本章教学内容

基本内容

- 基本概念
- 全维观测器的设计
- 重构状态反馈

状态观测器

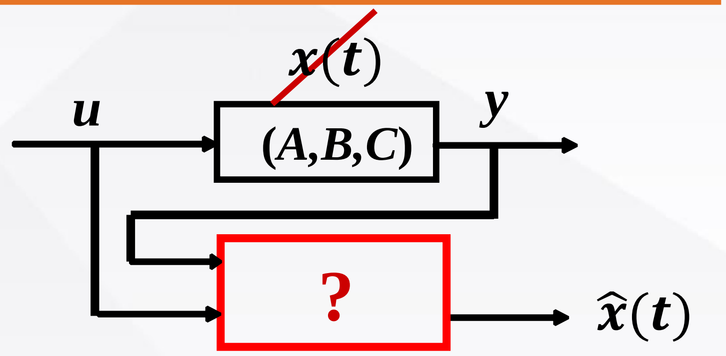
状态观测器

状态反馈是现代控制理论中分析设计线性系统的一个重要方法。但是，用这个方法时要求系统的状态变量可以直接测量得到。而在许多情况下一个系统内部的状态变量并不能被直接测量，状态反馈就有困难。经典控制理论中并不存在这个问题，因为它用可以测量到的输出来进行反馈。因此可以想到，能否利用系统可测的量来构造状态变量？此处就讨论这个问题，原系统的输入输出是直接可以量测到的，于是可以另外再构造一个系统，这个系统以原系统的输入输出作为输入，将状态重新构造出来，这样构造的系统就称为状态观测器。

状态观测器

问题的提法：给定线性系统 $\Sigma(A,B,C)$

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases}$$



利用原系统可以量测的输入输出作为输入信号，将状态重新构造出来，输出信号 $\hat{x}(t)$ 在一定的指标下和原系统 $\Sigma(A,B,C)$ 的状态变量 $x(t)$ 等价，这样构造的系统 Σ_g 就称为状态观测器。 $\hat{x}(t)$ 称为重构状态或估计状态。

$x(t)$和 $\hat{x}(t)$ 之间的等价性指标通常采用渐近等价指标：

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{x}(t) = \lim_{t\to\infty}(x(t) - \hat{x}(t)) = 0$$

其中 $\tilde{x}(t)$ 称为状态观测误差。

状态观测器的基本概念

给定系统的状态空间表达式如下：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad (1)$$

设此系统状态是完全能观的，输入u和输出y是可以直接量测的。

将(1)式中输出方程 $y = Cx$ 两边对时间t求导数，得 $\qquad y = Cx$

$$\dot{y} = C\dot{x} = CAx + CBu \qquad \text{写成} \qquad \dot{y} - CBu = CAx$$

对上式再求导，并将(1)式代入后整理可得 $\qquad \ddot{y} - CB\dot{u} - CABu = CA^2x$

重复上述过程一直到 $n-1$ 次求导，最后得

$$y^{(n-1)} - CBu^{(n-2)} - CABu^{(n-3)} - \cdots - CA^{n-2}Bu = CA^{n-1}x$$

状态观测器的基本概念

将以上各式写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} - CBu \\ \ddot{y} - CB\dot{u} - CABu \\ \vdots \\ y^{(n-1)} - CBu^{(n-2)} - CABu^{(n-3)} - \cdots - CA^{(n-2)}Bu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{(n-1)} \end{bmatrix} x = Q_g x$$

由于系统完全能观，所以Q_g的秩为n，因而上述方程中x有解，这说明状态向量可用输入u和输出y以及它们的导数估计出来。

状态观测器的基本概念

以上只说明在系统完全能观的条件下，可以利用输入和输出来估计状态。但是，这种方案仅仅是一种可能性。在工程实际中，由于引入大量高阶微分器，会给系统带来一系列高频干扰，从而影响输出，所以这种方案没有实际价值，但它表明，只要系统是完全能观的，那么状态就可以用它的输入输出估计出来。

由上分析可知，我们希望的观测器中，不要含有微分器，而应采用积分器。因此可按照(1)式的结构，设计出一个相同的结构模型如(2) 式：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \qquad (1)$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu \qquad (2)$$

