

❖ 基本内容

- 状态变量与输出反馈
- 单变量系统的极点配置
- 状态空间中的系统镇定问题

线性定常系统的综合

线性定常系统的综合

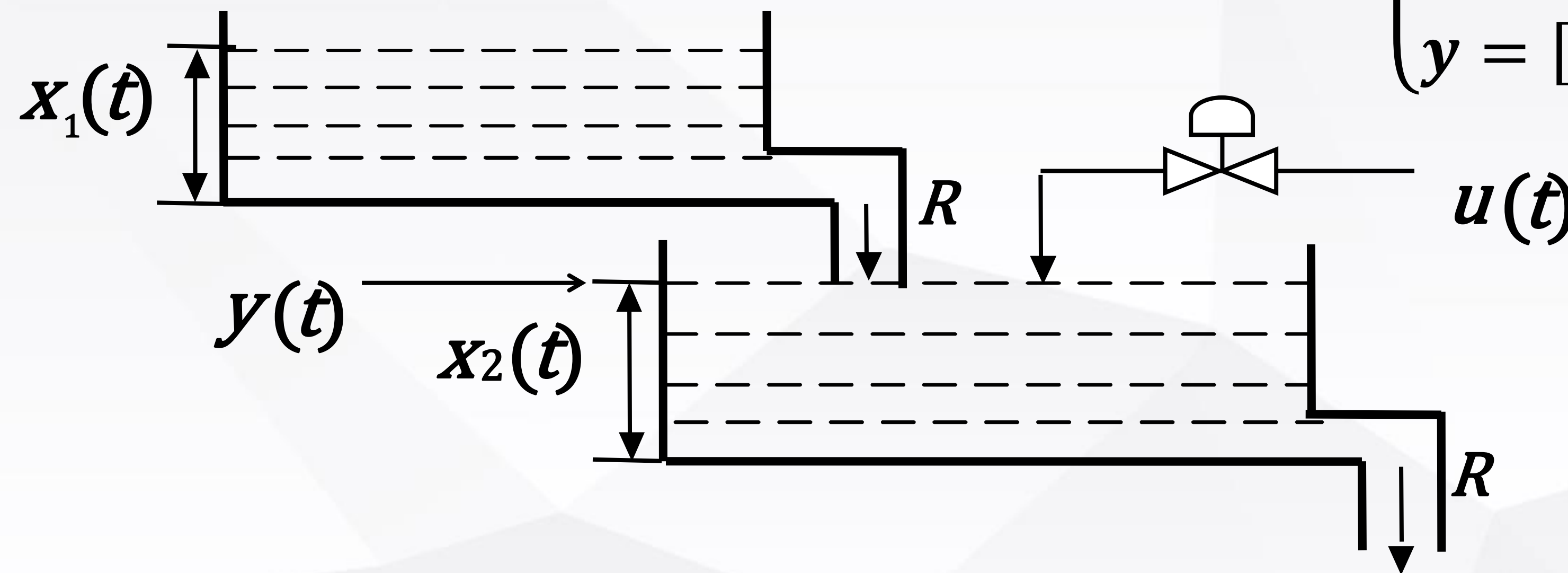
对于给定的一个受控系统 $\Sigma(A, B, C)$ ，确定其控制规律，即设计控制器的结构参数，使其控制性能满足事先给定的性能指标，这样一类问题称为**系统的综合问题**。

分析问题： 给定系统方程
输入 u 已知 $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{系统的运动行为} \\ \text{(状态运动规律、稳定性)} \\ \text{结构特性} \\ \text{(特征结构、能控、能观)} \end{cases}$

综合问题： 给定系统方程
指定期望的运动行为 (性能指标) $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \rightarrow \text{确定系统输入 } u \text{ 的规律}$

