本章教学内容

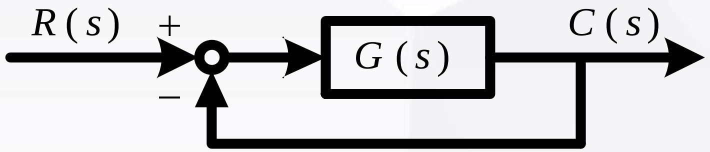
❖ 基本内容

- 根轨迹及其性质
- 根轨迹的绘制
- 根轨迹校正

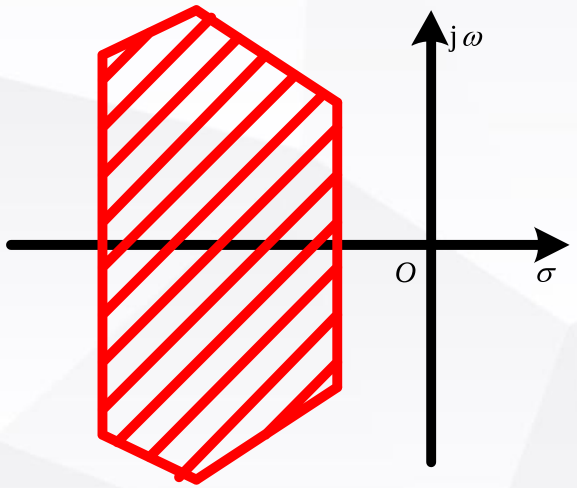
根轨迹及其性质

根轨迹方法简介

好的控制系统分析方法应具备如下特点 ：



- **准确反映实际系统性能**
- **方法简便易用**
- **能指出闭环极点是否位于给定区域**
- **便于预测闭环系统性能**
- **能指出如何变化参数以改善性能**



根轨迹方法简介

各种分析方法的比较

	直接方法 -解微分方程	间接方法 -代数稳定判据	间接方法 -频率响应法
优点	◆ 概念直观，直接反映系统动、静态性能	◆ 便于分析绝对稳定性	◆ 易于预测闭环性能 ◆ 可以测量相对稳定性 ◆ 易于通过调整开环频率响应提高闭环性能
缺点	◆ 计算复杂 ◆ 难以判断性能随参数的变化	◆ 无法分析相对稳定性 ◆ 难以分析闭环极点是否位于给定区域 ◆ 无法为参数选取提供线索	◆ 无法通过开环参数直接预测闭环极点的位置

根轨迹方法简介

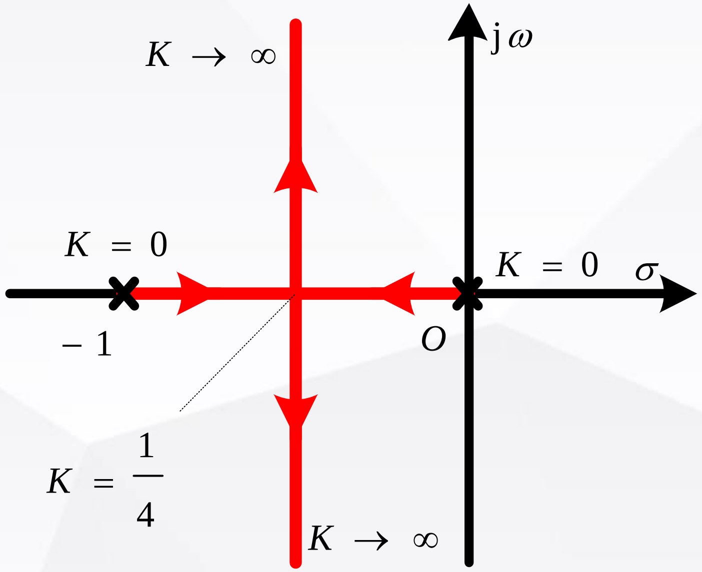
根轨迹：闭环特征值作为开环增益的函数所画出的曲线

例　画出闭环传递函数的根轨迹

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

解:

- **闭环传函** $G_{CL}(s) = \dfrac{K}{s^2 + s + K}$
- **闭环特征方程:** $s^2 + s + K = 0$
- **K 变化 → 闭环极点变化**
- **闭环极点:** $s_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{1-4K}$



$K = 0 \quad \to \quad 0.25 \quad \to \quad \infty$

过阻尼　　欠阻尼

根轨迹方法简介

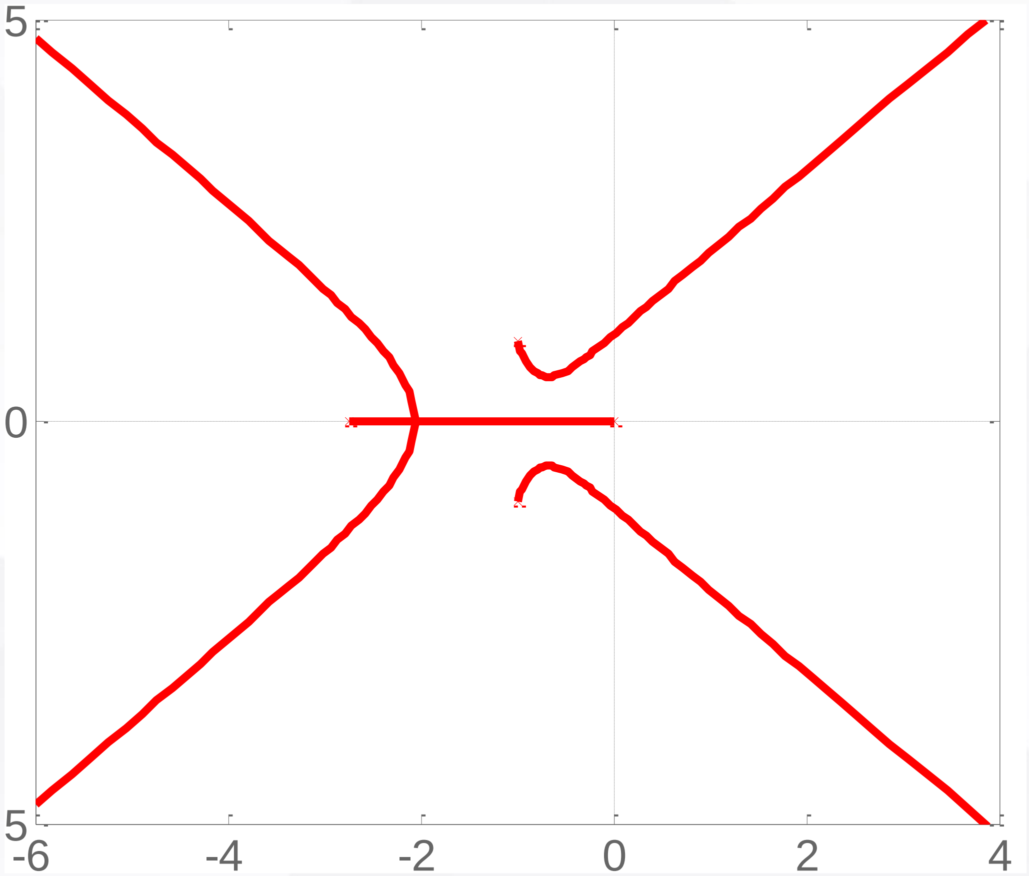
例：用MATLAB软件绘制根轨迹

$$G(s)F(s)=\frac{K}{s(s+2.73)(s^2+2s+2)}$$

$$=K\frac{1}{s^4+4.73s^3+7.56s^2+5.46s}$$

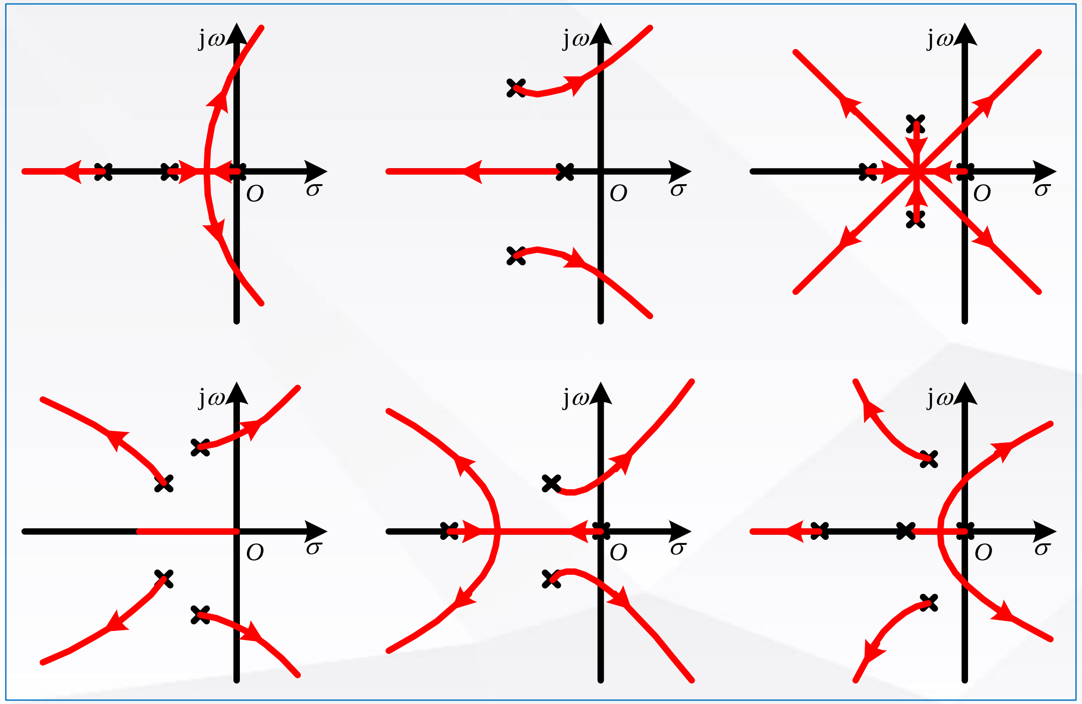
用如下命令

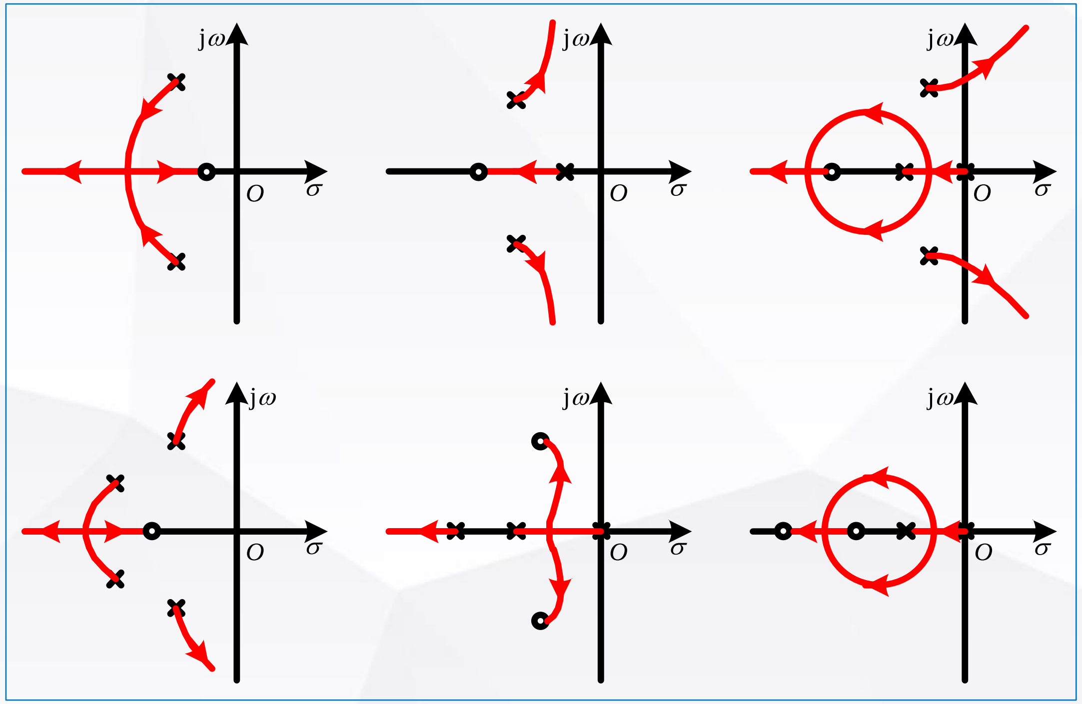
```
num=[1];
den=[1 4.73 7.56 5.46 0];
rlocus(num,den)
```



根轨迹方法简介

◆ 一些典型的根轨迹模式





根轨迹方法简介

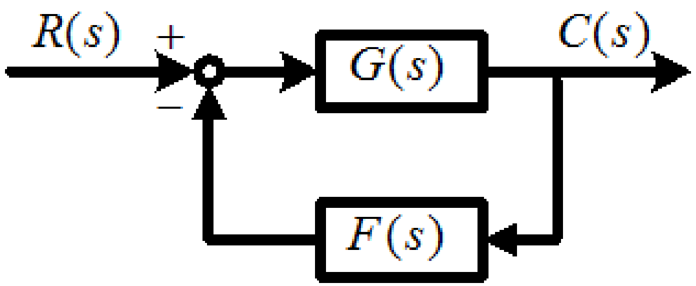
- ♦ 为何要研究根轨迹？ 易于预测闭环性能
- ♦ 如何研究根轨迹?
  - 利用相角和幅值条件分析根轨迹的性质
  - 利用根轨迹的性质绘制草图
  - 基于根轨迹分析控制系统

1. *W. Evans, "Graphical Analysis of Control Systems", Trans. AIEE, 67 (1): 547–551, 1948.*
2. *W. Evans, "Control Systems Synthesis by Root Locus Method", Trans. AIEE, 69 (1): 66–69, 1950.*

根轨迹条件

相角和幅值条件

- 如图对于给定的反馈控制系统，
  考察闭环极点随开环增益的变化：



- 由闭环传递函数

$$G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

可知所有闭环极点均满足

$$G(s)F(s) = -1$$

由此得出根轨迹条件：

- 相角条件 （决定根轨迹的形状）

$$\arg[G(s)F(s)] = \pm(2k+1)\pi, (\, k = 0, 1, 2, \cdots)$$

- 幅值条件 （决定闭环极点在根轨迹上的位置）

$$|G(s)F(s)| = 1$$

根轨迹条件

例1　验证下面例子是否满足幅值和相角条件

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)}\qquad \text{选 } s_1=-0.5+j2$$

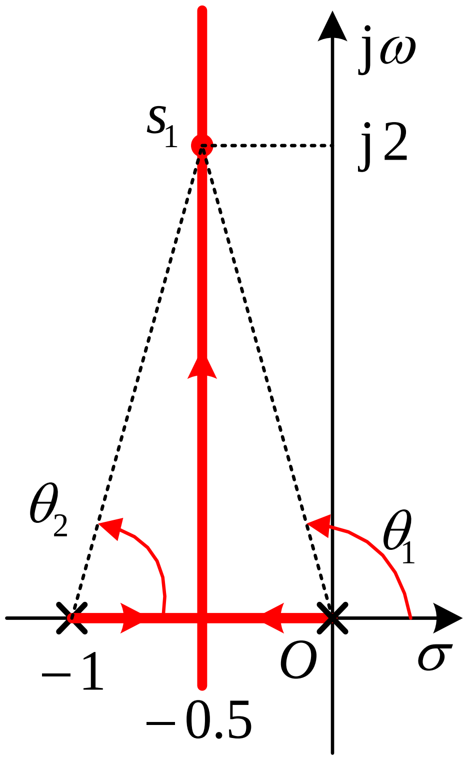
(i) 检验相角条件

$$\arg G(s_1)=\arg\frac{1}{s_1(s_1+1)}$$

$$=-\arg(s_1)-\arg(s_1+1)$$

$$=-(\theta_1+\theta_2)$$

$$=-180^\circ$$



(2) 检验幅值条件

$$|G(-0.5+j2)|$$

$$=\frac{K}{|-0.5+j2||-0.5+j2+1|}$$

$$=\frac{4K}{17}=1$$

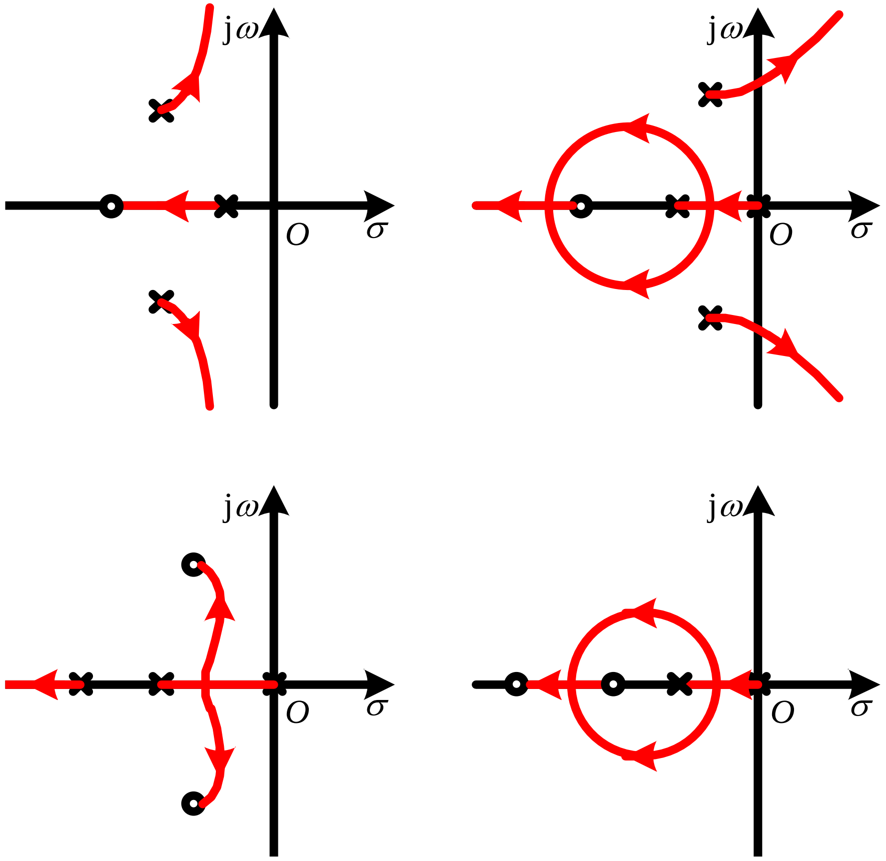
可知该闭环极点对应 $K=\frac{17}{4}$

根轨迹条件

- ◆ **利用幅值条件可以确定：**
  - **根轨迹的分支数**
  - **根轨迹的起点和终点**

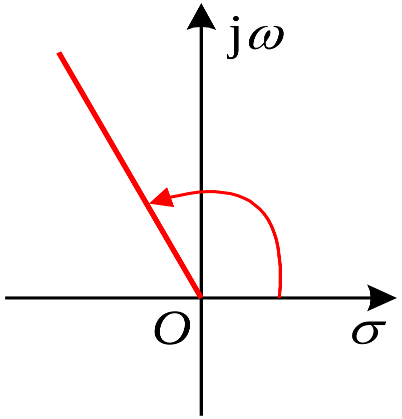
- ◆ **利用相角条件可以确定：**
  - **根轨迹在实轴上的分布**
  - **根轨迹趋于无穷时的渐近线**
  - **根轨迹的入射和出射方向**

- ◆ **利用幅值和相角条件共同确定：**
  - **根轨迹的会合/分离点**



约定1：正实轴的相角为 0°**，正方向为逆时针方向**

约定2：系统为负反馈连接方式，只考虑 $K \geq 0$



根轨迹的性质

将闭环传递函数写成如下标准形式：

$$1+G(s)F(s)=1+K\frac{B(s)}{A(s)}=1+\frac{K(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=0$$

其中 $A(s),B(s)$ 是首一多项式，开环传递函数（$n>m$）包含

n 个极点 $p_1,\cdots,p_n$ 和 m 个零点 $z_1,\cdots,z_m$

- 显然，若 $1+G(s)F(s)=0$，则必有 $1+G(s^*)F(s^*)=0$

故复闭环极点共轭成对出现，根轨迹关于实轴对称，只需考虑s上半平面部分

根轨迹的性质

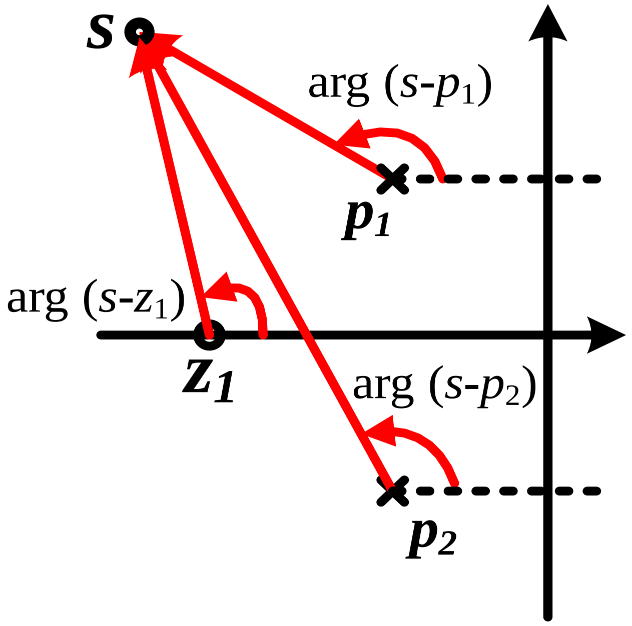
- 根轨迹条件可变形为

$$1+\frac{K(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=0 \Rightarrow \frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=-\frac{1}{K}$$

