



Review

• Gauss公式 $\iint_{\partial\Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} dx dy dz.$

Green公式 $\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{n} dl = \iint_D \nabla \cdot \vec{v} dx dy$

Remark: Gauss公式成立的条件.

• Stokes公式 $\oint_{\partial S} \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = \iint_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot \vec{n} dS$

Green公式 $\int_{\partial D} \vec{v} \cdot \vec{\tau} dl = \iint_D \nabla \times \vec{v} dx dy$

Remark: 曲面S的选取及定向.



Chap5. 常数项级数

§ 1. 无穷级数的敛散性

级数:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

部分和:
$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Def. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 记为 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$;

若数列 $\{S_n\}$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.



Remark. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 收敛.

Question. $\{S_n\}$ 收敛的必要条件、充分条件、充要条件?

Thm.(级数收敛的必要条件) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Proof $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0$. \square



Thm.(级数收敛的Cauchy准则) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛的充要条件是:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t.$$

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, p \geq 1.$$

Proof. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, s.t.$

$$\left| a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p} \right| =$$

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| < \varepsilon, \quad \forall n > N, p \geq 1. \square$$



Corollary. 改变有限项的值, 添加或删除有限项, 级数的敛散性不变.

Thm. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B, \lambda \in \mathbb{R}$, 则

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda A, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

Corollary. $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)$ 发散.



例. $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ (等比级数又称几何级数 Geometric Series).

(求出 S_n)

解: 当 $|r| \geq 1$ 时, $a_n \not\rightarrow 0$, 发散.

$$\text{当 } |r| < 1 \text{ 时, } S_n = r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r - r^{n+1}}{1 - r}.$$

结论: 当 $|r| < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n = \frac{r}{1 - r}$, 当 $|r| \geq 1$ 时, 发散. \square

例 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

(裂项法)

$$\text{解: } S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1. \square$$



例. 求 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{2^{n-1}}}{1-a^{2^n}} = \frac{a}{1-a^2} + \frac{a^2}{1-a^4} + \frac{a^4}{1-a^8} + \dots$ (归纳法)

解: $S_2 = \frac{a}{1-a^2} + \frac{a^2}{1-a^4} = \frac{a(1+a^2)}{1-a^4} + \frac{a^2}{1-a^4} = \frac{a+a^2+a^3}{1-a^4}$

可归纳证明 $S_n = \frac{a+a^2+\dots+a^{2^n-1}}{1-a^{2^n}} = \frac{a(1-a^{2^n-1})}{(1-a^{2^n})(1-a)}$

$$= \frac{a}{1-a} \cdot \frac{(1/a^{2^n-1} - 1)}{1/a^{2^n-1} - a}$$

故 $|a| < 1$ 时, $S_n \rightarrow \frac{a}{1-a}$; $|a| > 1$ 时, $S_n \rightarrow \frac{1}{1-a}$. \square



例. 已知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛, 求 $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$. (方程法)

解: $a_n = \frac{n}{2^n},$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{n}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

$$S - \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} S + \frac{1}{2},$$

$$S = 2. \square$$



§ 2. 非负项级数

非负项级数: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}. \quad S_n \uparrow$

1. 非负项级数的收敛原理

Thm 非负项级数收敛 \Leftrightarrow 部分和序列有上界.

例 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$ 解: $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot N = \sqrt{N}.$

S_N 无上界, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散. \square



例. 调和级数 (Harmonic series) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

Proof. $S_{2^N} = \sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n}$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{N-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^N} \right)$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{8} \times 4 + \cdots + \frac{1}{2^N} \times 2^{N-1} = 1 + \frac{N}{2}.$$

$\lim_{N \rightarrow \infty} S_{2^N} = +\infty$, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散. \square



例 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$

解:
$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \leq 1 + \sum_{n=2}^N \frac{1}{n(n-1)}$$
$$= 1 + \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 2 - \frac{1}{N} \leq 2.$$

故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 且 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2. \square$

333.2. 5.13



2. 非负项级数的比较判别法

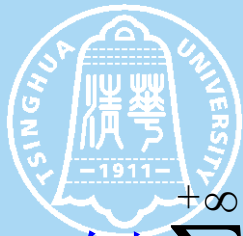
要判断一个级数的收敛性, 可以考虑将其与另一个已经知道收敛性的级数(尺子)做比较.

