本章教学内容

❖基本内容

- 静态误差定义与计算
- 系统类型与静差的关系
- 静态误差的解释
- 扰动引起的静差

- 系统暂态特性的定义
- 二阶系统和高阶系统的动态特性

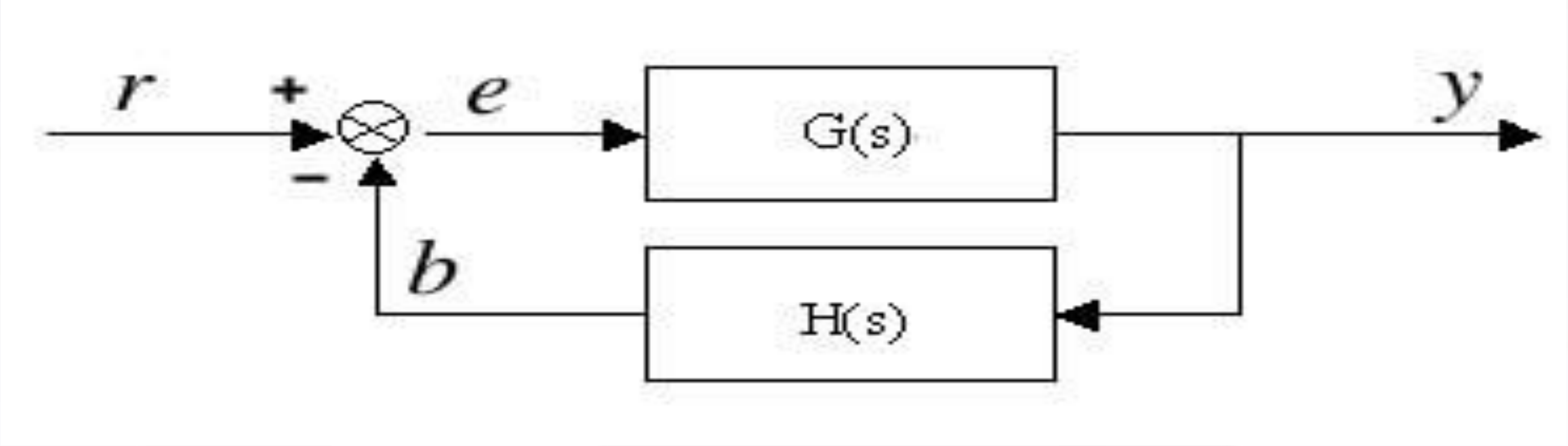
静态误差

静态误差

1. 误差和静态误差定义

误差： $e_y = y_{要求值} - y_{实际值}$　　静态误差： $e_y(t \to \infty)$

表现在框图上



$b = yH$ 反映y的实际值， r体现对y的要求值

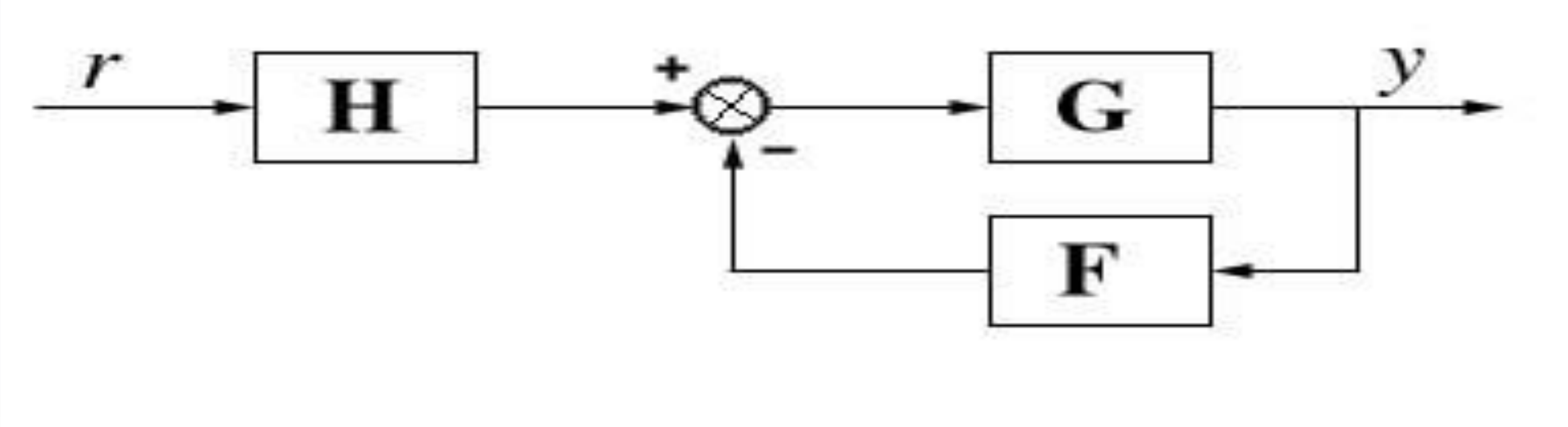
$\therefore e = r - yH$

静差表示系统的静态精度，只有稳定系统才谈得上静差

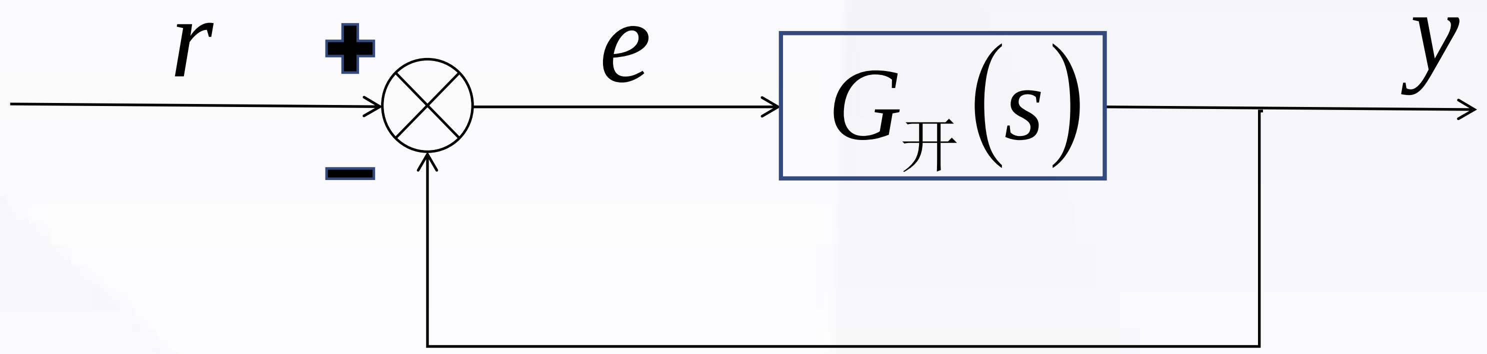
静态误差

对于有些复杂情况，从框图上找不到e

要求$e = \mathrm{r} - y$



是否可以把它变换成



1. 先求出 $\frac{y}{r} = \frac{HG}{1+GF}$

2. 求出对应的$G_{开}(s)$，即求出对应于闭环传递函数($G_{闭} = y/r$)

的单位反馈的开环传递函数 $G_{开}(s)$

即

$$\frac{G_{开}}{1+G_{开}} = \frac{y}{r} = G_{闭}$$

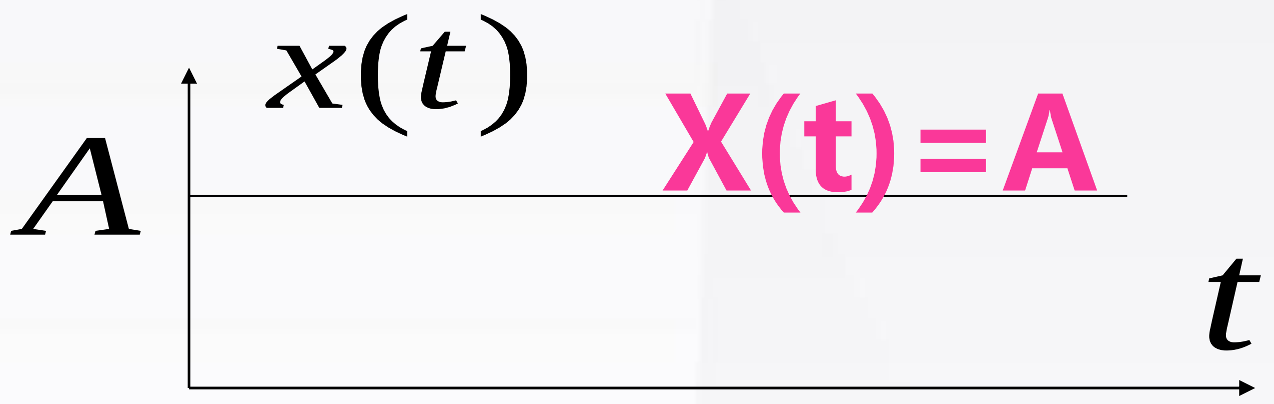
所以： $G_{开} = \frac{G_{闭}}{1-G_{闭}} = \frac{GH}{1+GF-GH}$

静态误差

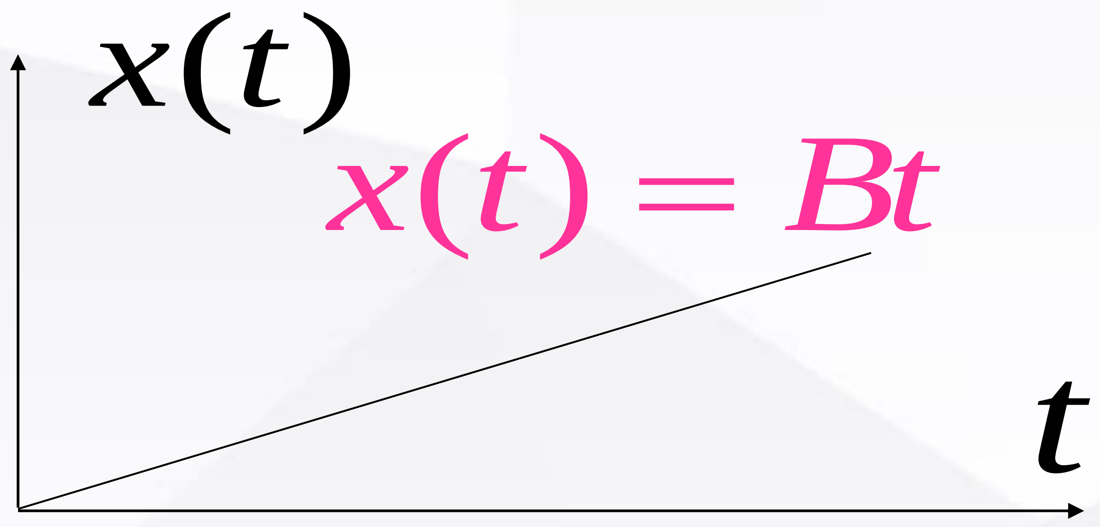
2、静差与输入

静差与输入信号有关，用一些典型输入信号作为标准

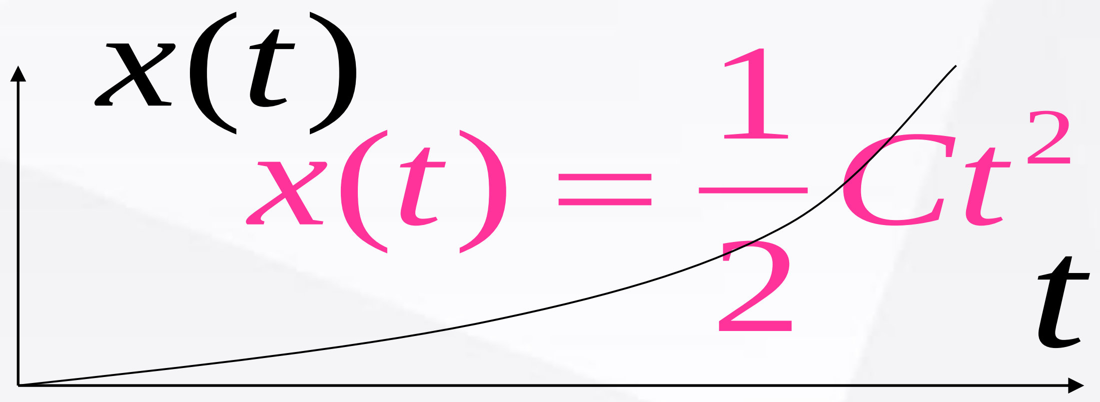
阶跃 $1(t) \to \frac{1}{s}$



斜坡 $t \to \frac{1}{s^2}$



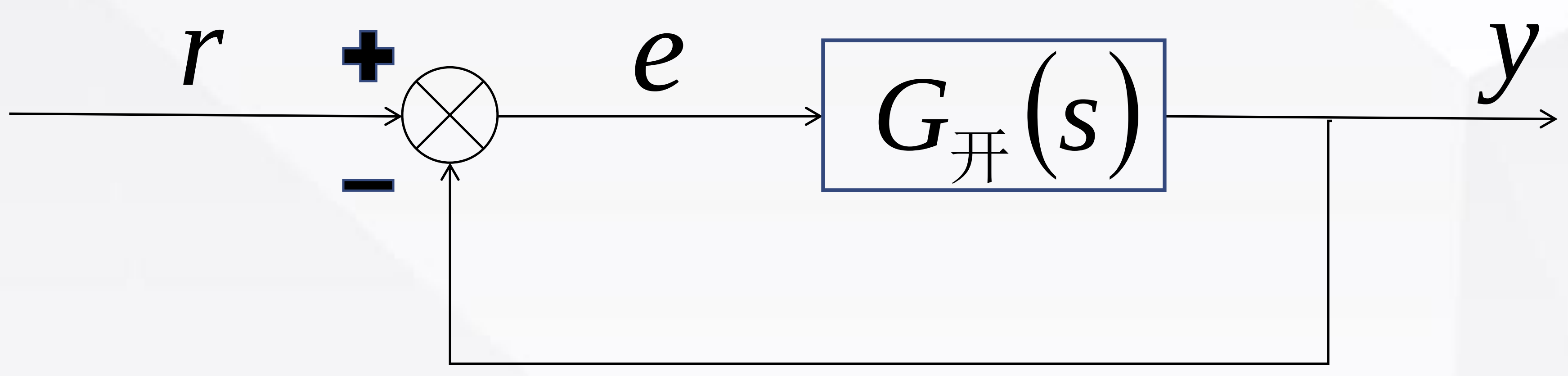
加速度 $\frac{1}{2}t^2 \to \frac{1}{s^3}$



静态误差的计算

静态误差的计算

针对一般情况



$$\frac{e(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + G_{开}(s)} \qquad \therefore e(s) = \frac{1}{1 + G_{开}(s)} r(s)$$