- 根轨迹满足的相角条件可以表示为：

$$\arg[G(s)F(s)]=\sum_{i=1}^{m}\arg(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\arg\left(s-p_j\right)$$

$$=\pm(2k+1)\times 180°$$



根轨迹的性质

性质1. 起止点和分支数

根轨迹条件：

$$\frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=-\frac{1}{K}$$

- **起点：对应于 $K=0$, 等式右边趋于无穷**

  因此所有开环极点$p_1,\cdots,p_n$都是根轨迹的起始点

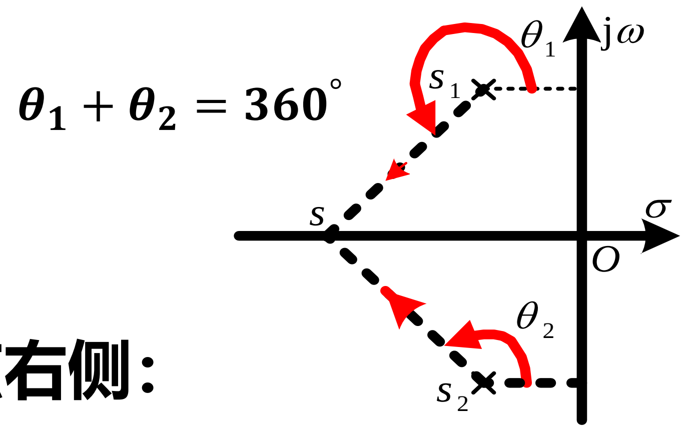
- **终点：对应于$K=\infty$, 等式右边趋于零**

  因此所有开环零点$z_1,\cdots,z_m$都是根轨迹的（有限）终点,
  此外, 由于 $m<n$，$s=\infty$ 也是终点

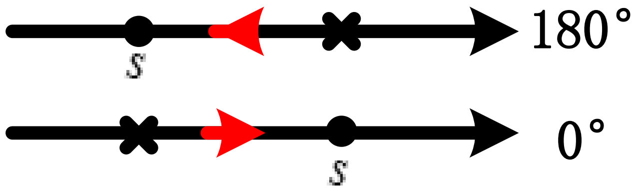
- **分支数：由于根轨迹有n个起点，必然有n个分支,**
  其中m个分支趋于零点，$n-m$个分支趋于无穷

根轨迹的性质

性质2. 实轴上的根轨迹



- **共轭零极点对相角条件无贡献**
- **假设有N 个零极点位于实轴， ℓ 个零极点在测试点右侧：**



$$
\begin{aligned}
&\arg[G(s)F(s)] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \arg(s - z_i) - \sum_{j=1}^{n} \arg(s - p_j) \\
&= \ell \times 180^\circ + (N - \ell) \times 0^\circ = \pm(2k+1) \times 180^\circ \quad \Rightarrow \ \ell \text{ 必为奇数}
\end{aligned}
$$

♦ **画出实轴上的根轨迹**

根轨迹的性质

性质3. 当$s \to \infty$时的渐近线

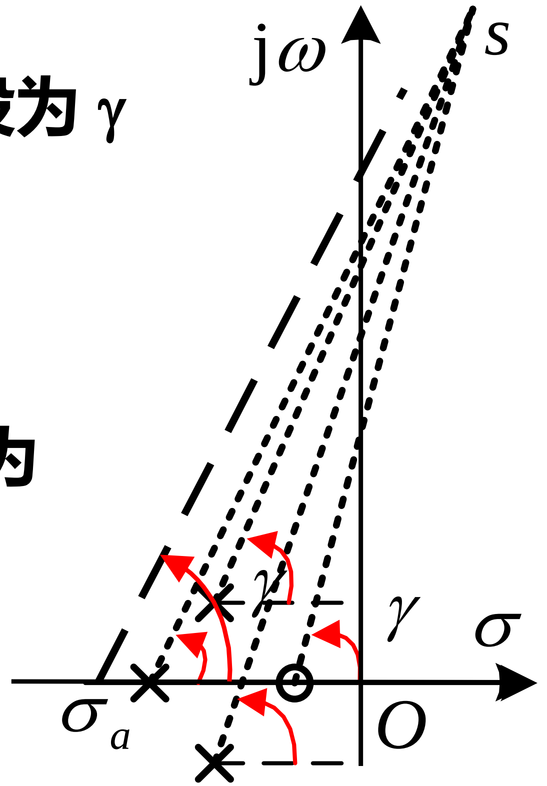
- ♦ **渐近线的相角**
  - 当 $s \to \infty$时, s与所有开环零极点连线相角趋于相同，设为 γ
  - 根据相角条件

$$\arg[G(s)F(s)]|_{s\to\infty} = (m-n)\gamma = \pm(2k+1)\pi$$

可知, 共有 $n-m$条不同的渐近线，它们与实轴的夹角为

$$\gamma = \frac{-(2k+1)\pi}{n-m} \qquad k = 0, 1, \cdots, n-m-1$$

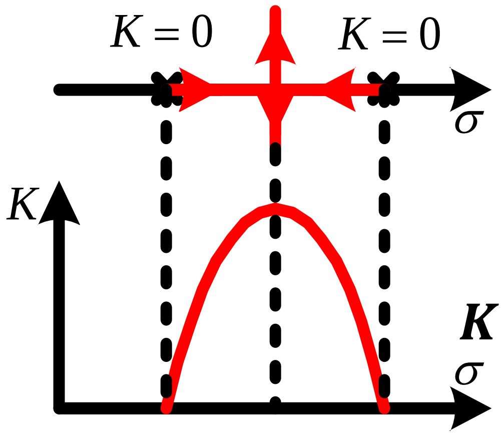
- ♦ **渐近线与实轴的交点** $\sigma_a = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{n} z_i}{n-m}$



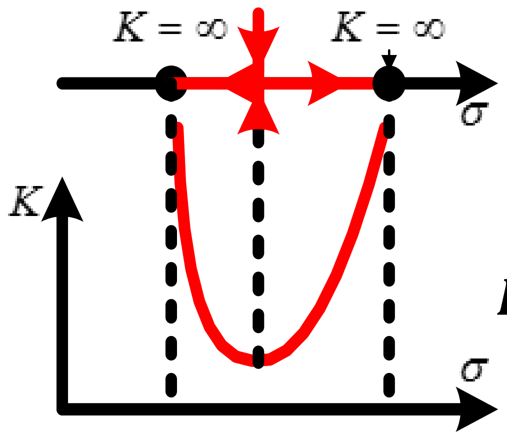
根轨迹的性质

性质4. 分离点和会合点

♦ 实轴上的分离点和会合点



K 在会合点取极大



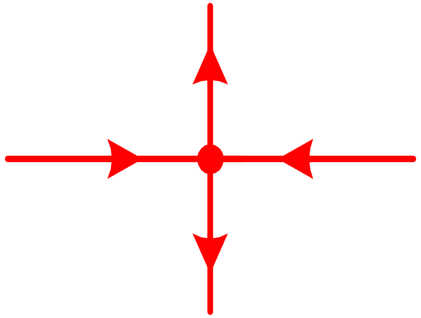
K 在分离点取极小

• 根据闭环系统特征多项式： $A(s)+KB(s)=0 \Rightarrow \quad K=-A(s)/B(s)$

得到必要条件： $$\frac{dK}{ds}=\frac{d}{ds}\left[-\frac{A(s)}{B(s)}\right]=\frac{A(s)B'(s)-A'(s)B(s)}{B^2(s)}=0$$

根轨迹的性质

性质4. 分离点和会合点



等价证明： 分离点和会合点对应于闭环系统特征多项式有重根

- **根据闭环系统特征多项式：** $$f(s) = A(s) + KB(s) = 0 \qquad (1)$$
- **重根满足** $$f'(s) = A'(s) + KB'(s) = 0 \Rightarrow K = -\frac{A'(s)}{B'(s)} \qquad (2)$$
- **式(2)代入式(1) 给出** $$A(s)B'(s) - A'(s)B(s) = 0 \qquad (3)$$
- **等价于：** $$\frac{dK}{ds} = \frac{d}{ds}\left[-\frac{A(s)}{B(s)}\right] = \frac{A(s)B'(s) - A'(s)B(s)}{B^2(s)} = 0 \qquad (4)$$

充分性：还需要验证对应的 $K > 0$

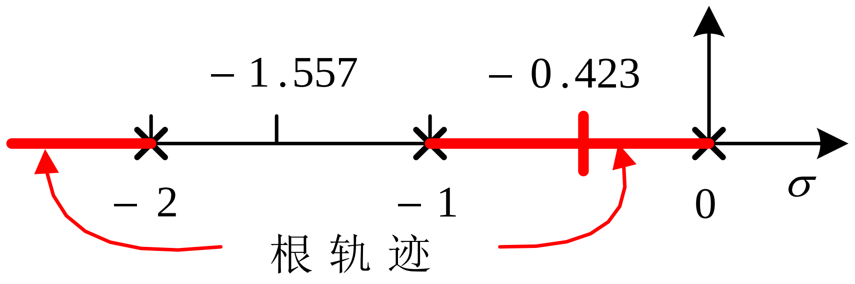
补充公式： $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{d-p_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{d-z_i}$

根轨迹的性质

例： 求分离点和会合点，其中开环传函为 $G(s)F(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(s+2)}$

解：

- 闭环特征方程为 $K=-s(s+1)(s+2)=-s^3-3s^2-2s$
- $\dfrac{dK}{ds}=-3s^2-6s-2=0 \Rightarrow s=-0.423,-1.577$
- 对于 $s=-0.423$ $\quad K=-s(s+1)(s+2)|_{s=-0.423}=0.385>0$
- 对于 $s=-1.577$ $\quad K=-s(s+1)(s+2)|_{s=-1.577}=-0.385<0$
- 于是 $s=-0.423$ 是会合点, 且容易验证-1.557不在根轨迹上



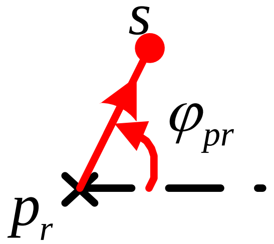
- 思考：三重根情况?

根轨迹的性质

性质5. 复极点的出射角和复零点的入射角

• 思考：重根情况?

♦ 复极点p_r的出射角

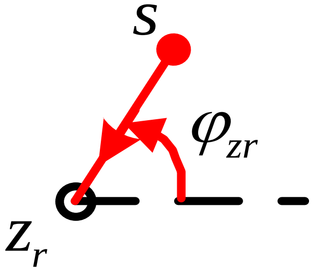


• 在其附近取测试点s，应当满足

$$\arg G(s)F(s)=\sum_{i=1}^{m}\arg(p_r-z_i)-\varphi_{pr}-\sum_{j\neq r}\arg(p_r-p_j)=\pm(2k+1)\pi$$

得到计算公式：$\varphi_{pr}=\pm(2k+1)\pi-\sum_{j\neq r}\arg(p_r-p_j)+\sum_{i=1}^{m}\arg(p_r-z_i)$

♦ 复零点z_r的入射角



• 在其附近取测试点s，应当满足

$$\arg G(s)F(s)=\sum_{i\neq r}\arg(z_r-z_i)+\varphi_{zr}-\sum_{j=1}^{n}\arg\left(z_r-p_j\right)=\pm(2k+1)\pi$$

得到计算公式：$\varphi_{zr}=\pm(2k+1)\pi+\sum_{j=1}^{n}\arg(z_r-p_j)-\sum_{i\neq r}\arg(z_r-z_i)$

根轨迹的性质

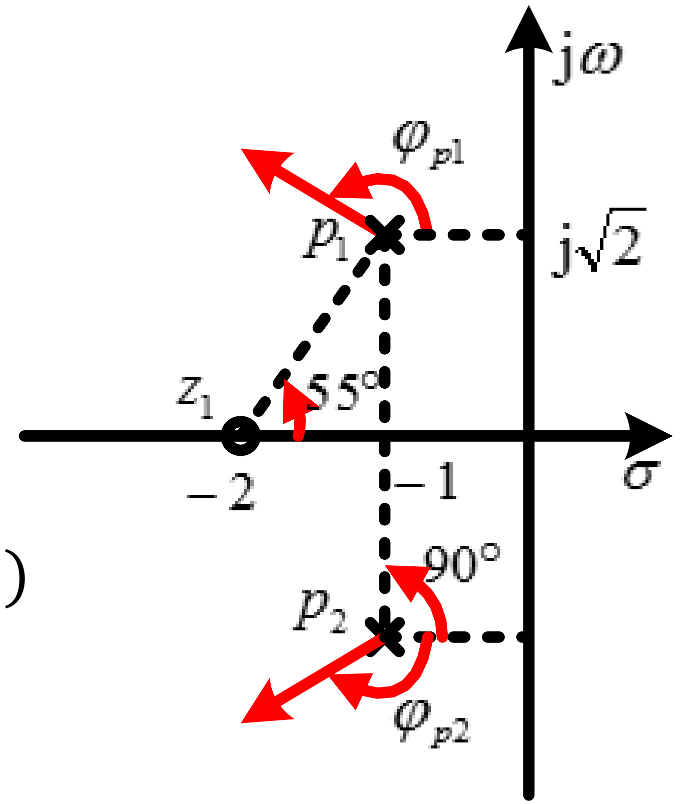
例： **求出射角** $G(s)F(s) = \dfrac{K(s+2)}{s^2+2s+3}$

解： **开环极点为** $p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}$，
开环零点为 $z_1 = -2$

- **根据复极点出射角公式**

$$\varphi_{p1} = \pm 180^\circ(2k+1) - \arg(p_1 - p_2) + \arg(p_1 - z_1)$$
$$= \pm 180^\circ(2k+1) - 90^\circ + 55^\circ$$
$$= 145^\circ$$

$\varphi_{p2} = -145^\circ$ **(由对称性)**



根轨迹的性质

性质6. 根轨迹穿越虚轴的交点

- 重要性：标志着闭环系统稳定状态的改变
- 该交点会指示出临界增益K和相应的振荡频率ω
- 求解方法

(i) 劳斯稳定判据

(ii) 令$s=j\omega$. 求解满足如下方程的的K和ω.

$$\begin{cases}\mathrm{Re}[1+G(j\omega)F(j\omega)]=0\\ \mathrm{Im}[1+G(j\omega)F(j\omega)]=0\end{cases}$$

根轨迹的绘制

根轨迹草图绘制

例1：绘制传递函数为 $G(s)F(s)=\frac{K(s+2)}{s^2+2s+3}$ **根轨迹草图**

解：(i) 开环极点： $p_{1,2}=-1\pm j\sqrt{2}$

开环零点： $z_1=-2$

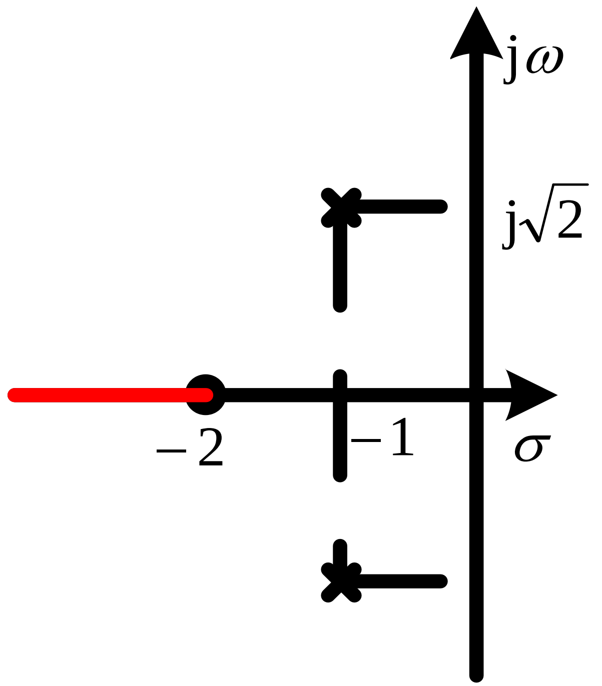
因此根轨迹共有2个分支，

起点为$-1\pm j\sqrt{2}$**，终点为**-2**和无穷远**

(ii) 实轴上的根轨迹: $(-\infty,-2)$

(iii) 渐近线 $(n-m=1,k=0)$

$$\gamma=\frac{\pm180^{\circ}(2k+1)}{n-m}=\frac{\pm180^{\circ}(2k+1)}{1}=-180^{\circ}$$



根轨迹草图绘制

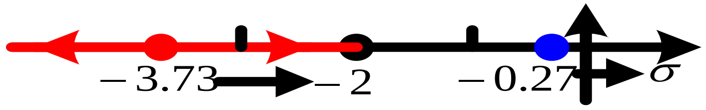
(iv) 分离点:

$$f(s) = s^2 + 2s + 3 + K(s+2)$$

$$K = -\frac{A(s)}{B(s)} = -\frac{s^2+2s+3}{s+2}$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{s^2+4s+1}{(s+2)^2} = 0 \rightarrow s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3} = -3.732, -0.268$$

- **检查增益的符号** $K = -\left.\frac{s^2+2s+3}{s+2}\right|_{s=-3.732} = 5.4641 > 0$
- -3.732**在根轨迹上，是分离点**

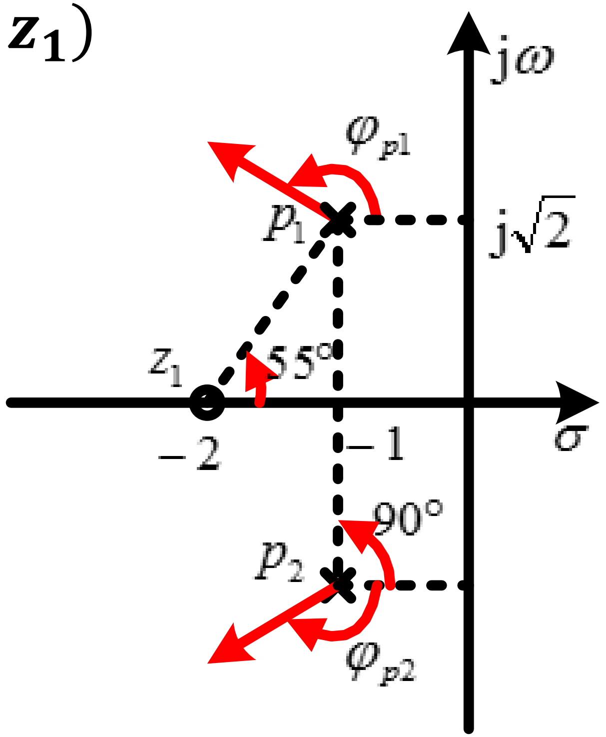


根轨迹草图绘制

(v) 极点出射角

$$\varphi_{p1} = \pm 180^\circ - \arg(p_1 - p_2) + \arg(p_1 - z_1)$$
$$= 145^\circ \text{ 或 } -215^\circ$$

$$\varphi_{p2} = -145^\circ$$



(vi) 没有与虚轴的交点

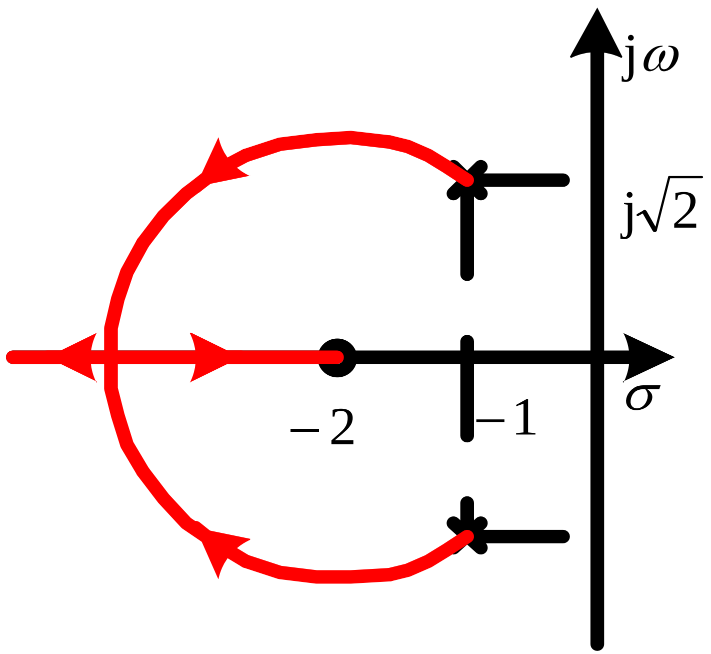
* 可以从出射角判断
* 也可以根据闭环特征方程判断

$$s^2 + (2+K)s + (3+2K) = 0$$

根轨迹草图绘制

综合如上分析绘制根轨迹草图

- **共有2个分支**
- **起点为**$-1 \pm j\sqrt{2}$**，出射角为**$\pm 145^{\circ}$
- **终点为**-2**和无穷远**
- **实轴上的根轨迹:** $(-\infty, -2)$
- **渐近线夹角**180°
- **分离点** $s = -3.732$