线性定常系统的综合

例1 水位的控制

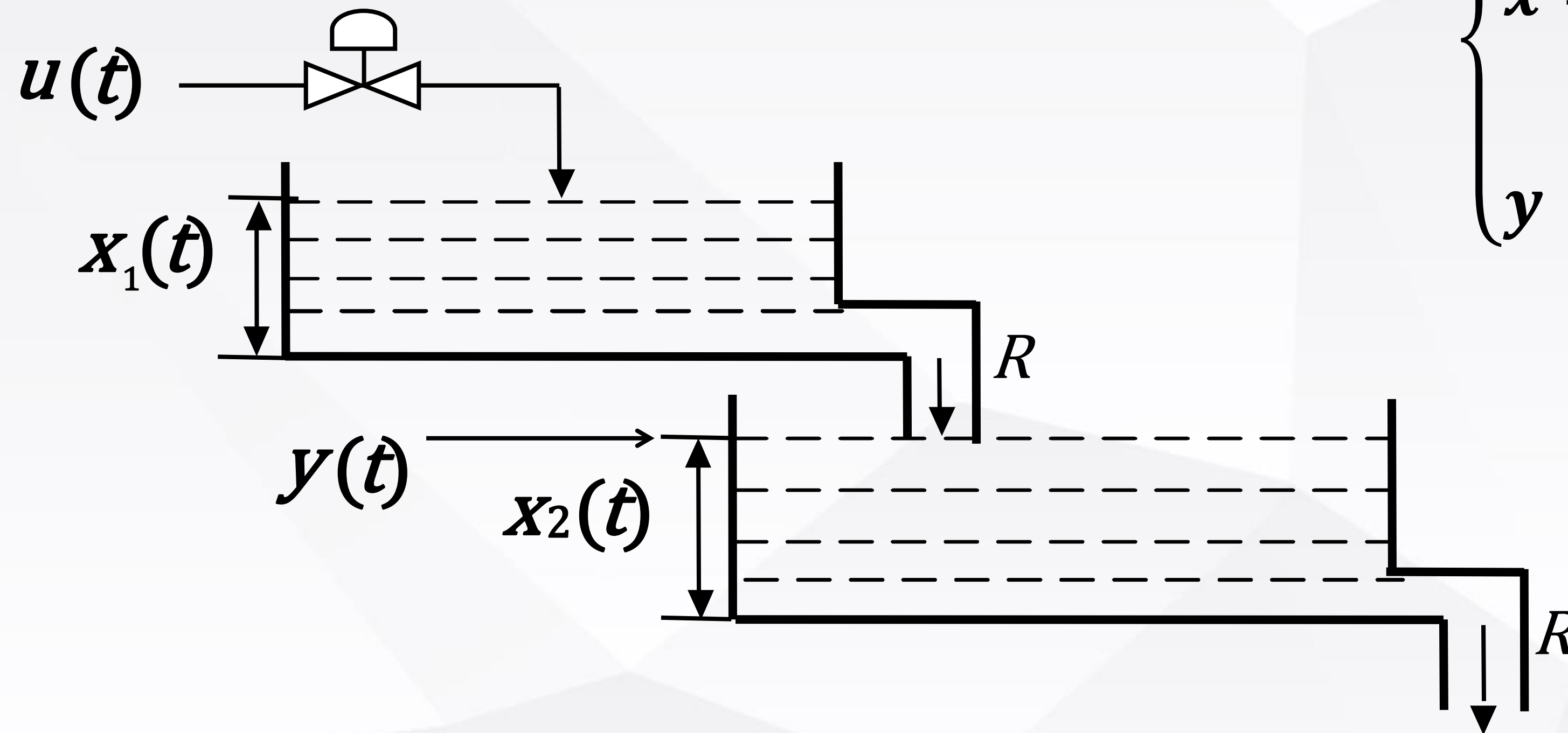


$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] x \end{cases}$$

分析问题：系统（状态）的运动规律，是否具有能控性和能观测性

线性定常系统的综合

例1 水位的控制

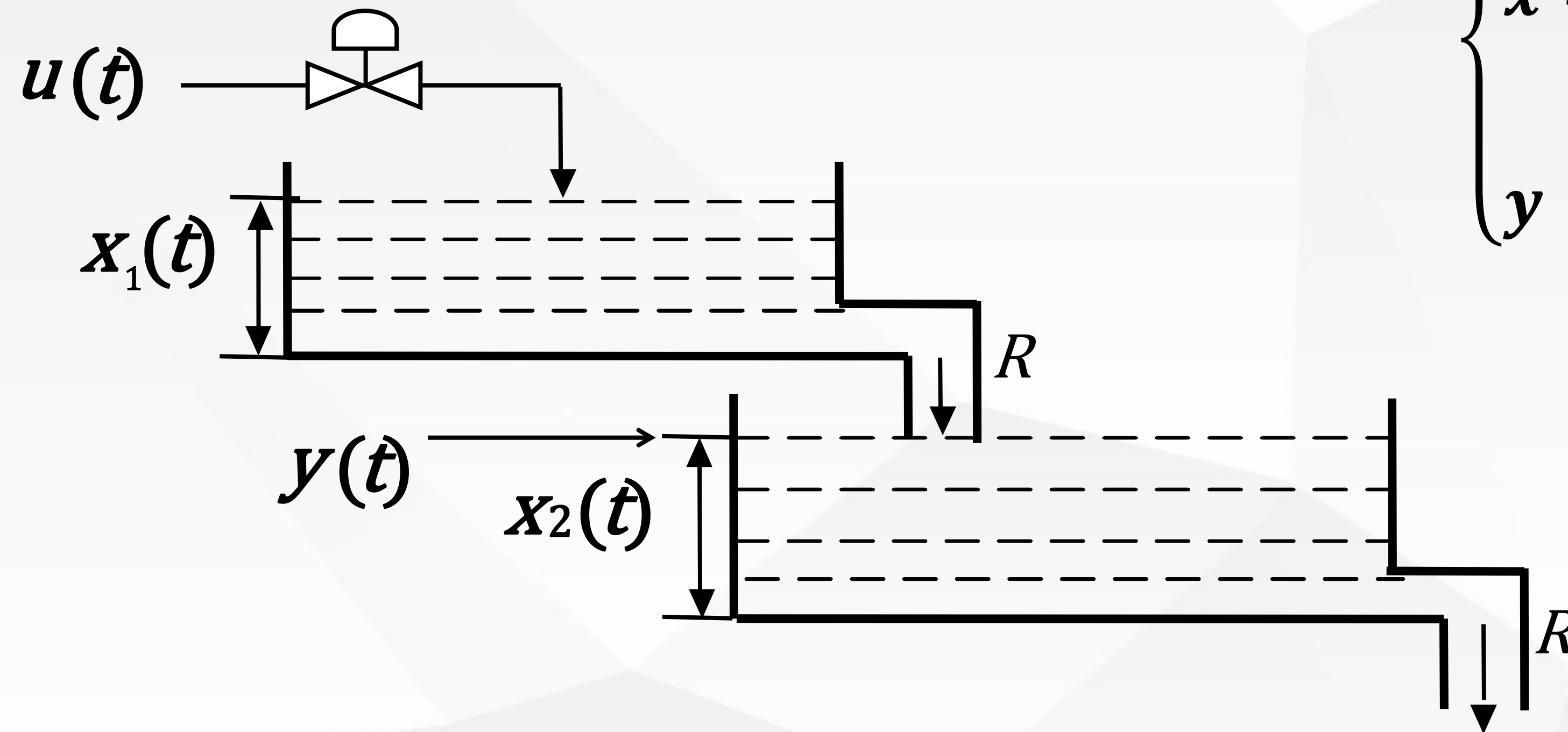


$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] x \end{cases}$$

分析问题：系统（状态）的运动规律，是否具有能控性和能观测性

线性定常系统的综合

例1 水位的控制



$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 0 \\ \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 1] x \end{cases}$$

综合问题：系统能以什么样的方式达到性能指标的要求, 确定控制 u

线性定常系统的综合

系统综合的思路

1. 建立相应综合问题的“**可综合条件**”

例如可进行极点配置的条件

2. 建立用来确定输入 u 的方法（**控制律**），进行设计

例如反馈控制律

$$u = w - Kx$$

状态反馈和输出反馈

状态反馈和输出反馈

无论在经典控制理论还是在现代控制理论中，反馈都是系统设计的重要方式。但是，由于经典控制理论是用传递函数来描述系统的，因此它只能对输出量进行一定改造后用来作为反馈量。这种方式称为输出反馈，即量测输出量，再由输出的测量值与给定的输入量进行比较后确定闭环系统的控制规律。而在现代控制理论中是用系统的内部状态变量来描述系统特性的，所以除了上述的反馈外，通常采用状态反馈，即利用系统的全部状态变量作为反馈量。

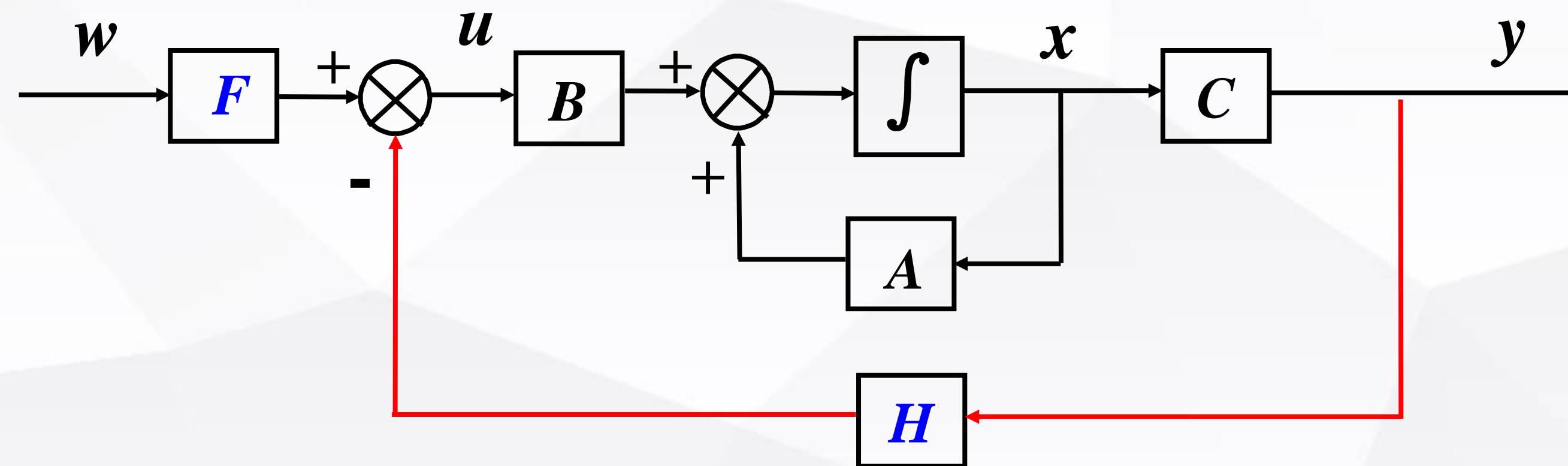
状态反馈和输出反馈

状态反馈和输出反馈的基本形式

设线性定常系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

输入 u ，状态变量 x ，输出 y 的维数是 r, n, m ，输出反馈的基本形式如图1所示。



$$u = Fw - Hy$$

图 1

状态反馈和输出反馈

设 H 是 $r \times m$ 阶矩阵, 用 Hy 作为反馈量构成闭环, 并对输入量 w 作变换, 变换矩阵为 F , 控制律为 u :

$$u = Fw - Hy = Fw - HCx \quad (2)$$

将(2)式代入原方程, 即可导出闭环系统的方程:

$$\dot{x} = Ax + B(Fw - HCx) = (A - BHC)x + BFw$$

这样闭环系统就成为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BHC)x + BFw \\ y = Cx \end{cases} \quad (3)$$

状态反馈和输出反馈

输出反馈的闭环系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BHC)x + BFw \\ y = Cx \end{cases} \quad (3)$$

显然其传递函数阵为

$$W_{H'F}(s) = C(SI - A + BHC)^{-1}BF$$

如果 $F = I$ ，即对输入不作变换，就成为单纯的输出反馈，这时闭环系统的模型为如下形式：

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BHC)x + Bw \\ y = Cx \end{cases}$$
$$W_H(s) = C(SI - A + BHC)^{-1}B$$