其中$\hat{x}$为状态的估计值，这样可以构成如图1所示的**开环状态估计器**。

状态观测器的基本概念

开环状态估计器

将(1)式和(2)式相减，可得

$$\frac{d}{dt}(x-\hat{x}) = A(x-\hat{x})$$

设两个系统的初始状态分别为$x_0, \hat{x}_0$，则

$$x(t)-\hat{x}(t) = e^{At}(x_0-\hat{x}_0)$$

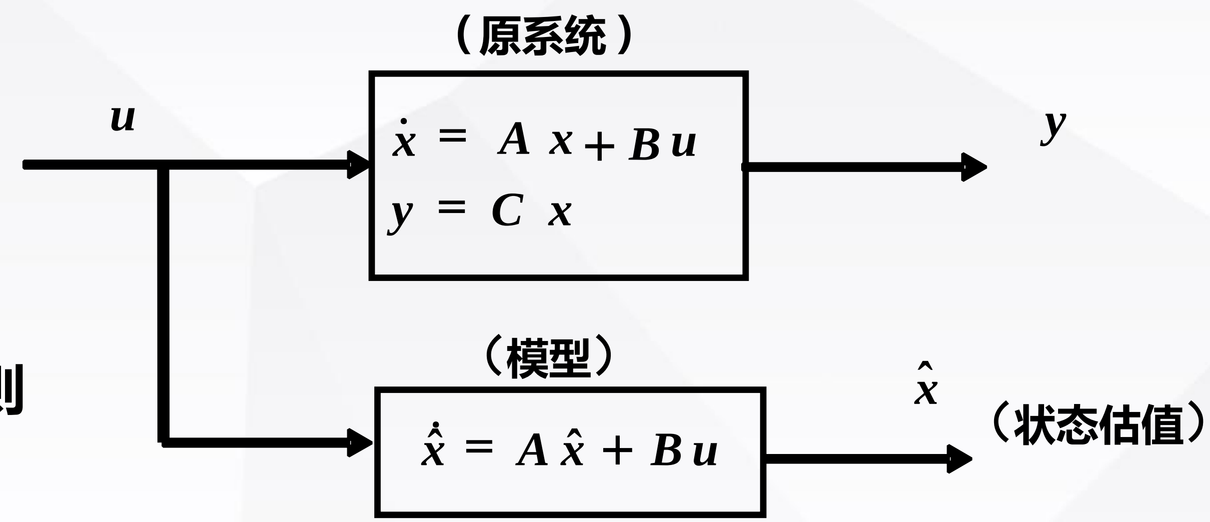


图 1

所以只要$x_0 = \hat{x}_0$，就有$x(t) = \hat{x}(t)$，即$\hat{x}$完全复现x。

当$x_0 \neq \hat{x}_0$时，如果$\Sigma(A, B, C)$是稳定的，即A的特征值都具有负实部，则有

$$\lim_{t\to\infty}(x(t)-\hat{x}(t)) = 0$$

该式说明$\hat{x}$不断地逼近x；当$\Sigma(A, B, C)$不是稳定系统时，上述方案不能实现。

状态观测器的基本概念

实际上由于模型参数不准确，噪声和干扰也难以一致，上述开环状态估计器存在严重问题，解决的办法是采用如图2所示的方案。我们把可量测的y及$\hat{y}$的差值乘以适当的加权矩阵M进行反馈，这时观测器方程为：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - M\tilde{y} \qquad (3)$$

