运筹学第三次作业参考答案（20231011）

1. 用两阶段方法求解下述线性规划问题，并完成后附讨论。

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1-4x_2+5x_3-6x_4 \\
s.t.\ & x_1+4x_2-2x_3+8x_4=2 \\
& -x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\
& x_i \geq 0, i=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

讨论：

在应用两阶段方法时可能遇到原问题有可行解，但系数矩阵不是行满秩矩阵的情况，如下面的例子所示，此时会出现什么情况？应该如何处理？

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1-4x_2+5x_3-6x_4 \\
s.t.\ & x_1+4x_2-2x_3+8x_4=2 \\
& -x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1 \\
& 2x_1+2x_2-5x_3+4x_4=1 \\
& x_i\ {}^{3}\ 0, i=1,2,3,4
\end{aligned}
$$

解：

第一阶段，添加人工变量x_5, x_6，得到辅助问题

$$
\begin{aligned}
\max & -x_5-x_6 \\
\text{s.t.}\quad & x_1+4x_2-2x_3+8x_4+x_5=2 \\
& -x_1+2x_2+3x_3+4x_4+x_6=1 \\
& x_i \geq 0, i=1,2,\dots,6
\end{aligned}
$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_5	1	4	-2	8	1	0	2
x_6	-1	2	3	4	0	1	1
	0	6	1	12	0	0	3

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	1/8	1/2	-1/4	1	1/8	0	1/4
x_6	-3/2	0	4	0	-1/2	1	0
	-3/2	0	4	0	-3/2	0	0

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	1/32	1/2	0	1	3/32	1/16	1/4
x_3	-3/8	0	1	0	-1/8	1/4	0
	0	0	0	0	-1	-1	0

第二阶段，去掉人工变量对应的列，目标函数变为$\max 2x_1-4x_2+5x_3-6x_4$，继续迭代

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_4	1/32	1/2	0	1	1/4
x_3	-3/8	0	1	0	0
	65/16	-1	0	0	3/2
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	1	16	0	32	8
x_3	0	6	1	12	3
	0	-66	0	-130	-31

所有检验数均为负数，得到最优解$\boldsymbol{x} = (8,0,3,0)^\top$，最优值为$z_{max} = 31$

讨论：当系数矩阵不是行满秩时，仍然尝试使用两阶段法。第一阶段，添加人工变量x_5, x_6, x_7，得到

$$
\begin{aligned}
&\max -x_5 - x_6 - x_7 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 + x_5 = 2 \\
& -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 = 1 \\
& 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 + x_7 = 1 \\
& x_i \geq 0, i = 1,2,\dots,7
\end{aligned}
$$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_5	1	4	-2	8	1	0	0	2
x_6	-1	2	3	4	0	1	0	1
x_7	2	2	-5	4	0	0	1	1
	2	8	-4	16	0	0	0	4

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_4	1/8	1/2	-1/4	1	1/8	0	0	1/4
x_6	-3/2	0	4	0	-1/2	1	0	0
x_7	3/2	0	-4	0	-1/2	0	1	0
	0	0	0	0	-2	0	0	0

此时没办法再改进，但人工变量x_6, x_7仍在基中，这是因为系数矩阵不是行满秩。解决方法：去掉冗余行对应的人工变量(x_6或x_7)，继续迭代。

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	1/8	1/2	-1/4	1	1/8	0	1/4
x_6	-3/2	0	4	0	-1/2	1	0
	-3/2	0	4	0	-3/2	0	0

该表与之前求解原问题的情况一模一样，继续进行二阶段法即可。

2. 对于线性规划问题

$$\begin{aligned}\max\ & 6x_1 - 2x_2 + 10x_3 \\ s.t.\ & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \le b_i, i = 1, 2 \\ & x_j \ge 0,\ j = 1, 2, 3\end{aligned}$$

其中$b_i \ge 0, \forall i$，引入松弛变量x_4, x_5获得初始顶点，然后进行一步单纯型迭代得到下面的线性规划问题，

$$\begin{aligned}\max\ & \gamma_1 x_1 + \gamma_3 x_3 + \gamma_4 x_4 + \gamma_5 x_5 + 20 \\ s.t.\ & \beta_{11}x_1 + x_2 + 2x_3 + \beta_{14}x_4 = 5 \\ & \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \beta_{24}x_4 + \frac{1}{3}x_5 = \eta \\ & x_j \ge 0, \forall j\end{aligned}$$

1）请指出上述迭代的进出基变量（说明理由）；
2）请确定上述两个模型的参数值。

解：

1) 根据题意先列出这两步的单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_4	a_{11}	a_{12}	a_{13}	1	0	b_1
x_5	a_{21}	a_{22}	a_{23}	0	1	b_2
	6	-2	10	0	0	

(1)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
?	β_{11}	1	2	β_{14}	0	5
?	β_{21}	β_{22}	1/3	β_{24}	1/3	η
	γ_1	0	γ_3	γ_4	γ_5	-20

(2)

