

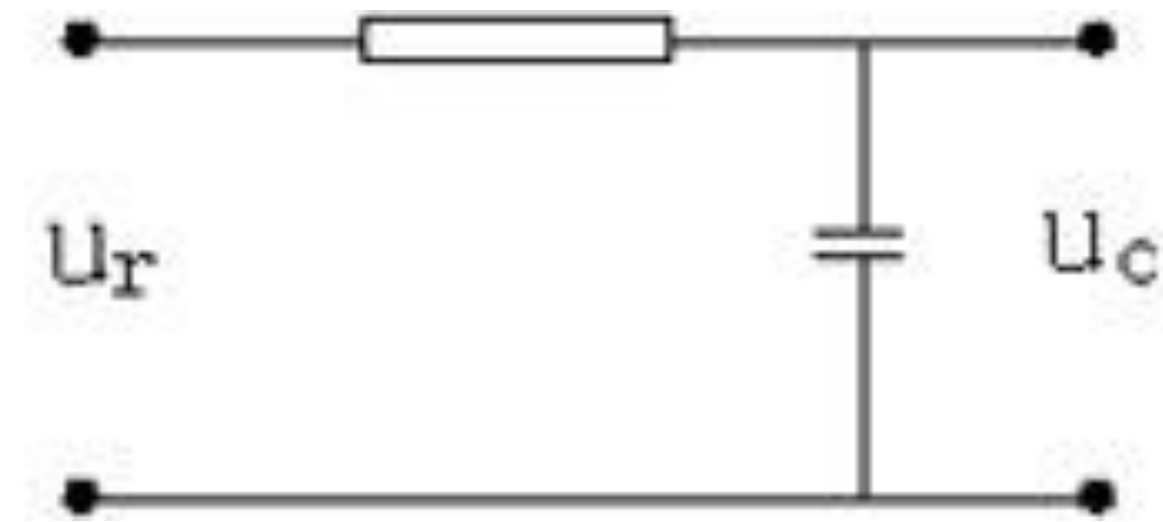
❖ 基本内容

- 频率响应特性
- 频率响应图像
- 基本单元的波特图
- 复杂系统频率特性的绘制
- 奈奎斯特稳定判据
- 最小相位系统的稳定裕度

频率响应特性

频率特性

从 RC 电路对正弦信号的响应, 引出频率特性



$u_r = X \sin \omega t$ 由电路知识可知, u_c 也是同频率的正弦信号 (稳态时), 只不过幅值和相位发生变化, 它们之间的关系满足

$$\frac{\dot{u}_c}{\dot{u}_r} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{RCj\omega + 1} = \frac{1}{\sqrt{(RC)^2 \omega^2 + 1}} \angle -\operatorname{arctg} RC\omega$$

频率特性

称输出信号幅值相位与频率的关系为系统的**频率特性**

回忆RC电路的传递函数

$$\frac{1}{RCs + 1}$$

可以发现，只需 $s \rightarrow j\omega$ 就可以获得系统对应的频率特性，
即从系统的传递函数可以直接计算频率特性

频率特性

提出问题

- 1、频率特性有什么作用？
- 2、如果输入不是正弦，而是一般周期函数或者非周期函数，该如何处理？
- 3、如果已知传递函数 $G(s)$ ，那它的频率特性是不是 $G(j\omega)$ ？

频率响应法

- 1. 频率特性虽然是系统稳态时的响应，但反映了系统的运动规律可以用来评价系统的稳定性、稳态精度、动态品质
——利用频率特性研究系统性能的方法称为频率响应法**
- 2. 任何输入都可以分解为正弦信号叠加，而输出响应可以理解对于这些正弦信号响应的叠加**
- 3. 与传递函数相互对应，从传递函数可以计算出频率特性**
- 4. 具有明确的物理意义
系统的频率特性可以通过实验获得（省去了机理建模）**

Fourier变换

满足Dirichlet (狄里赫利) 条件的周期函数, 都可以用Fourier变换表示为一系列的谐波 (正余弦) 之和

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_1 t + b_n \sin n\omega_1 t$$

其中:

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{+\frac{T_1}{2}} f(t) dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{+\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt, \quad -\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{+\frac{T_1}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt,$$

T_1 为 $f(t)$ 的周期, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ 为基波

Fourier变换

可以看出，周期函数 $f(t)$ 的频谱是离散的，即只在 $\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1$ 等频率下有谱线。

当 $f(t)$ 是非周期函数，可以看成 $T_1 \rightarrow \infty$ 的周期函数

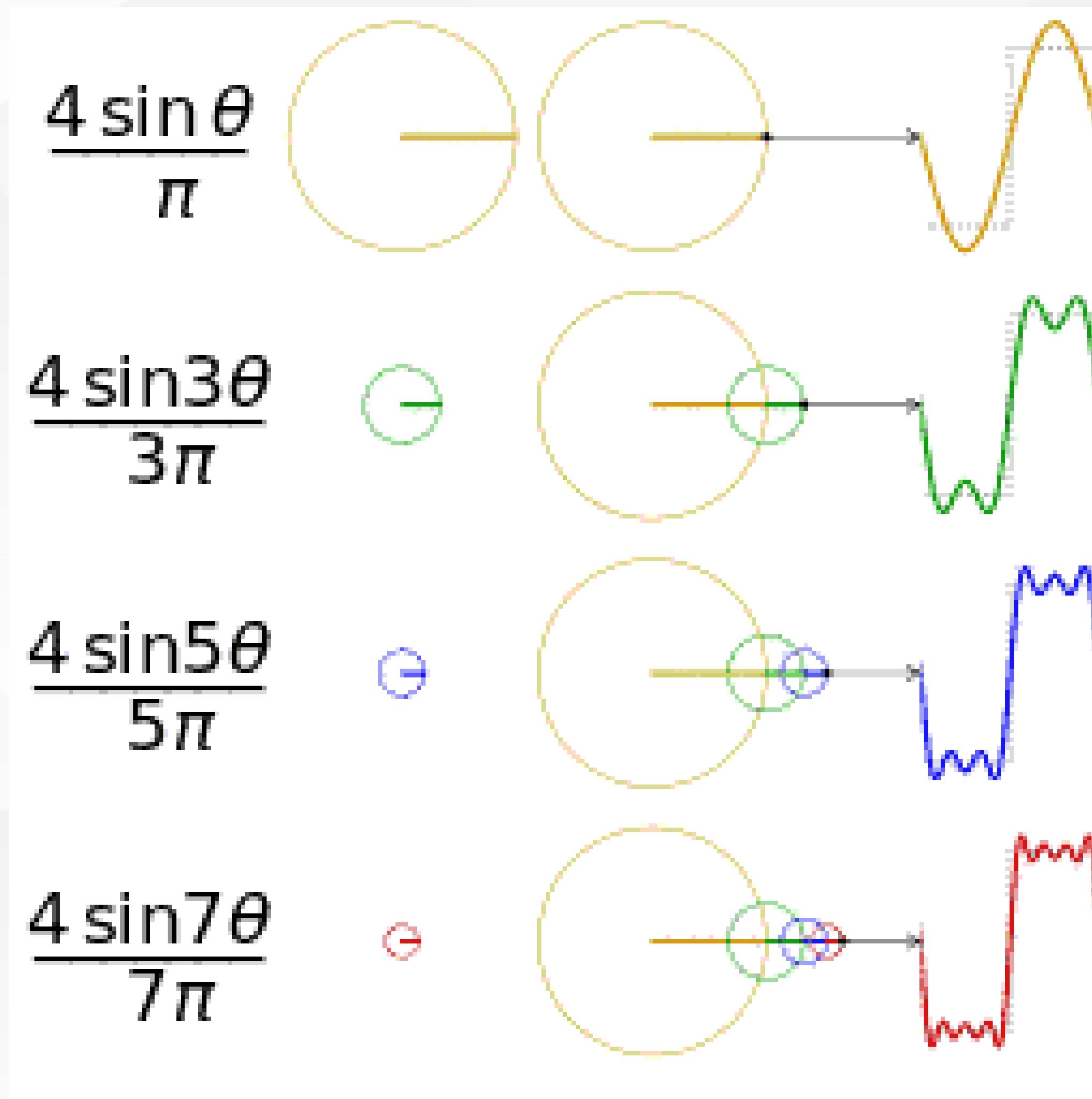
这时基波 $\omega_1 \rightarrow 0$ ，各次谐波之间的差趋向于无穷小，即无限接近，谐波的幅值 $\rightarrow 0$