- **可以证明弧线部分位于圆心在**$(-2,0)$**的半径为3的圆上**

根轨迹草图绘制

例2：绘制传递函数为 $G(s)F(s)=\frac{K}{s(s+2.73)(s^2+2s+2)}$ 的根轨迹草图

解: (i) 起点: 开环极点 $0,-2.73,-1\pm j1$

分支数: 4， 终点皆为无穷远

(ii) 实轴上的根轨迹: $(-2.73,0)$

(iii) 渐近线

$$\gamma=\frac{\pm180^{\circ}(2k+1)}{n-m}=\frac{\pm180^{\circ}(2k+1)}{4}=\pm45^{\circ},\pm135^{\circ}$$

$$\sigma_a=\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=\frac{0-2.73-1+j1-1-j1}{4}=-1.183$$

根轨迹草图绘制

(iv) 会合点

由闭环系统特征方程

$$K = -s(s+2.73)(s^2+2s+2)$$

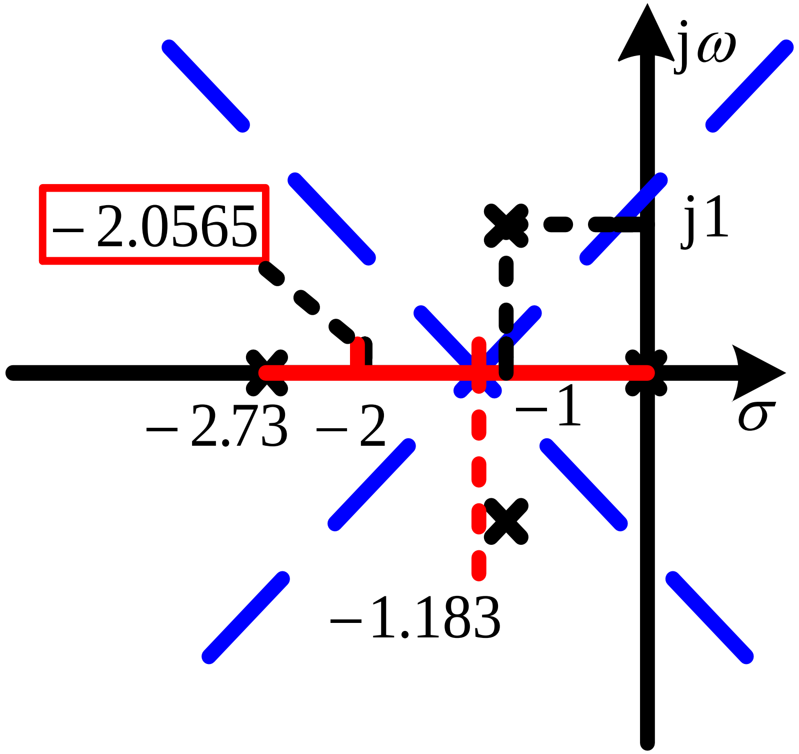
$$= -(s^4+4.73s^3+7.46s^2+5.46s)$$

得到会合点满足的方程

$$\frac{dK}{ds} = -4s^3 - 14.19s^2 - 14.92s - 5.46 = 0$$

其实数根为 $s = -2.0565$

对应增益 $K = -A(s)|_{s=-2.0565} = 2.931 > 0$

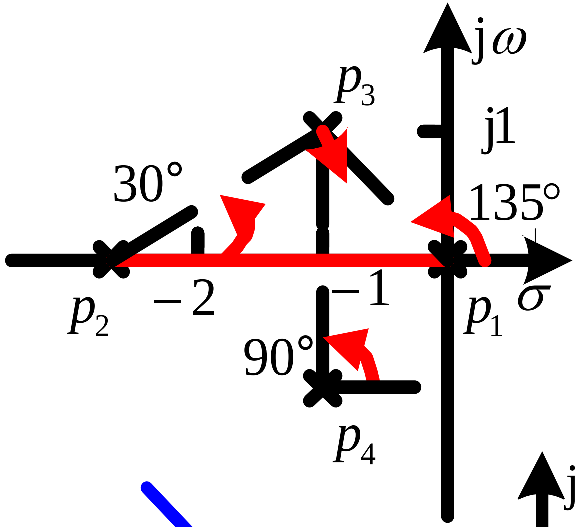


根轨迹草图绘制

(v) 复数极点处的出射角

$$\varphi_{p3} = 180^\circ - \arg(p_3 - p_1) - \arg(p_3 - p_2) - \arg(p_3 - p_4)$$

$$= 180^\circ - 135^\circ - 30^\circ - 90^\circ = -75^\circ \quad (\varphi_{p4} = 75^\circ)$$



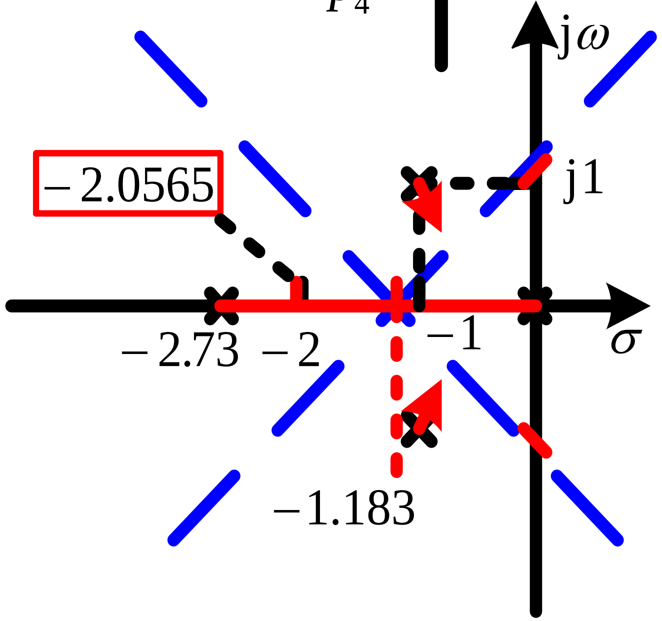
(vii) 与虚轴的交点

将 $s = j\omega$ 代入闭环系统特征方程，得

$$\omega^4 - j4.73\omega^3 - 7.46\omega^2 + j5.46\omega + K = 0$$

整理实部和虚部得：$\begin{cases} K + \omega^4 - 7.46\omega^2 = 0 \\ 5.46\omega - 4.73\omega^3 = 0 \end{cases}$

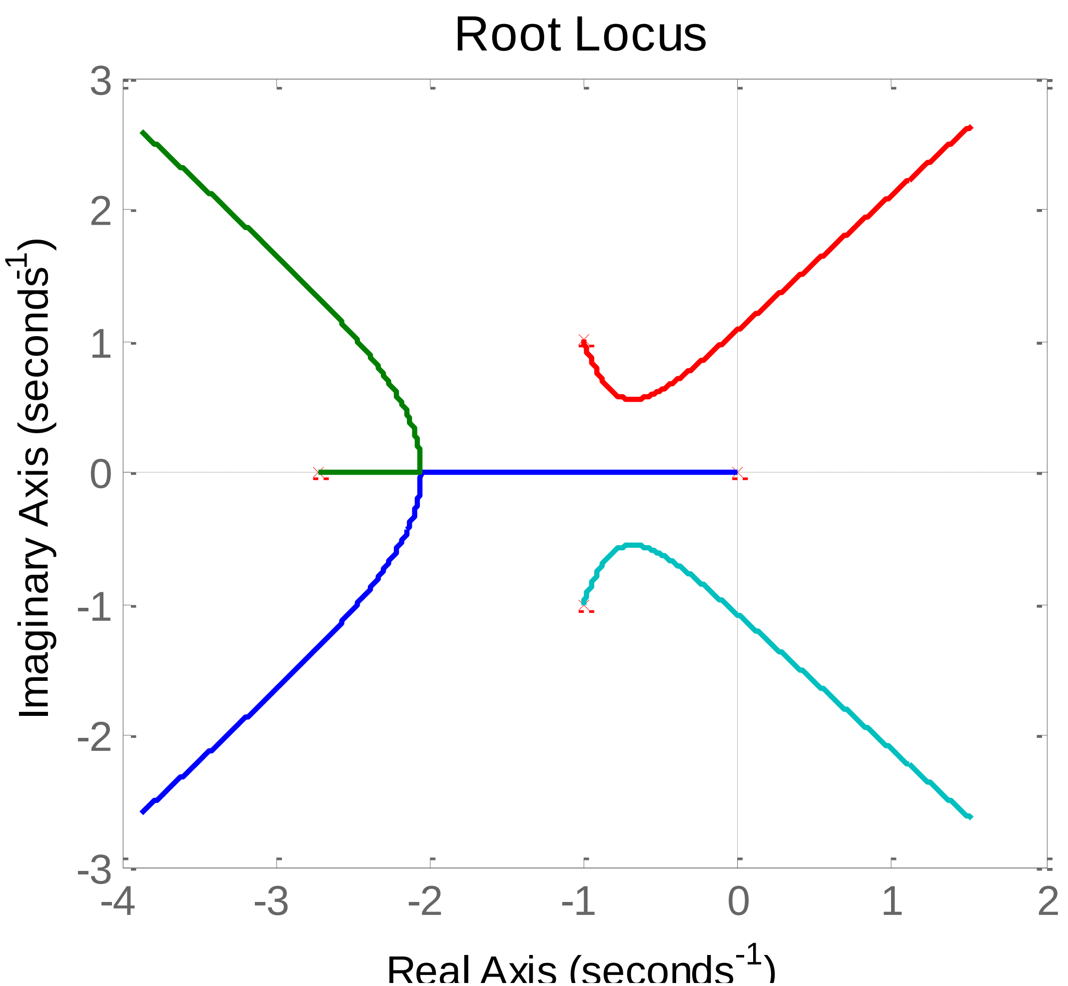
最后解得 $\omega = \pm 1.0744 \qquad K = 7.28$



根轨迹草图绘制

综合如上分析绘制根轨迹草图

- **共有4个分支**
- **起点为**$0, -2.73, -1 \pm j1$
- $-1 \pm j1$ **出射角**$\pm 75°$
- **终点为无穷远**
- **实轴上的根轨迹:** $[-2.73, 0]$
- **渐近线夹角**$\pm 45^{\circ}, \pm 135^{\circ}$
- **分离点** $s = -2.0565$



条件稳定系统

对于开环零极点比较多的系统，闭环系统的稳定性可能会随参数变化而交替变化，比较复杂，这类系统称为条件稳定系统

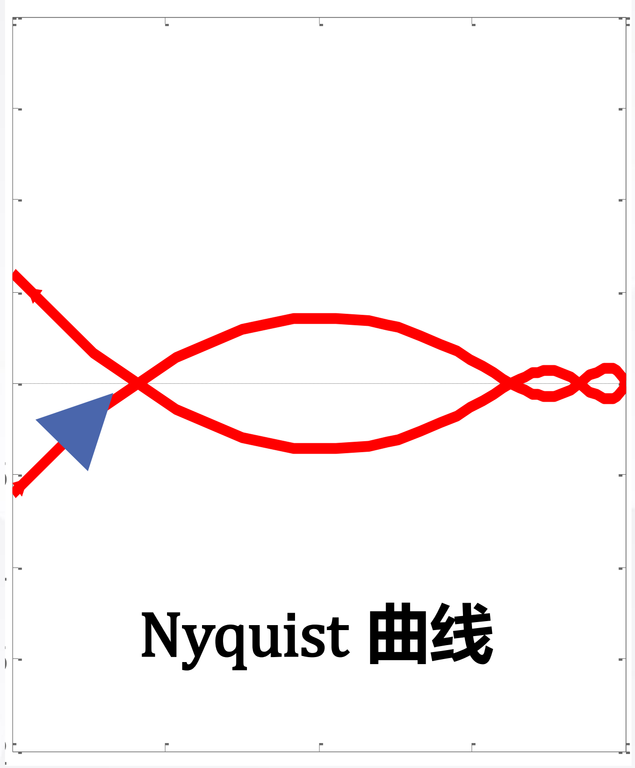
例如，设开环传递函数

$$G(s)F(s)=\frac{K(s^2+2s+4)}{s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)}$$

找出使闭环稳定的K 的取值范围

开环极点（$n=5$）：$0,-4,-6,-0.7\pm j0.714$

开环零点（$m=2$）：$-1\pm j1.7321$

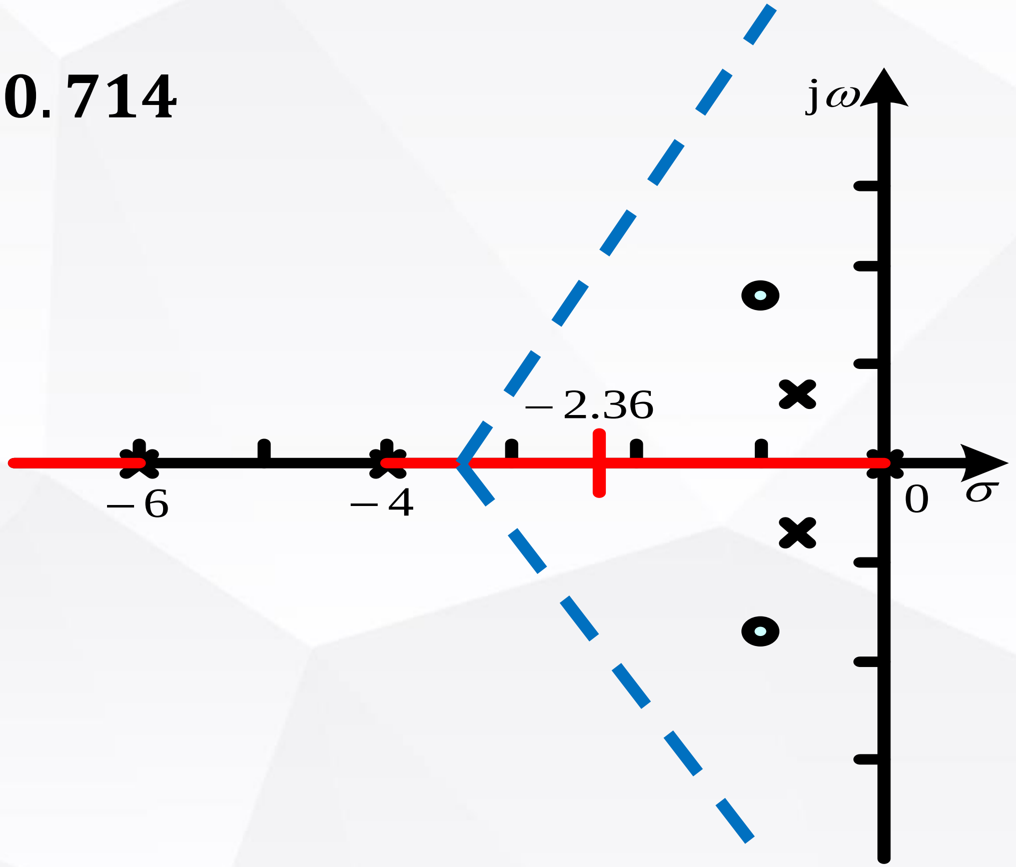


Nyquist 曲线

条件稳定系统

开环传递函数 $G(s)F(s)=\dfrac{K(s^2+2s+4)}{s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)}$

- 开环极点（$n=5$）：$0,-4,-6,-0.7\pm j0.714$
- 开环零点（$m=2$）：$-1\pm j1.7321$
- 渐近线（3支）
  - 夹角 $60°,180°,300°$
  - 与实轴交点 -3.13
- 实轴上根轨迹 $[-\infty,-6]\cup[-4,0]$
- 会合点: -2.36



条件稳定系统

- **与虚轴的交点: 将$s=j\omega$ 代入闭环特征多项式**

$$s^5+11.4s^4+39s^3+(43.6+k)s^2+(24+2K)s+4K=0$$

解得:

$$\omega_1=1.2115,\quad K_1=15.54$$

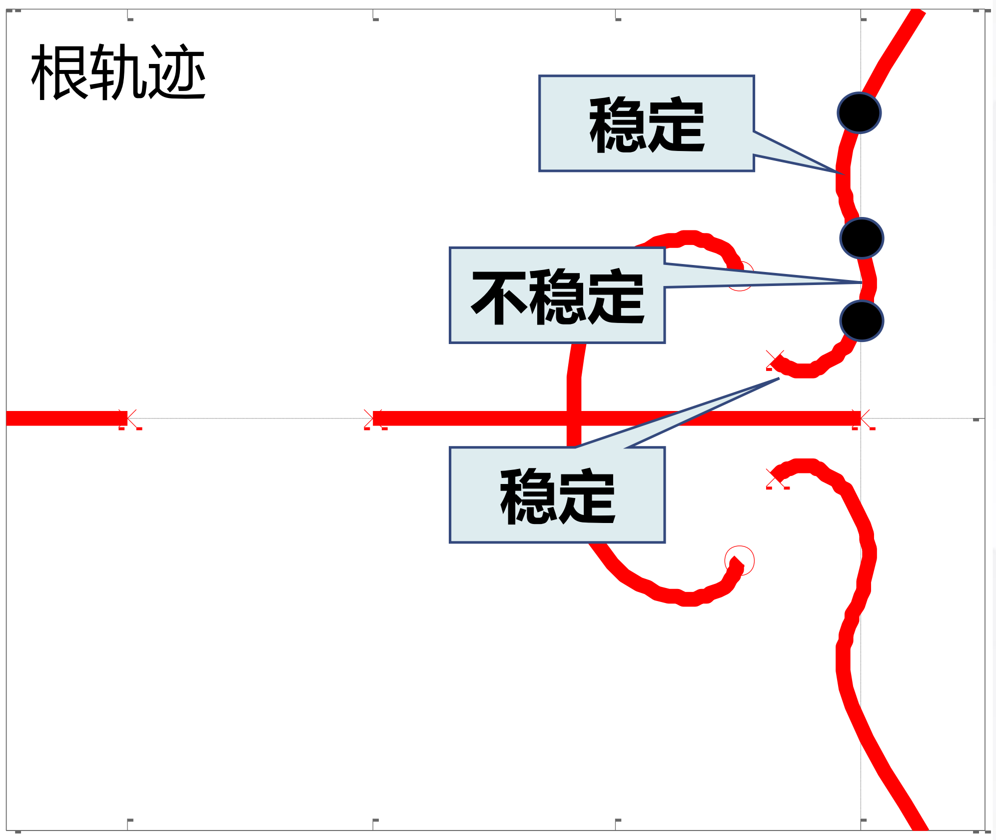
$$\omega_2=2.1545,\quad K_2=64.74$$

$$\omega_3=3.7538,\quad K_3=163.51$$

稳定范围:

$$K<15.54$$

$$64.74<K<163.51$$

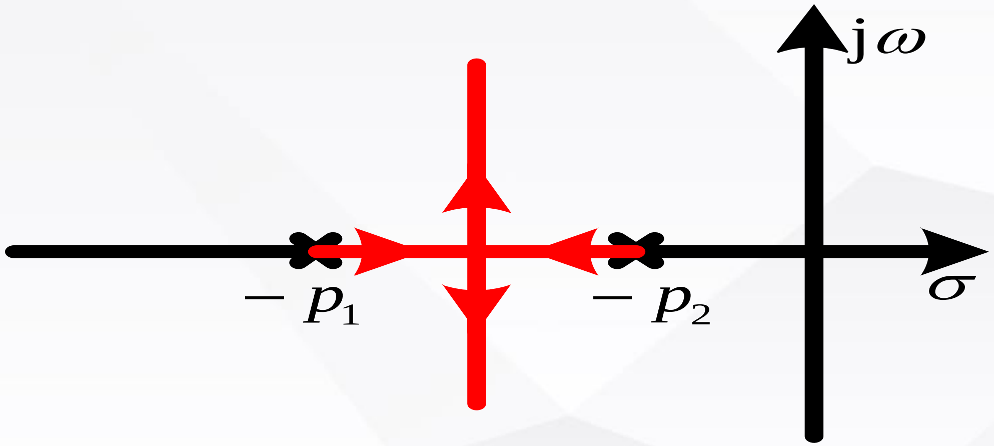


零极点对根轨迹的影响

增加零点对根轨迹的影响

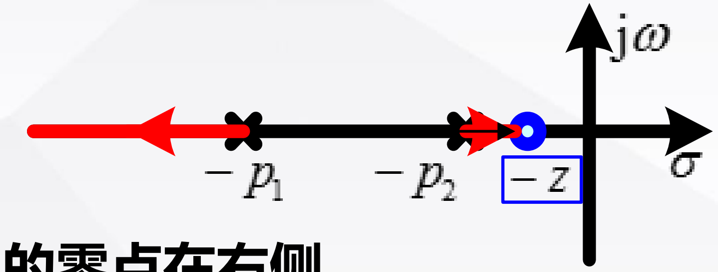
- **原来的开环传递函数和根轨迹：**

$$G(s)F(s)=\frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)},\quad p_1>p_2>0$$

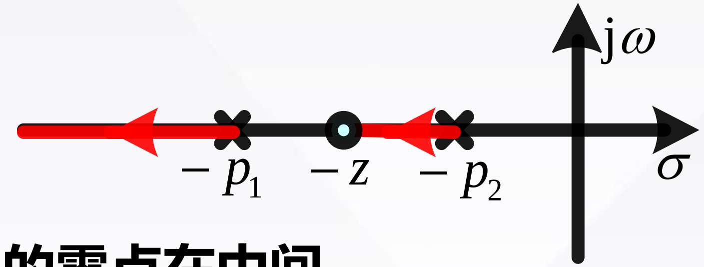


- **增加一个零点：** $G(s)F(s)=\frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)}$