可见误差与 $G_{开}(s)$ 和输入 $r(s)$ 有关

静态误差可以用Laplace 变换的终值定理求得

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} se(s) = e_{st}$$

系统在三种典型输入信号下的静差

$$r(s)=\frac{1}{s} \quad e_{st}=\lim_{s\to 0} se(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_{开}(s)}\frac{1}{s}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{1+G_{开}(s)}$$

$$r(s)=\frac{1}{s^2} \quad e_{st}=\lim_{s\to 0} se(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_{开}(s)}\frac{1}{s^2}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{sG_{开}(s)}$$

$$r(s)=\frac{1}{s^3} \quad e_{st}=\lim_{s\to 0} se(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_{开}(s)}\frac{1}{s^3}=\lim_{s\to 0}\frac{1}{s^2G_{开}(s)}$$

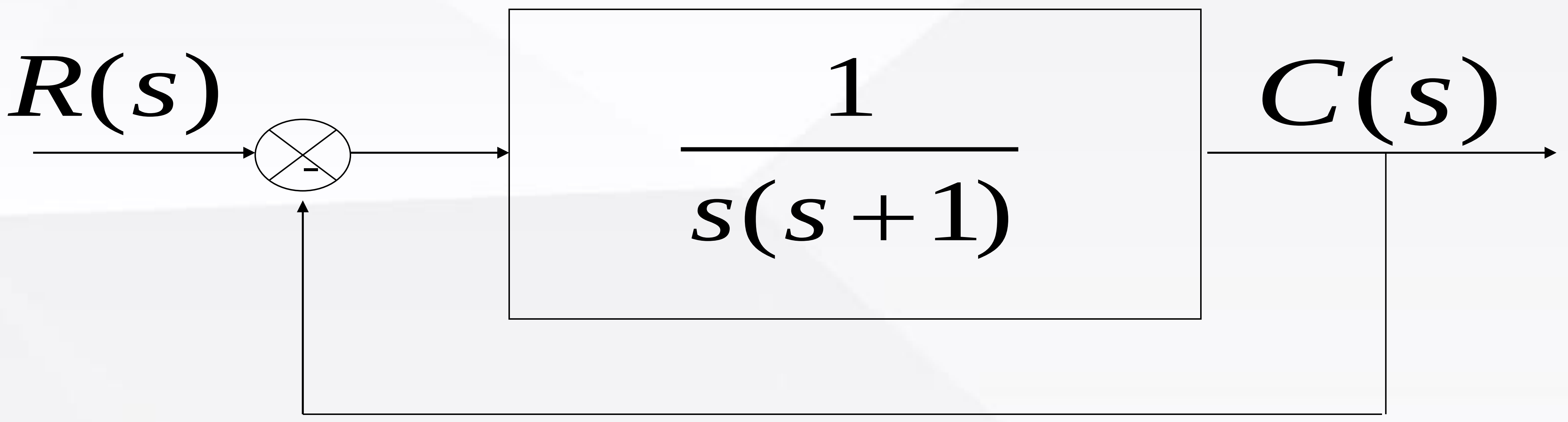
定义误差系数 $k_p=\lim_{s\to 0} G_{开}(s)$ **位置误差系数** $k_v=\lim_{s\to 0} sG_{开}(s)$ **速度误差系数**

$k_a=\lim_{s\to 0} s^2G_{开}(s)$ **加速度误差系数**

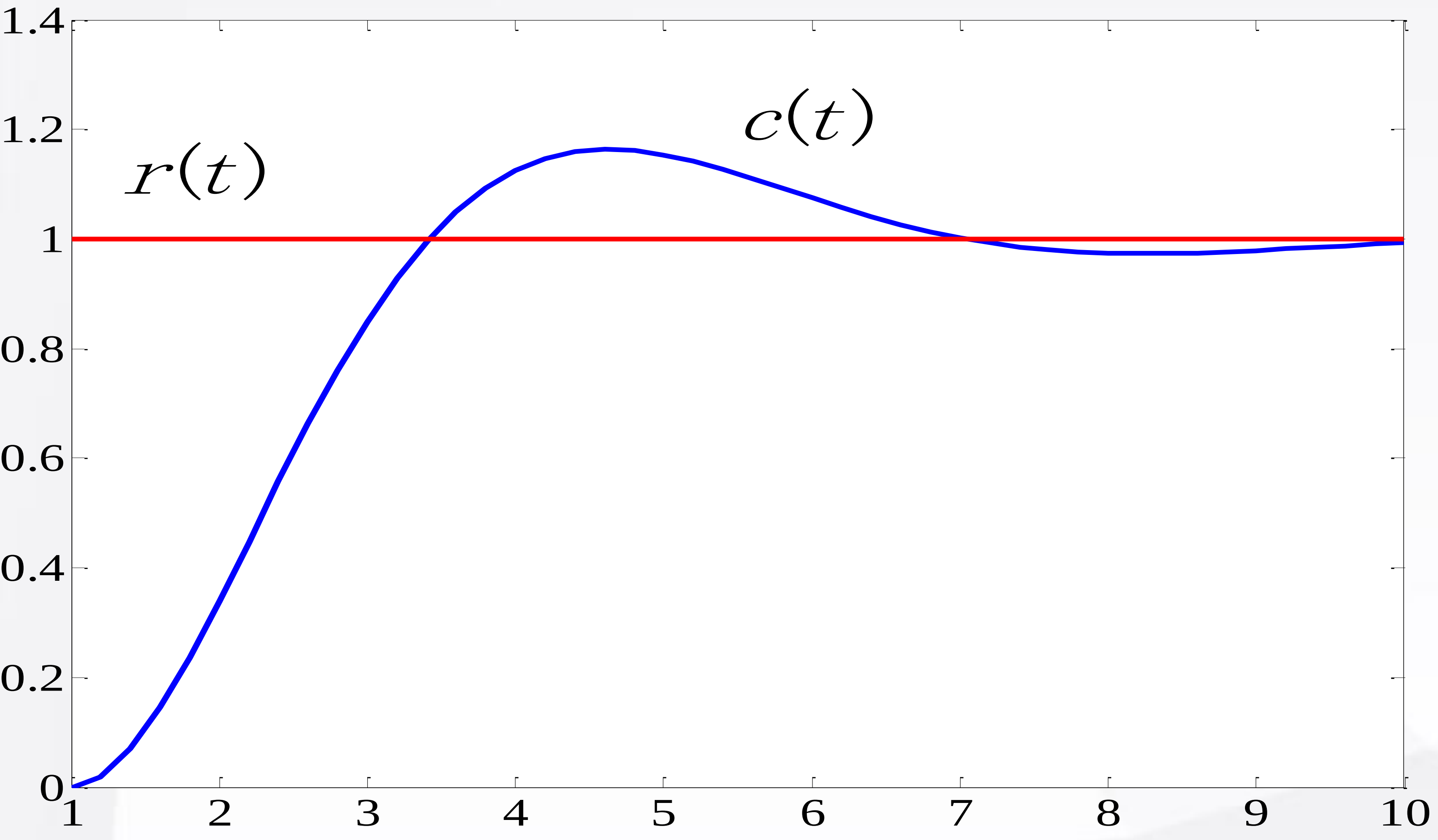
对三种典型输入的静态误差为

$$e_{st}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+k_p} & \text{阶跃输入}\\[2ex] \dfrac{1}{k_v} & \text{斜坡输入}\\[2ex] \dfrac{1}{k_a} & \text{加速度输入}\end{cases}$$