∴ 非周期函数的频谱含有一切频率成分，即是由无穷多个无穷小的谐波组成，所以它的频谱是连续的。

参考教材P249~253

Fourier变换

矩形方波的构成



Fourier变换

Fourier变换的数学描述

$$\bar{f}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

与拉普拉斯变换对照：

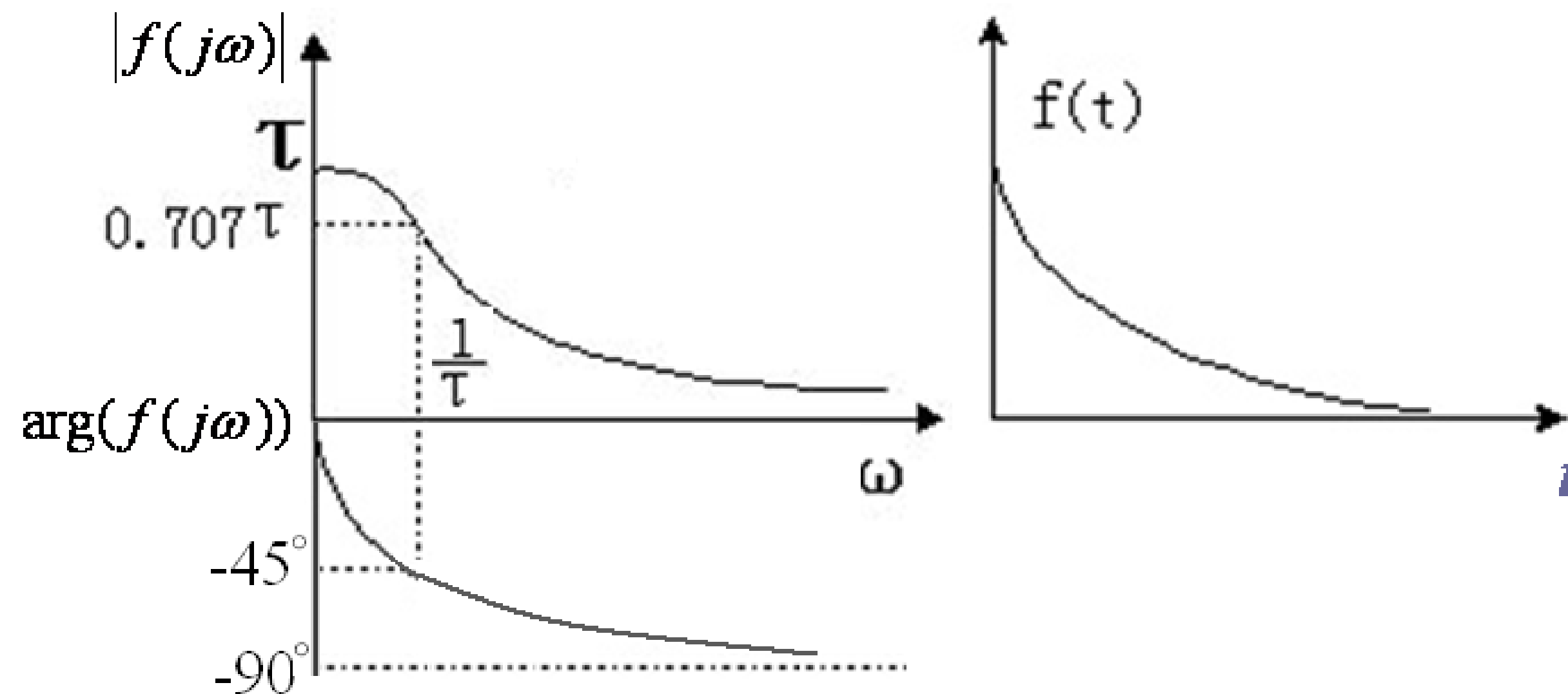
$$\bar{f}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Fourier变换

举例: $f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \mathbf{1}(t)$

$$\bar{f}(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-j\omega t} dt = \frac{\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{\tau}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \angle -\arctan \omega\tau$$

其图像为



$\frac{1}{\tau}$ 称为截止角频率

Fourier变换

从图中可以看到 $f(t)$ 的频谱中含有一切频率成分, ω 从 $0 \rightarrow \infty$

$|\bar{f}(j\omega)|$ 代表频率为 ω 的那项谐波的相对幅值

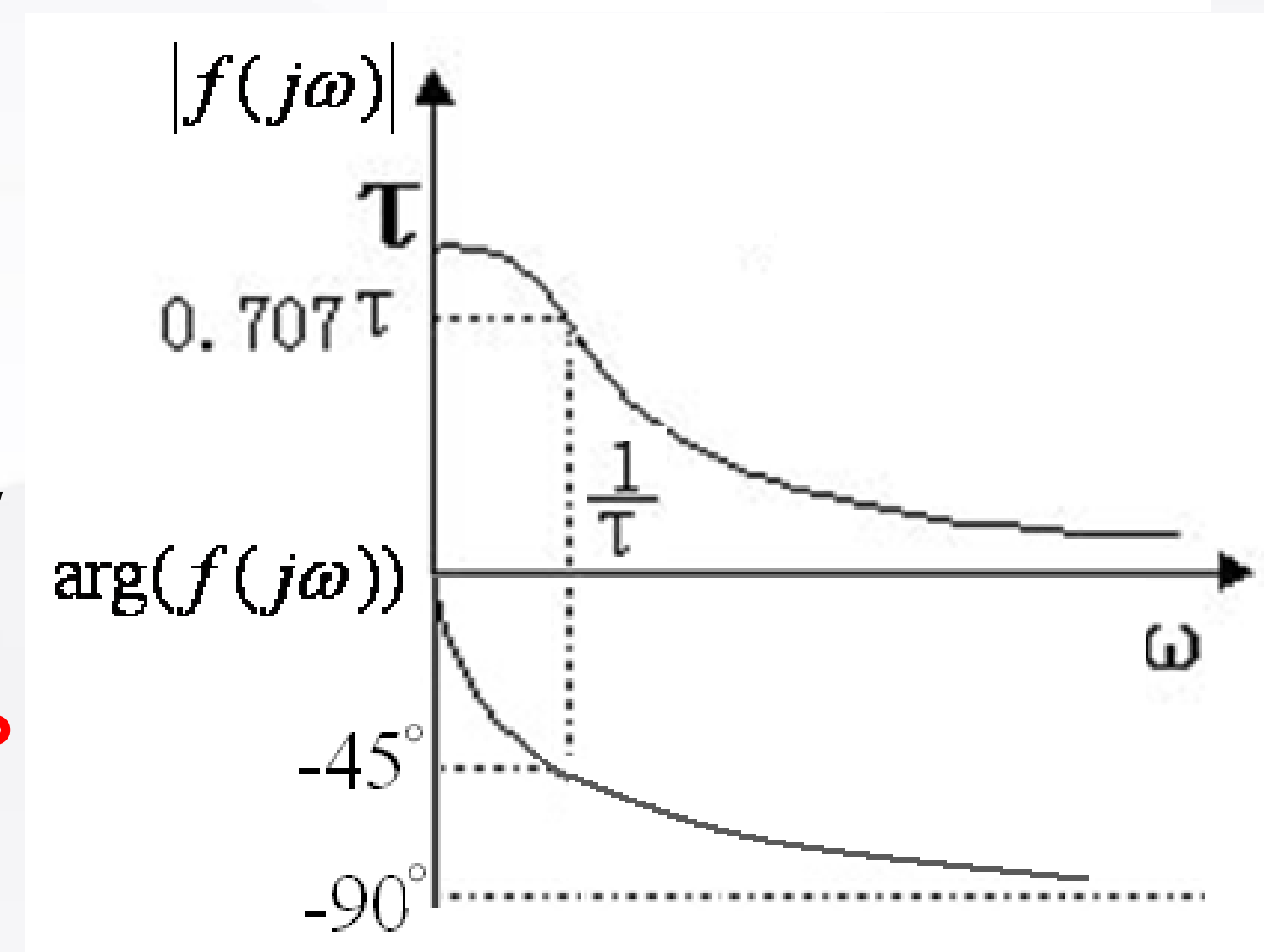
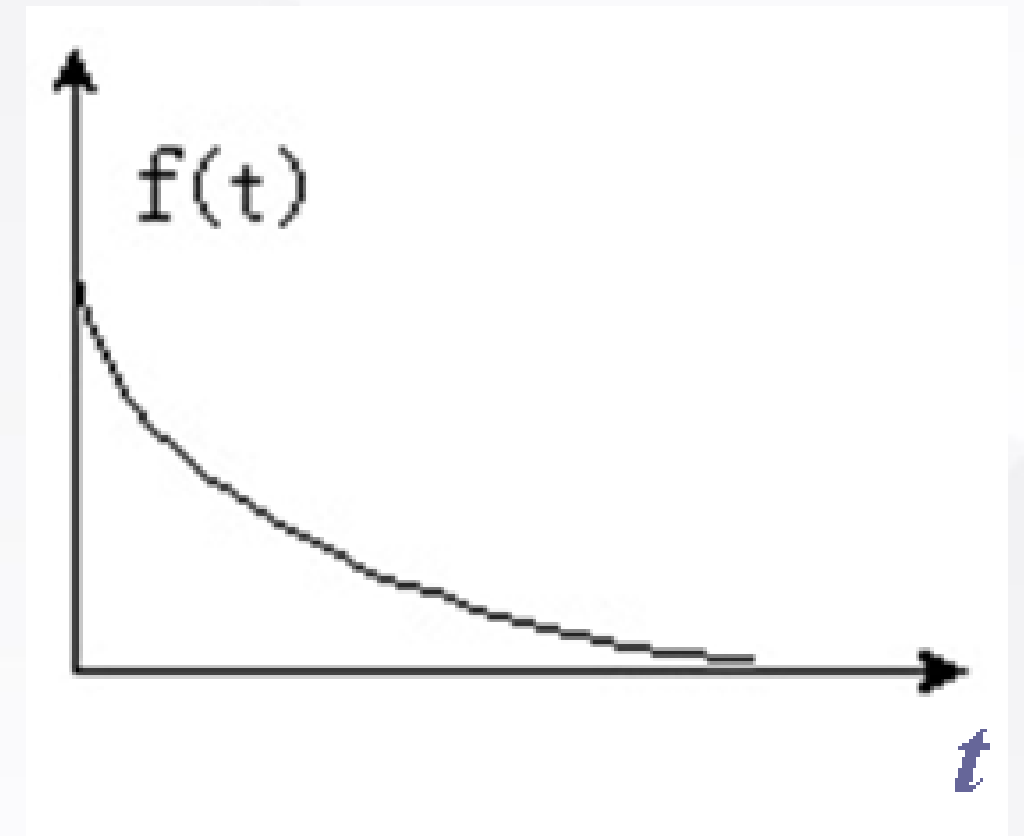
(乘以一个无穷小量才是真正的幅值)

