运筹学

15. 网络分析 (续完)

李 力
清华大学

Email: li-li@tsinghua.edu.cn

2024.1.

主要内容

运输问题

指派问题

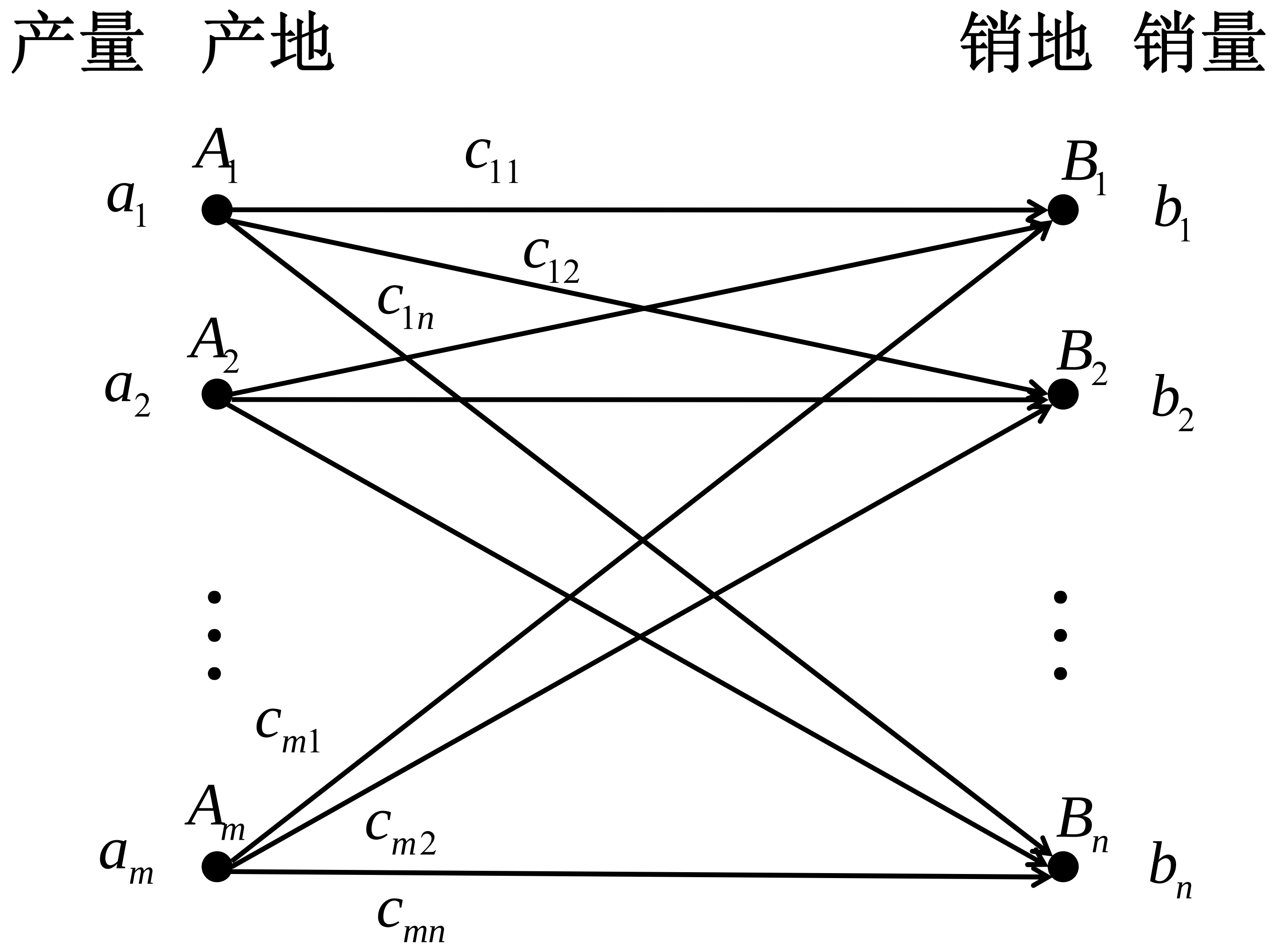
运输问题

运输问题

某种物品有 m 个产地，记为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ ，各产地产量分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ ；有 n 个销地 B_1 $B_2, \cdots, B_n$ ，各销地销量分别是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$；假定从产地 A_i 向销地 B_j 运输单位物品的运价是 c_{ij}；问怎样调运这些物品能使总费用最小

产地 \ 销地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$					$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

运输问题的网络描述



在流量平衡和非负约束下极小化总的运输费用 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

线性规划模型

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \forall 1 \le i \le m$$

$$-\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = -b_j, \ \forall 1 \le j \le n$$

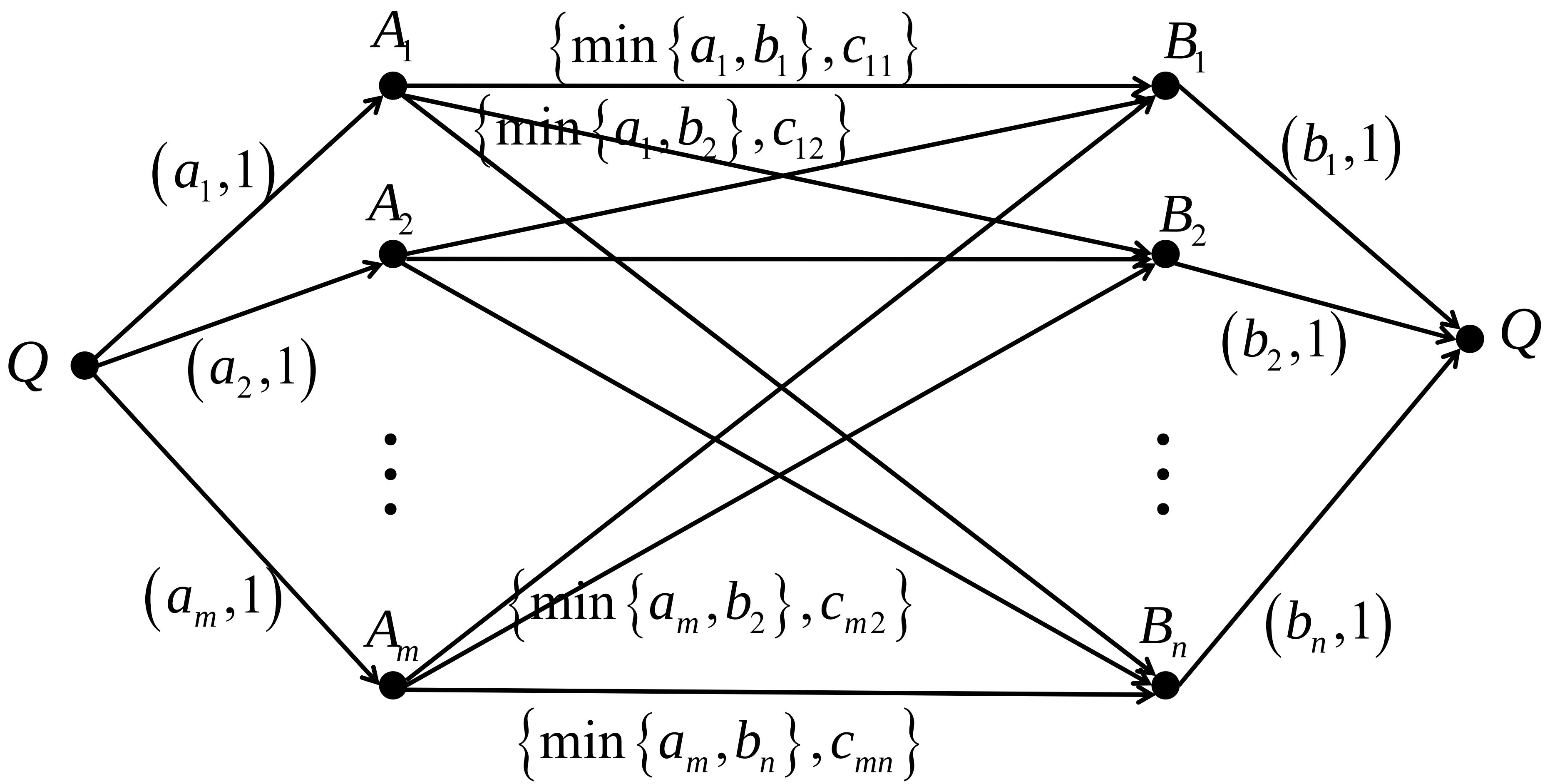
$$x_{ij} \ge 0, \ \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}x_{ij} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ -b_1 \\ \vdots \\ -b_n \end{pmatrix}$$

由于等式约束右边所有行相加等于零，所以必须成立

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \triangleq Q \qquad \text{（产销平衡假定）}$$

运输问题可化为最小费用流问题



用单纯形法求运输问题

如下例

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	8 x_{11}	6 x_{12}	10 x_{13}	9 x_{14}	35
A_2	9 x_{21}	12 x_{22}	13 x_{23}	7 x_{24}	50
A_3	14 x_{31}	9 x_{32}	16 x_{33}	5 x_{34}	40
销量	45	20	30	30	

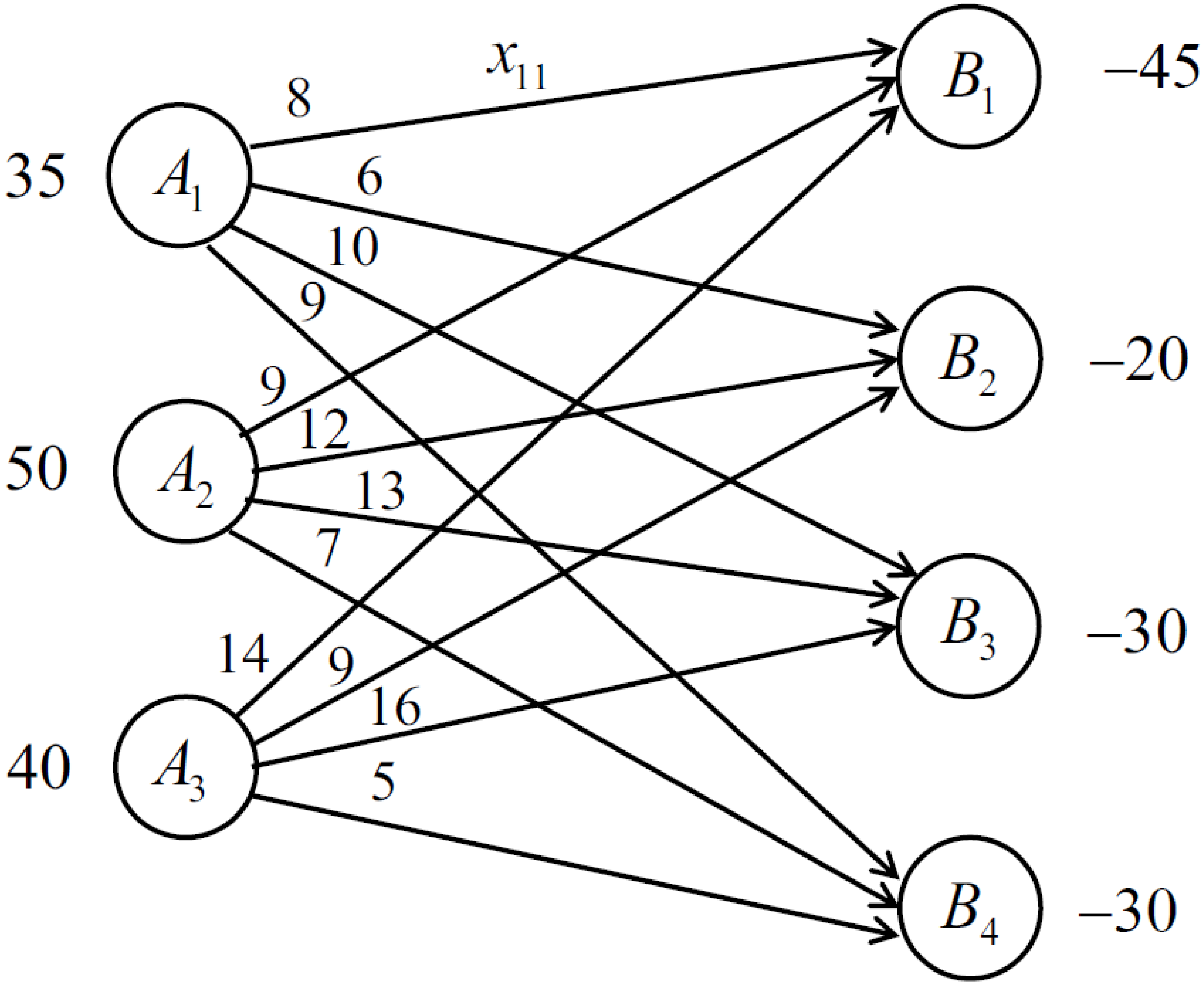
数学规划模型为

$$\min \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 35 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40 \\ & x_{11} + x_{21} + x_{31} = 45 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30 \qquad x_{ij} \geq 0,\ \forall 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l}
\min \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 & 9 & 9 & 12 & 13 & 7 & 14 & 9 & 16 & 5 \end{pmatrix}}_{C} X \\
\underbrace{\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & 1
\end{pmatrix}}_{A}
\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{pmatrix}
= \underbrace{\begin{pmatrix} 35 \\ 50 \\ 40 \\ 45 \\ 20 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}
\end{array}\right)$$

运输网络



$$p_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

如何在图上确定基本可行解

⇓

如何计算选定进基变量后的基本可行解

⇓

如何选择进基变量使目标函数改进

⇓

如何判断已经找到最优的基本可行解

如何在图上改进基本可行解

对于产销平衡运输问题的等式约束

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ i = 1,2,\cdots,m;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \ j = 1,2,\cdots,n$$

令 $\hat{x}_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{Q}, \forall i, j$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ij} = \frac{a_i}{Q}\sum_{j=1}^{n} b_j = a_i, \forall i \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \hat{x}_{ij} = \frac{b_j}{Q}\sum_{i=1}^{m} a_i = b_j, \forall j \end{array}$$

是该问题的可行解，因此一定有基本可行解，且一定存在有限的最优目标值。

运输问题的数学规划模型

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \forall 1 \le i \le m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad \forall 1 \le j \le n$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

产销平衡： $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = Q$

如果 $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \forall 1 \le i \le m;\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \forall 1 \le j \le n-1$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x_{in} &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n-1} x_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = Q - \sum_{j=1}^{n-1} b_j = b_n \end{aligned}$$

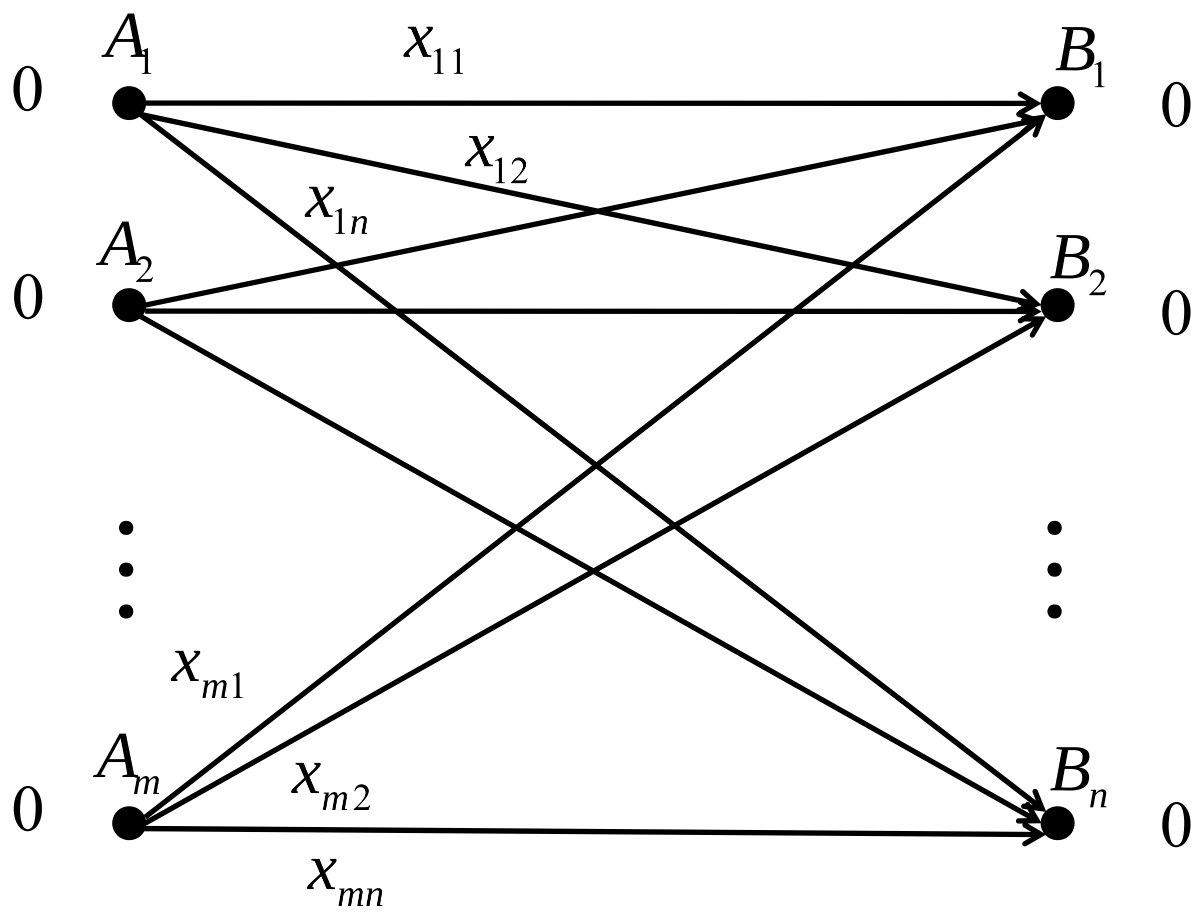
最后一个约束多余，等式约束可写成

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \forall 1 \le i \le m;\quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \forall 1 \le j \le n-1$$

