A. LP 基本知识点

1、将一般形式的 LP 变换为标准形式　　　消除不等式约束和符号无限制变量

1） 消除下述不等式约束：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \ \rightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - s_i = b_i, \ s_i \ge 0 \qquad s_i \text{（剩余变量）} \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \rightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i, \ s_i \ge 0 \qquad s_i \text{（松弛变量）} \qquad (2)$$

2） 消除符号无限制变量 x_j：

$$x_j = x_j^+ - x_j^- \ , \qquad x_j^+ \ge 0 \ , \ x_j^- \ge 0$$

2、LP 可行域性质

1）LP 的可行域为多个**超平面**与**半空间**的交集，该集合为凸集，称为多面凸集；

2）对标准形式的 LP 问题，当可行域非空时，可证明其多面凸集一定有顶点，每个顶点至少是 $n-m$ 个超平面的交点（m,n 是系数矩阵 $A^{m\times n}$ 的维数，满足 $n \ge m$）。

3、LP 的 4 个基本定理

1）可行解 $\bar{x}$ 是基本可行解的充要条件是它的正分量所对应的系数矩阵 A 中列向量线性无关。

2） $\bar{x}$ 是基本可行解的充要条件是 $\bar{x}$ 是可行域 D 的顶点。

3）一个标准形式的 LP 问题，若有可行解，则至少有一个基本可行解。

4）若标准形式的 LP 问题有有限的最优值，则一定存在一个基本可行解是最优解。

B. 单纯形法相关知识点

1、 线性规划标准型表示：

$$
\begin{aligned}
\max\ & c^T x \\
\text{s.t.}\ & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

其中 $x \in R^n$， $c \in R^n$， $b \in R_+^m$， $A \in R^{m\times n}$， $\mathrm{rank}(A) = m$。

2、 单纯形表的原理：

将约束矩阵 A 划分为基矩阵 B 和非基矩阵 N，则目标函数和约束矩阵可以写成

$$
\begin{cases} Bx_B + Nx_N = b \\ z = c_N^T x_N + c_B^T x_B \end{cases}, \qquad (1)
$$

将（1）中第一个等式的两边同时乘以 B^{-1}，可以得到

$$
x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N,
$$

把结果带入（1）中第二个等式，可以得到

$$
z = c_N^T x_N + c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) = (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N + c_B^T B^{-1}b 。 \qquad (2)
$$

定义检验数 $\sigma^T = c_N^T - c_B^T B^{-1}N$，则 $z + \sigma^T x_N = c_B^T B^{-1}b$。所以，式（1）可以写成

$$
\begin{cases} x_B + \quad B^{-1}Nx_N = B^{-1}b \\ 0 + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N = z - c_B^T B^{-1}b \end{cases}
$$

可以用单纯形表表示为:

	x_B	x_N	RHS
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
	0	σ^T	$z - c_B^T B^{-1}b$

此时，令 $x_N = 0$ ，可以得到 $x_B = B^{-1}b$，即当前的基本可行解。此时目标函数的值为

$z = c_B^T B^{-1}b$ 。

3、 基本可行解的表示：

我们用 P_k 来表示 A 的第 k 列，即 $A=(P_1,P_2,\cdots,P_n)$；同时用 p_{ij} 来表示 A 的第 i 行第 j 列元素，即

$$A=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix}。$$

在实际单纯形法迭代中，用 $j(1), j(2),\cdots, j(m)$ 表示 m 个基变量对应的系数矩阵列下标，即 $B=(P_{j(1)},P_{j(2)},\cdots,P_{j(m)})$。用 $j(m+1), j(m+2),\cdots, j(n)$ 表示 $n-m$ 个非基变量对应的系数矩阵列下标，即 $N=(P_{j(m+1)},P_{j(m+2)},\cdots,P_{j(n)})$。用 $\hat{x}$ 表示当前基本可行解，则等式约束的表达式为：