$-\arctg\omega\tau$ 代表频率为 ω 的那项谐波在 $t = 0$ 时刻的初相角。

频带: 通常指截止角频率的10倍。

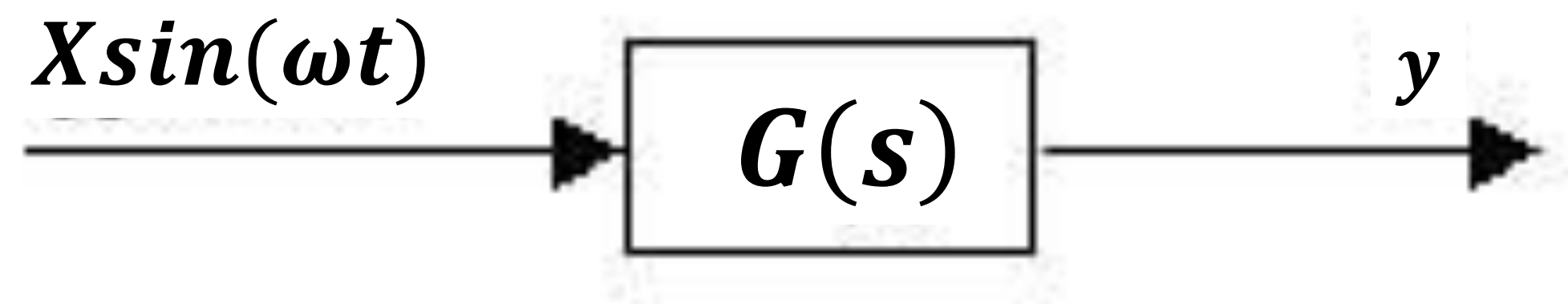
试想当 τ 越小时, $f(t)$ 越尖 $f(j\omega)$ 的频带越宽, 由此可知,

变化越剧烈的函数, 它的频带越宽, 含有的高频成分越多。



频率特性函数

一个正弦信号加到一个对象 $G(s)$ 会产生对应的响应，如何描述输入和输出之间的关系？这与 $G(s)$ 有什么联系？



设
$$G(s) = \frac{p(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n)}$$

其极点 $-s_i$ 都在左半平面

频率特性函数

$$\begin{aligned}\bar{y}(s) &= \bar{x}(s) \cdot G(s) = \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{p(s)}{(s + s_1)(s + s_2) \cdots (s + s_n)} \\ &= \frac{b_1}{s + s_1} + \cdots + \frac{b_n}{s + s_n} + \frac{a}{s + j\omega} + \frac{\bar{a}}{s - j\omega}\end{aligned}$$

$$y(t) = b_1 e^{-s_1 t} + \cdots + b_n e^{-s_n t} + a e^{-j\omega t} + \bar{a} e^{j\omega t}$$

$$\begin{aligned}\text{其中: } a &= \bar{y}(s)(s + j\omega)|_{s=-j\omega} = G(s) \cdot \frac{X\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} (s + j\omega)|_{s=-j\omega} \\ &= G(-j\omega) \cdot \frac{X\omega}{-2j\omega} = -\frac{X}{2j} |G(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)}\end{aligned}$$

$$\text{同理可求 } \bar{a} = \frac{X}{2j} |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad \text{其中 } \phi(\omega) = \arg G(j\omega)$$

频率特性函数

$$\begin{aligned} \text{当 } t \rightarrow \infty \quad y(t) &= \frac{-X}{2j} |G(j\omega)| e^{-j\phi(\omega)} e^{-j\omega t} + \frac{X}{2j} |G(j\omega)| e^{j\phi(\omega)} e^{j\omega t} \\ &= \frac{-X|G(j\omega)| e^{-j(\omega t + \phi(\omega))} + X|G(j\omega)| e^{j(\omega t + \phi(\omega))}}{2j} \\ &= \frac{-X|G(j\omega)|}{2j} \left(e^{-j(\omega t + \phi(\omega))} - e^{j(\omega t + \phi(\omega))} \right) \\ &= X|G(j\omega)| \sin[\omega t + \phi(\omega)] \end{aligned}$$

已知 $x(t) = X \sin(\omega t)$

输出 $y(t)$ 的幅值与输入 $x(t)$ 的幅值之比等于 $G(j\omega)$ 的模 $\frac{|y(t)|}{|x(t)|} = |G(j\omega)|$

输出 $y(t)$ 的相位与输入 $x(t)$ 的相位差就是 $\phi(\omega)$ 等于 $G(j\omega)$ 的角 $\arg G(j\omega)$

$G(j\omega)$: 频率特性, 就是将 $G(s)$ 中的 $s \rightarrow j\omega$

频率特性函数

拓展单一正弦函数的结论：对于任意输入信号，通过 *Fourier* 变换可以把输入信号表示为一系列的正弦函数之和，而对于每一项正弦函数都有上述关系。

系统的频率特性函数 $G(j\omega)$ 定义为系统的 *Fourier* 变换，即输出量的 *Fourier* 变换与输入量的 *Fourier* 变换之比。等同于将传递函数 $G(s)$ 中的 $s \rightarrow j\omega$

$|G(j\omega)|$ 称为幅频特性， $\arg G(j\omega)$ 称为相频特性，它们都是 ω 的函数，都可以用图像表示出来。而根据图像可以分析出系统的许多特性。

频率响应特性的图像

频率特性的图像

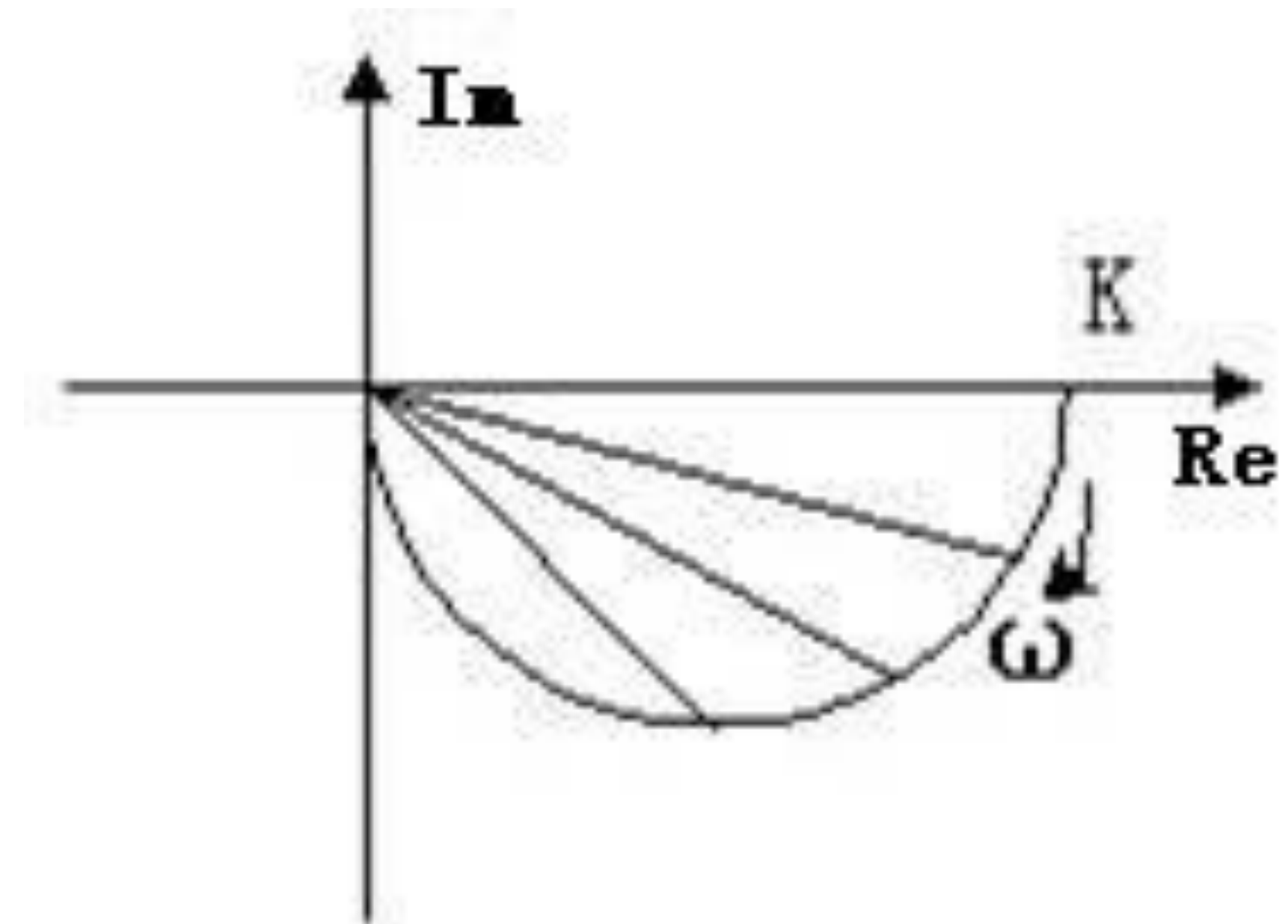
(1) 极坐标图 (Nyquist图) :

