Review

$$L: x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

•第一型曲线积分

$$\int_L f\mathrm{d}l = \int_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

•第二型曲线积分

$$\vec{v}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_L \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_L \vec{v} \cdot \vec{\tau}\,\mathrm{d}l$$

$$= \pm \int_\alpha^\beta \{Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)\}\mathrm{d}t$$

t 增加与L 的正(反)向一致时取正(负)号.

•方法三 $S: z = f(x,y), (x,y) \in D,$

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \pm \iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

•方法四:直接化二重积分S在坐标面上的投影区域上的二重积分

$$\iint_S P \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z = \pm \iint_{D_{yz}} P \mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iint_S Q \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x = \pm \iint_{D_{xz}} Q \mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

$$\iint_S R \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

§5. Green公式及其应用

1.*Green*公式

Thm. (*Green*公式) 设$D\subset R^2$为有界区域,其边界∂D是逐段光滑的有向曲线.设$P(x,y),Q(x,y)$在D内连续可微,在闭区域$\bar{D}=D\cup\partial D$上连续,则

$$\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Remark:*Green*公式中∂D为有向曲线,沿∂D的正向前进时, 区域D总在左手侧.

Proof: 只要证明以下两式:

$$\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \oint_{\partial D} Q\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

以下证第一式,第二式同理可证.

