运筹学第八次作业参考答案

1. $\|\boldsymbol{x}\|_2^{1.5}$是否是光滑的凸函数？ x为 n 维实数向量.

解 1：

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|_2^{1.5} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{\partial \|\boldsymbol{x}\|_2}{\partial x_i} = x_i \|\boldsymbol{x}\|_2^{-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 1.5\, x_i \|\boldsymbol{x}\|_2^{-0.5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 1.5\, \|\boldsymbol{x}\|_2^{-0.5} - 0.75 x_i^2 \|\boldsymbol{x}\|_2^{-2.5}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = -0.75\, x_i x_j \|\boldsymbol{x}\|_2^{-2.5}, i \neq j$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = 0.75 \|\boldsymbol{x}\|_2^{-2.5} (2\|\boldsymbol{x}\|_2^2 I - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T)$$

$$\boldsymbol{y}^T (\|\boldsymbol{x}\|_2^2 I - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T) \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|_2^2 \|\boldsymbol{y}\|_2^2 - (\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y})^T(\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}) \geq 0, \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$$

故$\|\boldsymbol{x}\|_2^2 I - \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T$半正定，$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$半正定，$f(\boldsymbol{x})$为凸函数。

$f(x)$的一阶梯度连续（0 点左右极限都为 0），故$f(x)$为一阶光滑的凸函数。然而$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$在 0 点的左右不连续，因此二阶不光滑。（回答不光滑也认为正确）

解 2：

可根据复合函数保凸性分析。

由范数的凸性知，$\forall \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in [0,1]$

$$\|\lambda \boldsymbol{x_1} + (1-\lambda)\boldsymbol{x_2}\|_2 \leq \lambda \|\boldsymbol{x_1}\|_2 + (1-\lambda)\|\boldsymbol{x_2}\|_2$$

又知$x^{1.5}, x \geq 0$为凸函数且单调不减，故

$$f(\boldsymbol{x_1} + (1-\lambda)\boldsymbol{x_2}) = \|\lambda \boldsymbol{x_1} + (1-\lambda)\boldsymbol{x_2}\|_2^{1.5}$$
$$\leq (\lambda \|\boldsymbol{x_1}\|_2 + (1-\lambda)\|\boldsymbol{x_2}\|_2)^{1.5} \leq \lambda \|\boldsymbol{x_1}\|_2^{1.5} + (1-\lambda)\|\boldsymbol{x_2}\|_2^{1.5}$$
$$= \lambda f(\boldsymbol{x_1}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{x_2})$$

故$f(x) = \|\boldsymbol{x}\|_2^{1.5}$为凸函数

2. 判别下列函数哪些是凸函数，哪些是凹函数，哪些是非凸非凹函数，并简述理由。

a) 函数$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + x_1$，定义域为$R_{++}^2 = \{(x_1, x_2) \in R^2 | x_1 > 0, x_2 > 0\}$;

b) 函数$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+12x_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3+2x_1x_3$，定义域为$R^3$；

c) 函数$f(x_1,x_2)=-x_1^2-2x_2^2+2x_1x_2+10x_1-10x_2$，定义域为$R^2$；

解：

(a) 非凸非凹函数。

首先定义域为凸集，Hessian 矩阵 $\boldsymbol{H}=\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，其特征值为 1 和-1，属于不定矩阵，故为非凸非凹函数。

(b) 凸函数。

首先定义域为凸集，Hessian 矩阵 $\boldsymbol{H}=\nabla^2 f(x)=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ -2 & 6 & 6\\ 2 & 6 & 24\end{pmatrix}\geq 0$，故为凸函数。

(c) 凹函数。

首先定义域为凸集，Hessian 矩阵$\boldsymbol{H}=\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & -8\end{bmatrix}\leq 0$，故为凹函数。

3. 求函数

$$f(x)=-3x^2+21.6x+1$$

在区间[0,25]上的极大点和极大值，要求缩短后区间长度不大于原区间长度的 8%，用斐波那契法、黄金分割法（0.618 法）、折半搜索法、牛顿法分别进行求解。

解：

斐波那契法

$f(x)$在$[0,\ 25]$区间上单峰函数，取$\delta=25\times 8\%=2$，因为$\frac{b-a}{\delta}=\frac{25}{2}=12.5$, $F_5=8,\ F_6=13$，所以取$n=6$。

令$a_0=0, b_0=25$

$k=1$， $t_1=a_0+\frac{F_5}{F_6}(b_0-a_0)=\frac{200}{13}$, $t_1'=b_0-\frac{F_5}{F_6}(b_0-a_0)=\frac{125}{13}$， 因为$f(t_1')>f(t_1)$，所以$a_1=a_0=0,\ b_1=t_1=\frac{200}{13}$;