在复平面，把频率特性的模和角同时表示出来的图就是极坐标图

看一个惯性环节的频率特性

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} = \frac{k}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \angle -\operatorname{arctg} \omega T$$

ω	0	∞
	k	0
\angle	0	$-\frac{\pi}{2}$



频率特性的图像

可以证明它的图像是一个半圆

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T} = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2} - j \frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\text{令 } x = \frac{k}{1 + \omega^2 T^2}, \quad y = -\frac{k\omega T}{1 + \omega^2 T^2}$$

$$\text{有 } x^2 + y^2 - kx = 0$$

$$\text{即 } \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

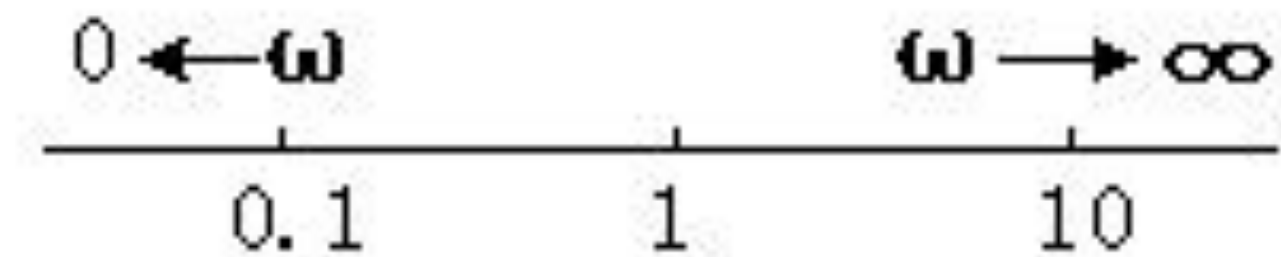
频率特性的图像

(2) 对数坐标图 (Bode图, 伯德图)

频率特性幅值和相位相对于频率 ω 对数的图

横坐标为 ω 轴, 以对数刻度表示之, 十倍频程

纵坐标为幅值的对数 $lg||$ (单位是贝尔和分贝 $20 lg||$), 相位的角度



对数分度:

$lg 2 = 0.301$	$lg 3 = 0.4771$
$lg 4 = 0.602$	$lg 5 = 0.699$
$lg 6 = lg 3 + lg 2 = 0.778$	
$lg 7 = 0.845$	
$lg 8 = 3lg 2 = 0.903$	
$lg 9 = 2lg 3 = 0.954$	

频率特性的图像

画惯性环节的对数频率特性

$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$$

$$\text{令 } k = 1, T = 0.5$$

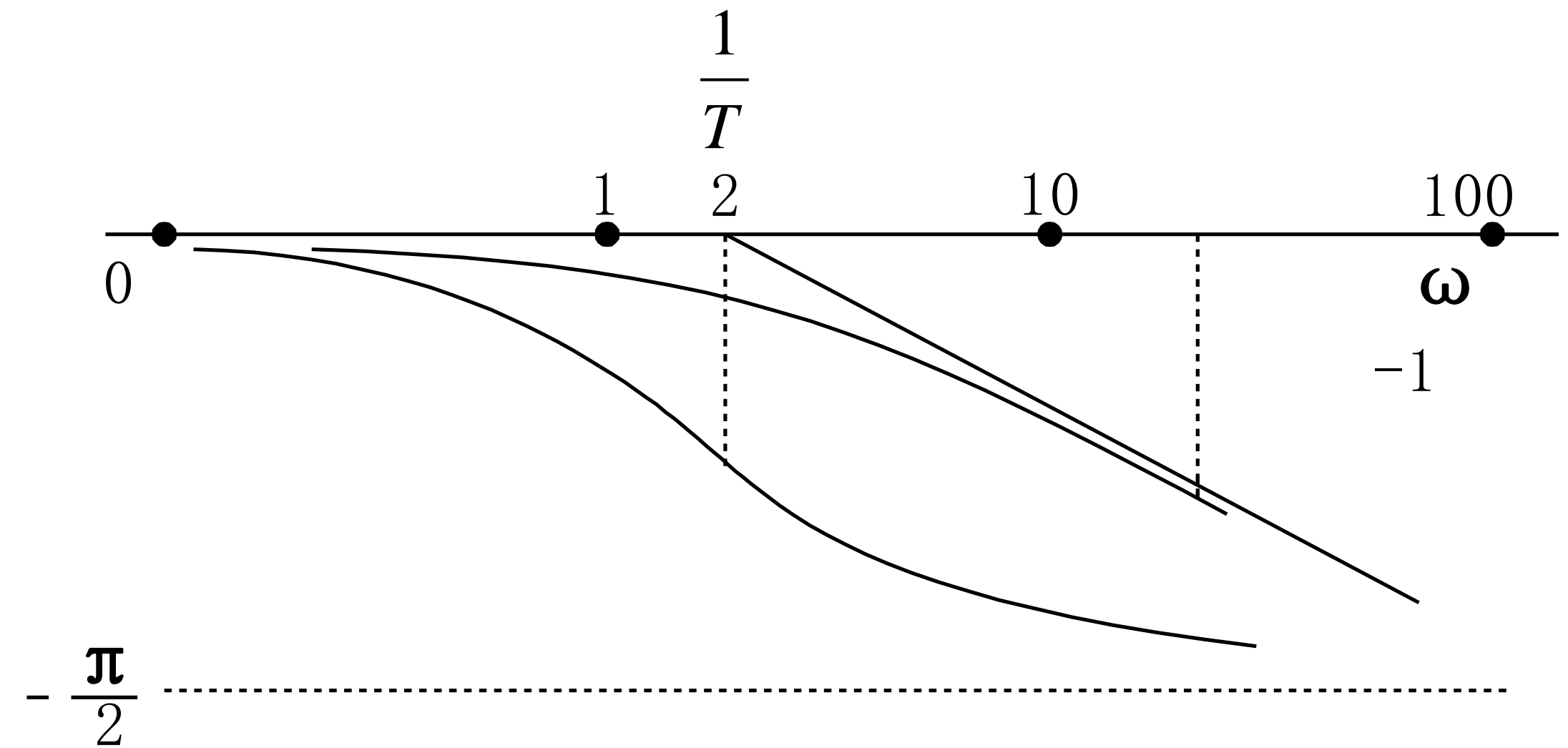
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} \quad \text{幅频特性}$$

$$\omega = \frac{1}{T}, || = \frac{1}{\sqrt{2}}, 20\lg || = -10 \lg 2 = -3 \text{分贝}$$

$$\omega \ll \frac{1}{T}, || \approx 1, 20\lg || = 0 \text{分贝}$$

$$\omega \gg \frac{1}{T}, || \approx \frac{1}{\omega T}, 20\lg || = -20 \lg \omega T$$

