运筹学第六次作业参考答案（20231101）

1．用分支定界法求解下面整数规划问题。

$$
\begin{aligned}
\max\ z = 3x_1 + 2x_2& \\
\text{s.t.}\quad 2x_1 + 3x_2 &\le 14 \\
x_1 + 0.5x_2 &\le 4.5 \\
x_1, x_2 \ge 0, x_1, x_2 &\in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

解：

设原问题的松弛问题为(P1)，解该问题有$\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{13}{4}, \frac{5}{2}\right)^{\mathrm{T}}$，上界$\bar{z}_1 = \frac{59}{4}$。对该问题分别加上约束$x_1 \le 3$和$x_1 \ge 4$形成子问题(P2)和(P3)。

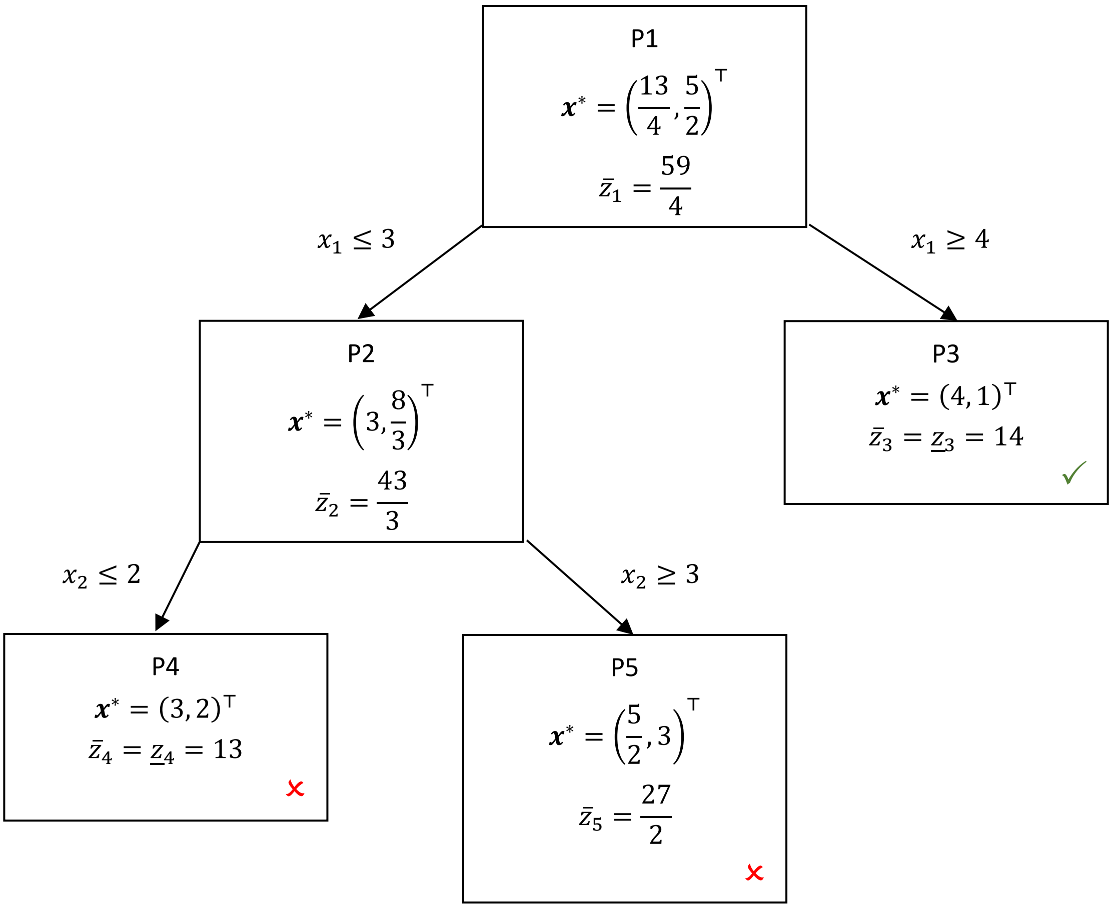
解(P2)有$\boldsymbol{x}^* = \left(3, \frac{8}{3}\right)^{\mathrm{T}}$，上界$\bar{z}_2 = \frac{43}{3}$。该问题分别加上约束$x_2 \le 2$和$x_2 \ge 3$形成子问题(P4)和(P5).

