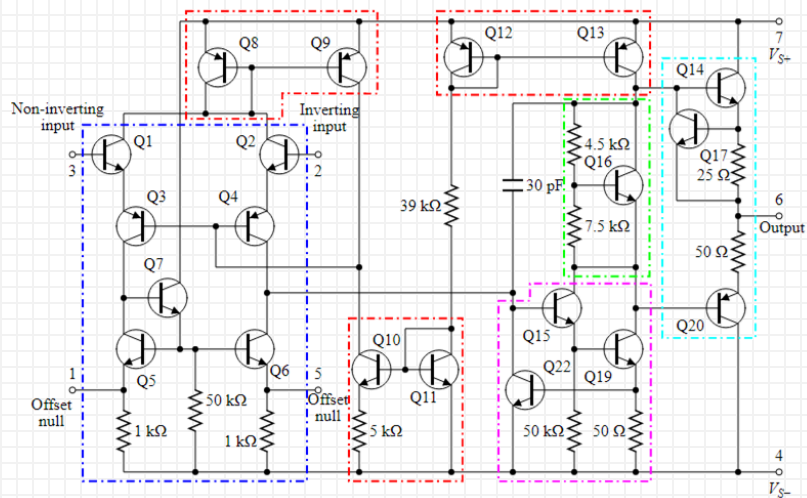
根据给定二端口参数求等效电路

1、二端口网络的定义



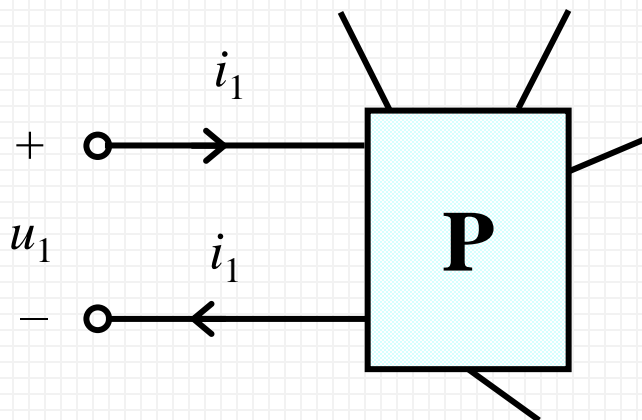


Why Two-port?



抽象的力量

(1) 端口 (port)



1. 定义

端口由两个接线端构成，且满足如下条件：**从一个接线端流入的电流等于从另一个接线端流出的电流。**

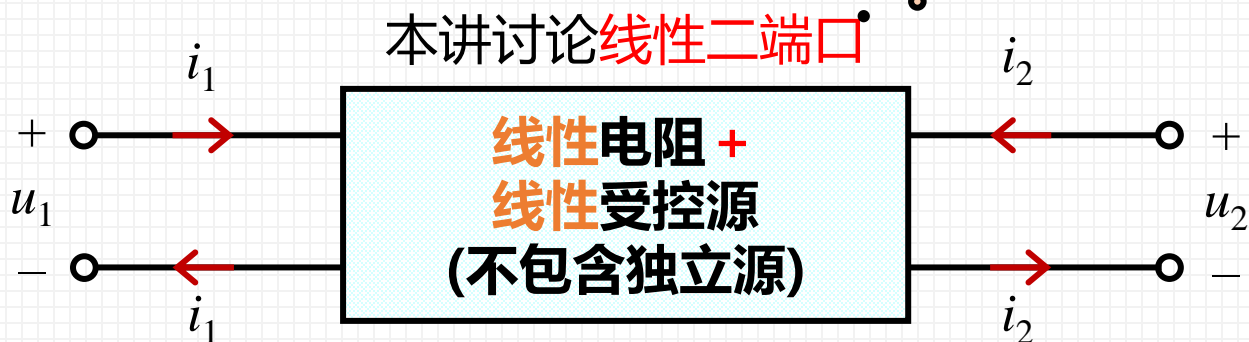
端口条件

(2) 二端口 (two-port)

