运筹学

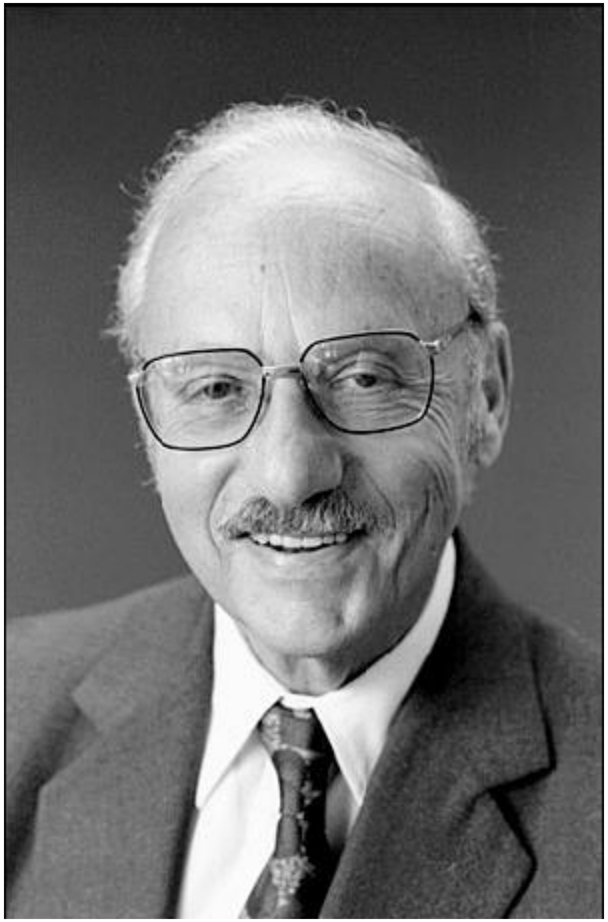
1. 线性规划的基本概念

李 力
清华大学
Email: li-li@tsinghua.edu.cn

2023.9.

1.1. 线性规划问题的历史

Leonid V. Kantorovich
Jan 19, 1912-April 7, 1986



George B. Dantzig
Nov 8, 1914-May 13, 2005

1.1. 线性规划问题的历史

"*In the summer of 1948, Koopmans and I visited the Rand Corporation. One day we took a stroll along the Santa Monica beach. Koopmans said: "Why not shorten 'Programming in a Linear Structure' to 'Linear Programming'?"*

I replied: "That's it! From now on that will be its name." Later that day I gave a talk at Rand, entitled "Linear Programming"; years later Tucker shortened it to Linear Program.

The term Mathematical Programming is due to Robert Dorfman of Harvard, who felt as early as 1949 that the term Linear Programming was too restrictive."

– G. B. Dantzig, "Linear Programming," *Operations Research*, vol. 50, no. 1, pp. 42-47, 2002.

题1：某部队需要购买A、B二食品，已知食品含有的人体每日必须的营养成份元素 1、 2、 3的多少及每日该三种营养成份每日必需量如下表，试问该部队应如何制定选购食品的计划，使得在满足要求的情况下总的费用最少

	A	B	每日该元素最低摄入量
元素1	10	4	20毫克
元素2	5	5	20毫克
元素3	2	6	12毫克
食品价格	0.6元	1元	

第一步，确定决策变量

设 x_1 为计划购买食品 A 的量

设 x_2 为计划购买食品 B 的量

第二步，建立目标函数

目标函数为：$\min 0.6x_1 + x_2$

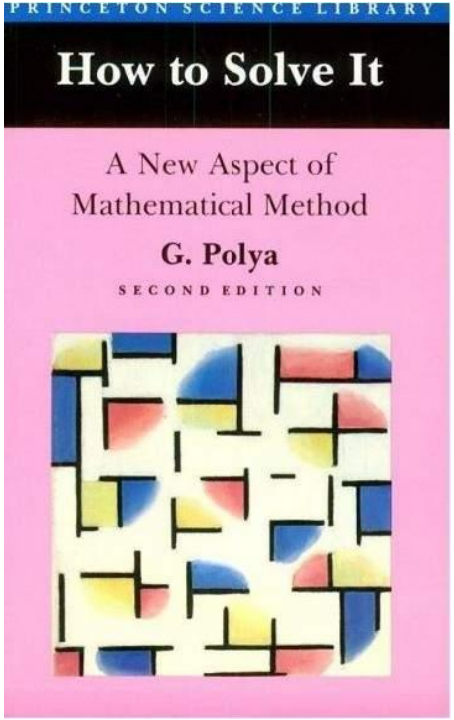
第三步，寻找约束条件

$$\begin{cases} 10x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 5x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ 2x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases}$$