解(P3)有$\boldsymbol{x}^* = (4,1)^{\mathrm{T}}$，上下界$\bar{z}_3 = \underline{z}_3 = 14$。

解(P4)有$\boldsymbol{x}^* = (3,2)^{\mathrm{T}}$，上下界$\bar{z}_4 = \underline{z}_4 = 13$。由于$\bar{z}_4 < \underline{z}_3$，故剪枝。

解(P5)有$\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{5}{2}, 3\right)^{\mathrm{T}}$，上界$\bar{z}_5 = \frac{27}{2}$。由于$\bar{z}_5 < \underline{z}_3$，故剪枝。

综上可得原问题最优解为$\boldsymbol{x}^* = (4,1)^{\mathrm{T}}$，　$z^* = 14$。树状图如下：



2. 某大学运筹学专业硕士生要求课程计划中必须选修两门数学类，两门运筹学类和两门计算机类课程。该专业所有可选课程及其归类如下表所示：

注：凡归属两类的课程选修后可认为两类中各选修了一门课程。

课程名称	**所属归类**
微积分	数学类
计算机程序设计	计算机类
运筹学	数学类，运筹学类
数据结构	数学类，计算机类
管理统计	数学类，运筹学类
计算机模拟	计算机类，运筹学类
预测	数学类，运筹学类

此外，有些课程必须学习了先修课程才能选修，如修计算机模拟必须先学习计算机程序设计。所有要求先修课程的选修课及其对应的先修课程如下表所示：

课程名称	**对应先修课程**
计算机模拟	计算机程序设计
数据结构	计算机程序设计
管理统计	微积分
预测	管理统计

现在希望知道一个硕士生最少应选修几门课程（及其对应的课程名称）才能满足上述要求。请列出求解该问题的整数线性规划模型。

解：

设$x_1, x_2, \ldots, x_7$分别按顺序表示以上 7 门课程的选修情况，其中$x_i = 1$表示选修第i门课程，$x_i = 0$表示不选第i门课程。希望选修课程数目最少，即目标函数为 $\min z = \sum_{i=1}^{7} x_i$，约束条件包含两个方面：

1) 课程数量的约束：要求至少选修两门数学类，两门运筹学类和两门计算机类课程，则有

$$x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \geq 2$$
$$x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 2$$
$$x_2 + x_4 + x_6 \geq 2$$

2) 先修课程的关系约束：例如“数据结构x_4”的先修课程是“计算机程序设计x_2”，那么当$x_4 = 1$时，必须有$x_2 = 1$，这个条件可以表示为$x_4 \leq x_2$。根据表格可以列出所有的先修关系约束

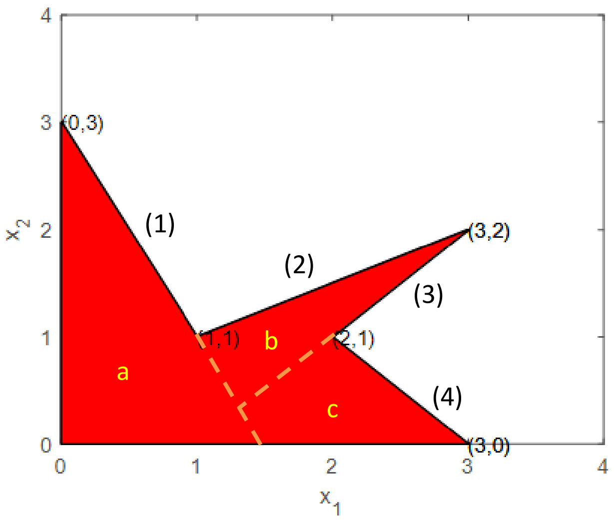
$$x_6 \leq x_2$$
$$x_4 \leq x_2$$

$$x_5 \le x_1$$
$$x_7 \le x_5$$

综上，问题的 0-1 规划模型为

$$\min\ z = \sum_{i=1}^{7} x_i$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_7 \ge 2 \\ & x_3 + x_5 + x_6 + x_7 \ge 2 \\ & x_2 + x_4 + x_6 \ge 2 \\ & x_2 - x_6 \ge 0 \\ & x_2 - x_4 \ge 0 \\ & x_1 - x_5 \ge 0 \\ & x_5 - x_7 \ge 0 \\ & x_i \in \{0, 1\}, i = 1,2,\dots,7 \end{aligned}$$

3. 将 $\max_{x\in\Omega} x_1 + x_2$ 表示成混合整数线性规划，其中集合Ω为下图红色所示区域。



解:

四条直线方程为

$$2x_1 + x_2 = 3 \tag{1}$$
$$-x_1 + 2x_2 = 1 \tag{2}$$
$$x_1 - x_2 = 1 \tag{3}$$
$$x_1 + x_2 = 3 \tag{4}$$

设$y_i \in \{0,1\}, i = 1,2,3$，$M$为充分大的正数。a, b, c 三个子区域取并集即可组

成红色区域。由于并集允许有重叠的区域，所以上图虚线区域实际是下面描述的 a, b, c 区域的子集。

区域 a:

$$2x_1 + x_2 \le 3 + y_1 M$$

区域 b:

$$-x_1 + 2x_2 \le 1 + y_2 M$$
$$x_1 - x_2 \le 1 + y_2 M$$

区域 c:

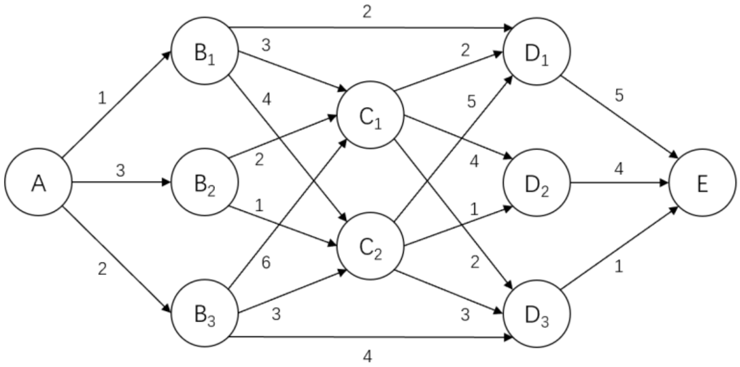
$$-x_1 + x_2 \le -1 + y_3 M$$
$$x_1 + x_2 \le 3 + y_3 M$$

红色区域内任一点只有一个区域约束起作用，故$y_1 + y_2 + y_3 = 2$，综上得到最终混合整数规划模型为

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 \le 3 + y_1 M \\ & -x_1 + 2x_2 \le 1 + y_2 M \\ & x_1 - x_2 \le 1 + y_2 M \\ & -x_1 + x_2 \le -1 + y_3 M \\ & x_1 + x_2 \le 3 + y_3 M \\ & y_1 + y_2 + y_3 = 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \\ & y_i \in \{0,1\}, i = 1,2,3 \end{aligned}$$

注：本题的表示方法不唯一，只要合理划分区域即可。

4. 求下图所示的从 A 到 E 的最短路线及其长度。

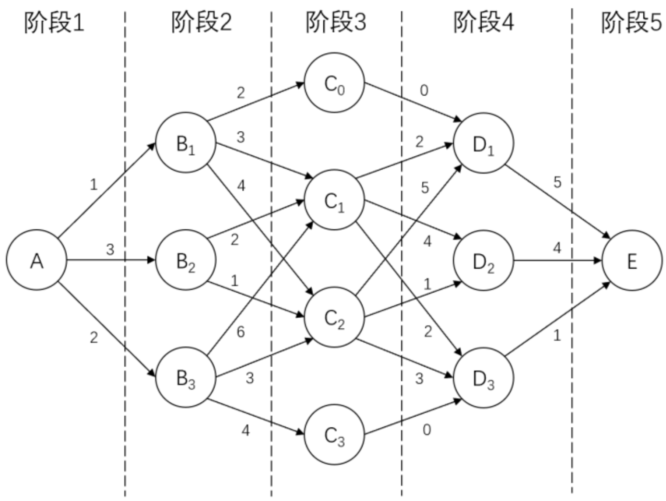


（1）将原问题表示为多阶段决策问题。

（2）分别用逆推法和顺推法求解（1）中多阶段决策问题。

解：

(1) 添加中间状态C_0, C_3，并划分阶段如下



状态集：$S_k = \{A\}, \{B_1, B_2, B_3\}, \dots, \{E\},\ k = 1,2,\dots,5$

决策集：$U_k(s_k) = \{B_1, B_2, B_3\}, \{C_0, C_1, C_2\}, \dots, \{E\},\ \forall s_k \in S_k, k = 1,2,\dots,4$

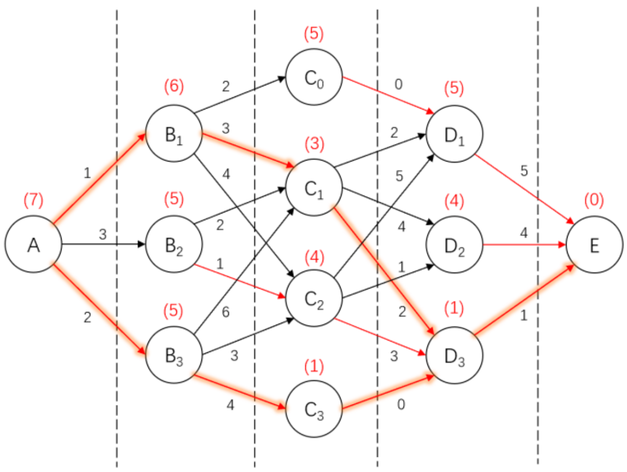
状态转移函数：$T_k(s_k, u_k) = u_k,\ \forall s_k \in S_k, u_k \in U_k(s_k), k = 1,2,\dots,4$

阶段指标函数：$d_k(s_k, u_k),\ \forall s_k \in S_k, u_k \in U_k(s_k),\ k = 1,2,\dots,4$

求策略$p = \{u_1, \dots, u_4\}$，使得下述过程指标函数达到最小

$$d_1(s_1, u_1) + \sum_{k=2}^{4} d_k(T_{k-1}(s_{k-1}, u_{k-1}), u_k)$$

(2) 逆推法：从 E 开始向 A 分阶段求解，得到两条最短路径为 $A \to B_1 \to C_1 \to D_3 \to E$ 和 $A \to B_3 \to D_3 \to E$，长度为 7.



顺推法：从 A 开始向 E 分阶段求解，同样得到两条最短路径为 $A \to B_1 \to C_1 \to D_3 \to E$ 和 $A \to B_3 \to D_3 \to E$，长度为 7.