2016 年运筹学试题　　2016.6.20

命　　题　　王焕刚

考试形式　　闭　卷

试卷类型　　B

一、判断并说明理由

1. 负梯度方向是函数值下降最多的方向。
2. 用 0.618 法，采样点个数确定后，最终区间长度与采样点上的函数值无关。
3. 运输问题、指派问题都是最小费用流问题。
4. 单纯形法中，不同基矩阵对应的基本解一定不同。
5. 用割平面法求解纯整数线性规划，每增加一个割平面，原问题可行域变小。

二、求最小生成树的问题。

三、线性规划问题求最优解。（此处的数据不是考试中的数据，考试的数据比这简单）

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 12x_1 + 14x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 10x_5 + 11x_6 \\
s.t.\quad & x_1 + x_4 \le 5,\quad x_1 + x_5 \le 2,\quad x_1 + x_6 \le 3 \\
& x_2 + x_4 \le 1,\quad x_2 + x_5 \le 4,\quad x_2 + x_6 \le 6 \\
& x_3 + x_4 \le 8,\quad x_3 + x_5 \le 1,\quad x_3 + x_6 \le 7
\end{aligned}
$$

四、优化问题$\min\{(x_1+1)^2 + x_2^2 \mid (x_1-1)^2 + x_2^2 \ge 1, (x_1-2)^2 + x_2^2 \le 4\}$的最优解是否满足 KT 条件？

五、求解下面问题的对偶问题：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 6x_1 + 7x_2 \\
s.t.\quad & 7x_1 + 7x_2 \ge 24 \quad (1) \\
& 6x_1 + x_2 \ge 6 \quad (2) \\
& 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \quad (3) \\
& 4x_1 + 3x_2 \ge 12 \quad (4) \\
& 3x_1 + 4x_2 \ge 12 \quad (5) \\
& 2x_1 + 5x_2 \ge 10 \quad (6) \\
& x_1 + 6x_2 \ge 6 \quad (7) \\
& x_1 \ge 0 \quad (8) \\
& x_2 \ge 0 \quad (9)
\end{aligned}
$$

参考解答

一、

1. 错误，负梯度是下降最“快”的，下降最“多”理应是$\hat{x}-x^*$方向，x^*表示最优解。
2. 正确，0.618 法每一步将区间长度压缩为 0.618 倍，n步之后区间长度为$(b-a)\cdot 0.618^n$，与函数值无关。
3. 正确，对于运输问题，在产地前添加v_s节点、销地后添加v_t节点，即可化为最小费用流问题的形式；指派问题是特殊（高度退化）的运输问题，因此也是最小费用流问题。
4. 错误，问题发生退化时，多个基矩阵对应同一个基本解。
5. 错误，每增加一个割平面，松弛问题可行域变小，原问题可行域不变，始终为一些离散的整点。

二、略，用避圈法（Kruskal）算法即可。

三、不要蛮力求解。考虑此问题的对偶问题（对偶问题是线性规划问题标准形式、含有等式约束和非负约束），其对偶问题的系数矩阵符合运输问题的形式，因此用运输问题的算法求解对偶问题。
注意几点：标准型线性规划问题的对偶问题形式、运输问题系数矩阵与产（销）量和费用的关系、用贪心算法获取运输问题的一个初始基本可行解、运输问题对偶变量的含义（运输问题的对偶变量u_i, v_j就是此处的x_k？）
参考答案：$z^*=68, x^*=[3,5,2,-4,-1,0]^{\mathrm{T}}$，最优解可能不唯一。

四、用图形法容易获得最优解$x^*=(0,0)^{\mathrm{T}}$，根据 KT 条件验证即可。这里x^*无法使起作用的不等式约束梯度线性无关，但有可能满足 KT 条件的公式。
注意，根据《运筹学》教材的定义，KT 条件应该只是一组等式，至于“起作用的不等式约束梯度线性无关”是否为 KT 条件的一部分，请考试前请教老师确认。

五、用图形法，作出原问题的可行域，比较容易能发现原问题最优解为$x^*=\left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right)^{\mathrm{T}}$，发现，原问题约束(1)(4)(5)是紧的，其它约束都是松的。根据互补松弛定理，对偶变量中，只有y_1, y_4, y_5可能是松的（不为 0），其它对偶变量都是紧的（等于 0）。因此，对偶问题的约束条件化为关于y_1, y_4, y_5三个变量的两个等式约束。再由$y^*=x^*=24y_1+12y_4+12y_5$，又可以获得一个方程。然而这三个方程的秩为 2，因此对偶问题有无穷多最优解。对偶问题的解为$y^*=\left(t,0,0,\frac{3}{7}-t,\frac{10}{7}-t,0,0,0,0,0\right)^{\mathrm{T}}, 0\le t\le\frac{3}{7}$。