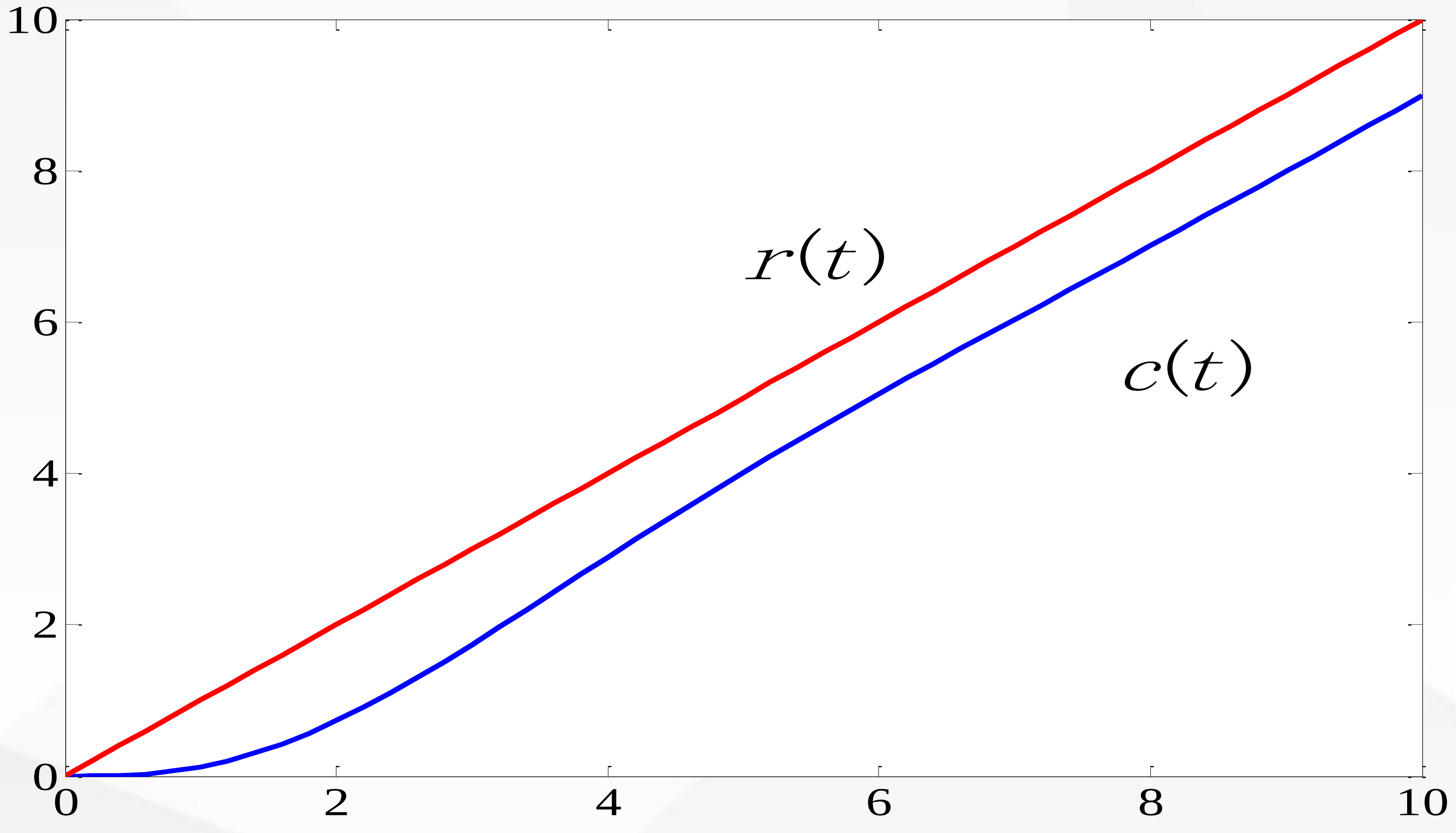
静态误差举例



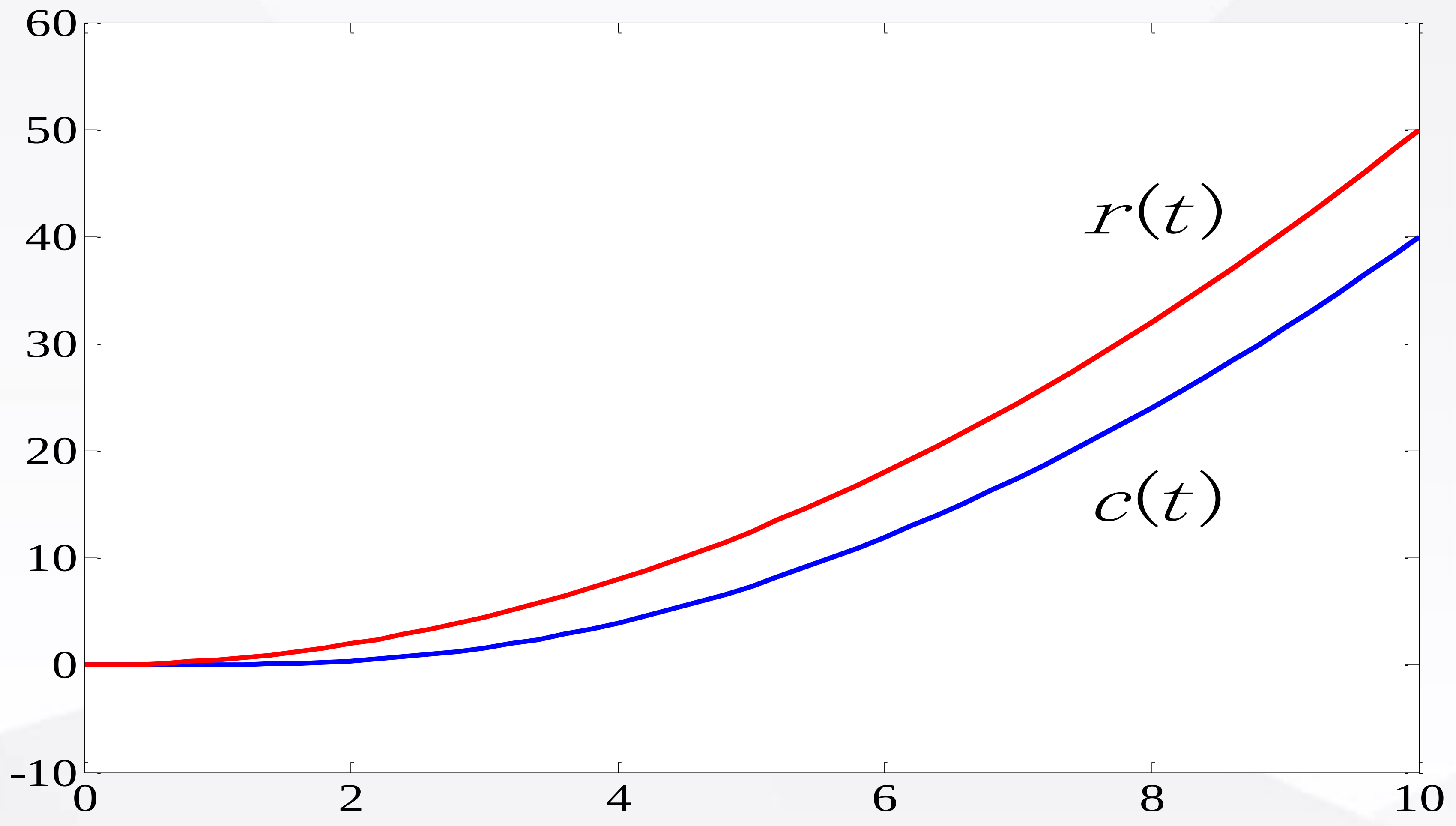
某系统在三种典型输入信号下的误差



阶跃输入



斜坡输入



加速度输入

系统类型与静差的关系

系统类型与静差的关系

前面定义了误差系数，导出了在特定输入信号的作用下，静差与误差系数的关系，而误差系数与系统的开环传递函数有关，即与系统的参数和结构有关。

问题：开环传递函数的什么结构影响了闭环系统的静差?

设 $$G_{开}(s)=\frac{k(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^{\gamma}(T_1 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$ $(\gamma=0,1,2$ 分别称为0型，1型，2型系统)

对0型系统：

$$\begin{cases} k_p=\lim\limits_{s\to 0} G_{开}(s)=k & \text{阶跃输入下的静态误差} \quad e_{st}=1/(1+k) \\ k_v=\lim\limits_{s\to 0} sG_{开}(s)=0 & \text{斜坡输入下的静态误差} \quad e_{st}=1/k_v=\infty \\ k_a=\lim\limits_{s\to 0} s^2G_{开}(s)=0 & \text{加速度输入下的静态误差} \quad e_{st}=1/k_a=\infty \end{cases}$$

系统类型与静差的关系

对1型系统：

$$\begin{cases} k_p = \infty & \text{阶跃输入下的静态误差} \quad e_{st} = 0 \\ k_v = k & \text{斜坡输入下的静态误差} \quad e_{st} = 1/k \\ k_a = 0 & \text{加速度输入下的静态误差} \quad e_{st} = \infty \end{cases}$$

对2型系统：

$$\begin{cases} k_p = \infty & \text{阶跃输入下的静态误差} \quad e_{st} = 0 \\ k_v = \infty & \text{斜坡输入下的静态误差} \quad e_{st} = 0 \\ k_a = k & \text{加速度输入下的静态误差} \quad e_{st} = 1/k \end{cases}$$

系统类型与静差的关系

总结如下表：

类型 \ 静差 \ 输入	阶跃	斜坡	加速度
0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
I	0	$\frac{1}{K}$	∞
II	0	0	$\frac{1}{K}$

