

自动控制理论：第十四周作业

邓梅子文 2020011141

Exercise 14.1. 给定如下被控对象传递函数

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{K}{(s-1)(s+5)} & \text{b)} & \frac{K}{(s+1)^4} & \text{c)} & \frac{K(s^2+1)}{(s+1)^3} \\ \text{d)} & \frac{K(s+0.5)}{s^3+s^2+1} & \text{e)} & \frac{K(s+2)}{(s^2+6s+10)(s^2+2s+4)} & \text{f)} & \frac{K(s^2+2s+5)}{s(s+2)(s+3)} \end{aligned}$$

其中增益 K 由 0 变化到 $+\infty$ ，试画出上述系统在单位负反馈结构下的根轨迹；如果根轨迹穿过虚轴，则求出使闭环系统稳定的增益范围。

Solution. 有：

$$G_{\text{闭}} = \frac{G_{\text{开}}}{1 + G_{\text{开}}}.$$

因此：

a) $G_{\text{CL}} = \frac{K}{s^2+4s+K-5}$ ，闭环特征方程为： $s^2 + 4s + K - 5 = 0$ ，稳定的增益范围为： $(5, +\infty)$ 。

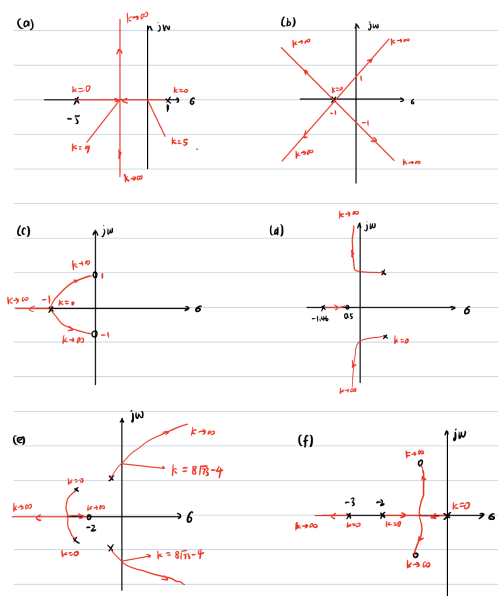
b) $G_{\text{CL}} = \frac{K}{(s+1)^4+K}$ ，闭环特征方程为： $(s+1)^4 + K = 0$ ，稳定的增益范围为： $[0, 1)$ 。

c) 开环时有 $z_1 = j, z_2 = -j, p_1 = -1$ ，从而容易绘制出草图。

d) 渐近线为 $\sigma = -0.25$ ，使闭环系统稳定的增益范围为 $(2, \infty)$ 。

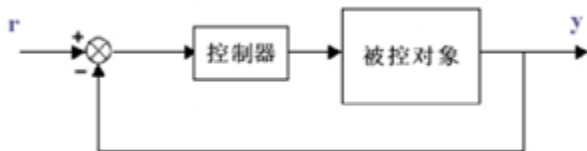
e) 开环时有 $z_1 = -2, p_1 = -3 + j, p_2 = -3 - j, p_3 = -1 + j\sqrt{3}, p_4 = -1 - j\sqrt{3}$ ，稳定的增益范围为： $[0, 8\sqrt{3} - 4)$ 。

f) 有 $z_1 = -1 + j2, z_2 = -1 - j2, p_1 = 0, p_2 = -2, p_3 = -3$ 。上面六问的图像如下所示。



□

Exercise 14.2. 串联校正闭环系统如图:

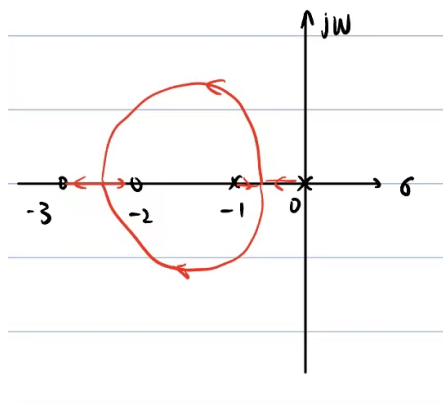


其中被控对象的传递函数为 $G_p(s) = \frac{s+3}{s(s+1)}$, 控制器的传递函数为 $G_c(s) = K(s+2)$, $K \geq 0$ 。试作该系统的根轨迹图, 并说明 K 在什么范围内取值时系统为过阻尼系统? K 在什么范围内取值时系统为欠阻尼系统?