共有 $m+n-1$ 个等式约束，和基本可行解变量个数相等

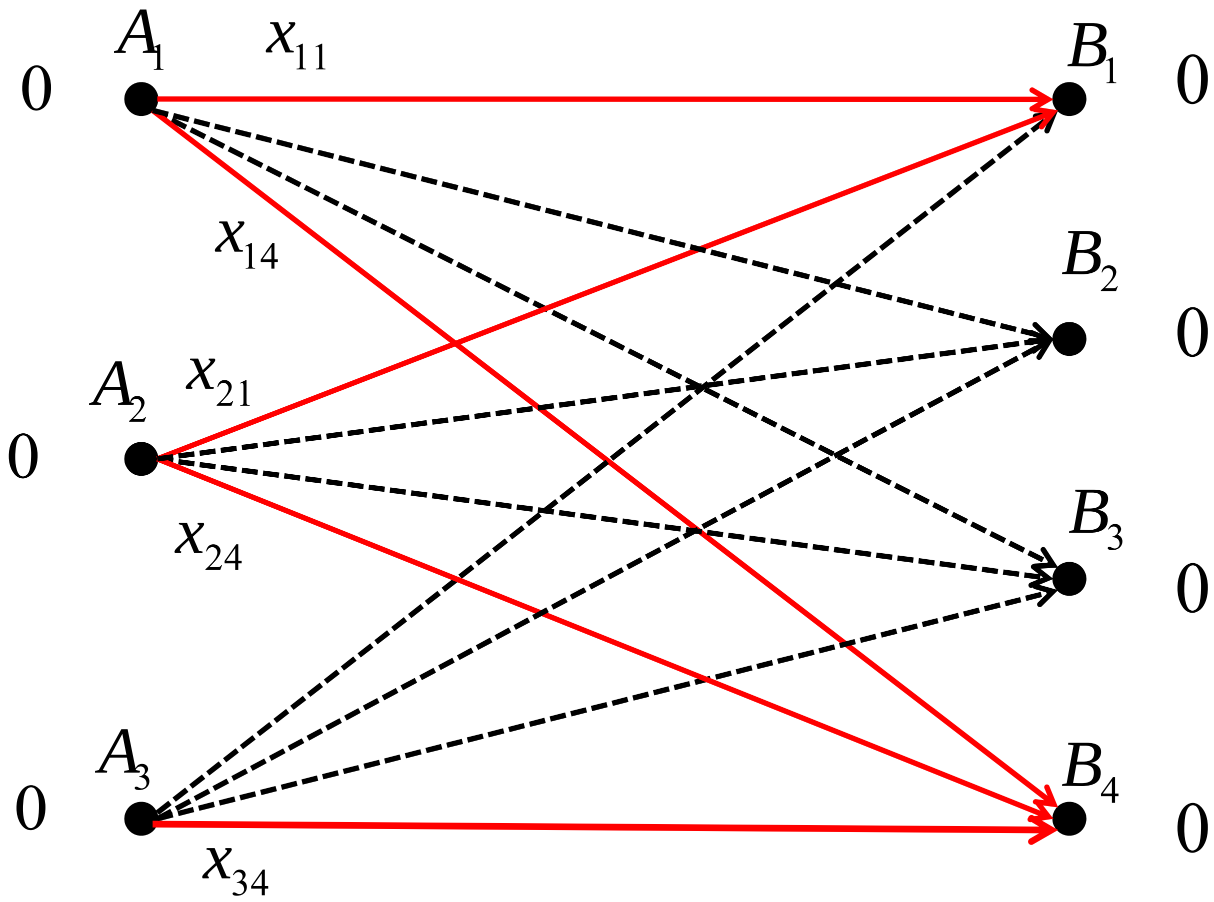
产生基本可行解

运输问题等式约束齐次方程 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} P_{ij}x_{ij} = 0$ 的网络描述

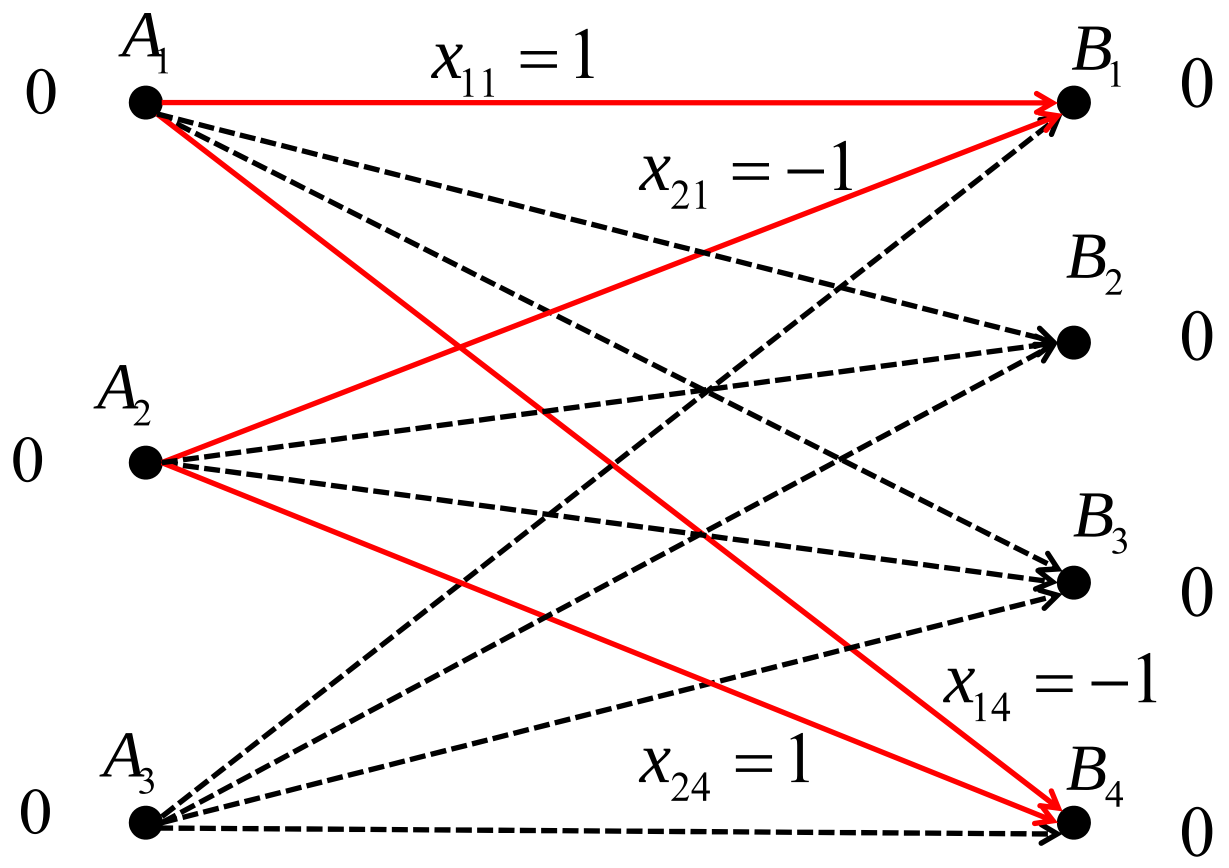


部分变量的齐次方程可用对应边网络描述

例如 $P_{11}x_{11}+P_{21}x_{21}+P_{14}x_{14}+P_{24}x_{24}+P_{34}x_{34}=0$ 可用以下红线构成的网络描述



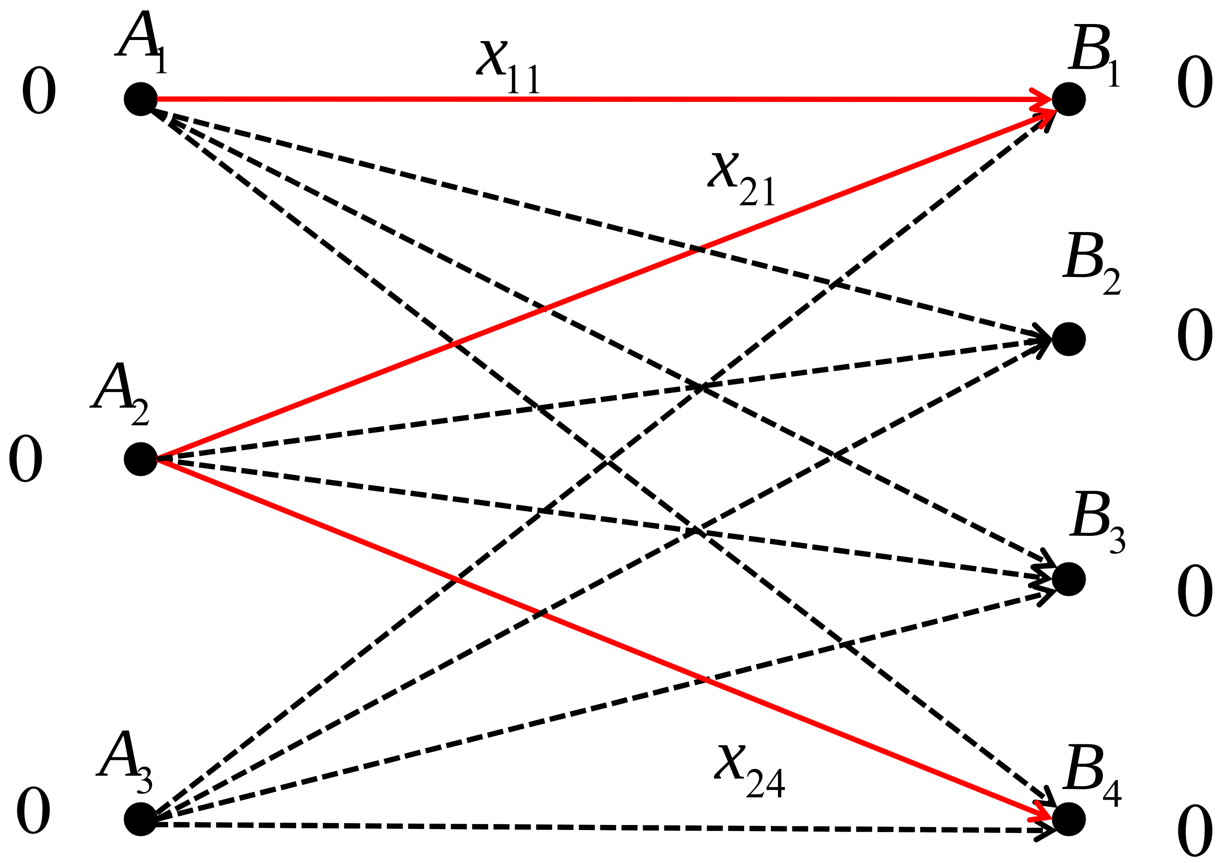
如果部分变量的网络有回路，其齐次方程一定有非零解



齐次方程为 $P_{11}x_{11}+P_{21}x_{21}+P_{14}x_{14}+P_{24}x_{24}=0$，有非零解

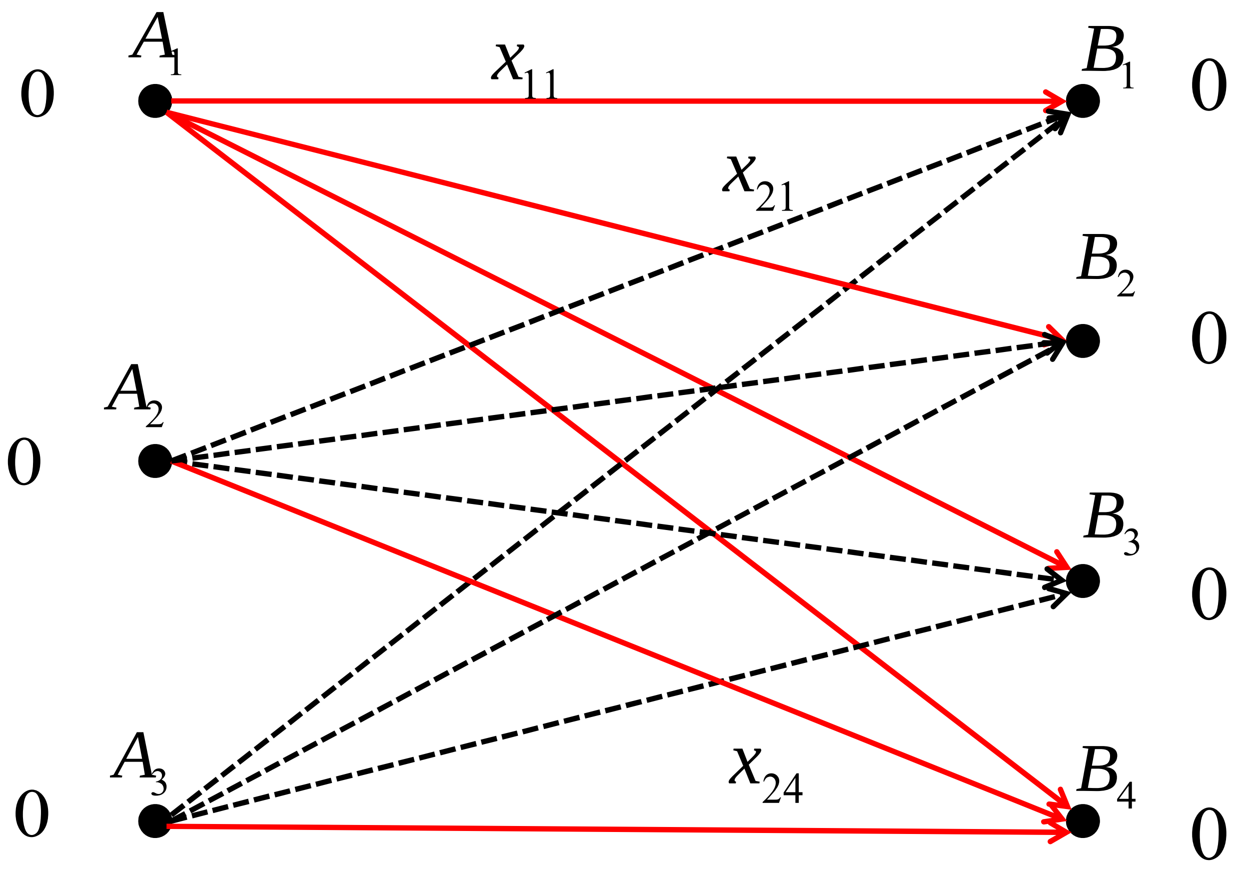
$$x_{11}=-x_{21}=x_{14}=-x_{24}$$

如果部分变量的网络无回路，其齐次方程一定无非零解



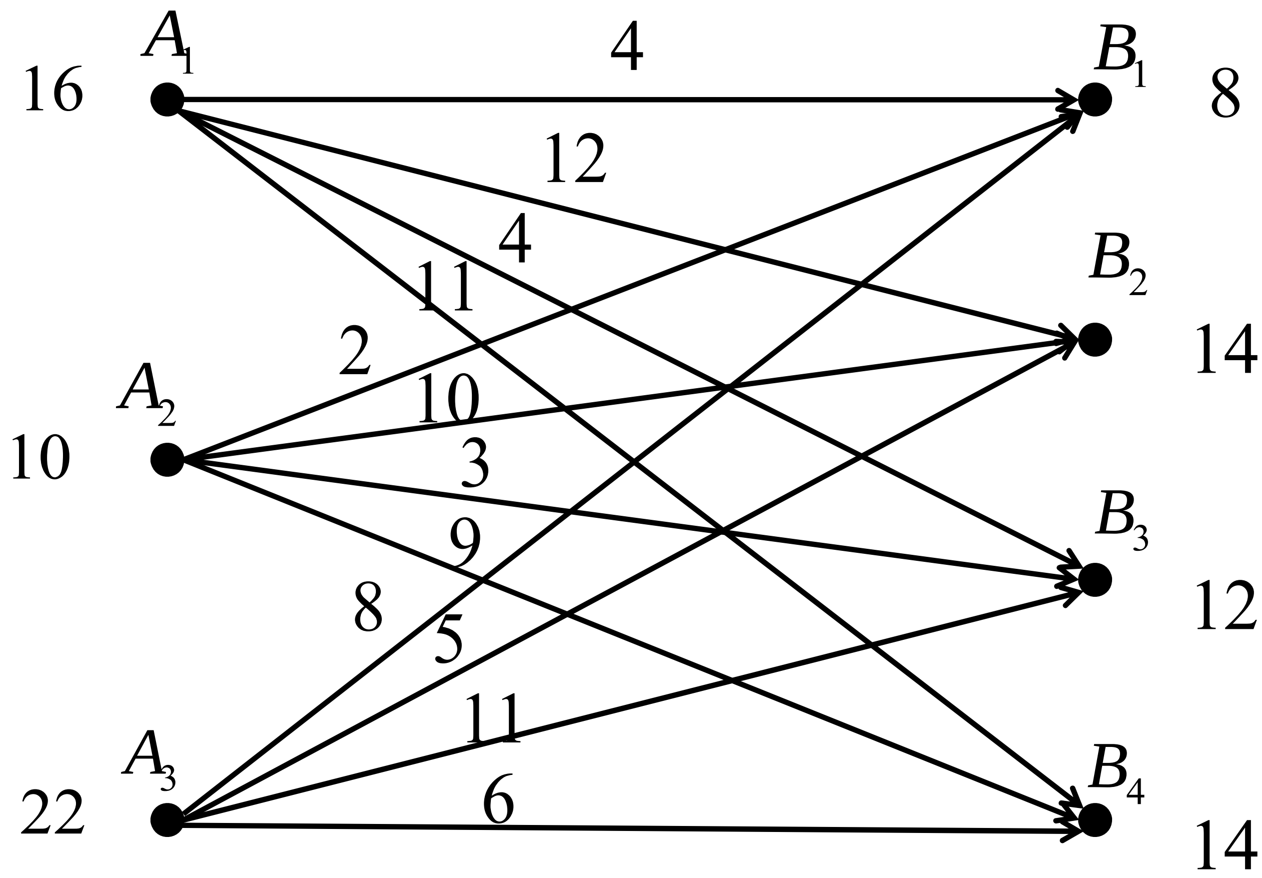
齐次方程为 $P_{11}x_{11}+P_{21}x_{21}+P_{14}x_{14}=0$ ，只有零解