重要提醒：讨论静差一定在系统稳定的前提下

静态误差的解释

静态误差的物理解释

初始条件：平衡位置 h_0，阀门开度 l_0
进水 Q_0，出水 M_0

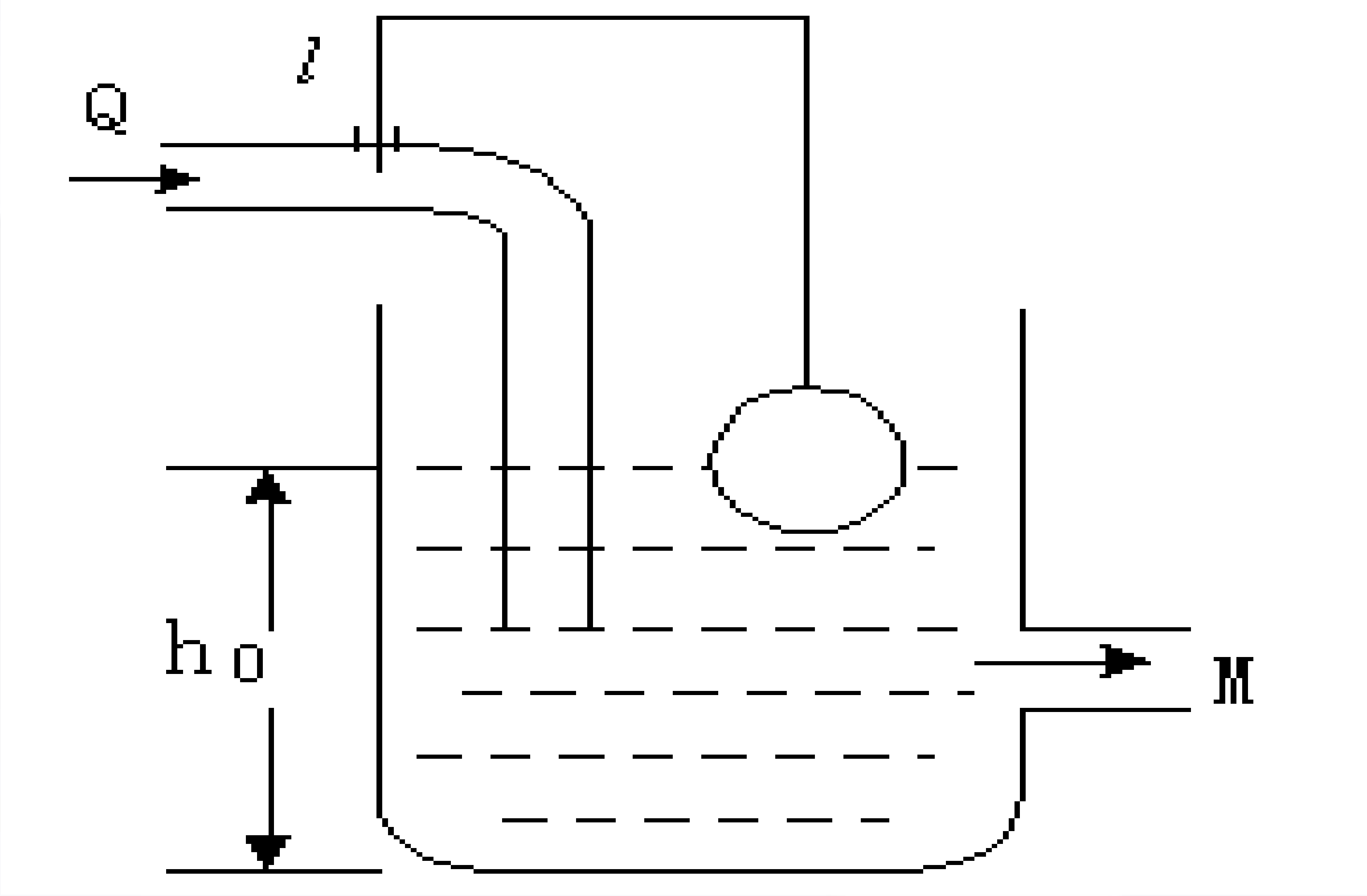
当M增大，水位h降低，l变大，从而
Q变大，h回升，

当达到新的平衡，此时 $h_1 ?= h_0$

如果要保证 $Q_1 > Q_0$

就必须使得 $l_1 > l_0, \therefore h_1 < h_0$

这是一个有差系统



静态误差的物理解释

初始状态：　$h = h_0, \Delta u = 0, l = l_0, M_0 = Q_0$

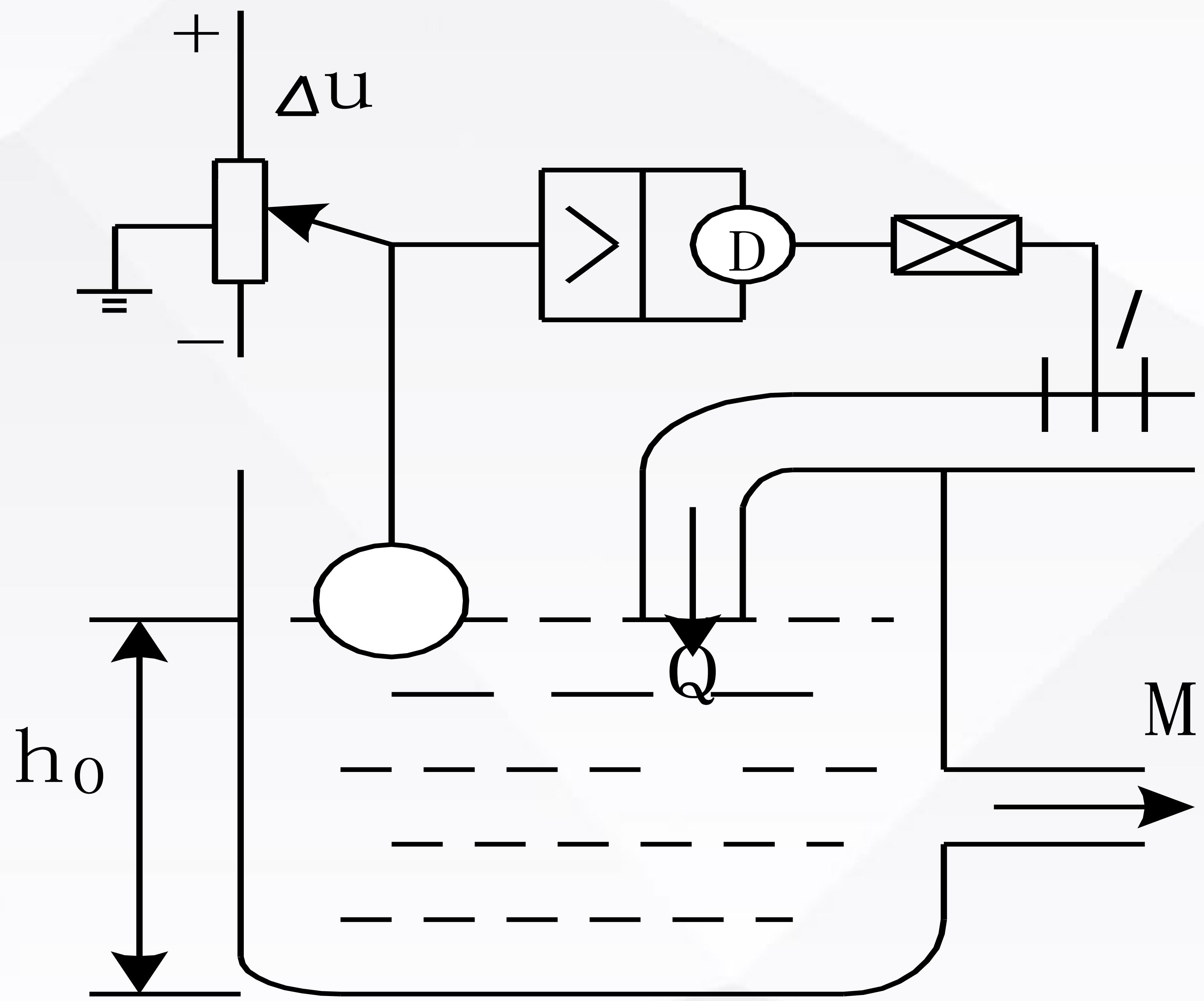
当M升为 M_1，h下降，$\Delta u > 0$，电动机动作，

提高　l, l_0升为l_1，Q升为Q_1

直到　$Q_1 = M_1$达到新平衡

此时　$h_1 ? = h_0$

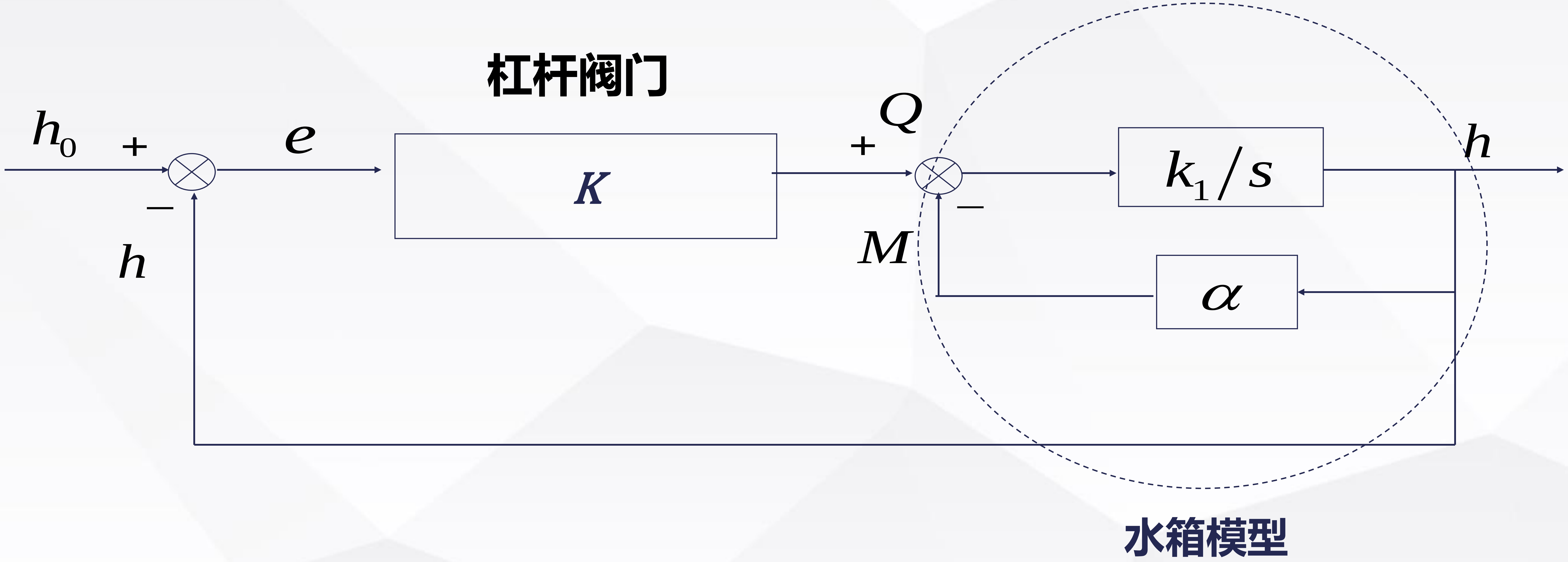
试想：只要　$h_1 \neq h_0, \Delta u \neq 0$，电动机就转，阀门就动作（不是开大就是关小）直到　$h = h_0$达到新平衡



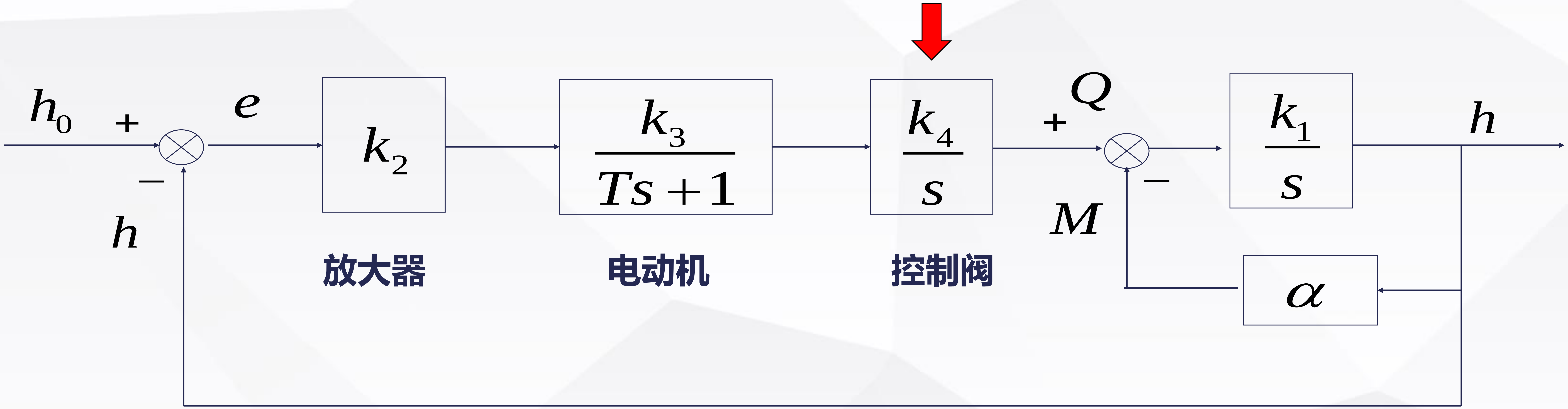
这是一个无静差系统

静态误差理论解释

数学模型



静态误差理论解释

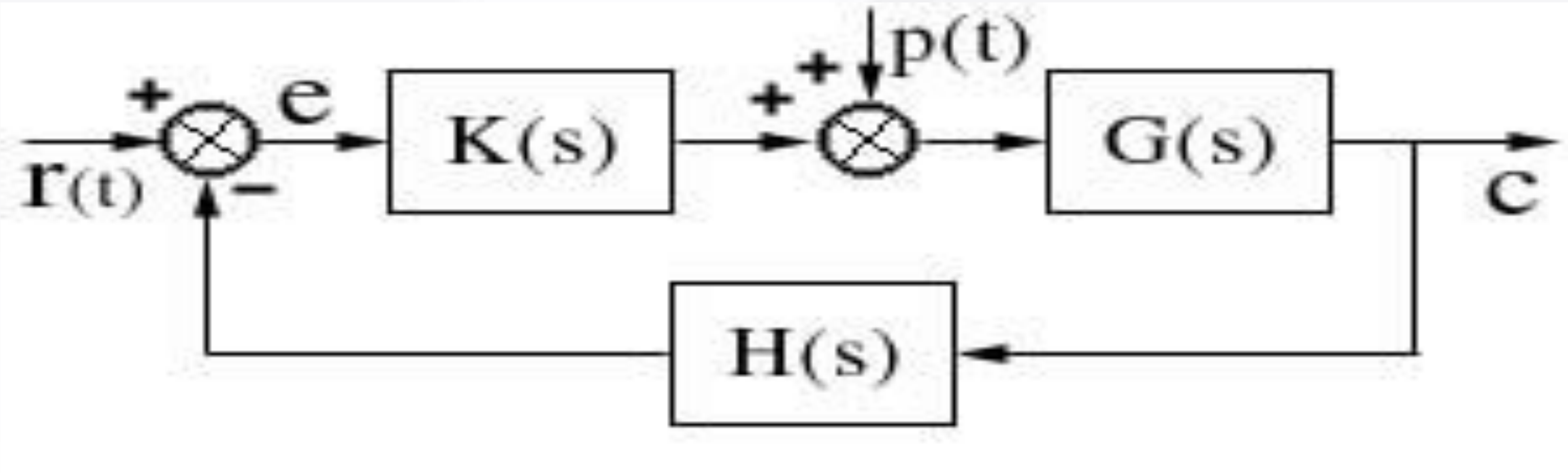


两者不同，前者是0型，后者是1型，多了一个电动机，在把速度信号变为位置信号时多了一个积分环节。

扰动引起的静差

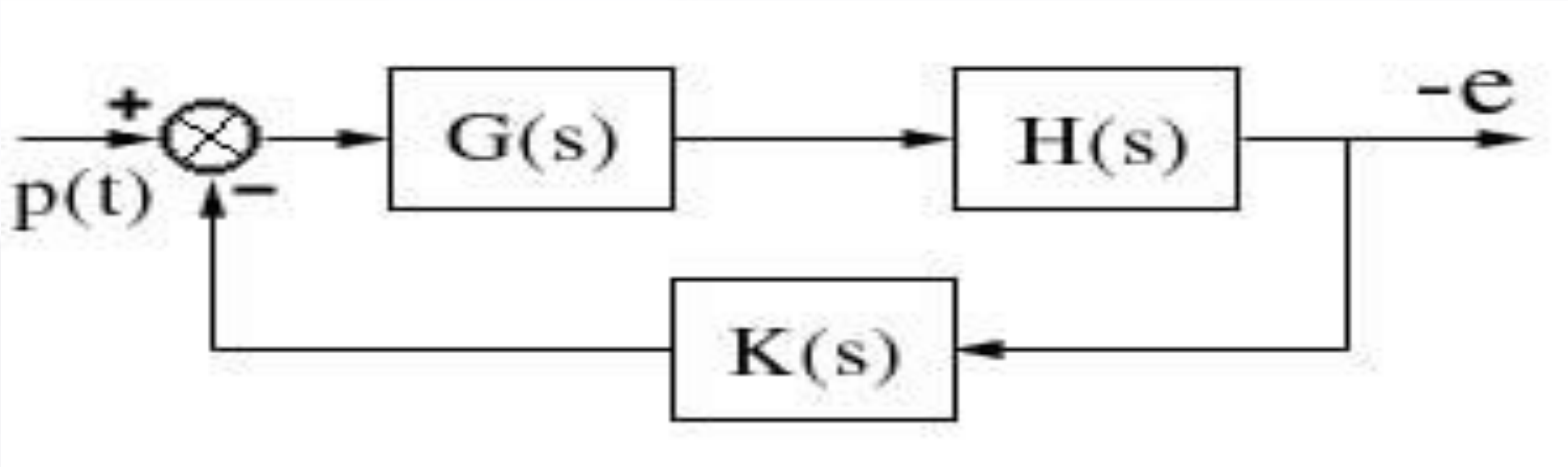
扰动引起的静差

扰动P(t)也是一种输入，系统静差由两部分组成，由r(t)引起的静差和由p(t)引起的静差的代数和。



1. 由r(t)引起的误差，可根据r(t)的性质和$G_{开}(s)$ 求得对应输入静差，此时p(t)=0

2. 由p(t)引起的误差，令r(t)=0，做框图变形，求得



$$\frac{e(s)}{p(s)} = -\frac{GH}{1+GHK}$$ 在已知p(t)下，求出对应的扰动静差

扰动引起的静差

试分析 K(s)含积分和K(s)不含积分两种情况下的阶跃扰动静差

$$e_{st}=\lim_{s\to 0}se(s)=-\lim_{s\to 0}\frac{GH}{1+GHK}$$

- **K(s)含积分** $K=\dfrac{k_1}{s(\cdots)(\cdots)}$ **即扰动作用点之前（左）含积分，对阶跃扰动无静差**

$$e_{st}=-\lim_{s\to 0}\frac{GH}{1+GH\dfrac{k_1}{s(\cdots)(\cdots)}}=-\lim_{s\to 0}\frac{sGH(\cdots)(\cdots)}{s(\cdots)(\cdots)+k_1GH}=0$$

- **K(s)不含积分** $K=\dfrac{k_1}{(\cdots)(\cdots)}$

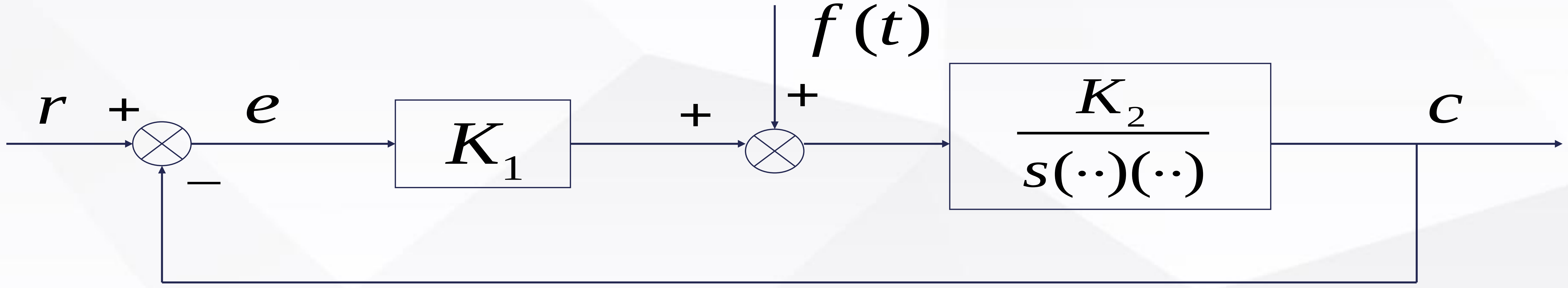
$$e_{st}=\begin{cases}-\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\dfrac{k_2}{(\cdots)(\cdots)}}{1+\left(\dfrac{k_2}{(\cdots)(\cdots)}\right)\dfrac{k_1}{(\cdots)(\cdots)}}=-\dfrac{k_2}{1+k_1k_2}\approx-\dfrac{1}{k_1} & \left(GH\text{不含积分，}GH=\dfrac{k_2}{(\cdots)(\cdots)}\right)\\ -\lim\limits_{s\to 0}\dfrac{\dfrac{k_2}{s(\cdots)(\cdots)}}{1+\left(\dfrac{k_2}{s(\cdots)(\cdots)}\right)\dfrac{k_1}{(\cdots)(\cdots)}}=-\dfrac{1}{k_1} & \left(GH\text{含积分，}GH=\dfrac{k_2}{s(\cdots)(\cdots)}\right)\end{cases}$$