还需要其他条件吗？

1.2. 典型问题和图解法

求解什么未知数？
已知什么？
条件是什么？
条件充不充分？
但凡能画图，一定要画，
把条件分解成各个部分，
把问题用自己的话重新讲，
反复讲。



— G. Polya, *How to Solve it: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton Science Library Edition, 2015.

建模的要点在于：

1. 对现实问题要看透，抓住问题里面的最重要的因素（因问题而异，无一般方法）

2. 找到最合适的数学语言和它对应（simple and elegant）

3. 建立模型，要尽量容易解

4. 尽量套用已有的现成模型，方便使用成熟的求解方法和计算工具

5. 把求得的结果从数学语言翻译成我们能看懂的语言

线性规划问题的深入理解

1. **独立性**：决策变量是独立的，决策变量之间不直接关联（比如要求成比例），但可以通过约束关联

2. **可分性**：决策变量的值具有可分性，允许非整数实数值

3. **比例性**：每个决策变量的数值变化时，以特定的比例系数，引起目标函数增量的变化

4. **可加性**：目标函数的总值是各组成部分值之和

1.2. 典型问题和图解法

题2：生产一种化工产品，要占用A、B设备及调试时间，每吨产品机时利润如表所示

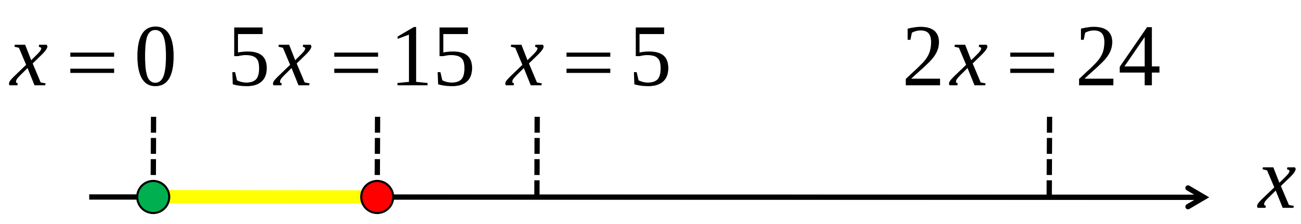
	产品	每天可用时间
占用A机时	5	15
占用B机时	2	24
调试时间	1	5
利润	1	

如何生产使每天利润最大？

1. 2. 典型问题和图解法

建立数学规划模型

$$
\begin{aligned}
\max\ & x \\
\text{s.t.}\ & 5x \le 15 \\
& 2x \le 24 \\
& x \le 5 \\
& x \ge 0
\end{aligned}
$$