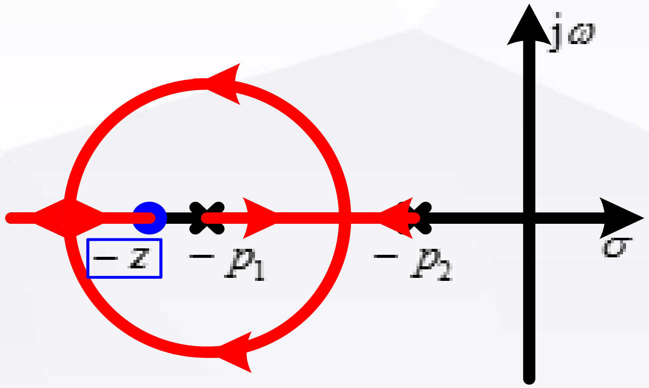
可以将根轨迹向左移动



增加的零点在右侧



增加的零点在中间



增加的零点在左侧

零极点对根轨迹的影响

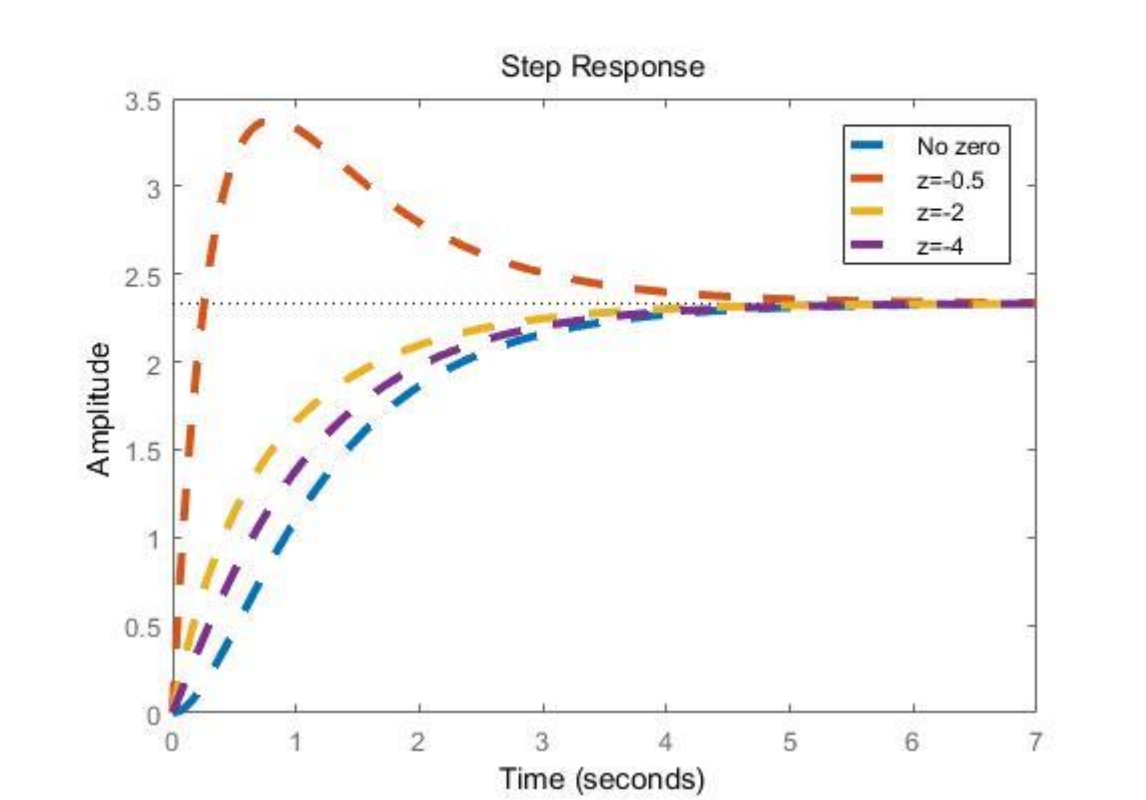
零点对系统阶跃响应的影响

原系统：$G(s)=\dfrac{7}{(s+1)(s+3)}$

附加零点$s=-0.5$: $G(s)=\dfrac{7(2s+1)}{(s+1)(s+3)}$

附加零点$s=-2$: $G(s)=\dfrac{7(0.5s+1)}{(s+1)(s+3)}$

附加零点$s=-4$: $G(s)=\dfrac{7(0.25s+1)}{(s+1)(s+3)}$

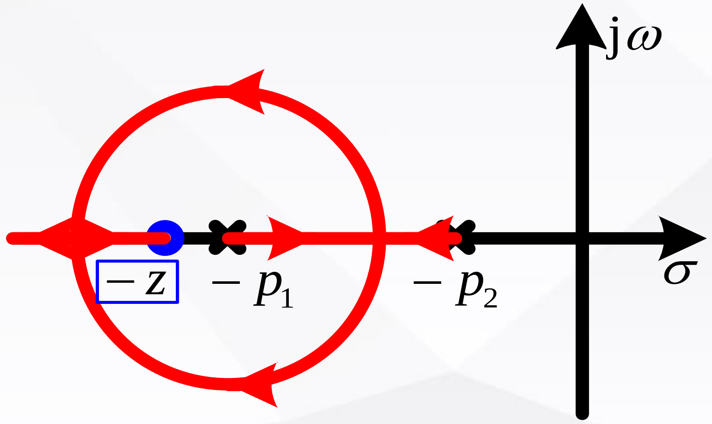


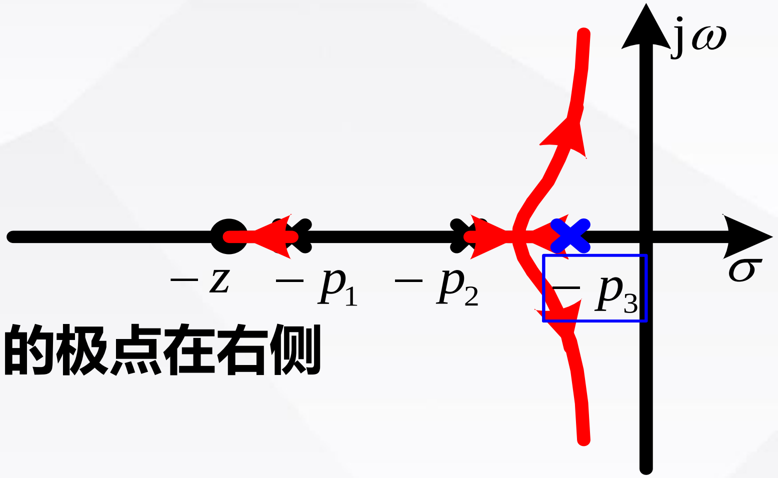
零极点对根轨迹的影响

增加极点对根轨迹的影响

- **原来的开环传递函数和根轨迹：**

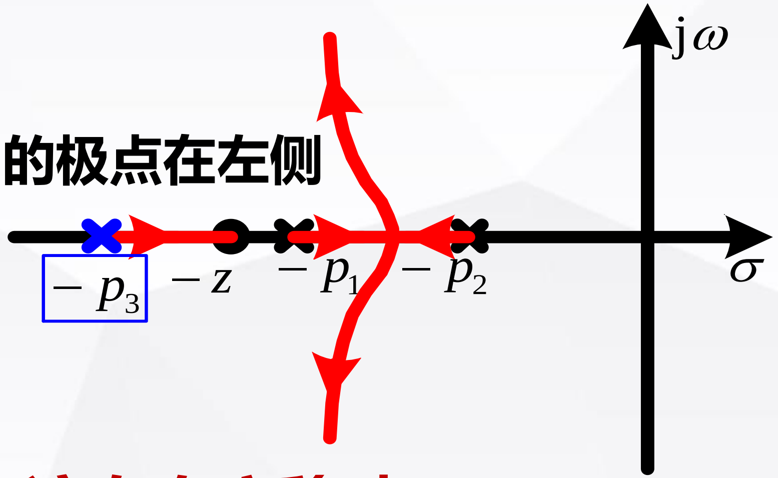
$$G(s)F(s)=\frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)},z>p_1>p_2>0$$





增加的极点在右侧

增加的极点在左侧

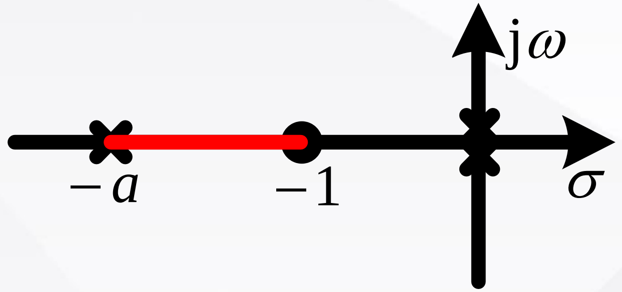


- **增加一个极点：** $G(s)F(s)=\frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$ **根轨迹向右方移动**

零极点对根轨迹的影响

例：考察参数$a>0$不同取值时，系统 $G(s)F(s)=\frac{K(s+1)}{s^2(s+a)}$ 根轨迹

- **实轴上的根轨迹: 区间** $(-a,-1)$
- **检查区间$(-a,-1)$内是否有分离点/会合点**



从条件 $\frac{dK}{ds}=0$**计算，其中** $K=-\frac{A(s)}{B(s)}=-\frac{s^2(s+a)}{s+1}$

$$\Rightarrow \; A(s)B'(s)=A'(s)B(s) \;\Rightarrow s^2(s+a)=\left(3s^2+2as\right)(s+1)$$

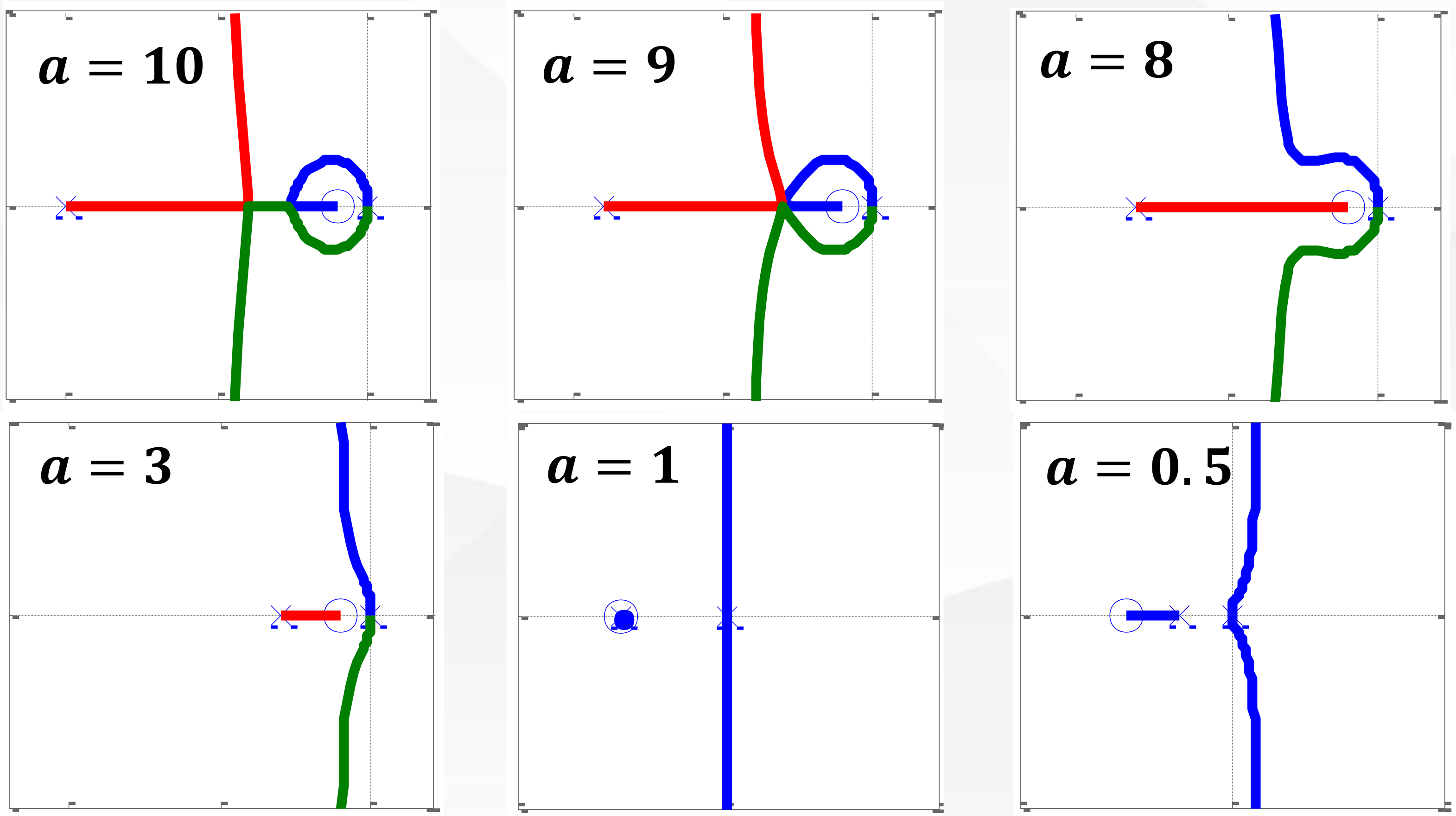
解方程可得： $s=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{a^2-10a+9}}{4} \Rightarrow a^2-10a+9\geq 0$

结论：当 $a\leq 1$ 或者 $a\geq 9$ 时，区间$(-a,-1)$内存在分离点/会合点

零极点对根轨迹的影响

参数a取不同值时的根轨迹

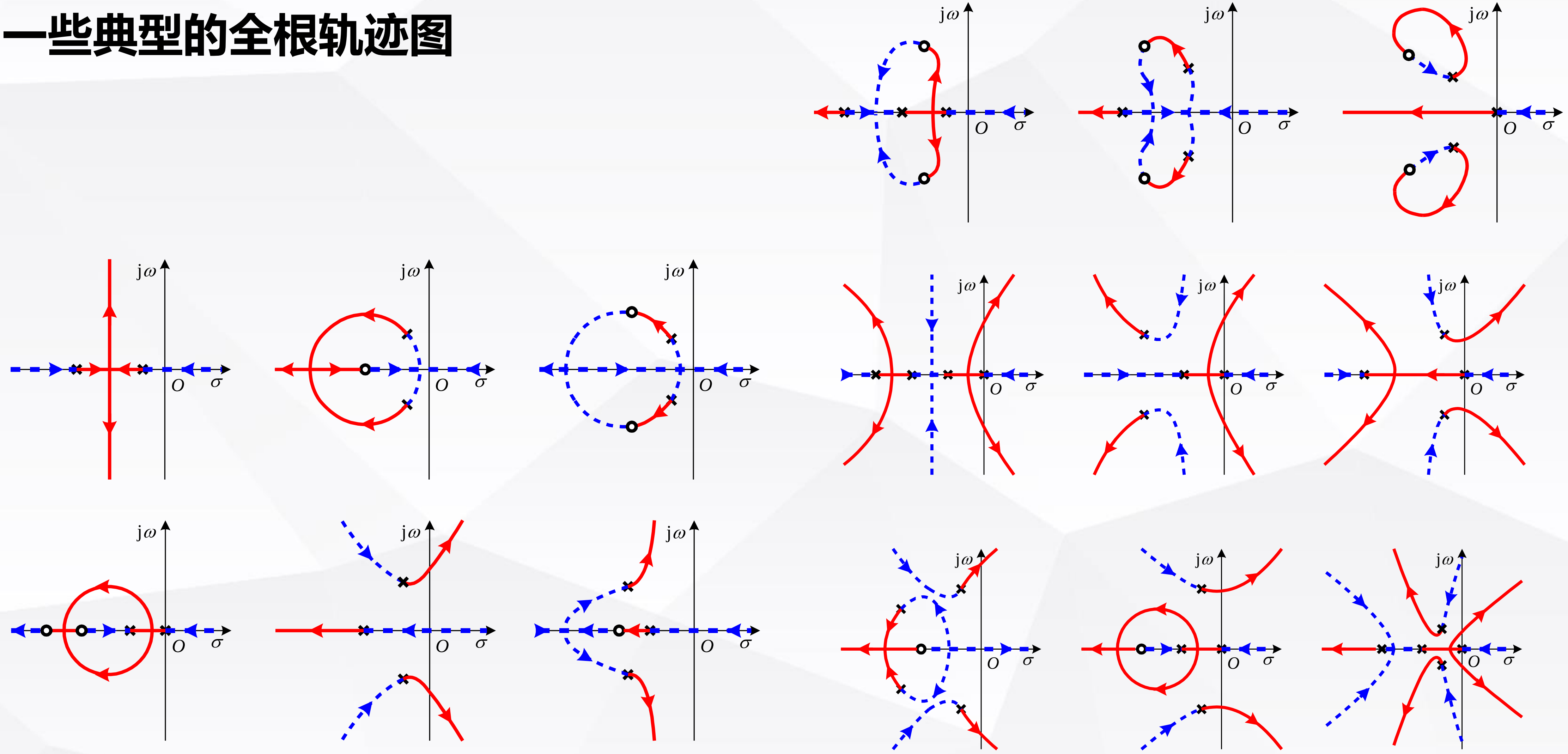
参数a	分离/会合点
10	-4，-2.5
9	-3，-3
8	无
3	无
1	无
0.5	无



结论：开环极点很小的变化会导致闭环根轨迹的很大的变化

补根轨迹和全根轨迹

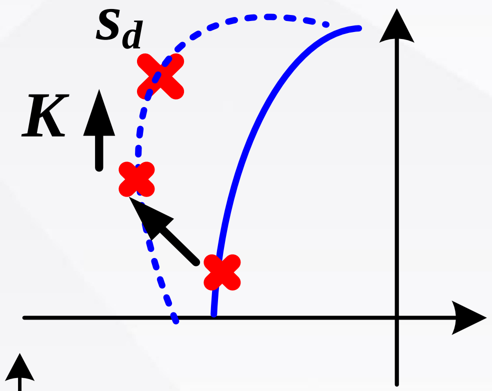
一些典型的全根轨迹图



根轨迹法校正

校正装置的设计方法：根轨迹法

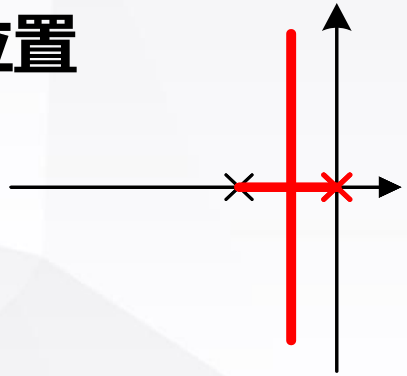
根轨迹法

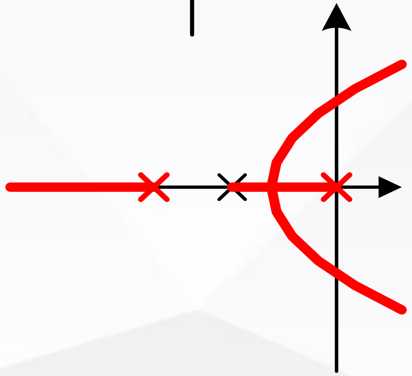


- 改变形状使之穿过**期望闭环主导极点**
- 性能指标（近似二阶系统）：ζ，ω_n, K_v
- 变化K（足够大）将闭环极点移至期望位置

（1）添加极点使根轨迹右移：

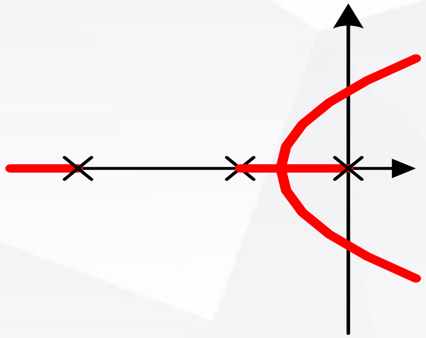
提高稳态精度，导致稳定性降低

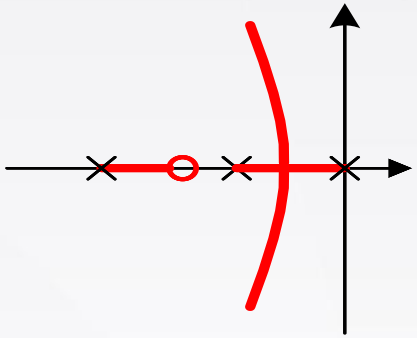




（2）添加零点使根轨迹左移：

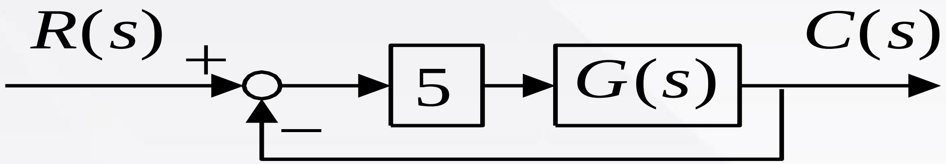
带来稳定性和响应速度的提高



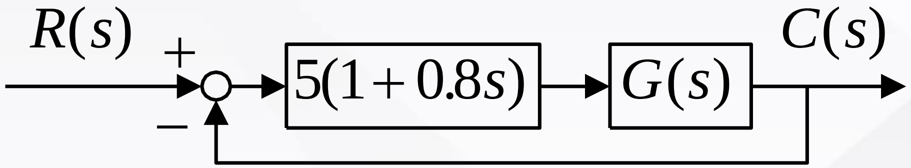


零极点对根轨迹的影响

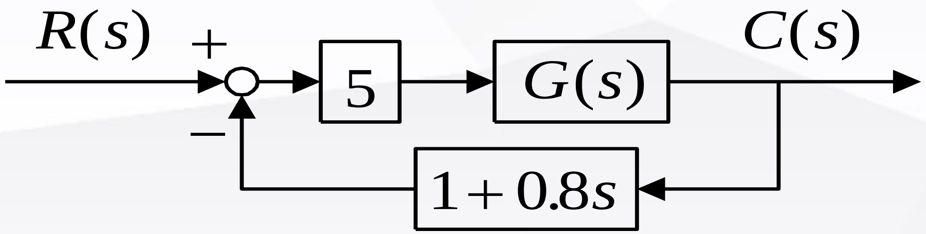
应用：伺服系统中的不同控制方案对比研究（$G(s)=\dfrac{1}{s(5s+1)}$）