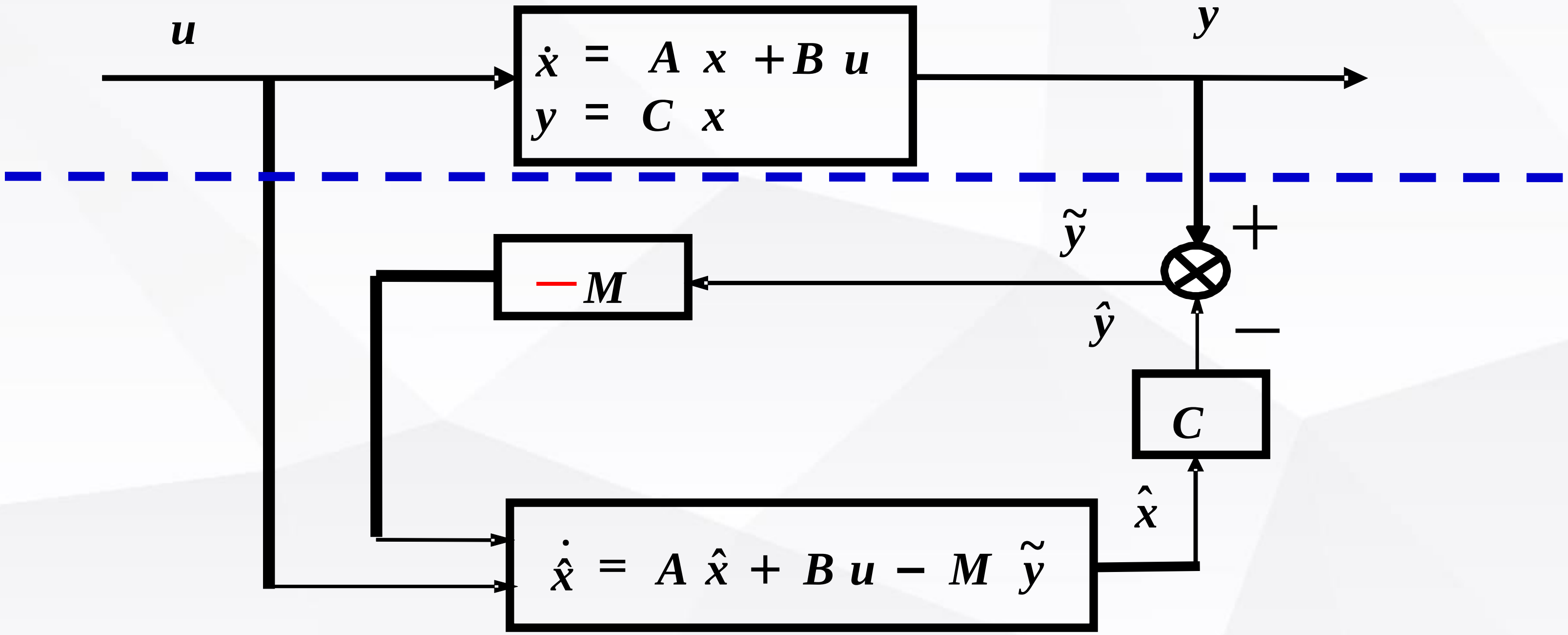


图 2

状态观测器的基本概念

从(3)式可知，对原模型(2)式增加了一项取决于输出误差量的校正项。由于

$$\tilde{y} = y - \hat{y} = y - C\hat{x}$$

(3) 式可写成：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - M(y - C\hat{x}) \qquad (4)$$

进一步写成：

$$\dot{\hat{x}} = (A + MC)\hat{x} + Bu - My \qquad (5)$$

所以，状态观测器可以写成(3)、(5)两种形式。

为了表示状态误差量，将(1)式减去(3)式，则得

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} = \dot{x} - \dot{\hat{x}} &= Ax - A\hat{x} + M\tilde{y} = A(x - \hat{x}) + MC(x - \hat{x}) \\ &= (A + MC)(x - \hat{x}) = (A + MC)\tilde{x} \qquad (6)\end{aligned}$$

状态观测器的基本概念

只要适当地选择 M，使 $A+MC$ 的特征值具有负实部，则有

$$\lim_{t\to\infty}(x(t)-\hat{x}(t))=0$$

这说明只要原系统完全能观，总可以按要求配置观测器的极点，使状态观测误差 $\tilde{x}$按要求的速度衰减到零。

图2所示的观测器称为**全维观测器**。结构特点是仿照原系统再加上反馈阵M

从第三章中可知，若$\Sigma(A,B,C)$不完全能观，那么总可以按能观性分解，得

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & 0\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix},x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