黄实线是可行集，红点是最优解

1.2. 典型问题和图解法

题3：生产I、II两种化工产品，要占用A、B设备及调试时间，每吨产品各自机时利润如表所示

	产品I	产品II	每天可用时间
占用A机时	0	5	15
占用B机时	6	2	24
调试时间	1	1	5
利润	2	1	

如何生产使每天利润最大？

建模

确定变量： 生产两种产品的件数 $x_1 \quad x_2$

目标函数： $2x_1 + x_2$

约束条件：

$5x_2 \le 15$ A机时约束

$6x_1 + 2x_2 \le 24$ B机时约束

$x_1 + x_2 \le 5$ 调试时间约束

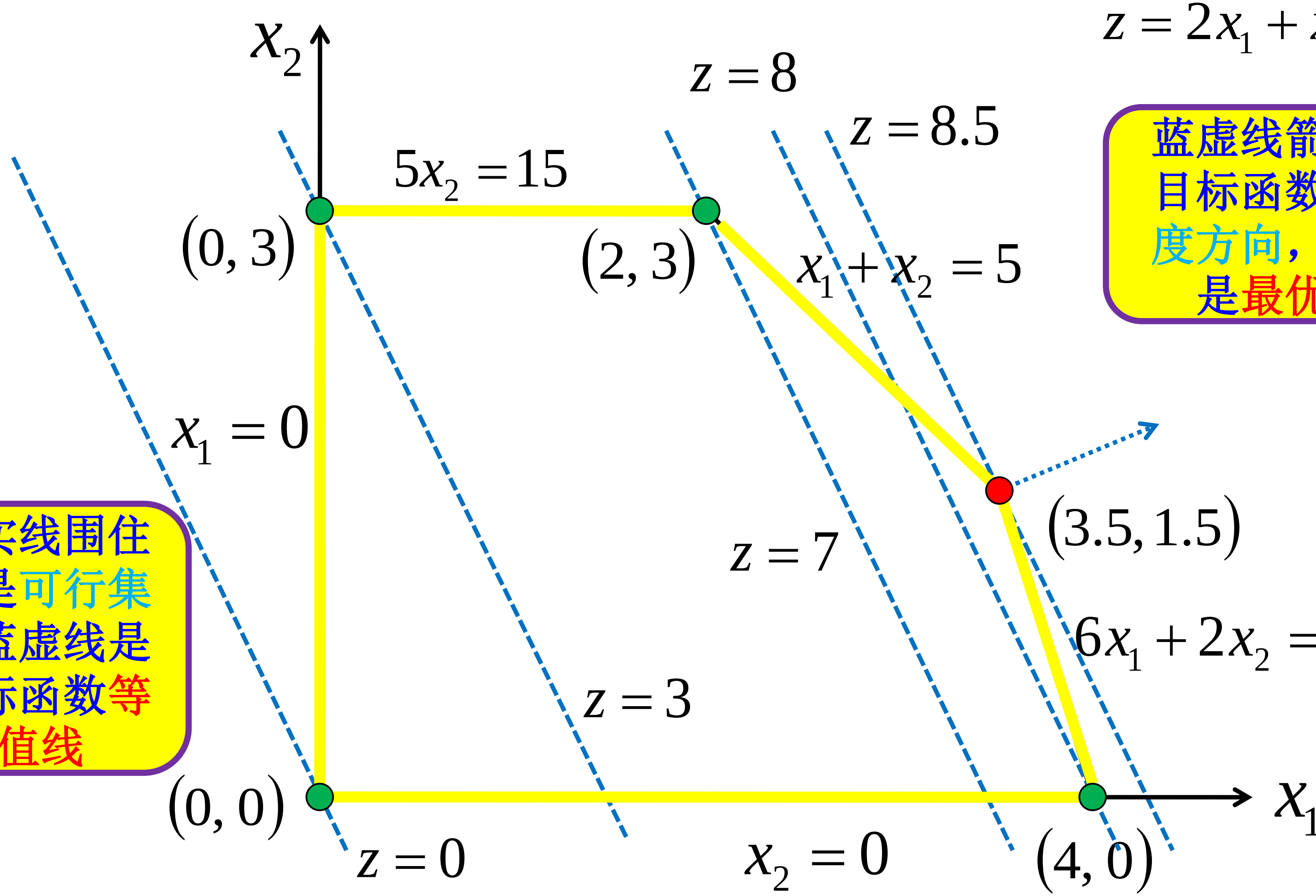
$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ 非负约束

建立数学规划模型

$$
\begin{aligned}
\max\quad & z = 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 5x_2 \le 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\
& x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