ω 每增大十倍, $||$ 下降20分贝



频率特性的图像

相频特性：

$$\angle = -\operatorname{arctg} \omega T$$

$$\omega = \frac{1}{T}, \angle = -45^\circ$$

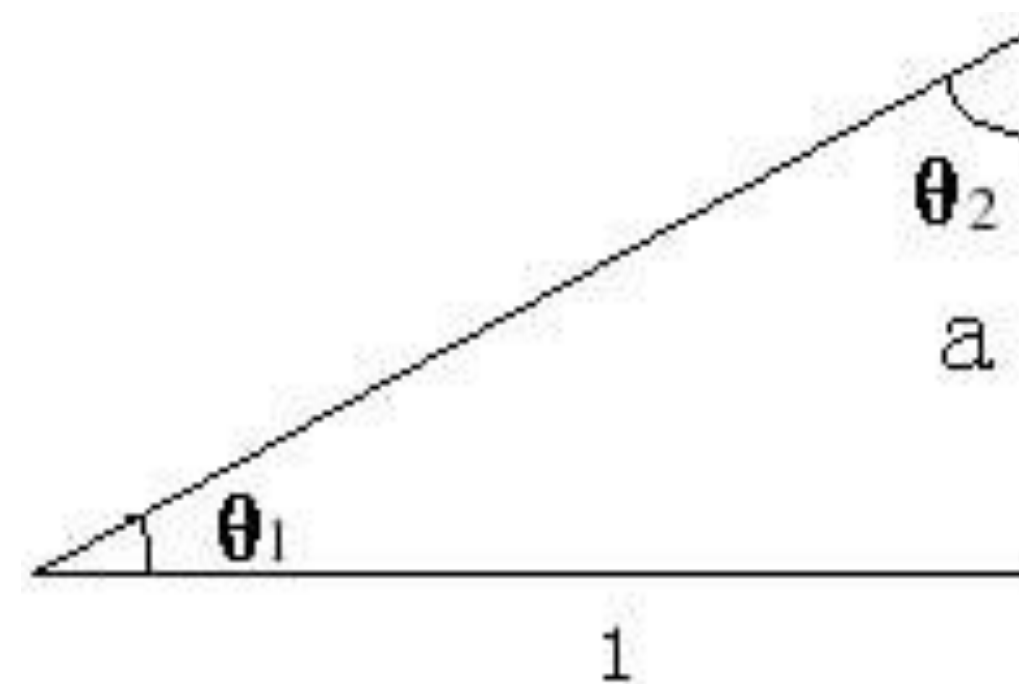
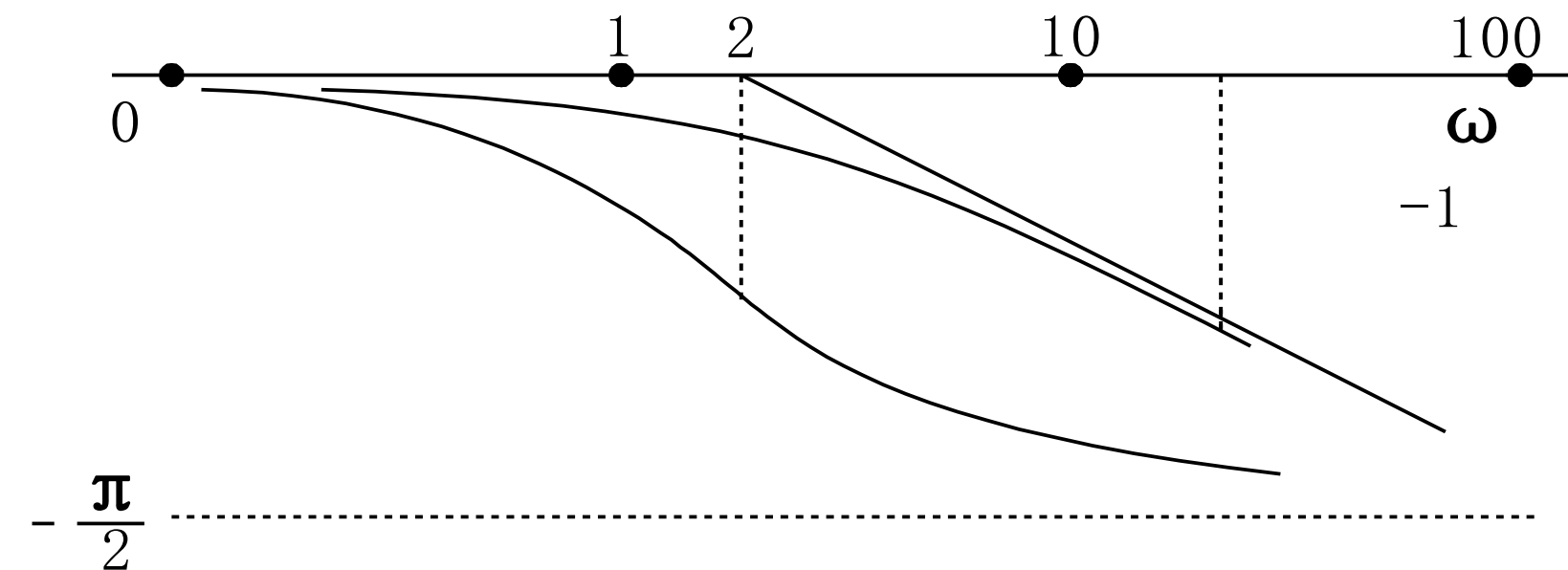
$$\omega \gg \frac{1}{T}, \angle \rightarrow -90^\circ$$

$$\omega \ll \frac{1}{T}, \angle \rightarrow 0^\circ$$

$$\left. \begin{array}{l} \omega = \frac{a}{T} \\ \omega = \frac{1/a}{T} \end{array} \right\} \text{是关于 } \omega = \frac{1}{T} \text{ 中心对称}$$

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} a, \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{a}$$

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$$



频率特性的图像

对数频率特性优点

1) 展宽频率范围

2) k 变, 幅频特性曲线只是上下移动
 T 变, 幅、相频特性曲线只是左右移动 } 形状不变

3) 几个频率特性相乘 (对应传递函数的串联), 对数幅、相特性曲线相加

$$G_1(j\omega)G_2(j\omega) = |G_1(j\omega)|e^{j\phi_1(\omega)} \cdot |G_2(j\omega)|e^{j\phi_2(\omega)} = |G_1||G_2|e^{j[\phi_1+\phi_2]}$$

$$20 \lg|G_1G_2| = 20 \lg|G_1| + 20 \lg|G_2| \quad \angle G_1G_2 = \phi_1 + \phi_2$$

4) 两个频率特性互为倒数, 幅、相特性反号, 关于 ω 轴对称

$$G_1 = \frac{1}{G_2} \quad |G_1| = \frac{1}{|G_2|} \quad \phi_1 = -\phi_2$$

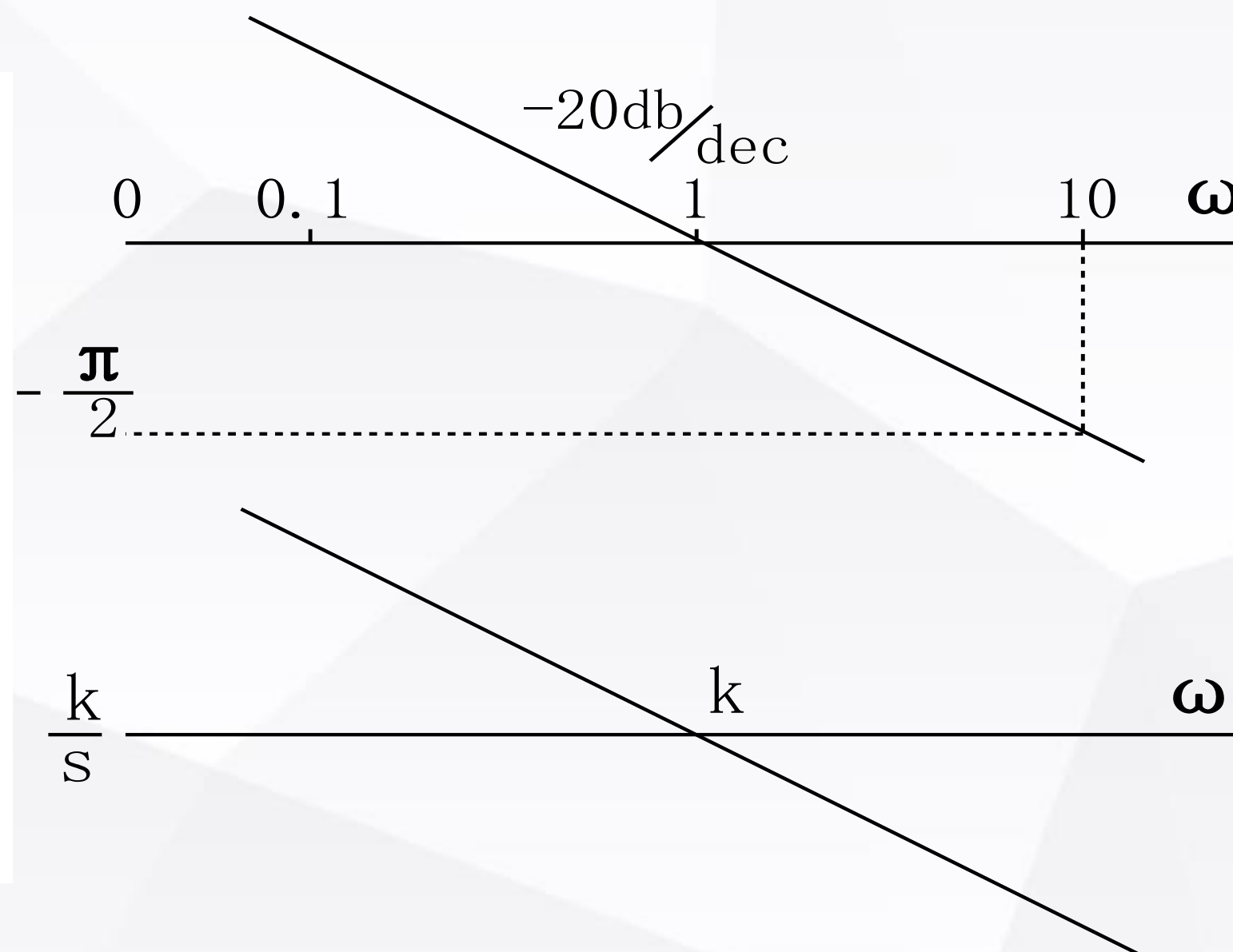
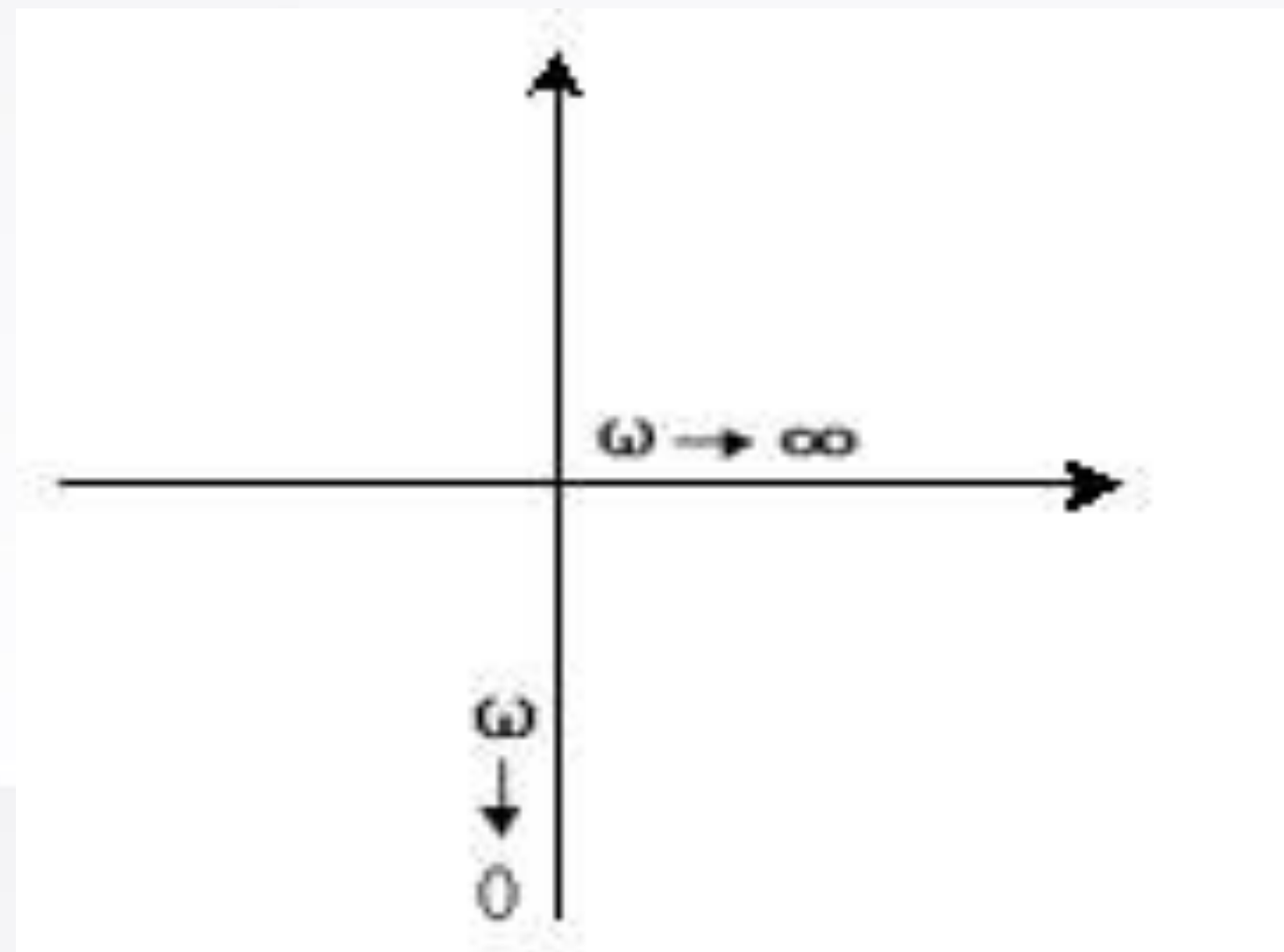
$$20 \lg|G_1| = -20 \lg|G_2|$$