扰动引起的静差

练习题：求以下3题的静差 $e = r - c$

1）第一种情况：r(t)=1(t), f(t)=1(t)

第二种情况：r(t)=t, f(t)=1(t)



扰动引起的静差

求解过程

1.判稳：假设系统稳定

2.由r(t)引起的误差，　令p(t)=0

1 型系统，静态误差可查表

$$r(t)=1(t), e_{r1}=0; \qquad r(t)=t, e_{r2}=\frac{1}{K1K2}$$

3.由p(t)引起的误差，令r(t)=0

扰动作用点之前不含积分，扰动作用点之后含有积分，对阶跃扰动的静态误差

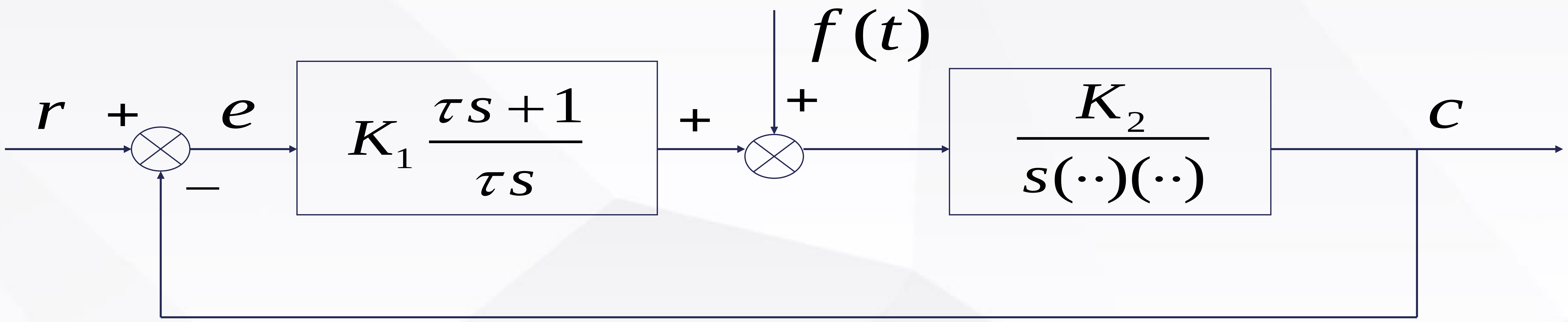
$$e_f=-\frac{1}{K1}$$

第一种情况：r(t)=1(t), f(t)=1(t)　　$e_{st}=-\frac{1}{K1}$

第二种情况：r(t)=t, f(t)=1(t)　　$e_{st}=\frac{1}{\mathrm{K1K2}}-\frac{1}{K1}$

扰动引起的静差

2）第一种情况：r(t)=1(t), f(t)=1(t)
第二种情况：r(t)=t, f(t)=1(t)



扰动引起的静差

求解过程：

1. 判稳：假设系统稳定

2. 由r(t)引起的误差， 令p(t)=0

2 型系统，静态误差可查表

$r(t)=1(t),\ e_{r1}=0$

$r(t)=t,\ e_{r2}=0$

3. 由p(t)引起的误差，令r(t)=0

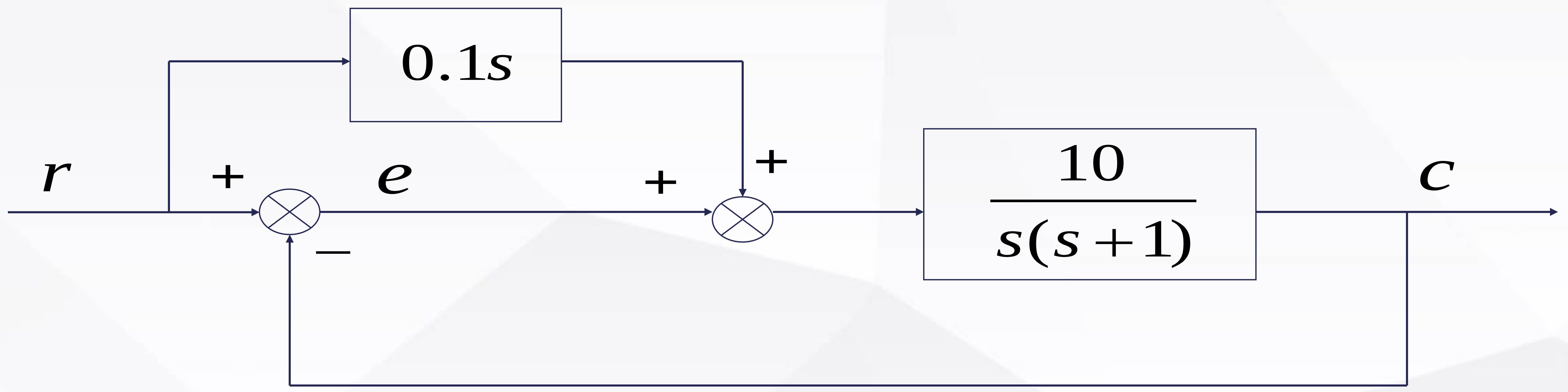
$f(t)=1(t)$, **扰动作用点之前含有积分，对阶跃扰动无静差** $e_{stf}=0$

所以：第一种情况：r(t)=1(t), f(t)=1(t) $e_{st}=0$

第二种情况：r(t)=t, f(t)=1(t) $e_{st}=0$

扰动引起的静差

3）第一种情况：r(t)=1(t)
第二种情况：r(t)=t



扰动引起的静差

求解过程：

$$G_{闭}(s)=\frac{s+10}{10+s(s+1)}$$

等效开环传递函数： $G_{开}(s)=\dfrac{s+10}{s^2}$

2 型系统，对阶跃信号和斜坡信号的稳态误差均为 0

所以：第一种情况：r(t)=1(t), $e_{st}=0$

第二种情况：r(t)=t, $e_{st}=0$

扰动引起的静差

答案:	r(t)=1(t), f(t)=1(t)	r(t)=t, f(t)=1(t)
1)	$-1/K_1$	$1/K_1K_2-1/K_1$
2)	0	0
3)	0	0

控制系统的动态指标

动态性能指标

1. t_r 上升时间

$y(t)$ 第一次达到 y(∞)的时间

2. t_d 延迟时间

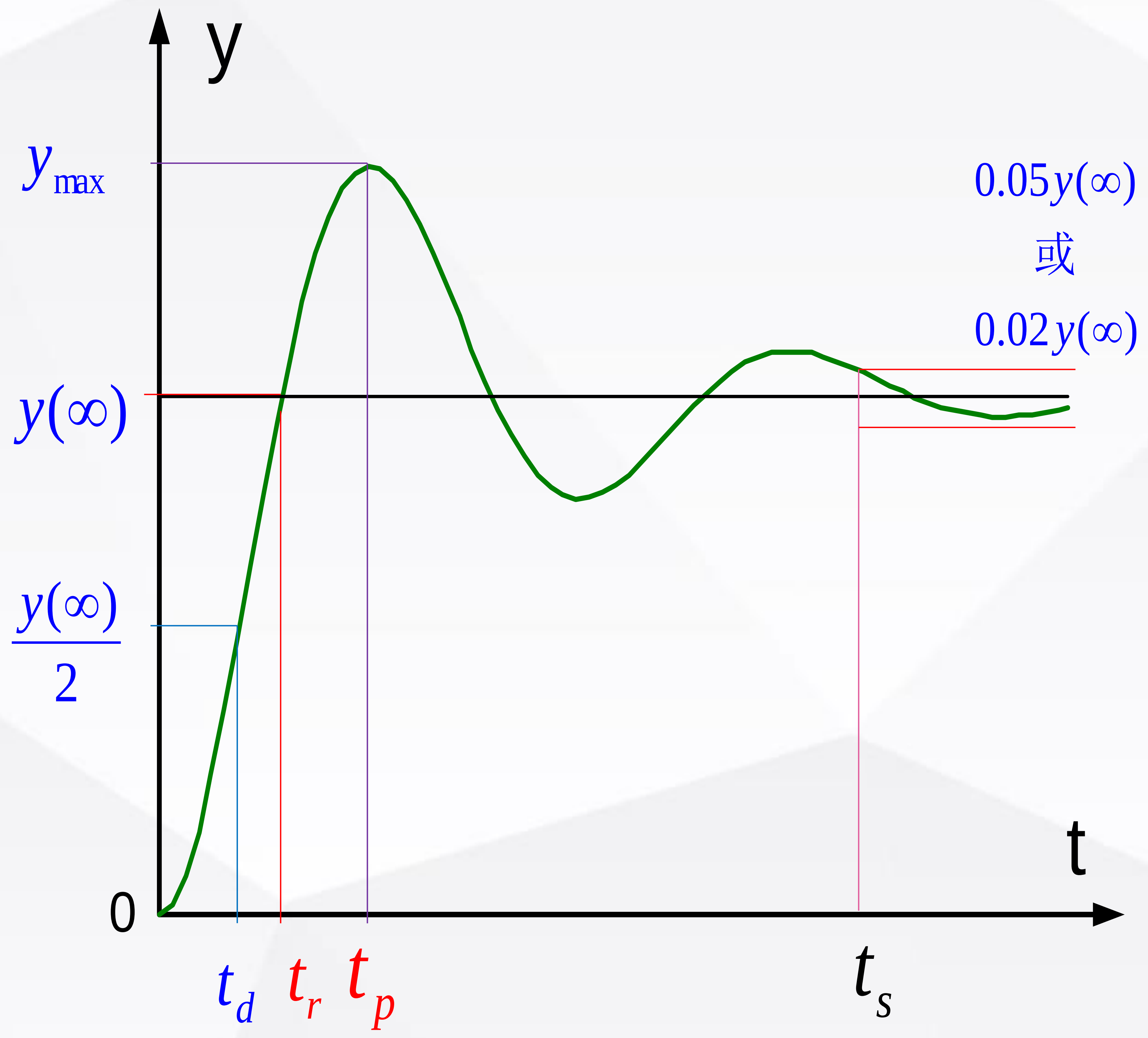
$y(t)$ 达到 y(∞)一半的时间

3. t_s 过渡过程时间

$y(t)$ 达到 y(∞) ± 5%或±2%的时间

4. t_p 峰值时间

$y(t)$ 达到 y_{max}的时间



动态性能指标

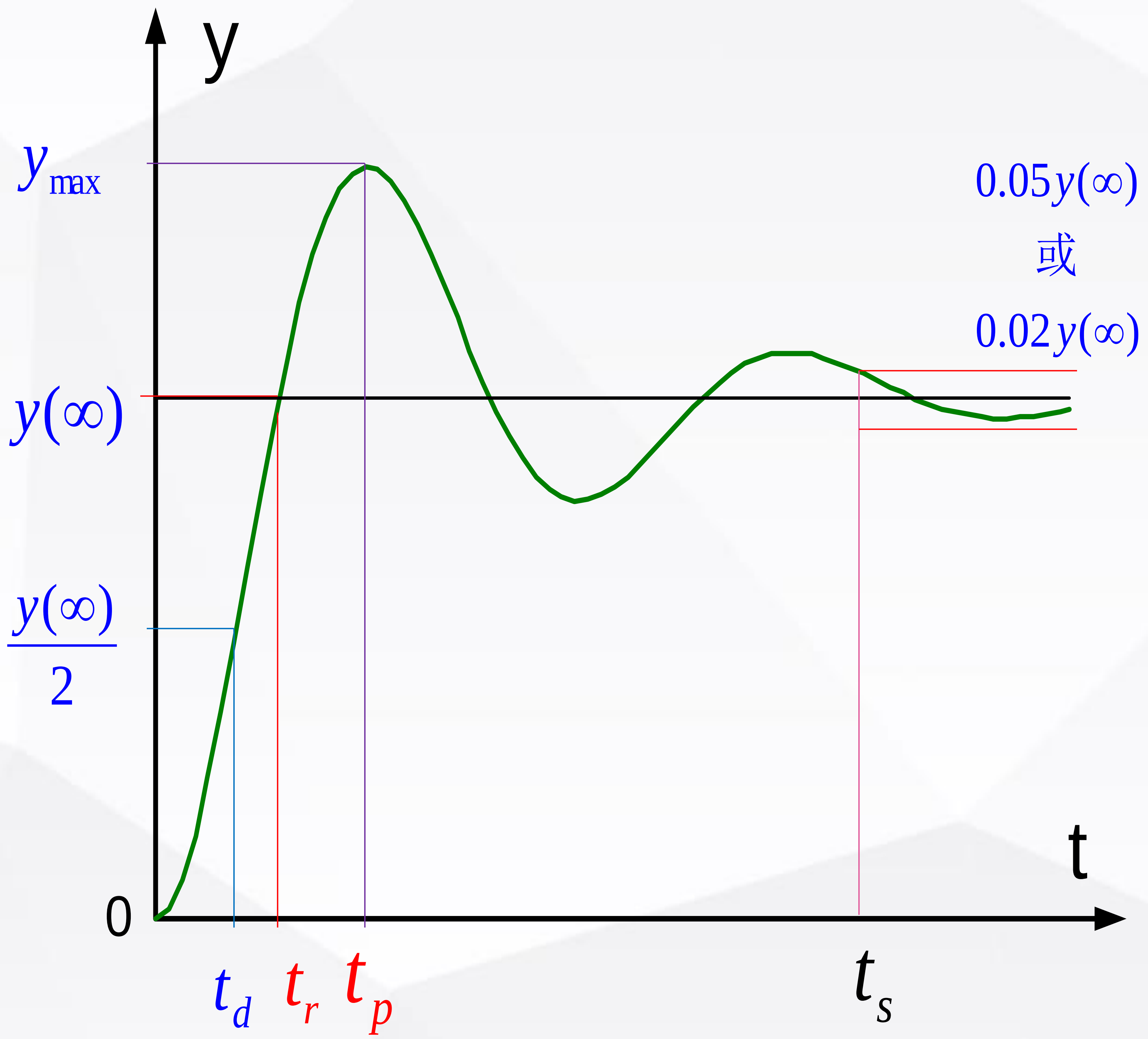
5. 超调量

$$\sigma = \frac{y_{max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\%$$

6. 振荡次数

7. 误差积分指标

$$\int_0^\infty e^2(t)dt, \int_0^\infty te^2(t)dt, \int_0^\infty |e(t)|\,dt$$



在阶跃函数作用下，误差的某个函数的积分值，无论哪一种都希望越小越好。

一般情况下，相对主要的指标是：过渡过程时间和超调量

典型二阶系统动态性质

二阶系统的运动

典型二阶系统

$$T^2\frac{d^2y}{dt^2}+2\zeta T\frac{dy}{dt}+y=v$$

T 时间常数，ζ 阻尼系数

另一种形式：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\zeta\omega_n\frac{dy}{dt}+\omega_n{}^2y=\omega_n{}^2v$$