其中x_1为能观测状态部分，其维数为n_1；x_2为不能观测状态部分，其维数为$n-n_1$，$\Sigma(A_{11},B_1,C_1)$为能观子系统，$\Sigma(A_{22},B_2,0)$为不能观子系统。

状态观测器的基本概念

此时按(5)式，构造状态观测器

$$\dot{\hat{x}} = (A + MC)\hat{x} + Bu - My$$

其中$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$，$M$为$n \times m$维，$M_1$为$n_1 \times m$维，$M_2$为$(n - n_1) \times m$维。

由(6)式可知：($\dot{\tilde{x}} = (\mathrm{A} + MC)\tilde{x}$)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 - \dot{\widehat{x_1}} \\ \dot{x}_2 - \dot{\widehat{x_2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + M_1 C_1 & 0 \\ A_{21} + M_2 C_1 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \widehat{x_1} \\ x_2 - \widehat{x_2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

显然，只要适当选择M_1，总可以使$A_{11} + M_1 C_1$的特征值具有负实部，从而使

$$\lim_{t\to\infty}(x_1(t) - \widehat{x_1}(t)) = 0 \text{ 。}$$

但是无论怎么选择M也改变不了的A_{22}极点。若A_{22}的特征值具有负实部，那么

$$\lim_{t\to\infty}(x_2(t) - \widehat{x_2}(t)) = 0 \text{ 。}$$

状态观测器的基本概念

于是我们得到如下结论：

线性定常系统Σ的观测器Σ_g可以任意配置极点，即状态误差向量按任意希望的速度衰减到零的充分必要条件是原系统$\Sigma(A, B, C)$完全能观；对不完全能观的系统$\Sigma(A, B, C)$，其观测器存在的充分必要条件是Σ的不能观测部分是渐近稳定的，这时观测器的极点不能任意配置。

全维观测器的设计

全维观测器的设计

全维观测器的观测误差方程为：

$$\dot{\tilde{x}} = (A + MC)\tilde{x} \tag{1}$$

从上式可知，全维观测器的设计，在于合理选择M阵，使$(A+MC)$的特征值具有负实部，而且负实部的绝对值足够大，使逼近的速度足够快。同时应当考虑到观测器的通频带，使它具有一定的抗高频干扰的能力。因此在设计时应兼顾这两个方面。在选择合理的观测器极点后，就可以用前述方法计算M。

全维观测器的设计

以单变量系统为例，其设计步骤如下：

(1) 判别系统的能观性；

(2) 若系统能观，计算变换矩阵 T，将其化为能观标准型；

现假定其能观标准型为$\tilde{\Sigma}(\tilde{A},\tilde{c}^T)$，其中 $\tilde{A}=\begin{bmatrix} 0 & -P_0 \\ & -P_1 \\ I_{n-1} & \vdots \\ & -P_{n-1} \end{bmatrix}, \tilde{c}^T=[0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$

(3) 计算$\tilde{\Sigma}(\tilde{A},\tilde{c}^T)$能观标准型的观测阵$\tilde{M}$； **设**$\tilde{M}=[\tilde{m}_0 \quad \tilde{m}_1 \quad \ldots \quad \tilde{m}_{n-1}]^T$，

$$\tilde{A}+\tilde{M}\tilde{c}^T=\begin{bmatrix} 0 & -P_0 \\ & -P_1 \\ I_{n-1} & \vdots \\ & -P_{n-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \tilde{m}_0 \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{m}_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \tilde{m}_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -(P_0-\tilde{m}_0) \\ & -(P_1-\tilde{m}_1) \\ I_{n-1} & \vdots \\ & -(P_{n-1}-\tilde{m}_{n-1}) \end{bmatrix}$$

全维观测器的设计

于是特征方程为:

$$f(S) = S^n + (P_{n-1} - \tilde{m}_{n-1})S^{n-1} + \cdots + (P_1 - \tilde{m}_1)S + (P_0 - \tilde{m}_0) \qquad (2)$$

根据希望的观测器极点，得到希望的特征多项式

$$f^*(S) = S^n + \alpha_{n-1}{}^* S^{n-1} + \cdots + \alpha_1{}^* S + \alpha_0{}^* \qquad (3)$$