状态反馈和输出反馈

状态反馈的基本形式如图2所示

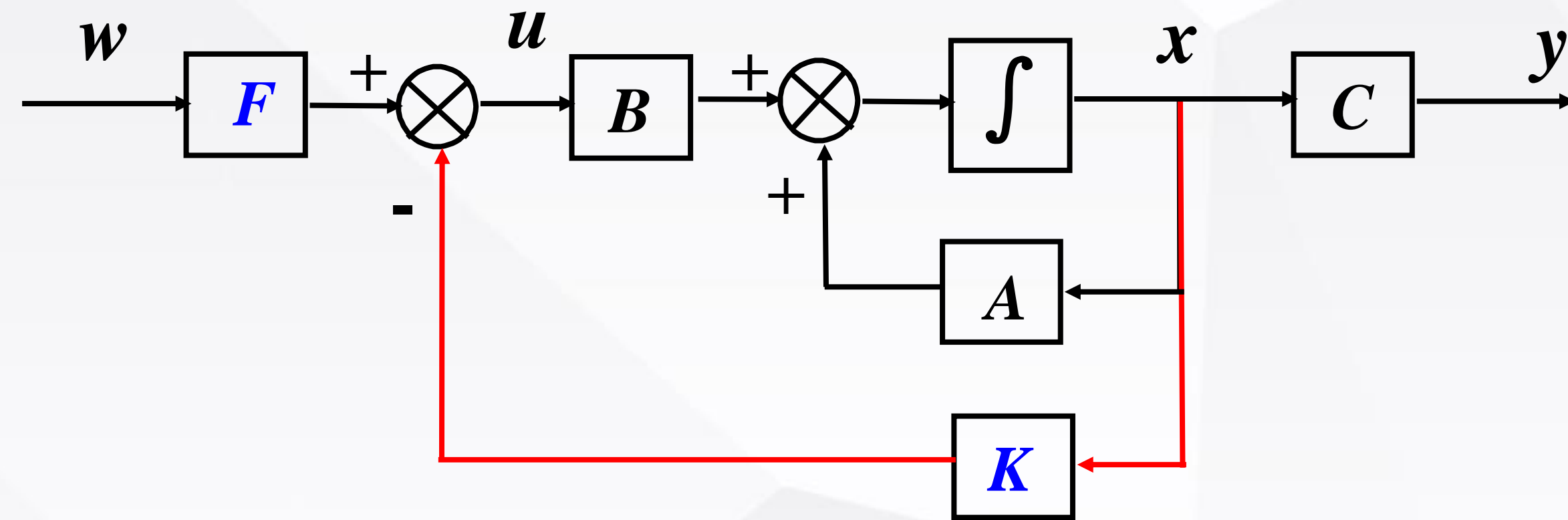


图 2

设 K 是 $r \times n$ 阶矩阵, Kx 用作为反馈量构成闭环, 对输入量 w 也作 F 变换, 则得控制: $u = Fw - Kx$ 。这种反馈方式称为**状态反馈**。

状态反馈和输出反馈

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad u = Fw - Kx$$

状态反馈的闭环系统状态空间表达式为:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + BFw \\ y = Cx \end{cases}$$

其传递函数为: $W_{K'F}(s) = C(SI - A + BK)^{-1}BF$

若 $F = I$, 则**状态反馈**的闭环方程和传递函数为:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Bw \\ y = Cx \end{cases}$$

$$W_K(s) = C(SI - A + BK)^{-1}B$$

状态反馈和输出反馈

状态反馈的闭环方程和传递函数为：

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Bw \\ y = Cx \end{cases}$$

$$W_K(s) = C(SI - A + BK)^{-1}B$$

重写输出反馈的闭环传递函数为：

$$W_H(s) = C(SI - A + BHC)^{-1}B$$

从闭环传递函数的形式可以看出，输出反馈和状态反馈均可改变系统的极点。但是反馈的引入并不增加新的状态变量，即闭环系统和开环系统具有相同的阶数。

状态反馈和输出反馈

$$\text{输出反馈} \quad \begin{cases} \dot{x} = (A - BHC)x + Bw \\ y = Cx \end{cases}$$

$$\text{状态反馈} \quad \begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Bw \\ y = Cx \end{cases}$$

$$K = HC$$
$$r \times n \quad r \times m \quad m \times n$$

$$r=m=1, \quad n=2$$
$$[k_1, k_2] = h[c_1, c_2]$$

比较闭环状态空间表达式可以看出，当 **$K = HC$** 时，状态反馈和输出反馈的控制效果是一样的，凡是输出反馈阵 H 所能达到的效果，通过状态反馈阵来代替，可达到同样的控制效果。但是反过来，由于已知 K 、 C 时 H 阵不一定有解，这说明**状态反馈有可能获得比输出反馈更好的效果，输出反馈仅仅是状态反馈的特殊情况**。由闭环状态方程可知，适当地选择反馈阵 K ，可以改善系统的性能或者满足一定的设计指标。

状态反馈和输出反馈

例2 设有二阶系统

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c^T = [\beta_1 \quad \beta_2]$$

分析状态反馈对系统性能的影响。

解： $\Sigma(A, b, c^T)$ 的传递函数为： $w(s) = \frac{\beta_2 s + \beta_1}{s^2 + a_2 s + a_1}$

取状态反馈 $k^T = [k_1, k_2], F = I$

$$\text{则 } A - bk^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(a_1 + k_1) & -(a_2 + k_2) \end{bmatrix}$$

状态反馈和输出反馈

闭环传递函数为：
$$W_K(s) = \frac{\beta_2 s + \beta_1}{s^2 + (a_2 + k_2)s + (a_1 + k_1)}$$

则
$$\lambda_{1,2} = \frac{-(a_2 + k_2) \pm \sqrt{(a_2 + k_2)^2 - 4(a_1 + k_1)}}{2}$$

显然可见，只要适当地选择 k_1, k_2 ，闭环的极点可以任意配置。

如果 $k_1 = \frac{(a_2 + k_2)^2}{4} - a_1$ 闭环就有两个相同的实极点，并且在 $k_2 > -a_2$ 时系统是稳定的；

如果 $k_1 < \frac{(a_2 + k_2)^2}{4} - a_1$ 闭环就有两个相异的实极点；

如果 $k_1 > \frac{(a_2 + k_2)^2}{4} - a_1$ 闭环成为振荡系统，在 $k_2 > -a_2$ 时系统稳定。

状态反馈和输出反馈

如果 $k_1 > \frac{(a_2 + k_2)^2}{4} - a_1$ 闭环成为振荡系统, 在 $k_2 > -a_2$ 时系统稳定。

进一步, 我们可以分析系统的稳态偏差, 分别为:

$$e_p = 1 - \frac{\beta_1}{a_1 + k_1}, \quad e_v = t \left(1 - \frac{\beta_1}{a_1 + k_1} \right) + \frac{\beta_1(a_2 + k_2) - \beta_2(a_1 + k_1)}{(a_1 + k_1)^2}$$

若要求 $e_p = 0$, 就需 $k_1 = -a_1 + \beta_1$, 这时 $e_v = \frac{a_2 + k_2 - \beta_2}{\beta_1}$

若还要求 $e_v = 0$, 就要求 $k_2 = -a_2 + \beta_2$, 那么自然要求 $\beta_2 > 0$, 否则系统就不稳定了。

反馈对能控性和能观测性的影响

反馈对能控性和能观测性的影响

为了简单起见，我们讨论在 $D = 0$ 及 $F = I$ 的条件下反馈对能控、能观性的影响，这并不失去一般性。此时原系统表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

令 $u = w - Kx$ ，闭环系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Bw \\ y = Cx \end{cases} \quad (1)$$

结论： 状态反馈不影响系统的能控性，但不一定保持系统的能观性；
输出反馈不影响系统的能控性和能观性。

反馈对能控性和能观测性的影响

1. 状态反馈不影响系统的能控性

计算式(1)的能控性矩阵, 因为

$$(A - BK)B = AB - BKB = AB - BD \quad (\text{这里 } D = KB)$$

$$(A - BK)^2 B = (A - BK)(AB - BD) = A^2 B + (B, AB$$

$$(A - BK)^3 B = (A - BK)(A^2 B + (B, AB) \text{ 的线性组合})$$

$$= A^3 B + (B, AB, A^2 B \text{ 的线性组合})$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$(A - BK)^{n-1} B = A^{n-1} B + (B, AB, A^2 B, \dots, A^{n-2} B \text{ 的线性组合})$$

$$[B \ (A - BK)B \ \dots \ (A - BK)^{n-1} B] = [B \ AB \ A^2 B \ \dots \ A^{n-1} B] \begin{bmatrix} I & \times & \dots & \times \\ 0 & I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \dots & 0 & I \end{bmatrix}$$

反馈对能控性和能观测性的影响

$$[B \ (A - BK)B \ \cdots \ (A - BK)^{n-1}B] = [B \ AB \ A^{n-1}B] \begin{bmatrix} I & \times & \cdots & \times \\ 0 & I & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & 0 & I \end{bmatrix}$$

上式中最后一个矩阵为非奇异矩阵。

$$\text{rank}[B \ (A - BK)B \ \cdots \ (A - BK)^{n-1}B] = \text{rank}[B \ AB \ A^{n-1}B] \quad (2)$$

式(2)表明**状态反馈不影响系统能控性**，即若原系统是完全能控的，加上任意状态反馈后，所得到的闭环系统也完全能控。若原系统是不完全能控的，不论加上什么样的状态反馈，所得到的闭环系统仍然不完全能控。

反馈对能控性和能观测性的影响

2. 状态反馈不一定保持系统的能观性

状态反馈有可能改变系统的能观性，即若原系统完全能观，在某些状态反馈作用下，所得的闭环系统可能是不完全能观的。若原系统不完全能观，在某些状态反馈作用下，所得的闭环系统可能成为完全能观。

对此，举例可以说明。

反馈对能控性和能观测性的影响

例1 系统运动方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \quad 1]x \quad Q_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{该系统不完全能观}$$

若取状态反馈 $k_1^T = [1 \quad 1]$ 时, 闭环系统为:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - bk)x + bw = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y = [0 \quad 1]x \end{cases} \quad Q_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{该系统完全能观}$$

若取状态反馈 $k_2^T = [0 \quad 1]$ 时, 闭环系统为:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - bk)x + bw = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y = [0 \quad 1]x \end{cases} \quad Q_g = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{此时该系统仍然不完全能观}$$

反馈对能控性和能观测性的影响

例1 系统运动方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

当 $y = [1 \quad 1]x$ 时，系统是完全能观的，若取 $k_3^T = [1 \quad 2]$ 时，闭环系统不完全能观，若取 $k_4^T = [1 \quad 1]$ 时，闭环系统仍是完全能观的。

当 $y = [1 \quad 0]x$ 时，系统完全能观，加任意的状态反馈后所得的闭环系统仍是完全能观的。(为什么?)