$\omega_n=\frac{1}{T}$ 无阻尼自振频率

在零初始条件下，解此方程有以下几种情况：

(1) $0\le\zeta<1, s_{1,2}=-\frac{\zeta}{T}\pm j\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}$ $(=-\omega_n\zeta\pm j\omega_d)$

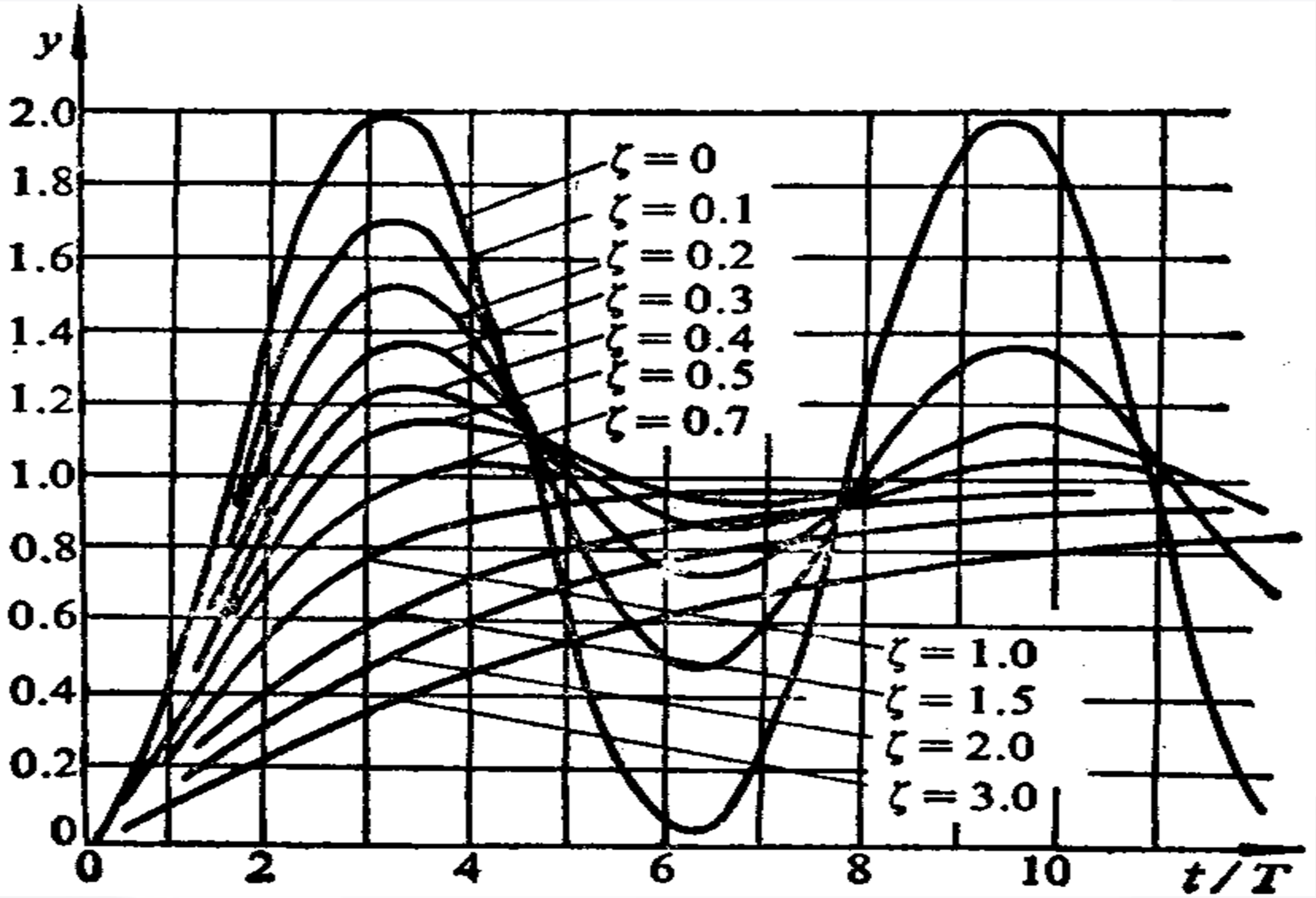
（ω_d 是阻尼振荡频率）

二阶系统的运动

$y(t)$ 的阶跃响应

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta}{T}t} \sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} t + \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

曲线如图



二阶系统的运动

(2) $\zeta = 1$，两个相等的负实根，$s_{1,2} = -\frac{1}{T}$，$y(t) = 1 - (1 + \frac{t}{T})e^{-\frac{t}{T}}$

(3) $\zeta > 1$，两个不相等的负实根，$s_{1,2} = -\frac{-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}}{T}$

$y(t) = 1 + a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t}$

$y(t)$单调趋近于1

分析:

(1) 看 ζ 的作用:

$0 \le \zeta < 1$，欠阻尼；　$\zeta = 0$，无阻尼，带振荡性

$\zeta = 1$，　临界阻尼；$\zeta > 1$，过阻尼

(2) t/T 总在一起，T是个时间尺度，曲线展宽或压缩

二阶系统运动的动态指标

性能指标：

(1) t_r, $y(t_r)=1$

$$y(t_r)=1=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\frac{\zeta}{T}t_r}\sin(\omega_d t_r+\theta)$$

即 $sin(\omega_d t_r+\theta)=0\rightarrow\omega_d t_r+\theta=\pi$　　$t_r=\dfrac{\pi-\theta}{\omega_d}$

(2) t_p, 令 $\frac{\mathrm{dy}}{dt}=0$, 得 $t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{\pi T}{\sqrt{1-\zeta^2}}$

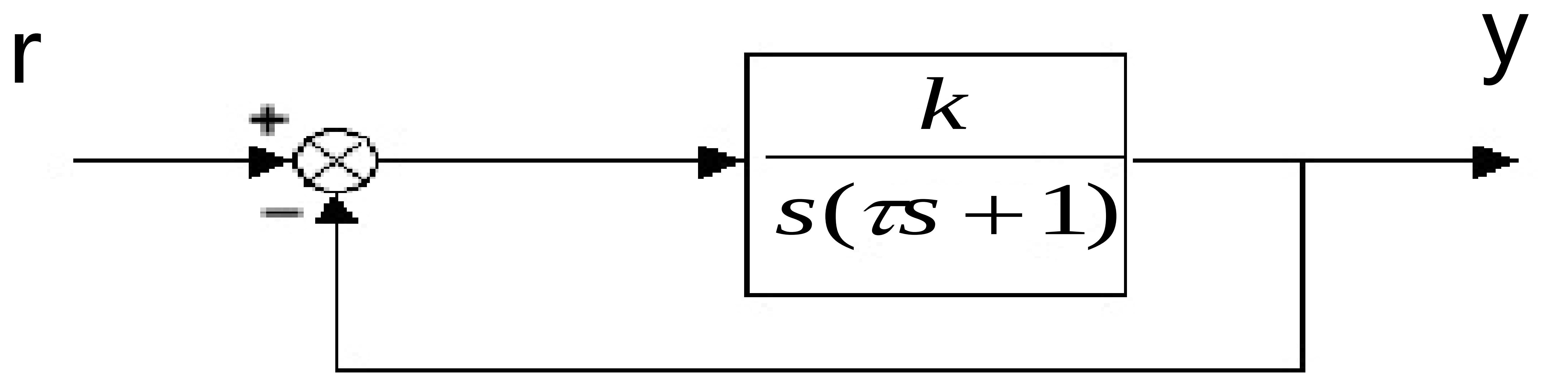
(3) 求σ, 将 $t=t_p$ 代入 y(t), 求出 $y_{\max}$, $y(\infty)=1$

$$\therefore\ \sigma=e^{-(\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2})}$$

(4) t_s 近似估计值， $t_s\approx\frac{3\sim4}{\zeta\omega_n}=\frac{3\sim4}{\zeta}T$ (误差带5%~2%)

二阶系统运动的动态指标

课堂练习



试分析当r(t)=1(t)，在以下三种不同k，τ参数下，该二阶系统的主要特征，并画出阶跃输入下的y(t)曲线

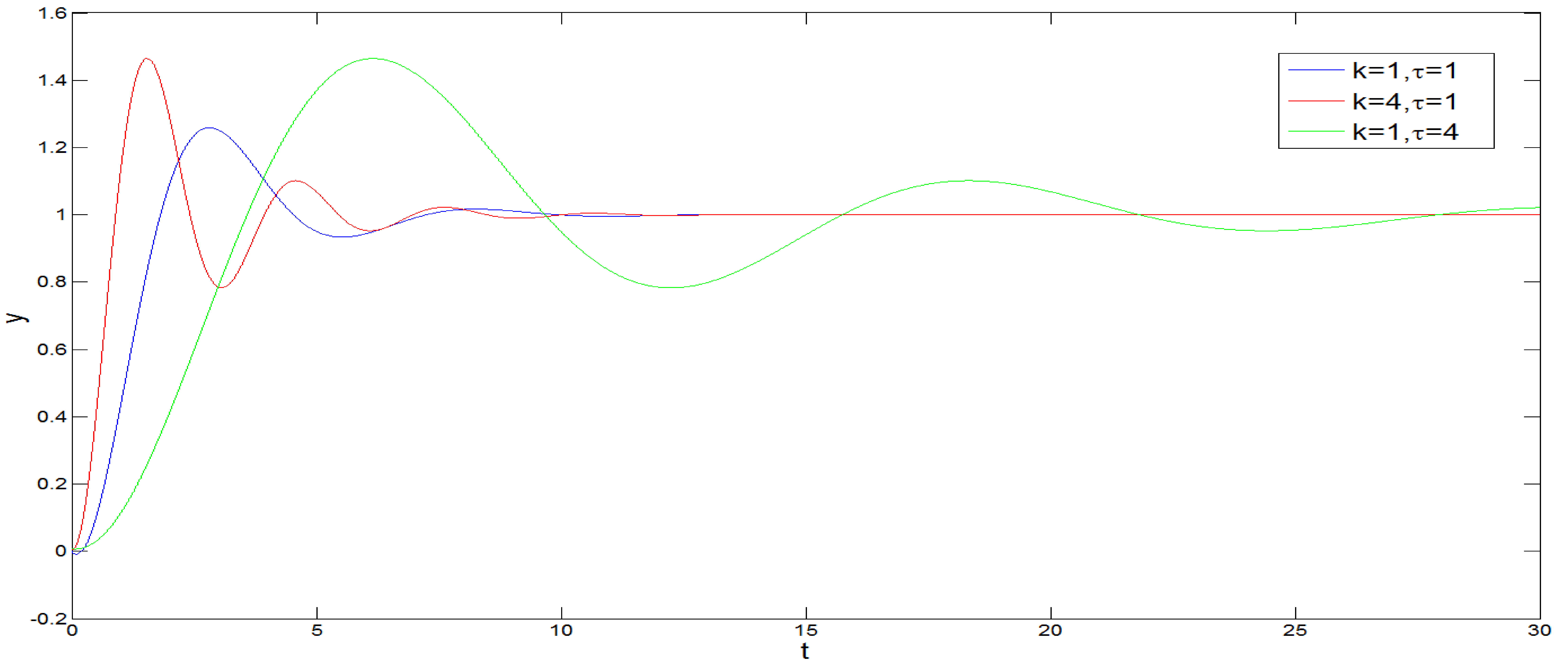
$1)k=1,\tau=1;$ $(\zeta=0.5,\mathrm{T}=1,t_s=6)$

$2)k=4,\tau=1;$ $(\zeta=0.25,\mathrm{T}=\frac{1}{2},t_s=6)$

$3)k=1,\tau=4;$ $(\zeta=0.25,\mathrm{T}=2,t_s=24)$

二阶系统运动的动态指标

曲线如下



二阶系统运动的动态指标

小结： 1）二阶系统 T,ζ 对动态性能的影响

$$\sigma = e^{-\left(\zeta\pi / \sqrt{1-\zeta^2}\right)} \qquad t_p = \frac{\pi T}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