- **比例控制：** $G(s)F(s)=\dfrac{5}{s(5s+1)}=\dfrac{1}{s(s+0.2)}$

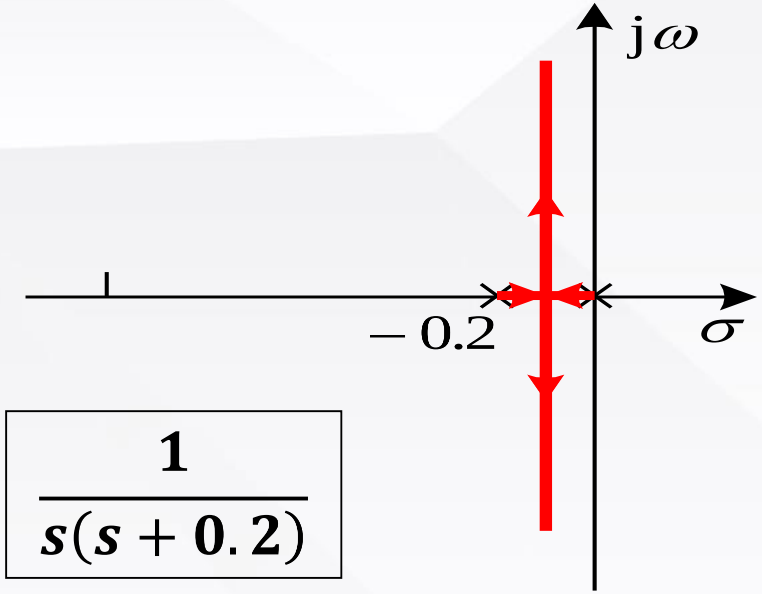


- **比例+微分：** $G(s)F(s)=\dfrac{5(1+0.8s)}{s(5s+1)}=\dfrac{0.8(s+1.25)}{s(s+0.2)}$



- **速度反馈：** $G(s)F(s)=\dfrac{5(1+0.8s)}{s(5s+1)}=\dfrac{0.8(s+1.25)}{s(s+0.2)}$

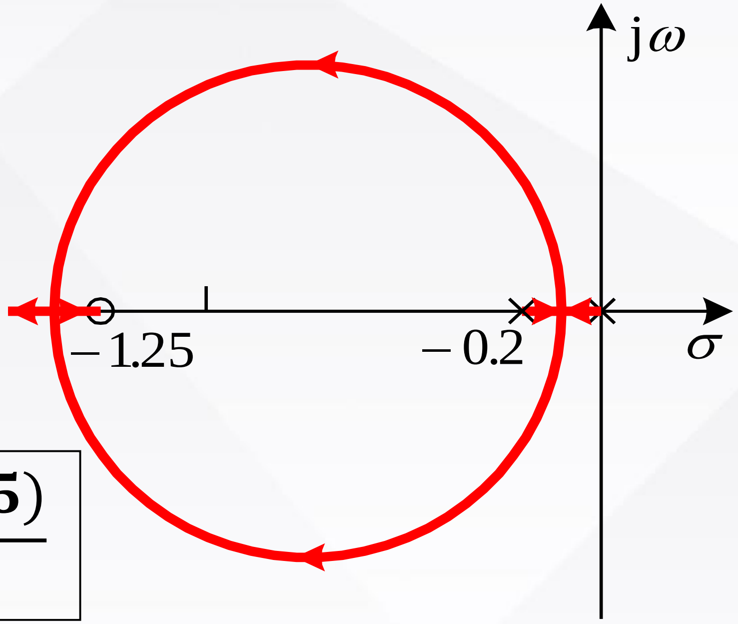
零极点对根轨迹的影响



$$\frac{1}{s(s+0.2)}$$

开环传递函数附加了

一个零点$z=-1.25$



$$\frac{0.8(s+1.25)}{s(s+0.2)}$$

- 比例控制下的根轨迹

$$s_{1,2}=-0.1\pm j0.995\ \ (\zeta=0.1)$$

阻尼小，振荡剧烈, 衰减率慢

- 比例+微分/速度反馈控制下的根轨迹

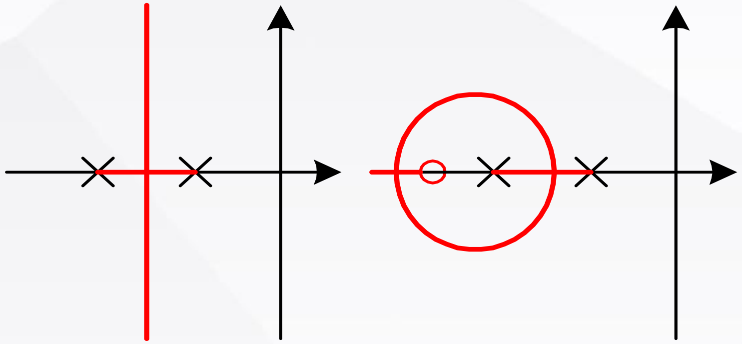
$$s_{1,2}=-0.51\pm j0.886\ \ (\zeta=0.5)$$

阻尼接近0.707，控制性能较好

基于根轨迹法设计超前校正装置

理想微分补偿

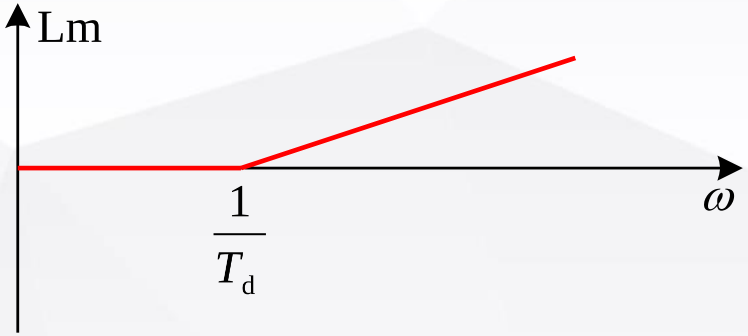
系统响应速度慢（或不稳定）意味着闭环极点过于靠近虚轴（或在右半平面）



补救措施：增加一个单零点

$$G_c(s) = 1 + T_d s = T_d\left(s + \frac{1}{T_d}\right)$$

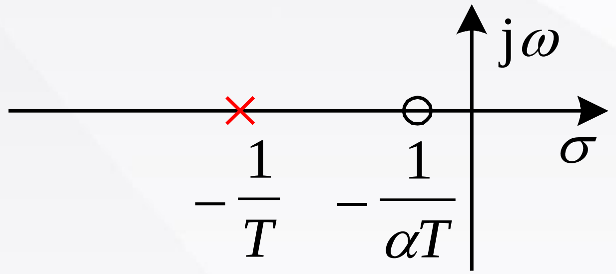
- 优点： 将根轨迹左移以提高稳定性
- 缺点1：校正环节$G_c(s) = 1 + T_d s$ 难以物理实现
- 缺点2：噪声特别是高频噪声被放大



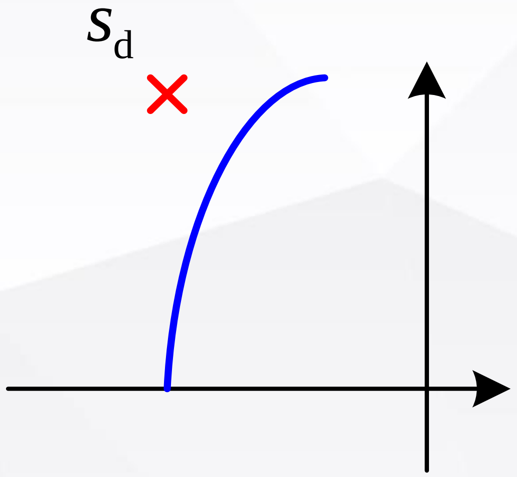
基于根轨迹法设计超前校正装置

替代方案：超前校正

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{s+\frac{1}{\alpha T}}{s+\frac{1}{T}} = K_c \cdot \frac{s-z_c}{s-p_c} \quad (\alpha > 1)$$



- K_c用于补偿低频增益
- 希望选取较大的$1/T$，以减少附加极点对根轨迹的影响
- 但$1/T$ 较大时，需要选取较大的α，不易实现
- 根据期望闭环主导极点设计参数



超前校正装置的特性

设计中常用的表达形式

$$G_c(s)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}=\frac{s+\frac{1}{\alpha T}}{s+\frac{1}{T}}\xrightarrow{\text{配合比例环节}}G_c(s)=\frac{K_c}{\alpha}\cdot\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}=K_c\cdot\frac{s+\frac{1}{\alpha T}}{s+\frac{1}{T}}$$

- **适于用根轨迹设计：** $G_c(s)=K_c\cdot\frac{s-z_c}{s-p_c}$**，其中** $\frac{p_c}{z_c}=\alpha>1$

超前校正装置的特性

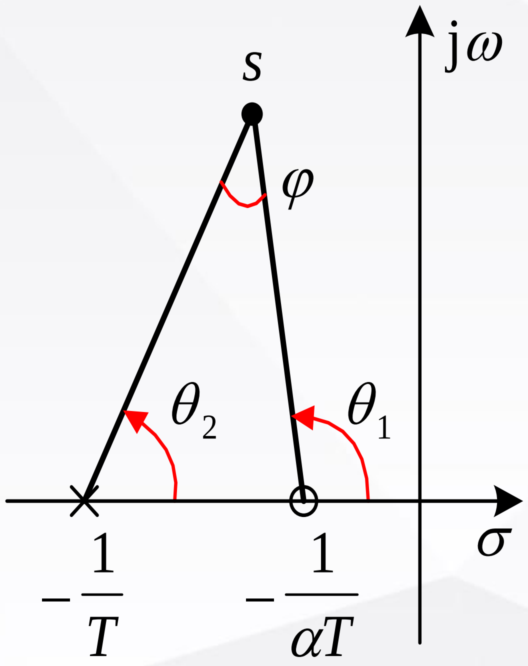
从根轨迹图上看：

对任意测试点：$s = \sigma + j\omega(\omega > 0)$

$$G_c(s) = \frac{s + \frac{1}{\alpha T}}{s + \frac{1}{T}} \quad (\alpha > 1)$$

$G_c(s)$提供一个超前角

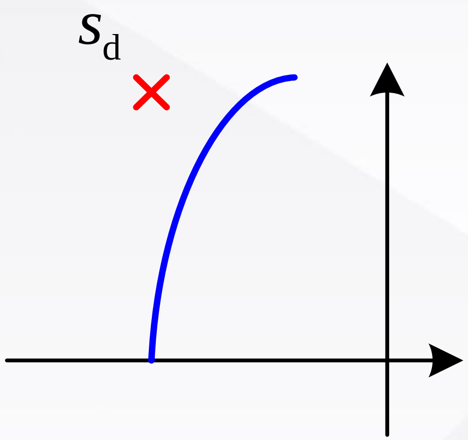
$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 > 0$$



因此根据根轨迹的幅角条件， $G_c(s)$ 会将根轨迹向左移动

基于根轨迹法设计超前校正装置

根据主导极点计算应提供的超前相角

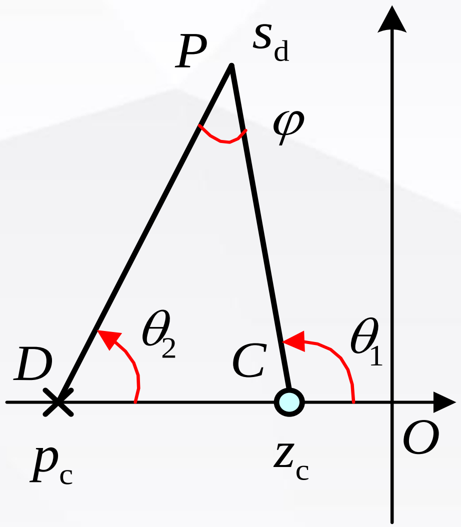


假设期望主导极点的位置为（不在原来的根轨迹上）

$$s_d = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

根据校正装置的相角条件

$$\arg\left[G_c(s_d)G_p(s_d)\right]$$
$$= \arg\left[G_c(s_d)\right] + \arg\left[G_p(s_d)\right] = \pm(2k+1)\pi$$



可知校正装置需要提供的相角是

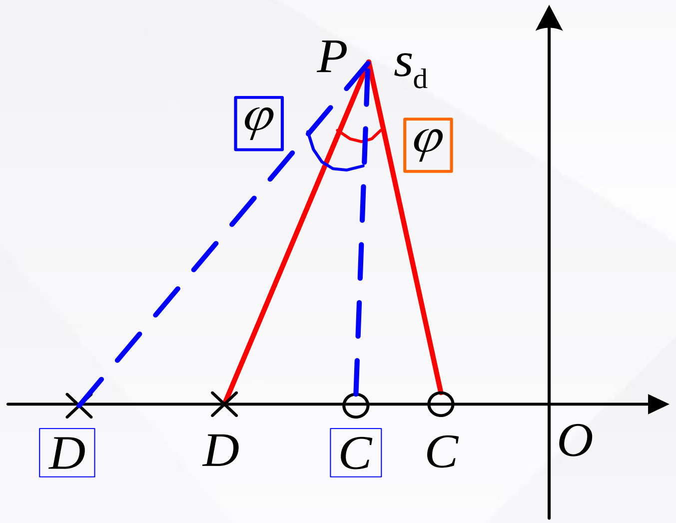
$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \arg\left[G_c(s_d)\right] = \pm(2k+1)\pi - \arg\left[G_p(s_d)\right]$$

其中 $\theta_1 = \arg(s_d - z_c)$，$\theta_2 = \arg(s_d - p_c)$。

基于根轨迹法设计超前校正装置

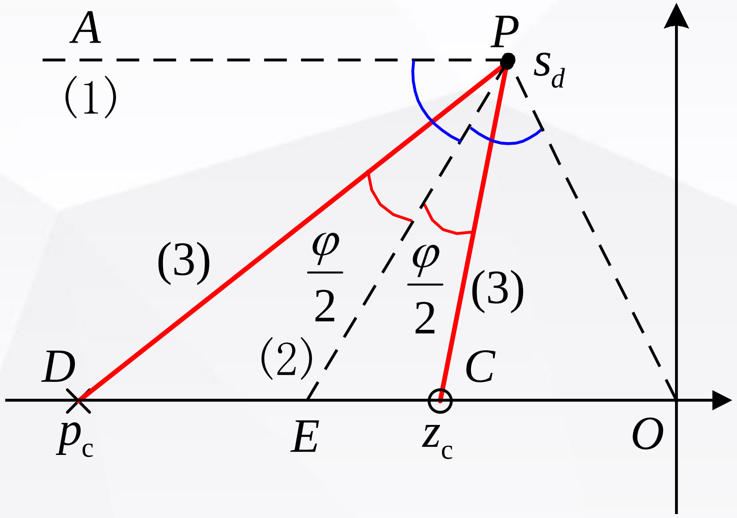
根据所需超前相角 φ 选取 p_c和z_c

$$G_c(s)=K_c\cdot\frac{s-z_c}{s-p_c},\qquad \frac{p_c}{z_c}=\alpha>1$$



有无数种（z_c,p_c）组合可以提供给定超前相角：

- 不同组合对应于不同的 α， 希望α 越小越好
- 利用角平分线方法确定最小α值
  1. 做AP平行于实轴
  2. 做PE平分$\angle APO$
  3. 通过让PE平分φ角确定p_c和z_c
  4. 计算$\alpha=\left|\frac{\overline{OD}}{\overline{OC}}\right|$



采用根轨迹法设计超前校正装置

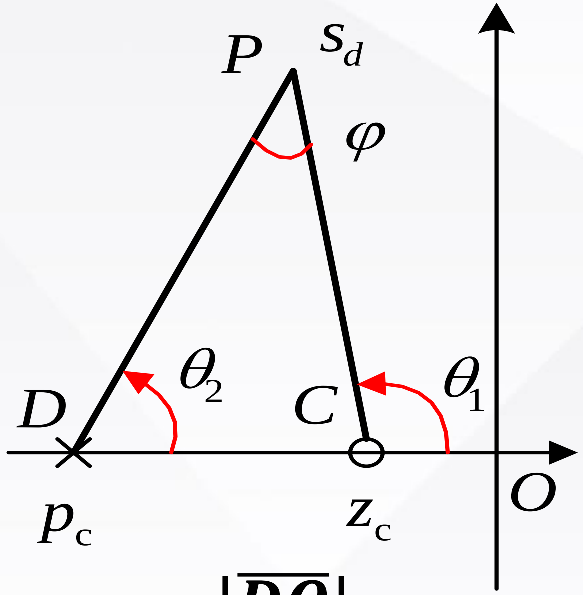
根据选好的z_c和p_c 确定系数K_c

- **根据幅值条件**

$$\left|G_p(s_d)G_c(s_d)\right| = \left|G_p(s_d)\right|K_c\left|\frac{s_d - z_c}{s_d - p_c}\right| = 1$$

可知增益补偿应为：

$$K_c = \left|\frac{1}{G_p(s_d)}\right| \cdot \left|\frac{s_d - z_c}{s_d - p_c}\right| = \left|\frac{1}{G_p(s_d)}\right| \cdot \left|\frac{\overline{DP}}{\overline{CP}}\right|$$



$$\alpha = \left|\frac{\overline{DO}}{\overline{CO}}\right|$$

- **校正前：** $\lim\limits_{s\to 0} sG_p(s) = K_V'$

- **校正后：** $K_V = \lim\limits_{s\to 0} sG_p(s)G_c(s) = K_V'K_c\frac{z_c}{p_c}$

- (z_c, p_c) **越向左越好，可提高误差系数，减小稳态误差**

基于根轨迹法设计超前校正装置

例：给定$G_p(s)=\frac{4}{s(s+2)}$设计串联校正装置，使闭环系统的主导极点满足

$$\omega_n=4\text{rad/s} \text{ 和 } \zeta=0.5$$

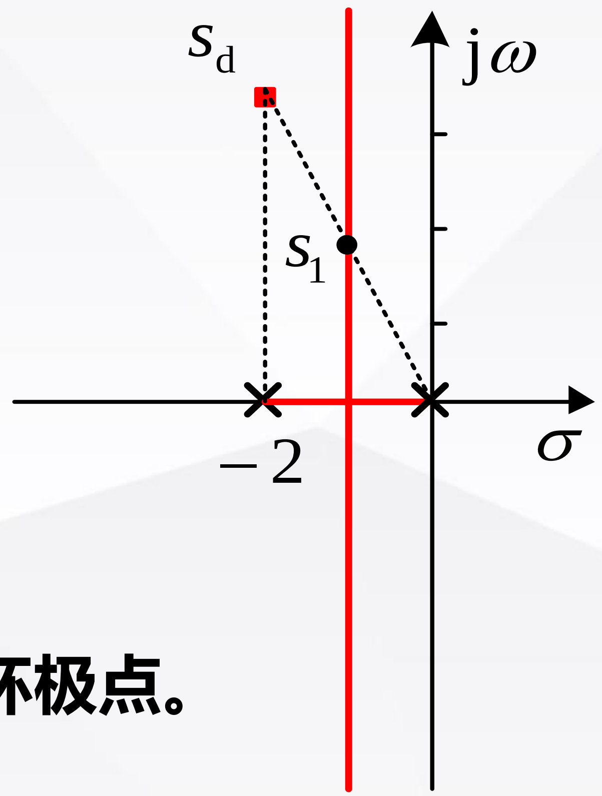
解：校正前系统的性能分析

$$G_{CL}(s)=\frac{G_p(s)}{1+G_p(s)}=\frac{1}{s^2+2s+4}$$

闭环极点位于：$s_{1,2}=-1\pm j\sqrt{3}\Rightarrow\omega_n=2,\quad\zeta=0.5.$

而期望的闭环主导极点：

$$s_d=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-2\pm j2\sqrt{3}$$

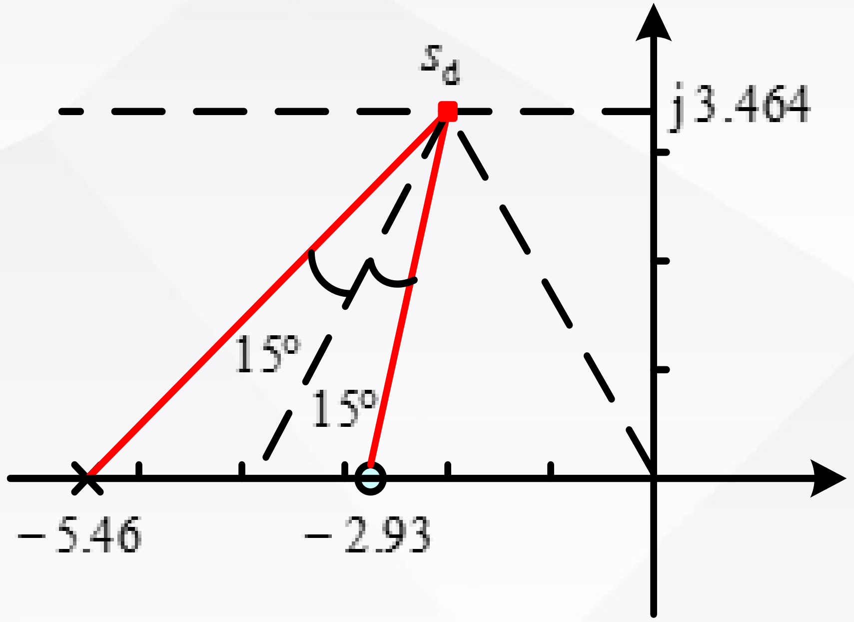


- 不在校正前的根轨迹上，且仅调整K不能得到期望的闭环极点。
- 由于期望极点在根轨迹左侧，故需要超前校正。

基于根轨迹法设计超前校正装置

设超前校正装置的传递函数形式为

$$G_c(s) = K_c \frac{s - z_c}{s - p_c}$$



- **计算所需要的相角超前量**

$$\arg[G_p(s_d)] = \arg\left[\frac{4}{(-2+j2\sqrt{3})(j2\sqrt{3})}\right] = -210^o$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = -180^o - (-210^0) = 30^0$$