Thm (比较判别法-普通形式)

$$1) 0 \leq a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N} (\text{或 } \forall n > N_0), \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛}.$$

$$2) a_n \geq b_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N} (\text{或 } \forall n > N_0), \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散}.$$

Proof. 比较两级数的前 n 项和数列. \square



例 $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n^2}$

解: $0 \leq \sin \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. 而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ 收敛. \square

例 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-3}}$ 发散.

解: $\frac{1}{\sqrt{4n-3}} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4n-3}}$ 发散. \square



Thm (比较判别法-极限形式)

$a_n > 0, b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda, 0 \leq \lambda \leq +\infty$, 则

$$1) \lambda < +\infty, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ 收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛};$$

$$2) \lambda > 0, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ 发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散}.$$

Remark. $\lambda \in (0, +\infty)$, 则 $\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 同敛散.

$\lambda = 0$, $\sum b_n$ 收敛, 则 $\sum a_n$ 收敛.

$\lambda = +\infty$, $\sum b_n$ 发散, 则 $\sum a_n$ 发散.



Proof. 2)是1)的推论,下证1).

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$, 则 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$, s.t. $a_n < (\lambda + 1)b_n, \forall n > N_1$. $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛,

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} (\lambda + 1)b_n$ 收敛, 由比较判别法的普通形式, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. \square

例 $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + 1/n)$.

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 1/n)}{1/n} = 1$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ 发散. \square



例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) \quad (a > 0).$

Taylor展开

解: $a_n \triangleq \sqrt[n]{a} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln a} - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1 + \frac{1}{n} \ln a + \frac{(\ln a)^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left[1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]$$
$$= \left(\ln a - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n} + \left(\frac{(\ln a)^2}{2} + \frac{1}{8} \right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty \text{时.}$$

$n \gg 1$ 时, a_n 不变号.可用正项级数判敛法.



当 $a \neq \sqrt{e}$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \frac{1}{n} = \ln a - \frac{1}{2} \neq 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 级数发散;

当 $a = \sqrt{e}$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} < +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 级数收敛. \square

Remark. $o(\cdot)$ 记号的运用有时很方便!

Thm (比较判别法-上下极限形式) $a_n > 0, b_n > 0$.

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.



Thm (Cauchy根式判别法-普通形式)

设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为非负项级数, 则

$$1) \sqrt[n]{a_n} \leq r < 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛.} \quad (a_n \leq r^n)$$

$$2) \text{有无穷多个 } n, \text{ s.t. } \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散.} \quad (a_n \not\rightarrow 0)$$



Thm (Cauchy根式判别法-极限形式)

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为非负项级数, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 则

1) $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛; 2) $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

Proof. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 则 $\exists N, s.t. \forall n > N$, 有 $|\sqrt[n]{a_n} - q| < \frac{|1-q|}{2}$.

1) 若 $q < 1$, 则 $\forall n > N, \sqrt[n]{a_n} < q + \frac{|1-q|}{2} < 1$, 从而 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

2) 若 $q > 1$, 则 $\forall n > N, \sqrt[n]{a_n} > q - \frac{|1-q|}{2} > 1$, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散. \square



例 $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2/2^n.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2/2^n} = 1/2 < 1, \sum_{n=1}^{+\infty} n^2/2^n \text{ 收敛.}$$

例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-(-1)^n}}.$

解: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n-(-1)^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{1-(-1)^n/n}} = \frac{1}{2} < 1, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-(-1)^n}} \text{ 收敛.} \square$



Thm (Cauchy根式判别法-上下极限形式) $a_n \geq 0$, 则

$$1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛}; \quad 2) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散}.$$

Remark 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ 时, 不能利用Cauchy根式判别法

判断 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的收敛性. 例如

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n} = 1, \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n \text{ 发散}. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1/n^2} = 1, \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2 \text{ 收敛}.$$

因此我们需要更精细的判别法(或标尺).