2）能根据主要特征绘制阶跃响应曲线

高阶系统动态性能的近似表示

高阶系统动态性能的近似表示

一个高阶系统的闭环传递函数，可以写成如下的形式

$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots b_1 s+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots a_1 s+a_0}=\frac{k(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

$-p_i\ (i=1,\cdots n)$　　**系统的闭环极点**

$-z_j\ (j=1,\cdots m)$　　**系统的闭环零点**

高阶系统动态性能的近似表示

在单位阶跃输入和零初始条件下，且假设这些零极点都是实数且互不相同，于是有：

$$y(s)=\frac{A_0}{s}+\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s+p_i}$$

A_0, A_i**是相应于**$s=0, s=-p_i$ **极点处的留数**

有

$$y(t)=A_0+\sum_{i=1}^{n}A_i e^{-p_i t}$$

$$A_0=[y(s)s]_{s=0} \qquad A_i=[y(s)(s+p_i)]_{s=-p}$$

留数描述了该极点对应运动模态的重要性程度

高阶系统动态性能的近似表示

(1) 设一极点$-p_k$远离原点，此极点处的留数为

$$A_k = y(s)(s+p_k)|_{s=-p_k}$$

$$= \frac{k(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{s(s+p_1)\cdots(s+p_k)\cdots(s+p_n)}(s+p_k)|_{s=-p_k}$$

$$= \frac{k(-p_k+z_1)\cdots(-p_k+z_m)}{(-p_k)(-p_k+p_1)\cdots(-p_k+p_n)} \approx \frac{k(p_k)^m}{(p_k)^n} \qquad n > m$$

$\therefore A_k$ 很小

这表示远离原点的极点所对应的运动成分对于阶跃响应的影响很小

高阶系统动态性能的近似表示

(2) 设一零点$-z_r$和一极点$-p_k$很靠近，即$|-p_k+z_r|$ 很小，这一对零极点称为偶极子。此极点的留数

$$A_k=\frac{k(s+z_1)\cdots(s+z_r)\cdots(s+z_m)}{s(s+p_1)\cdots(s+p_k)\cdots(s+p_n)}(s+p_k)\Big|_{s=-p_k}$$

$$=\frac{k(-p_k+z_1)\cdots(-p_k+z_r)\cdots(-p_k+z_m)}{(-p_k)(-p_k+p_1)\cdots(-p_k+p_n)}\qquad n>m$$

可见 A_k 很小

表明如果有一零点与一极点相近，则这个极点所对应的运动成分在阶跃响应中所占的比重很小。

高阶系统动态性能的近似表示

(3)主导极点

在分析高阶系统时，可以把上述两种情况的极点化为次要因素而忽略。

主导极点：稳定系统的部分极点，在它们附近没有零点，且其他极点离它们较远，并远离虚轴。

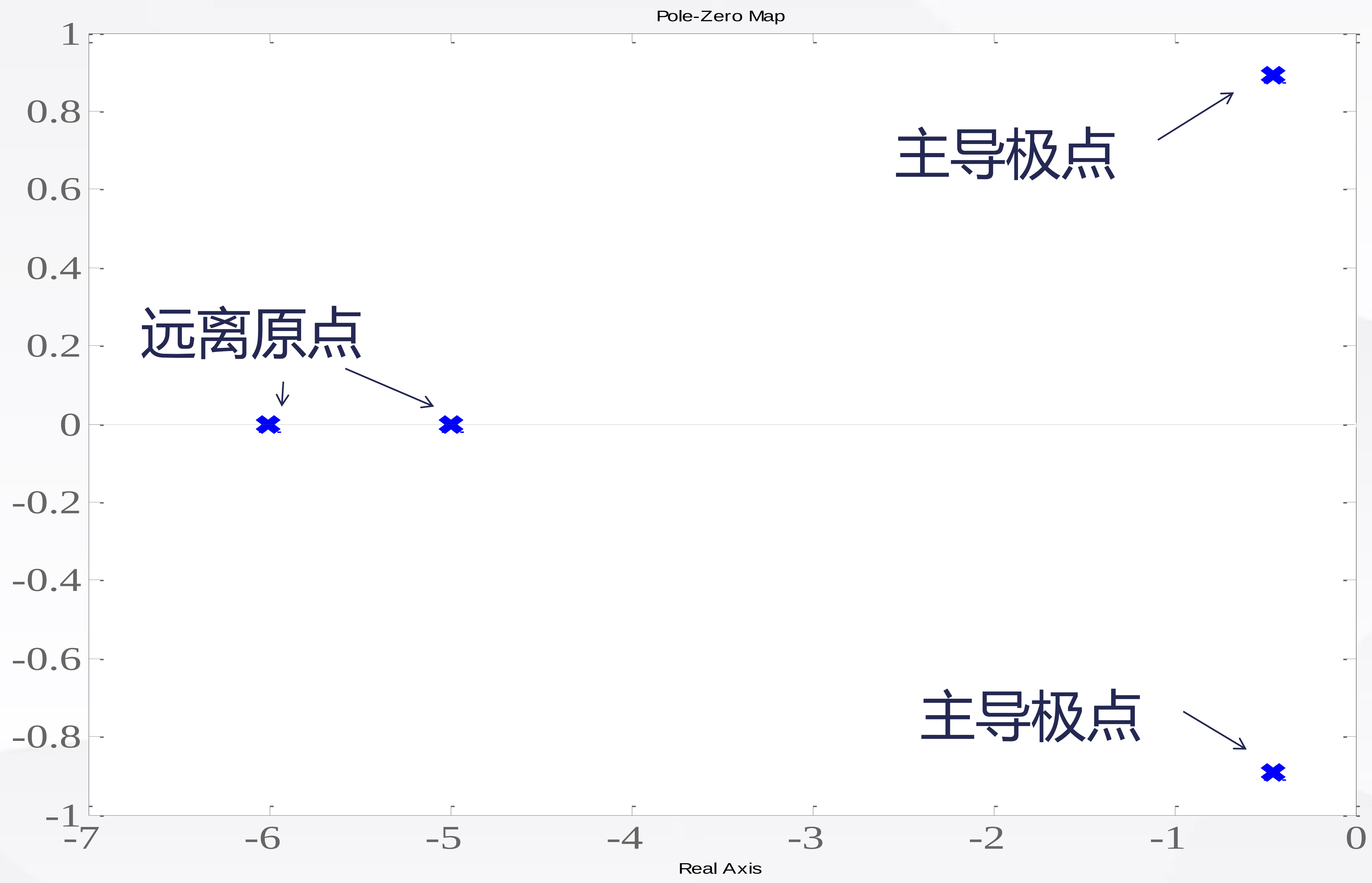
主导极点可以是一个、两个或者多个；可以是实数或者复数；如果只有一对左半平面的共轭复极点符合要求，则这个系统就可以近似化为一个二阶系统，其动态特性是由这一对主导极点决定。

高阶系统动态性能的近似表示

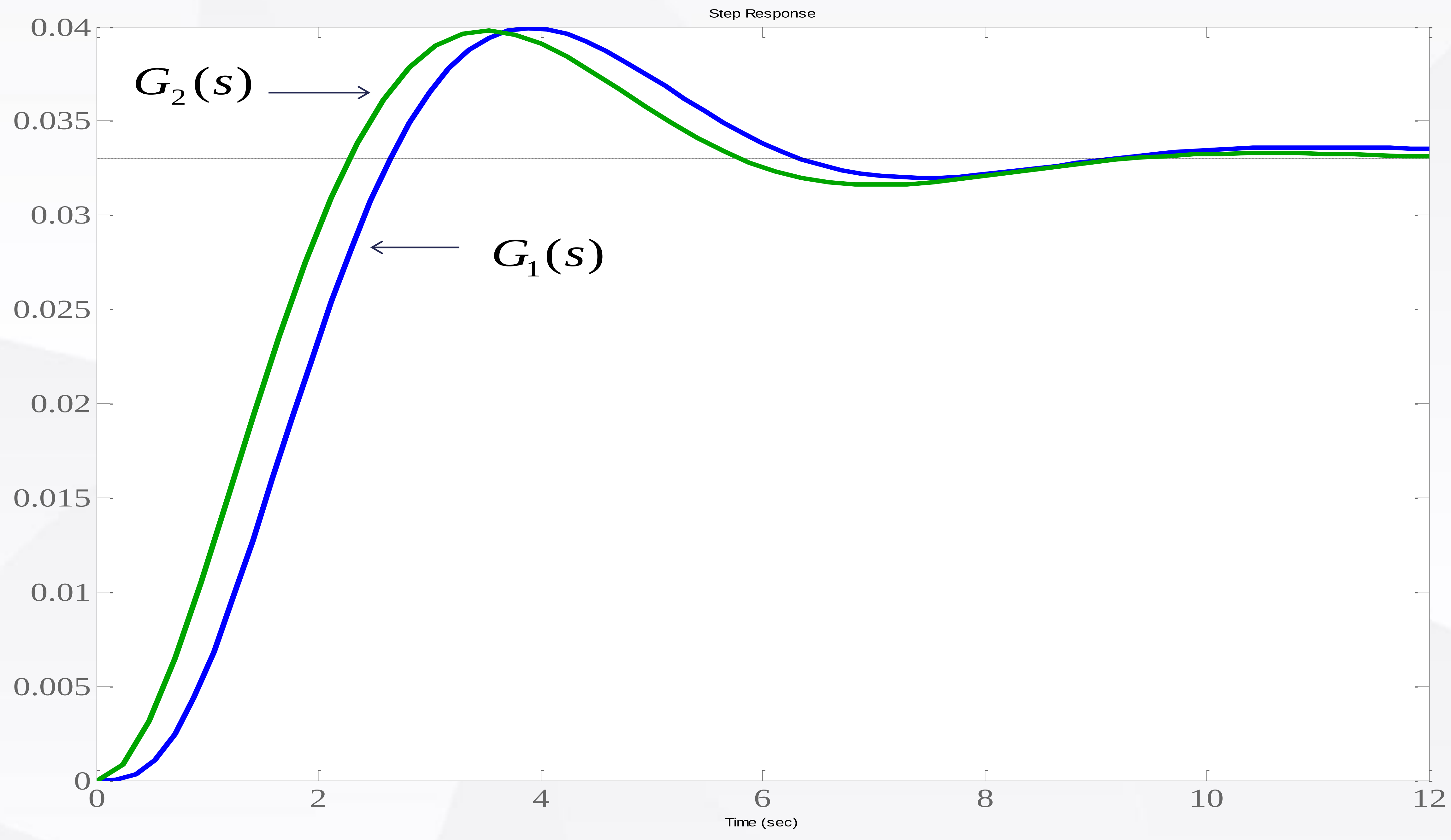
$$G_1(s)=\frac{1}{(s+5)(s+6)(s^2+0.9s+1)}$$