$$x_B+\hat{P}_{j(m+1)}x_{j(m+1)}+\cdots+\hat{P}_{j(n)}x_{j(n)}=\hat{x}_B$$

其中，$x_B=(x_{j(1)},x_{j(2)},\cdots,x_{j(m)})^T$，$\hat{P}_{j(t)}=B^{-1}P_{j(t)}=(\hat{p}_{1j(t)},\hat{p}_{2j(t)},\cdots,\hat{p}_{mj(t)})$，$\forall t$，$\hat{x}_B=B^{-1}b=(\hat{x}_{j(1)},\hat{x}_{j(2)},\cdots,\hat{x}_{j(n)})$。检验数 σ 的第 k 个分量为

$$\sigma_k=c_{j(m+k)}-c_B^TB^{-1}P_{j(m+k)}=c_{j(m+k)}-c_B^T\hat{P}_{j(m+k)},1\le k\le n-m。$$

4、 单纯形方法的 3 个基本定理

1）若检验数向量 $\sigma\le 0$，则对应的基本可行解 $\bar{x}$ 是原问题的最优解。（**最优性准则**）

2）若检验数向量 σ 的第 k 个分量 $\sigma_k>0$，而向量 $\hat{P}_{j(m+k)}=B^{-1}P_{j(m+k)}\le 0$，则原问题无界。

3）对非退化的基本可行解 $\hat{x}$，若检验数向量 σ 中存在 $\sigma_k>0$，而其相应的向量 $\hat{P}_{j(m+k)}$ 至少有一个正分量，则能找到一个新的基本可行解 $\bar{x}$，使 $c^T\bar{x}>c^T\hat{x}$。

5、 Bland 规则——选择可进（出）基变量中下标最小的变量进（出）基。

注意： 此处一定是可进基变量和可出基变量。

6、 单纯型表法一步迭代操作详解

依据当前的单纯型表，进行下一步迭代时，分为以下步骤：

1）判断当前解是否为最优解。根据式 $z = \sigma^T x_N + c_B^T B^{-1} b$。如果 $\sigma_{\max} = \max\{\sigma\} \le 0$，显然此时的解已经是最优解（因为 $x_N \ge 0$），停止迭代。

Ps：在表中的操作是判断 σ^T 的分量是否全部小于等于零，若是，则达到最优解。

2）如果 $\sigma_{\max} = \max\{\sigma\} > 0$，按照 Bland 法则，则选取非负检验数中下标最小的变量。假设 σ 中下标最小的变量是第 k 个元素 $\sigma_k = \sigma_{\max}$。此时 x_N 中的第 k 个元素 $x_{j(m+k)}$ 即为选定的进基变量。

3）确定出基变量。设 $l = arc\min_i\{\frac{\hat{x}_{j(i)}}{\hat{p}_{ij(m+k)}} \mid \hat{p}_{ij(m+k)} > 0, 1 \le i \le m\}$，则出基变量为 $x_{j(l)}$。同样，若有多个 l 满足要求，按照 Bland 法则，选取编号最小的 l。

Ps：在表中的操作就是将 $\hat{p}_{lj(m+k)}$ 通过初等变换化为 1。

4）得到新的基矩阵和基本可行解，转到步骤 1）。

C. 对偶问题及对偶单纯型法相关知识点

1、 如何写出原问题（P）的对偶问题（D）？原问题-对偶问题变换规律：

1） 每个对偶变量对应原问题的一个约束

2） 原问题是等式约束则对偶变量是自由变量（无非负约束）

3） 原问题是不等式约束则对偶变量有非负约束

4） 原问题变量和对偶问题的约束同样符合上述规律

原问题（P）		对偶问题（D）
$\max\ c^T x$		$\min\ b^T \omega$
$s.t.\ \ a_i^T x = b_i$	$i = 1,\dots,p$	$s.t.\ \ \omega_i$是自由变量
$a_i^T x \le b_i$	$i = p+1,\dots,m$	$\omega_i \ge 0$
$x_j \ge 0$	$j = 1,\dots,q$	$A_j^T \omega \ge c_i$
x_j 自由变量	$j = q+1,\dots,n$	$A_j^T \omega = c_i$