Solution. 其开环传递函数为:

$$G(s) = G_c(s) \cdot G_p(s) = \frac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)}.$$

从而 $z_1 = -2, z_2 = -3, p_1 = 0, p_2 = -1$, 其根轨迹如图所示:



之后解出其分离点与会合点, 有:

$$\frac{dK}{ds} = 0.$$

故:

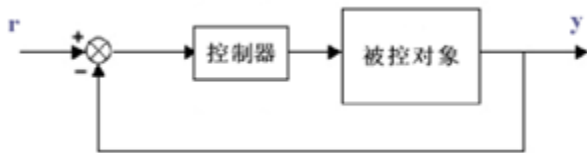
$$s_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, s_2 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

对应的有:

$$k_1 = 0.072, k_2 = 13.93.$$

因此: 当 $K \in (0, 0.072) \cup (13.93, +\infty)$ 时, 系统过阻尼; $K \in (0.072, 13.93)$ 时, 系统欠阻尼。□

Exercise 14.3. 串联校正闭环系统如图:



其中被控对象的传递函数为 $G_p(s) = \frac{4}{s(s+2)}$, 控制器取超前校正装置, 传递函数为 $G_c(s) = \frac{K(s+1)}{(s+p)}$, $K \geq 0$.

- (1) 试确定该校正装置的参数 K 和 p , 使得校正后的主导极点满足 $\omega_n = 4\text{rad/s}$, $\zeta = 0.5$.
- (2) 求校正后的静态速度误差系数 K_v , 并简要说明超前校正装置传递函数的零点和极点的位置对静态速度误差系数的影响。

Solution. (1) 期望的主导极点: $s_d = -2 \pm j2\sqrt{3}$, 又有:

$$G_c(s_d)G_p(s_d) = -1.$$

根据相角条件可以解出:

$$\arg(G_c(s_d)G_p(s_d))^\circ \Rightarrow p = 2.86.$$

再根据幅值条件有:

$$\left| \frac{4K(s+1)}{s(s+p)(s+2)} \right|_{s_d=-2 \pm j2\sqrt{3}j} = 1 \Rightarrow K = 3.43.$$

(2) 有:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_c(s)G_p(s) = 7.4s^{-1}.$$

超前校正装置使零极点左移时, K_v 会增大。

□

Exercise 14.4. 串联校正闭环系统如图：



其中被控对象的传递函数为 $\frac{10}{s(s+2)(s+5)}$. 试设计校正装置 $G_c(s)$, 使闭环系统主导极点位于 $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$, 且静态速度误差系数为 $K_v = 50s^{-1}$.

Solution. 有：

$$G_P(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+5)}$$

其极点位于 $p_1 = -5.52, p_{2,3} = -0.74 \pm 1.12j$ 且 $K_v = 1s^{-1}$. 现在期望的极点 $s_d = -2 \pm 2\sqrt{3}j, K_v = 50s^{-1}$. 与上一题类似, 取 $\frac{z_1}{p_1} = \frac{p_2}{z_2}$, 根据幅值条件和相角条件, 选取 $z_1 = -2, p_2 = -20, K_v = \lim_{s \rightarrow 0} K_c = K_c = 50$. 解得 $z_2 = -1.88, p_2 = -0.188$. 因此：

$$G_c(s) = \frac{50(s+2)(s+1.88)}{(s+20)(s+0.188)}.$$

□