

# WBC 算法报告

——2021013445 李昭阳

1. 阅读了 Dietrich-An overview of null space projections for redundant, torque-controlled robots-2015-The International Journal of Robotics Research\_1 和 Li-An Overview of Multi-task Control for Redundant Robot Based on Quadratic Programming-2023-Lecture Notes in Electrical Engineering
2. 整理 WBC QP 算法
  - a) Weighted Quadratic Programming(WQP)
  - b) Hierarchical Quadratic Programming(HQP)
  - c) Recursive Hierarchical Quadratic Programming(RHQP)
  - d) Generalized Hierarchical Control (GHC)
  - e) Recursive Hierarchical Projection(RHP-HQP)
3. 尝试举例 WBC QP 算法的应用

- 简单 QP 问题

- 机械臂末端执行器水平位置  $x$  和垂直位置  $y$

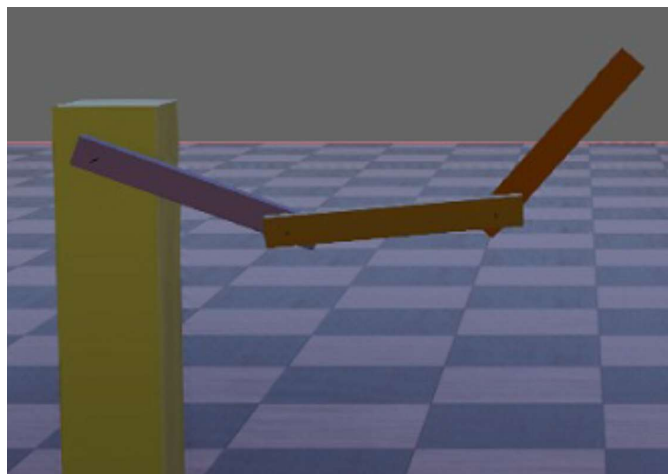
- ◆ 抽象为两个优化目标，使每个位置的跟踪误差最小；
    - ◆ 抽象为一个优化目标，例如使  $x$  和  $y$  的总误差最小。

- MOO QP 问题

- 多关节机械手臂完成目标

- ◆ 抽象为多个优化目标，加权求和，按照 QP 问题求解；
    - ◆ 选择其中一个子目标为优化目标，其他子目标为约束；
    - ◆ 每个任务对应一个新的优化变量  $x_i$ ，并独立求解。然后用广义投影矩阵求和每个任务的最优解  $x_i^*$

机械臂输入为各个关节角度，输出笛卡尔空间位置，连杆长度  $L = 0.7\text{m}$ ，初始关节角度  $[30^\circ; -60^\circ; 60^\circ]$ ，固定步长  $T = 0.01$



描述问题的正运动学方程为  $x = L \begin{bmatrix} c_1 + c_{12} + c_{123} \\ s_1 + s_{12} + s_{123} \end{bmatrix}$

其中  $c_1 = \cos(\theta_1), c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2) \dots$

求出其雅可比矩阵如下

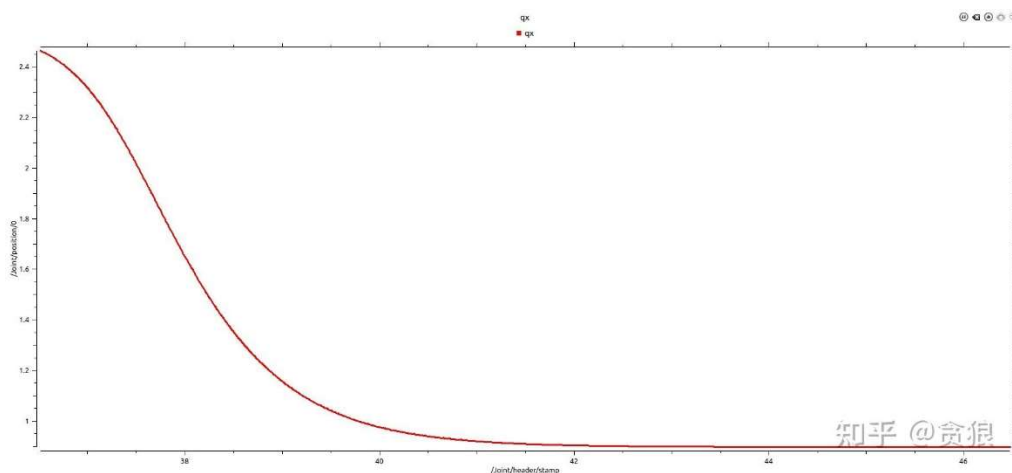
$$J = L \begin{bmatrix} -s_1 - s_{12} - s_{123} & -s_{12} - s_{123} & -s_{123} \\ c_1 + c_{12} + c_{123} & c_{12} + c_{123} & c_{123} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = J\dot{\theta}$$