以上说明状态反馈有可能改变系统的能观性。

反馈对能控性和能观测性的影响

3. 输出反馈可以保持系统的能控性和能观性

因为对任一输出反馈系统都可以对应地构成等价的一个状态反馈系统，而状态反馈保持能控性，从而证明了输出反馈可保持能控性。再证明输出反馈可保持能观性。

带有输出反馈的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BHC)x + Bw \\ y = Cx \end{cases} \quad (3)$$

反馈对能控性和能观测性的影响

显然只要证明下式成立即可。

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ C(A - BHC) \\ \vdots \\ C(A - BHC)^{n-1} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

证明方法与上面证明状态反馈能保持能控性的方法类似，读者同学们可自行证明。

可见我们可以给出这样的结论：

状态反馈不影响系统的能控性，但不一定保持系统的能观性；

输出反馈不影响系统的能控性和能观性。

极点配置算法

极点配置算法

控制系统的各种特性或各种品质指标，在很大程度上是由系统的极点决定的。因此，系统的综合形式之一，可以在 s 平面上给定一组所希望的极点，通过状态反馈阵 k 的选择，使闭环系统 $\Sigma_k(A - bk^T, b, c^T)$ 的极点恰好处于希望的一组极点的位置上。由于希望极点位置有任意性，因此极点的配置应当做到具有任意性。这就是所谓**极点配置问题**。

极点配置算法

1、希望极点的选取

对于希望的极点选取，实际上是确定综合目标的问题。这里仅提出一般应了解的方面。

(1) 对于 n 维受控系统，应当且只应当指定 n 个希望的极点。

(2) 对希望极点位置的选取，要研究它们对系统品质的影响，它们与零极点分布状况的关系，从工程实际需要出发加以解决。

(3) 希望极点可以是实数或共轭复数对。

工程实际的需要要包括抗干扰能力，灵敏度等，所以极点位置的选取实际上是个复杂的工作。

极点配置算法

2、极点配置定理

对单输入单输出系统 $\Sigma(A, b, c^T)$ 在 S 平面上预先任意指定 n 个极点, 则存在着状态反馈律:

$$u(t) = -k^T x(t) + w(t)$$

使闭环系统 $\Sigma_k(A - bk^T, b, c^T)$ 极点位于预先指定的位置上的充分必要条件是原系统 $\Sigma(A, b, c^T)$ 完全能控。

证明: 上面我们已经证明了状态反馈不影响系统的能控性, 因此可以说若一个系统不完全能控, 那么状态反馈不能改变系统的不能控模态。这就证明了系统可以任意配置极点的必要条件是受控系统 $\Sigma(A, b, c^T)$ 是完全能控的。

极点配置算法

下面证明充分性:

由于 $\Sigma(A, b, c^T)$ 能控的, 那么一定可以通过非奇异变换, 化成能控规范型 $\Sigma(\tilde{A}, \tilde{b}, \tilde{c}^T)$, 其中

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ -p_1 & -p_2 \cdots -p_n \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tilde{c}^T = [\beta_1 \quad \cdots \quad \beta_n]$$

对于状态反馈阵 $\tilde{k}^T = [\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \cdots, \tilde{k}_n]$, 有

$$\tilde{A} - \tilde{b}\tilde{k}^T = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-1} \\ -(p_1 + \tilde{k}_1) & -(p_2 + \tilde{k}_2) \cdots -(p_n + \tilde{k}_n) \end{bmatrix}$$

可见状态反馈系统 $\widetilde{\Sigma}_k = (\tilde{A} - \tilde{b}\tilde{k}^T, \tilde{b}, \tilde{c}^T)$ 仍为能控标准型。

极点配置算法

状态反馈系统的特征多项式为：

$$f(s) = |sI - (\tilde{A} - \tilde{b} \cdot \tilde{k}^T)| = s^n + (p_n + \tilde{k}_n)s^{n-1} + \cdots + (p_1 + \tilde{k}_1) \quad (1)$$

假定任意给定的极点分布为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ，则希望的特征多项式为：

$$f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + \alpha_n^* s^{n-1} + \alpha_{n-1}^* s^{n-2} + \cdots + \alpha_1^* \quad (2)$$

比较(1)式、(2)式，可知： $p_i + \tilde{k}_i = \alpha_i^* \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

则 $\tilde{k}_i = \alpha_i^* - p_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

所以 $\tilde{k}^T = [\alpha_1^* - p_1, \alpha_2^* - p_2, \cdots, \alpha_n^* - p_n]$

极点配置算法

而原系统 $\Sigma(A, b, c^T)$ 的线性反馈律应为: $u = w - k^T x$

由 $\tilde{x} = T^{-1}x$, 即 $x = T\tilde{x}$, 代入上式得: $u = w - k^T T\tilde{x}$

所以 $\tilde{k}^T = k^T T$, 即 $k^T = \tilde{k}^T T^{-1}$ 。

由于线性非奇异变换不改变系统的特征多项式(1), 所以 k 是所要求的反馈增益向量。上面只是对单输入系统作了证明, 定理对多输入系统也是成立的。

极点配置算法

上述证明过程也给出了单变量系统极点配置的方法，现归纳如下：

- (1) 对于给定的系统 $\Sigma(A, b)$ 化为能控标准型 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{b})$ ；
- (2) 导出系统 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{b})$ 的特征多项式，它也是原系统的特征多项式。

$$f(s) = s^n + p_n s^{n-1} + \cdots + p_1$$

- (3) 根据给定的极点分布 $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ ，导出希望的闭环特征多项式。

$$f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i) = s^n + \alpha_n^* s^{n-1} + \alpha_{n-1}^* s^{n-2} + \cdots + \alpha_1^*$$

- (4) 确定能控标准型 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{b})$ 的状态 \tilde{x} 的反馈向量：

$$\tilde{k}^T = [\alpha_1^* - p_1, \alpha_2^* - p_2, \cdots, \alpha_n^* - p_n]$$

极点配置算法

(5) 原系统 $\Sigma(A, b)$ 的状态的反馈阵 $k^T = \tilde{k}^T T^{-1}$;

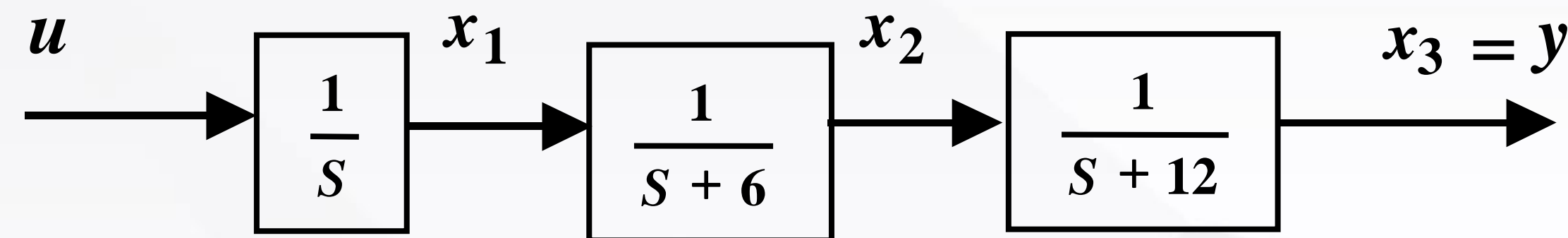
(6) 输入变换阵 F 对单变量系统是标量，可由综合指标中对系统静态误差要求来确定。

