运筹学第十次作业参考答案

1. 请利用 KT 条件求解以下优化问题：

$$\begin{cases} \max \quad f = \ln(x_1 + x_2) \\ \text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 \le 5 \\ \qquad\quad x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解：转化为

$$\begin{cases} \min \quad -f = \ln(x_1 + x_2) \\ \text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 - 5 \le 0 \\ \qquad\quad -x_1 \le 0, -x_2 \le 0 \end{cases}$$

LaGrange 函数为

$$L = -\ln(x_1 + x_2) + v_1(2x_1 + x_2 - 5) - v_2 x_1 - v_3 x_2$$
$$v_i \ge 0, i = 1,2,3$$

梯度条件

$$\frac{\partial L}{\partial X} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{x_1 + x_2} + 2v_1 - v_2 \\ -\dfrac{1}{x_1 + x_2} + v_1 - v_3 \end{bmatrix} = 0$$

互补松弛条件

$$v_1(2x_1 + x_2 - 5) = 0, v_2 x_1 = 0, v_3 x_2 = 0$$

① $v_1 = 0$，则$-\frac{1}{x_1+x_2} + 2v_1 - v_2 < 0$，矛盾舍去；

② $v_1 > 0, v_2 > 0$，则解得$x_1 = 0, x_2 = 5, v_1 = \frac{1}{5}, v_2 = \frac{1}{5}, v_3 = 0$，符合 KT 条件；

③ $v_1 > 0, v_2 = 0, v_3 > 0$，则解得$x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 0, v_1 = \frac{1}{5}, v_3 = -\frac{1}{5}$，矛盾舍去；

④ $v_1 > 0, v_2 = 0, v_3 = 0$，则解得$-\frac{1}{x_1+x_2} = 0$，矛盾舍去。

仅$x_1 = 0, x_2 = 5$符合 KT 条件。由于本题都是线性约束，LICQ 条件成立，最优解一定是 KT 解，所以综上可以得到最优值为$\ln 5$。

2. 对如下优化问题：

$$\begin{cases}\min & f(x_1,x_2)=(x_1+1)^2+{x_2}^2\\ \text{s.t.} & (x_1-1)^2+x_2^2\geq 1\\ & (x_1-2)^2+x_2^2\leq 4\end{cases}$$

求该问题的 KT 解，并判断 KT 解是否满足 KT 定理的条件（LICQ 条件）。
判断 KT 解是否为优化问题的最优解。
（直接给出结论）x满足 LICQ 条件时，x是最优解和x满足 KT 条件的充要关系是什么。

解：

LaGrange 函数为

$$L=(x_1+1)^2+{x_2}^2+v_1(-(x_1-1)^2-x_2^2+1)+v_2((x_1-2)^2+x_2^2-4)$$

$$v_i\geq 0, i=1,2$$

梯度条件

$$\frac{\partial L}{\partial X}=2\begin{bmatrix}(1-v_1+v_2)x_1+1+v_1-2v_2\\(1-v_1+v_2)x_2\end{bmatrix}=0$$

互补松弛条件

$$v_1(-(x_1-1)^2-x_2^2+1)=0, v_2((x_1-2)^2+x_2^2-4)=0$$

① $v_1=0,v_2=0$，则$x_1=-1,x_2=0$，不满足约束条件$(x_1-2)^2+x_2^2\leq 4$；

② $v_1>0,v_2=0$，则$x_1=2,x_2=0,v_1=3$，满足 KT 条件，此时起作用的不等式约束只有一个，故线性无关，满足 KT 定理的条件；

③ $v_1=0,v_2>0$，则$x_1=0,x_2=0,v_2=0.5$，满足 KT 条件，但起作用的不等式约束梯度线性相关

$$\nabla g_1=[2,0]^T,\nabla g_2=[-4,0]^T$$

故不满足 KT 定理的条件。

④ $v_1>0,v_2>0$，则$x_1=0,x_2=0,1+v_1-2v_2=0$，满足 KT 条件。但起作用的不等式约束梯度线性相关，同上。

KT 解为(0,0)和(2,0)，其中(2,0)满足 KT 定理，不是最优解；(0,0)不满足 KT 定理，是最优解。

x满足 LICQ 条件时，“x是最优解”是“x满足 KT 条件”的充分不必要条件。