- **用角平分线法确定:**

$$p_c = -5.46 \qquad z_c = -2.93 \quad \alpha = 1.863$$

$$G_p(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

$$s_d = -2 + j2\sqrt{3}$$

- **因此** $G_c(s) = K_c \frac{s+2.93}{s+5.46}$, **还需要确定**$K_c$**的取值**

基于根轨迹法设计超前校正装置

- **根据幅角条件确定校正环节的增益系数**

$$\left|G_p(s)G_c(s)\right|_{s_d=-2+j2\sqrt{3}} = \left|\frac{K_c(s+2.93)}{(s+5.46)}\cdot\frac{4}{s(s+2)}\right|_{s_d=-2+j2\sqrt{3}} = \frac{4K_c}{18.91} = 1$$

$$\Rightarrow K_c = \frac{18.91}{4} = 4.728$$

- **检验校正后的系统性能**

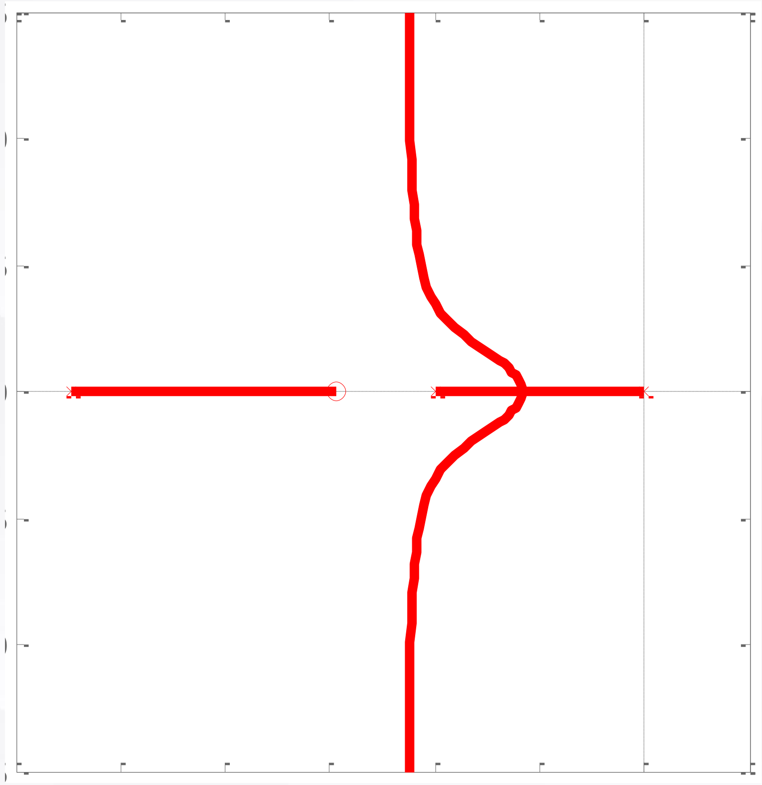
  1. **闭环极点** $s_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$

     $(s_3 = -3.46$ **靠近** $z_c = -2.93)$

  2. **稳态速度误差系数**

$$K_V = \lim_{s\to 0} sG_p(s)G_c(s) = 5.074\ \mathrm{s}^{-1}$$

比校正前$K_V' = 2\ \mathrm{s}^{-1}$ **有所提升。**



基于根轨迹法设计超前校正装置

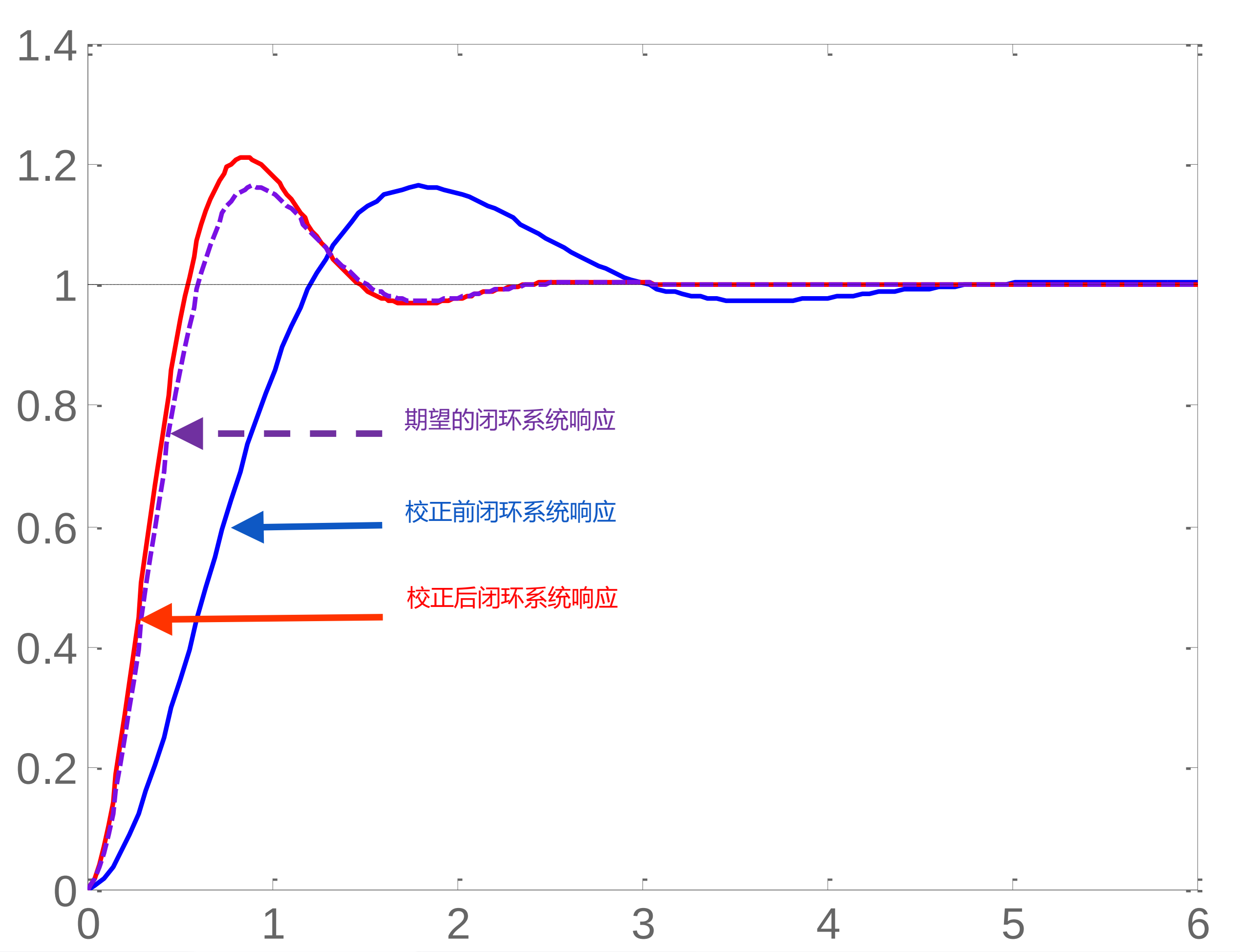
- 进一步验证时域性能的改善

从闭环系统的阶跃响应来看：

1. 响应速度速度有所提升
2. 超调量略有提高
3. 与具有相同主导极点的二阶系统$G(s)=\frac{16}{s^2+4s+16}$相比，阶跃响应差别很小，说明设计极点

$$s_{1,2}=-2\pm j2\sqrt{3}$$

的确起主导作用。



基于根轨迹法设计超前校正装置

设计步骤总结（供参考）

（1）按照 ζ 和ω_n的要求选取闭环的期望主导极点对

（2）基于主导极点计算需要的超前相角 φ

（3）根据要求的φ，最小 α 方法，计算校正环节的零极点

（4）根据幅值条件确定超前校正环节的增益

（5）系统性能校验

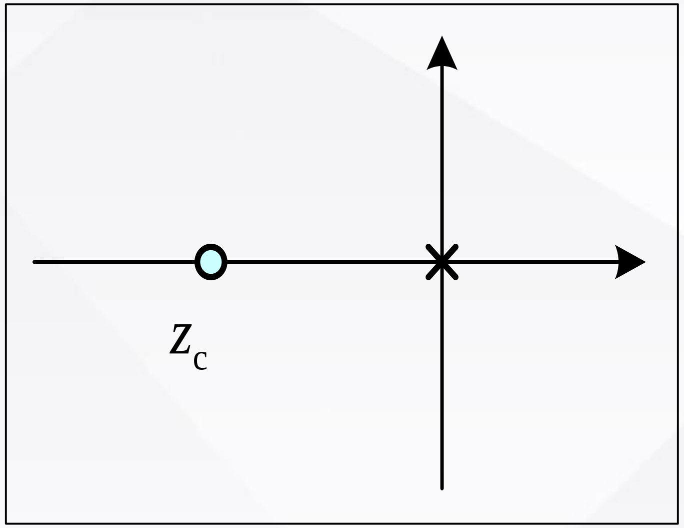
不足：

无法控制静态误差，可以放弃最小α 方法，提升增益

基于根轨迹法设计滞后校正装置

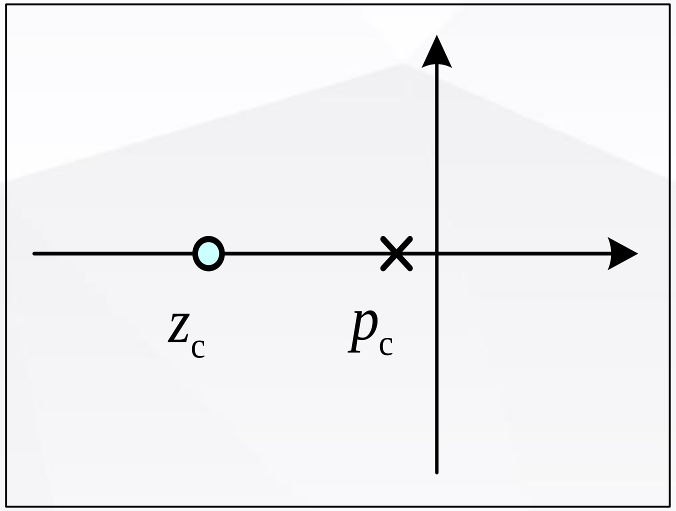
PI 控制器（比例+积分校正）

$$G_c(s) = 1 + K_I \cdot \frac{1}{s} = \frac{s - z_c}{s}$$



优点：PI 控制可提高系统的型次，改善静差

缺点：响应速度降低，且实现纯积分比较困难



替代方案：把极点从原点移开，形成滞后校正装置

$$G_c(s) = \frac{s - z_c}{s - p_c}, \qquad p_c \ll 1$$

滞后校正装置的特性

设计中常用的表达形式

$$G_c(s)=\frac{1+Ts}{1+\beta Ts}=\frac{1}{\beta}\cdot\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}\xRightarrow{\text{配合比例环节}}G_c(s)=K_c\cdot\frac{1+Ts}{1+\beta Ts}=\frac{K_c}{\beta}\cdot\frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\beta T}}$$

- **适于用根轨迹设计：** $G_c(s)=\frac{s-z_c}{s-p_c}$，**其中** $\frac{z_c}{p_c}=\beta>1$

滞后校正装置的特性

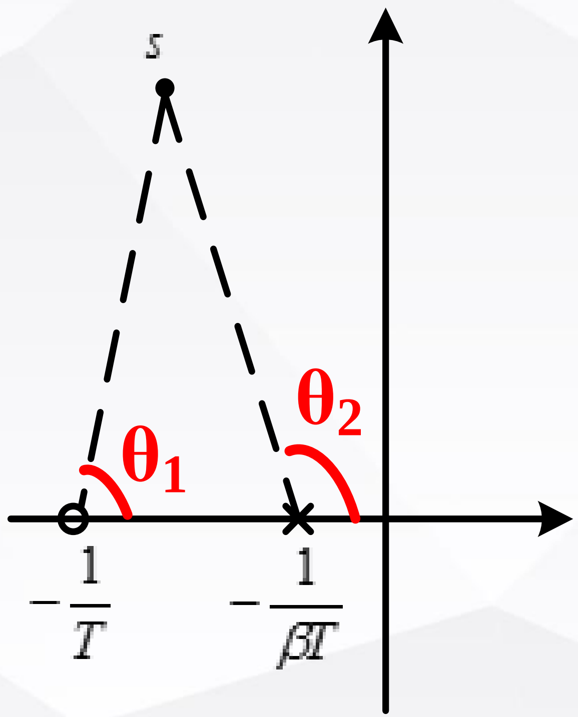
从根轨迹图上看：

对任意测试点： $s = \sigma + j\omega(\omega > 0)$

$$G_c(s) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1)$$

$G_c(s)$提供一个滞后角

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 < 0$$



与超前校正相比，滞后校正装置的极点比零点更靠近原点

基于根轨迹法设计滞后校正装置

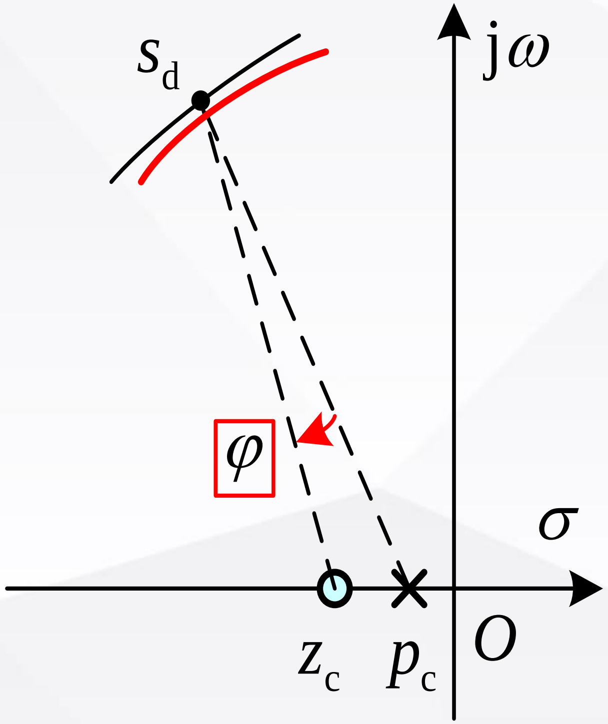
基本原则：尽量减少对动态性能的影响，改善稳态性能

因此希望保持闭环主导极点不动，满足下面的幅值条件：

$$1 = \left|G_c(s)G_p(s)\right| =$$

$$= \left|\frac{s-z_c}{s-p_c}\right| \cdot \left|G_p(s)\right|，\text{而}\left|G_p(s)\right|=1$$

$$=> \quad \left|\frac{s_d-z_c}{s_d-p_c}\right| \approx 1$$

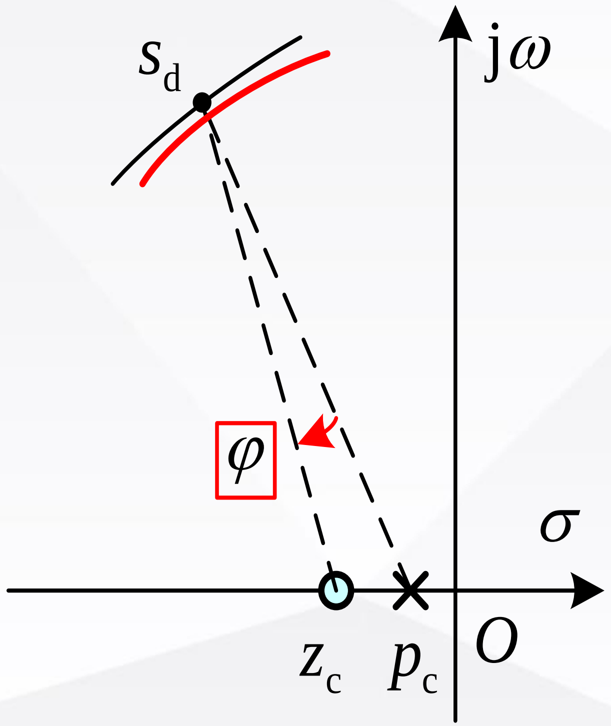


- p_c 和 z_c 应彼此非常接近. 可以保证主导极点附近的根轨迹几乎不变

基于根轨迹法设计滞后校正装置

滞后校正装置零点、极点和增益的选择

$$G_c(s)=\frac{s-z_c}{s-p_c}$$



- 为改善系统稳态性能，$\beta=\frac{z_c}{p_c}$ 应取值较大

综合这两个要求，p_c 和 z_c 都应该非常接近原点，即

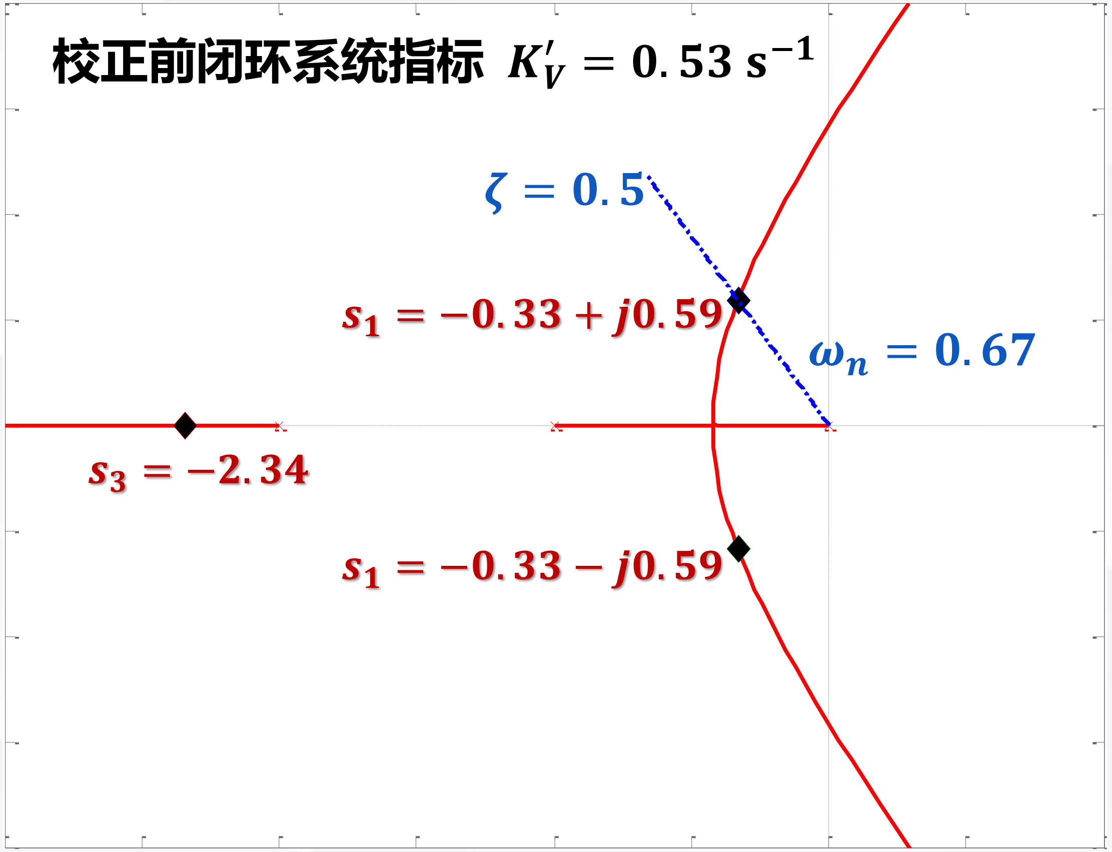
$z_c \ll 1,\ p_c \ll 1,\ \beta=\frac{z_c}{p_c} \gg 1$ 或者 $T \ll 1,\ 1 \ll \beta \ll T^{-1}$