结论：运输问题一组变量的系数向量线性无关的充要条件是这些变量对应的网络不含回路



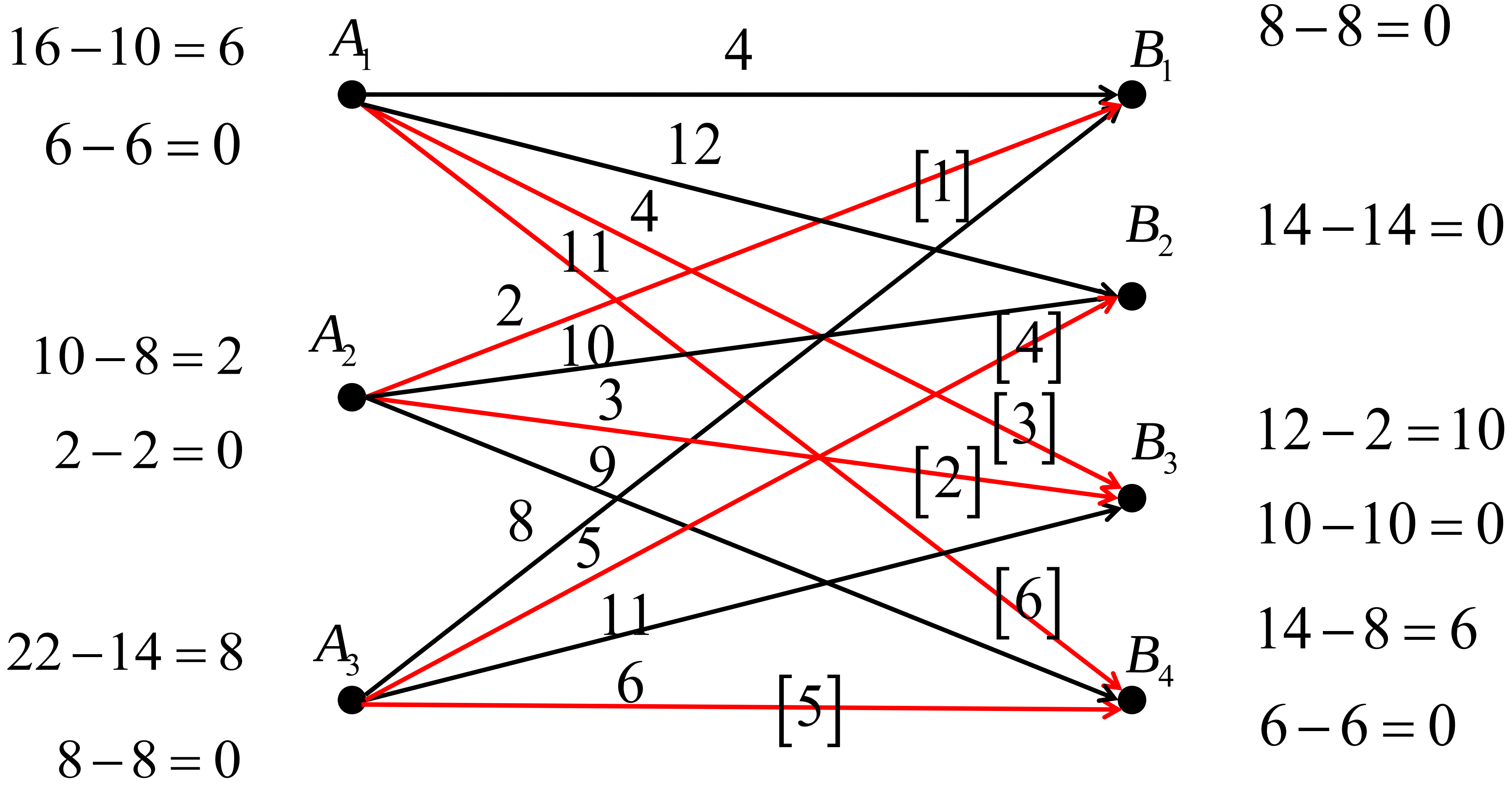
$\Rightarrow$ 基本可行解构成树，基变量个数最多为 $m+n-1$

例、3个产地4个销地的产销平衡运输问题



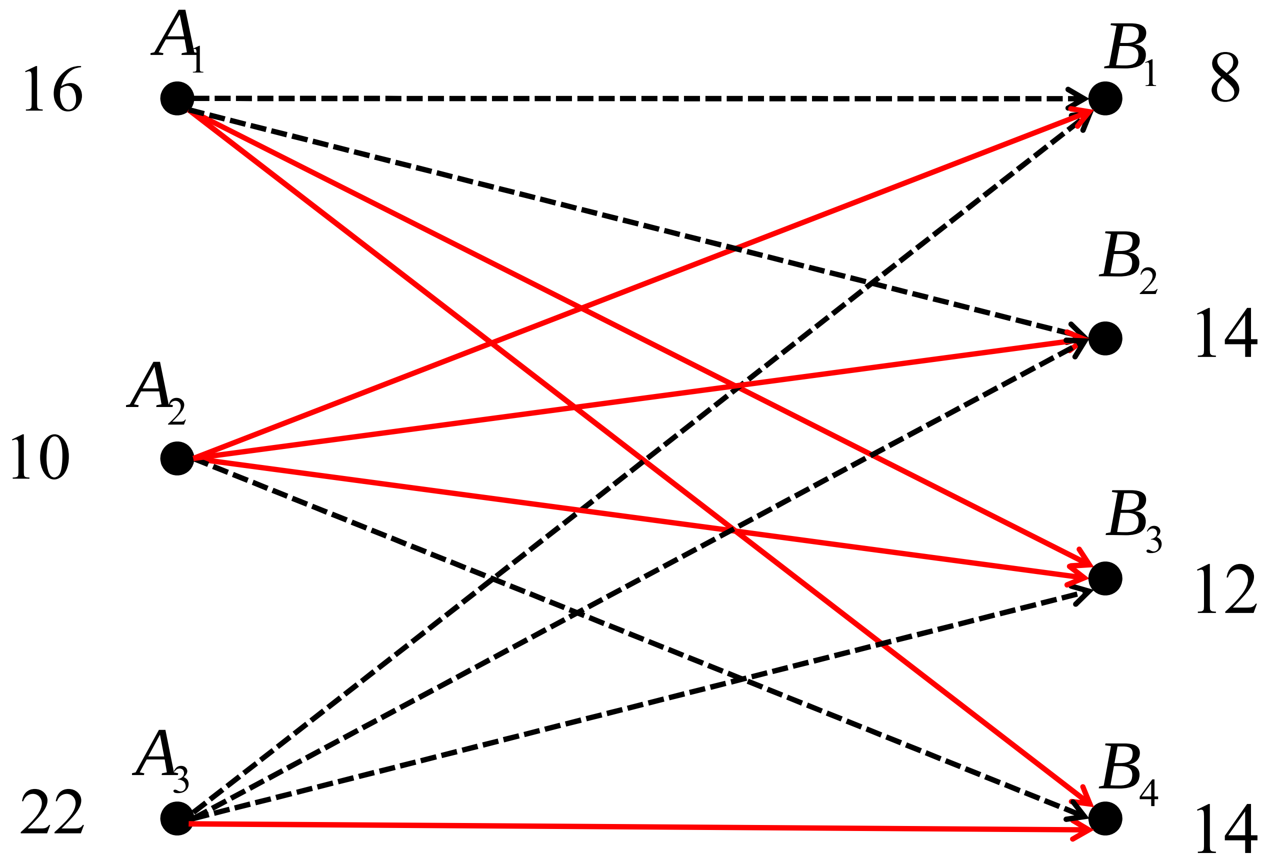
用最小元素法产生基本可行解

基本思想：优先安排单位运输成本最小的运输方式



一定有支撑树构成基本可行解，基变量个数 $m+n-1$

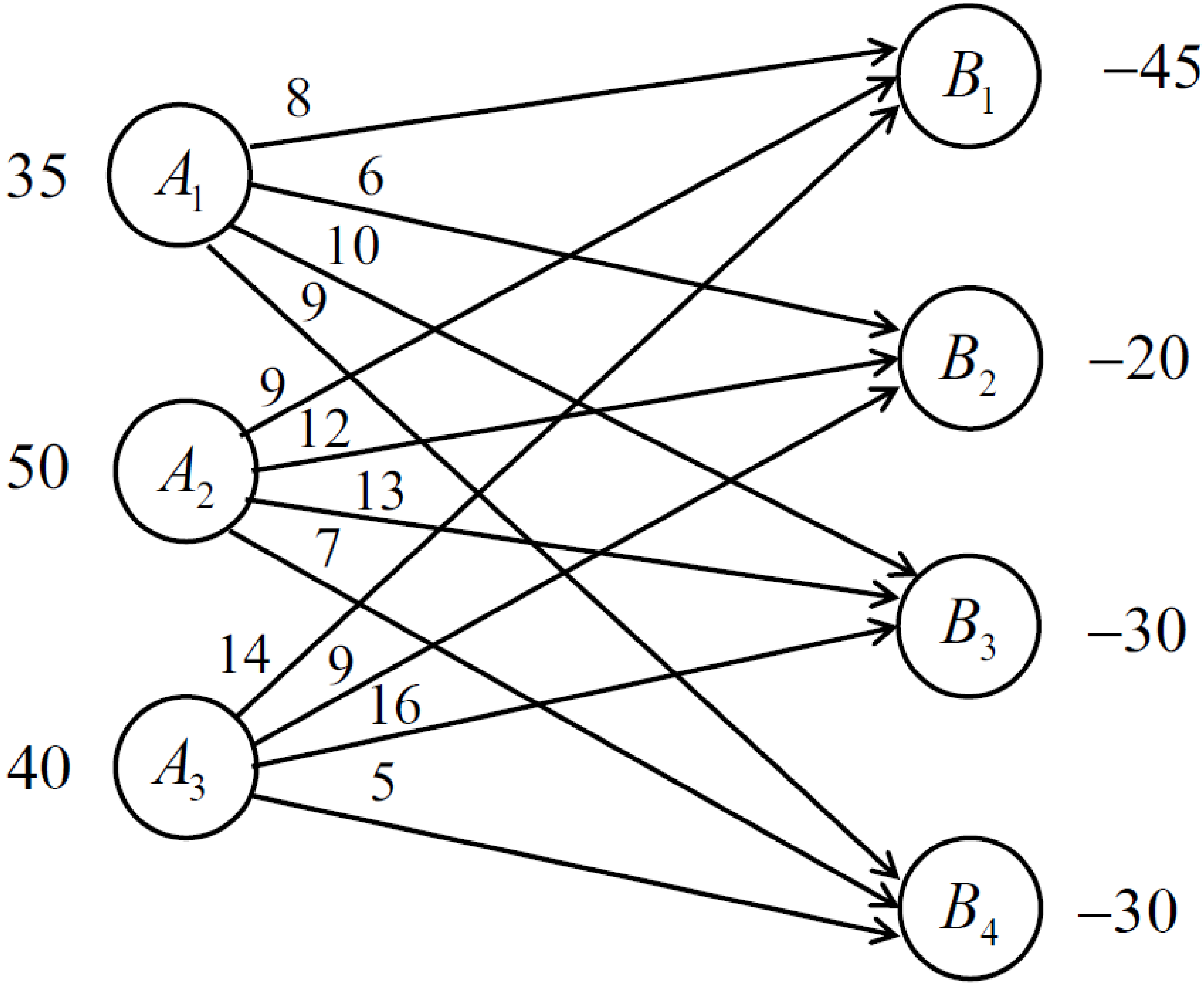
注意：任意给定支撑树不一定能产生基本可行解

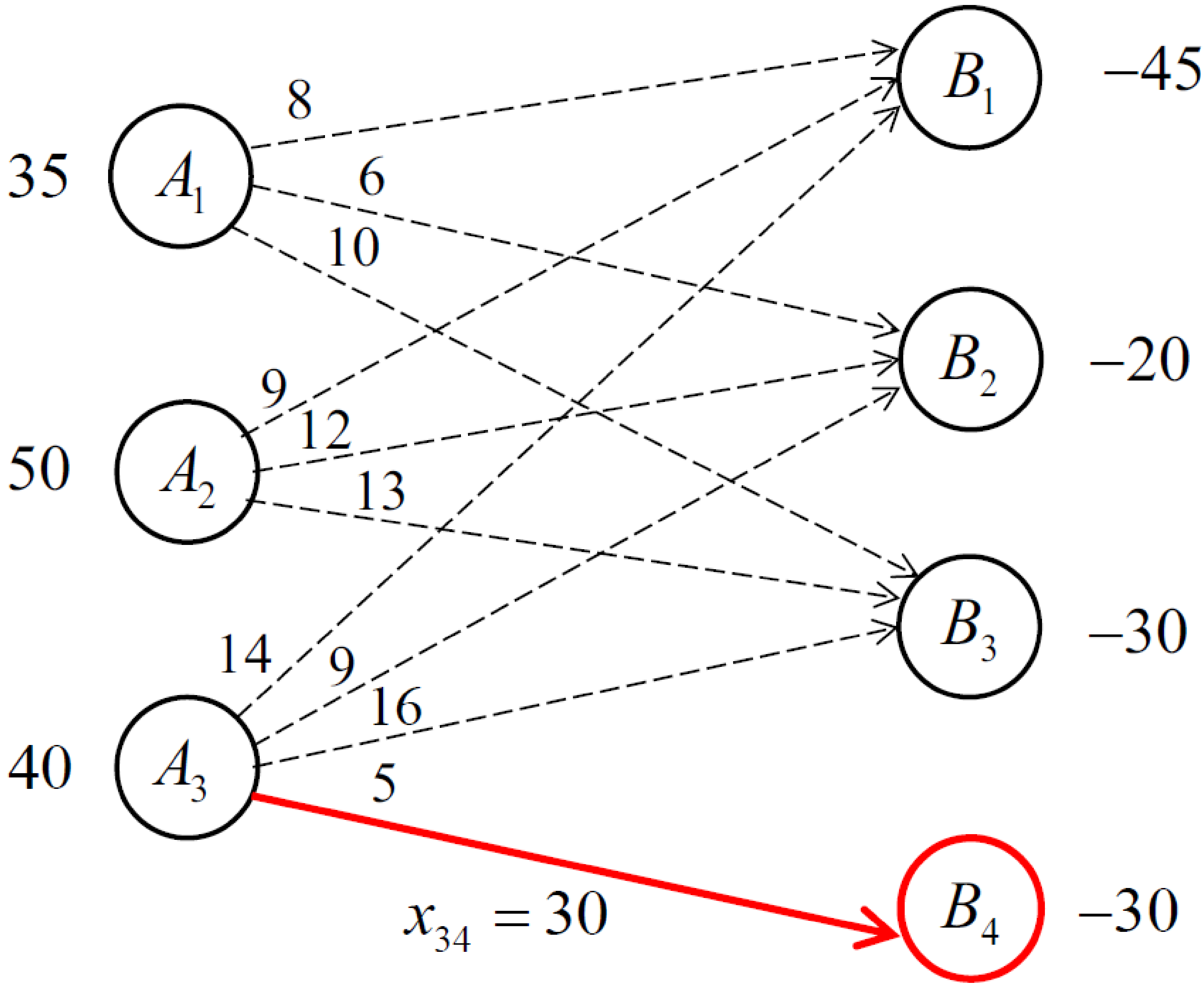


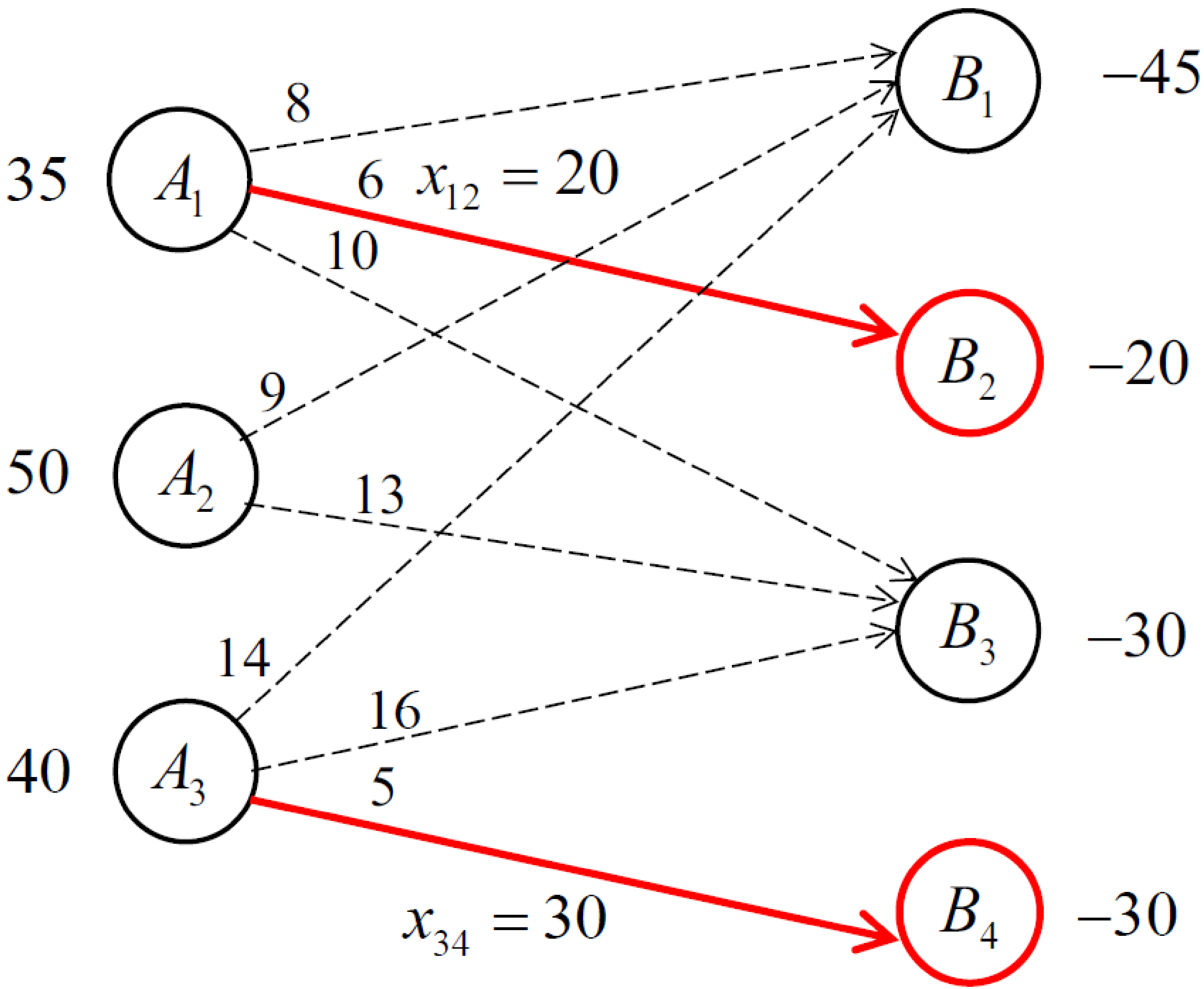
A_3 处的流量平衡方程不可能满足

产生基本可行解的最小元素法

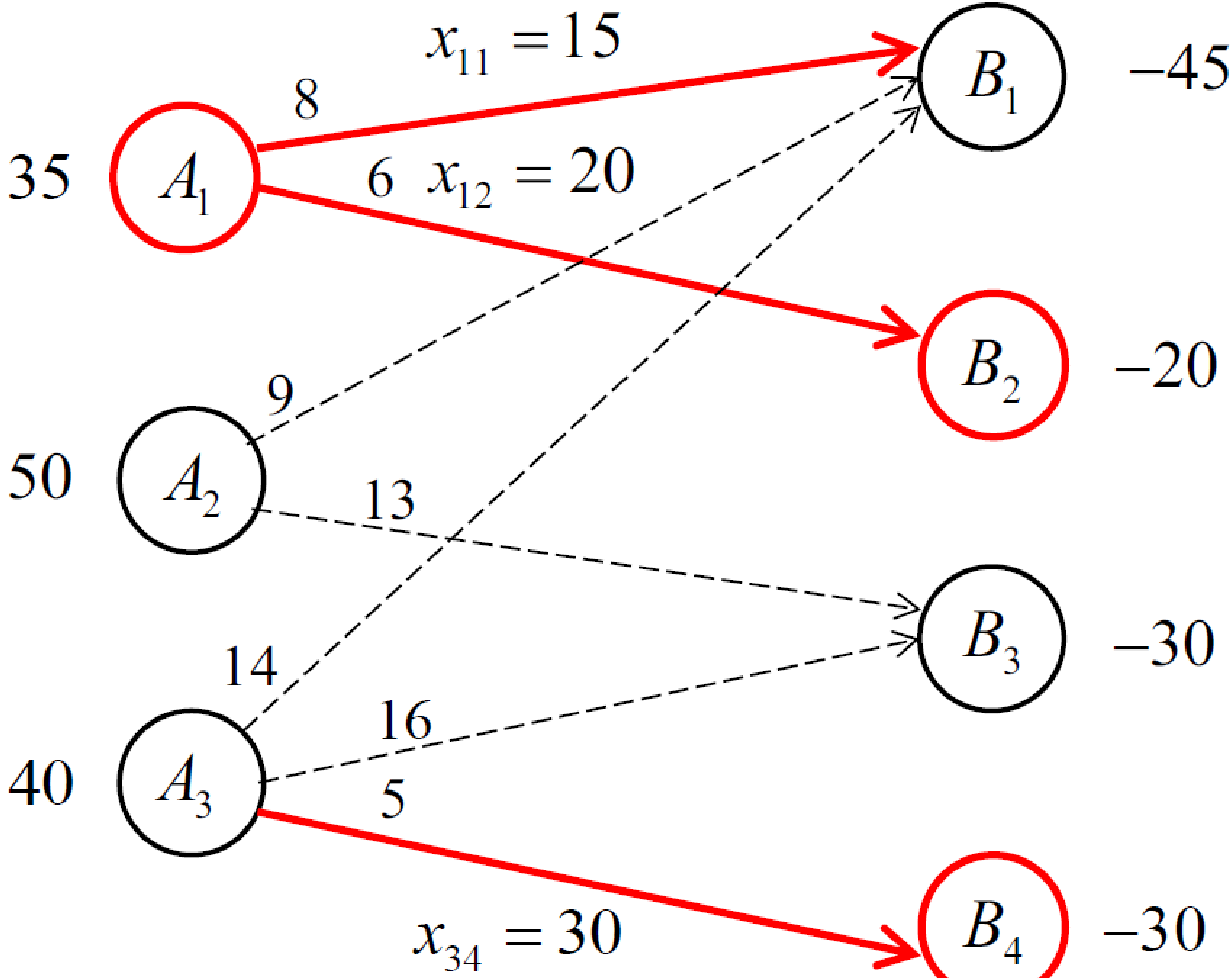
基本思想：优先安排单位成本最小的运输方式



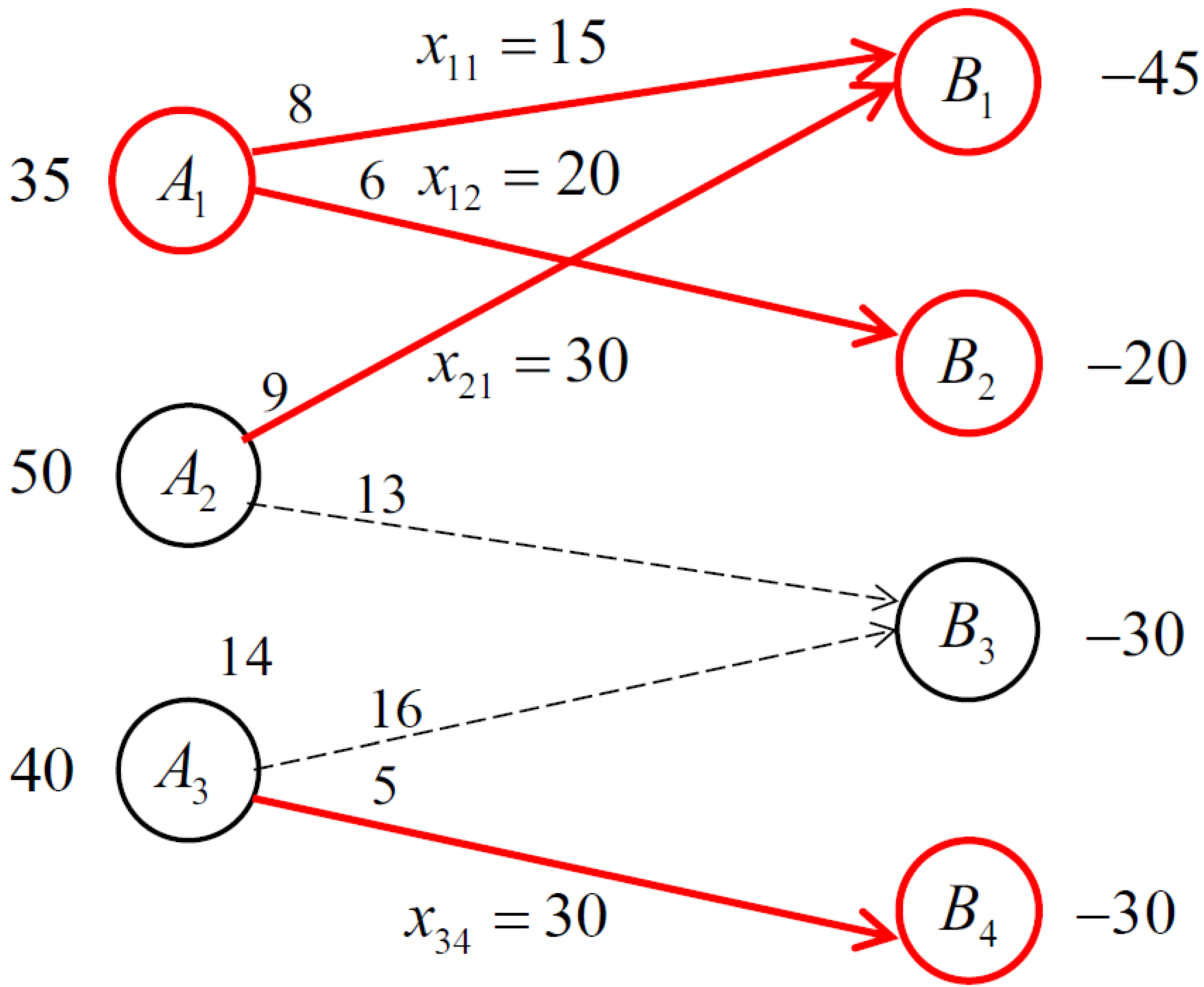

35
50
40
A_1
A_2
A_3
8
6
10
9
12
13
14
9
16
5
B_1
B_2
B_3
B_4
−45
−20
−30
−30
$x_{34} = 30$



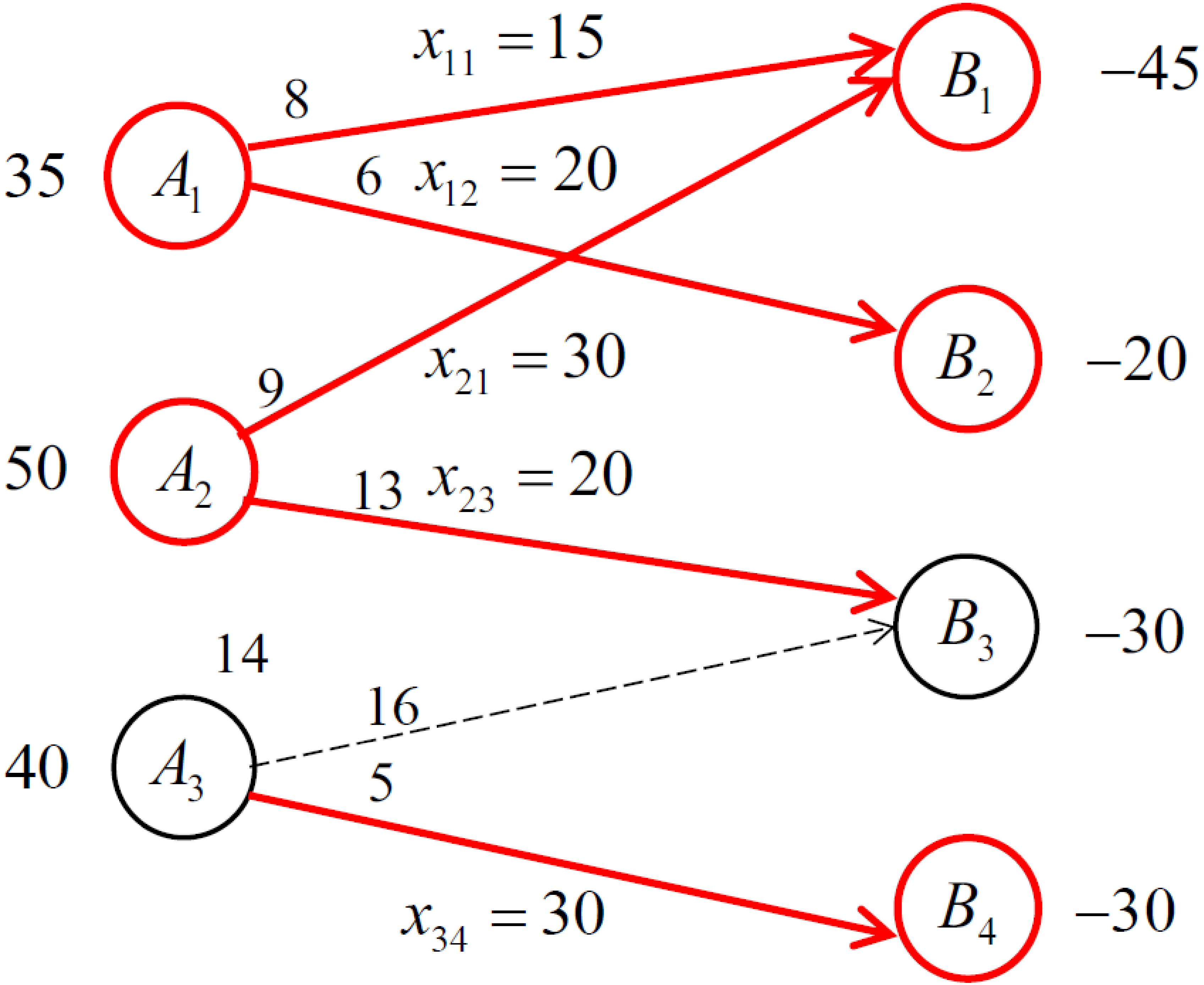