Franz Breisig 1920提出

当一个电路与外部电路通过**两个端口**连接时称此电路为**二端口网络**。

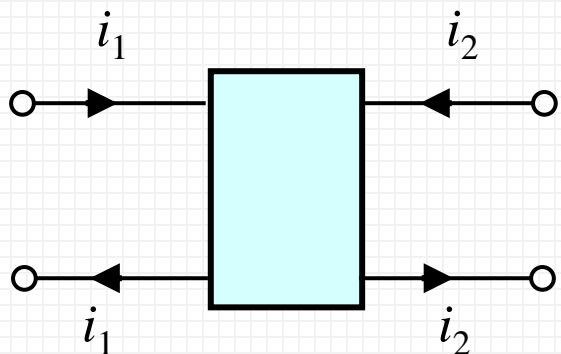
≠线性四端网络



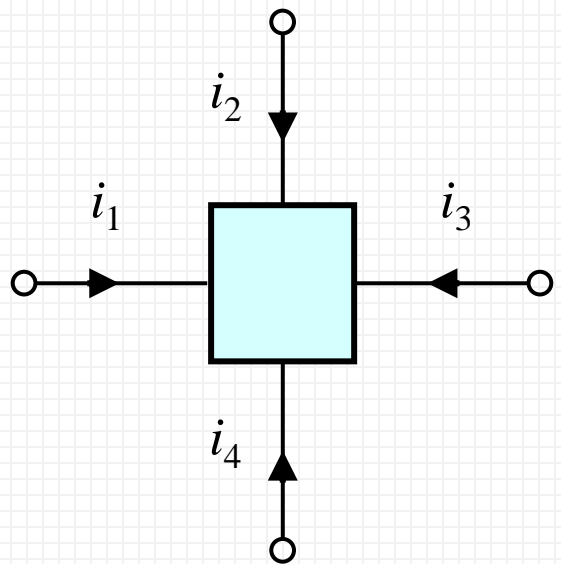
注意 **参考方向**： u 上 + 下 -， i 从 u 的 + 端流入。



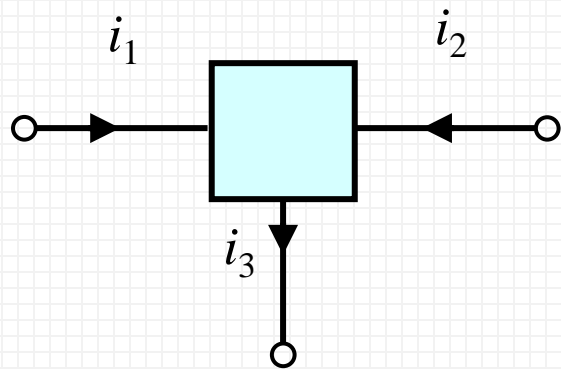
(3) 二端口网络与四端网络



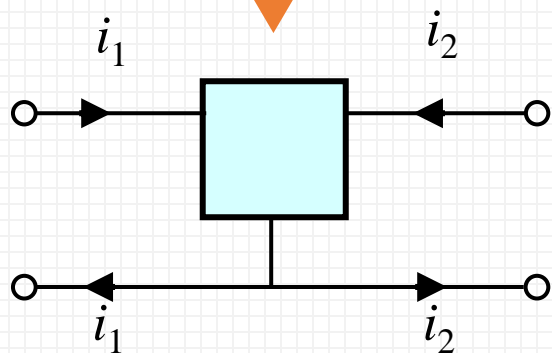
二端口



四端网络



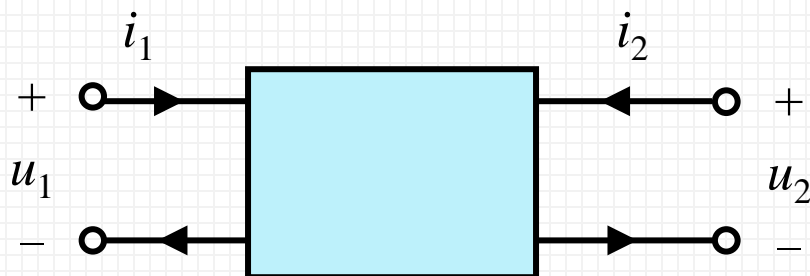
三端网络



具有公共端的二端口



2 二端口网络的参数和方程



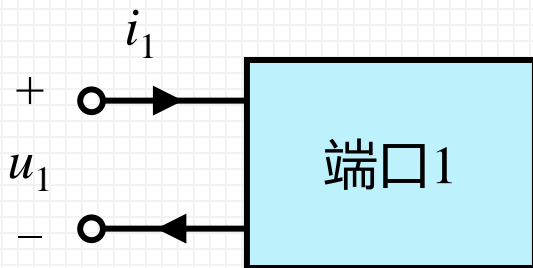
端口物理量4个

i_1 i_2 u_1 u_2

如何描述二端口网络的电压电流关系？

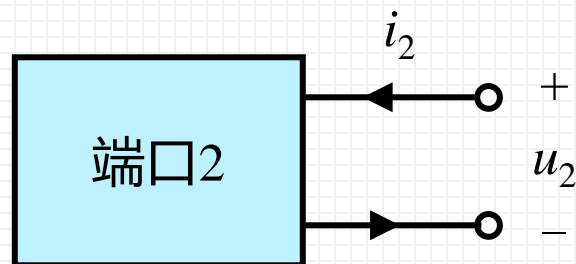


回忆一端口网络的电压电流关系



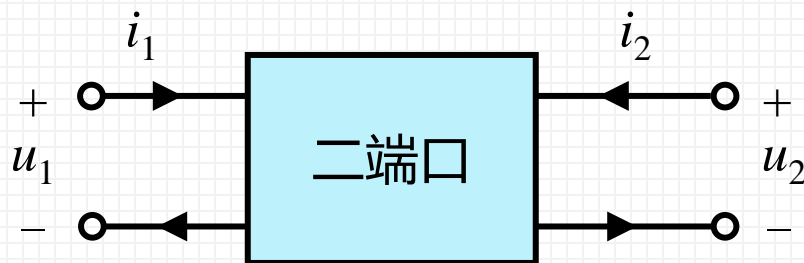
$$u_1 = f_1(i_1)$$

或 $i_1 = g_1(u_1)$



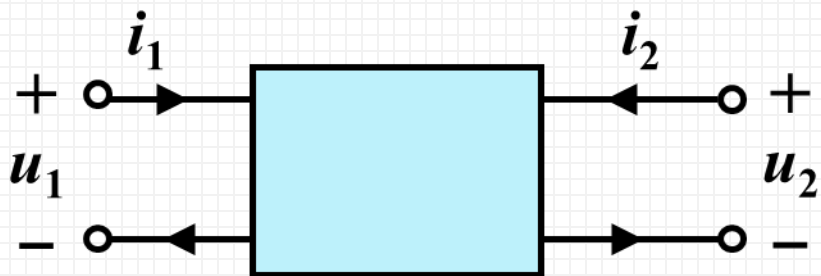
$$u_2 = f_2(i_2)$$

或 $i_2 = g_2(u_2)$



应该用两个电压电流关系方程来描述二端口网络

即：用两个物理量来表示另外两个物理量



端口物理量4个

i_1 i_2 u_1 u_2

共6种端口关系方程

用

来表示

u_1	u_2	i_1	i_2
i_1	i_2	u_1	u_2
i_2	u_2	i_1	u_1
i_1	u_2	i_2	u_1
i_1	u_1	i_2	u_2
i_2	u_1	i_1	u_2



(1) 用电压表示电流: G 参数和方程

再次强调:

二端口中没有独立源

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$

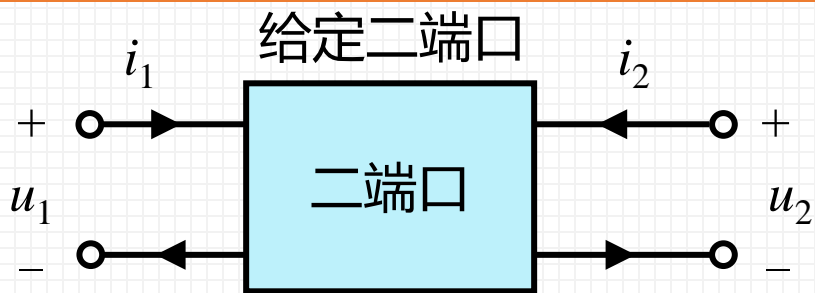


矩阵形式

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

令

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$



$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$

G参数的实验测定

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{u_1} \right|_{u_2=0} \quad \text{自电导}$$

$$G_{21} = \left. \frac{i_2}{u_1} \right|_{u_2=0} \quad \text{转移电导}$$

$$G_{12} = \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{u_1=0} \quad \text{转移电导}$$

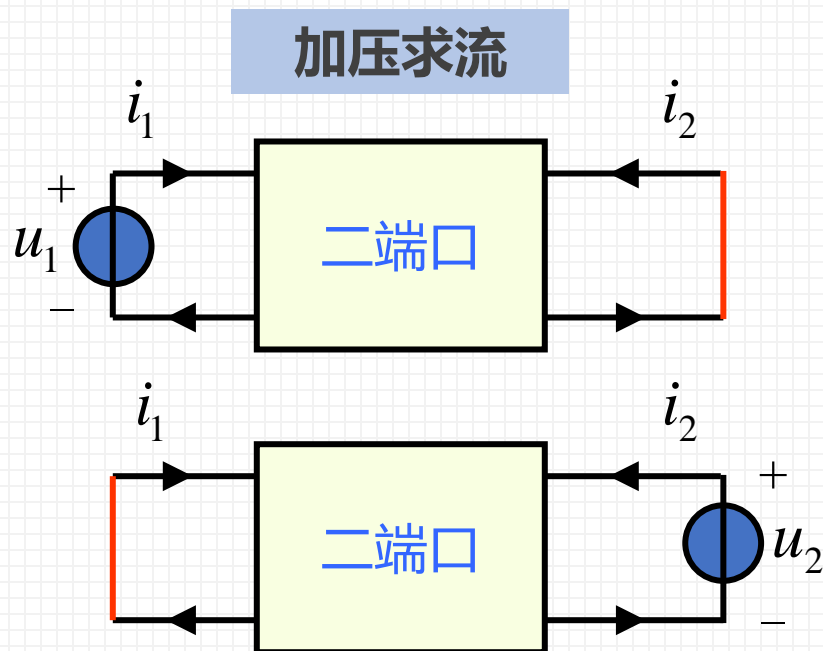
$$G_{22} = \left. \frac{i_2}{u_2} \right|_{u_1=0} \quad \text{自电导}$$

称G为**短路电导参数矩阵**

能这样做的前提是端口**能够被短路**!