少数几个变量的线性规划模型可以建立图解表示

$z = 2x_1 + x_2$



蓝虚线箭头是目标函数的梯度方向，红点是最优解

黄实线围住的是可行集，蓝虚线是目标函数等值线

1.2. 典型问题和图解法

题4： 生产I、II、III三种化工产品，要占用A、B设备及调试时间，每吨产品各自机时利润如表所示

产品	I	II	III	每天可用时间
占A机时	0	5	4	15
占B机时	6	2	0	24
调试时间	1	1	1	5
利润	2	1	1	

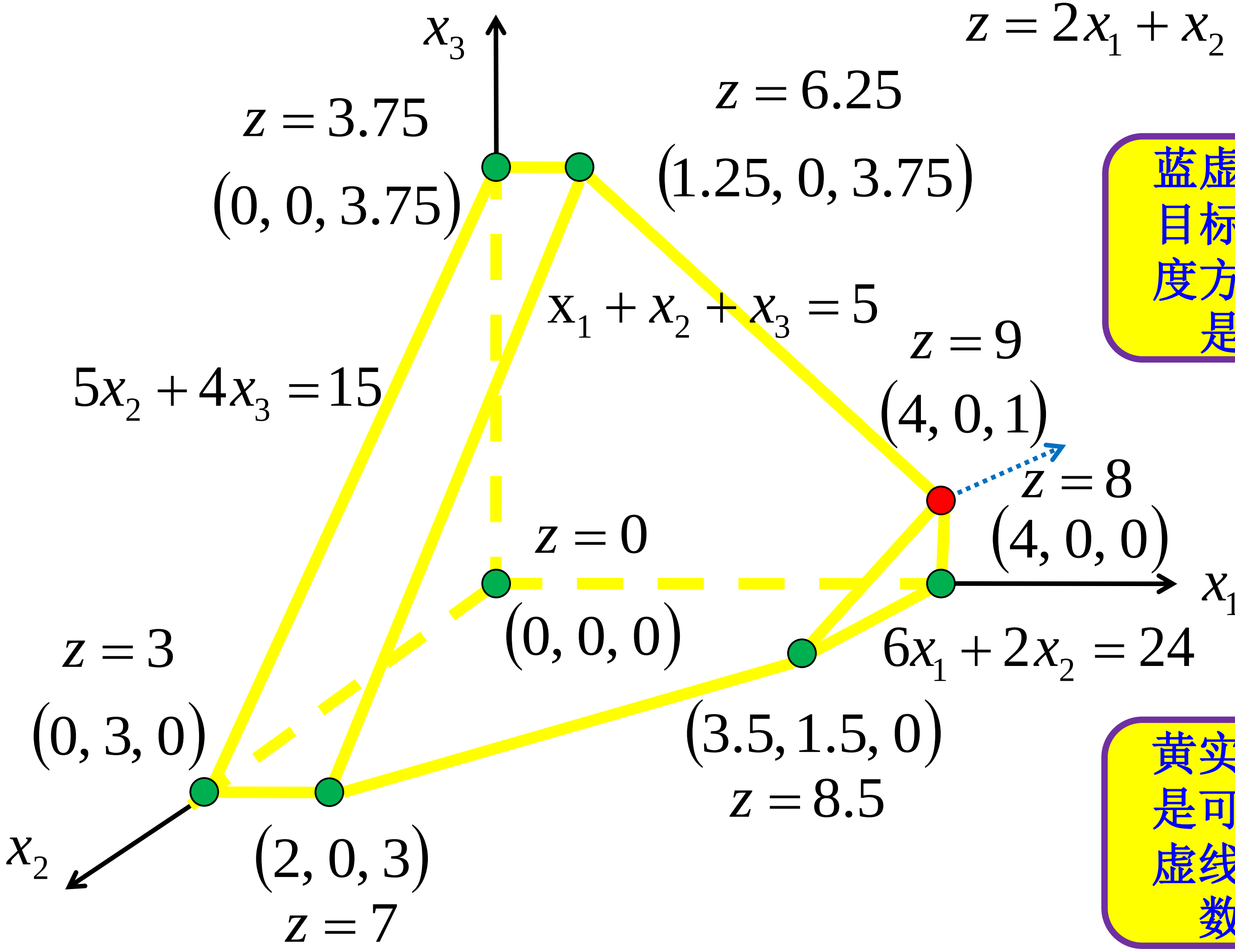
如何生产使每天利润最大？

建立数学规划模型

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 2x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 5x_2 + 4x_3 \le 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\
& x_i \ge 0,\ i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

1. 2. 典型问题和图解法

$$z = 2x_1 + x_2 + x_3$$



蓝虚线箭头是目标函数的梯度方向，红点是最优解

黄实线围住的是可行集，蓝虚线是目标函数等值线

1.2. 典型问题和图解法

测试题1

农民特德有500英亩的土地种植小麦、玉米或甜菜。他需要200吨小麦和240吨玉米来养牛。这些农作物可以在他的土地上种植，也可以从批发商那里购买。任何超过这些数量的产品都可以出售：小麦170美元/吨，玉米150美元/吨。任何短缺必须以小麦238美元/吨，玉米210美元/吨的价格从批发商处购买。特德也能种甜菜。少于6000吨甜菜可以卖36美元/吨。但由于甜菜生产的经济配额，超过6000吨的甜菜只能以每吨10美元的价格出售。亩产量：小麦2.5吨/英亩，玉米3吨/英亩，甜菜20吨/英亩。种植花费：小麦150美元/英亩，玉米230美元/英亩，甜菜260美元/英亩。