35
A_1
50
A_2
40
A_3
B_1
-45
B_2
-20
B_3
-30
B_4
-30
8
6
$x_{12} = 20$
10
9
13
14
16
5
$x_{34} = 30$



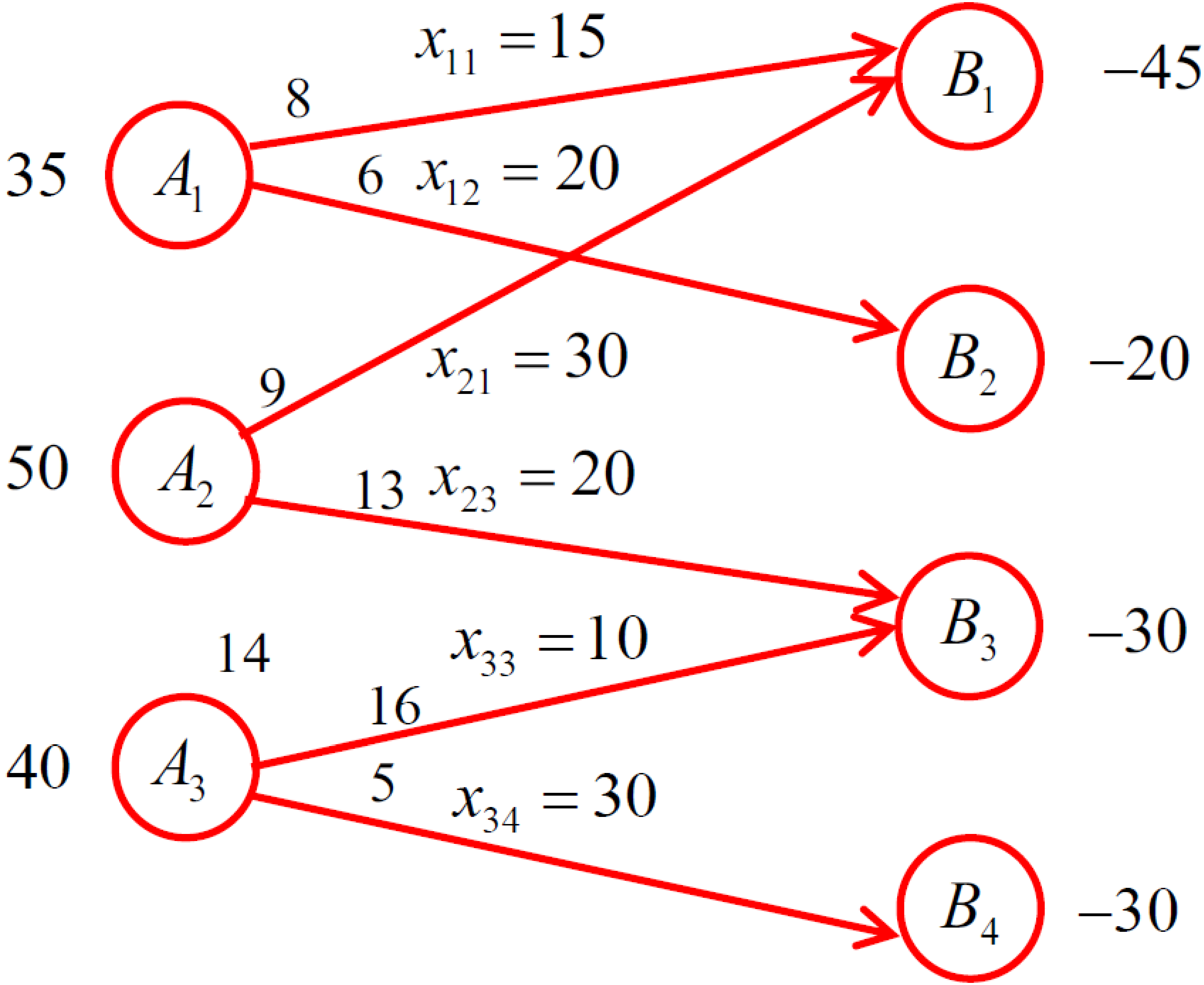
$x_{11} = 15$
8
B_1
-45
35
A_1
6
$x_{12} = 20$
B_2
-20
9
50
A_2
13
B_3
-30
14
16
40
A_3
5
B_4
-30
$x_{34} = 30$



$x_{11} = 15$
8
35
A_1
6
$x_{12} = 20$
B_1
−45
B_2
−20
$x_{21} = 30$
9
50
A_2
13
B_3
−30
14
16
40
A_3
5
$x_{34} = 30$
B_4
−30



35
50
40
A_1
A_2
A_3
B_1
B_2
B_3
B_4
-45
-20
-30
-30
8
6
9
13
14
16
5
$x_{11} = 15$
$x_{12} = 20$
$x_{21} = 30$
$x_{23} = 20$
$x_{34} = 30$



$x_{11} = 15$
8
B_1
-45
35
A_1
6 $x_{12} = 20$
B_2
-20
9
$x_{21} = 30$
50
A_2
13 $x_{23} = 20$
B_3
-30
14
$x_{33} = 10$
16
40
A_3
5
$x_{34} = 30$
B_4
-30