对于某一**黑箱**二端口，
如何获得其**G参数**（不解方程）？

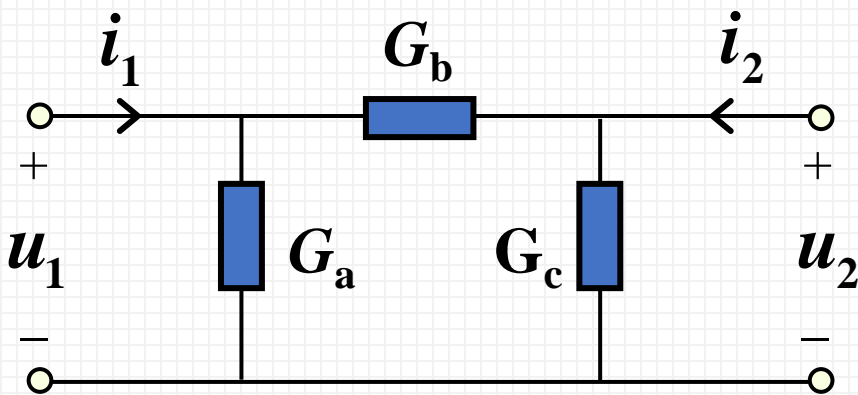
类比一端口网络端口电导的求法



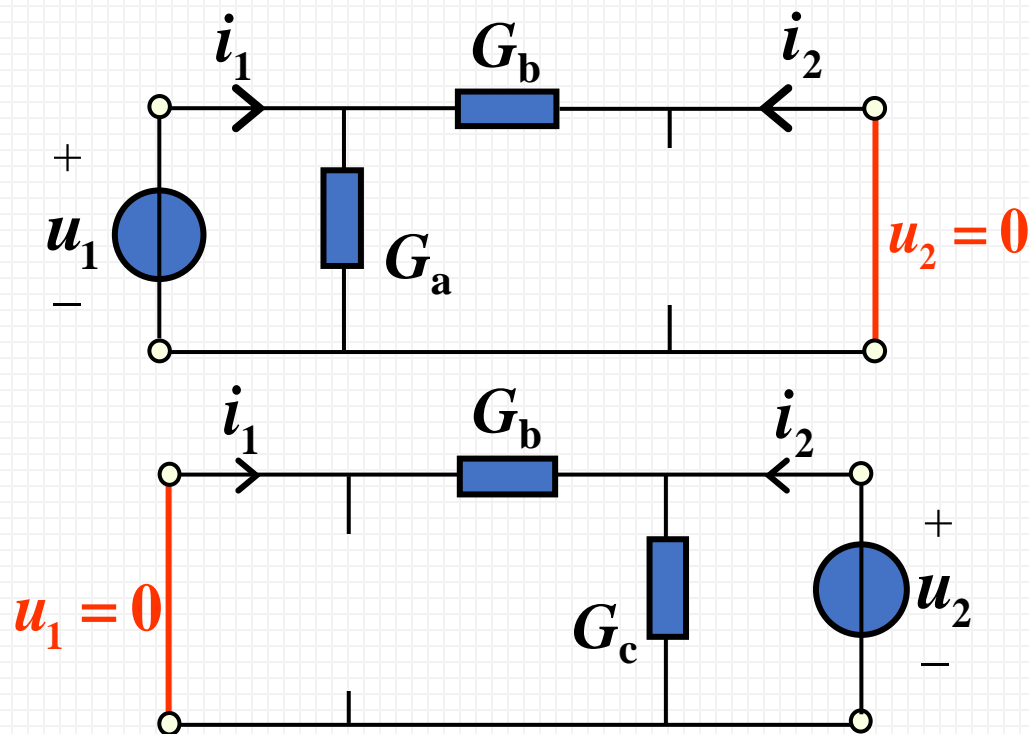


例1 求 G 参数。

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$



解：法1 (黑箱思路)



$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{u_1} \right|_{u_2=0} = G_a + G_b$$

$$G_{21} = \left. \frac{i_2}{u_1} \right|_{u_2=0} = -G_b$$

$$G_{12} = \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{u_1=0} = -G_b$$

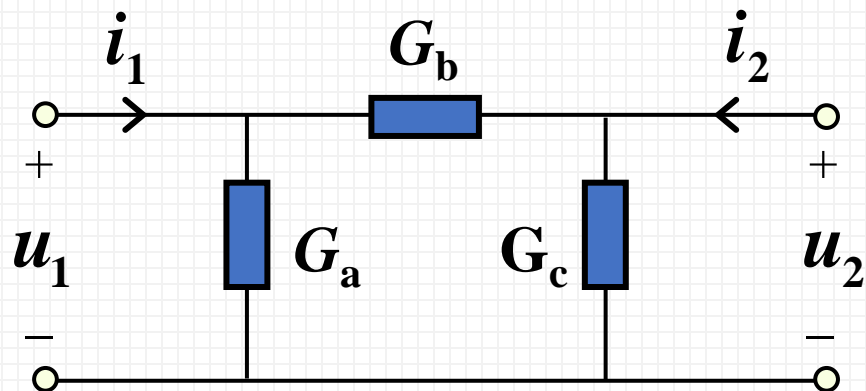
$$G_{22} = \left. \frac{i_2}{u_2} \right|_{u_1=0} = G_b + G_c$$

$$G_{12} = G_{21} = -G_b$$



例1 求 G 参数。

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$



解: 法2 对 **白箱** 二端口, 可直接求端口电压电流关系

$$i_1 = u_1 G_a + (u_1 - u_2) G_b$$

$$i_2 = u_2 G_c + (u_2 - u_1) G_b$$

$$G_{11} = G_a + G_b$$

$$G_{21} = -G_b$$

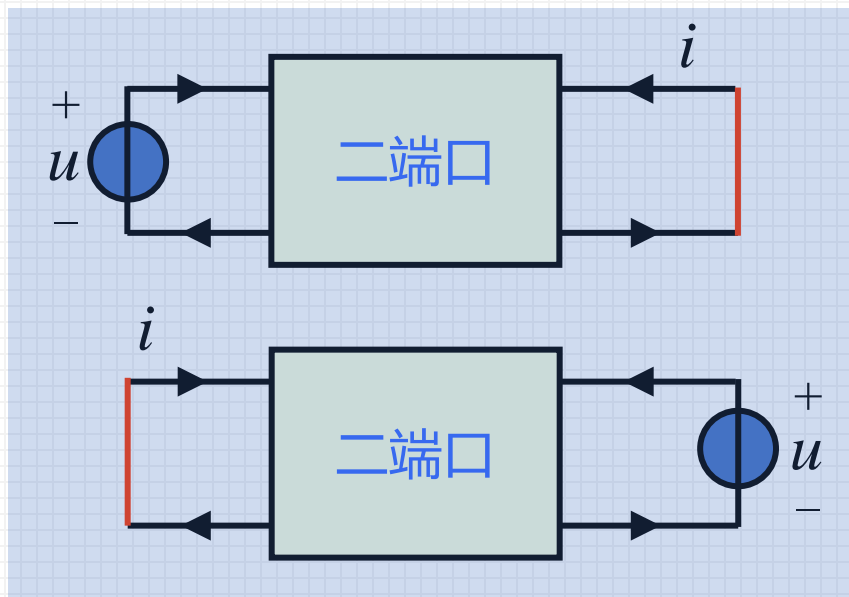
$$G_{12} = -G_b$$

$$G_{22} = G_b + G_c$$

互易二端口

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

激励无论加在哪侧，对侧产生的响应都一样

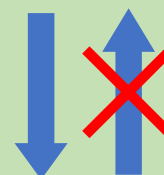


$$\begin{aligned} i &= G_{21}u \\ i &= G_{12}u \end{aligned} \Rightarrow G_{12} = G_{21}$$