请问特德如何种地才能获得最大收益？

测试题2

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_2 + 2x_3 \le 8 \\
& 4x_1 \le 16 \\
& 4x_2 \le 12 \\
& x_i \ge 0,\ i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

总结低维多面体模型共有规律，准备从低维到高维一般问题的起飞

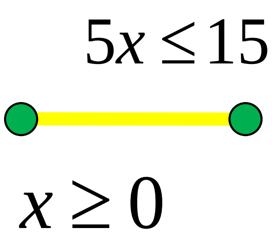
1. 可行集是不等式约束围成的集合

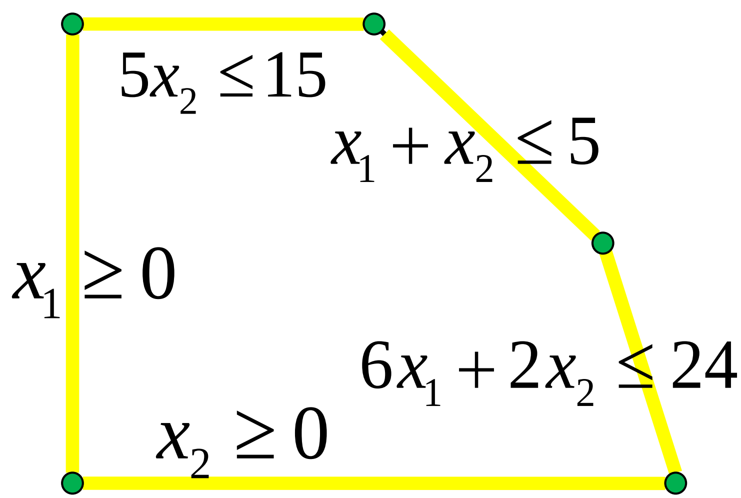
2. 如果是有限区域，“绿点”中存在有界最优解（无论什么线性目标函数）

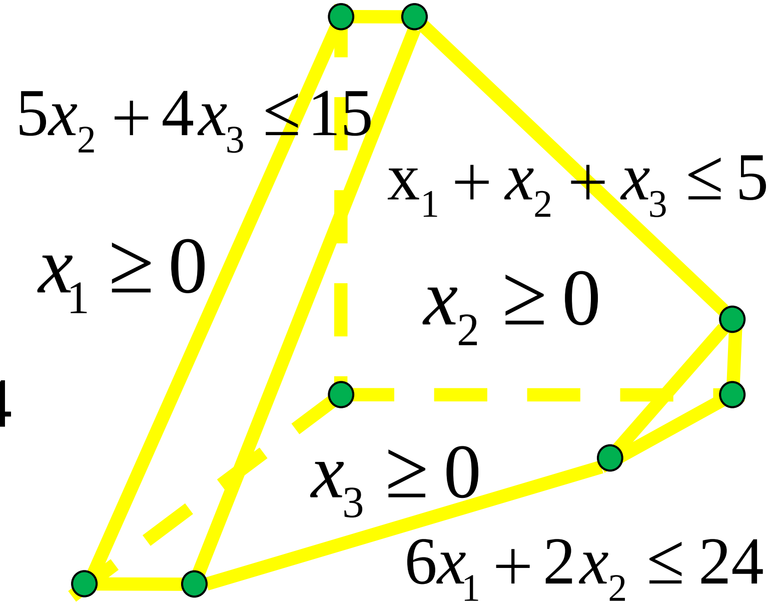
3. 如果是有限个约束条件，“绿点” 个数有限

启示：在“绿点” 中找最优解！

总结低维多面体模型共有规律：每个“绿点” 都是该点所有起作用约束（不等式成为等式的约束）构成的线性方程组的唯一解







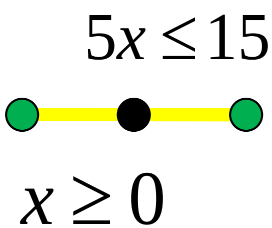
$$5x = 15 \quad \Rightarrow \quad x^* = 3$$

