1.(a). 解：无开环零点，开环极点 $p_1=1$ $p_2=-5$

∴根轨迹两个分支，终点均为无穷远

$$\gamma=\frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{2}=\pm 90^\circ$$

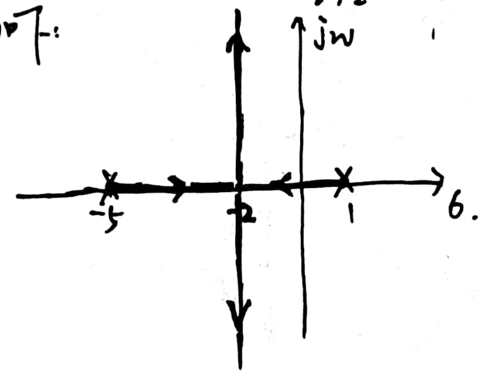
$$\frac{K}{(s-1)(s+5)}+1=0. \quad K=-(s-1)(s+5)$$

$$\frac{dK}{ds}=-(2s+4)=0 \qquad s=-2 \qquad ∴ 会合点为 s=-2$$

$$K=-(s-1)(s+5)\Big|_{s=-2}=9>0$$

$$\phi_{p_1}=\pm 180^\circ-\arg(p_1-p_2)=\pm 180^\circ \qquad \phi_{p_2}=\pm 180^\circ-\arg(p_2-p_1)=0^\circ$$

∴可绘制根轨迹草图如下：



稳定增益范围：$K>5$

(b). 解：无零点，极点 $p_{1,2,3,4}=-1$ 根轨迹四个分支，终点均为无穷远

$$\gamma=\frac{\pm 180^\circ(2k+1)}{4}=\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

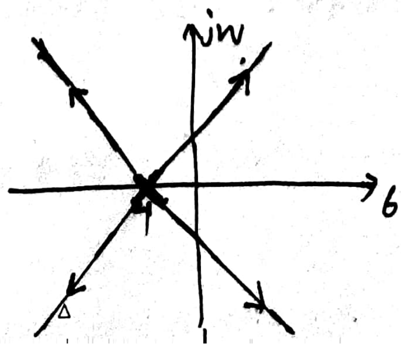
$$K=-(s+1)^4 \qquad \frac{dK}{ds}=-4(s+1)^3=0 \quad s=-1$$

$K=0$ ∴ $s=-1$ 非分离点，但是四条轨迹的共同起点

$$4\phi_{p_{1,2,3,4}}=\pm(2k+1)\pi \qquad ∴ \phi_{p_1}=45^\circ \quad \phi_{p_2}=-45^\circ \quad \phi_{p_3}=135^\circ \quad \phi_{p_4}=-135^\circ$$

∴可绘制根轨迹草图如下：

稳定增益范围：$0\le K<4$



清华大学 TSINGHUA UNIVERSITY **数学作业纸**

班级：自11 姓名：孙捷萃 编号：2021013444 科目：自动控制 第 2 页

(c). 解：零点 $z_1=j$ $z_2=-j$ 极点 $p_{1,2,3}=-1$

∴根轨迹三个分支，终点分别是j，-j，无穷远

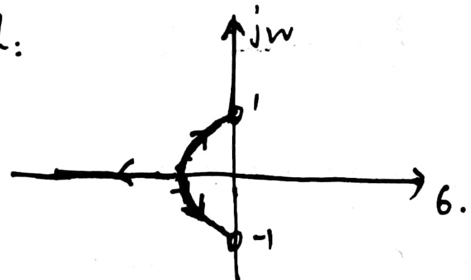
$\gamma = \pm 180°(2k+1) = \pm 180°$ $K=-\frac{(s+1)^3}{s^2+1}$

$\frac{dK}{ds}=-\frac{3(s+1)^2(s^2+1)-2s(s+1)^3}{(s^2+1)^2}=0$ $s=-1$. $K=-\frac{(s+1)^3}{(s^2+1)}\Big|_{s=-1}=0$

∴ s=-1 非分离点，但为三条轨迹的共同起点.

$-3\phi_{p_{1,2,3}}=\pm(2k+1)\pi-(225°+135°)$ ∴ $\phi_1=\pm180°$. $\phi_2=\pm60°$

∴可绘制根轨迹图如下：



(d) 解：零点 $z_1=-0.5$，极点 $p_1=-1.47$ $p_{2,3}=0.23\pm0.79j$.

∴根轨迹三个分支，终点分别有一个是-0.5，另两个为无穷远.