互易二端口网络四个参数中，
只有三个是独立的

由线性电阻组成的二端口

互易定理

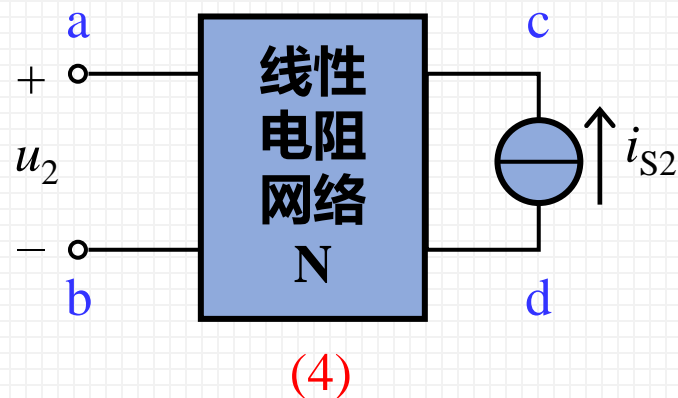
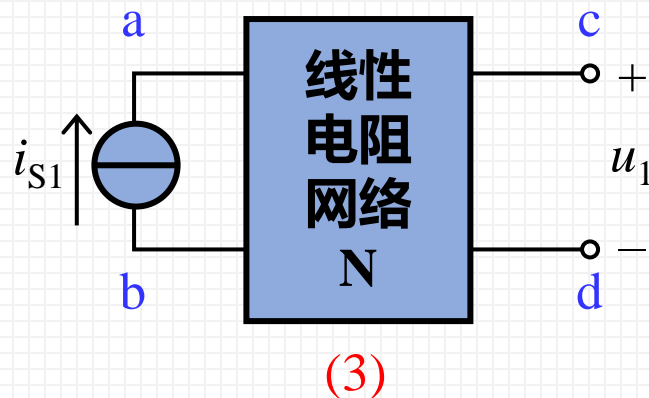
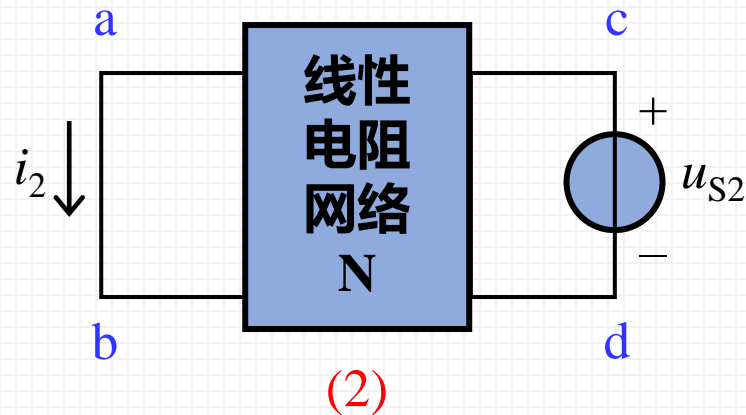
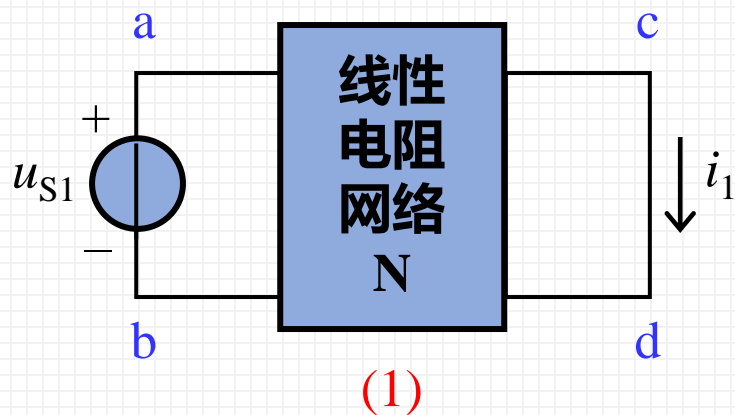


互易二端口



* 互易定理 (Reciprocity Theorem)

给定任一仅由线性电阻构成的网络...



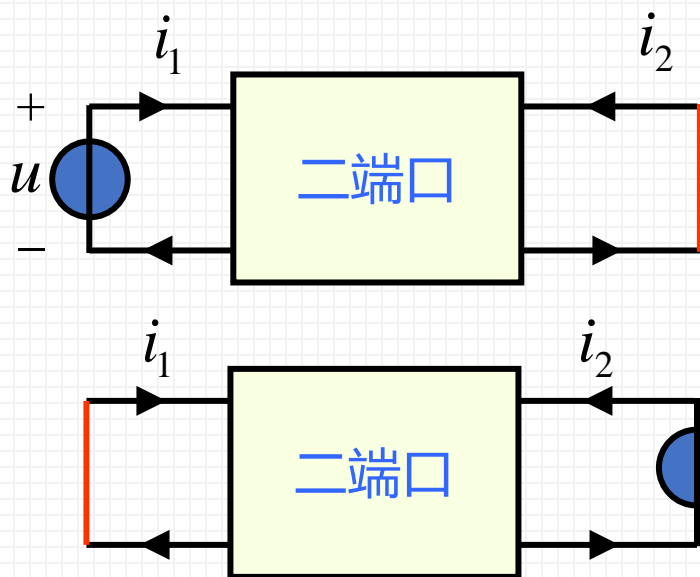
**对称二端口**

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

两个端口外特性(己侧/对侧)完全一样



$$\begin{aligned} G_{12} &= G_{21} \\ G_{11} &= G_{22} \end{aligned}$$



$$i_2 = G_{21}u$$

$$i_1 = G_{11}u$$

$$i_2 = G_{22}u$$

$$i_1 = G_{12}u$$

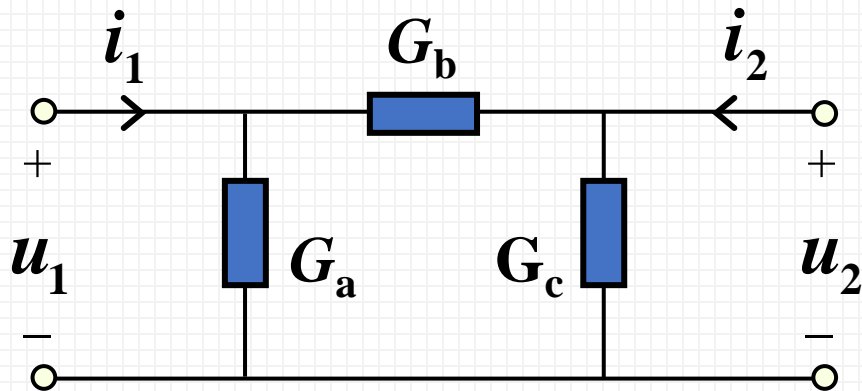
$$G_{11} = G_{22}$$

$$G_{12} = G_{21}$$

对称二端口只有两个参数是独立的。



$$G = \begin{bmatrix} G_a + G_b & -G_b \\ -G_b & G_b + G_c \end{bmatrix}$$

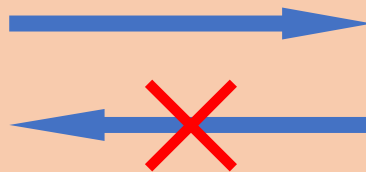


若 $G_a = G_c$

有 $G_{12} = G_{21}$ ，又 $G_{11} = G_{22}$ ，为**对称二端口**。

结构对称

结构对称的二端口

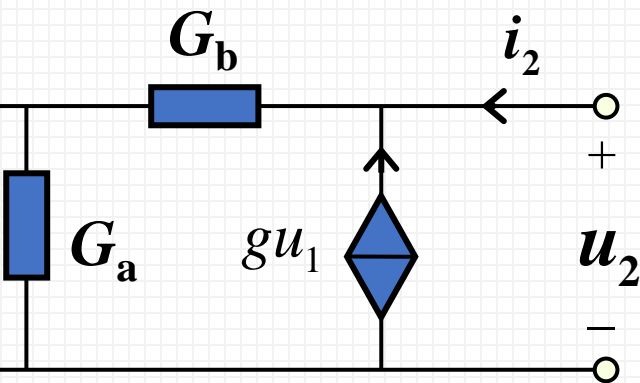
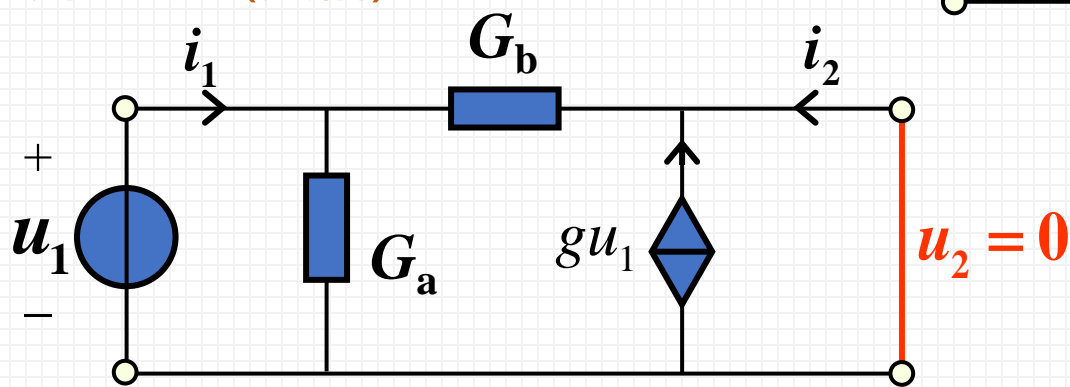


对称二端口
(电气对称)