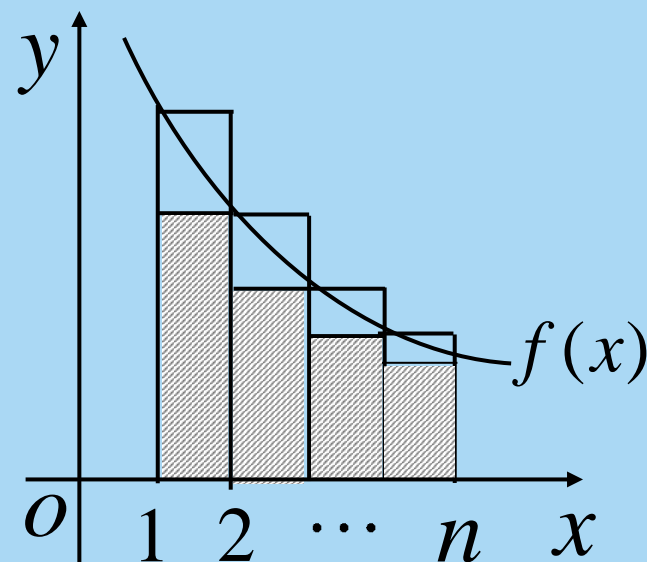
3. 非负项级数的积分判别法

Thm (Cauchy积分判别法) 设

$f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调下降且

非负, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ 与 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$

同时收敛或同时发散.



Proof f 单调下降, 则

$$\int_1^N f(x)dx$$

||

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) \leq \sum_{n=1}^{N-1} \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n). \square$$



例 p -级数: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.

解: $p \leq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散. $p > 0$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \ln x \Big|_{x=1}^{+\infty}, & p = 1 \\ \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_{x=1}^{+\infty}, & p > 0, p \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & 0 < p \leq 1, \\ \frac{1}{p-1}, & p > 1. \end{cases}$$

故 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, $p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散. \square



例. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \begin{cases} \ln(\ln x) \Big|_{x=2}^{+\infty}, & p = 1, \\ \frac{1}{(1-p)(\ln x)^{p-1}} \Big|_{x=2}^{+\infty}, & p \neq 1. \end{cases}$$

$p > 1$ 时, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 收敛.

$p \leq 1$ 时, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 发散. \square



Question. $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$ 的敛散性?

Remark. $a_n > 0$, 利用比较判别法(上极限普通形式)可知

- $a_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right), p > 1, \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛
- $a_n = O\left(\frac{1}{n(\ln n)^p}\right), p > 1, \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛
- $a_n = O\left(\frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}\right), p > 1, \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛



例. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p} \quad (p > 1).$

以 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$ 为标尺!

解法一: $p > 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{(p-1)/2}} = 0, \exists N, s.t. \frac{\ln n}{n^{(p-1)/2}} < \frac{1}{2}, \forall n > N.$

于是, $\frac{\ln n}{n^p} = \frac{1}{n^{(p+1)/2}} \cdot \frac{\ln n}{n^{(p-1)/2}} < \frac{1}{2n^{(p+1)/2}}, \quad \forall n > N.$

$p > 1$, 由比较判别法的普通形式, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 收敛.

法二: 取 $q \in (1, p)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^p} \bigg/ \frac{1}{n^q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{p-q}} = 0, \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ 收敛. \square



例.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln \ln n}}}.$$

以 $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 为标尺!