基于根轨迹法设计滞后校正装置

例 给定 $G_p(s)=\dfrac{1.06}{s(s+1)(s+2)}$，设计滞后校正装置以使校正后的系统主导极点基本不变，且速度误差系数不小于$K_V=5\ s^{-1}$。

$$G_c(s)=\frac{s-z_c}{s-p_c}$$

- 需额外增益 $K'=\dfrac{K_V}{K_V'}=\dfrac{5}{0.53}\approx 9.43$
- 为保持主导极点位置不变, 取
  - $\beta=10\geq K'$
  - $p_c=-0.01$, $z_c=\beta p_c=-0.1$



基于根轨迹法设计滞后校正装置

- **根据幅值条件准确求取 K_c**

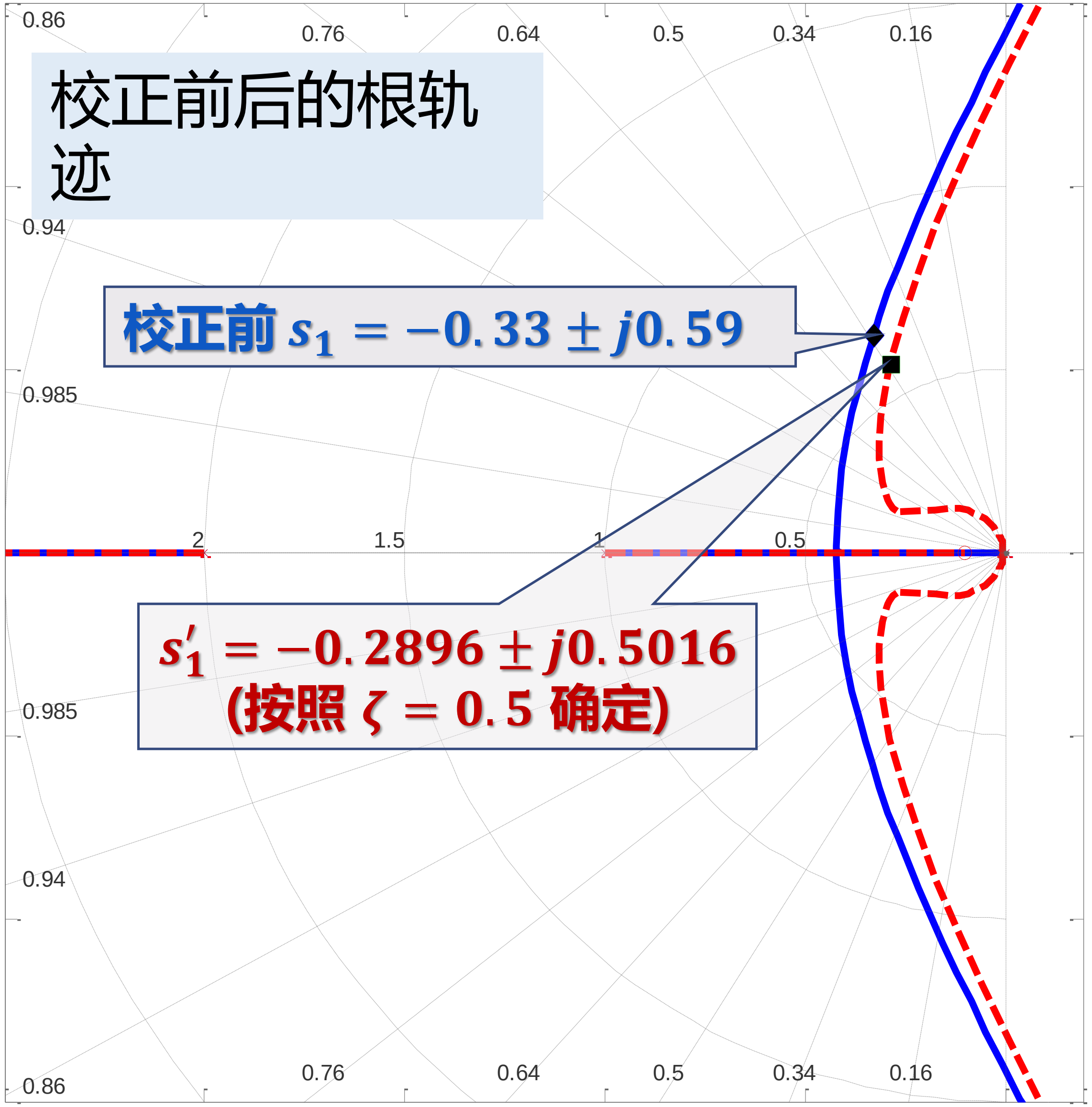
$$\left|G_p(s_1')G_c(s_1')\right| = 1$$

$$\boxed{\left|\frac{1.06}{s_1'(s_1'+1)(s_1'+2)}\cdot K_c\frac{s_1'+0.1}{s_1'+0.01}\right| = 1}$$

- **检查校正后的系统是否满足要求**

$$G_c(s) = 0.9071\cdot\frac{s+0.1}{s+0.01}$$

- **主导极点变化不大**
- **速度误差系数: $K_V' = 4.808 < 5\ s^{-1}$**



基于根轨迹法设计滞后校正装置

进一步改善的措施

- 减小 $|z_c|$ 和 $|p_c|$，但保持$\beta = z_c/p_c$不变，可降低校正对根轨迹的影响

  例如，取$G_c(s) = 0.95 \cdot \frac{s+0.05}{s+0.005}$，则校正后：

  - 主导极点：　$\zeta = 0.5,\ \omega_n = 0.579 \rightarrow 0.628$
  - 速度误差系数：　$K_V' = 5.04 > 5\ s^{-1}$

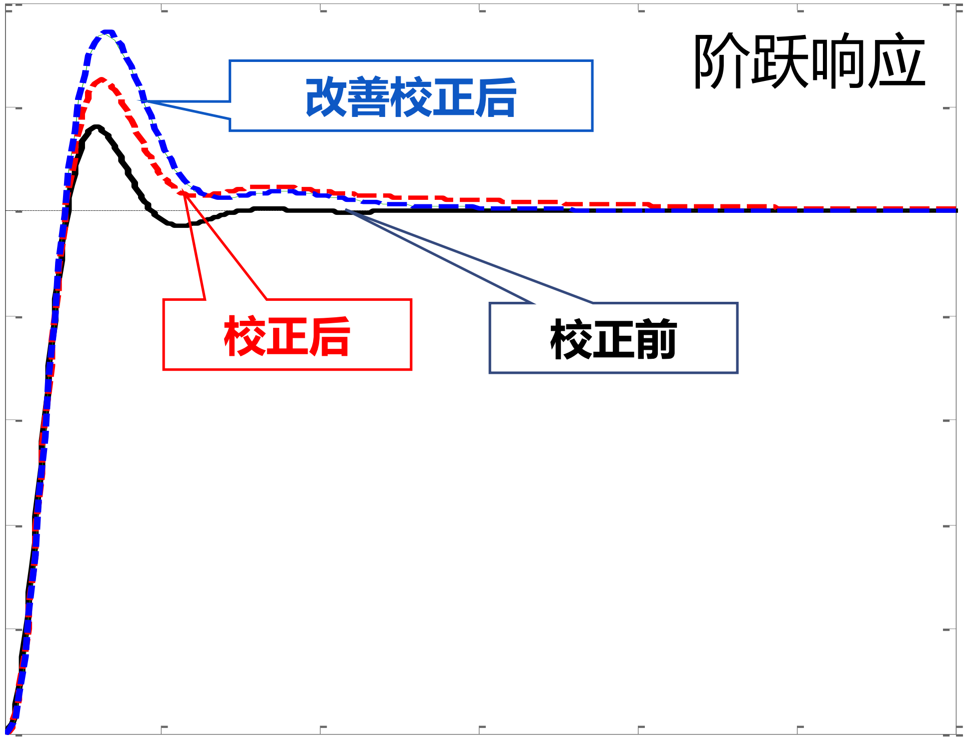
- 提高 β 但保持 z_c 不变，可以提高稳态误差系数

  例如，取$G_c(s) = 0.905 \cdot \frac{s+0.1}{s+0.008}$，则校正后：

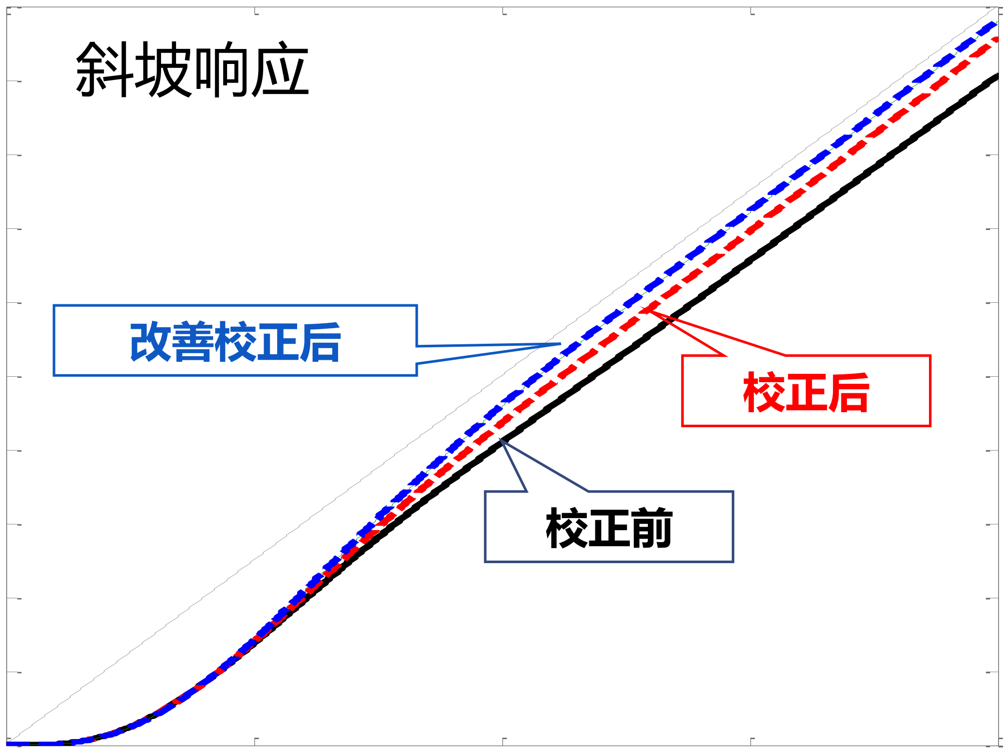
  - 主导极点：　$\zeta = 0.5,\ \omega_n = 0.579 \rightarrow 0.577$
  - 速度误差系数：　$K_V' = 5.998 > 5\ s^{-1}$

基于根轨迹法设计滞后校正装置

不同校正措施的对比



校正后系统响应变慢、超调加大



校正后系统跟踪误差减小

基于根轨迹法设计滞后校正装置

基于根轨迹法设计滞后校正装置的方法总结（供参考）

(1) 绘制 $G_p(s)$ 的根轨迹，并求出主导极点 s_d

(2) 计算所需要的额外增益

(3) 根据所需额外增益确定 p_c，z_c 和 $K_c \approx \beta = z_c/p_c$，
得到校正装置传递函数$G_c(s)$

(4) 绘制采用 $G_p(s)G_c(s)$ 的根轨迹，检查设计是否满足要求

超前-滞后校正装置的特性

设计中常用的表达形式

常引入附加增益K_c和另一个独立的零极点比例系数α，得到更一般的形式：

$$G_c(s)=K_c\cdot\frac{1+\alpha T_1 s}{1+T_1 s}\cdot\frac{1+T_2 s}{1+\beta T_2 s}=\frac{K_c\alpha}{\beta}\cdot\frac{s+\frac{1}{\alpha T_1}}{s+\frac{1}{T_1}}\cdot\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}}$$

其中 $\alpha>1,\beta>1$. 应用中可以 $\alpha=\beta$，也可以$\alpha\neq\beta$.

- 用根轨迹法设计时，常写作：

$$G_c(s)=K_c\cdot\frac{s-z_1}{s-p_1}\cdot\frac{s-z_2}{s-p_2},\qquad \frac{p_1}{z_1}=\alpha>1,\quad \frac{z_2}{p_2}=\beta>1$$

基于根轨迹法设计超前-滞后校正

应用场合：系统稳态误差大，响应速度慢

(1) T_1 和 T_2 可以分开选，但要满足 $T_2 \gg T_1$

(2) 超前部分: 用于提高稳定性和响应速度

- 设计方法与单独使用超前校正的方法相同
- 可以选择校正装置的零点以消去对象最靠近原点的极点，以提高稳定性、加快响应

(3) 滞后部分: 用于提高稳态精度

- 与单独使用滞后校正相同，零极点靠近原点并取较大的β

(4) 超前和滞后校正可分别设计，先后顺序皆可

基于根轨迹法设计超前-滞后校正

例：给定 $G_p(s)=\dfrac{4}{s(s+2)}$**，设计校正装置使校正后的闭环系统满足：**

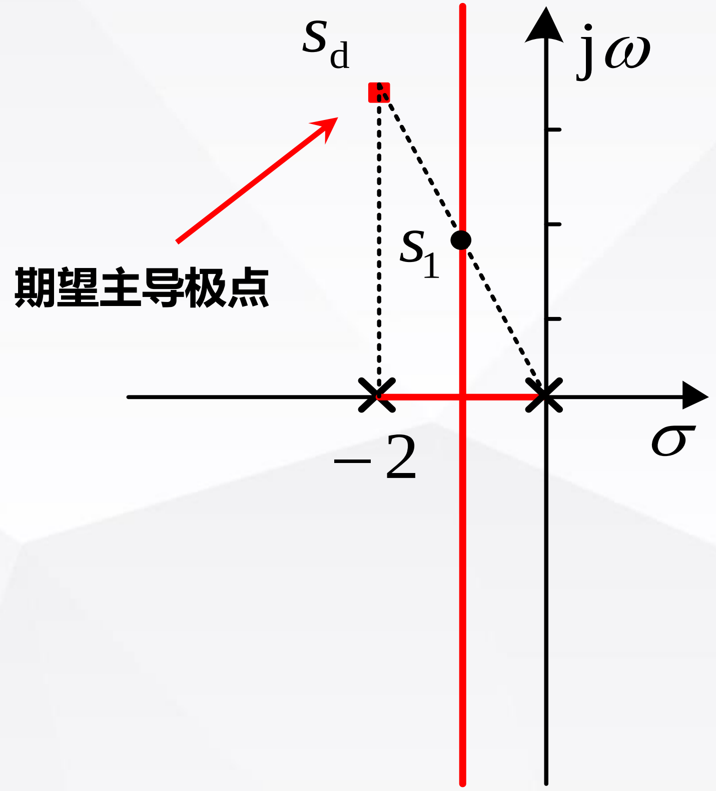
$K_V=20\ \mathrm{s}^{-1}$**，闭环主导极点** $\omega_n=4\ \mathrm{rad/s},\ \zeta=0.5.$

(i) 期望闭环主导极点

$$s_\mathrm{d}=-\zeta\omega_n\pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$=-2\pm j\,2\sqrt{3}$$

(ii) 校正前系统： $K_V'=2\ \mathrm{s}^{-1}$

$$s_{1,2}=-1\pm j\sqrt{3}$$
$$(\omega_n=2\ \mathrm{rad/s},\ \zeta=0.5)$$



静态和动态性能都不理想，采用超前-滞后校正

基于根轨迹法设计超前-滞后校正

$$G_c(s)G_p(s) = K_c \cdot \frac{s-z_1}{s-p_1} \cdot \frac{s-z_2}{s-p_2} \cdot \frac{4}{s(s+2)}$$

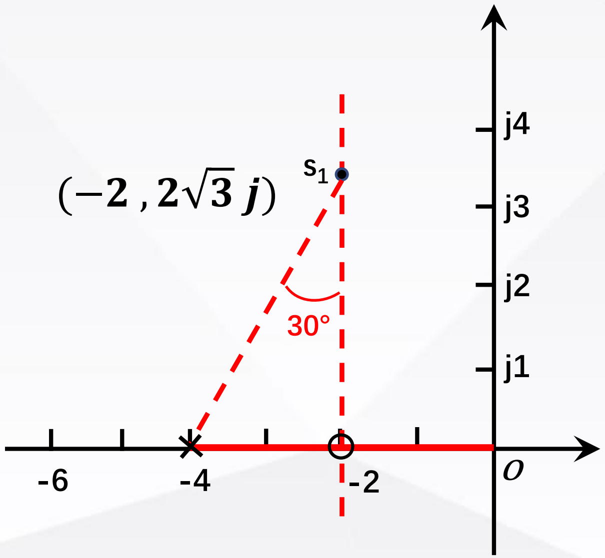
(iii) 超前校正装置

- **利用未校正的传递函数及闭环主导极点可以算得：**

$$\arg\left[G_p\left(-2 \pm j\,2\sqrt{3}\right)\right] = -210^\circ$$

- **故可得所需超前角** $\varphi = 30^\circ$

- **选定** $z_1 = -2$**，由右图可得** $p_1 = -4$



- **根据根轨迹的幅值条件** $\left|G_p(s_d)G_c(s_d)\right|_{s_d=-2+j\,2\sqrt{3}} = 1$ **可得** $K_c = 4$**，**

从而可得超前校正装置的传递函数 $G_{c1}(s) = \frac{4(s+2)}{s+4}$

基于根轨迹法设计超前-滞后校正

(iv) 滞后校正装置

- 经超前校正后，系统的开环传递函数为 $G_p(s)G_{c1}(s) = \frac{16}{s(s+4)}$
- 此时系统的静态速度误差系数为 $K_V'' = 4\ \mathrm{s}^{-1}$， $\frac{K_V}{K_V''} = 5$
- 因此在选择滞后校正装置传递函数的零极点时应满足 $\beta = \frac{z_2}{p_2} = 5$，

例如可选择 $z_2 = -0.1$， $p_2 = -0.02$

- 可得滞后校正装置的传递函数 $G_{c2}(s) = \frac{s+0.1}{s+0.02}$

基于根轨迹法设计超前-滞后校正

(v) 检验校正后的系统是否满足要求

$$G_c(s)G_p(s) = 4 \cdot \frac{s+2}{s+4} \cdot \frac{s+0.1}{s+0.02} \cdot \frac{4}{s(s+2)} = \frac{16(s+0.1)}{s(s+4)(s+0.02)}$$

- **闭环极点为** $s_{1,2} = -1.959 \pm j\,3.441$,

  $s_3 = -0.102$ **(与闭环零点** $z = -0.1$ **非常接近)**

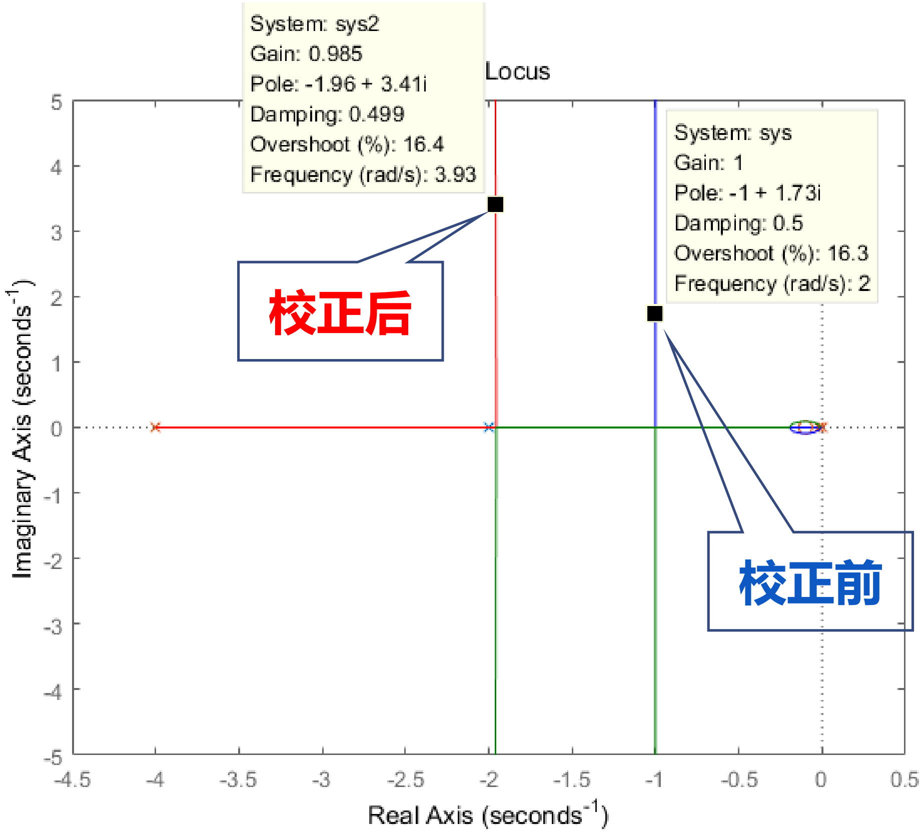
- **实际主导极点为** $s_{\mathrm{d}} = -1.959 \pm j\,3.441$, **与期望值** $s_{\mathrm{d}} = -2 \pm j\,2\sqrt{3}$ **非常接近**