比较两式得： $\tilde{m}_i = P_i - \alpha_i{}^* \ (i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$

(4) 求原系统$\Sigma(A, b, c^T)$的观测阵M;

由 $M = T\widetilde{M}$ 计算M

(5) 画出观测器的结构图。

全维观测器的设计

例1 **设有系统** $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, c^T=[1\quad 1\quad 0]$ **，求它的状态观测器，并使观测器的极点为**-3、-4、-5。

解：1）判此系统的能观性

因为$Q_g=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&4&4\end{bmatrix}, rank\ Q_g=3$**，所以系统能观。**

全维观测器的设计

2）化原系统为能观标准型

$$Q_g{}^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -4 & 1\\ -3 & 4 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{bmatrix}, r=Q_g{}^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},$$

$$T=\begin{bmatrix}r & Ar & A^2r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}, T^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ -4 & -3 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

所以$\tilde{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 4\\ 1 & 0 & -8\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix}, \tilde{b}=\begin{bmatrix}3\\-3\\1\end{bmatrix}, \tilde{c}^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

全维观测器的设计

3）求观测阵M，由观测器的希望极点，得特征方程：

$$f^*(S) = (S+3)(S+4)(S+5) = S^3 + 12S^2 + 47S + 60$$

于是可算出观测阵$\widetilde{M} = [\widetilde{m_0} \quad \widetilde{m_1} \quad \widetilde{m_2}]^{\mathrm{T}}$，其中

$$\begin{cases} \widetilde{m_0} = P_0 - \alpha_0{}^* = -4 - 60 = -64 \\ \widetilde{m_1} = P_1 - \alpha_1{}^* = 8 - 47 = -39 \\ \widetilde{m_2} = P_2 - \alpha_2{}^* = -5 - 12 = -17 \end{cases}$$

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

因而 $M = T\widetilde{M} = [-120 \quad 103 \quad -210]^{\mathrm{T}}$

由观测器方程： $\dot{\hat{x}} = (A + MC)\hat{x} + Bu - My \qquad (2)$

可得

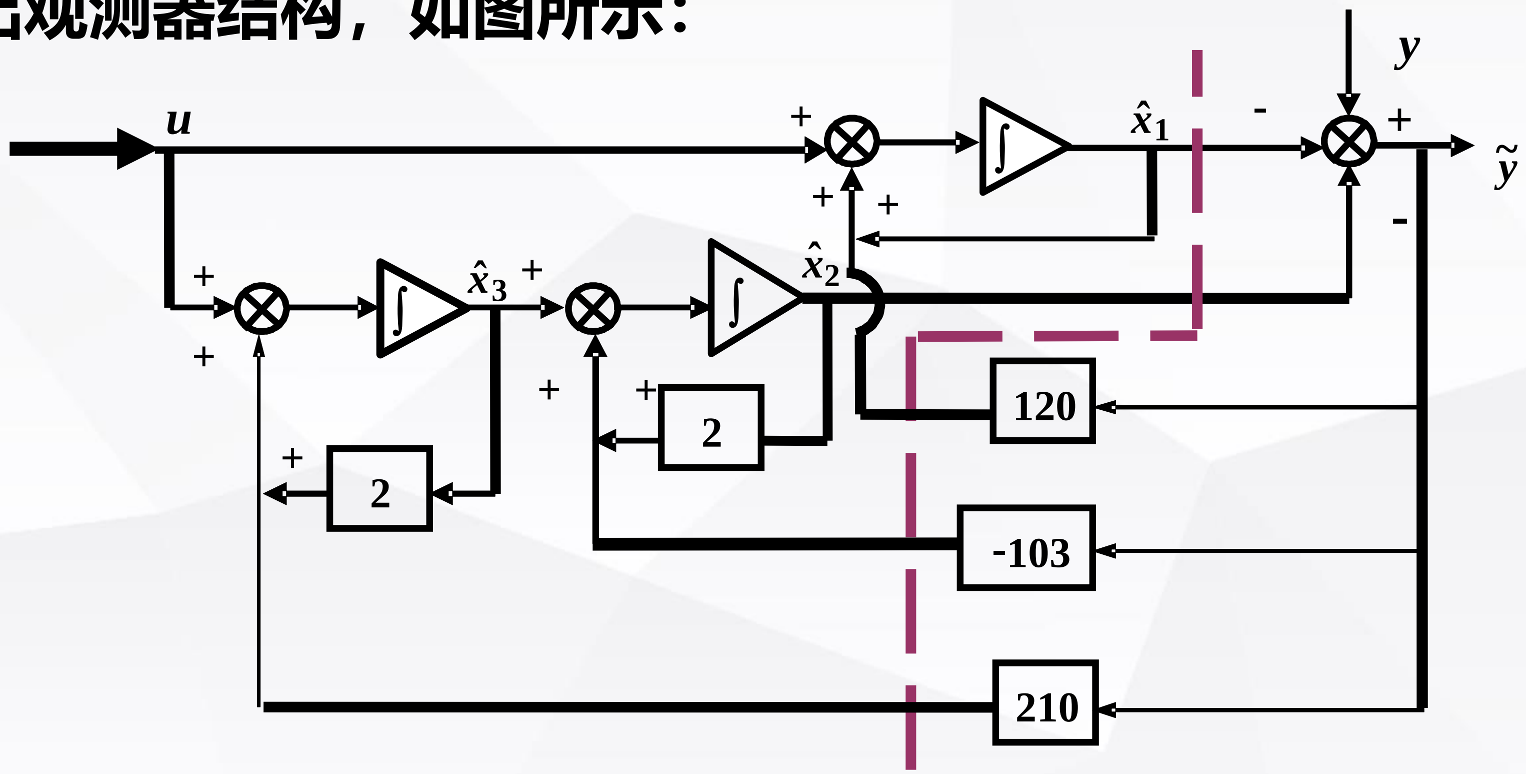
$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -119 & -120 & 0 \\ 103 & 105 & 1 \\ -210 & -210 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix} y$$