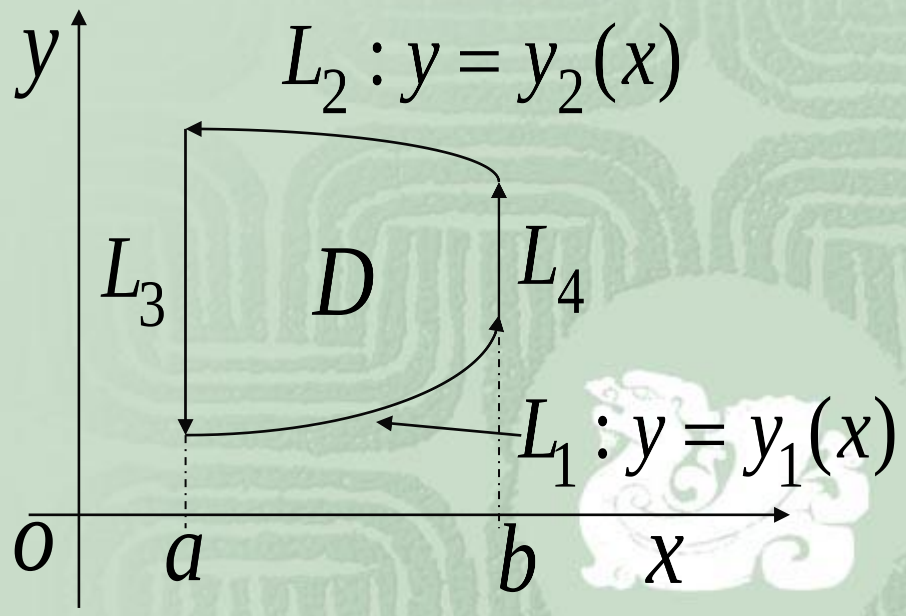
Case1. D为单连通区域,不妨设D可表示为

$$D: a \le x \le b,$$

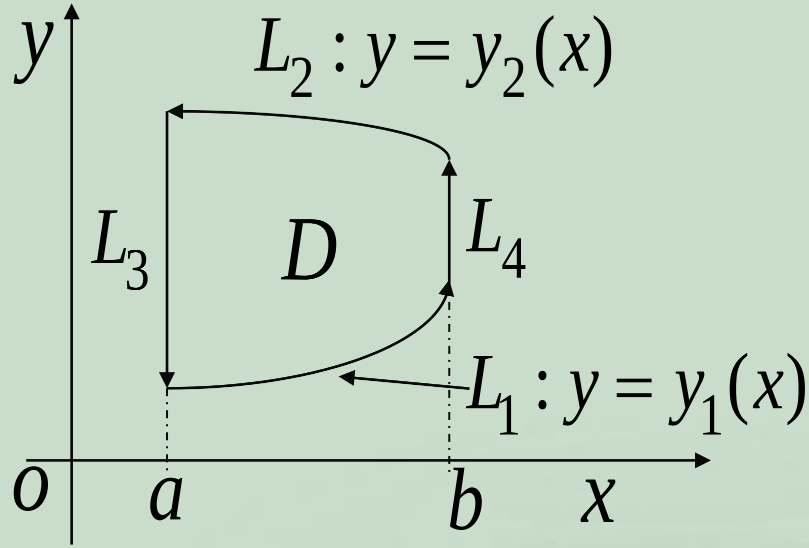
$$y_1(x) \le y \le y_2(x),$$

$$y_1, y_2 \in C[a,b].$$

$$\partial D = \bigcup_{i=1}^{4} L_i$$



$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\mathrm{d}y$$

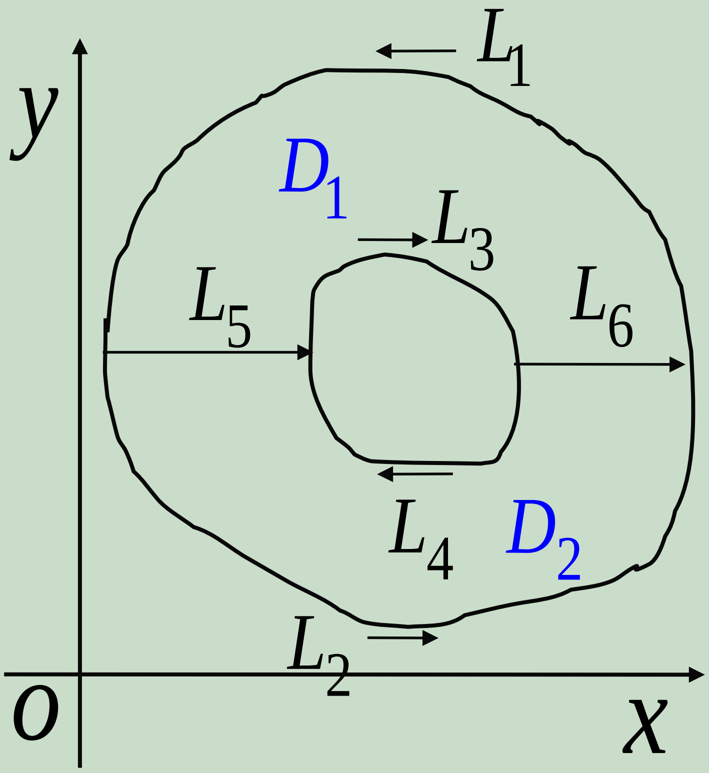
$$= \int_a^b P(x, y_2(x))\mathrm{d}x - \int_a^b P(x, y_1(x))\mathrm{d}x$$

$$= -\int_{L_2} P(x, y)\mathrm{d}x - \int_{L_1} P(x, y)\mathrm{d}x.$$

注意到$\int_{L_3} P(x, y)\mathrm{d}x = \int_{L_4} P(x, y)\mathrm{d}x = 0$, 于是

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\left(\int_{L_1} + \int_{L_2} + \int_{L_3} + \int_{L_4}\right) P\mathrm{d}x = -\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x.$$

Case2. D为多连通区域时, 可用辅助线将D分为若干个单连通区域$D_1, D_2, \cdots, D_n$. 不妨设添加辅助线L_5, L_6后, 可将区域D分成两个单连通区域D_1, D_2.



$$\partial D = L_1 + L_2 + L_3 + L_4,$$

$$\partial D_1 = L_1 + L_3 + L_5 + L_6,$$

$$\partial D_2 = L_2 + L_4 + L_5^- + L_6^-.$$

$$\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x = \oint_{\partial D_1} P\mathrm{d}x + \oint_{\partial D_2} P\mathrm{d}x$$

$$= -\iint_{D_1} P'_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_2} P'_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D} P'_y \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \square$$

Remark:$Green$公式是$Newton-Leibnitz$公式对于二元函数的某种推广.

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\oint_{\partial D} P\mathrm{d}x,$$

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} Q\mathrm{d}y.$$

Remark:注意$Green$公式成立的条件:$P(x,y),Q(x,y)$在D内连续可微,在闭区域$\bar{D}=D\bigcup\partial D$上连续.

Remark. $\vec{v}=(P,Q)$, 利用梯度算子 $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})$,

定义旋度算子 $\nabla\times$, 记为

$$\operatorname{rot}\vec{v}=\nabla\times\vec{v}\triangleq\det\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ P & Q\end{pmatrix},$$

则Green公式可写为

$$\oint_{\partial D}\vec{v}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}l=\iint_D\nabla\times\vec{v}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例: 设Ω为$\mathbb{R}^2$中由分段连续可微曲线围成的闭区域.则Ω的面积$\sigma(\Omega)$可由以下各式计算.

$$\sigma(\Omega)=\oint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y=-\oint_{\partial\Omega}y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.$$

Proof: 由Green公式

$$\oint_{\partial\Omega}x\mathrm{d}y=\iint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sigma(\Omega),$$

$$-\oint_{\partial\Omega}y\mathrm{d}x=\iint_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sigma(\Omega).\square$$

Remark:设上例中$\partial\Omega$的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \alpha \le t \le \beta,$$

则

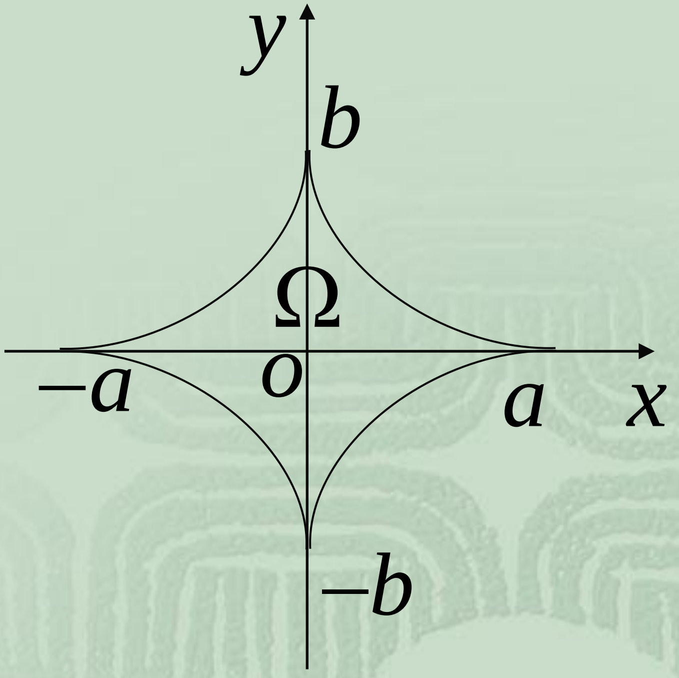
$$\sigma(\Omega) = \frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

$$= \pm\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\right]\mathrm{d}t$$

$$= \pm\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}\mathrm{d}t$$

实际计算时不必顾虑符号的选择,只要对最后结果取绝对值即可.