- **速度误差系数** $K_V = 20\ \mathrm{s}^{-1}$

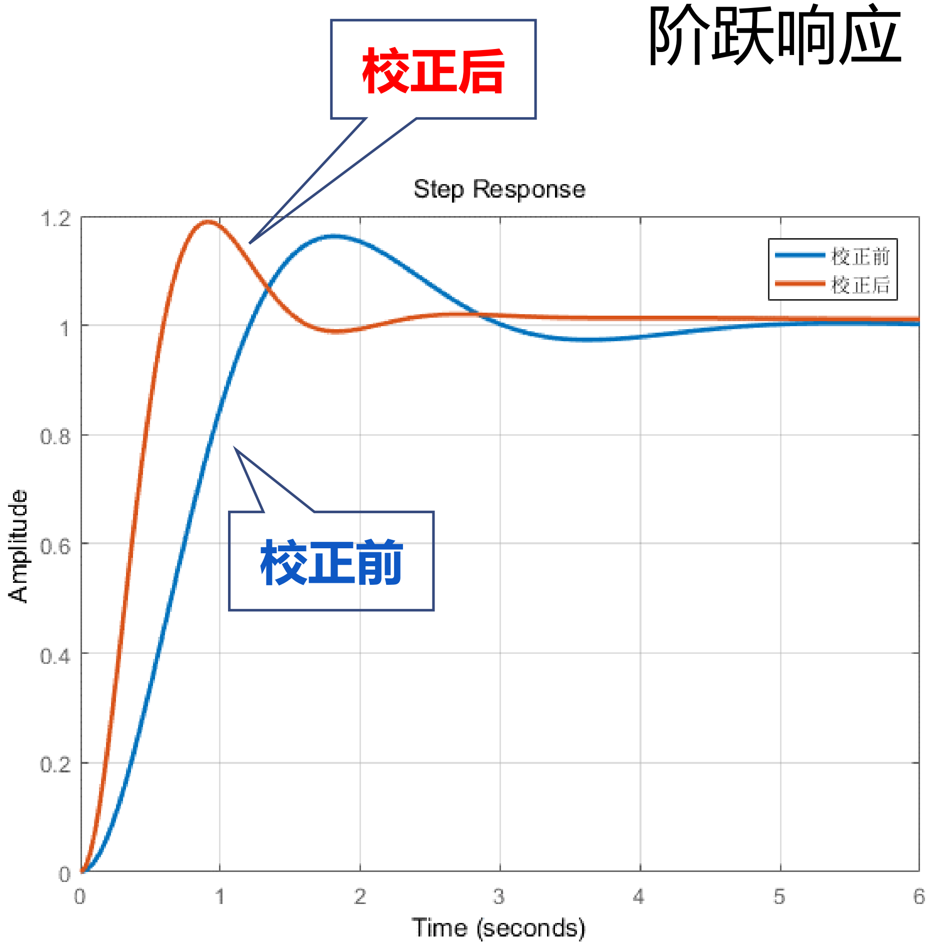
因此，设计满足要求。

基于根轨迹法设计超前-滞后校正

根轨迹



阶跃响应



基于根轨迹法设计超前-滞后校正

例：给定 $G_p(s)=\dfrac{4}{s(s+0.5)}$，设计校正装置使校正后的闭环系统满足：

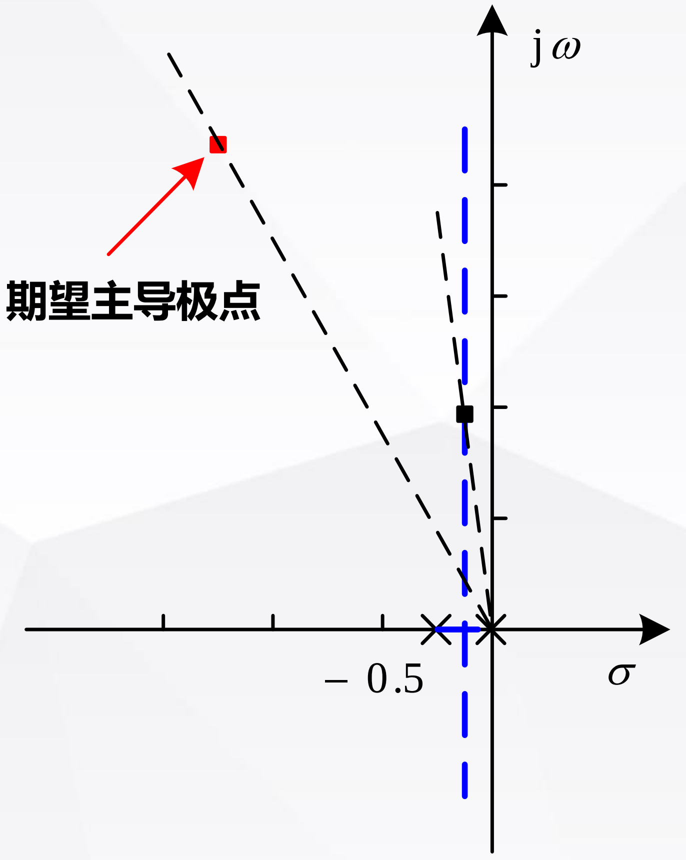
$K_V = 50\ \mathrm{s}^{-1}$，**闭环主导极点** $\omega_n = 5\ \mathrm{rad/s},\ \zeta = 0.5.$

(i) 期望闭环主导极点

$$s_\mathrm{d} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$= -2.5 \pm j4.33$$

(ii) 校正前系统： $K_V' = 8\ \mathrm{s}^{-1}$

$$s_{1,2} = -0.25 \pm j1.98$$
$$(\omega_n = 2\ \mathrm{rad/s},\ \zeta = 0.125)$$



静态和动态性能都不理想，采用超前-滞后校正

基于根轨迹法设计超前-滞后校正

$$G_c(s)G_p(s) = K_c \cdot \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}} \cdot \frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}} \cdot \frac{4}{s(s+0.5)}$$

(iii) 计算 K_c

- $K_V = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G_p(s) = 8K_c = 50 \quad \Rightarrow \quad K_c = 6.25$

(iv) 滞后校正装置：

- 选择 $T_2 = 10 \gg 1$, 使得 $\left|\frac{s_\mathrm{d} + 1/T_2}{s_\mathrm{d} + 1/(\beta T_2)}\right| \approx 1$

这样后面设计超前校正时，滞后校正影响较小

基于根轨迹法设计超前-滞后校正

(v) 确定超前校正在 $s_d = -2.5 \pm j4.33$ 需要满足的条件 ($K_c = 6.25$)

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{4}{s(s+0.5)} \cdot K_c \cdot \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}} \cdot \frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{\beta T_2}} \approx \frac{6.25 \times 4}{s(s+0.5)} \cdot \frac{s+\frac{1}{T_1}}{s+\frac{\beta}{T_1}} = -1$$

- **需要提供的幅值**

$$\left|G_p(s_d)G_c(s_d)\right| = 1$$

$$\Rightarrow \left|\frac{s_d+\frac{1}{T_1}}{s_d+\frac{\beta}{T_1}}\right| \approx \left|\frac{6.25\times4}{s_d(s_d+0.5)}\right|^{-1} \approx 0.954$$

- **需要提供的相角**

$$\arg\left[G_p(s_d)\right] + \arg\left[G_c(s_d)\right] = -180^o$$

$$\Rightarrow \arg\left[\frac{s_d+\frac{1}{T_1}}{s_d+\frac{\beta}{T_1}}\right] \approx 55^\circ$$

基于根轨迹法设计超前-滞后校正

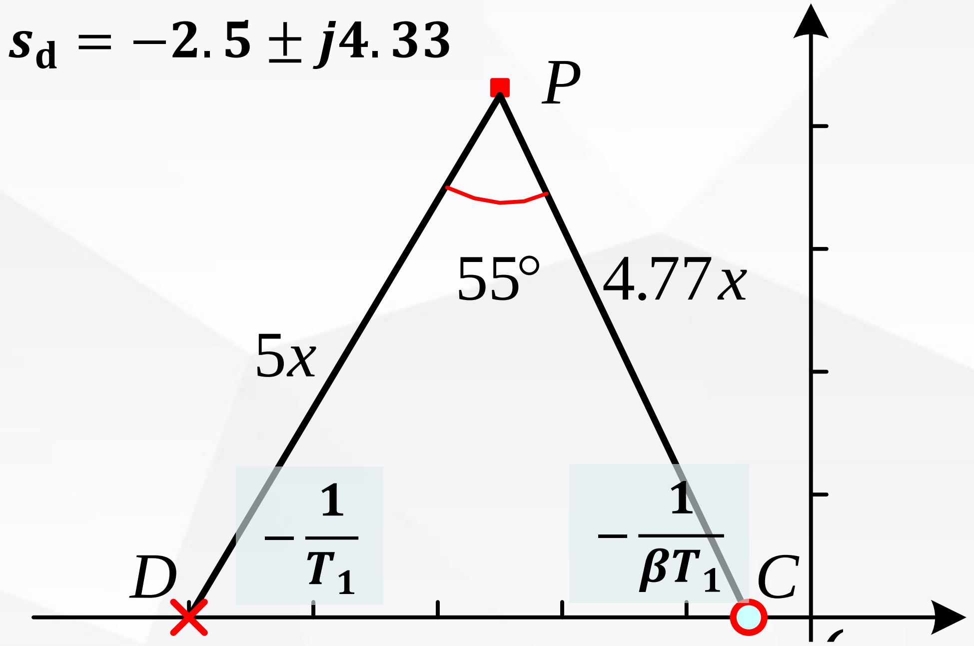
(vi) 通过上述根轨迹条件确定超前校正参数 β 和 T_1

$$\left|\frac{s_d+\frac{1}{T_1}}{s_d+\frac{\beta}{T_1}}\right| \approx 0.954=\frac{4.77}{5} \qquad \arg\left[\frac{s_d+\frac{1}{T_1}}{s_d+\frac{\beta}{T_1}}\right] \approx 55^\circ$$

- **通过三角计算可以确定**

$$\frac{1}{T_1}\approx 0.5, \qquad \beta \approx 10$$

- **校正装置零点 $-1/T_1$ 恰好对消了一个对象极点**

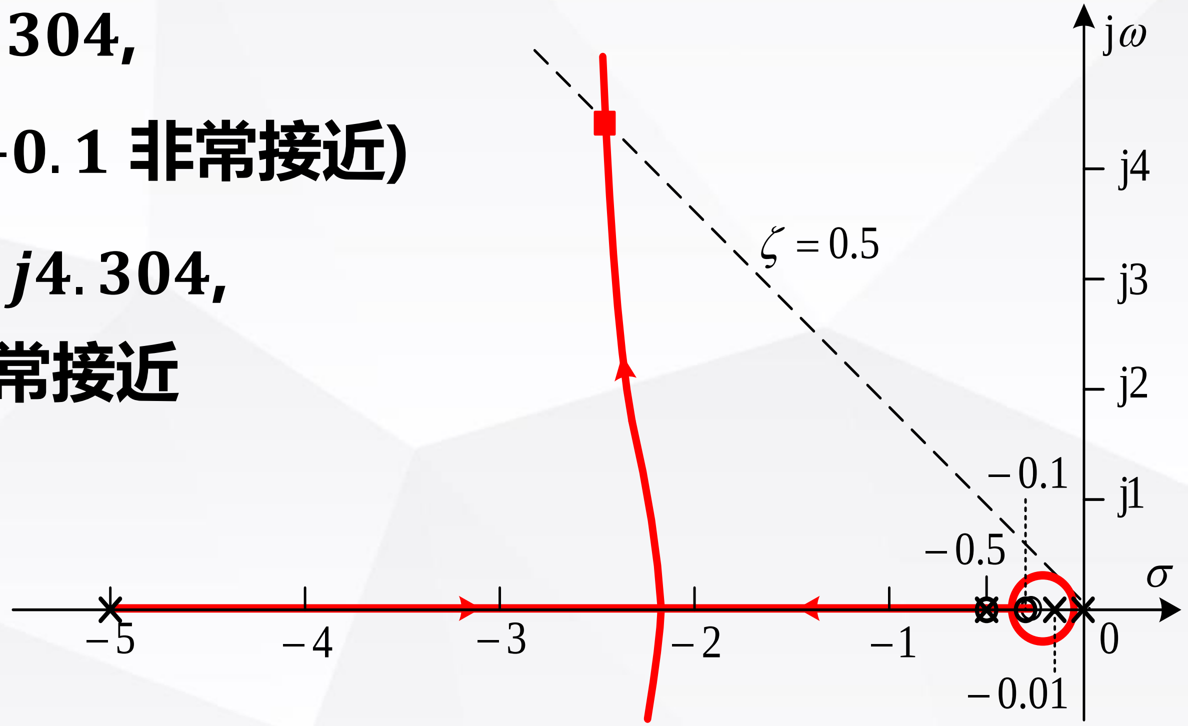


基于根轨迹法设计超前-滞后校正

(vii) 检验校正后的系统是否满足要求

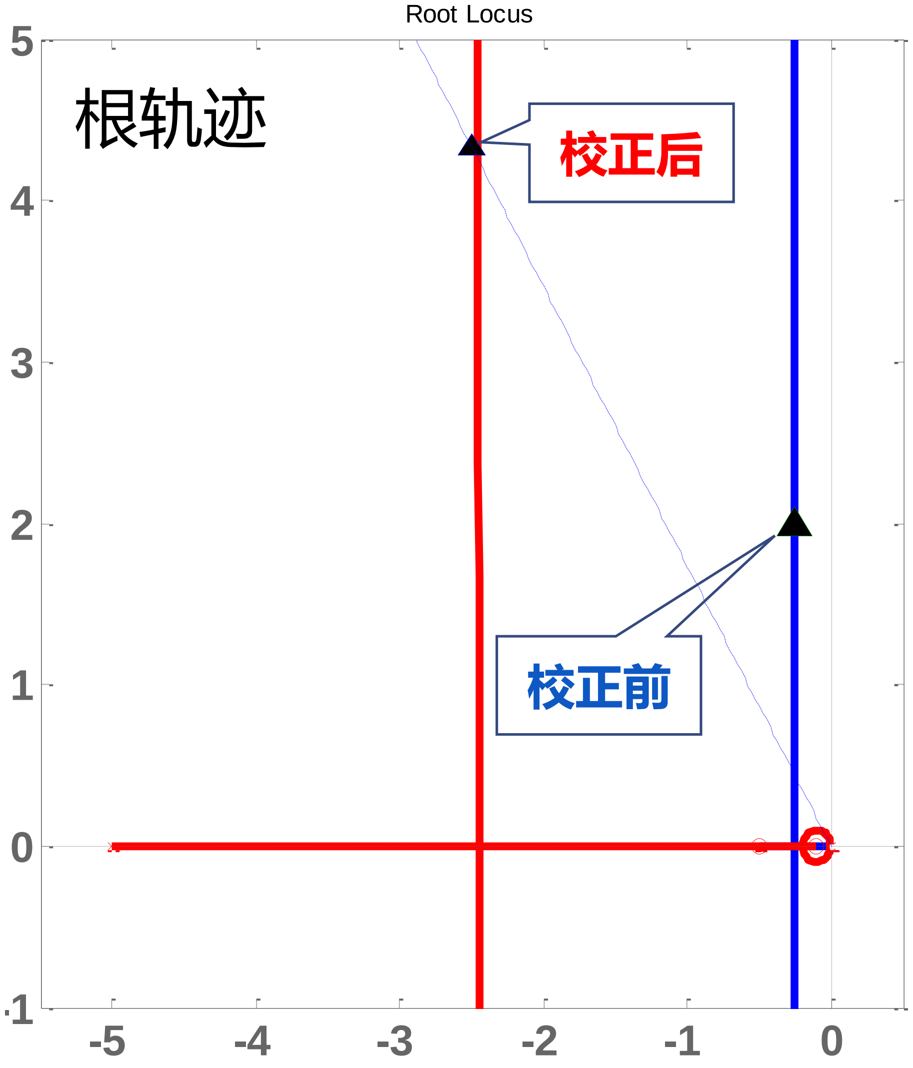
$$G_c(s)G_p(s) = 6.25 \cdot \frac{s+0.5}{s+5} \cdot \frac{s+0.1}{s+0.01} \cdot \frac{4}{s(s+0.5)} = \frac{25(s+0.1)}{s(s+5)(s+0.01)}$$

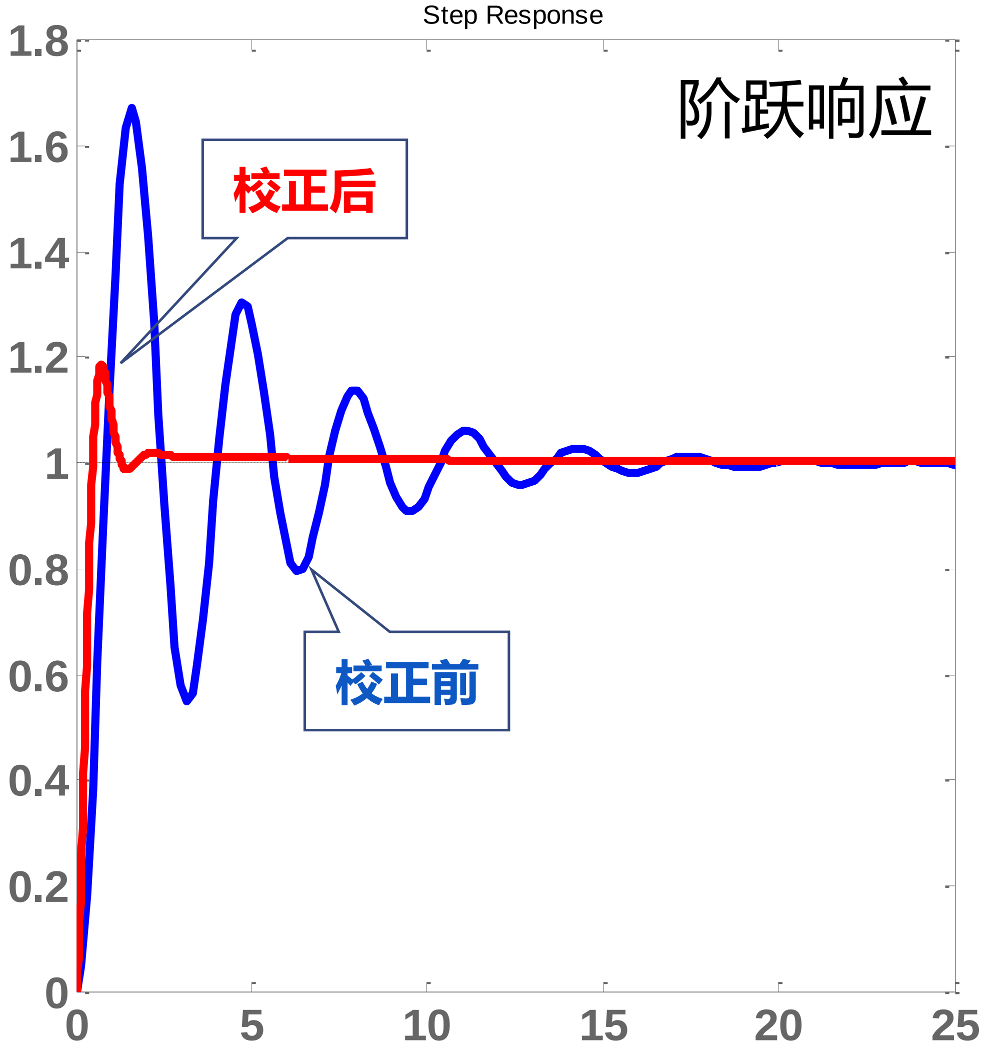
- **闭环极点为 $s_{1,2} = -2.454 \pm j4.304$,**
  $s_3 = -0.102$ (与闭环零点 $z = -0.1$ 非常接近)
- **实际主导极点为 $s_d = -2.454 \pm j4.304$,**
  与期望值 $s_d = -2.5 \pm j4.33$ 非常接近
- **速度误差系数 $K_V = 50\ s^{-1}$**



因此，设计满足要求。

基于根轨迹法设计超前-滞后校正





两种校正方法（频率域法，根轨迹法）总结

<table>
<tr><th>性能指标</th><th>校正方法</th><th>输入量</th><th>校正所带来的影响</th><th>副作用</th><th>校正装置形式</th></tr>
<tr><td rowspan="6">静态误差 δ
超调 σ
过渡过程时间 t_s</td><td rowspan="3">频率域法</td><td rowspan="3">静态误差系数 K，相位裕度 γ，截止频率 ω_c</td><td>超前：增大 K，指定ω_c，增大 γ</td><td>增大ω_c</td><td>$K_c\dfrac{1+\alpha Ts}{1+Ts}(\alpha>1)$</td></tr>
<tr><td>滞后：增大 K，减小ω_c，增大 γ</td><td>减小ω_c</td><td>$K_c\dfrac{1+Ts}{1+\beta Ts}(\beta>1)$</td></tr>
<tr><td>超前滞后：增大 K，增大 γ，维持 ω_c 不变</td><td></td><td>$K_c\dfrac{1+\alpha T_1 s}{1+T_1 s}\cdot\dfrac{1+T_2 s}{1+\beta T_2 s}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">根轨迹法</td><td rowspan="3">静态误差系数 K，阻尼系数 ζ，无阻尼自振频率 ω_n</td><td>超前：主导极点左移</td><td>K 可能减小</td><td>$K_c\dfrac{s-z_c}{s-p_c}(z_c<p_c)$</td></tr>
<tr><td>滞后：K 增大，主导极点位置不变</td><td></td><td>$\dfrac{s-z_c}{s-p_c}(z_c>p_c)$</td></tr>
<tr><td>超前滞后：K 增大，主导极点左移</td><td></td><td>$K_c\dfrac{s-z_1}{s-p_1}\cdot\dfrac{s-z_2}{s-p_2}$</td></tr>
</table>