$\gamma=\frac{\pm180°(2k+1)}{2}=\pm90°$ $K=-\frac{s^3+s^2+1}{s+0.5}$

$\frac{dK}{ds}=-\frac{(3s^2+2s)(s+0.5)-s^3-s^2-1}{(s+0.5)^2}=0.$ $s=0.4179$

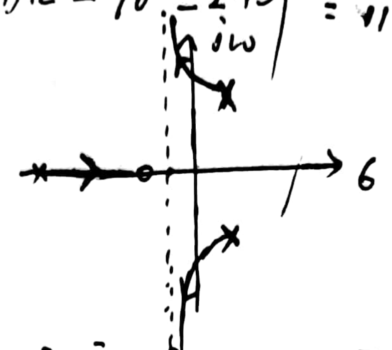
$K=-\frac{s^3+s^2+1}{s+0.5}\Big|_{s=0.4179}=-1.359<0$ ∴不存在分离点、会合点.

$\sigma_a=\frac{-1.47+0.23\times2+0.5}{2}=-0.25$

$\phi_{p_1}=0°$. $\phi_{p_2}=47.3°\pm(2k+1)\pi-90°-24.9°=112.4°$

$\phi_{p_3}=-112.4°$.

∴可控制根轨迹草图如下：



稳定增益范围 $K>2$

(2). 解：零点 $z_1=-2$. 极点 $p_{1,2}=-3\pm j$ $p_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}j$

∴ 根轨迹四个分支，终点有一个是-2，另三个为无穷远.

$\gamma=\frac{\pm180°(2k+1)}{3}=\pm60°, 180°$. $\sigma_a=\frac{2-2-6}{3}=-2$

$K=-\frac{(s^2+6s+10)(s^2+2s+4)}{s+2}$ $s_{1,2}=\frac{-6\pm2\sqrt{3}}{3}$

$K_1=-14.78<0$ $K_2=6.78>0$. ∴会合点是 $\frac{-6-2\sqrt{3}}{3}$

$\phi_{p_1}=135°\pm(2k+1)\pi-90°-(180°+20.1°)-(90°+53.8)$

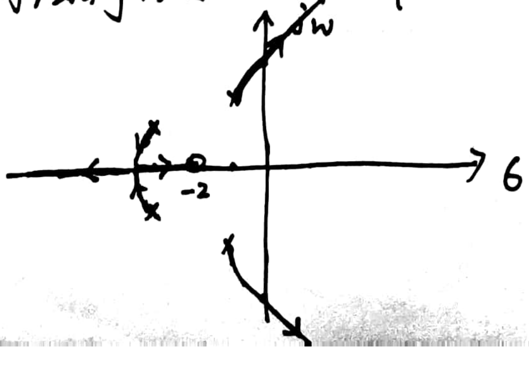
$=-118.9°$ $\phi_{p_2}=118.9°$

$\phi_{p_3}=60°\pm(2k+1)\pi-90°-20.1°-53.8=76.1°$ $\phi_{p_4}=-76.1°$

$K(j\omega+2)+(j\omega)^4+8(j\omega)^3+26(j\omega)^2+44j\omega+40=0$

$\omega_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{2}(\sqrt{8\sqrt{73}+40})}{4}\approx\pm3.68$. $K=8\sqrt{73}-4$

∴可控制根轨迹草图如下：



稳定增益范围 $K<8\sqrt{73}-4$

清华大学 TSINGHUA UNIVERSITY **数学作业纸**

班级：自11　姓名：孙捷[illegible]　编号：2021013444　科目：自动控制　第4页

(f) 解：$z_{1,2}=-1\pm 2j$　$p_1=0$　$p_2=-2$　$p_3=-3$.

∴根轨迹三个分支，终点为 $-1+2j$, $-1-2j$, 无穷远

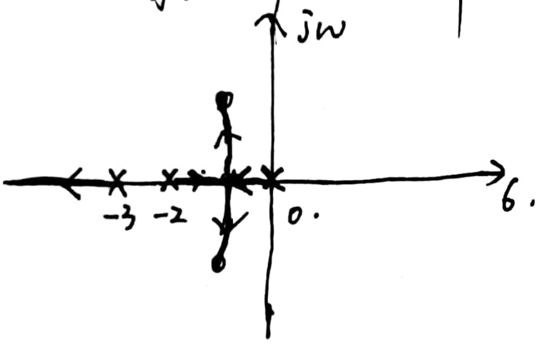
$\gamma=\frac{\pm 180°(2k+1)}{1}=180°$　　$K=-\frac{s(s+2)(s+3)}{s^2+2s+5}$

$\frac{dk}{ds}=0$.　$s=-0.82$ 时成立，且 $K\geq 0$.　∴分离点是 -0.82

$\phi_{p_1}=\pm(2k+1)\pi-180°-180°=180°$.