全维观测器的设计

重写观测器方程 $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - M\tilde{y}$ (3)

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u - \begin{bmatrix} -120 \\ 103 \\ -210 \end{bmatrix}\tilde{y}, c^{\mathrm{T}} = [1 \quad 1 \quad 0]$$

由上式画出观测器结构，如图所示：



全维观测器的设计

例2 研究倒立摆系统，其状态向量为$x=[z\quad \dot{z}\quad \theta\quad \dot{\theta}]^T$，其系数矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&11&0\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix},c^{\mathrm{T}}=[1\quad 0\quad 0\quad 0]$$

并假定唯一可测得的输出量 $z(t)$，即小车的位置，试设计全维观测器，使观测器极点为-2，-3，$-2\pm j$。

解：（1） 判别系统的能观性

$$Q_g=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix},rankQ_g=4$$，此系统能观。

全维观测器的设计

(2) 本题系数矩阵较简单，可直接计算M，不必先化为能观标准型。

设 $M=\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{bmatrix}$，则$A+Mc^T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & 0 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 & 0 \\ m_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_1 & 1 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & -1 & 0 \\ m_3 & 0 & 0 & 1 \\ m_4 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}$

则其特征多项式为：$f(S)=\left|SI-(A+Mc^T)\right|$

$$=S^4-m_1S^3-(11+m_2)S^2+(11m_1+m_3)S+(11m_2+m_4)$$

观测器希望的特征多项式为：$f^*(S)=(S+2)(S+3)(S+2+j)(S+2-j)$

$$=S^4+9S^3+31S^2+49S+30$$

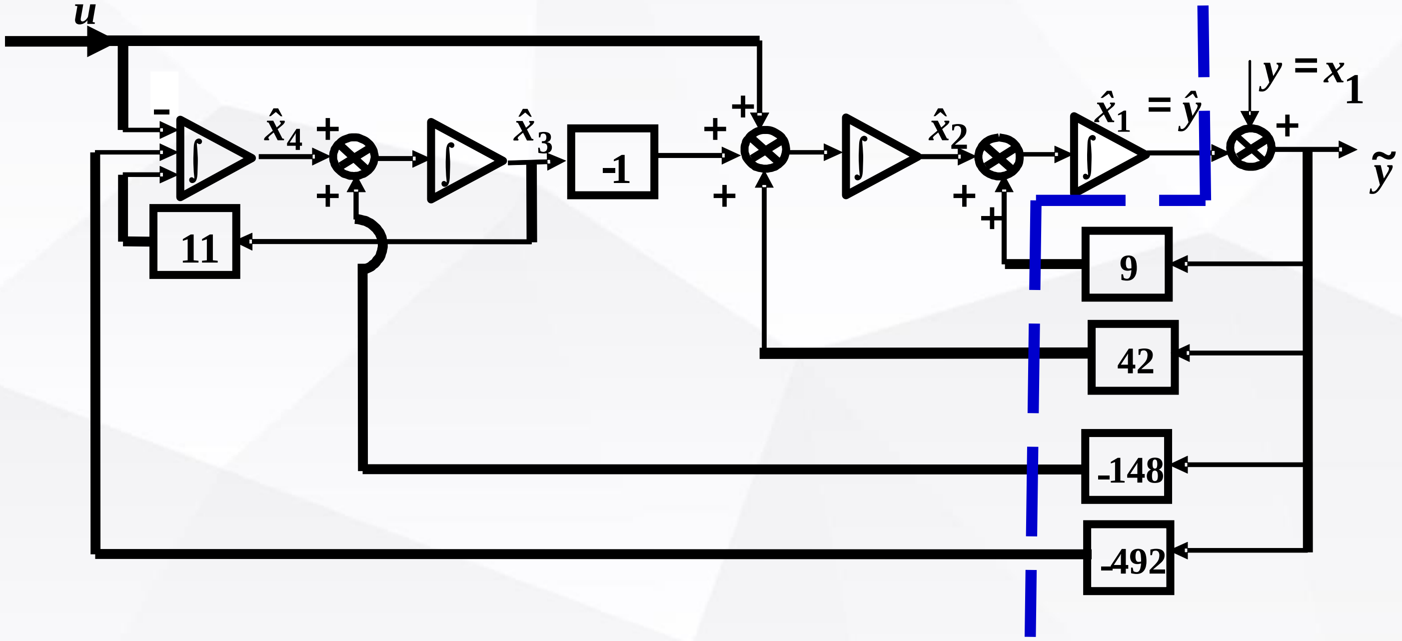
由上两式得：$M=[-9 \quad -42 \quad 148 \quad 492]^T$

全维观测器的设计

全维观测器方程为：

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - M\tilde{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix}\hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}u - \begin{bmatrix} -9 \\ -42 \\ 148 \\ 492 \end{bmatrix}\tilde{y}$$

（3）画出观测器结构图



重构状态反馈控制系统

重构状态反馈控制系统

在第四章中了解到一个完全能控的系统可以用状态反馈控制规律将闭环极点配置在期望的任何位置上。如果反馈时得不到全部状态，第五章中指出可用观测器对它进行估计并将观测到的估计值用到控制规律中去。这就是所谓**重构状态反馈控制系统**。本节将讨论带有重构状态的反馈控制系统的设计问题以及它的一些特征。图1表示这种重构状态反馈控制系统。