$k=2$，$t_2=t_1'=\frac{125}{13}$, $t_2'=b_1-\frac{F_4}{F_5}(b_1-a_1)=\frac{75}{13}$，因为$f(t_2')>f(t_2)$，所以$a_2=a_1=0,\ b_2=t_2=\frac{125}{13}$;

$k=3$，$t_3=t_2'=\frac{75}{13}$, $t_3'=b_2-\frac{F_3}{F_4}(b_2-a_2)=\frac{50}{13}$，因为$f(t_3')>f(t_3)$，所以$a_3=a_2=0,\ b_3=t_3=\frac{75}{13}$;

$k=4$，$t_4=t_3'=\frac{50}{13}$, $t_4'=b_3-\frac{F_2}{F_3}(b_3-a_3)=\frac{25}{13}$，因为$f(t_4')<f(t_4)$，所以$a_4=t_4'=\frac{25}{13}$, $b_4=b_3=\frac{75}{13}$;

$k=5$, $t_5'=t_4=\frac{50}{13}$, $t_5=a_4+\frac{F_1}{F_2}(b_4-a_4)+\epsilon$, 因为$f(t_5')>f(t_5)$, 所以$a_5=a_4=\frac{25}{13}$, $b_5=t_5=\frac{50}{13}$;

所以局部极大值点$x^*=0.5(a_5+b_5)=\frac{75}{26}$, $f(x^*)=\frac{9011}{235}\approx 38.3447$

黄金分割法（0.618 法）

$f(x)$在$[0,\ 25]$区间上单峰函数，取$\delta=25\times 8\%=2$，因为$0.618^6<\frac{\delta}{b-a}<0.618^5$，所以取$n=7$。

令$a_0=0, b_0=25$

$k=1$ ，$t_1=a_0+0.618(b_0-a_0)=15.450$, $t_1'=b_0-0.618(b_0-a_0)=9.550$，因为$f(t_1')>f(t_1)$，所以$a_1=a_0=0$, $b_1=t_1=15.450$;

$k=2$，$t_2=t_1'=9.550$, $t_2'=b_1-0.618(b_1-a_1)=5.902$，因为$f(t_2')>f(t_2)$，所以$a_2=a_1=0$, $b_2=t_2=9.550$;

$k=3$，$t_3=t_2'=5.902$, $t_3'=b_2-0.618(b_2-a_2)=3.648$，因为$f(t_3')>f(t_3)$，所以$a_3=a_2=0$, $b_3=t_3=5.902$;

$k=4$，$t_4=t_3'=3.648$, $t_4'=b_3-0.618(b_3-a_3)=2.255$，因为$f(t_4')<f(t_4)$，所以$a_4=t_4'=2.255$, $b_4=b_3=5.902$;

$k=5$，$t_5=a_4+0.618(b_4-a_4)=4.509$, $t_5'=t_4=3.648$，因为$f(t_5')>f(t_5)$，所以$a_5=a_4=2.255$, $b_5=t_5=4.509$;

$k=6$，$t_6=t_5'=3.648$, $t_6'=b_5-0.618(b_5-a_5)=3.116$，因为$f(t_6')<f(t_6)$，所以$a_6=t_6'=3.116$, $b_6=b_5=4.509$;

所以局部极大值点$x^*=0.5(a_6+b_6)=3.813$, $f(x^*)=39.744$

折半搜索法

$$f'(x)=-6x+21.6$$

令$a_0=0, b_0=25$

$k=1$，$t_1=\frac{25}{2}$，$f'(t_1)=-53.4<0$，故$a_1=a_0=0, b_1=t_1=12.5$

$k=2$，$t_2=\frac{25}{4}$，$f'(t_2)=-15.9<0$，故$a_2=a_1=0, b_2=t_2=\frac{25}{4}$

$k=3$，$t_3=\frac{25}{8}$，$f'(t_3)=2.85>0$，故$a_3=t_3=\frac{25}{8}, b_3=b_2=\frac{25}{4}$

$k=4$，$t_4=\frac{75}{16}$，$f'(t_4)=-6.585<0$，故$a_4=a_3=\frac{25}{8}, b_4=t_4=\frac{75}{16}$

$$b_4-a_4<25\times 0.08$$

所以局部极大值点$x^*=0.5(a_4+b_4)=\frac{125}{32}$，$f(x^*)=39.5993$

牛顿法

$$f''(x)=-6$$
$$t_1=b-\frac{f'(b)}{f''(b)}=3.6$$

$f'(t_1)=0$，收敛

所以局部极大值点$x^*=3.6$，$f(x^*)=39.88$

附加题：比较 0.618 法和斐波那契法的运算速度，简述理由。

0.618 法是斐波那契法中分数数列的极限替代每个分数值的方法，两者运算速度接近。