# 清华大学 数学作业纸

班级：自11　姓名：孙捷羊　编号：2021013444　科目：自动控制　第 1 页

1. 解：(1) 由上次习题知，系统不能完全可控，但完全能观。

故这一实现不是最小实现

(2) 由于此实现是系统的完全能观实现，

故从中找能控子空间即可。

由上次作业，能控子空间为 $\mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

∴ 最小实现为 $\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$

2. 解：(a) $V(x) = (x_1 + x_2 - x_3)^2 + 3x_2(x_2 - x_3)$

取 $x_1 = -1$ $x_2 = 1$ $x_3 = 0$ 时 $V(x) = 3$，取 $x_1 = 1$ $x_2 = 1$ $x_3 = 2$ 时 $V(x) = -3$

∴ $V(x)$ 不定

(b) $V(x) = -(x_1 - x_2 + x_3)^2 - (\sqrt{2}x_2 + \frac{3\sqrt{2}}{4}x_3)^2 - \frac{71}{8}x_3^2 < 0$.

∴ $V(x)$ 负定

(c) $V(x) = (x_1 + 2x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 \geq 0$

∴ $V(x)$ 半正定

~~3. (a) 解：$A = \begin{pmatrix} 2x_1 - 1 & 1 \\ -2x_1 + 2 & -1 \end{pmatrix}\Big|_{x=0} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$~~

~~特征值 $\lambda_1 = -1 + \sqrt{2}$，$\lambda_2 = -1 - \sqrt{2}$~~

~~∴ 该系统在原点处渐近稳定~~

~~(b) $A = \begin{pmatrix} x_2 - 1 & x_1 \\ -2x_1 + 2 & -1 \end{pmatrix}\Big|_{x=0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$~~

~~$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$~~

~~∴ 该系统在原点处渐近稳定~~

扫描全能王 创建

清华大学 TSINGHUA UNIVERSITY 数学作业纸

班级：自11 姓名：孙捷萃 编号：2021013444 科目：自动控制 第 2 页

3. 解：(a).
$$A=\begin{pmatrix}2x_1-1 & 1\\ -2x_1+2 & -1\end{pmatrix}\Bigg|_{x=0}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\qquad \lambda_1=-1+\sqrt{2}>0,\quad \lambda_2=-1-\sqrt{2}<0$$

∴该系统在原点处不稳定 ∴没有大范围稳定性.

(b)
$$A=\begin{pmatrix}x_2-1 & x_1\\ -2x_1+2 & -1\end{pmatrix}\Bigg|_{x=0}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\qquad \lambda_1=\lambda_2=-1<0$$

∴该系统在原点处渐近稳定

又该系统存在另一平衡点 $x=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\qquad \lambda_1=0\quad \lambda_2=-1$$ ∴渐近稳定性不可判

∴系统在原点处的大范围稳定性不可判

4. 解：
$$|sI-A|=\begin{vmatrix}s & -1 & 0 & 0\\ 0 & s & 1 & 0\\ 0 & 0 & s & -1\\ 0 & 0 & -11 & s\end{vmatrix}=s^2\begin{vmatrix}s & -1\\ -11 & s\end{vmatrix}=s^4-11s^2$$

下面为Routh判据：

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^4$ | 1 | −11 | 0 |
| $s^3$ | 0(4) | 0(−22) | |
| $s^2$ | $-\frac{11}{2}$ | 0 | |
| $s^1$ | 22 | | |
| $s^0$ | 0(ε) | | |

由于有负号出现，故系统不稳定

5. 解：Routh判据：

| | | | |
|---|---|---|---|
| $s^5$ | 1 | 3 | 2 |
| $s^4$ | 4 | 1 | 1 |
| $s^3$ | $\frac{11}{4}$ | $\frac{7}{4}$ | |
| $s^2$ | $-\frac{17}{11}$ | 1 | |
| $s^1$ | $\frac{60}{17}$ | | |
| $s^0$ | 1 | | |

有负号，故不均有负实部

6. 解：Routh判据：

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & b \\ s^2 & a & c \\ s^1 & -\frac{c-ab}{a} & \\ s^0 & c & \end{array}$$

$\therefore a>0,\ c>0,\ \frac{ab-c}{a}>0$ 即 $a>0,\ c>0,\ ab>c$