2、 弱对偶定理

若x，ω分别是原始及其对偶问题的可行解，则

$$c^T x \le b^T \omega \tag{1}$$

3、 强对偶定理

若x，ω分别是原始及其对偶问题的可行解，则x，ω分别是原始、对偶问题最优解的充要条件是：

$$c^T x = b^T \omega \tag{2}$$

4、 互补松弛定理

若x，ω分别是原始及其对偶问题的可行解，则x，ω分别是原始、对偶问题最优解的充要条件是，对一切 $i = 1,\dots,m$ 和$k = 1,\dots,n$有：

$$\begin{aligned} &\omega_i (a_i^T x - b_i) = 0 \\ &(c_k - \omega^T P_k) x_k = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

5、 对偶单纯型法

基本思想：在保证对偶可行性（$\sigma \le 0$）的前提下找到满足原可行性的基。

1） 对偶单纯型表法**应用条件**

对偶单纯型法适用于 $c \ge 0$ 的下述线性规划问题

$$\min\{c^T x \mid s.t.\ Ax \ge b, x \ge 0\} \tag{4}$$

原问题没有明显的初始可行基，需要引入人工变量，但有明显的对偶可行基，用对偶单纯型法不需要类似两阶段法的人工变量。

2） 对偶单纯型表法**应用步骤**

第 1 步 列出初始单纯型表（它含有原始问题的一个基本解 $\hat{x}$ 和对偶问题的一个可行解 σ）；

第 2 步 求 $r = arc\min_k \{\hat{x}_{j(k)} \mid k = 1,\ldots,m\}$。

第 3 步 若 $\hat{x}_{j(r)} \ge 0$，停止。已找到原始问题的最优解 $x_{opti} = \hat{x}$。否则转第 4 步。

第 4 步 若 $\hat{p}_{rj(m+k)} \ge 0, k = 1,\ldots,n-m$ 则原问题无可行解，停止。否则转第 5 步。

第 5 步 求 $l = arc\min_k \{\frac{\sigma_k}{\hat{p}_{rj(m+k)}} \mid \hat{p}_{rj(m+k)} < 0, k = 1,\ldots,n-m\}$。

第 6 步 以 $\hat{p}_{rj(l)}$ 为转轴元作一次旋转变换（单纯形迭代），转第 2 步。

D. LP 问题有解性判断

1、 单纯型法判断

1）问题有**最优解**：若检验数向量$\sigma \le 0$，则对应的基本可行解$\bar{x}$是原问题的最优解。

2）问题无界：若检验数向量σ的第k个分量$\sigma_k > 0$，而向量$\hat{P}_{j(m+k)} = B^{-1}P_{j(m+k)} \le 0$。

3）问题无可行解：两阶段法。

2、 对偶问题判断

原始 \ 对偶	有最优解	问题无界	无可行解
有最优解	√	×	×
问题无界	×	×	√
无可行解	×	√	√

3、 对偶单纯型法判断

1） 原问题有**最优解**：根据强对偶性，如果$x_{B\min} = \min\{x_B\} \ge 0$（在单纯型表中是$B^{-1}b \ge 0$），则此时的解已是最优解（因为此解也是原可行解）。