例:求星形曲线$x = a\cos^3 t, y = b\sin^3 t, 0 \le t \le 2\pi$所围成的平面图形Ω的面积.



解:$\sigma(\Omega) = \dfrac{1}{2}\oint_{\partial\Omega} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$

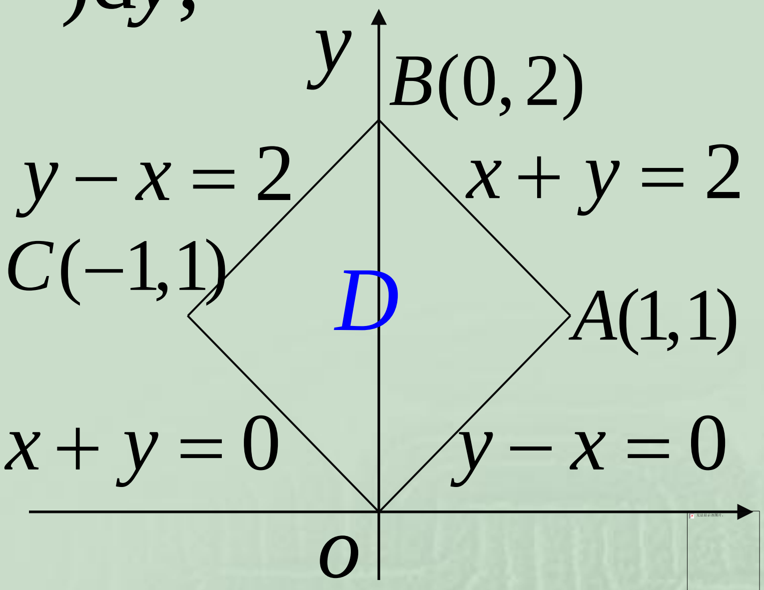
$$= \frac{3}{2}ab\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{8}ab\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{3}{16}ab\int_0^{2\pi} (1-\cos 4t)\mathrm{d}t = \frac{3}{8}\pi ab.\square$$

例: $I=\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$,

L是以$OABC$为顶点的正方形D的边界∂D(逆时针方向).



解: 由Green公式

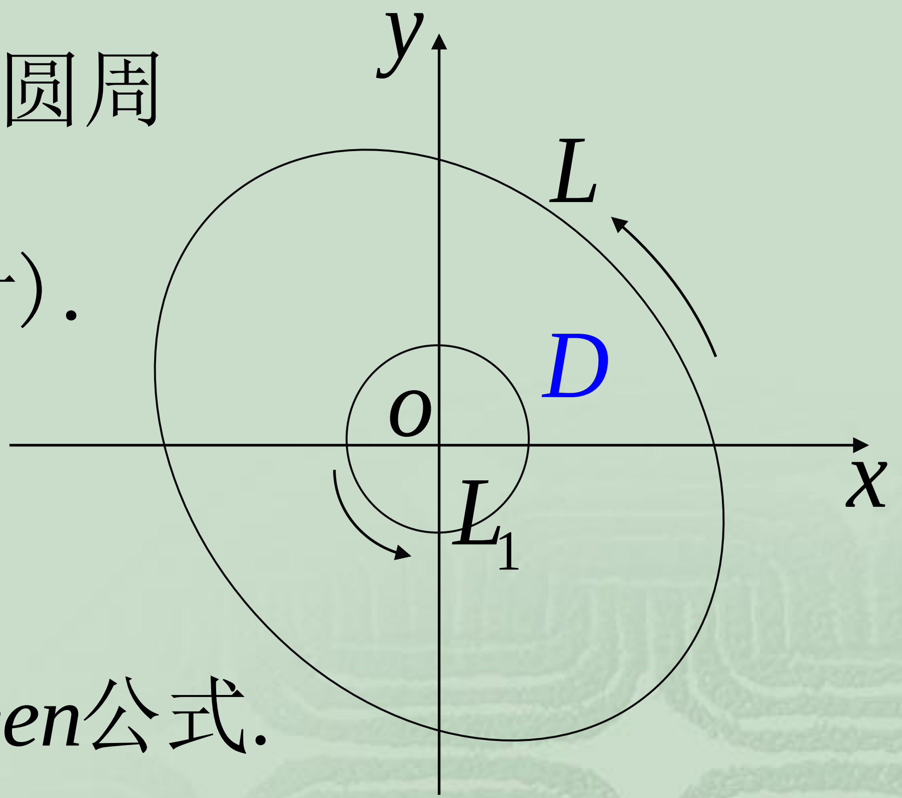
$$I=\iint_D\left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (令u=y-x, v=x+y)$$

$$=2\iint_{0\le u,v\le 2} -u\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=-\int_0^2 u\mathrm{d}u\int_0^2\mathrm{d}v=-4 \square$$

例: $I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, L为椭圆周

$x^2+xy+y^2=R^2$(逆时针).



分析:因为P,Q在原点无定义,不能直接在椭圆$x^2+xy+y^2=R^2$上用Green公式.