$\phi_{p_2}=\pm(2k+1)\pi-180°=0°$.　$\phi_{p_3}=\pm(2k+1)\pi=180°$

∴可绘制根轨迹草图如下：



2. 解：$G_{开}(s)=\frac{K(s+2)(s+3)}{s(s+1)}$　$z_1=-2$　$z_2=-3$　$p_1=-1$　$p_2=0$

∴根轨迹两个分支，终点分别为 -2, -3.

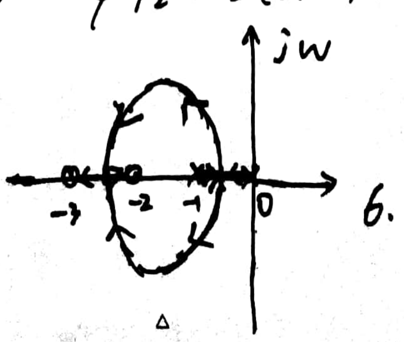
$K=-\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}$　$\frac{dk}{ds}=0$.

$s_1=\frac{-3+\sqrt{3}}{2}$　$K_1=7-4\sqrt{3}>0$.　$s_2=\frac{-3-\sqrt{3}}{2}$　$K_2=7+4\sqrt{3}>0$.

∴ s_1 为　点，s_2 为　点.

$\phi_{p_1}=\pm(2k+1)\pi-180°=0°$　$\phi_{p_2}=\pm(2k+1)\pi=180°$.

∴可绘制根轨迹草图如下：



∴ $K<7-4\sqrt{3}$ 或 $K>7+4\sqrt{3}$ 时 系统为欠阻尼系统

$7-4\sqrt{3}<K<7+4\sqrt{3}$ 时 为过阻尼系统.

3. 解：(a) 期望的主导极点为 $s_d = -2 \pm 2\sqrt{3}j$

$$K\left|\frac{s_d+1}{s_d+p}\right| = \left|\frac{4}{s_d(s_d+2)}\right|^{-1} = 2\sqrt{3} \qquad \arg\left[\left|\frac{s_d+1}{s_d+p}\right|\right] = 30^\circ$$

$$\therefore p = \frac{20}{7} \qquad K = \frac{24}{7}$$

(b) $$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G_p(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\frac{96}{7}(s+1)}{(s+2)(s+\frac{20}{7})} = \frac{12}{5}\ s^{-1}$$

零点位置距原点越远，K_v越大，极点位置距原点越近，K_v越大。

4. 解：$$G_c(s)G_p(s) = K_c \cdot \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}} \cdot \frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}} \cdot \frac{10}{s(s+2)(s+5)}$$

$\because K_v = 50s^{-1}$ $\therefore K_c = 50$ 令 $T_2 = 10 > 1$.

$|G_c(s_d)G_p(s_d)| = 1$

$$\therefore \left|\frac{s_d+\frac{1}{T_1}}{s_d+\frac{\beta}{T_1}}\right| = \left|\frac{500}{s_d(s_d+2)(s_d+5)}\right|^{-1} = 0.127$$

$$\arg\left[\frac{s_d+\frac{1}{T_1}}{s_d+\frac{\beta}{T_1}}\right] = 180^\circ - \arg\left[\frac{10}{s(s+2)(s+5)}\right] = 180 - 100.9 = 79.1^\circ$$

解得 $T_1 \approx 0.46$ $\beta \approx 14.5$ $\therefore \frac{1}{T_1} \approx 2$.

直接令 $\frac{1}{T_1} = 2$, $\beta = 14.5$，可消掉一个对象极点。

$$\therefore G_c(s)G_p(s) = 50 \cdot \frac{s+2}{s+29} \cdot \frac{s+0.1}{s+\frac{1}{145}} \cdot \frac{10}{s(s+2)(s+5)} = \frac{500(s+0.1)}{s(s+5)(s+29)(s+\frac{1}{145})}$$

解得极点为 $s_1 = -0.103$, $s_2 = -29.68$.

$s_{3,4} = -2.11 \pm 3.45j \approx -2 \pm 2\sqrt{3}j$

又$\because s_1$与闭环零点接近，s_2与原点距远 $\therefore s_1, s_2$非主导

$\therefore$主导极点校正符合预期.