计算检验数

删除多余约束的线性规划模型

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \forall 1 \le i \le m$$

$$-\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = -b_j, \ \forall 1 \le j \le n-1$$

$$x_{ij} \ge 0, \ \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n-1$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \bar{P}_{ij} x_{ij} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \\ -b_1 \\ \vdots \\ -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

其中 $$\bar{P}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underset{i}{1} & 0 & \cdots & 0 & \underset{m+j}{-1} & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix}^T \in R^{m+n-1}, \quad j < n$$

$$\bar{P}_{in} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underset{i}{1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T \in R^{m+n-1}$$

回忆检验数计算公式

$$\sigma_{ij} = c_{ij} - C_B^T B^{-1} \overline{P}_{ij}\ ,\quad \forall i, j$$

令 $\overline{Y}^T = C_B^T B^{-1}$ （对偶变量）

$$\Rightarrow \qquad C_B^T = \overline{Y}^T B \qquad\qquad \sigma_{ij} = c_{ij} - \overline{Y}^T \overline{P}_{ij}\ ,\quad \forall i, j$$

记 $\overline{Y} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$C_B^T = \overline{Y}^T B$$

$$\Updownarrow$$

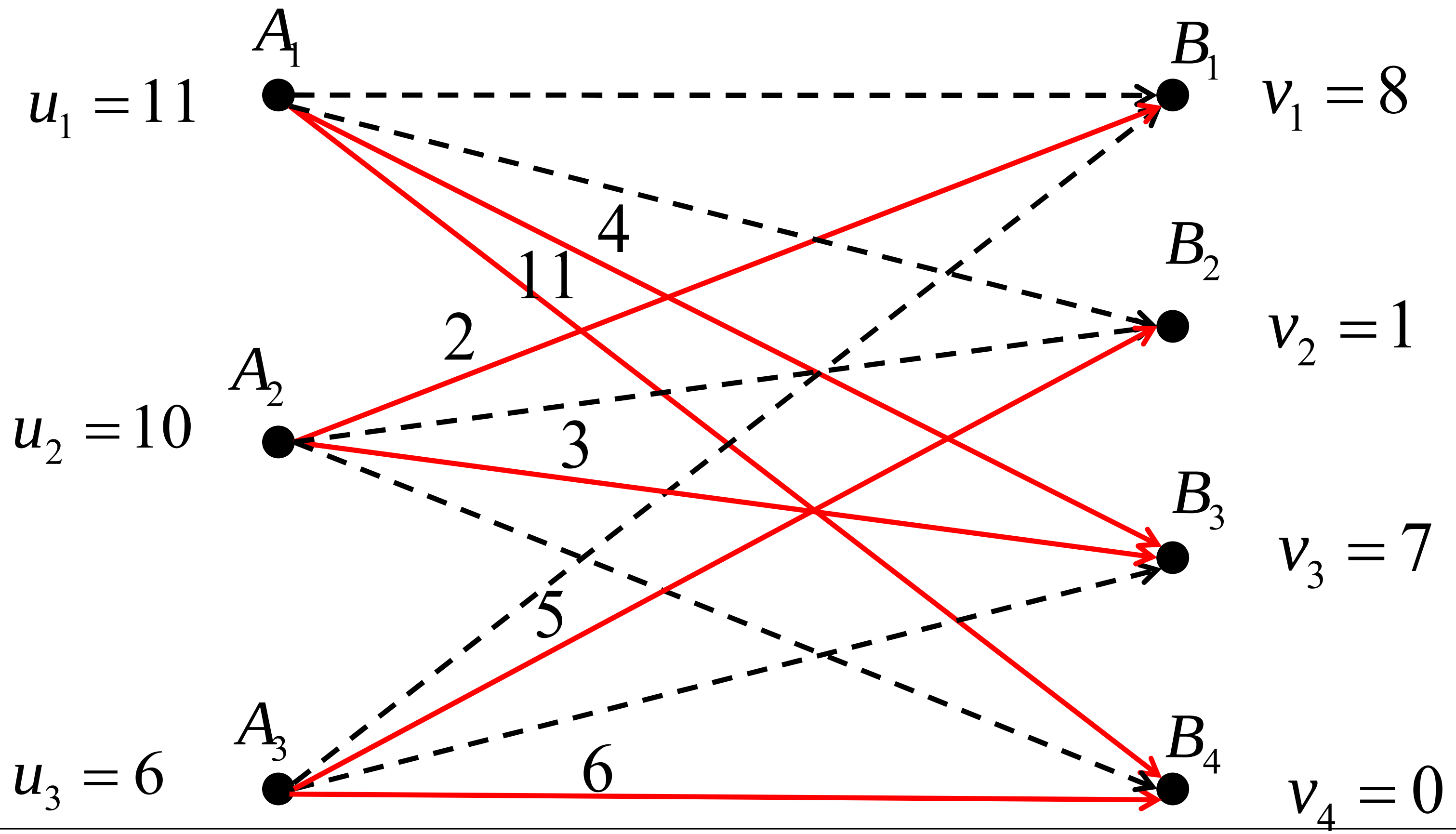
$$c_{ij} = \left(u_1 \cdots u_m\ v_1 \cdots v_{n-1}\right) \overline{P}_{ij}\ ,\quad \forall \overline{P}_{ij} \in B$$

由于 $c_{ij} = (u_1 \cdots u_m \; v_1 \cdots v_{n-1}) \bar{P}_{ij}$ ， $\forall \bar{P}_{ij} \in B$

$$\Leftrightarrow \quad c_{ij} = (u_1 \cdots u_m \; v_1 \cdots v_{n-1} \; v_n) P_{ij}, \quad \forall \bar{P}_{ij} \in B, \quad v_n = 0$$

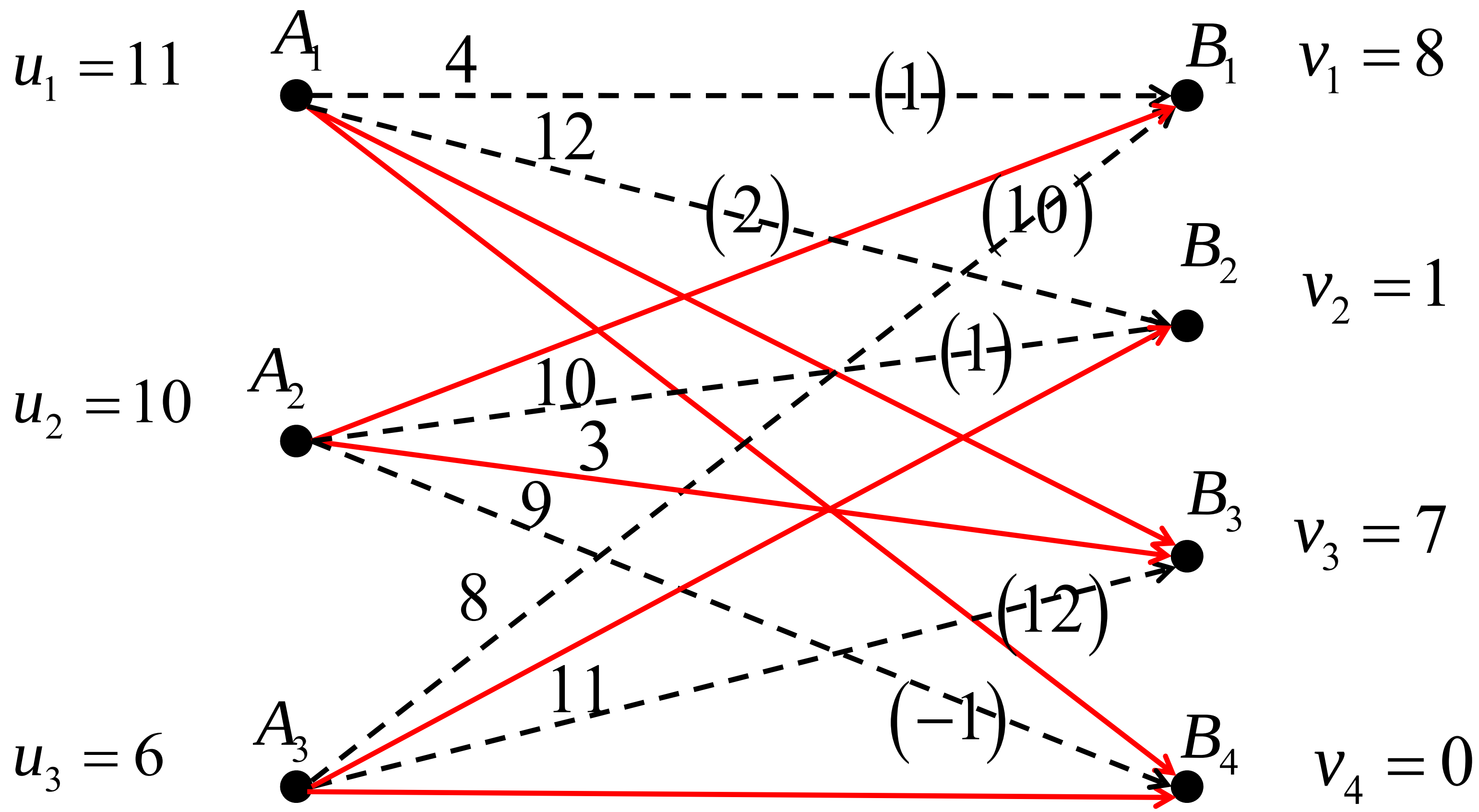
$$\Leftrightarrow \quad c_{ij} = u_i - v_j, \quad \forall \bar{P}_{ij} \in B, \quad v_n = 0$$

可利用支撑树计算对偶变量（位势法），如下例所示



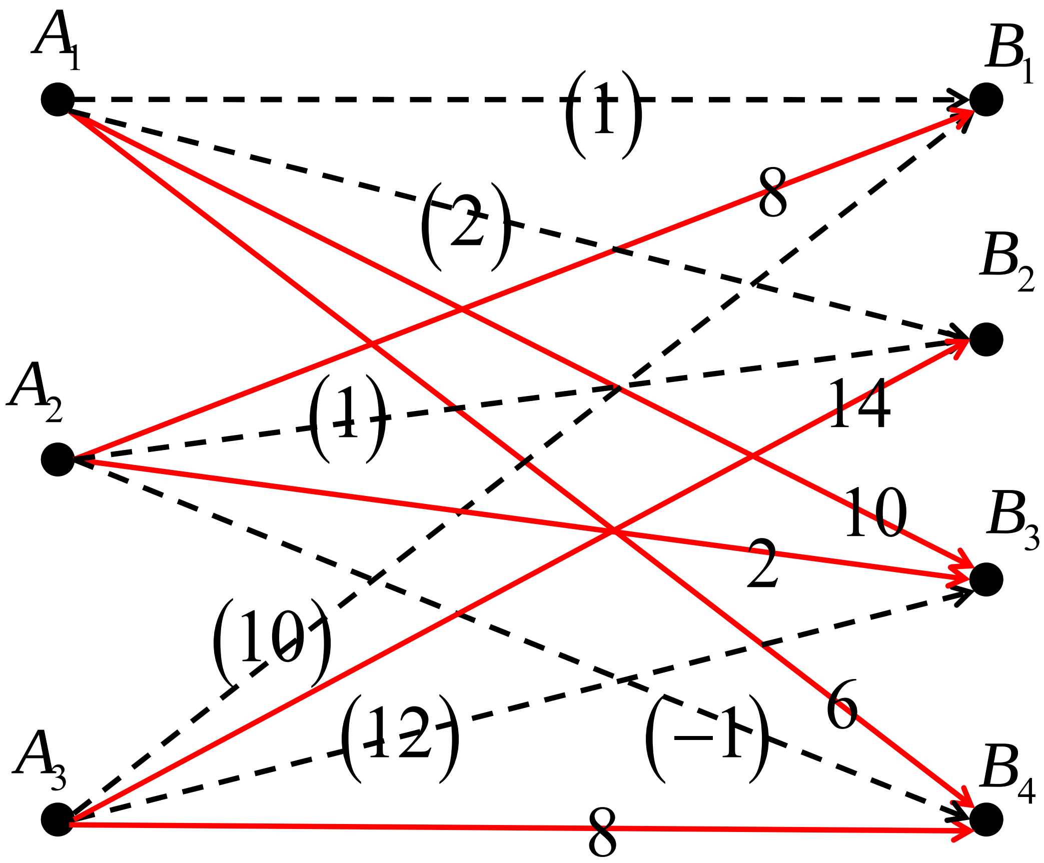
求得对偶变量后，又可以利用支撑树计算检验数

$$v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ij} = c_{ij} - \overline{Y}^T \overline{P}_{ij} = c_{ij} - Y^T P_{ij} = c_{ij} - \left(u_i - v_j\right)$$

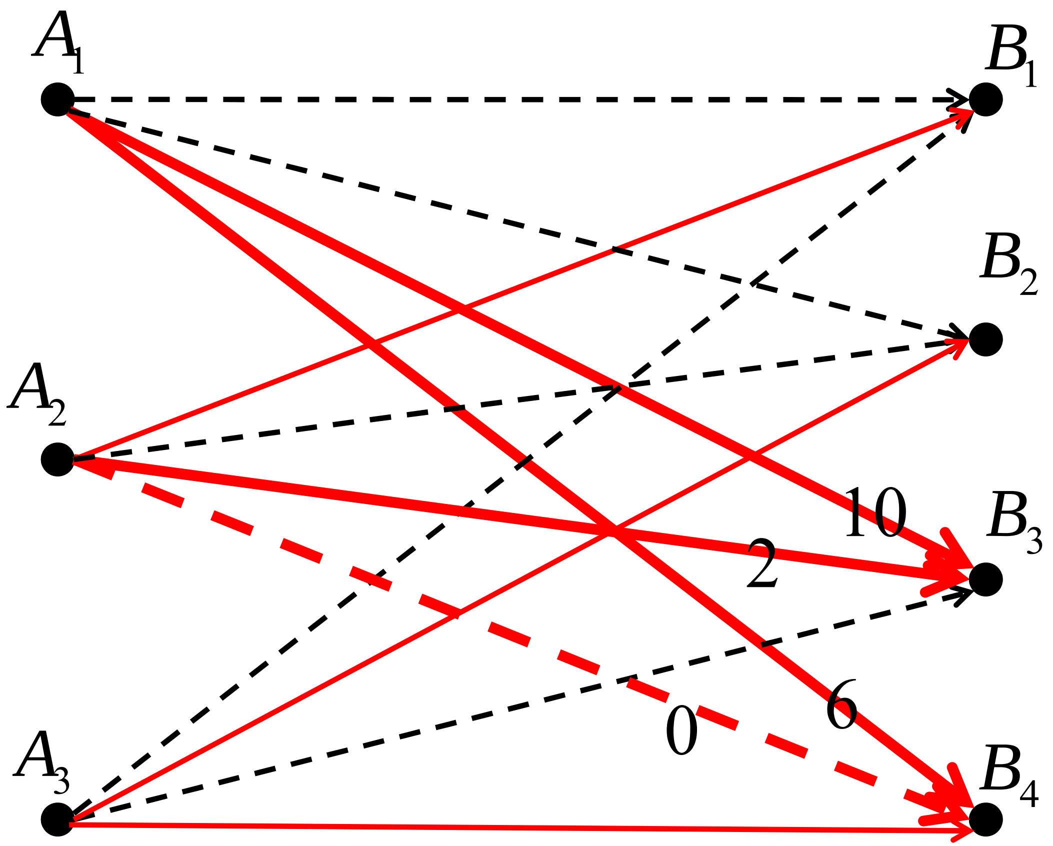


改进基本可行解

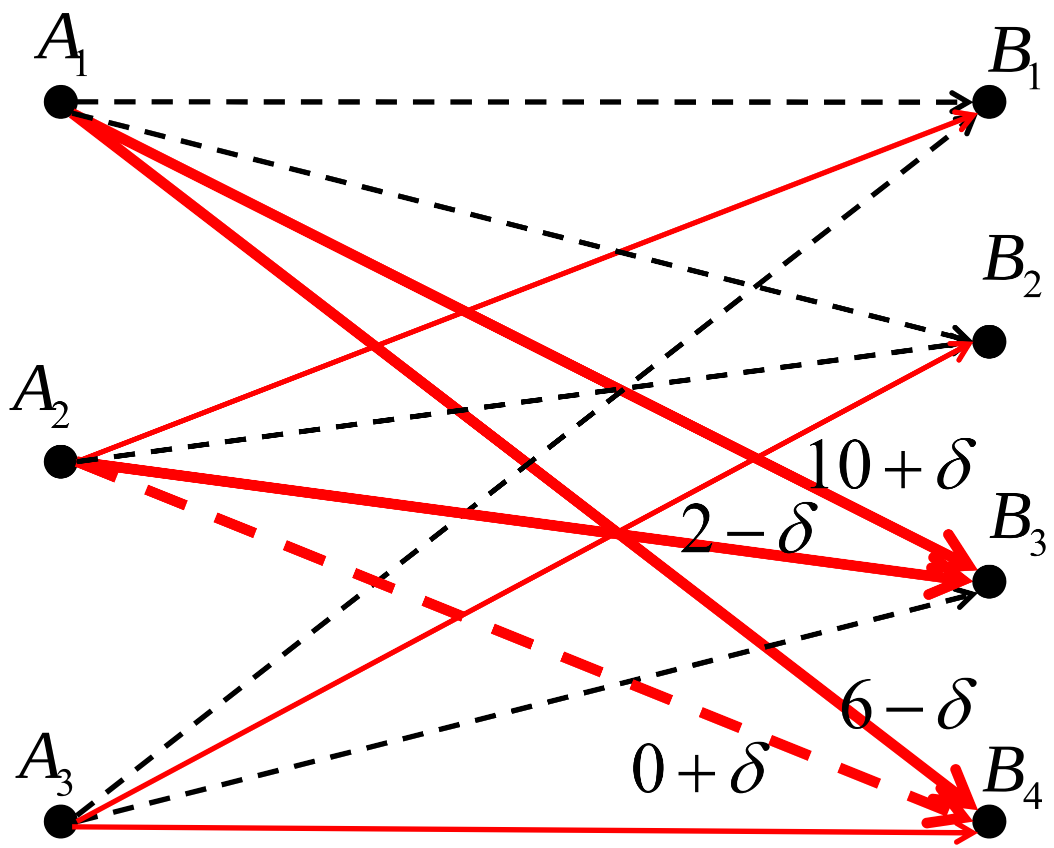
因为 $\sigma_{24} < 0$ ，让 x_{24} 进基可改进基本可行解