基本环节的频率特性

基本环节的频率特性

(1)比例 $G(s) = k, G(j\omega) = k, || = k, \angle = 0^\circ$

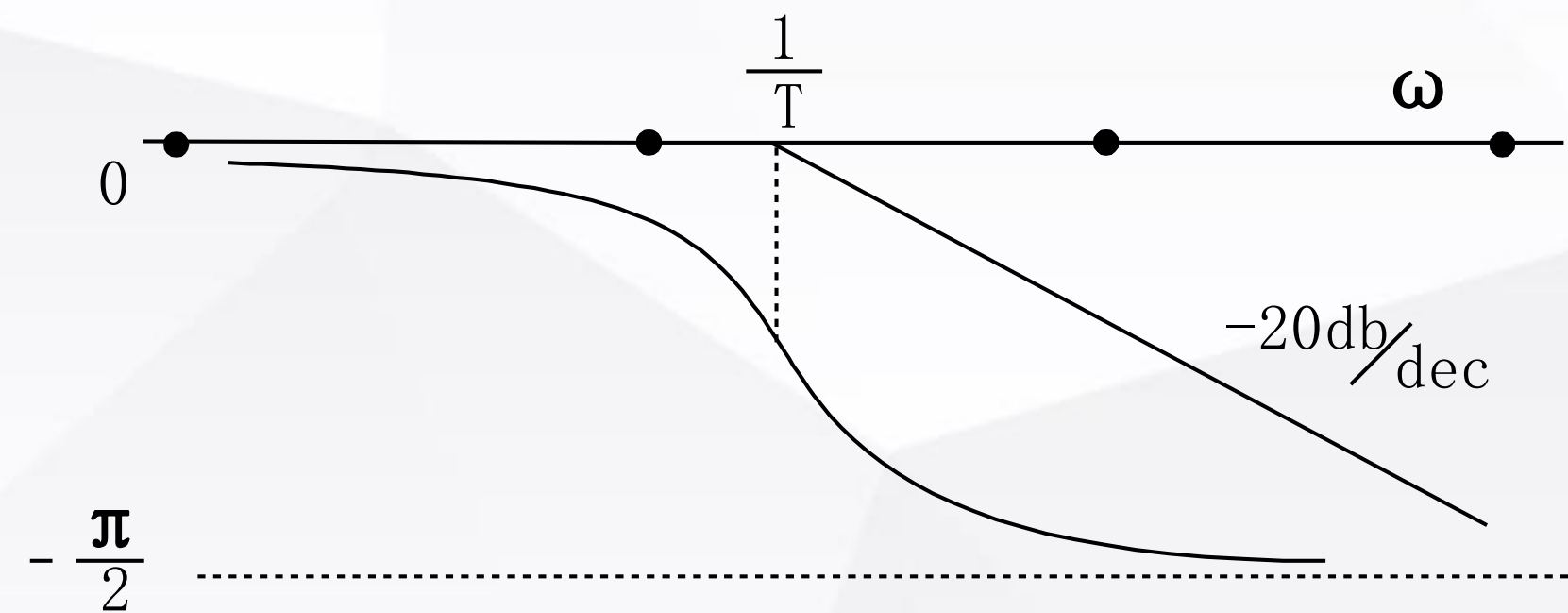
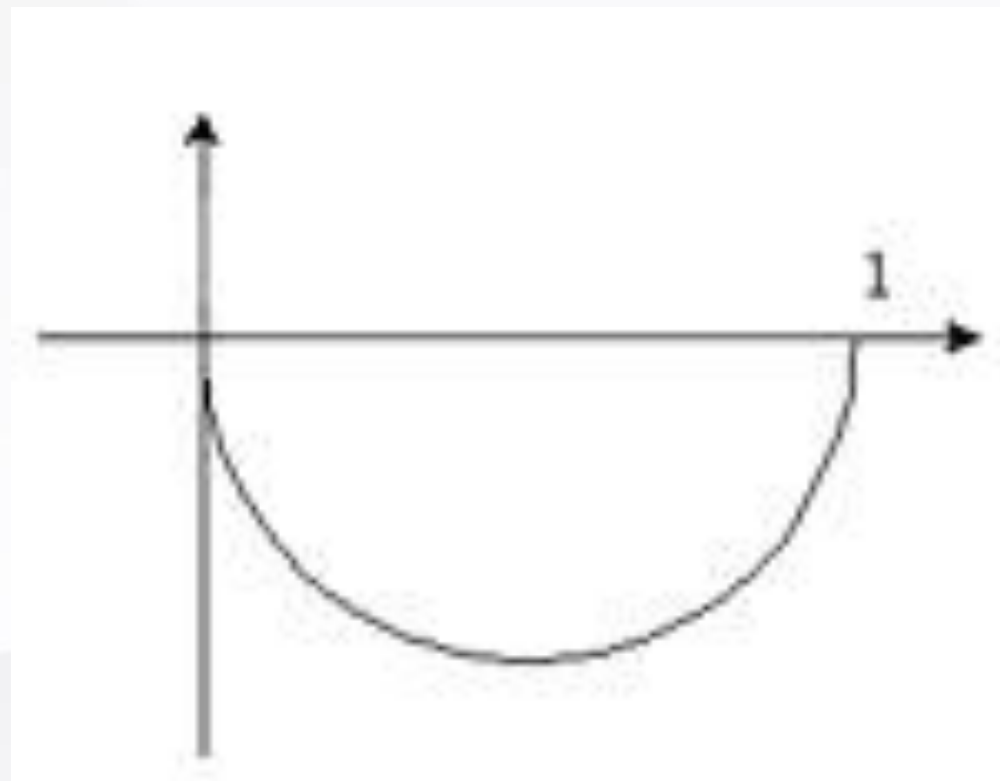
(2)积分 $G(s) = \frac{1}{s}, G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}, || = \frac{1}{\omega}, \angle = -90^\circ$



基本环节的频率特性

(3) 惯性

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}, G(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1},$$
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}, \angle G(j\omega) = -\arctan \omega T$$