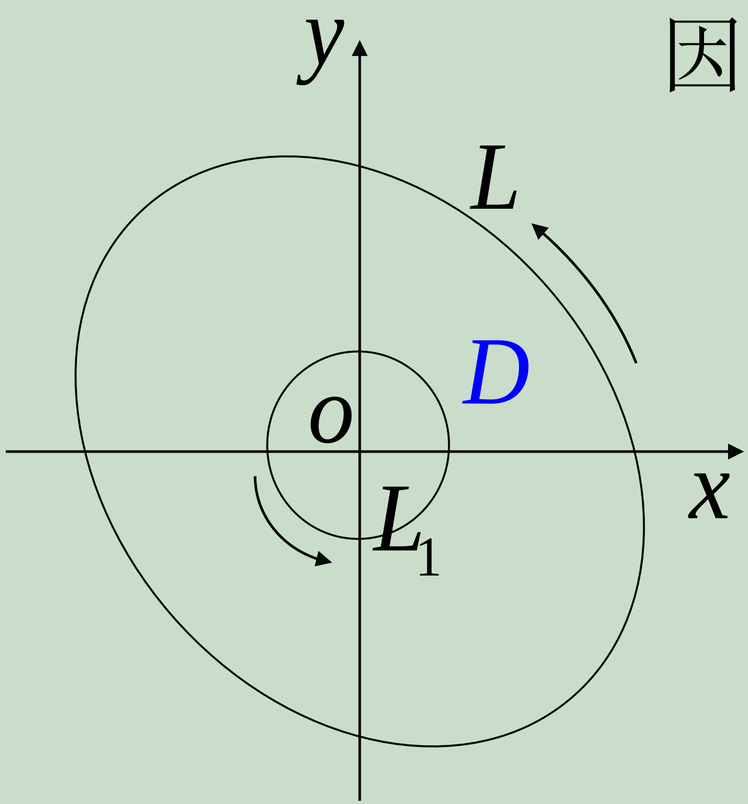
解:设L_1为逆时针方向圆周$x^2+y^2=r^2$, r充分小,从而L_1在L内部.

$$P=-y/(x^2+y^2),\ Q=x/(x^2+y^2),$$

在L与L_1^-围成的环形区域D上$Q'_x-P'_y\equiv 0$.

由Green公式,

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} - \oint_{L_1} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$



因此, $$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

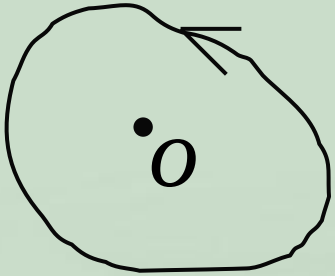
$$= \oint_{L_1} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}{r^2}\,\mathrm{d}\theta$$

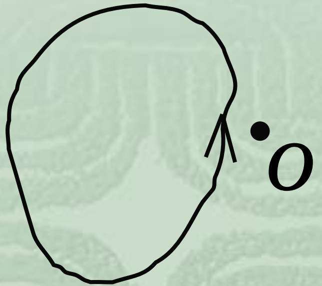
$$= 2\pi.\square$$

Remark: $I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$,

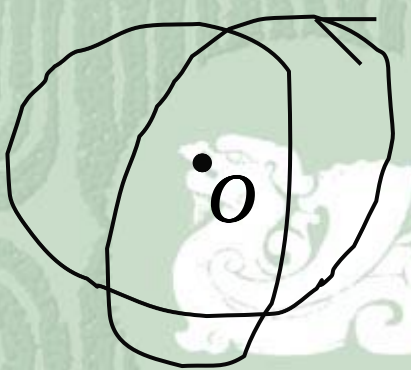
•若L为分段光滑简单正向闭曲线，原点在其内部，则$I=2\pi$;



•若L为分段光滑简单正向闭曲线，原点在其外部，则$I=0$;



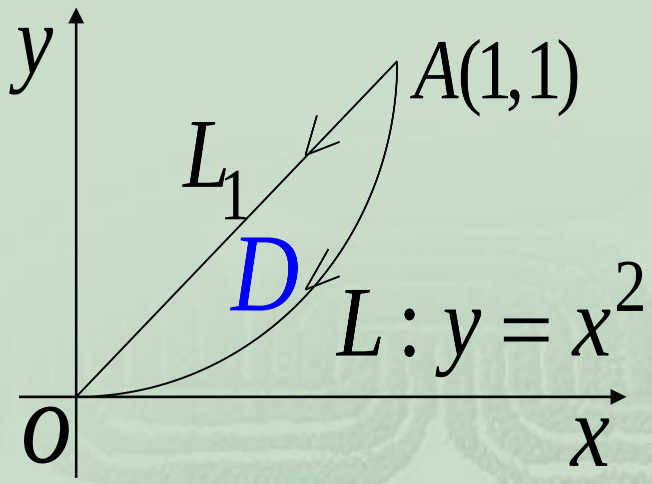
•若L为分段光滑正向闭曲线，绕原点n圈，则$I=2n\pi$.



例$I=\int_L xe^{-(x^2-y^2)}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x+ye^{-(x^2-y^2)}(1+x^2+y^2)\mathrm{d}y.$

其中L为$y=x^2$上从$A(1,1)$到$O(0,0)$的一段.