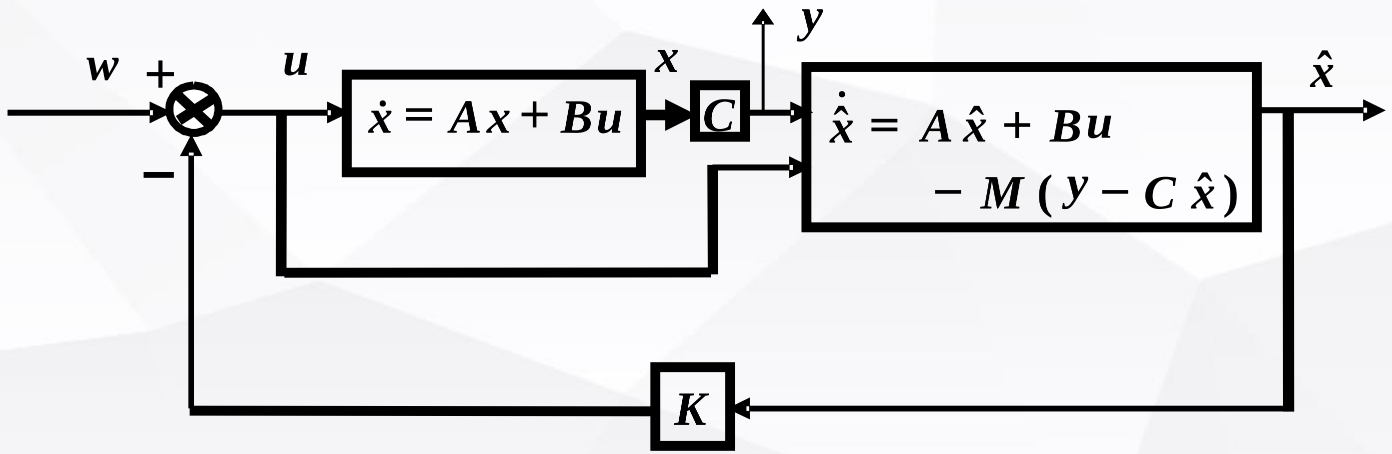


图1

重构状态反馈控制系统

设能控又能观的系统为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{1}$$

当状态不能直接测量时，可以用状态观测器将状态x观测出来，即：

$$\dot{\hat{x}} = (A + MC)\hat{x} + Bu - MCx \tag{2}$$

为便于分析，将对象(1)式和观测器(2)式看成是一个$2n$维的合成系统：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -MC & A + MC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{3}$$

此时，反馈控制律为： $u = w - K\hat{x}$ (4)

重构状态反馈控制系统

将(4)式代入(3)式，得：

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ -MC & A+MC-BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{5}$$

用误差 $\tilde{x} = x - \hat{x}$ 来表示这个系统的状态更为方便，通过变换容易做到这一点。

令 $\begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ I_n & -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$，又 $\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$

它可以将(5)式变成

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A+MC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{6}$$

重构状态反馈控制系统

上式的特征多项式为：

$$f(S)=\left|SI_{2n}-\begin{bmatrix}A-BK & BK\\ 0 & A+MC\end{bmatrix}\right|=\begin{bmatrix}SI_n-(A-BK) & -BK\\ 0_n & SI_n-(A+MC)\end{bmatrix}$$

由分块矩阵行列式公式可写成：

$$f(S)=|SI_n-(A-BK)|\cdot|SI_n-(A+MC)| \tag{7}$$

可见，重构状态反馈系统的特征值由两个不同的部分组成，一部分是由反馈矩阵K决定的（$A-BK$）的极点；另一部分是由状态观测器参数M决定的$(A+MC)$的极点。两部分的极点是可分离的，这一性质称具有可分离性。很明显，状态向量x的性能由（$A-BK$）的极点所决定，而误差向量$\tilde{x}$的性能则由$(A+MC)$的极点所支配。所以反馈控制规律的确定和观测器的结构实现可以当作单独问题来考虑。现概括成如下定理。

重构状态反馈控制系统

$$f(S) = |SI_n - (A - BK)| \cdot |SI_n - (A + MC)| \quad (7)$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (8)$$

可分离性定理：

如果系统 $\sum(A, B, C)$ 的反馈控制规律可以用观测器来实现，则最后合成系统的极点由下列两部分组成：

a）$A - BK$ 的极点——完全由反馈矩阵K所决定；

b）$A + MC$ 的极点——完全由观测器参数M所决定。

状态向量的性能由 a）中极点所支配，误差向量的性能由b）中极点所决定。

重构状态反馈控制系统

极点选取原则

一般情况下，观测器极点必须比状态反馈极点快2~5倍，以保证观测误差能迅速收敛到零，而且观测误差比状态变量的衰减要快2~5倍。

与期望的动态特性相比，观测误差较快的衰减，可以使得控制器的极点得以主导系统的响应。

在许多实际问题中，极点的选取往往归结为快速响应与对干扰和噪声灵敏性之间的一种折中。