当然，具体综合某个特定系统的状态反馈不一定完全遵照上述步骤，可根据具体问题有所改变。

极点配置举例

例1 已知图1(a)所示的受控系统，其传递函数为

$$W(s) = \frac{0.0139}{s(0.167s + 1)(0.083s + 1)} = \frac{1}{s(s + 6)(s + 12)}$$



(a)

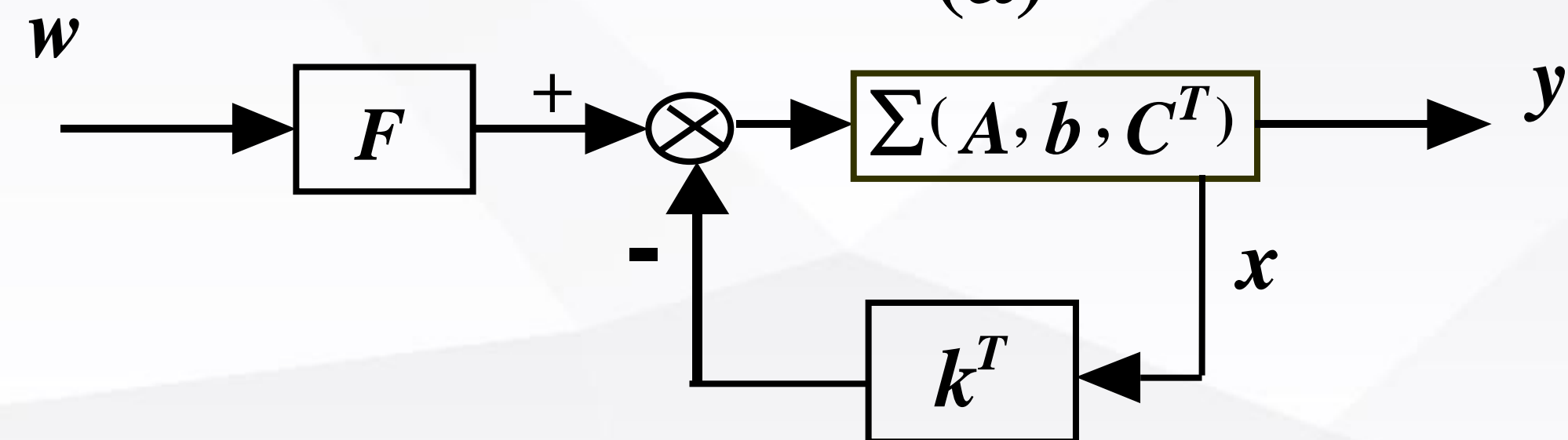


图1 (b)

综合指标为：

输出超调量： $M_p \leq 5\%$

峰值时间： $t_p \leq 0.5$ 秒

静态误差： $e_p = 0, e_v = 0.2$

极点配置举例

解：考虑到综合指标既有动态要求，又有静态要求，所以采用状态反馈和输入变换相结合的形式，即如图1（b）所示。

(1) 将给定指标化为期望极点，确定期望模型。

希望极点数 $n = 3$ 。现在选取：一对为主导极点对 λ_1 和 λ_2 ，另一个为远方极点 λ_3 ，如图2所示。

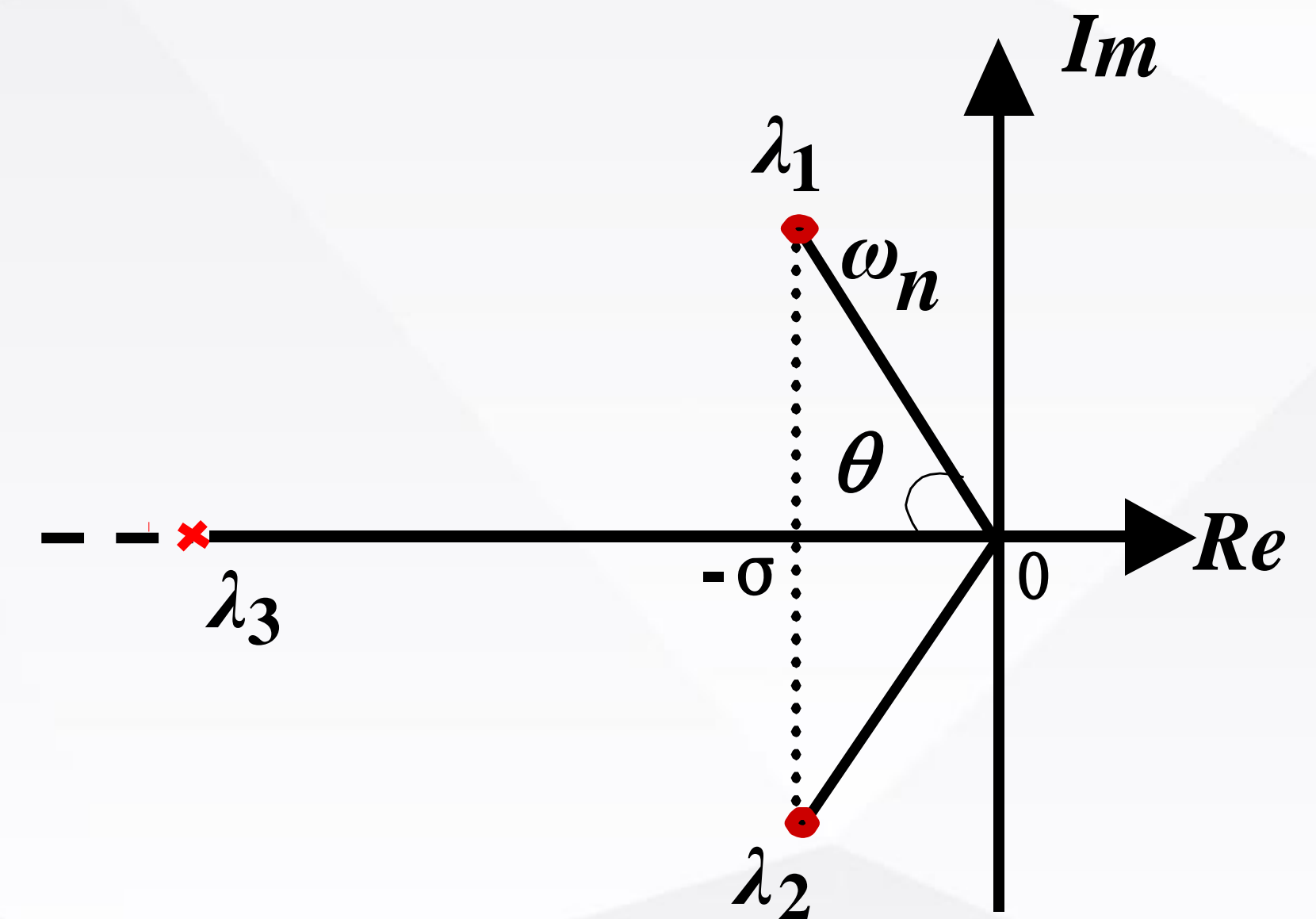


图2

可以认为动态特性主要由主导极点决定，而远方极点只有微小影响。主导极点对构成二阶系统模型，有关系式 $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \omega_n$, $\theta = \cos^{-1}\zeta$ ，其中 ζ ：阻尼系数， ω_n ：自然振动频率。

极点配置举例

由于系统性能主要由主导极点对决定，所以按综合指标先行决定主导极点

对 λ_1 和 λ_2 。为此，利用二阶模型关系式：
$$\begin{cases} M_p = e^{-\zeta\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 5\% \\ t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 0.5s \end{cases} \text{ 来求 } \zeta \text{ 和 } \omega_n。$$

利用 $M_p = e^{-\zeta\pi\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 5\%$ 求 ζ ：

$\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2} \geq 3.14$ ，从而有 $\zeta \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$ ，于是选取 $\zeta = 0.707$ 。

由 $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \leq 0.5s$ 求 ω_n ：

$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_n \frac{1}{\sqrt{2}}} \leq 0.5$ ，从而有 $\omega_n \geq \frac{\pi}{0.5 \times 0.707} \doteq 9$ ，选 $\omega_n = 10$ 。

极点配置举例

这样可定出主导极点对：

$$\lambda_{1,2} = -\omega_n \cos\theta \pm j\omega_n \sin\theta = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -7.07 \pm j7.07$$

而远方极点 λ_3 应该选择得使其和原点距离远大于 $|\lambda_1|$ ，选取

$$\lambda_3 = -10|\lambda_1| = -100$$

于是希望的闭环系统特征多项式为：

$$\begin{aligned} f^*(S) &= (S + 100)(S + 7.07 - j7.07)(S + 7.07 + j7.07) \\ &= (S + 100)(S^2 + 14.1S + 100) \\ &= S^3 + 114.1S^2 + 1510S + 10000 \end{aligned}$$