解:设L_1为从A到$O(0,0)$的有向线段,记L_1与L所围区域为D.令



$$P=xe^{-(x^2-y^2)}(1-x^2-y^2),$$

$$Q=ye^{-(x^2-y^2)}(1+x^2+y^2),$$

则$Q'_x=P'_y=-2xy(x^2+y^2)e^{-(x^2-y^2)}$.

由Green公式,$\int_{L^-\cup L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D(Q'_x-P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

于是$I=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_1^0 2t\mathrm{d}t=-1.$□

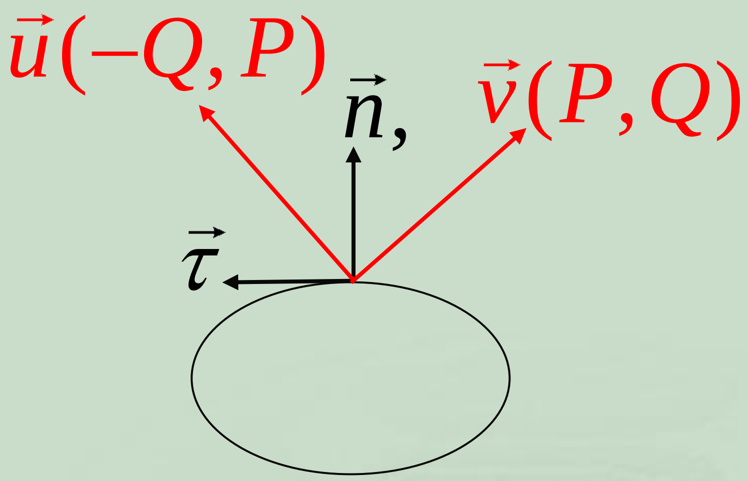
2.Green公式的变形

$$\vec{v}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$$

$$\vec{u}=-Q(x,y)\vec{i}+P(x,y)\vec{j},$$

$\vec{\tau}$为∂D的单位正切向量,

$\vec{n}$为∂D的单位外法向量



$$\vec{u}\cdot\vec{\tau}=\vec{v}\cdot\vec{n},$$

$$\oint_{\partial D}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l=\oint_{\partial D}\vec{u}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}l=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial(-Q)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是得到Green公式的等价形式

$$\oint_{\partial D}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l=\iint_D(P_x'+Q_y')\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$\vec{v}=(P,Q)$, 利用梯度算子$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y})$, 定义

散度算子$\nabla\cdot$, 记为

$$\mathrm{div}\vec{v}=\nabla\cdot\vec{v}\triangleq P_x'+Q_y'.$$

于是Green公式可记为

$$\oint_{\partial D}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l=\iint_D\nabla\cdot\vec{v}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例:设Ω为平面区域,$u(x,y)\in C^2(\Omega)$.证明:

$u(x,y)$是调和函数(即$\Delta u \triangleq u''_{xx}+u''_{yy}\equiv 0$)

$\Leftrightarrow$ 对Ω内任意圆(域)D,有$\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=0.$

Proof. "$\Rightarrow$"设u是调和函数, D为Ω中圆,由$Green$公式的等价形式

$$\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=\oint_{\partial D}\mathrm{grad}u\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}l$$

$$=\iint_D(u''_{xx}+u''_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

$"\Leftarrow"$:(反证法)设$u''_{xx}+u''_{yy}$在Ω上不恒为0.则不妨设$\exists(x_0,y_0)\in\Omega, s.t.$

$$u''_{xx}(x_0,y_0)+u''_{yy}(x_0,y_0)=a>0.$$

由u的二阶连续可微性,$\exists\delta>0$,使得在

$$D=\{(x,y)\in\Omega\,|\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\delta^2\}$$

上$u''_{xx}+u''_{yy}$的值$\ge a/2$.于是

$$\oint_{\partial D}\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}l=\iint_D(u''_{xx}+u''_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ge(a/2)\cdot\pi\delta^2>0.$$

与已知矛盾.故在区域Ω上$u''_{xx}+u''_{yy}\equiv 0.$□

例* $f(x,y)\in C^2(\mathbb{R}),\ f''_{xx}(x,y)+f''_{yy}(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$.

证明:(1) $\oint_{L_r}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}l=\pi(1-e^{-r^2}),L_r:x^2+y^2=r^2$,逆时针.

(2) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(xf'_x+yf'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2e}$.

Proof.(1) $\oint_{L_r}\frac{\partial f}{\partial\vec{n}}\mathrm{d}l=\oint_{L_r}\mathrm{grad}f\cdot\vec{n}\mathrm{d}l$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}(f''_{xx}+f''_{yy})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi(1-e^{-r^2}).$$

(2) 由(1)得：

$$\pi(1-e^{-r^2})=\oint_{L_r}\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}l=\oint_{L_r}\mathrm{grad}f\cdot\vec{n}\mathrm{d}l$$

$$=\oint_{L_r}\frac{xf_x'+yf_y'}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}l=\int_0^{2\pi}(r\cos\theta f_x'+r\sin\theta f_y')\mathrm{d}\theta$$

于是 $$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(xf_x'+yf_y')\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}(r\cos\theta f_x'+r\sin\theta f_y')\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^1\pi(1-e^{-r^2})r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2e}.\square$$

3.平面向量场

Def. 若连续向量场$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}$在区域$D$内的第二型曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$与路线无关（只与$L$的起点和终点有关），则称$\vec{v}$为区域$D$内的保守场.

