2016 年运筹学试题

2016.6.20

 命
 题
 王焕刚

 考试形式
 闭 卷

 试卷类型
 B

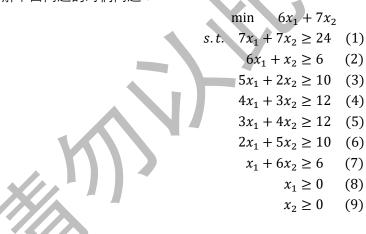
- 一、判断并说明理由
- 1. 负梯度方向是函数值下降最多的方向。
- 2. 用 0.618 法, 采样点个数确定后, 最终区间长度与采样点上的函数值无关。
- 3. 运输问题、指派问题都是最小费用流问题。
- 4. 单纯形法中,不同基矩阵对应的基本解一定不同。
- 5. 用割平面法求解纯整数线性规划,每增加一个割平面,原问题可行域变小。
- 二、求最小生成树的问题。
- 三、线性规划问题求最优解。(此处的数据不是考试中的数据,考试的数据比这简单)

$$\max \quad 12x_1 + 14x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 11x_6$$
s.t. $x_1 + x_4 \le 5$, $x_1 + x_5 \le 2$, $x_1 + x_6 \le 3$

$$x_2 + x_4 \le 1$$
, $x_2 + x_5 \le 4$, $x_2 + x_6 \le 6$

$$x_3 + x_4 \le 8$$
, $x_3 + x_5 \le 1$, $x_3 + x_6 \le 7$

- 四、优化问题min $\{(x_1+1)^2+x_2^2|(x_1-1)^2+x_2^2\geq 1,(x_1-2)^2+x_2^2\leq 4\}$ 的最优解是否满足 KT 条件?
- 五、求解下面问题的对偶问题:



参考解答

—、

- 1. 错误,负梯度是下降最"快"的,下降最"多"理应是 $\hat{x} x^*$ 方向, x^* 表示最优解。
- 2. 正确,0.618 法每一步将区间长度压缩为 0.618 倍,n步之后区间长度为 $(b-a)\cdot 0.618^n$,与函数值无 关。
- 3. 正确,对于运输问题,在产地前添加 v_s 节点、销地后添加 v_t 节点,即可化为最小费用流问题的形式;指派问题是特殊(高度退化)的运输问题,因此也是最小费用流问题。
- 4. 错误,问题发生退化时,多个基矩阵对应同一个基本解。
- 5. 错误,每增加一个割平面,松弛问题可行域变小,原问题可行域不变,始终为一些离散的整点。
- 二、略,用避圈法(Kruskal)算法即可。
- 三、不要蛮力求解。考虑此问题的对偶问题(对偶问题是线性规划问题标准形式、含有等式约束和非负约束),其对偶问题的系数矩阵符合运输问题的形式,因此用运输问题的算法求解对偶问题。

注意几点:标准型线性规划问题的对偶问题形式、运输问题系数矩阵与产(销)量和费用的关系、用贪心算法获取运输问题的一个初始基本可行解、运输问题对偶变量的含义(运输问题的对偶变量 u_i, v_j 就是此处的 x_k ?)

参考答案: $z^* = 68$, $x^* = [3,5,2,-4,-1,0]^T$,最优解可能不唯一。

四、用图形法容易获得最优解 $x^* = (0,0)^T$,根据 KT 条件验证即可。这里 x^* 无法使起作用的不等式约束梯度 线性无关,但有可能满足 KT 条件的公式。

注意,根据《运筹学》教材的定义,KT 条件应该只是一组等式,至于"起作用的不等式约束梯度线性无关"是否为 KT 条件的一部分,请考试前请教老师确认。

五、用图形法,作出原问题的可行域,比较容易能发现原问题最优解为 $x^* = \left(\frac{12}{7}, \frac{12}{7}\right)^T$,发现,原问题约束 (1)(4)(5)是紧的,其它约束都是松的。根据互补松弛定理,对偶变量中,只有 y_1, y_4, y_5 可能是松的(不为 0),其它对偶变量都是紧的(等于 0)。因此,对偶问题的约束条件化为关于 y_1, y_4, y_5 三个变量的两个等式约束。再由 $y^* = x^* = 24y_1 + 12y_4 + 12y_5$,又可以获得一个方程。然而这三个方程的秩为 2,因

此对偶问题有无穷多最优解。对偶问题的解为 $y^* = \left(t, 0, 0, \frac{3}{7} - t, \frac{10}{7} - t, 0, 0, 0, 0\right)^T, 0 \le t \le \frac{3}{7}$ 。