加入 x_{24} 必和某些基变量形成回路



下面的 δ 能保证流量平衡约束被满足



由变量非负约束可知 δ 最大值为**2**

$\delta = 2 \Rightarrow x_{24} = 2, x_{14} = 4, x_{13} = 12, x_{23} = 0$（$x_{24}$ 进基，x_{23} 出基）

算法总结

1）通过求支撑树确定初始基本可行解

2）用位势法计算所有非基变量的检验数

3）如果所有检验数不小于零，已得最优解，否则找出最小下标对应的非基变量（按**Bland**法则进出基能保证收敛，所有可以进基的**x_ij** 排序构成的，先看**i**最小，再看**j**最小的顺序选）以及与其形成回路的基变量，据此确定相应非基变量的增加值以及回路基变量的新值，然后回到上一步继续迭代

总产量大于总销量（产销不平衡）的运输问题

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

优化模型

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i = 1,2,\cdots,m, \; j = 1,2,\cdots,n$$

处理办法　　引入假想销地 B_{n+1}

定义假想销地 B_{n+1} 的销量 $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

往假想销地的运量没有成本 $\Rightarrow$ $c_{i\,n+1} = 0, i = 1,2,\cdots,m$

优化模型

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \ \ i = 1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j = 1,2,\cdots,n+1$$

$$x_{ij} \geq 0, \ \ i = 1,2,\cdots,m, \ \ j = 1,2,\cdots,n+1$$

加整数约束的运输问题

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ \forall 1 \le i \le m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \ \forall 1 \le j \le n$$

$$x_{ij}\text{为非负整数},\ \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

当产量和销量均为整数时，由基本可行解的产生过程和改进过程可知，最终得到的最优解一定是非负整数，所以前面给的算法同样可以解决这种整数约束的运输问题

指派问题

例　开办五家新商店，要五家建筑公司分别承建，各公司营造费用报价如下，如何指派使总造价最小

费用报价 商店 / 公司	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	8	7	15	12
A_2	7	9	17	14	10
A_3	6	9	12	8	7
A_4	6	7	14	6	10
A_5	6	9	12	10	6

标准指派问题的一般提法

有 n 件事要 n 个人完成，每人做一件事，已知第 i 个人做第 j 件事的成本是 c_{ij} ，要确定人和事之间一对一的指派方案，使完成这 n 件事的总费用最小

称 $C=\left(c_{ij}\right)_{n\times n}$ 为指派问题的系数矩阵

定义 $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事} \\ 0 & \text{若不指派第 } i \text{ 个人做第 } j \text{ 件事} \end{cases}$

整数规划模型

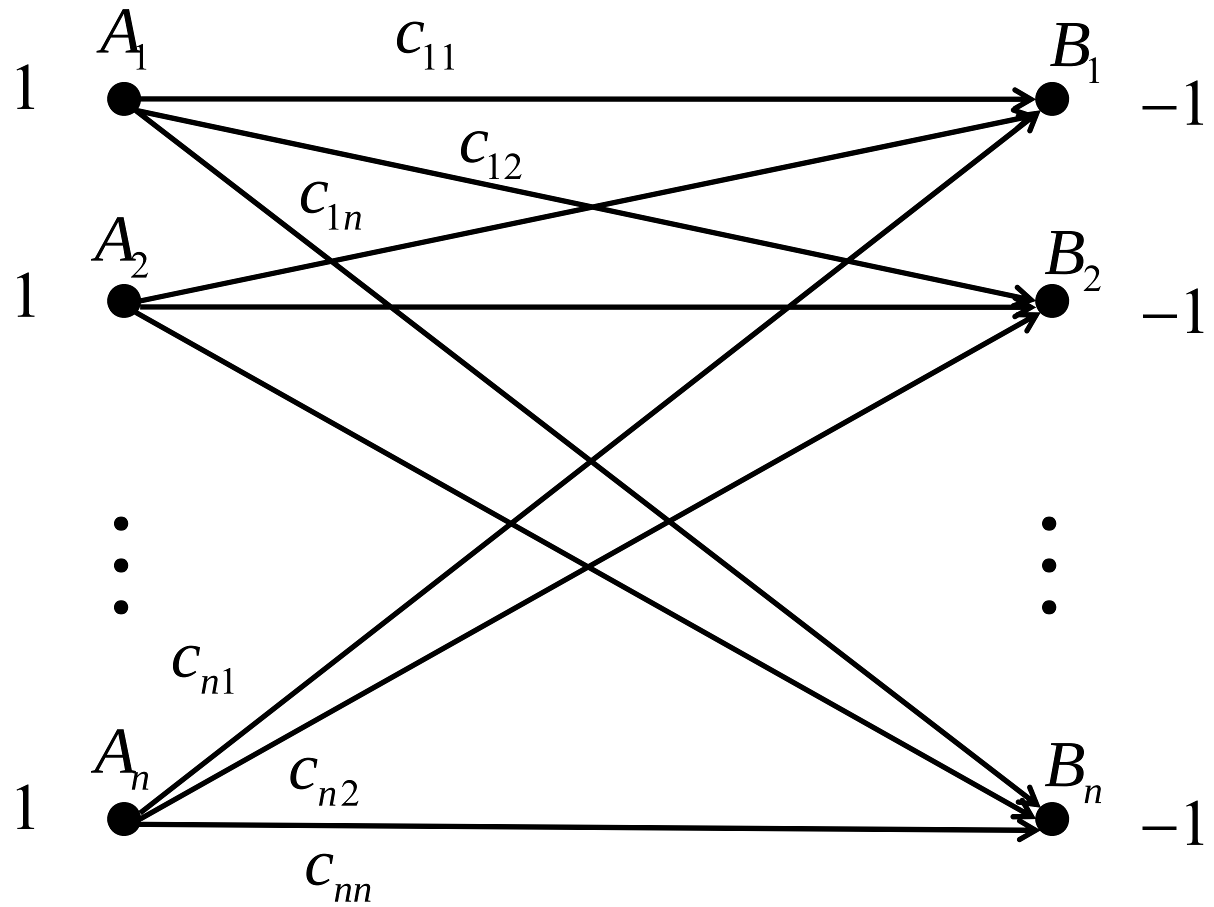
$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ i = 1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ \ j = 1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \ \ \forall i, j$$

去掉整数约束标准指派问题是下述产销平衡运输问题



整数容量约束 $\Rightarrow$ 整数解 $\Rightarrow$ **0-1**约束自动满足！

求解下述运输问题可得标准指派问题的解

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

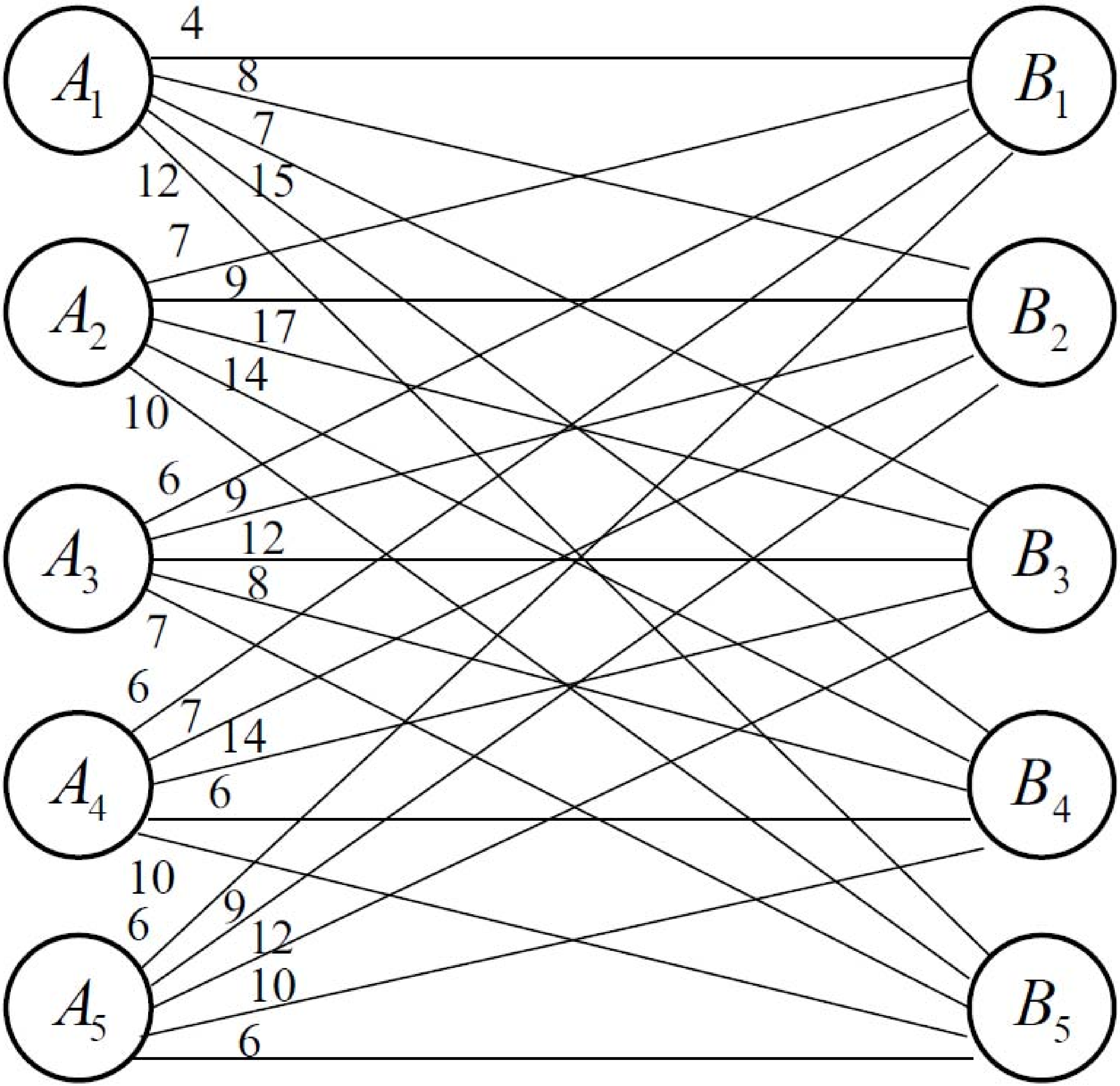
$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

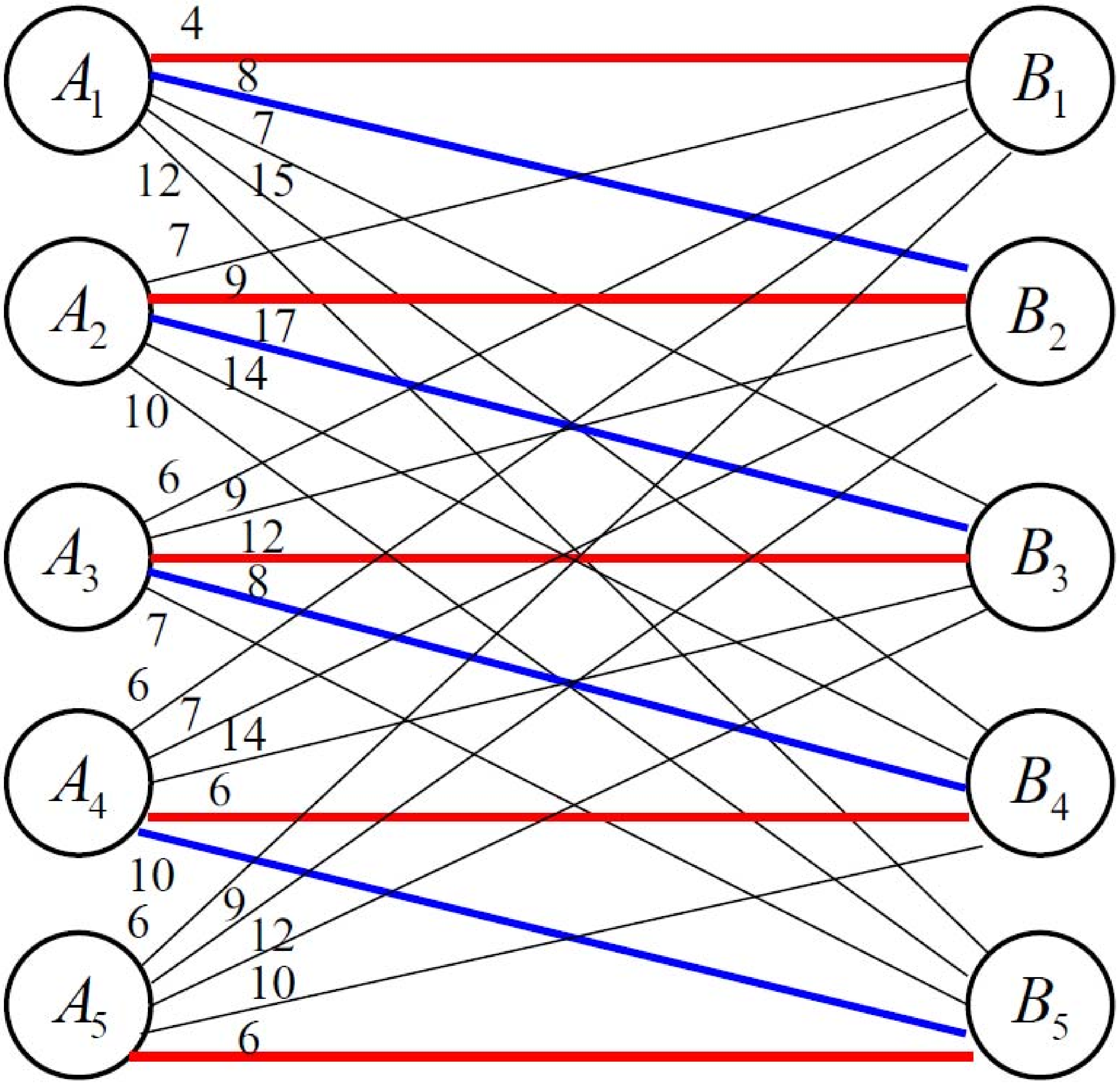
$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j$$

例：某商业公司要开办五家新商店，要五家建筑公司分别承建，各公司营造费用报价如下，商业公司应如何分派使总造价最小

费用报价 商店 / 公司	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	8	7	15	12
A_2	7	9	17	14	10
A_3	6	9	12	8	7
A_4	6	7	14	6	10
A_5	6	9	12	10	6

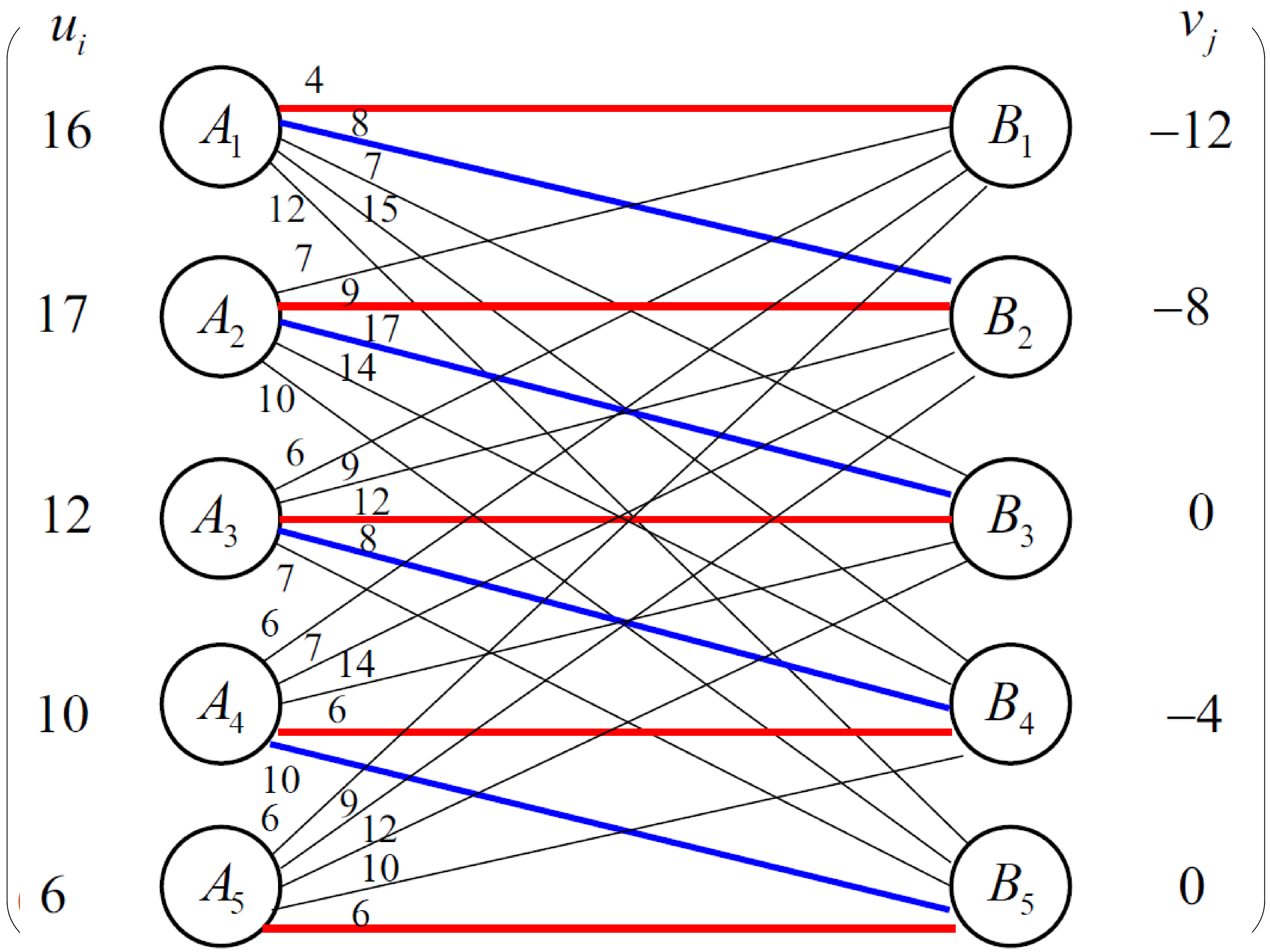


A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
B_1
B_2
B_3
B_4
B_5
4
8
7
12
15
7
9
17
14
10
6
9
12
8
7
6
7
14
6
10
6
9
12
10
6