解: $n^{\frac{1}{\ln \ln n}} = e^{\frac{\ln n}{\ln \ln n}} = \left(e^{\ln(\ln n)} \right)^{\frac{\ln n}{(\ln \ln n)^2}} = (\ln n)^{\frac{\ln n}{(\ln \ln n)^2}}.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{(\ln \ln n)^2} = +\infty, \text{ 于是 } \exists N_0, s.t. \frac{\ln n}{(\ln \ln n)^2} > 2, \forall n > N_0.$$

$$\text{从而有 } \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\ln \ln n}}} = \frac{1}{n \cdot n^{\frac{1}{\ln \ln n}}} < \frac{1}{n(\ln n)^2}, \forall n > N_0.$$

$$\text{故 } \sum_{n=2}^{+\infty} a_n \text{ 收敛. } \square$$



4. 正项级数的比值判别法

要判断一个级数的收敛性, 也可以从其通项的增长速度方面着手考虑.

Thm (比值判别法) 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 都是严格正项级数,

即 $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0, b_n > 0$. 则

$$\left. \begin{array}{l} 1) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ (或 } \forall n > N_0), \\ \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ 收敛} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛.}$$



$$\left. \begin{array}{l} 2) \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \forall n \in \mathbb{N} (\text{或 } \forall n > N_0), \\ \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ 发散} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散}.$$

Proof. 1) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$, 则

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_1 \cdot \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{b_3}{b_2} \cdots \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{a_1}{b_1} b_n.$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛. 同理可证 2). \square

Question. 比值判别法的极限形式和上下极限形式?



在比值判别法中取 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 为等比级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$, 则有

Thm (D'Alembert判别法-普通形式) 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为严格正项级数, 则

$$1) \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛.}$$

$$2) \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散.}$$



Thm (D'Alembert判别法-极限形式) 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为严格正

项级数, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = q$. 则

1) $q < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛; 2) $q > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

Remark 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = 1$ 时, D'Alembert判别法失效.

例如 $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^2$ 收敛, $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$ 发散, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = 1$,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)}{1/n} = 1. \square$



Thm (D'Alembert判别法-上下极限形式) $a_n > 0$, 则

$$1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛. } 2) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散.}$$

例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2^n}$

解: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+1)}{2 \ln n}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$, 故 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{2^n}$ 收敛. \square



例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n!} \cdot 2^n}{n^{n/2}}$

解: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2\sqrt{n+1} \cdot \frac{n^{n/2}}{(n+1)^{(n+1)/2}}$

$$= \frac{2n^{n/2}}{(n+1)^{n/2}} = \frac{2}{\left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{\sqrt{e}} > 1, \text{故级数发散.} \square$$



Remark D'Alembert判别法失效时, 需要更精细的尺度, 如:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}, \dots$$

分别取 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 和 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ 作为比值判别法的尺度, 得到Raabe判别法和Gauss判别法.



Thm (Raabe判别法-普通形式) $a_n > 0$, 则

1) 若 $\exists N_0 \in \mathbb{N}, s.t.$

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \geq q > 1, \forall n > N_0,$$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

2) 若 $\exists N_0 \in \mathbb{N}, s.t.$

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1, \forall n > N_0,$$

则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

Proof. 1) 所给条件等价于 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{q}{n}, \forall n > N_0$.

选取 $p \in (1, q)$, 取级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, 则对充分大的 n , 有



$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$$

$$= 1 + \frac{p}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1 + \frac{q}{n} \leq \frac{a_n}{a_{n+1}}, \quad n \gg 1.$$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛 ($p > 1$), 由比值判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

2) 所给条件等价于 $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1 + \frac{1}{n} = \frac{1}{\frac{n}{1+n}}$, $\forall n > N_0$.

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 因此 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散. \square



Thm (Raabe-极限形式) $a_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = q$, 则

1) 若 $q > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛; 2) 若 $q < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.

Thm (Raabe判别法-上下极限形式) $a_n > 0$, 则

1) $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛;

2) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.