例2 求所示电路的 G 参数

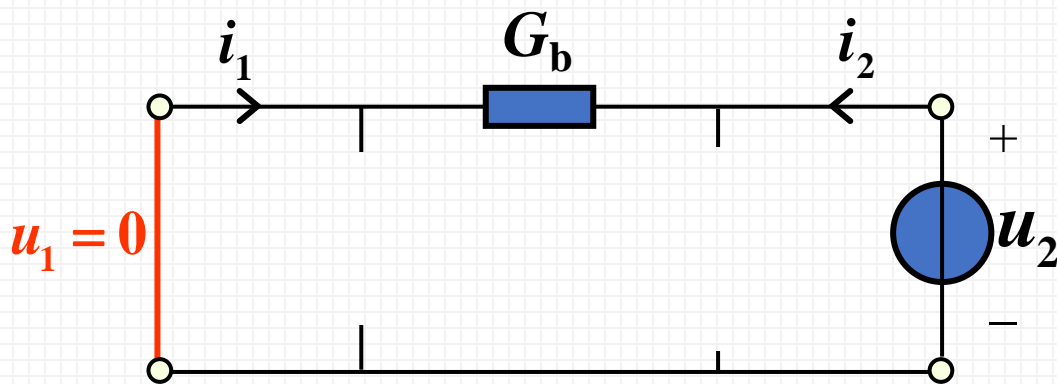
$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$

解: 法1 (黑箱)



$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{u_1} \right|_{u_2=0} = G_a + G_b$$

$$G_{21} = \left. \frac{i_2}{u_1} \right|_{u_2=0} = -G_b - g$$



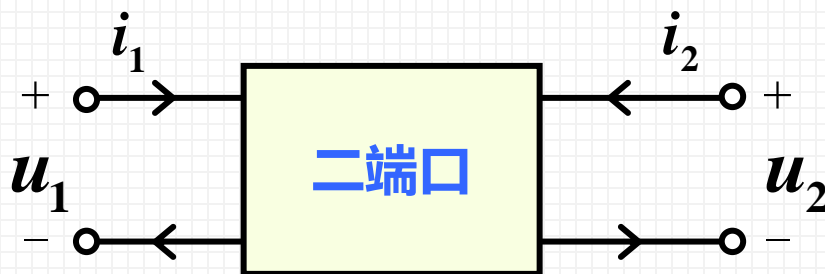
$$G_{12} = \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{u_1=0} = -G_b$$

$$G_{22} = \left. \frac{i_2}{u_2} \right|_{u_1=0} = G_b$$

法2 (白箱) 复习时自行练习



(2) 用电流表示电压： R 参数和方程



由 G 参数方程

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{解出}} u_1, u_2$$

即

$$\begin{cases} u_1 = \frac{G_{22}}{\Delta} i_1 + \frac{-G_{12}}{\Delta} i_2 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ u_2 = \frac{-G_{21}}{\Delta} i_1 + \frac{G_{11}}{\Delta} i_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{cases}$$

其中 $\Delta = G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} \neq 0$

前提： G 非奇异



其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$$

R 参数的实验测定 (黑箱)

$$R_{11} = \left. \frac{u_1}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad R_{12} = \left. \frac{u_1}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

$$R_{21} = \left. \frac{u_2}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad R_{22} = \left. \frac{u_2}{i_2} \right|_{i_1=0}$$

称 \mathbf{R} 为**开路电阻参数矩阵**

能这样做的前提是**端口能够被开路!**



$$\begin{cases} u_1 = \frac{G_{22}}{\Delta} i_1 + \frac{-G_{12}}{\Delta} i_2 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2 \\ u_2 = \frac{-G_{21}}{\Delta} i_1 + \frac{G_{11}}{\Delta} i_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2 \end{cases}$$

互易二端口

$$G_{12} = G_{21}$$



$$R_{12} = R_{21}$$

对称二端口

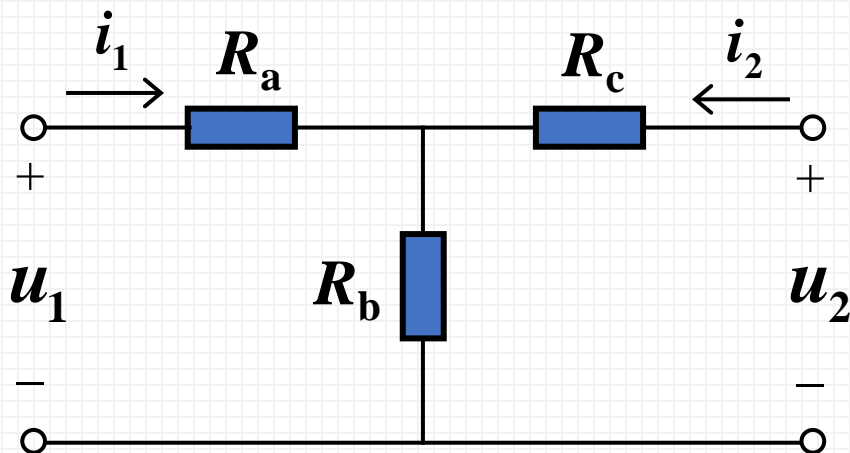
$$G_{12} = G_{21}$$

$$G_{11} = G_{22}$$



$$R_{11} = R_{22}$$

$$R_{12} = R_{21}$$

**例3** 求所示电路的 R 参数

$$\begin{aligned} u_1 &= R_{11}i_1 + R_{12}i_2 \\ u_2 &= R_{21}i_1 + R_{22}i_2 \end{aligned}$$

法1 (黑箱)

实验测定。自行完成

法2 (白箱)**端口电压电流关系**

$$u_1 = i_1 R_a + (i_1 + i_2) R_b$$

$$u_2 = i_2 R_c + (i_1 + i_2) R_b$$

互易二端口

(3) 用输出表示输入：T 参数和方程

如何用 u_2 和 i_2 来表示 u_1 和 i_1 ?

$$i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \quad (1)$$

$$i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \quad (2)$$

由(1)和(2)得:

$$u_1 = -\frac{G_{22}}{G_{21}}u_2 + \frac{1}{G_{21}}i_2 \quad i_1 = \left(G_{12} - \frac{G_{11}G_{22}}{G_{21}}\right)u_2 + \frac{G_{11}}{G_{21}}i_2$$

$$\text{令 } T_{11} = -\frac{G_{22}}{G_{21}} \quad T_{12} = \frac{-1}{G_{21}} \quad T_{21} = \frac{G_{12}G_{21} - G_{11}G_{22}}{G_{21}} \quad T_{22} = \frac{-G_{11}}{G_{21}}$$

$$\text{即 } u_1 = T_{11}u_2 \ominus T_{12}i_2$$

$$i_1 = T_{21}u_2 \ominus T_{22}i_2$$

$$T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

(注意负号)

称为传输参数 (T) 矩阵



如何考虑 T 参数的**互易**和**对称**条件?

基本思路: 回归 G 参数

$$\begin{aligned}
 u_1 &= T_{11}u_2 - T_{12}i_2 \\
 i_2 &= -\frac{1}{T_{12}}u_1 + \frac{T_{11}}{T_{12}}u_2 \\
 &\quad G_{21} \qquad G_{22} \\
 i_1 &= T_{21}u_2 - T_{22}i_2 \\
 &= T_{21}u_2 + \frac{T_{22}}{T_{12}}u_1 - \frac{T_{11}T_{22}}{T_{12}}u_2 \\
 i_1 &= \frac{T_{22}}{T_{12}}u_1 + \frac{T_{12}T_{21} - T_{11}T_{22}}{T_{12}}u_2 \\
 &\quad G_{11} \qquad G_{12}
 \end{aligned}$$

互易二端口

$$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1$$

对称二端口

$$T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = 1 \qquad T_{11} = T_{22}$$



T 参数的实验测定 (黑箱)

$$u_1 = T_{11}u_2 - T_{12}i_2$$

$$i_1 = T_{21}u_2 - T_{22}i_2$$

$$T_{11} = \left. \frac{u_1}{u_2} \right|_{i_2=0}$$

$$T_{21} = \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{i_2=0}$$

开路参数

$$T_{12} = \left. \frac{u_1}{-i_2} \right|_{u_2=0}$$

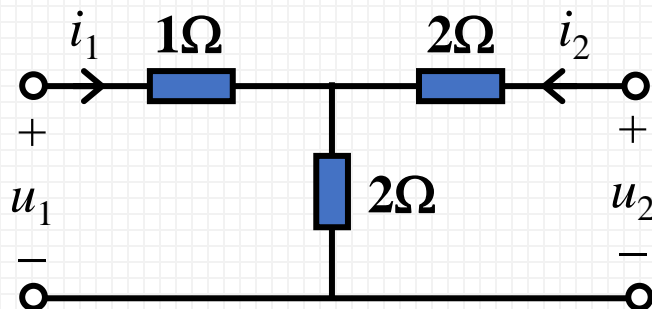
$$T_{22} = \left. \frac{i_1}{-i_2} \right|_{u_2=0}$$

短路参数

能这样做的**前提**是端口2能够**被开路**和**短路**!