(2) 校核模型的静态指标，确定变换放大器系数 F

因为原系统无零点，所以闭环系统的传递函数为：
$$W_k(S) = \frac{F}{f^*(S)}$$

极点配置举例

$$f^*(S) = S^3 + 114.1S^2 + 1510S + 10000 = S^3 + \alpha_3^* S^2 + \alpha_2^* S + \alpha_1^*$$

由位置误差定义

$$e_p \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} |1 - y_p(t)| = \lim_{S \rightarrow 0} \left| S \left(\frac{1}{S} - \frac{W_k(S)}{S} \right) \right| = \left| 1 - \frac{F}{\alpha_1^*} \right| = 0 \quad (\text{因为要求 } e_p = 0)$$

所以, $F = \alpha_1^* = 10000$ 。再校核速度误差 e_v 是否满足要求。

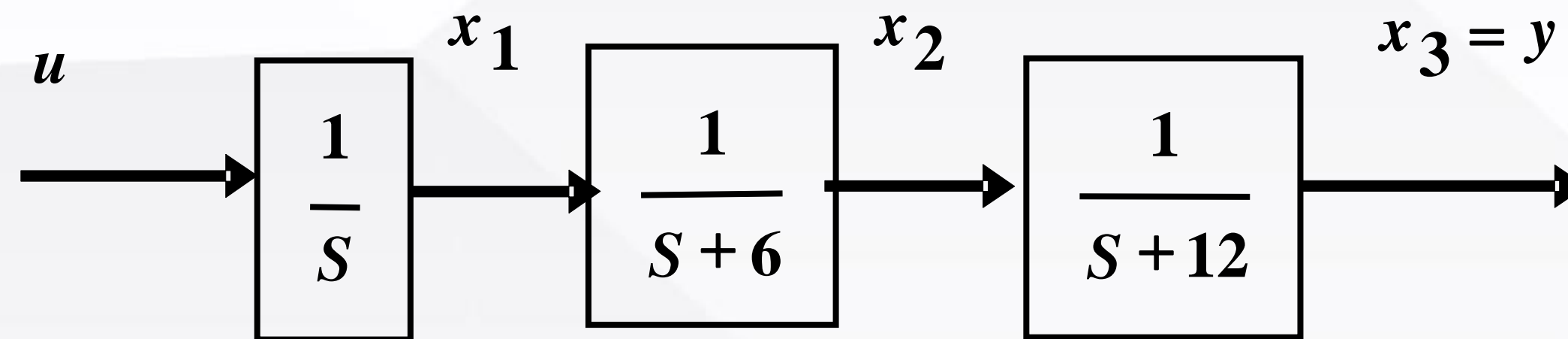
$$e_v \triangleq \lim_{t \rightarrow \infty} |t - y_t(t)| = \lim_{S \rightarrow 0} \left| S \left(\frac{1}{S^2} - \frac{W_k(S)}{S^2} \right) \right| = \lim_{S \rightarrow 0} \left| \frac{1 - W_k(S)}{S} \right|$$

$$\text{因为 } 1 - W_k(S) = 1 - \frac{F}{f^*(S)} = 1 - \frac{10000}{S^3 + 114.1S^2 + 1510S + 10000} = \frac{S^3 + 114.1S^2 + 1510S}{S^3 + 114.1S^2 + 1510S + 10000}$$

$$\text{所以 } e_v = \lim_{S \rightarrow 0} \left(\frac{S^2 + 114.1S + 1510}{S^3 + 114.1S^2 + 1510S + 10000} \right) = 0.1510 < 0.2, \text{ 满足要求。}$$

极点配置举例

(3) 确定系统的状态空间表达式并化为能控标准型



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 6x_2 \\ \dot{x}_3 = x_2 - 12x_3 \\ y = x_3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [0 \quad 0 \quad 1]x \end{cases}$$

原系统的一个实现为 $\Sigma(A, b, c^T)$, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, c^T = [0 \quad 0 \quad 1]$$

极点配置举例

原系统的一个实现为 $\Sigma(A, b, c^T)$, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, c^T = [0 \quad 0 \quad 1]$$

可求得变换阵 T : $T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

于是可得能控标准型 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{b}, c^T)$, 其中:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -72 & -18 \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c^T = [1 \quad 0 \quad 0]$$

极点配置举例

(4) 确定能控标准型 $\tilde{\Sigma}(\tilde{A}, \tilde{b}, c^T)$ 的状态反馈阵 \tilde{k}^T 。

令 $\tilde{k}^T = [\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3]$, 由下两式求出反馈阵 \tilde{k}^T :

$$f^*(S) = S^3 + 114.1S^2 + 1510S + 10000$$

$$f(S) = S^3 + 18S^2 + 72S$$

$$\text{则 } \tilde{k}_1 = \alpha_1^* - p_1 = 10000 - 0 = 10000$$

$$\tilde{k}_2 = \alpha_2^* - p_2 = 1510 - 72 = 1438$$

$$\tilde{k}_3 = \alpha_3^* - p_3 = 114.1 - 18 = 96.1$$

极点配置举例

(5) 确定原系统 $\Sigma(A, b, c^T)$ 的状态反馈 k^T

$$k^T = \tilde{k}^T T^{-1} = [10000 \quad 1438 \quad 96.1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix}$$
$$= [96.1 \quad -291.8 \quad 6582.4]$$

(6) 画出方块图:

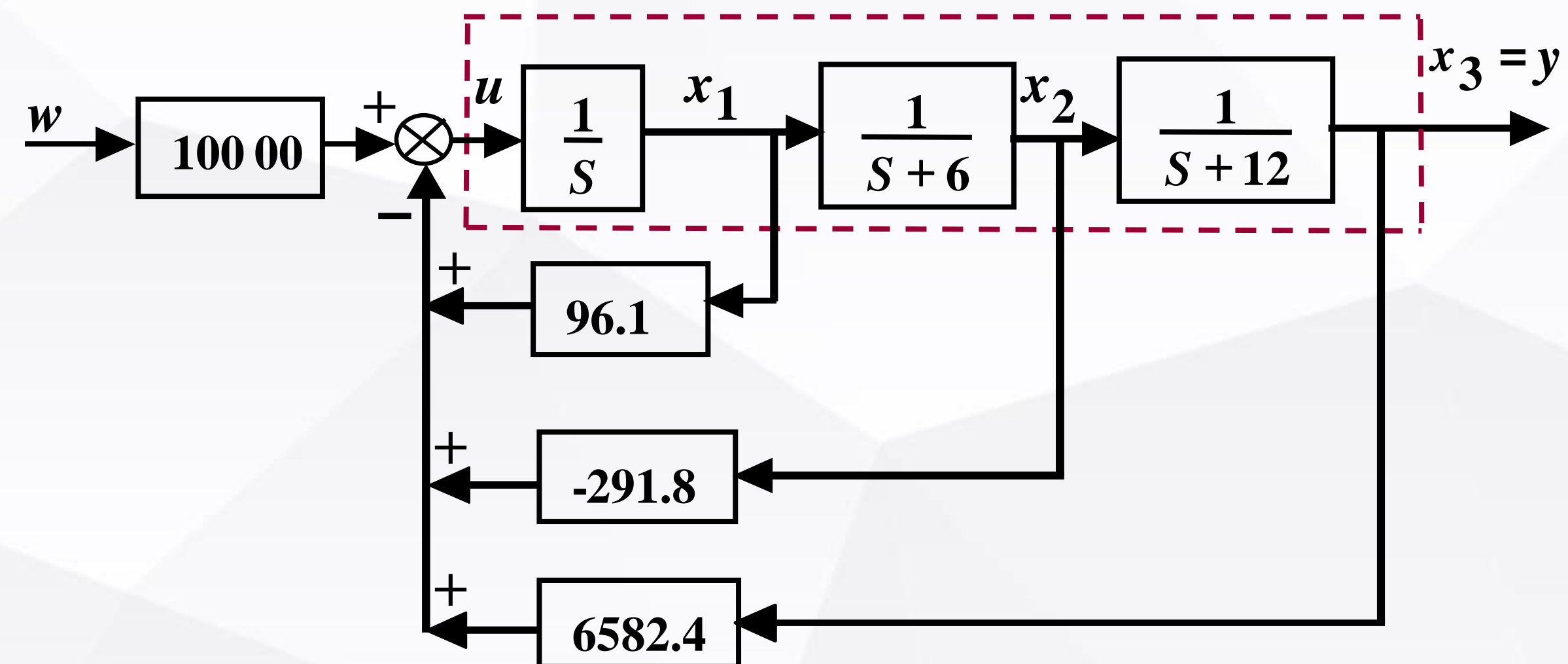


图3 状态反馈系统方块图

极点配置举例

例2 假设某倒立摆的状态方程为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

其特征多项式是： $f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^4 - 11\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 11)$,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \sqrt{11}, \lambda_4 = -\sqrt{11}$$