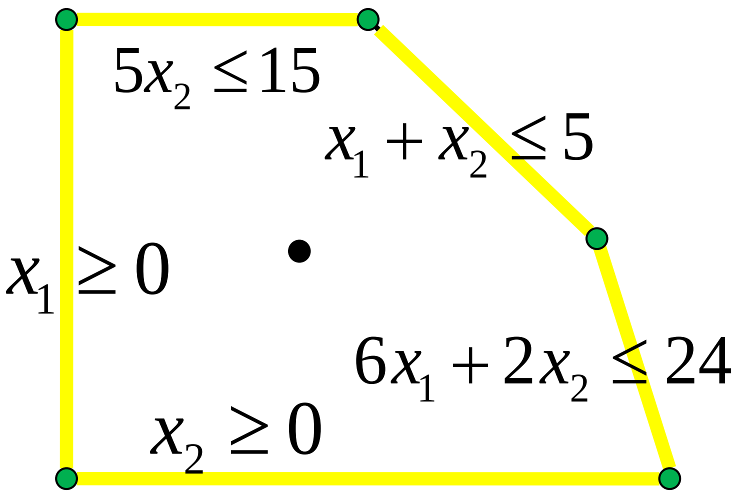
$$x_1 + x_2 = 5, 6x_1 + 2x_2 = 24 \quad \Rightarrow \quad X^* = (3.5, 1.5)^T$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5, 6x_1 + 2x_2 = 24, x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X^* = (4, 0, 1)^T$$

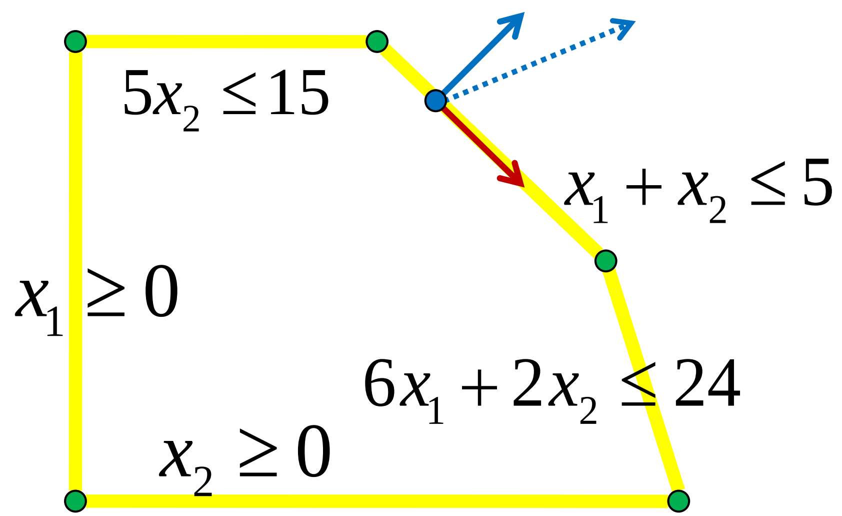
为什么 “绿点”中有最优解？

1. 如果可行解没有起作用约束（内点），沿梯度方向必可改进目标函数，不可能是最优解，如黑点所示

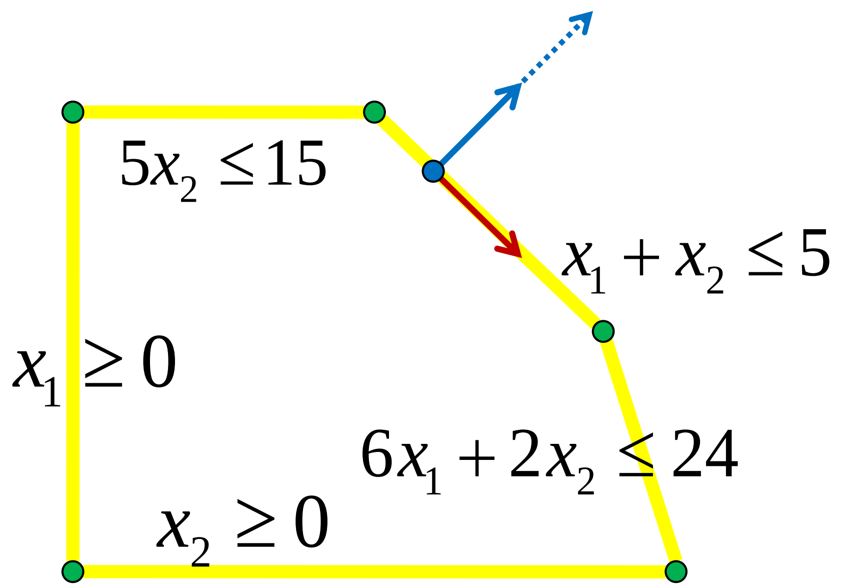




2. 如果可行解不是起作用约束的唯一解，必有非零向量和起作用约束的所有法线垂直（如下图蓝点和蓝色向量），此时将梯度方向投影到蓝色向量的垂直空间得到一个向量（下图的红色向量），沿此方向前进可改进目标函数，所以也不可能是最优解