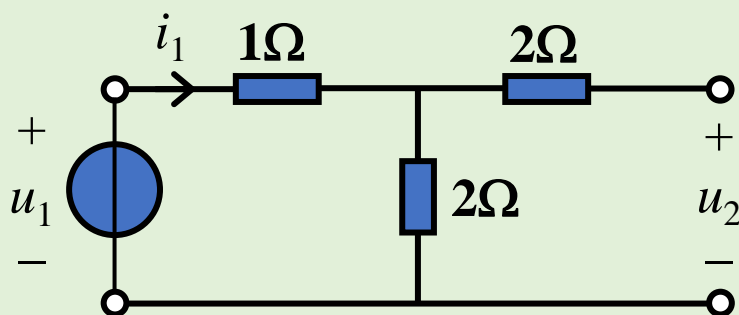
例4 求 T 参数

法1 (黑箱)



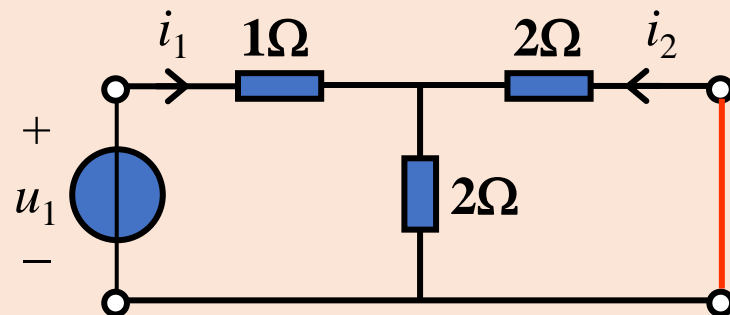
$$u_1 = T_{11}u_2 - T_{12}i_2$$

$$i_1 = T_{21}u_2 - T_{22}i_2$$



$$T_{11} = \left. \frac{u_1}{u_2} \right|_{i_2=0} = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$T_{21} = \left. \frac{i_1}{u_2} \right|_{i_2=0} = 0.5 \text{ S}$$



$$T_{12} = \left. \frac{u_1}{-i_2} \right|_{u_2=0} = \frac{i_1[1 + (2//2)]}{0.5i_1} = 4 \Omega$$

$$T_{22} = \left. \frac{i_1}{-i_2} \right|_{u_2=0} = \frac{i_1}{0.5i_1} = 2$$

法2

先写出 G 或 R 参数，再解出 T 参数

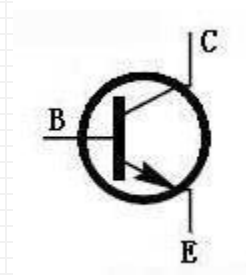
法3 (白箱)

根据 KCL、KVL 列方程并整理



(4) H 参数和方程

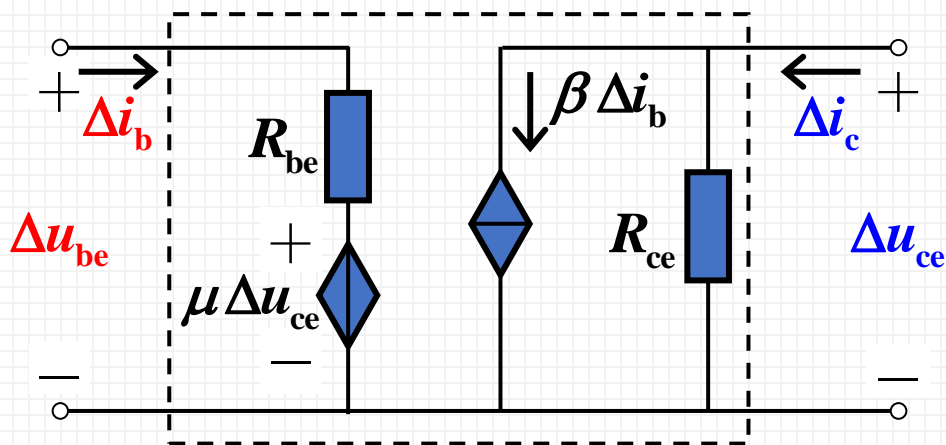
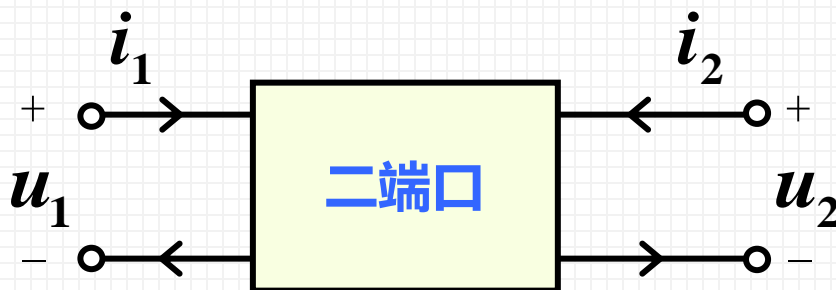
H 参数也称为**混合参数**，常用于**双极型晶体管**等效电路。