系统很不稳定，这和人们从物理意义上预料的一样，现在要设计状态反馈，

使系统稳定，并且使 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_{3,4} = -1 \pm j$ 。

极点配置举例

解：(1) 检查能控性

$$Q_k = [b \quad Ab \quad A^2b \quad A^3b] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -11 \\ -1 & 0 & -11 & 0 \end{bmatrix}$$

因为 $|Q_k| = 100$, $\text{rank} Q_k = 4$, 系统完全能控。

(2) 化为能控标准型或直接计算, 本题采用后者, 所以本步骤省略。

(3) 求闭环系统的特征多项式

$$\text{令 } k^T = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4]$$

极点配置举例

$$\begin{aligned} f_k(S) &= |SI - (A - bk^T)| = \left| SI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4] \right| \\ &= \begin{vmatrix} S & -1 & 0 & 0 \\ k_1 & S + k_2 & 1 + k_3 & k_4 \\ 0 & 0 & S & -1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 - 11 & S - k_4 \end{vmatrix} \\ &= S^4 + (k_2 - k_4)S^3 + (k_1 - k_3 - 11)S^2 - 10k_2S - 10k_1 \end{aligned}$$

(4) 期望的特征多项式为

$$f^*(S) = (S + 1)(S + 2)(S + 1 + j)(S + 1 - j) = S^4 + 5S^3 + 10S^2 + 10S + 4$$

上述两式对应项系数应相等，即得： $k_1 = -0.4, k_2 = -1, k_3 = -21.4, k_4 = -6$

所以 $k^T = [-0.4 \quad -1 \quad -21.4 \quad -6]$

极点配置举例

(5) 画出反馈系统模拟结构图

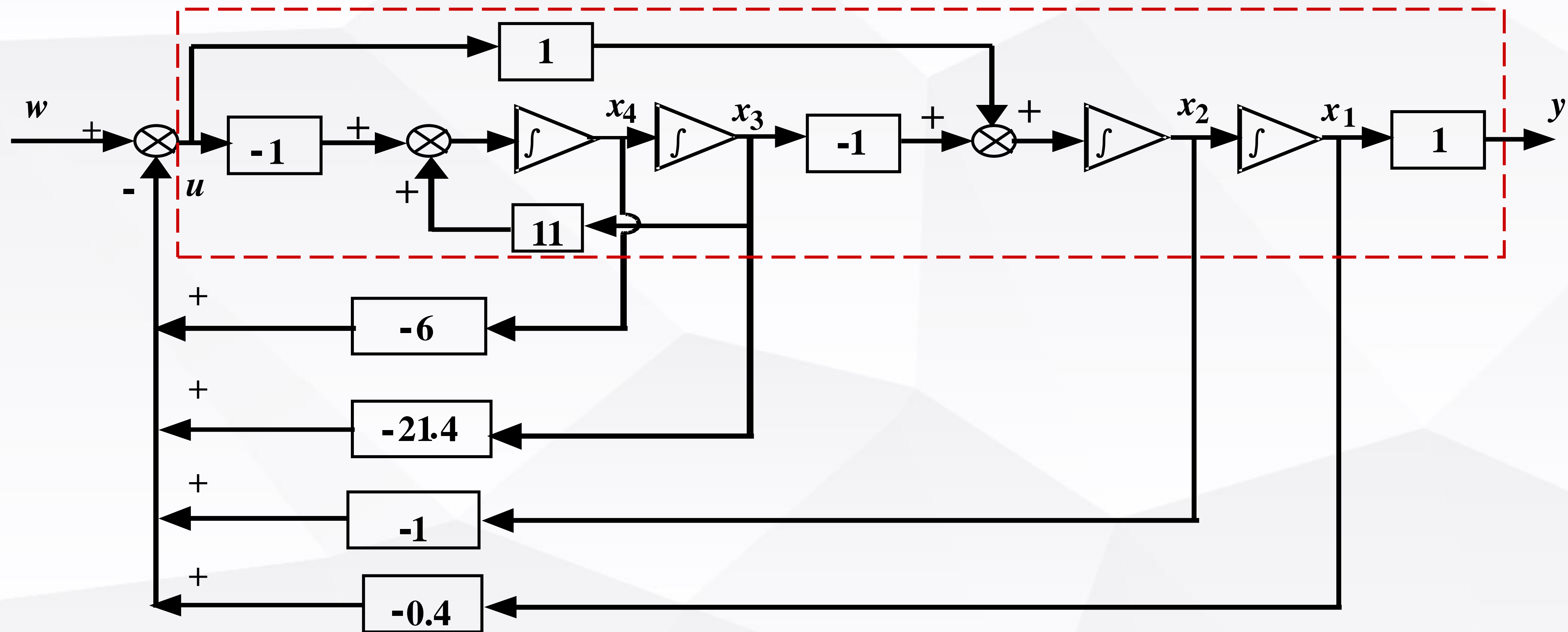


图4：反馈系统模拟结构图

极点配置算法

由极点配置定理可知，系统完全能控是闭环极点任意配置的条件。或者说，系统完全能控，则可以任意配置全部 n 个闭环极点。而且对于单变量系统，完成极点配置任务的状态反馈阵 k^T 是唯一的。

当不满足条件时，显然不能任意配置闭环极点，但有可能配置一些特定的极点组。

极点配置算法

若系统不完全能控，能否配置极点？

系统不完全能控，不能任意配置全部 n 个闭环极点；

若系统能控子系统的维数为 r ($r < n$)，则只能任意配置可控的 r 个极点；

当其余 $(n - r)$ 个不能控的极点包含在所期望的极点组中，则可以配置该特定的极点组。

由于状态反馈不能改变系统的不能控模态，当系统不完全能控时，若希望的极点组中包含了系统所有的不能控模态时，这组希望极点也是可以配置的。

极点配置算法

例1 右图所示为一电容电阻构成的电路，设 $RC = \frac{1}{3}$ ，则得系统的状态方程

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

系统的特征值为

$$\lambda = -1, \lambda = -3$$

将系统化为如下的对角标准型

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

可知模态 e^{-t} 可以被 u 控制，而模态 e^{-3t} 不可能被 u 控制。因此系统不完全能控，则不能通过状态反馈任意配置2个闭环极点，但是当要求配置的希望极点是 $\{-4, -3\}$ ，即包含了系统不能控模态时，这组希望极点也是可以配置的。