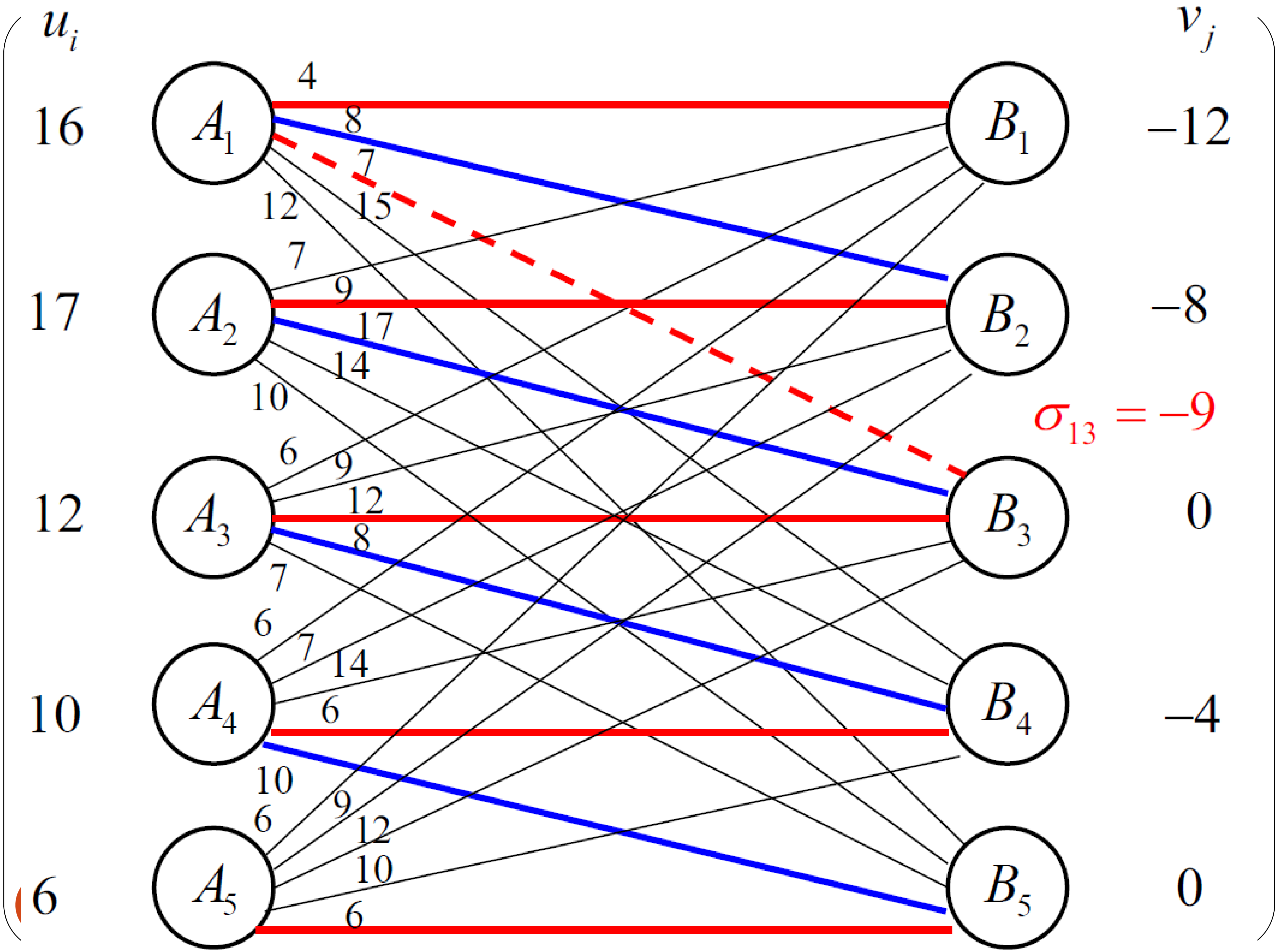


可行解：

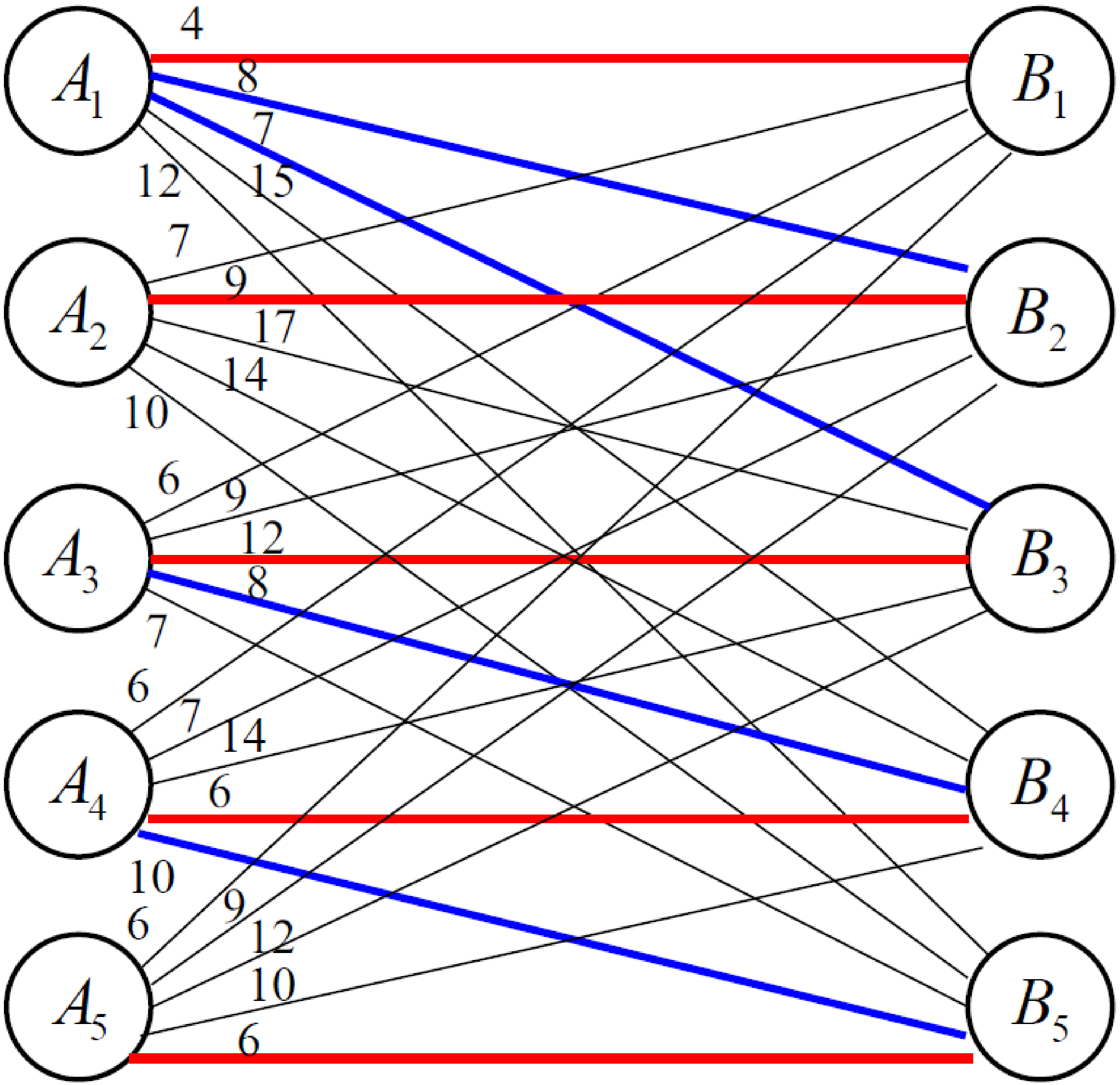
$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$



u_i
v_j
16
17
12
10
6
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
B_1
B_2
B_3
B_4
B_5
−12
−8
0
−4
0
4
8
7
12
15
7
9
17
14
10
6
9
12
8
7
6
7
14
6
10
6
9
12
10
6



u_i
v_j
16
17
12
10
6
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
B_1
B_2
B_3
B_4
B_5
−12
−8
0
−4
0
$\sigma_{13} = -9$
4
8
7
12
15
7
9
17
14
10
6
9
12
8
7
6
7
14
6
10
6
9
12
10
6



可行解：

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

尽管可以用求解运输问题的算法求解标准指派问题，由于存在大量的<u>退化解</u>，经常出现换基不能改进目标函数的情况，这种做法效率不高

进一步挖掘标准指派问题的特点可以获得更加有效的算法，这就是所谓的<u>匈牙利算法</u>

匈牙利树和匈牙利算法

匈牙利算法是一种在多项式时间内求解指派分配问题的组合优化算法，并推动了后来的原始对偶方法。

1955年，Kuhn利用匈牙利数学家康尼格(D.Kőnig)的一个定理构造了这个解法，故称为匈牙利法(Hungarian matching algorithm)。

1957年，Munkres也独立给出了这个算法。因此，目前很多文献将这个算法称为Kuhn-Munkres Algorithm。

H.W. Kuhn, "The Hungarian method for the assignment problem," Nav. Res. Logist. Q., 2 (1955), pp. 83-97.

J. Munkres, "Algorithms for the assignment and transportation problems," J. Soc. Ind. Appl. Math., 5 (1) (1957), pp. 32-38.

标准指派问题的第一个有用的性质

任取 $1 \le k \le n$ 和任意实数 A，用 C_1 和 C_2 分别表示将 C 的第 k 行或第 k 列减去 A 以后得到的系数矩阵，则以 C，C_1 或 C_2 为系数矩阵的指派问题的最优方案相同

理由：

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}(c_{kj}-A)x_{kj} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - A$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}(c_{ik}-A)x_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - A$$

目标函数差一个常数，约束相同，最优解也相同

标准指派问题的第二个有用的性质

如果 $C \in R^{n\times n}$ 的所有元素中没有负数，且存在 n 个行列号都互不相同的零元素（简称为独立零元素），那么对应的标准指派问题的最优目标值等于零，最优方案可以由独立零元素的位置确定

例如

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

最优解 $x_{13} = x_{22} = x_{31} = x_{44} = x_{55} = 1$

算法设想

一、利用第一个性质产生零元素

二、对给定矩阵找到最大的独立零元素组

三、当最大的独立零元素组的零元素数目不够时增加独立零元素的数目

通过以上步骤的迭代找到足够的独立零元素

例、对以下矩阵各行列减去最小值得到含零等价矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

要解决的问题：

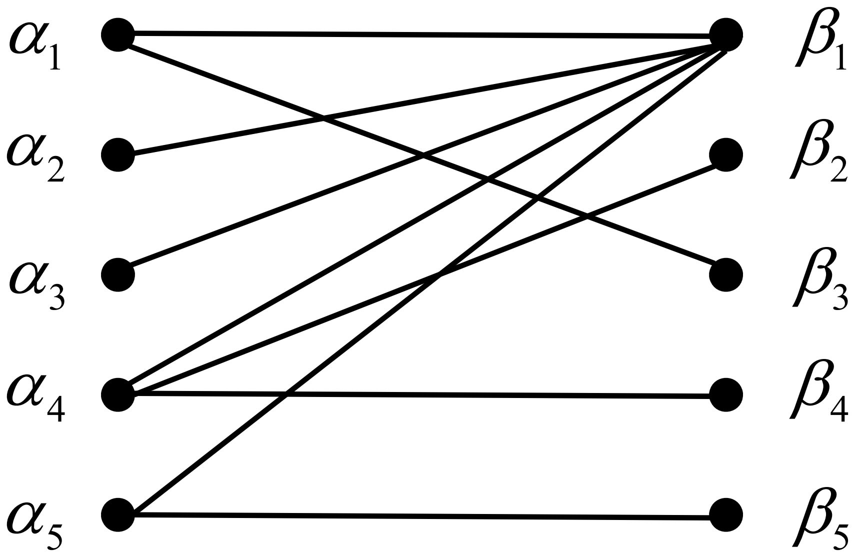
1）如何找出最大的独立零元素组

2）如果独立零元素不够怎么办

如何找出最大的独立零元素组？

用结点 α_i 表示第 i 行，结点 β_j 表示第 j 列，用边表示零元素位置，可得二分图（所有边端点分属两个点集）

$$
\begin{pmatrix}
0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\
0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\
0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\
0 & 2 & 3 & 4 & 0
\end{pmatrix}
$$