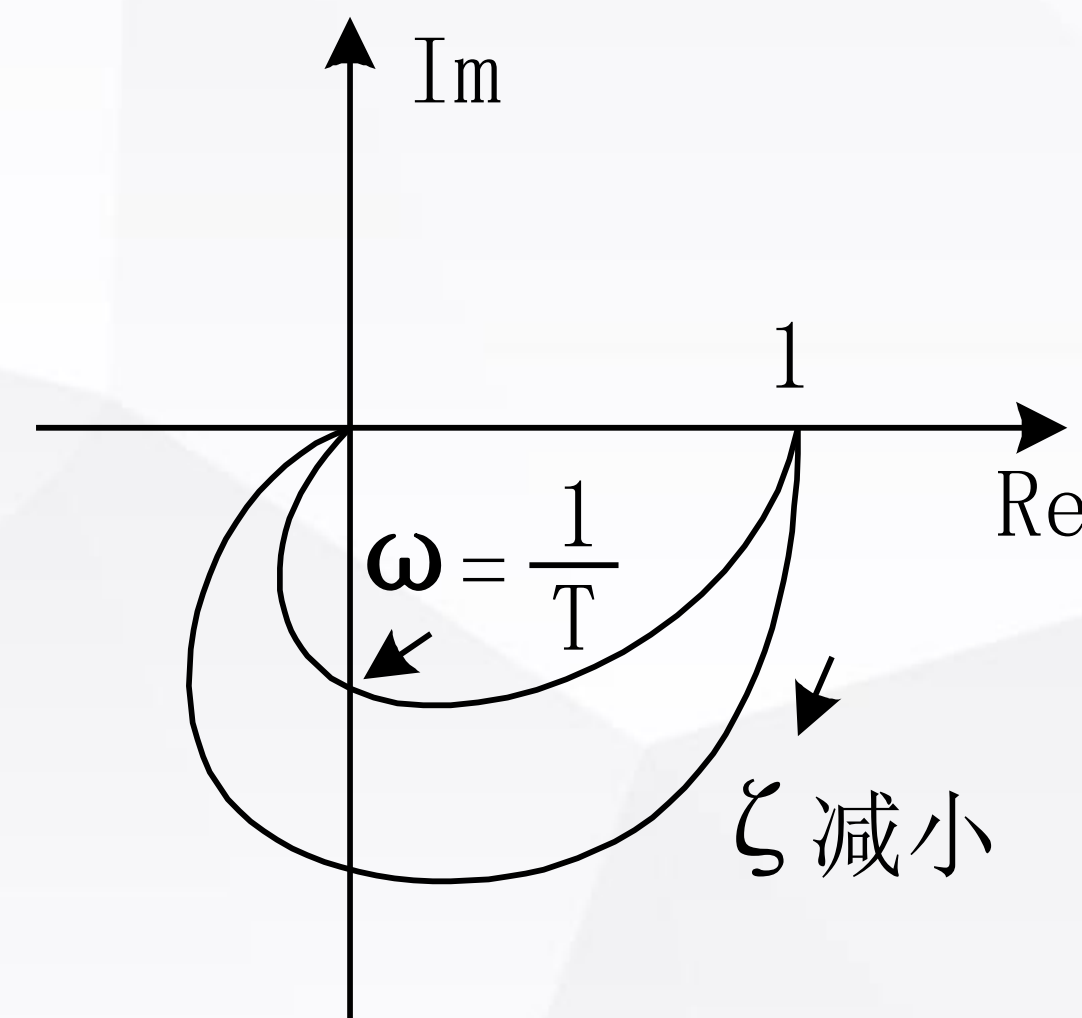
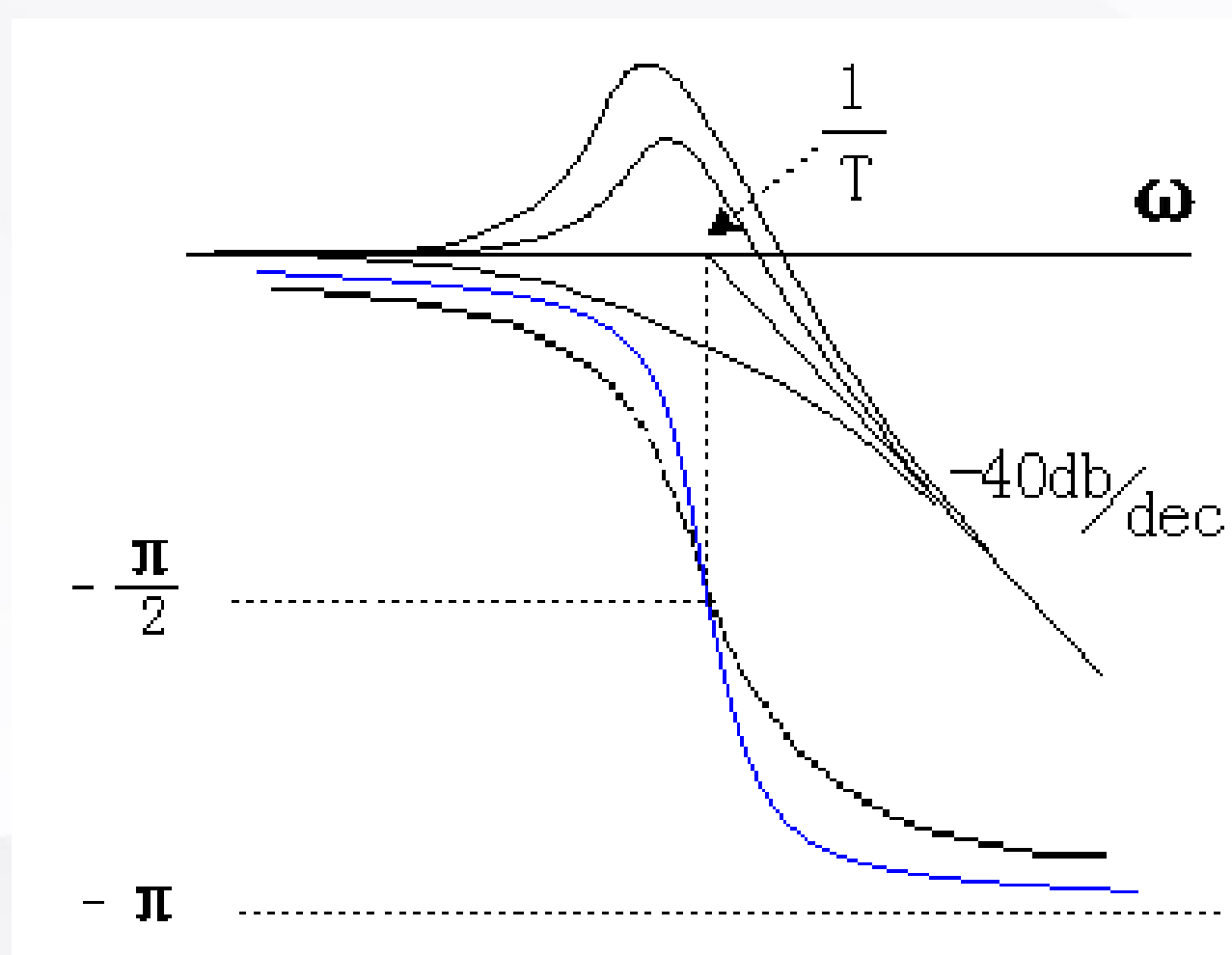


基本环节的频率特性

(4)二阶振荡 $G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$

$$|| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T \omega)^2}}, \angle = -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2}$$

显然幅相特性的形状都与 ζ 有关



对模求导，可得：

峰值频率 $\omega_r = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ ，要求 $\zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ **峰值** $M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$

基本环节的频率特性

分析二阶环节的对数特性

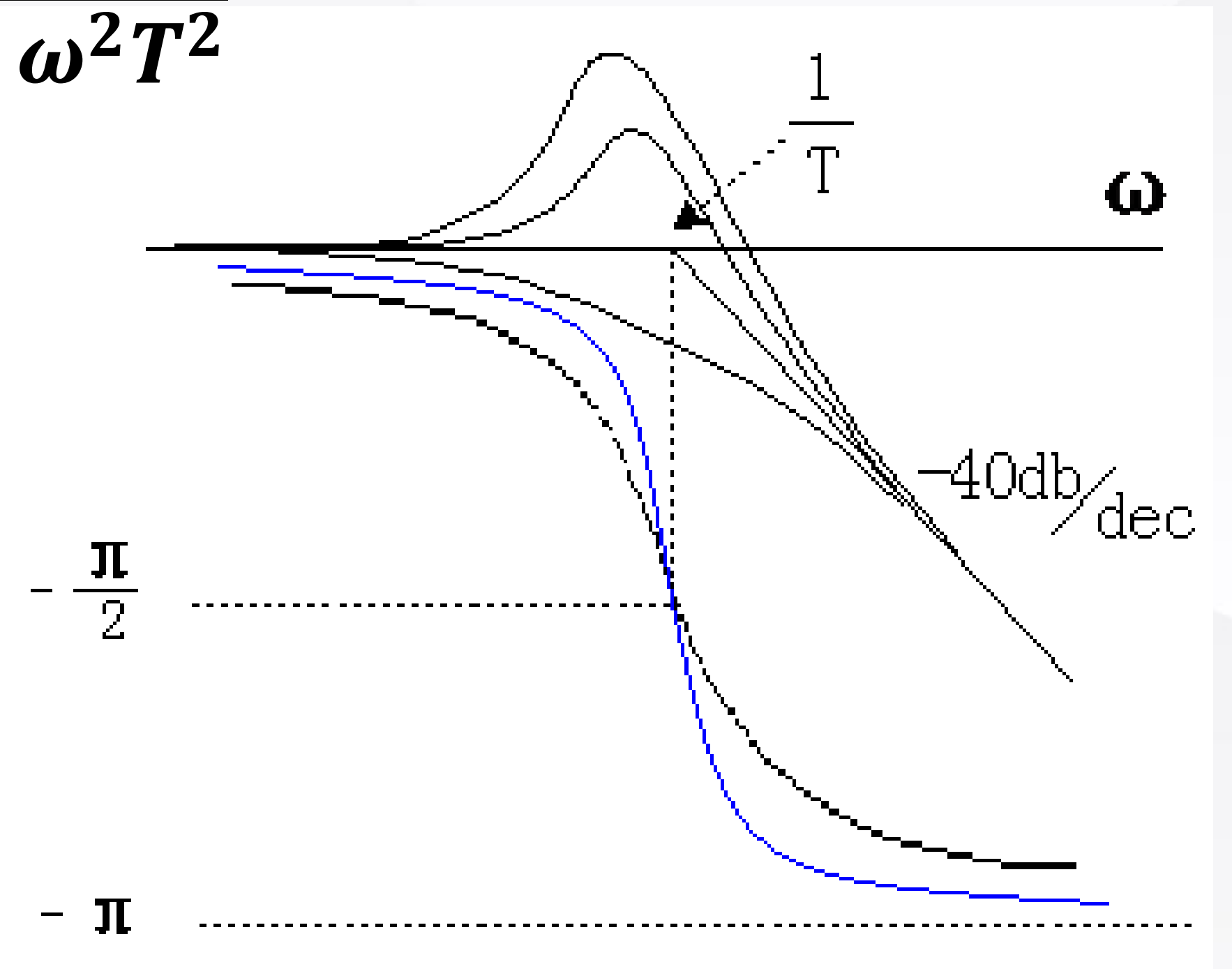
$$G(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