Def. 有势场$\vec{u}$： $\exists f, s.t., \vec{u}=\nabla f$

无源场$\vec{u}$： $\nabla\cdot\vec{u}=0$

无旋场$\vec{u}$： $\nabla\times\vec{u}=0$

Thm. 设$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}$为区域$D\subset\mathbb{R}^2$上的连续向量场,

则以下命题等价:

(1)$\vec{v}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$是$D$上的保守场,

(2)对于D中任意逐段光滑的有向闭曲线L,

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0.$$

(3)$\vec{v}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$为$D$上有势场, 即存在

函数$f(x,y)$,使得$\mathrm{grad}f(x,y)=\vec{v}(x,y)$.

Proof. 易证$(1)\Leftrightarrow(2)$,下证$(1)\Leftrightarrow(3)$.

(3) $\Rightarrow$ (1): 设$\vec{v}$有势函数f, $\vec{v}=\nabla f$, 即$f'_x = P$, $f'_y = Q$.
任给逐段光滑的有向曲线L, 设其起点为A, 终点为B, 其参数方程为$x = x(t), y = y(t), \alpha \le t \le \beta$, 且$A = (x(\alpha), y(\alpha)), B = (x(\beta), y(\beta))$. 则

$$\begin{aligned}\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y &= \int_\alpha^\beta [Px'(t) + Qy'(t)]\mathrm{d}t \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(x(t), y(t))\big)\mathrm{d}t \\ &= f(x(\beta), y(\beta)) - f(x(\alpha), y(\alpha)) \\ &= f(B) - f(A).\end{aligned}$$

因此积分与路径无关.

(1) $\Rightarrow$ (3)任意取定$(x_0, y_0) \in D$,定义D上的二元函数

$$f(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,\ \ \forall (x,y)\in D.$$

它表示$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}$在以$(x_0, y_0)$为起点,以$(x, y)$为终点的逐段光滑有向曲线上的第二型曲线积分. 因$\vec{v}$为$D$上保守场,积分与路径无关,函数$f(x, y)$有定义.

下证f为$\vec{v}$的势函数, 即$f_x'=P,\ f_y'=Q.$

设$(x, y), (x, y+\Delta y) \in D$,则

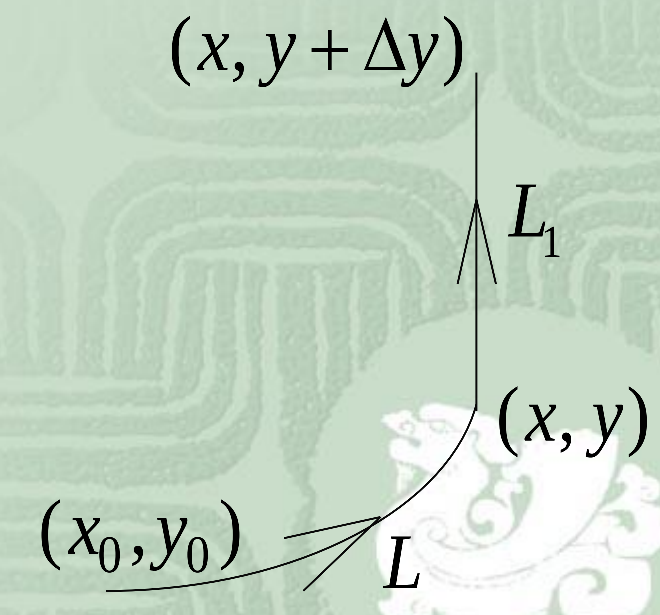
$$f(x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

$$=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y+\Delta y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

因积分与路径无关,对后一积分任意取定一条以(x_0, y_0)为起点,以(x, y)为终点的逐段光滑曲线L,对前一积分,其积分曲线从(x_0, y_0)先沿L至(x, y),再沿平行于oy轴的直线段L_1从(x, y)到$(x, y+\Delta y)$.

于是

$$
\begin{aligned}
& f(x, y+\Delta y) - f(x, y) \\
&= \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\
&= \int_{y}^{y+\Delta y} Q(x, s)\mathrm{d}s. \\
&= \int_{0}^{\Delta y} Q(x, y+t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$



由积分中值定理,

$$\frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y}\int_0^{\Delta y} Q(x, y+t)\mathrm{d}t$$

$$= Q(x, y+\theta\Delta y) \quad (\text{其中} 0 < \theta < 1)$$

$$\to Q(x, y) \quad (\text{当}\Delta y \to 0\text{时.})$$

即 $f_y'(x, y) = Q(x, y).$

同理 $f_x'(x, y) = P(x, y).$ □

Def: 若$\mathrm{d}f(x,y)=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$,则称$f$是微分形式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 的原函数.

Remark. f是$\vec{v}=P\vec{i}+Q\vec{j}$ 的势函数

$$\Leftrightarrow f\text{是}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \text{ 的原函数.}$$

Remark. 并非所有的向量场都有势函数, 因此, 并非所有的微分形式都有原函数.

Remark.势函数(原函数)不唯一,任意两个势函数(原函数)之间只相差一个常数.

Remark: 若$\vec{v}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$在区域$D$中有势函数$f(x,y)$, 则对$D$中任意一条以$A$为起点,以$B$为终点的逐段光滑有向曲线$L$,都有

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=f(B)-f(A).$$

Remark. 连续的保守场一定是有势场.