H 参数方程

$$u_1 = H_{11}i_1 + H_{12}u_2$$

$$i_2 = H_{21}i_1 + H_{22}u_2$$

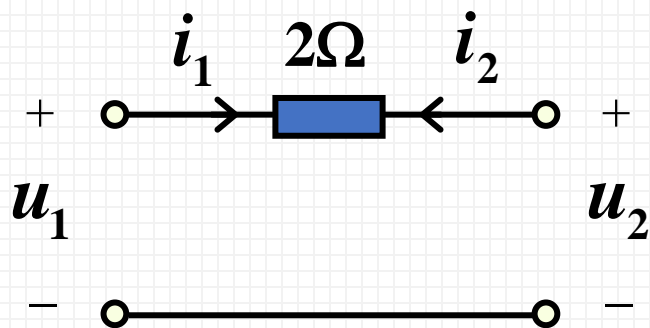


$$\Delta u_{be} = R_{be} \Delta i_b + \mu \Delta u_{ce}$$

$$\Delta i_c = \beta \Delta i_b + \frac{\Delta u_{ce}}{R_{ce}}$$

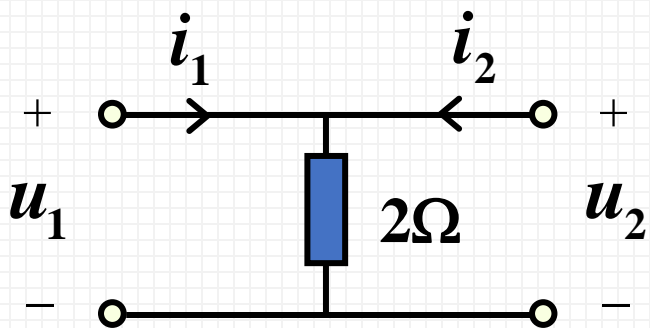
为什么用这么多参数表示？

- (1) 为描述电路**方便**，测量方便(如 H)。
- (2) 有些电路**只存在某几种参数**。



$$G = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \text{S}$$

R 参数不存在



$$R = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Omega$$

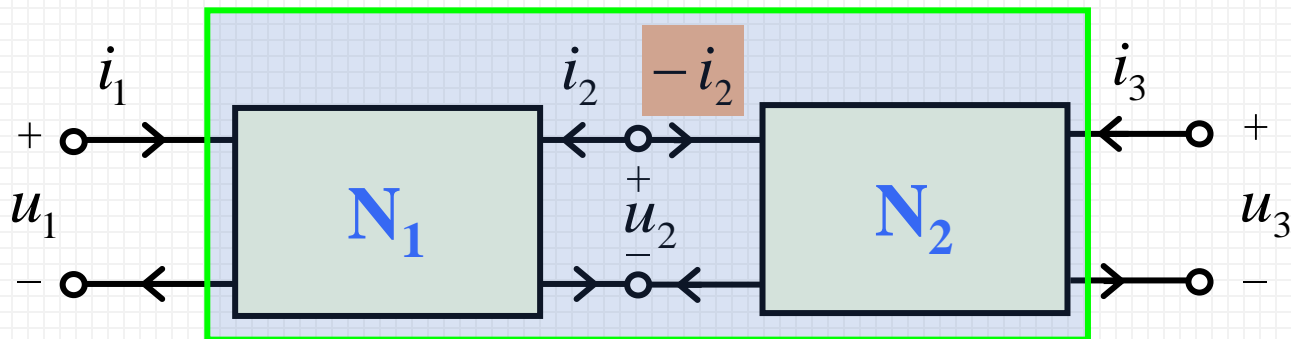
G 参数不存在

- (3) 有些电路**不能端口短路 / 开路** (黑箱法)。



为什么T参数会有这么怪怪的定义？

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

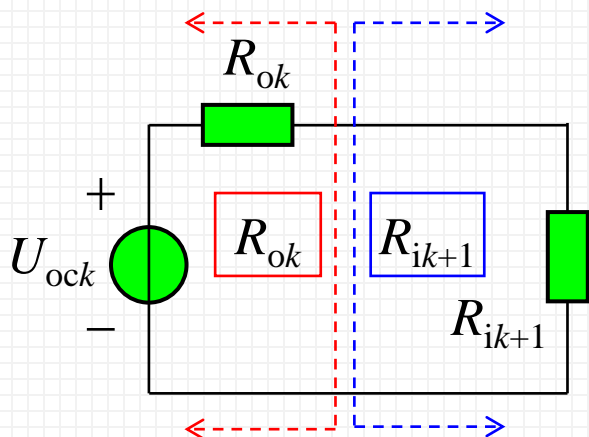
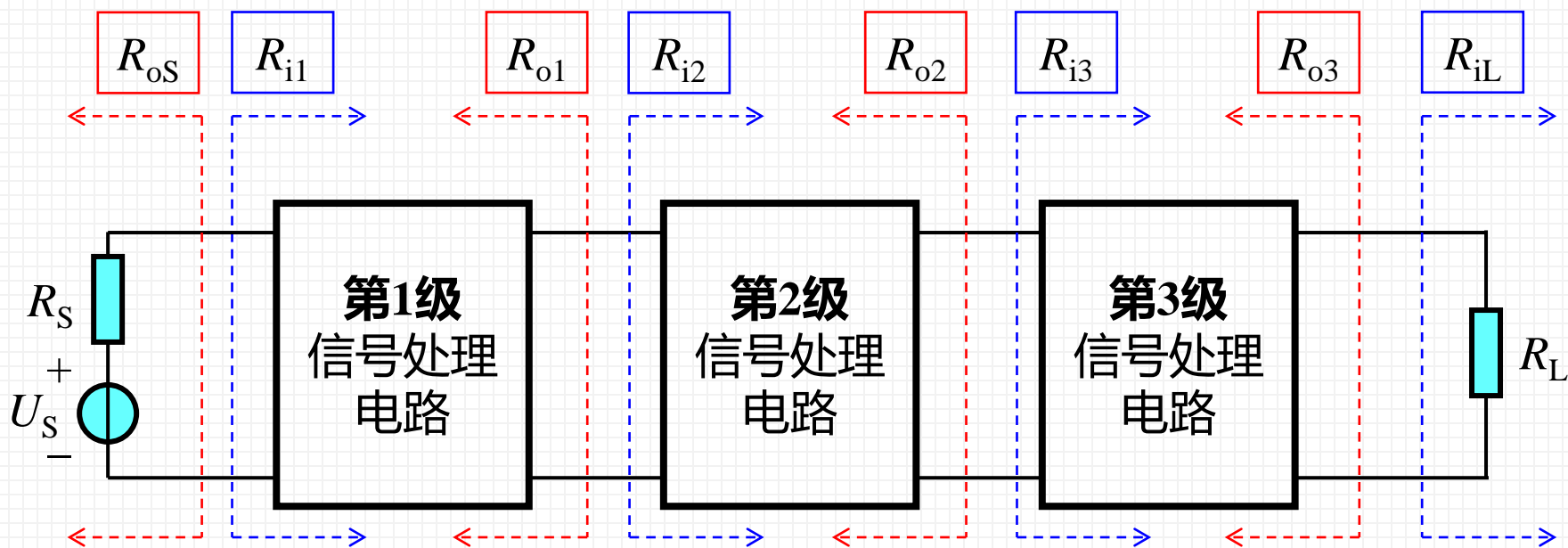
$$\begin{bmatrix} u_2 \\ -i_2 \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} u_3 \\ -i_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = T_1 T_2 \begin{bmatrix} u_3 \\ -i_3 \end{bmatrix}$$