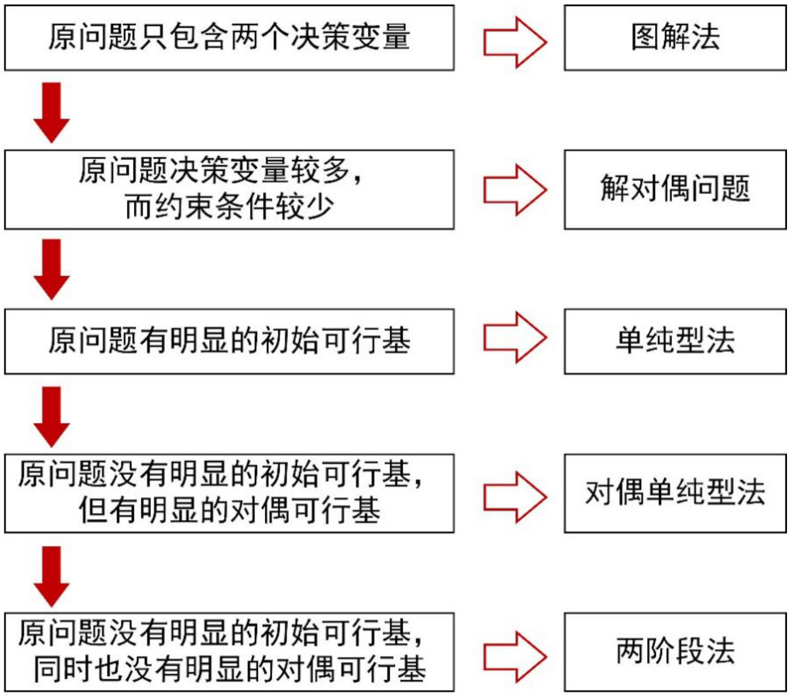
2） 原问题无**可行解**：出基变量行的变量系数全为正数。

注：如果 LP 问题能使用对偶单纯型法求解，则原问题的解不会出现无界的情况！原因如下：

使用对偶单纯型法的前提是存在对偶可行基，而该对偶可行基所对应的目标值即为原问题的界。（弱对偶性）

E. 如何选择合适的方法求解 LP 问题

一般情况下，可按下述流程选择合适的 LP 问题求解方法：



F. 影子价格、参数敏感性分析及参数线性规划

1. 影子价格

1）概念

已知原问题及其对偶问题如下：

原问题

$$\max\ c^T x$$
$$s.t.\ \ Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

对偶问题

$$\min\ b^T y$$
$$s.t.\ \ Ay \ge c$$

设对偶问题最优解为 $\hat{y}$，由强对偶性知，原问题的最优目标值为：

$$b^T \hat{y} = \sum_{i=1}^{m} b_i \hat{y}_i \tag{1}$$

所以，原问题最优目标关于 b_i 的偏导数分别是 $\hat{y}_i$，说明增加一个单位 b_i ，最优目标值可望增加 $\hat{y}$，故称 $\hat{y}$ 为 b_i 的影子价格。

2）物理意义

已知对偶问题的最优解为 $\hat{y} = c_B^T B^{-1}$，于是非基变量的检验数可写成：

$$\sigma_k = c_{j(m+k)} - c_B^T B^{-1} P_{j(m+k)} = c_{j(m+k)} - \hat{y}^T P_{j(m+k)} = c_k - \sum_{i=1}^{m} \hat{y} p_{ij(m+k)}, 1 \le k \le \tag{2}$$

上式的物理意义为：

σ_k =单位 k 产品的价格 – 按影子价格计算的资源的总成本

若 $\sigma_k > 0$，价格大于成本，应继续生产，直至所有检验数均非正。

2. 参数敏感性分析

参数敏感度分析中的关键步骤是从最终单纯型表中找到 B^{-1} ：

只要将最初的单位向量所在列的最终数据按单位向量在单位矩阵中的位置排好即可得到 B^{-1}。

3. 参数线性规划——分析 LP 问题最优值随参数λ变化情况

1） 目标函数中含参数λ

$$
\begin{aligned}
&\max\ (c+\lambda c')^T x \\
&s.t.\ Ax=b \\
&\quad\ \ x\ge 0
\end{aligned}
$$

a） 固定λ的数值解 LP 问题；

b） 确定保持当前最优基不变的λ的区间；

c） 确定λ在上述区间附近的最优基，回 b)。

2） 约束条件右边常数含参数λ

$$
\begin{aligned}
&\max\ c^T x \\
&s.t.\ Ax=b+\lambda b' \\
&\quad\ \ x\ge 0
\end{aligned}
$$

其对偶问题为：

$$
\begin{aligned}
&\min\ (b+\lambda b')^T y \\
&s.t.\ Ay\ge c
\end{aligned}
$$

由于对偶问题的可行集不变，因此可用对偶单纯型法确定最优目标函数值和参数λ的关系。