Remark.连续可微的保守场一定是无旋场.

Proof. $\vec{v}=(P,Q)$为连续可微的保守场,则$\vec{v}$为有势场,

$\exists f\in C^2$, s.t. $\vec{v}=\nabla f$, 即$P=f'_x, Q=f'_y$. 于是

$$\nabla\times\vec{v}=Q'_x-P'_y=f''_{xy}-f''_{yx}\equiv 0.\square$$

反之,无旋场不一定是保守场(例子?).下面的定理说明在一定的条件下,无旋场是保守场.

Def. 称$D\subset\mathbb{R}^2$为单连通区域,若D内任意一条简单闭曲线可以连续收缩为D内一个点;否则称D为复连通区域.

Thm.$D\subset\mathbb{R}^2$为单连通区域,$\vec{v}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$为$D$上连续可微的向量场.则以下命题等价:

(1)$\vec{v}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$为$D$上的保守场.

(2)$\vec{v}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$为$D$上的无旋场, 即

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\equiv 0.$$

Proof. 前面的Remark已证(1) $\Rightarrow$ (2).只要证(2) $\Rightarrow$ (1).

任取D中逐段光滑的有向闭曲线L,因D为单连通区域,L包围的区域D_1完全包含在D中. 而$\vec{v}$为D中无旋场,因此在D_1上,$Q'_x - P'_y \equiv 0$. 由Green公式得

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_{D_1} (Q'_x - P'_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

故$\vec{v}$为D上保守场.□

例: 求微分形式$2xy^3\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}y$的原函数.

解法一:(用第二型曲线积分求向量场的势函数)

$$P=2xy^3,Q=3x^2y^2,\ \ Q'_x-P'_y=6xy^2-6xy^2\equiv 0.$$

即$\vec{v}=P\vec{i}+Q\,\vec{j}$为$\mathbb{R}^2$上的无旋场,从而为保守场.存在$\vec{v}$的势函数$f(x,y)$,也即$2xy^3\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}y$的原函数, 满足

$$f(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}2xy^3\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}y.$$

取积分曲线为折线段$(0,0)\to(x,0)\to(x,y)$,则

$$f(x,y)=\int_{(0,0)\to(x,0)}2xy^3\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}y+\int_{(x,0)\to(x,y)}2xy^3\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^x 0\mathrm{d}t+\int_0^y 3x^2t^2\mathrm{d}t=x^2y^3.$$

故$2xy^3\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}y$的原函数为$x^2y^3+C$.

解法二 (偏积分法) 分析:设$\mathrm{d}f=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$,则

$$f_x'(x,y)=P(x,y),\ f_y'(x,y)=Q(x,y).$$

对x求偏导数时,将y视为常数,按照一元函数求导法则运算.反之,若已知$f_x'(x,y)=P(x,y)$,要求$f(x,y)$,则应将$P(x,y)$对x积分,并将y视为常数.因此

$$f(x,y)=\int P(x,y)\mathrm{d}x+g(y).$$

两边对y求导,有 $Q(x,y)=f_y'(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int P(x,y)\mathrm{d}x+g'(y)$.

于是$g'(y)=Q(x,y)-\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int P(x,y)\mathrm{d}x$,解出$g$,从而得$f$.

对本例, $P=2xy^3, Q=3x^2y^2$.

$$f(x,y)=\int 2xy^3\mathrm{d}x+g(y)=x^2y^3+g(y),$$

两边对y求导得

$$3x^2y^2=Q(x,y)=f'_y(x,y)=3x^2y^2+g'(y),$$

$$g'(y)\equiv 0, g(y)\equiv C,$$

因此$Pdx+Qdy$的原函数为 $f(x,y)=x^2y^3+C$.□

例. $\int_L 2xy^3\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}y$, L是 $y=\sin x^2$从$(0,0)$到$(1,\sin 1)$的一段.

解:由上例, $2xy^3\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}y$有原函数 $f(x,y)=x^2y^3$,

于是$\int_L 2xy^3\mathrm{d}x+3x^2y^2\mathrm{d}y=f(1,\sin 1)-f(0,0)=\sin^3 1$.□

4.恰当方程

Def.称具有对称形式的一阶微分方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \qquad (*)$$

为恰当方程, 若方程左端是某个二元函数$u(x,y)$的全微分

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\equiv\mathrm{d}u(x,y).$$

容易验证恰当方程$(*)$的解为$u(x,y)=c.$

Question1.如何判断$(*)$是否恰当方程？ $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$

Question2.如何求恰当方程的解？

一般方法:积分与路径无关, 偏积分法

Remark: 通常判断方程是恰当方程后, 并不需要按上述一般方法来求解, 而是采取″分项组合″的办法, 先把那些本身已经构成全微分的项分出, 再把剩下的项凑成全微分. 这种方法要求熟记一些简单的二元函数的微分, 如

$$y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \mathrm{d}(xy) \qquad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{xy} = \mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right) \qquad \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \mathrm{d}\left(\arctan\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)$$

例: $\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0$

解: 把方程分项组合, 得

$$\cos x\mathrm{d}x+\frac{1}{y}\mathrm{d}y+\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}=0.$$

即

$$\mathrm{d}\sin x+\mathrm{d}\ln|y|+\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)=0,$$

$$\mathrm{d}\left(\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}\right)=0.$$

于是方程的通解为

$$\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}=c, c\in\mathbb{R}. \square$$

5.积分因子

Def.若存在连续可微的函数$\mu=\mu(x,y)$,使得

$$\mu(x,y)P(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \qquad (**)$$

为恰当方程, 则称$\mu(x,y)$为方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \qquad (*)$$

的积分因子.