级联

T 参数的定义方式，确保**级联**对外的 T 参数容易获取

级联的实际应用



每一级信号处理电路的 R_i 为

从信号**输入端**向输出端看的**戴维南电阻**

每一级信号处理电路的 R_o 为

从信号**输出端**向输入端看的**戴维南电阻**

R_i 越大越好 \longrightarrow 从前一级信号处理电路获得的电压大 \longrightarrow 对前级影响小

R_o 越小越好 \longrightarrow 给后一级信号处理电路的电压大 \longrightarrow 带载能力强

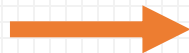


3 二端口网络的等效电路

- ❖ 两个二端口网络等效：
是指对外电路而言，端口的电压、电流关系相同。
- ❖ 求等效电路即根据给定的参数方程确定电路结构和参数。

反向工程：

测量端口电压 - 电流关系



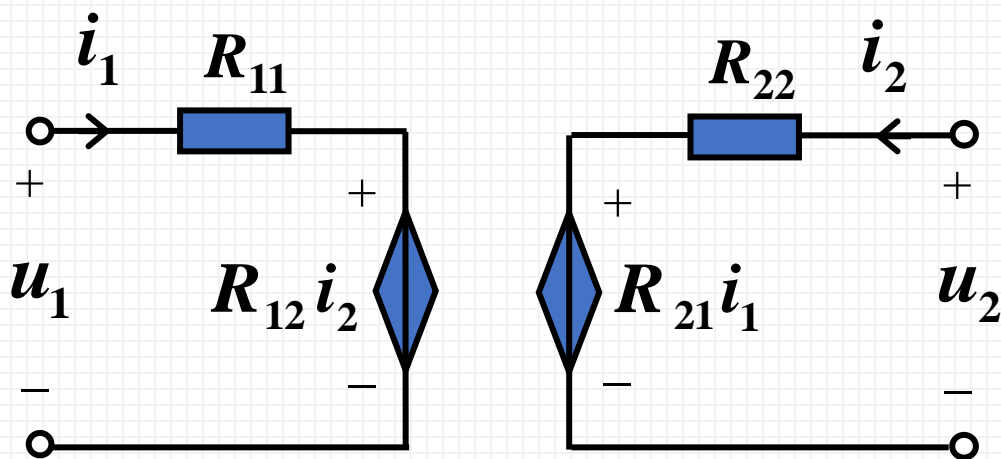
构造电路满足端口
电压 - 电流关系



(1) 由 R 参数方程画等效电路

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2$$

$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2$$





如果只用一个受控源

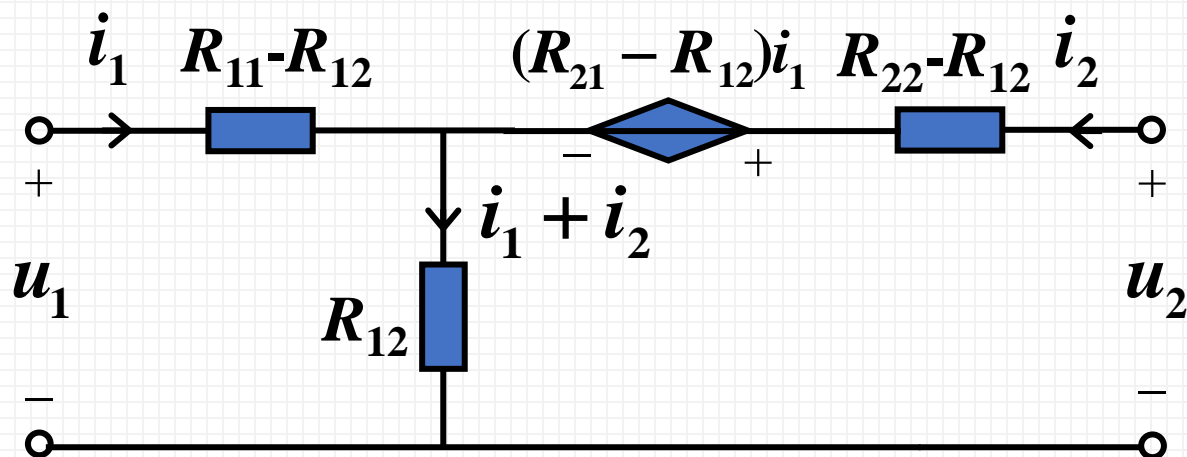
原方程改写为

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2$$

$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2$$

$$u_1 = R_{11}i_1 + R_{12}i_2 + R_{12}i_1 - R_{12}i_1$$

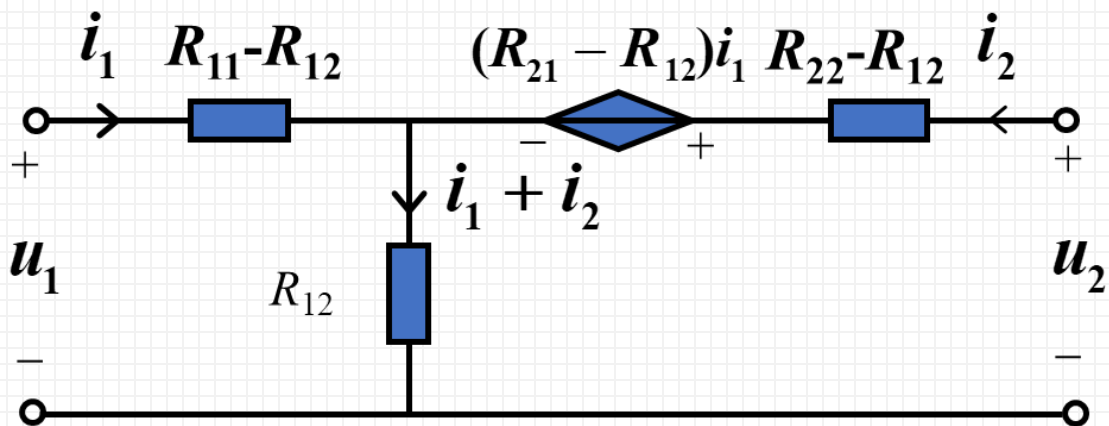
$$u_2 = R_{21}i_1 + R_{22}i_2 + R_{12}i_1 - R_{12}i_1 + R_{12}i_2 - R_{12}i_2$$



电路综合

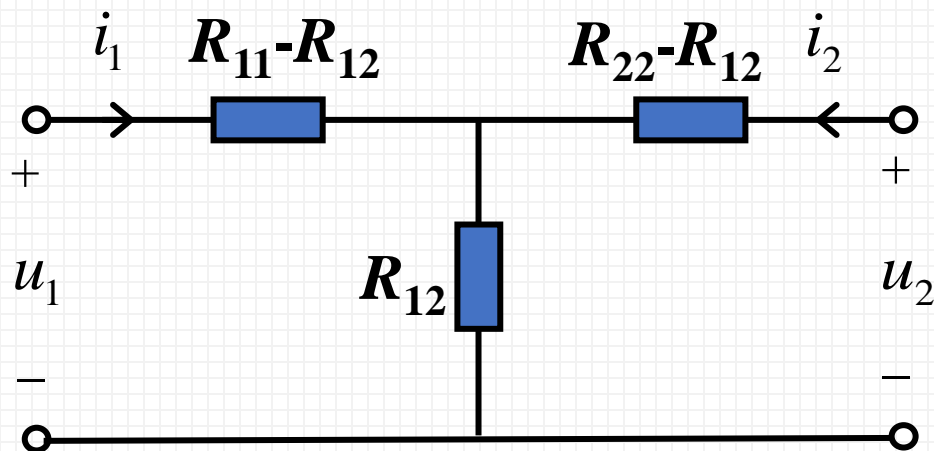
同一个参数方程，可以画出结构不同的等效电路。等效电路不唯一。

能不用受控源吗？为什么



互易网络

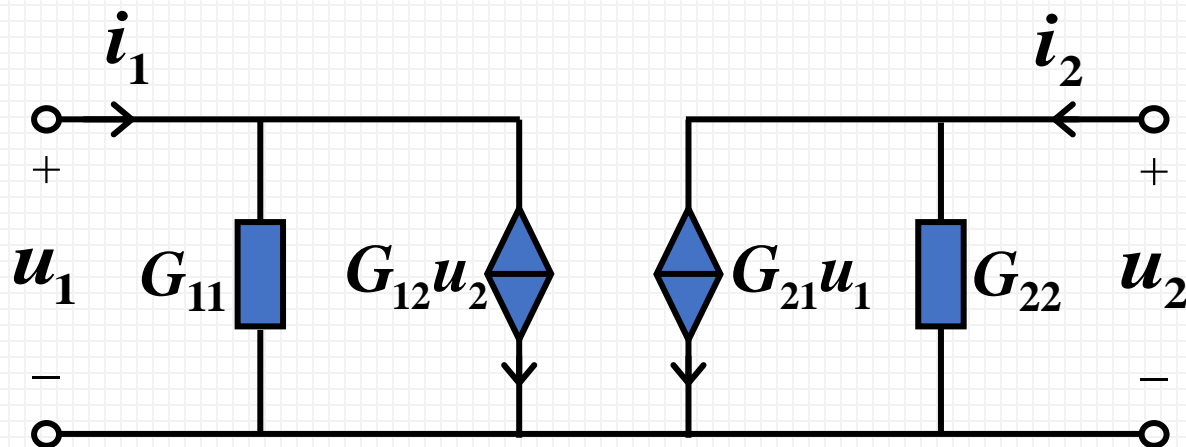
$$R_{12}=R_{21}$$



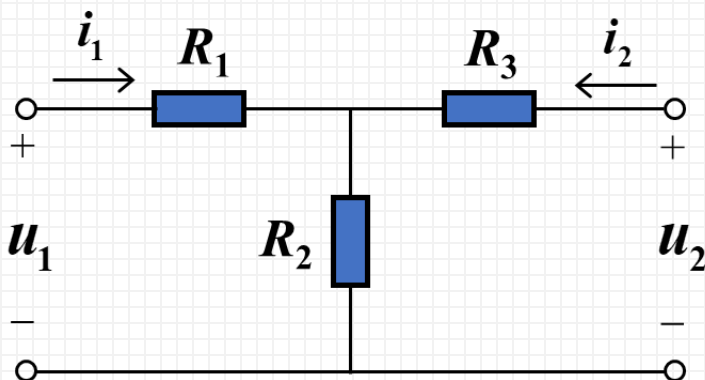
网络对称 ($R_{11}=R_{22}$) 则等效电路也对称

(2) 由 G 参数方程画等效电路 (2个受控源)

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}u_1 + G_{12}u_2 \\ i_2 = G_{21}u_1 + G_{22}u_2 \end{cases}$$

(3) T 参数的等效电路? 教材例2.7.6

若二端口互易



$$R_2 = \frac{1}{T_{21}}$$

$$R_1 = \frac{T_{11} - 1}{T_{21}} \quad R_3 = \frac{T_{22} - 1}{T_{21}}$$

记住这个有时候能占便宜!



小结

- 1) 等效只对两个端口的电压，电流关系成立。
对端口内电路不一定成立。
- 2) 若网络对称则等效电路也对称。
- 3) 给定参数矩阵求等效电路。
互易二端口: **T 型或 Π 型电阻电路等效。**
非互易二端口: 至少一个受控源。