例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$

解: $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{(2n+2)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1},$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1, \text{ 故级数发散(Raabe).} \square$$

Remark. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n/a_{n+1} - 1) = 1$, 则Raabe判别法失效. 例如

$a_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}$, $p > 1$ 时 $\sum a_n$ 收敛; $p \leq 1$ 时 $\sum a_n$ 收敛. 但



当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &= \frac{(n+1)(\ln(n+1))^p}{n(\ln n)^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{\ln(1+1/n) + \ln n}{\ln n}\right)^p \\&= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1/n + o(1/n)}{\ln n}\right)^p = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right)^p \\&= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{p}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right).\end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a_n/a_{n+1} - 1) = 1, \forall p$.



Remark. 利用更精细的标尺 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$, 得到 Gauss 判别法.

Thm (Gauss 判别法) 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 为严格正项级数, 并设

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\nu}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right), n \rightarrow \infty \text{ 时.}$$

1) 若 $\lambda > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 若 $\lambda < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散. (D'Alembert)

2) 设 $\lambda = 1$. 若 $\mu > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 若 $\mu < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散. (Raabe)

3) 设 $\lambda = \mu = 1$. 若 $\nu > 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛, 若 $\nu < 1$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散.



Proof. 3) 若 $\lambda = \mu = 1, \nu > 1$, 取 $p \in (1, \nu)$, $b_n = \frac{1}{n(\ln n)^p}$.

当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 有

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{(n+1)(\ln(n+1))^p}{n(\ln n)^p} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{p}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right).$$

于是, $\exists n_0, s.t.$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \frac{b_n}{b_{n+1}}, \quad \forall n > n_0.$$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛, 由比值判别法, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

同理可证, 当 $\lambda = \mu = 1, \nu < 1$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散. \square



作业：习题5.2 No. 3, 5, 8(1), 9



例. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}} \quad (a > 0). \left(a^{\ln n} = n^{\ln a}, \text{故此级数为} p\text{-级数.} \right)$

解:
$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = n \left(a^{\ln(n+1) - \ln n} - 1 \right) = \frac{a^{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} - 1}{1/n}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{\ln(1+x)} - 1}{\ln(1+x)} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = \ln a,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \ln a.$$

由Raabe判别法, $a > e$ 时, 级数收敛; $a < e$ 时, 级数发散.

此外, $a = e$ 时, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$, 发散. \square



Question. 比值判别法中, 选 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ 为标尺, 还有何结论?

分析: $\frac{b_n}{b_{n+1}} = a^{\ln(n+1) - \ln n} = a^{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}, \ln \frac{b_n}{b_{n+1}} = \ln a \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$

$$n \ln \frac{b_n}{b_{n+1}} = \ln a \cdot n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \ln a.$$

结论: Thm.(对数比值型判别法) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = l$, 则

$$l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛}; \quad l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散}.$$



Question. 请写出对数比值型判别法的一般形式和上下极限形式.

Question. 比较判别法中, 选用 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ 为标尺, 有何结论?

分析: $a_n \geq \frac{1}{a^{\ln n}} \Leftrightarrow \sqrt[n]{a_n} \geq a^{-1}.$

结论: Thm.(对数根式型判别法) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, 则

$$l < \frac{1}{e} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛}; \quad l > \frac{1}{e} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散}.$$



Question. 请写出对数根式型判别法的一般形式和上下极限形式.

Question. 比较判别法中, 选用 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 为标尺, 还有何结论?

分析:
$$a_n \leq \frac{1}{n^p} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} \geq n^p \Leftrightarrow \frac{\ln 1/a_n}{\ln n^p} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{\ln 1/a_n}{\ln n} \geq p.$$

结论: Thm.(对数判别法) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 1/a_n}{\ln n} = l$, 则

$$l > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 收敛}; \quad l < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 发散}.$$

Question. 请写出对数判别法的一般形式和上下极限形式.