3. 如果可行解不是起作用约束的唯一解，但梯度如下图所示，和所有起作用约束的法线垂直，此时蓝点是最优解，但沿着红色方向前进可以得到至少增加一个起作用约束的最优解，因此也可得到一个最优解绿点（此时最优解不唯一）



1.3. 线性规划问题的解

一般线性规划问题的解可以分成四种情况

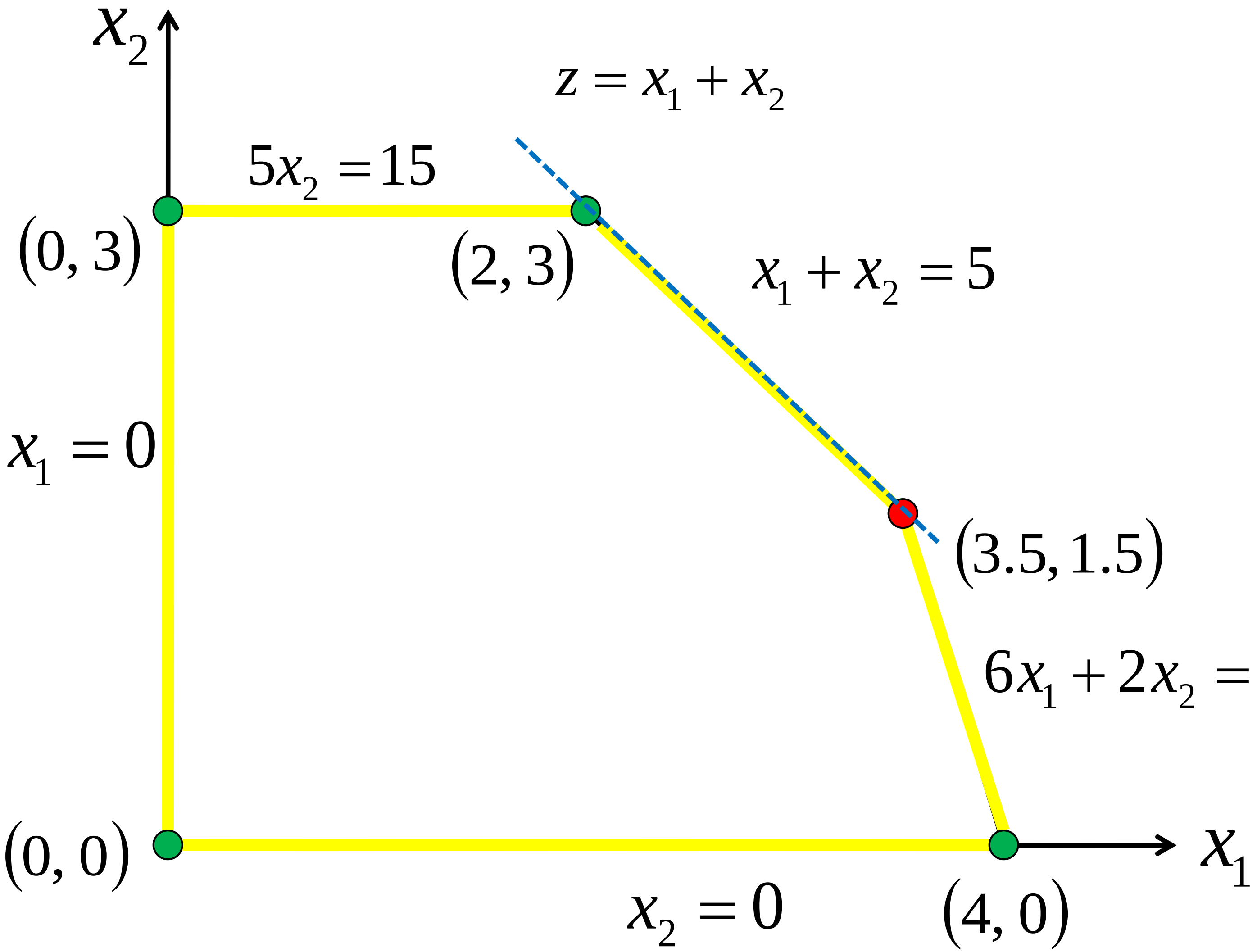
1. 有唯一（有界）最优解

2. 有无穷多个（有界）最优解

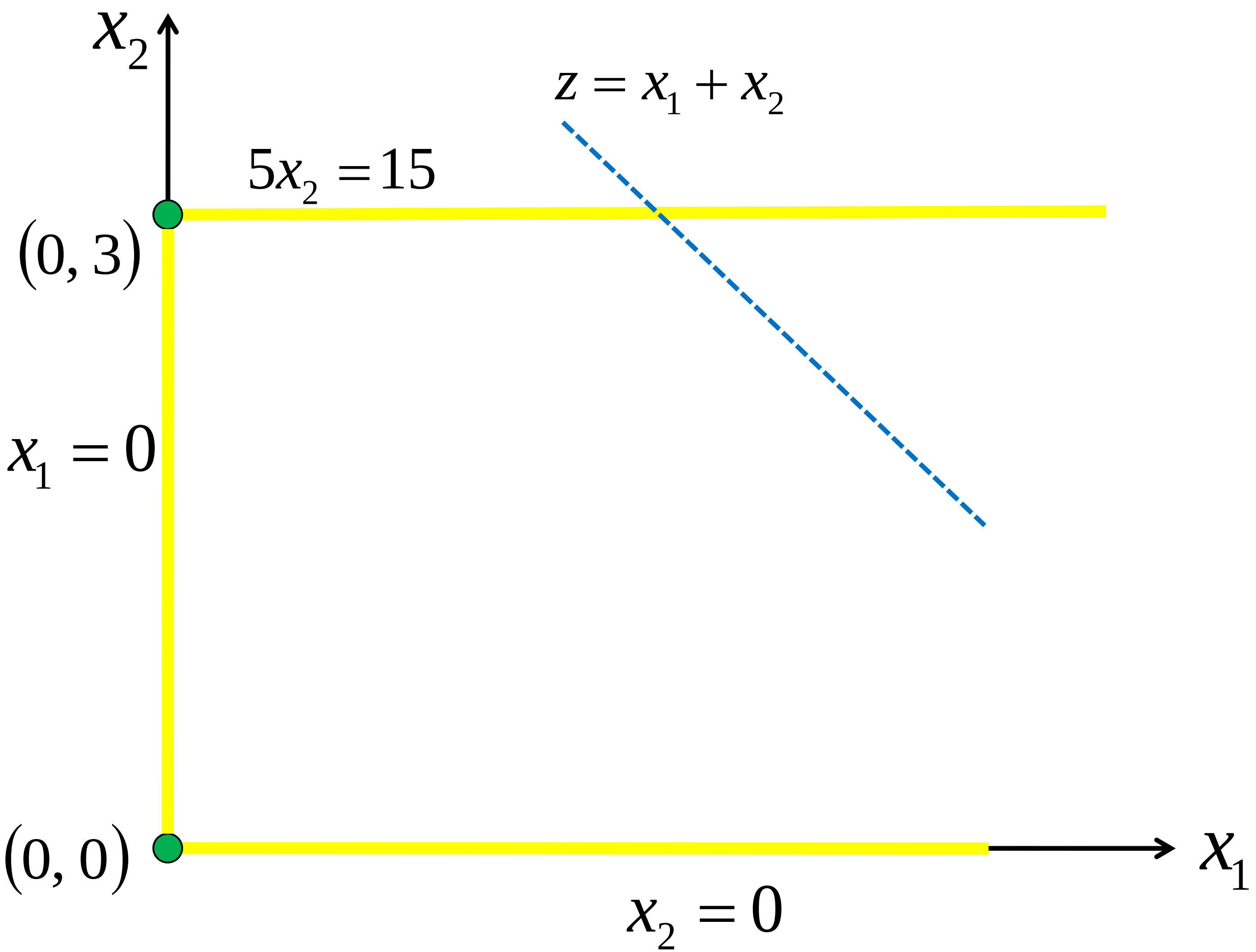
3. 有无界的解

4. 无可行解

有无穷多个（有界）最优解的例子



有无界解的例子



无可行解的例子