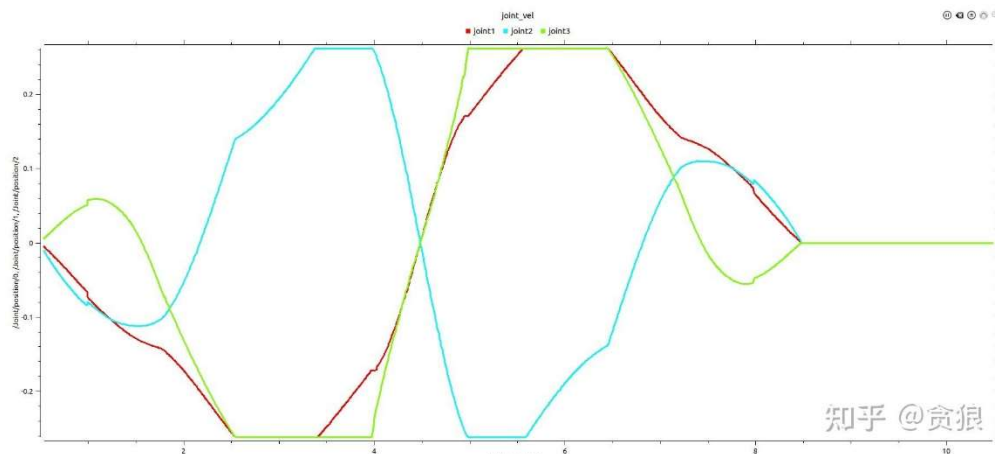
故描述其二次规划方程为

$$\begin{aligned} \min \quad & q(x) = \sum_i (\theta_i^t)^2 = \sum_i (\theta_i^{t-1} + T \cdot \dot{\theta}_i)^2 \\ \text{s.t.} \quad & J\dot{\theta} = \dot{x} \end{aligned}$$

相应的优化指标  $q(x)$  的曲线如下，

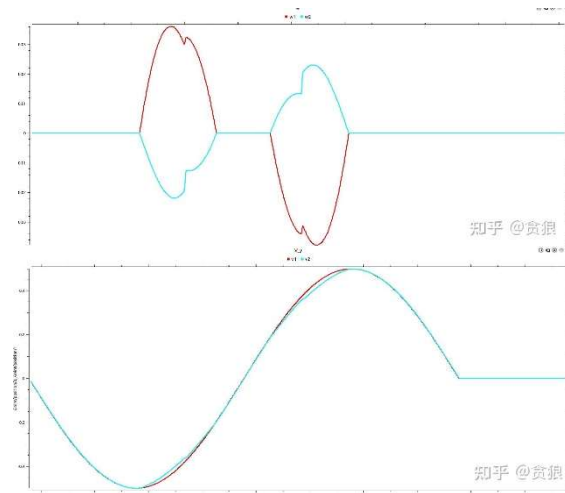


得到三个关节角速度曲线如下



在实际的机器人系统中，各个关节均存在最大的运动速度，在添加约束后，即便  $J$  满足正定条件， $J \cdot \dot{\theta} = \dot{x}$  也可能无解。

因此引入松弛变量  $w$ ，将约束条件表述为  $J\dot{\theta} + w = \dot{x}$



从图中可以看出，松弛变量不为零的区域存在一定的误差。