运筹学第十一次作业参考答案

1. 用简约梯度法求解以下问题：

$$\begin{cases}\min & f(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_2^2-4x_1x_2-4x_1-6x_2\\ \text{s.t.} & x_1+x_2\le 2\\ & x_1+5x_2\le 5\\ & x_1\ge 0,x_2\ge 0\end{cases}$$

以[1,0]为起始点，给出求解过程。

第一轮初始点$[1,0,1,4]^T$，$D=[0,10,-10,-50]^T,\alpha=\frac{2}{25},X=\left[1,\frac{4}{5},\frac{1}{5},0\right]^T$

第二轮$x_B=\left[1,\frac{4}{5}\right]^T,D=[0.575,-0.115,-0.46,0]^T,\alpha=\frac{10}{23},X=\left[\frac{5}{4},\frac{3}{4},0,0\right]^T$

2. 共轭梯度法是否可以求解非严格凸的二次规划问题？给出理由。

不能。

对于$f(X)=\frac{1}{2}X^TAX+b^TX$，若$b\neq 0$，A 为半正定阵，二次规划可能是无界的，例如$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2$。

很多同学默认二次规划有界，考虑的是$f(X)=\frac{1}{2}X^TAX$的问题，但有常见错误：

会陷入局部最优解：无论严格凸还是非严格凸，局部最优都是全局最优。

有无穷多解可能陷入循环：$\nabla f(X)=0$时，$\alpha_k=0$，迭代结束，不会循环。

$D_1^TAD_1$可能为 0，共轭梯度无法推导线性无关：

由于A半正定，$D_1^TAD_1=0$等价于$AD_1=0$，而$D_1=-\nabla f(X_1)=AX_1$，对称阵A的值域和核空间正交，$AAX_1=0$等价于$AX_1=0$，也就是梯度为 0，即已收敛到最优解。故若未收敛，不会出现$D_1^TAD_1=0$。D_k的情况也可以进行递推。

可以考虑例子：$f(x_1,x_2)=x_1^2$。仅需一步梯度下降即可降低至最优解，再次计算$\alpha_k=0$。这种情况下可以认为，共轭梯度法是能够求解的。

3. 证明：一个图是二分图当且仅当图中不含奇数环。
（奇数环：回路中边的个数是奇数）

二分图->不含奇数环：
二分图 V 可以分为不相交的两个子集 S,T。
假设二分图中存在奇数环，其中一个点在 S 中，那么经过奇数条边到达的点一定在 T 中，而非回到起点形成环，矛盾。

不含奇数环->二分图：
取图中每个连通子图中任意一点，该点经过奇数条边到达的点构成 T，该点以及该点经过偶数条边到达的点构成 S。若 S 或 T 中存在边，则构成奇数环，矛盾。所以 V 可以以此划分为二分图。