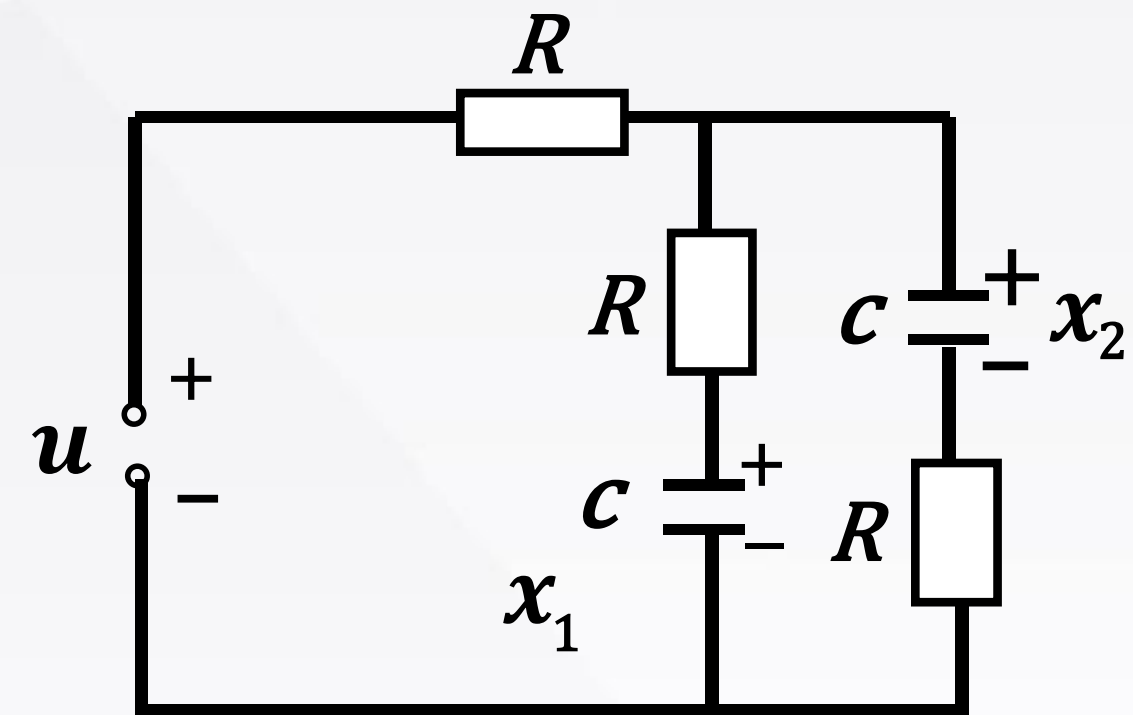


图1

极点配置算法

若系统不完全能控，能否配置极点？

如何配置？可以直接计算。

(1) 确定可以配置的极点组；

$$(2) f_k(s) = |sI - (A - bk^T)|$$

$$(3) f^*(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i)$$

(4) 系数相等，联立方程求解得到。

其他方法？

状态空间中系统的镇定问题

状态空间中系统的镇定问题

假定线性系统 $\Sigma(A, B, C)$ 完全能控，则一定存在线性状态反馈 K ，使闭环系统 $\Sigma_K(A - BK, B, C)$ 极点可以任意配置。这也可以说，对完全能控的不稳定系统，总可以求得线性状态反馈阵 K ，使系统变为渐近稳定，即 $A - BK$ 的特征值均在 s 平面的左边。这就是**镇定问题**。

可见镇定问题是极点配置问题的一个特殊情况。在镇定问题中，只要求极点配置在 s 平面的左边，不必要在指定的位置上，所以对系统 $\Sigma(A, B, C)$ ，若存在状态反馈阵 K ，使闭环系统 $\Sigma_K(A - BK, B, C)$ 的极点具有负实部，则称原系统是状态反馈能镇定的。

状态空间中系统的镇定问题

1、状态反馈能镇定的条件

线性系统的状态反馈能镇定的充分必要条件为：**系统的不能控部分是渐近稳定的。**

对此说明如下：假定系统已经按能控性进行分解成如下形式：

$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，设状态反馈阵为 $K = [K_1 \quad K_2]$ ，则闭环系统的

状态矩阵为： $A - BK = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1 K_1 & A_{12} - B_1 K_2 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ ，其特征多项式为：

$$f_K(S) = |SI - (A - BK)| = |SI_1 - A_{11} + B_1 K_1| \cdot |SI_2 - A_{22}|$$

状态空间中系统的镇定问题

$$f_K(S) = |SI - (A - BK)| = |SI_1 - A_{11} + B_1K_1| \cdot |SI_2 - A_{22}|。$$

显然, $\Sigma_1(A_{11}, B_1)$ 是能控部分, 所以上式中的 $|SI_1 - A_{11} + B_1K_1|$ 部分可以通过极点配置的方法使 $(A_{11} - B_1K_1)$ 的极点具有负实部, 而 $\Sigma_2(A_{22}, 0)$ 是不能控部分, 上式中的 $|SI_2 - A_{22}|$ 部分说明无法通过极点配置方法使 A_{22} 的极点改变, 而必须先行要求 A_{22} 的极点具有负实部。结论得证。

状态空间中系统的镇定问题

例1 右图所示为一电容电阻构成的电路，设 $RC = \frac{1}{3}$ ，则得系统的状态方程

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

系统状态反馈能镇定吗？

解：系统的特征值为

$$\lambda = -1, \lambda = -3$$

将系统化为如下的对角标准型

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

可知，模态 e^{-t} 可以被 u 控制，而模态 e^{-3t} 不可能被 u 控制，则不能控的极点为-3，是渐近稳定的，因此该系统能镇定。

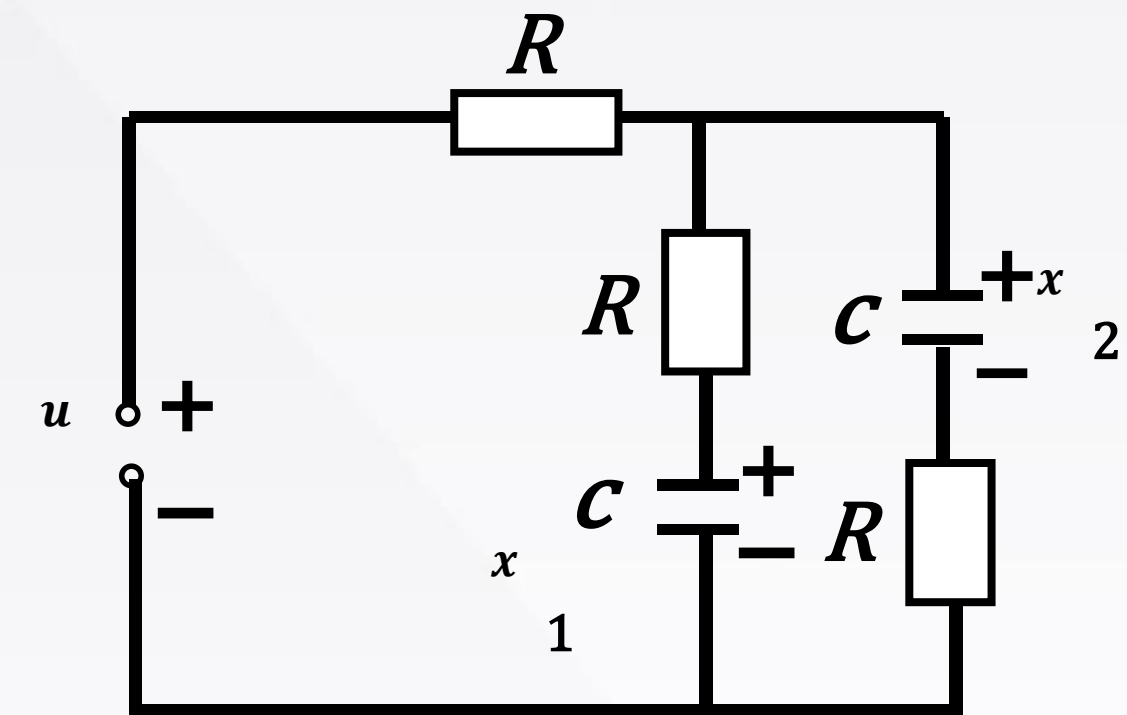


图1

状态空间中系统的镇定问题

例2 分析如下不稳定系统能否成为稳定系统。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解： $Q_k = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $\text{rank} Q_k = 2$, 所以原系统不完全能控。

$$\text{取 } T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\text{所以 } T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, T^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

可见其不能控部分的极点为-2，是渐近稳定的，因此原系统是能稳定的。

状态空间中系统的镇定问题

2、输出反馈能镇定的条件

对于输出反馈，我们知道它保持了系统的能控性和能观性，即输出反馈不能改变系统的不能控模态和不能观测模态。

假定我们已经将系统 $\Sigma(A, B, C)$ 进行 Kalman 结构分解：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [C_1 \quad 0 \quad C_3 \quad 0]$$

其中 (A_{11}, B_1, C_1) 是能控且能观的； $(A_{22}, B_2, 0)$ 是能控不能观的； $(A_{33}, 0, C_3)$ 是不能控而能观的； $(A_{44}, 0, 0)$ 是不能控又不能观的。则对于这样的系统输出反馈镇定的条件（充分必要）为：**1) 能控又能观测部分是能镇定的；2) 其余三部分均是渐近稳定的。**

状态空间中系统的镇定问题

对此说明如下：设输出反馈阵为 H ，则闭环系统矩阵为：

$$A - BHC = \begin{bmatrix} A_{11} - B_1HC_1 & 0 & A_{13} - B_1HC_3 & 0 \\ A_{21} - B_2HC_1 & A_{22} & A_{23} - B_2HC_3 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & 0 \\ 0 & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

其特征多项式为： $f_H(S) = |SI - (A - BHC)|$

$$= |SI_1 - (A_{11} - B_1HC_1)| \cdot |SI_2 - A_{22}| \cdot |SI_3 - A_{33}| \cdot |SI_4 - A_{44}|$$

可以看出，当且仅当 $A_{11} - B_1HC_1$ 具有负实部的极点，即能控又能观部分为输出反馈能镇定， A_{22} ， A_{33} ， A_{44} 均具有负实部的极点，即其余三部分为渐进稳定的时候，闭环系统才是渐近稳定的。从而说明了结论的正确性。