若(**)为恰当方程,则$\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$,即

$$\mu P_y'+\mu_y' P=\mu Q_x'+\mu_x' Q$$

若(*)存在只与x有关的积分因子, 则$\mu_y=0$,且

$$Q\mu_x'=\mu(P_y'-Q_x'),\quad \text{即}\ \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu}=\frac{P_y'-Q_x'}{Q}\mathrm{d}x.$$

Remark: (*) 存在只与x有关的积分因子$\mu=\mu(x)$的充要条件是$\dfrac{P'_y-Q'_x}{Q}=\varphi(x)$仅为 x 的函数. 此时

$$\mu(x)=\exp\left(\int\varphi(x)dx\right).$$

同理, (*) 存在只与y有关的积分因子$\mu=\mu(y)$的充要条件是$\dfrac{P'_y-Q'_x}{-P}=\psi(y)$仅为 y 的函数. 此时

$$\mu(y)=\exp\left(\int\psi(y)dy\right).\square$$

例: $(y\cos x - x\sin x)\mathrm{d}x + (y\sin x + x\cos x)\mathrm{d}y = 0$

解: $P = y\cos x - x\sin x, Q = y\sin x + x\cos x.$

$$P'_y = \cos x, Q'_x = y\cos x + \cos x - x\sin x, \frac{P'_y - Q'_x}{-P} = 1.$$

方程两边乘积分因子$\mu = e^y$,得

$$e^y(y\cos x - x\sin x)\mathrm{d}x + e^y(y\sin x + x\cos x)\mathrm{d}y = 0.$$

设$\mathrm{d}v(x,y) = e^y(y\cos x - x\sin x)\mathrm{d}x + e^y(y\sin x + x\cos x)\mathrm{d}y$,则

$$v(x,y) = \int e^y(y\cos x - x\sin x)\mathrm{d}x + g(y)$$

$$= e^y(y\sin x + x\cos x - \sin x) + g(y).$$

两边对y求导, 得

$$e^y(y\sin x + x\cos x) = e^y(y\sin x + x\cos x) + g'(y), g'(y) = 0.$$

故$v(x,y) = e^y(y\sin x + x\cos x - \sin x) + c.$

原方程的通解为$e^y(y\sin x + x\cos x - \sin x) + c = 0.$ □

Remark: 先分组, 再找公共的积分因子, 往往能简化计算.

例: $(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y=0$

解: 原方程等价于 $(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)+(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)=0.$

两组都有积分因子 $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, 于是

$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0.$$

即

$$\frac{1}{2}\mathrm{d}\ln(x^2+y^2)+\mathrm{d}\arctan\frac{x}{y}=0.$$

原方程的通解为 $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\arctan\dfrac{x}{y}=C, C\in\mathbb{R}.\square$

例: $(3x^3+y)\mathrm{d}x+(2x^2y-x)\mathrm{d}y=0$

解: 分组得 $(3x^3\mathrm{d}x+2x^2y\mathrm{d}y)+(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)=0.$

第二组有积分因子 $\dfrac{1}{x^2},\dfrac{1}{y^2},\dfrac{1}{x^2+y^2}$. 如果同时照顾到第一组, 则 $\dfrac{1}{x^2}$ 是两组公共的积分因子, 从而

$$(3x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y)+\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{x^2}=0.$$

即

$$\mathrm{d}\left(\frac{3}{2}x^2+y^2\right)-\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)=0.$$

于是原方程的通积分为

$$\frac{3}{2}x^2+y^2-\frac{y}{x}=C, C\in\mathbb{R}.\square$$

例! 用积分因子法解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y+q(x)$

解: 把方程改写为 $[p(x)y+q(x)]\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0.$

$$P=p(x)y+q(x),\quad Q=-1,\quad \frac{P_y'-Q_x'}{Q}=-p(x).$$

方程两边乘积分因子 $\mu=e^{\int -p(x)\mathrm{d}x}$, 得

$$p(x)e^{\int -p(x)\mathrm{d}x}y\mathrm{d}x-e^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}y+q(x)e^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x=0.$$

于是 $$\mathrm{d}\left(ye^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\right)=q(x)e^{\int -p(x)\mathrm{d}x}.$$

原方程的通解为 $ye^{\int -p(x)\mathrm{d}x}=\int q(x)e^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C,$

即 $$y=e^{\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)e^{\int -p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right).\square$$

Remark:将$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p(x)y+q(x)$记为$y'(x)-p(x)y(x)=q(x)$.

两边乘$e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)\mathrm{d}t}$得 $\left(y(x)e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)\mathrm{d}t}\right)'=q(x)e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)\mathrm{d}t}$

两边从x_0到x积分, 得

$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)\mathrm{d}t}=y(x_0)+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s,$$

于是

$$y(x)=e^{\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\left(y(x_0)+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s\right)$$

$$=y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{\int_{s}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s.\square$$

作业：习题4.6

No. 2(2, 3, 5), 3(2), 4(2),

8(2, 3), 9, 11(5)

$$\text{No.8(2)}\ \oint_{\partial D} v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\,\mathrm{d}l=\iint_D v\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D \nabla u\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$