求左边矩阵最大独立零元素组等价于求右边<u>二分图</u>的<u>最大基对集</u>，即，<u>互相之间没有相同端点的边的最大集合</u>

对于$G=(N,E)$，给定<u>对集</u> $M\subseteq E$（用红线表示），定义

<u>**M**-（非）饱和点</u>：和**M**的边（不）关联的点

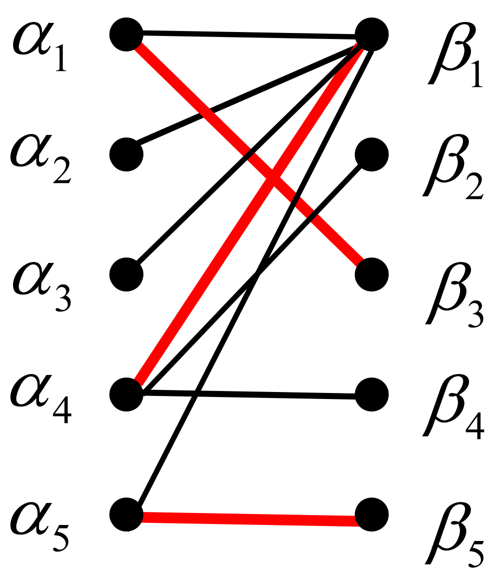
<u>**M**-交错路</u>：由属于和不属于**M**的边交错形成的路

<u>**M**-增广路</u>：起点和终点都是 **M**-非饱和点的交错路

<u>匈牙利树</u>：起点是 **M**-非饱和点但终点不是的交错路

<u>覆盖</u> $K\subseteq N$：E 中每条边都有端点属于 K

<u>最小覆盖</u>：所含端点数最少的覆盖



右图 $\alpha_2\to\beta_1\to\alpha_4\to\beta_4$ 是**M**-增广路

$\beta_2\to\alpha_4\to\beta_1\to\alpha_1\to\beta_3$ 是匈牙利树

$\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5,\beta_1\}$ 是覆盖

对集的边数和覆盖的点数之间的关系：

<u>任何对集的边数都不会大于任何覆盖的点数</u>

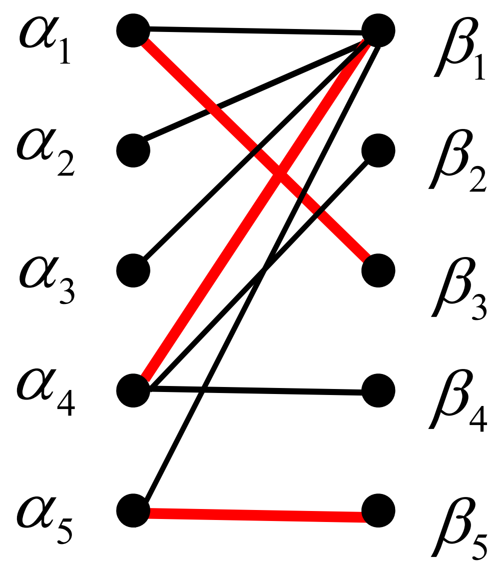
理由：对集每条边的两个端点至少有一个在覆盖中

扩大给定对集 M 的途径：

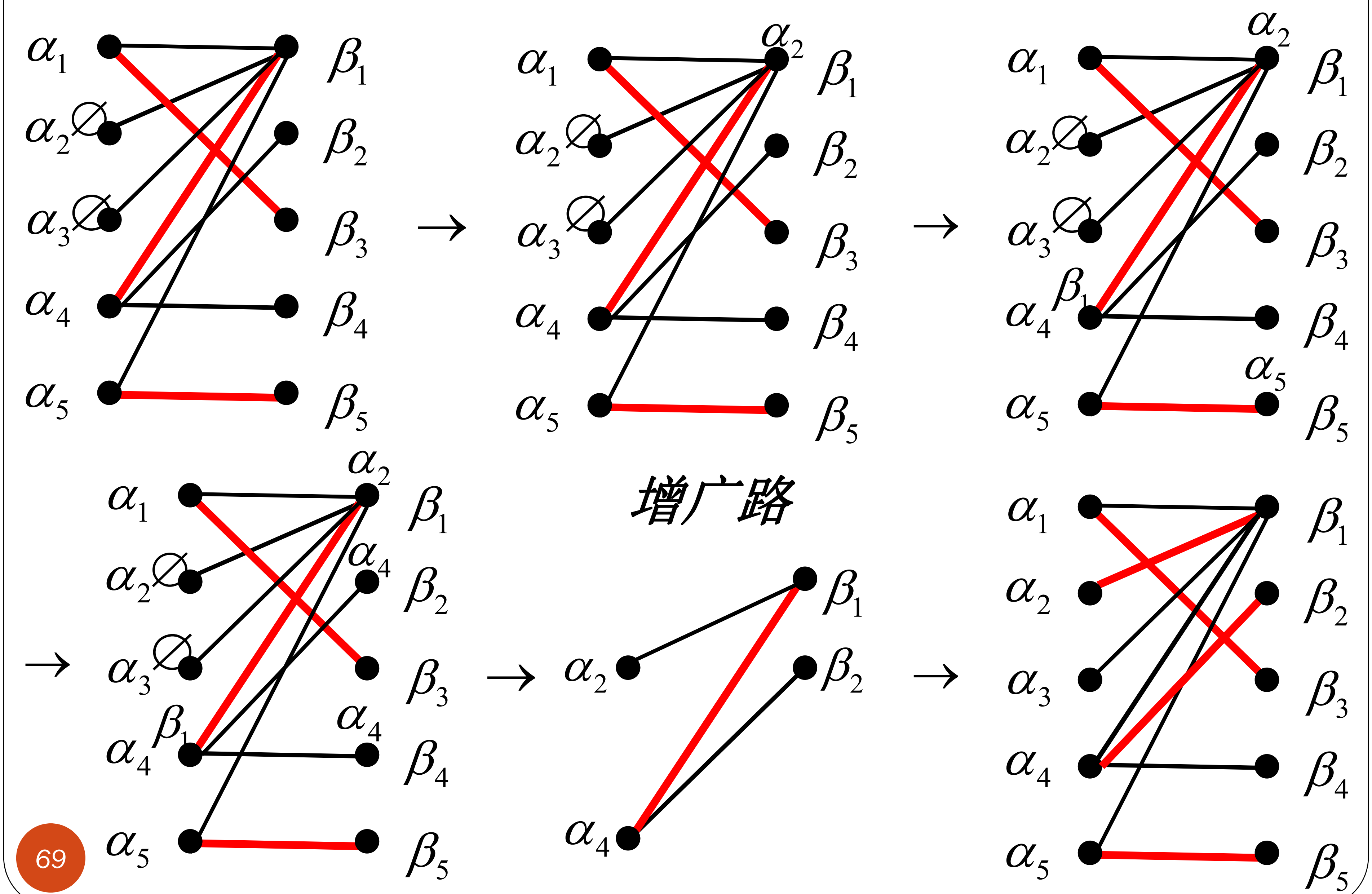
<u>在 G 中找**M-**增广路</u>

理由：如右图用 $(\alpha_2,\beta_1),(\alpha_4,\beta_4)$ 替换

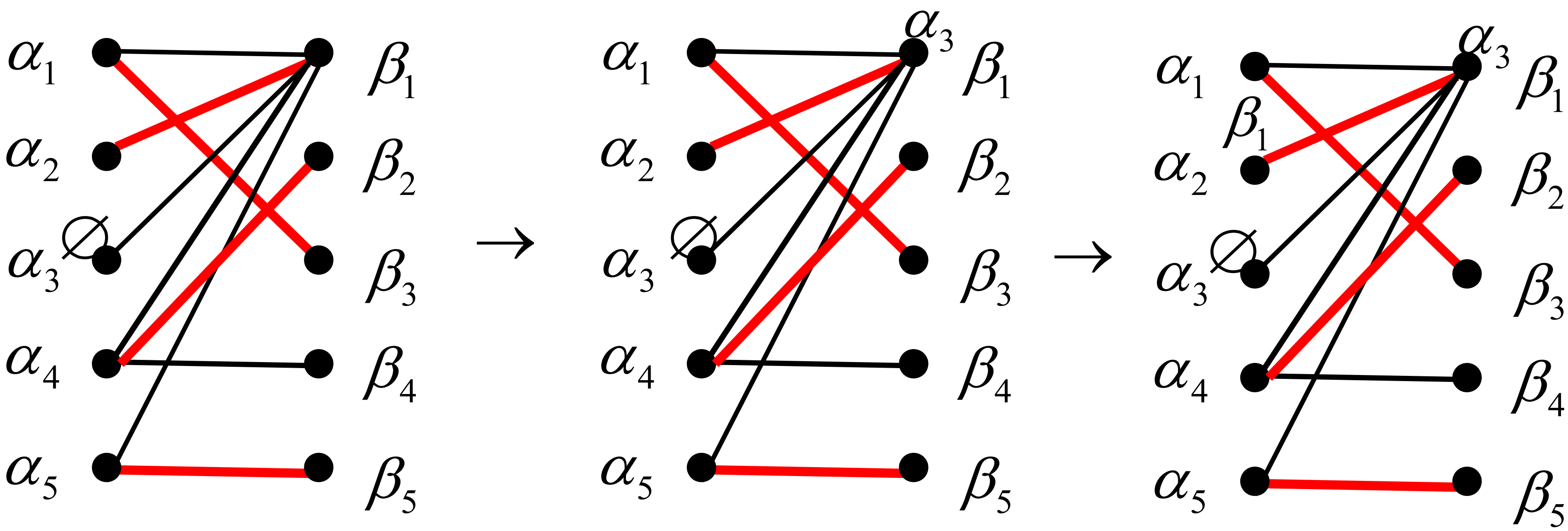
(β_1,α_4) 就可扩大 M



通过标号寻找二分图增广路



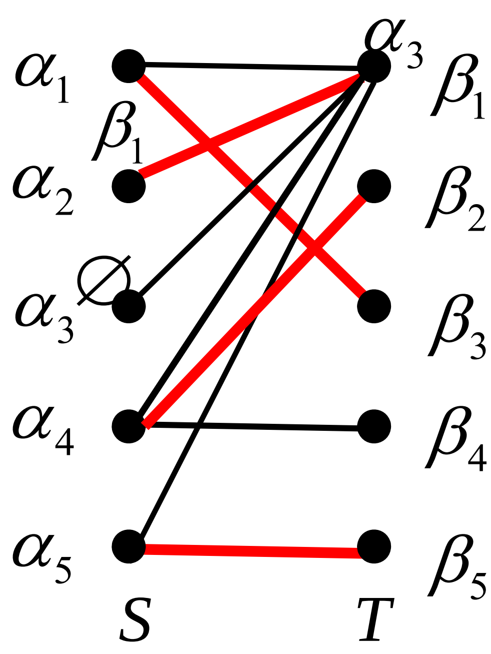
重新标号



由于从左边的非饱和点出发只能得到匈牙利树，可知不可能再有**M**-增广路

用S和T分别表示左右两边的点集合

用L表示被标注点集合　可看出：



1）$S-L=\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5\}$覆盖不属于匈牙利树的对边；

2）$T\cap L=\{\beta_1\}$覆盖属于匈牙利树的对边；

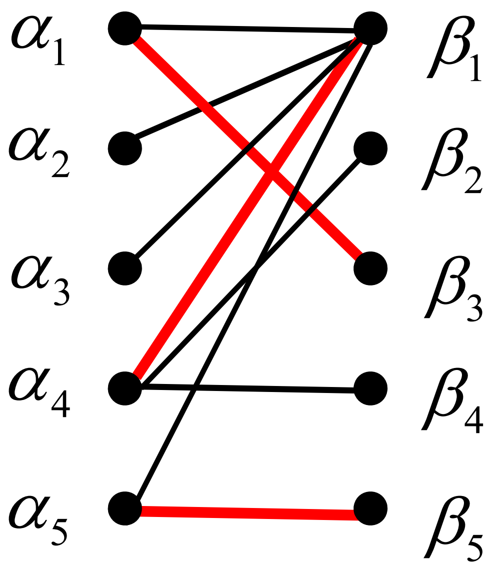
3）$S-L$和$T\cap L$不相交

行列数目不同的指派问题也可以用匈牙利算法

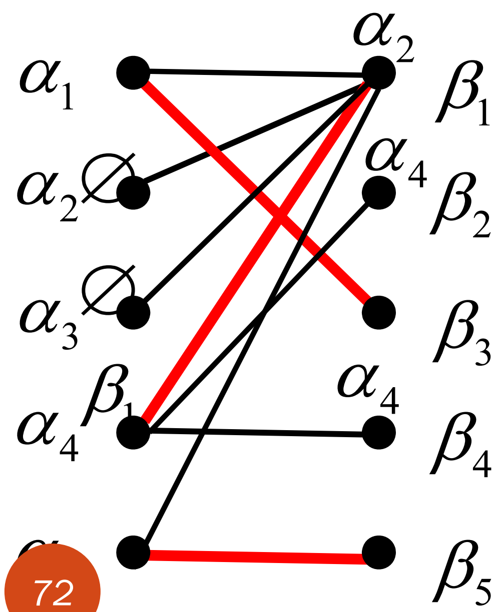
$\Rightarrow$ $(S-L)\cup(T\cap L)$和对边数相等，因此是最小覆盖

$\Rightarrow$ **<u>M是G的最大对集的充要条件是G中没有M-增广路</u>**

以上过程可以直接在费用矩阵上实现



$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ \varnothing \\ \varnothing \\ 1 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & & 4 & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

重新标号

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 3 & & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ 1 \\ \varnothing \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

不能再标号，停止，利用最后的匈牙利树 $\{(3,1),(2,1)\}$ 可得最小覆盖 $(S-L)\cup(T\cap L)=\{1,4,5\}\cup\{1\}$

对 $S-L$ 用行线

对 $T\cap L$ 用列线

$$
\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}
$$

独立零元素不够怎么办?

找出未覆盖处最小的数，在没被行直线覆盖的行减去最小数，然后在有负数的列加上这个最小数

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ -1 \\ -1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} \quad +1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ -1 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

继续用找对集方法找最大的独立零元素组

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 3 & 2 & & 4 & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ 1 \\ \varnothing \\ 2 \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

得最优解 $x_{13} = x_{22} = x_{31} = x_{44} = x_{55} = 1$

矩阵操作的匈牙利算法

Step 1）变换效率矩阵 C，使每行每列至少有一个 0，变换后的矩阵记为 B¶

行变换：找出每行 min 值，该行各元素减去它；¶

列变换：找出每列 min 值，该列各元素减去它；¶

若某行/列已有 0 元素，则不用减。¶

¶

对于我们的作业题，得到¶

2 0 0 1 4¶

0 0 2 0 0¶

2 0 0 3 4¶

1 0 0 1 1¶

2 1 2 0 0¶

Step 2）寻找零元素的最小覆盖：从含零元素最少的行或者列开始，圈出一个零元素，用○表示，然后划去该○所在的行和列种的其余零元素，用×表示，依次类推，若能得到 n 个○，则得到最优解停止¶

¶

对于我们的作业题，得到¶

2 0 0 1 4	2 0 0 1 4	2 O X 1 4	2 O X 1 4¶
O X 2 X X	O X 2 X X	O X 2 X X	O X 2 X X¶
2 0 0 3 4	2 0 0 3 4	2 X 0 3 4	2 X O 3 4¶
1 0 0 1 1	1 0 0 1 1	1 X 0 1 1	1 X X 1 1¶
2 1 2 0 0	2 1 2 O X	2 1 2 O X	2 1 2 O X¶

Step 3）如果○的个数少于 n，则进行：

Step 3.1）对没有圈○的行打“ √ ”；

Step 3.2）在已打“ √ ”的行中，对×所在列打“ √ ”；

Step 3.3）在已打“ √ ”的列中，对圈○的行打“ √ ”；

Step 3.4）重复 2 和 3 步骤，直到再也找不到可以打“ √ ”的行/列为止；

Step 3.5）对没有打“ √ ”的行画横线表示去掉这一行，对打“ √ ”的列画横线表示去掉这一列，这样就得到能覆盖所有 0 的最小横线。

对于我们的作业题，得到

2 O X 1 4	2 O X 1 4	2 O X 1 4	√
O X 2 X X	O X 2 X X	O X 2 X X	
2 X O 3 4	2 X O 3 4	2 X O 3 4	√
1 X X 1 1 √	1 X X 1 1 √	1 X X 1 1	√
2 1 2 O X	2 1 2 O X	2 1 2 O X	
	√ √	√ √	

得到最小覆盖：第 2 列和第 3 列竖线，第 2 行和第 5 行横线¶

2 ~~O~~ ~~X~~ 1 4¶

~~O X 2 X X~~¶

2 ~~X~~ ~~O~~ 3 4¶

1 ~~X~~ ~~X~~ 1 1¶

~~2 1 2 O X~~¶

¶

Step 4）变换矩阵 B 以增加零元素。¶

在未被直线覆盖的所有元素中找到 min；¶

然后在打“√”的所有行中减去这个 min；¶

而在打“√”的所有列中加上这个 min，以保持原来 0 不变（为了消除负元素）；¶

得到新的系数矩阵 C。¶

对于我们的作业题，显然上面的未被直线覆盖的所有元素中最小值为 1，操作之后有

1 Θ X 0 3

~~Θ 1 3 X X~~

1 X Θ 2 3

0 X X 0 0

~~2 2 3 Θ X~~

显然此时得到的矩阵很容易可以写出多种 5 个独立零元素组合，这说明原问题有多解。

Step 5）如果还没有找到 n 个独立零元素，返回步骤（2），直到得到 n 个独立零元素，即得到最优解。

非标准指派问题

目标函数求最大

$$\max \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \min\left(nA - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right)$$

$$= \min\left(A\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right)$$

$$= \min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(A - c_{ij}\right)x_{ij}$$

取 $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}$，令 $C' = \left(A - c_{ij}\right)_{n\times n}$，得标准指派问题

其它非标准情况

1）人数和事情不等

2）某人可能不能做某些事

采取下述相应措施可转换成标准指派问题

1）增加虚拟的人或事，相应费用系数为0

2）增加不存在的边，相应费用取为很大正数

全单模矩阵和整数解

设有如下整数规划问题S： $\min\left\{c^T x : Ax \le b, x \in Z_+^n\right\}$ （1）

其连续松弛问题S1： $\min\left\{c^T x : Ax \le b, x \in R_+^n\right\}$ （2）

进一步假设b是整数向量

定理2.1：若线性规划问题P1的最优基矩阵 B 满足 $det\,(B)=\pm 1$ ，这里 B 是矩阵 (A,I) 的 $m\times m$ 维子方阵，则线性规划问题P1的最优解 x^* 是整数解。

证明：由线性规划的基本理论可知 $x^*=\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ ，根据克莱默法则可知 $B^{-1}=B^*/\det(B)$ 。

由假设条件1可知 伴随矩阵 B^* 的所有元素也是整数，同时由于 $det\,(B)=\pm 1$ ，易知 B^{-1} 的所有元素也是整数的。再根据 B^{-1},b 都是整数的，可知 x^* 也是整数的。

全单模矩阵(totally unimodular matrix)定义：设矩阵 $A_{m\times n}$ ，若矩阵 A 的任意子方阵的行列式为0,-1,+1，则称矩阵 A 为全单模矩阵。（子方阵是指把一个矩阵的一部分行和一部分列的交点所构成的方阵）

定理2.2：若矩阵 A 是全单模矩阵，向量 b 的所有元素都是整数，则问题P1所构成的可行域（也是一个多面体）$\{x\in R_+^n : Ax\le b\}$ 的顶点都是整数点。

定理2.2：若矩阵 A 是全单模矩阵，向量b 的所有元素都是整数，则问题P1所构成的可行域（也是一个多面体）$\{x \in R_+^n : Ax \le b\}$ 的顶点都是整数点。

证明：多面体可以表示为 $Ax + Iy = b, x \in R_+^n, y \in R_+^m$ 。设 $(A, I) = (B, N)$ ，其中 B 是基矩阵，有定理2.1可知 B^{-1} 是整数矩阵，从而 $(x, y)^T = (B^{-1}b, 0)^T$ 是线性规划P1的一个基本可行解，也就是说所有的基本可行解都是整数点。

然后，由多面体顶点和基本可行解的对应关系（一个多面体顶点至少有一个基本可行解与之对应），进一步可知所有多面体的顶点都是整数点。

性质1：若矩阵 A 是全单模矩阵，则矩阵中的元素只能为0，-1或者+1。

其逆否命题为：若矩阵中有任意一个元素不等于0，-1或者+1，则矩阵 A 不是全单模矩阵。好了这个逆否命题是非常实用的，一下子就把很多矩阵排除出了全单模矩阵的范畴。

性质2：设整数矩阵 A 是全单模矩阵，对 A 进行一下运算不改变其全单模性质：

(1) 对矩阵 A 进行转置

(2) 矩阵 (A, I) 是全单模的

(3) 去掉 A 的一行或者一列

(4) 将 A 的一行或者一列乘以 -1

(5) 互换 A 的两行或者两列

(6) 对 A 进转轴运算

推论1：设矩阵 A 的任意元素都是0，-1或者+1，并且每列至多有2个非0元素，则矩阵 A 是全单模矩阵当且仅当存在 A 的行分割 Q_1, Q_2 使得同一列中的两个非0元素满足以下条件：

(1) 若符号相同，则一个元素位于 Q_1 ，另一个元素位于 Q_2

(2) 若符号相反，则这两个元素同时属于 Q_1 或者同时属于 Q_2

推论2：设矩阵 A 的任意元素都是0，-1或者+1，若 A 满足以下两个条件则矩阵 A 是全单模的；

(1) A 的每一列至多含有2个非0元素

(2) 若某列含有2个非0元素，则两个元素之和为0

最后强调一点就是推论1和2都是充分条件，也就是说满足推论1和2的那肯定是全单模矩阵，但是不满足的也可能是全单模矩阵也可能不是全单模矩阵，这一点大家在使用的时候需要注意。

常见的全单模矩阵整数规划问题

1. 二分图问题

其 $V \times E$ 关联矩阵(行表示节点数，列表示边)为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

2. 指派问题
3. 最小费用最大流问题

因为最小费用最大流问题约束矩阵为全单模、因此整数规划模型的解等价于线性规划的解

可以证明每一个整数流方案都对应线性规划问题的一个顶点

而我们最小费用最大流问题算法的每次迭代的过程就是，从线性规划的一个顶点跳到一个更优的顶点。根据线性规划问题的性质，一定能够在指数时间内找到最优解。