由表(1)的检验数行可知，进基变量应为x_1或x_3，出基变量应为x_4或x_5。表(2)x_5列第二行由 1 变为 1/3，说明第二行进行了系数相除的操作，所以出基变量为x_5。观察x_3列，其值不为$(0,1)^\top$，不可能进基。所以进基变量为x_1。

2) 根据上一问的分析，表(2)更新为

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_4	0	1	2	1	0	5
x_1	1	β_{22}	1/3	0	1/3	η
	0	0	γ_3	γ_4	γ_5	-20

(2’)

由于第二行同时除以 3，所以$a_{21} = 3\beta_{21} = 3, a_{22} = 3\beta_{22}, a_{23} = 1, b_2 = 3\eta$。再由表(2’)$x_5$列可知，$x_4$行没有进行加减的操作，所以该行系数没有发生改变，$a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{13} = 2, b_1 = 5$。

表(2’)的检验数可直接计算

$$\gamma_3 = 10 - 6 \times \frac{1}{3} = 8$$
$$\gamma_4 = 0$$
$$\gamma_5 = 0 - 6 \times \frac{1}{3} = -2$$

再由表(2’)x_2列检验数知$0 = -2 - 6\beta_{22}$，得到$\beta_{22} = -1/3, a_{22} = 3\beta_{22} = -1$。根据$6\eta = 20$，得到$\eta = 10/3$，$b_2 = 3\eta = 10$. 综上，所有参数值为

$$a_{11} = 0, a_{12} = 1, a_{13} = 2, b_1 = 5$$
$$a_{21} = 3, a_{22} = -1, a_{23} = 1, b_2 = 10$$
$$\beta_{11} = 0, \beta_{14} = 1$$
$$\beta_{21} = 1, \beta_{22} = -\frac{1}{3}, \beta_{24} = 0, \eta = \frac{10}{3}$$
$$\gamma_1 = 0, \gamma_3 = 8, \gamma_4 = 0, \gamma_5 = -2$$

3. 对于线性规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

1）请指出该可行域是否有顶点；
2）请将其转换为标准形式，再指出标准形式下的可行域是否有顶点，并与 1) 中的结论进行比较；

解：

1) 可行域是$\mathbb{R}^2$上的x_1非负部分区域，画图可知没有顶点。也可以用定义验证，即任给点$(x_1, x_2), x_1 \geq 0$，存在两个点$(x_1, x_2 + 1), (x_1, x_2 - 1)$，使得所给点是两个点的中点，因此没有顶点。

2) 标准形式为

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + x_2^+ - x_2^- \\ \text{s.t.}\quad & x_1, x_2^+, x_2^- \geq 0 \end{aligned}$$

容易验证(0,0,0)是一个顶点。即假设存在$v_1, v_2, \lambda \in [0,1]$使得$(0,0,0) = \lambda v_1 + (1 - \lambda) v_2$，因为$v_1, v_2 \geq 0$，所以只可能$v_1, v_2 = 0$，因此(0,0,0)是一个顶点。

3) 标准形式下的顶点(0,0,0)对应原问题可行域的(0,0)，而我们知道(0,0)不是顶点。在引入松弛变量时，本质上已经将原问题转变成另外一个相关但不同的问题，而新问题就会出现之前所没有的性质。在本例题中，标准形式的维度变得更高，新可行域与原可行域形成多对一的映射关系，例如原可行域(0,0)实际上对应标准形式中无穷多个点。

4. 写出下面线性规划的对偶规划

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 2 \\
& 2x_1 + \ \ x_2 + 6x_3 = 3 \\
& x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0, x_3 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

解：

先将原问题转换为标准形式

$$
\begin{aligned}
-\max\ & -x_1 - 2x_2 - 4(x_3^+ - x_3^-) \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 + 3x_2 + 4(x_3^+ - x_3^-) - x_4 = 2 \\
& 2x_1 + \ \ x_2 + 6(x_3^+ - x_3^-) = 3 \\
& x_1 + 3x_2 + 5(x_3^+ - x_3^-) + x_5 = 5 \\
& x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

得到标准形式下的对偶问题

$$
\begin{aligned}
-\min\ & 2\tilde{y}_1 + 3\tilde{y}_2 + 5\tilde{y}_3 \\
\text{s.t.}\quad & 2\tilde{y}_1 + 2\tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 \geq -1 \\
& 3\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + 3\tilde{y}_3 \geq -2 \\
& 4\tilde{y}_1 + 6\tilde{y}_2 + 5\tilde{y}_3 \geq -4 \\
& -4\tilde{y}_1 - 6\tilde{y}_2 - 5\tilde{y}_3 \geq 4 \\
& -\tilde{y}_1 \geq 0 \\
& \tilde{y}_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

将$-\tilde{y}_1, -\tilde{y}_2, \tilde{y}_3$分别用$y_1, y_2, y_3$替代，化简得到原问题的对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2y_1 + 3y_2 - 5y_3 \\
\text{s.t.}\quad & 2y_1 + 2y_2 - y_3 \leq 1 \\
& 3y_1 + y_2 - 3y_3 \leq 2 \\
& 4y_1 + 6y_2 - 5y_3 = 4 \\
& y_1, y_3 \geq 0, y_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

（请同学们尽量将变量的约束条件设定为非负）