$$G_2(s)=\frac{0.033}{(s^2+0.9s+1)}$$

远离原点的极点所对应的运动成分对于阶跃响应的影响很小，可忽略



零极点图



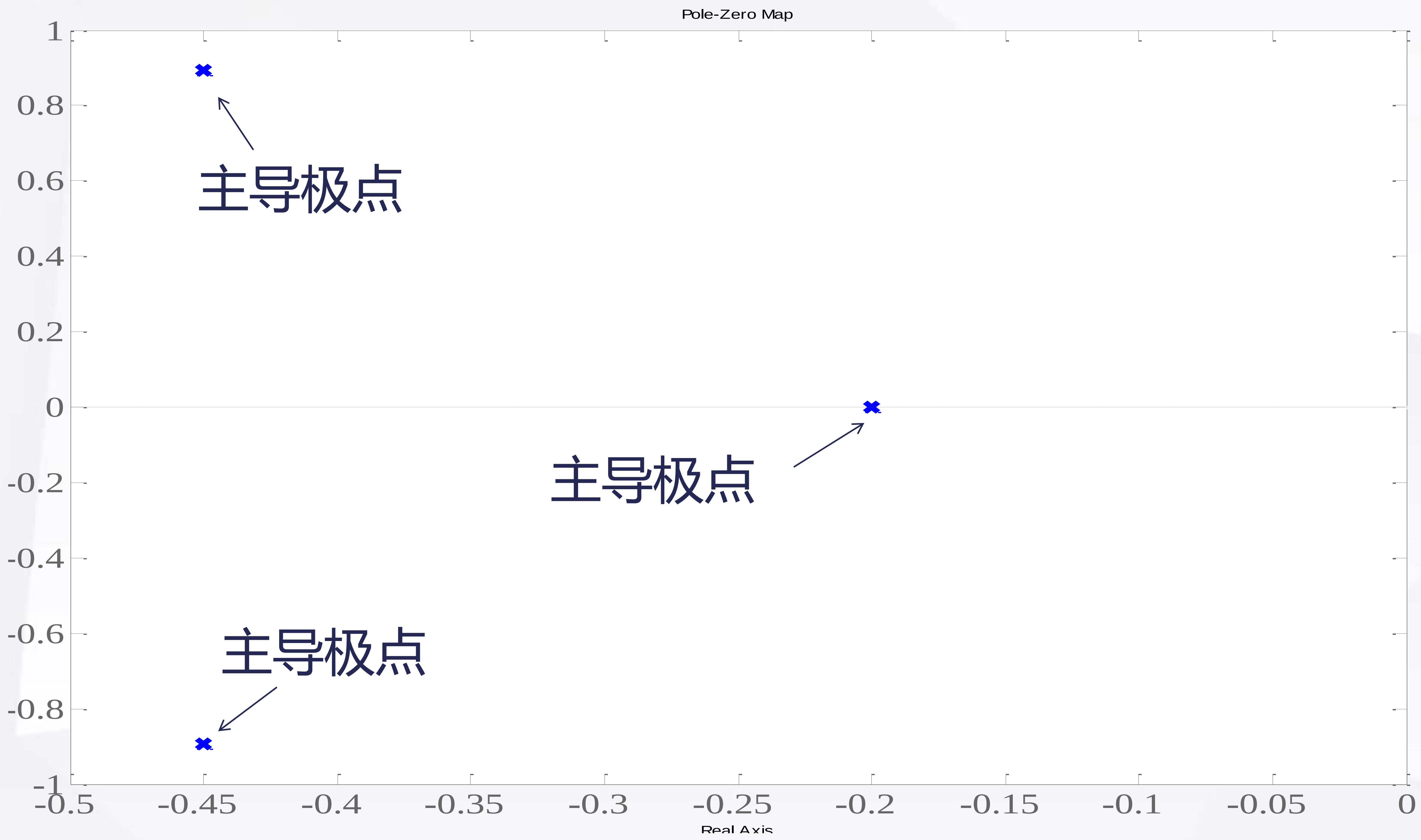
阶跃响应图

高阶系统动态性能的近似表示

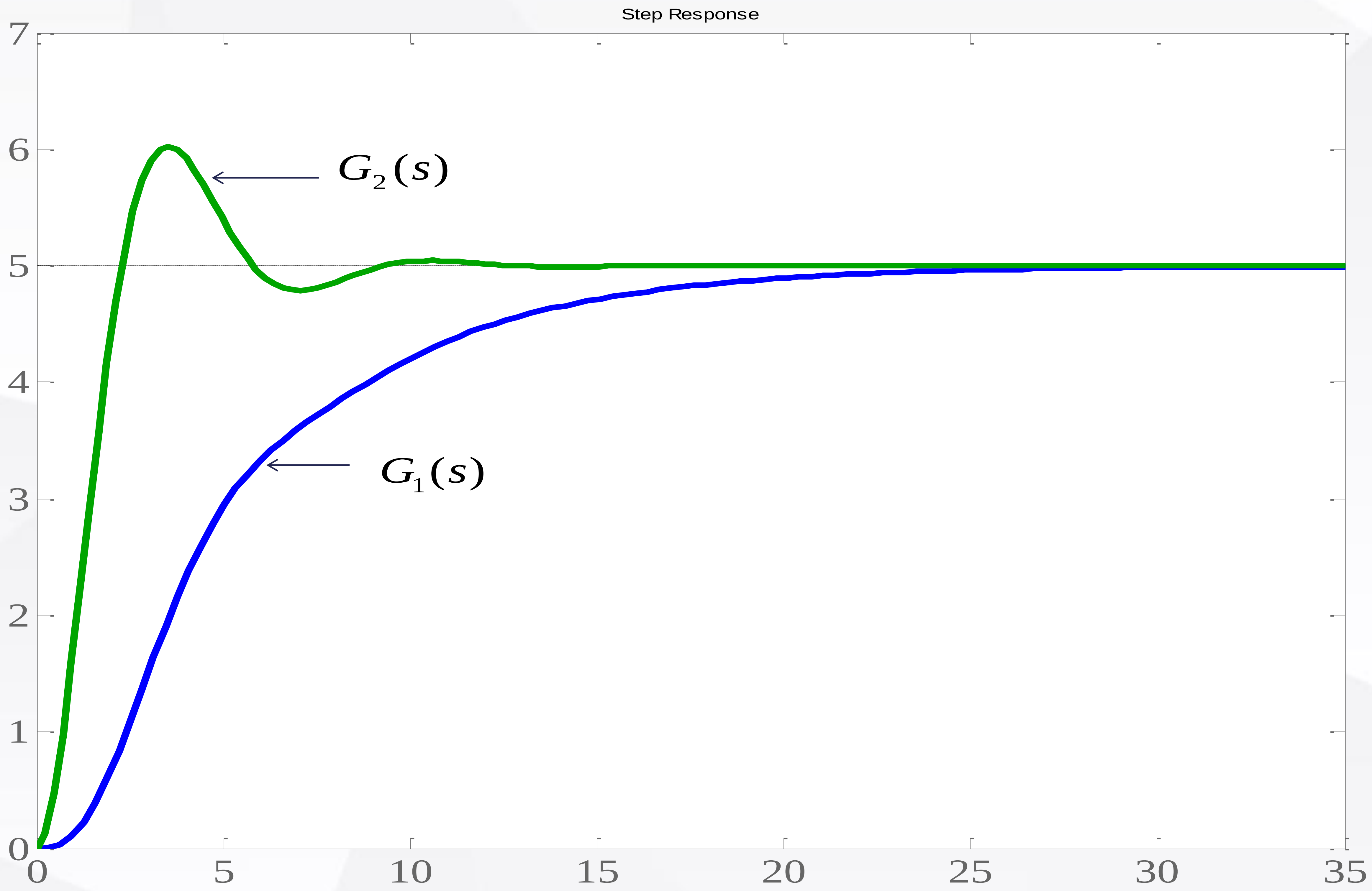
$$G_1(s)=\frac{1}{(s+0.2)(s^2+0.9s+1)}$$

$$G_2(s)=\frac{5}{(s^2+0.9s+1)}$$

靠近原点的极点不能去掉



零极点图



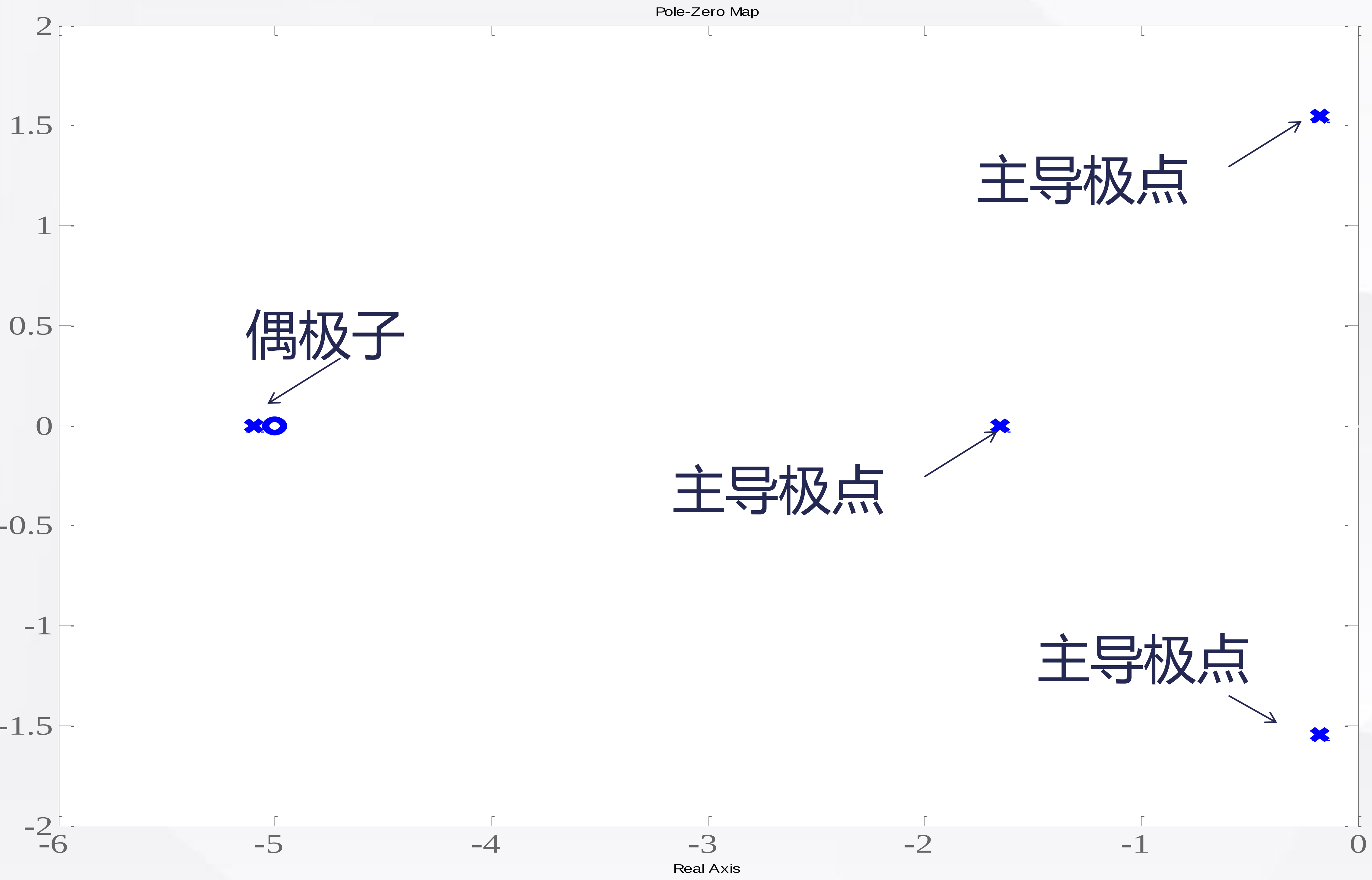
阶跃响应图

高阶系统动态性能的近似表示

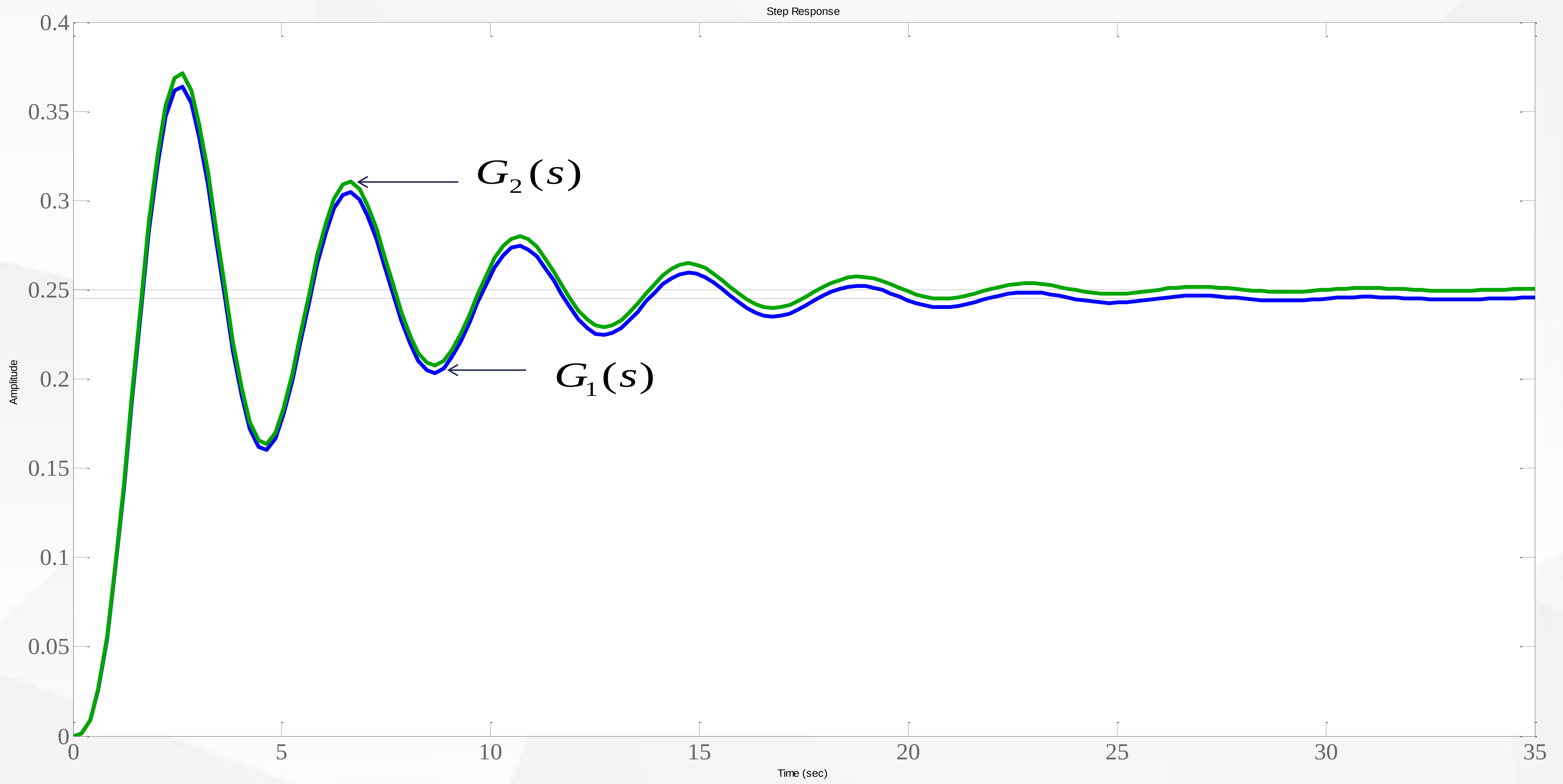
$$G_1(s) = \frac{s+5}{(s+5.1)(s^3+2s^2+3s+4)}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{(s^3+2s^2+3s+4)}$$

如果有一零点与一极点相近，则这个极点所对应的运动成分在阶跃响应中所占的比重很小。



零极点图



阶跃响应图

本章结束