2013 级微积分 A（2）期中考题（A 卷）

系名________________ 班级______________ 姓名______________ 学号___________

一．填空题（每空 3 分，共 15 空）（请将答案直接填写在横线上！）

1. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z+\mathrm{e}^z=xy$ 确定，则 $dz=$________________________。

2. $u=x^2+2y-xyz$ 在 $(1,1,0)$ 处的梯度方向为 $\mathbf{g}$，则 $\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{g}}\right|_{(1,1,0)}$ =____________。

3. 设 $u=f(x,y,z)$，其中 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\frac{\partial u}{\partial x}=$_____________________。

4. 设 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 2x\right\}$，则 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=$_________________。

5. 交换积分次序：$\int_0^1 dx\int_{2x}^{3x}f(x,y)dy=$______________________________。

6. 设 $F(x)=\int_0^x\frac{\sin xy}{y}dy$, 则 $F'(x)=$________________________。

7. 设 $D=\left\{(x,y)\middle||x|+|y|\le 1\right\}$，则 $\iint\limits_D(1+y\mathrm{e}^{x^{10}})dxdy=$_________。

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=$_______。

9. 曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点(2,1,0)处的切平面方程为______________。

10. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6\\ x+y+z=0\end{cases}$ 在点 $(1,-2,1)$ 的切线方程为______________________。

11. 函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^x\cos y$ 在点 $(0,0)$ 处带 Peano 余项的二阶 Taylor 展式为

__________________________________。

12. 在变换 $u=x,v=y-x$ 下，方程 $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0$ 可化为__________________。

13. 二元函数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ 在点 $(-1,1)$ 处增长最快的方向为________________。

14. $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^1\sqrt{x^3+a^2}dx=$___________。

15. 广义积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\frac{\sin x}{x}dx$ 在 $y\in[0,+\infty)$ 上是否一致收敛_______。填“是”或“否”。

二．计算题（每题 10 分，共 40 分）

1. 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=f(x+y+z)$ 确定，其中是 $C^{(2)}$ 类函数，$f'\neq 1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

2. 用 Lagrange 乘子法求椭圆 $5x^2+4xy+2y^2=1$ 的长半轴和短半轴。

3. 求 $\iint\limits_D ydxdy$，其中区域 D 由 $x=-2, y=0, y=2, x=-\sqrt{2y-y^2}$ 围成的平面区域。

4. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^p\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 其中 p 为实数，请分析：

（1） 当 p 满足什么条件时，$f(x,y)$ 在原点连续？

（2） 当 p 满足什么条件时，$f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都存在？

（3） 当 p 满足什么条件时，$f(x,y)$ 在原点可微？

三．证明题

1. （10 分）设 $x=f(u,v), y=g(u,v), w=h(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial v},\quad \frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{\partial g}{\partial u};\qquad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0,$$

证明：（I）$\dfrac{\partial^2 (fg)}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 (fg)}{\partial v^2}=0$；

（II）$w=h(f(u,v),g(u,v))$ 满足 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0$。

2. （5 分）设 $f(x,y)$ 是定义在 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leq 1\right\}$ 上的可微函数，$\left|f(x,y)\right|\leq 1$，

求证：在 D 内存在一点 (x_0,y_0) 使得 $\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right]^2+\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]^2\leq 16$。

（提示：作辅助函数 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$）