$$|| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T\omega)^2}}, \angle = -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta\omega T}{1 - \omega^2 T^2}$$

$$\omega = \frac{1}{T}, || = \frac{1}{2\zeta}$$

$$\omega \ll \frac{1}{T}, || \approx 1, 20\lg || = 0 \text{ 分贝}$$

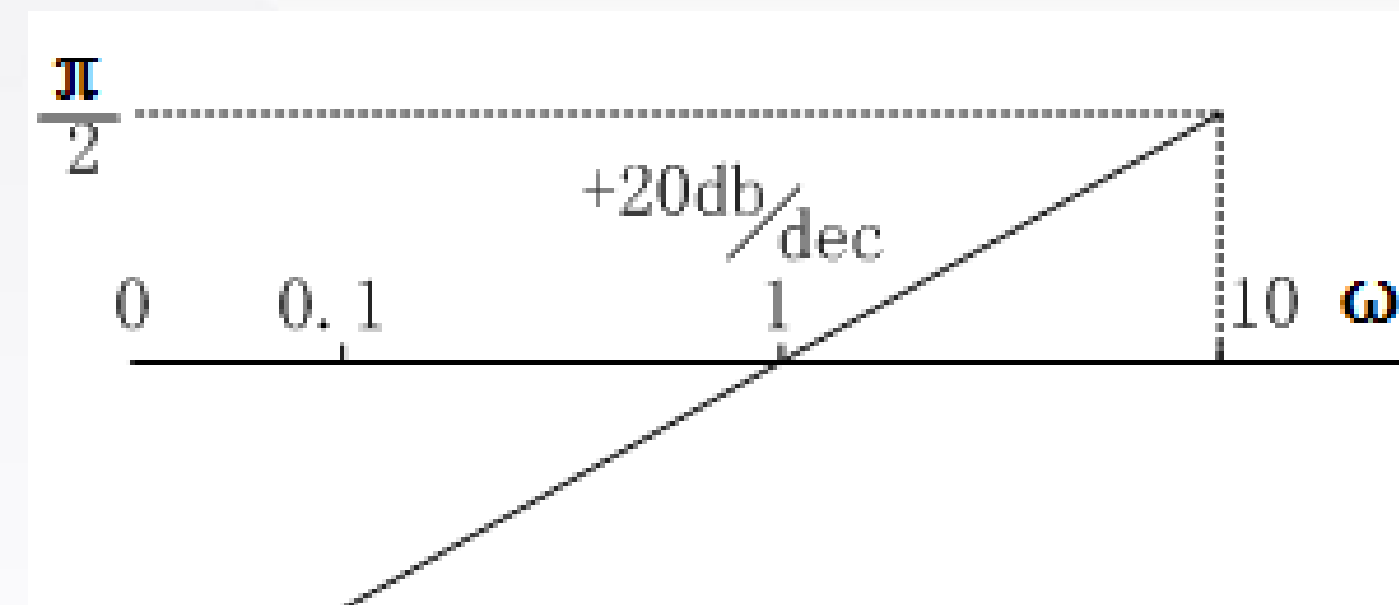
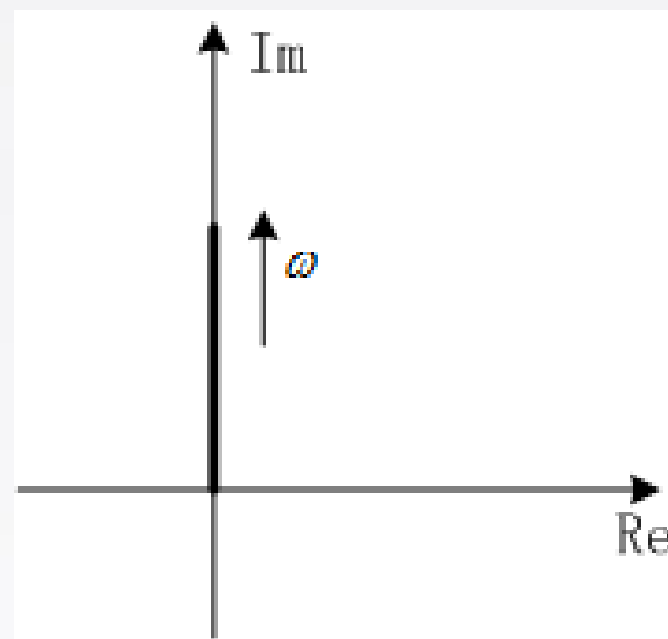
$$\omega \gg \frac{1}{T}, || \approx \frac{1}{\omega^2 T^2}, 20\lg || = -40\text{dB/dec}$$



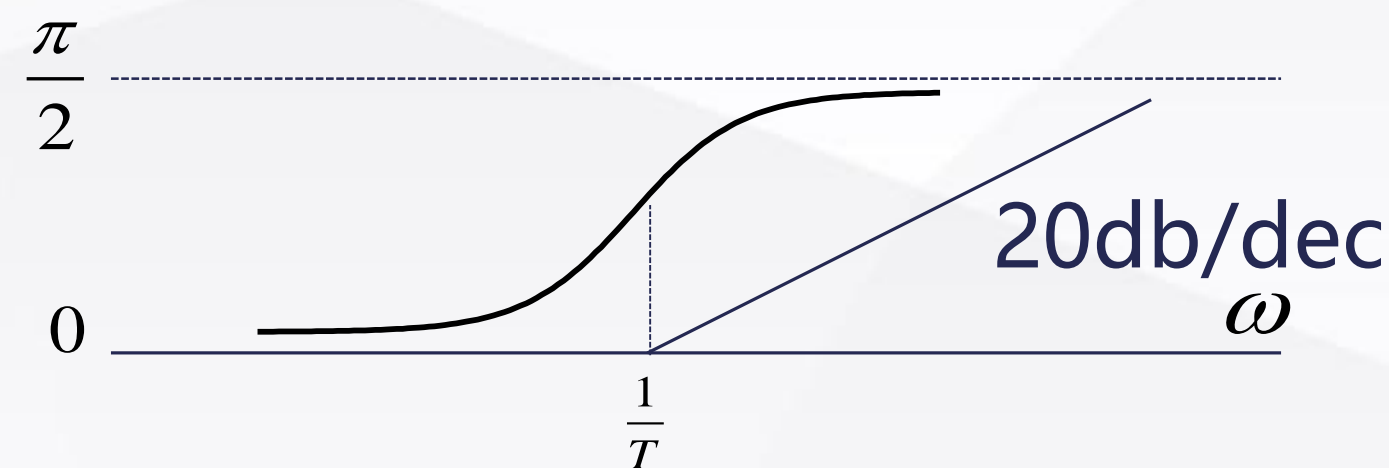
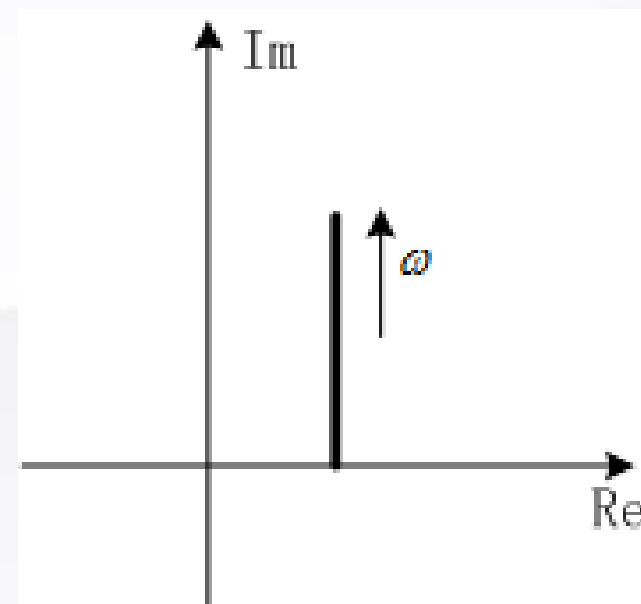
基本环节的频率特性

(5)微分环节 (相对于基本环节2, 3, 4幅相反号)

纯微分 $G(s) = s, G(j\omega) = j\omega, || = \omega, \angle = +90^\circ$



一阶微分 $G(s) = Ts + 1, G(j\omega) = Tj\omega + 1, || = \sqrt{1 + \omega^2 T^2}, \angle = \text{arctg}\omega T$



基本环节的频率特性

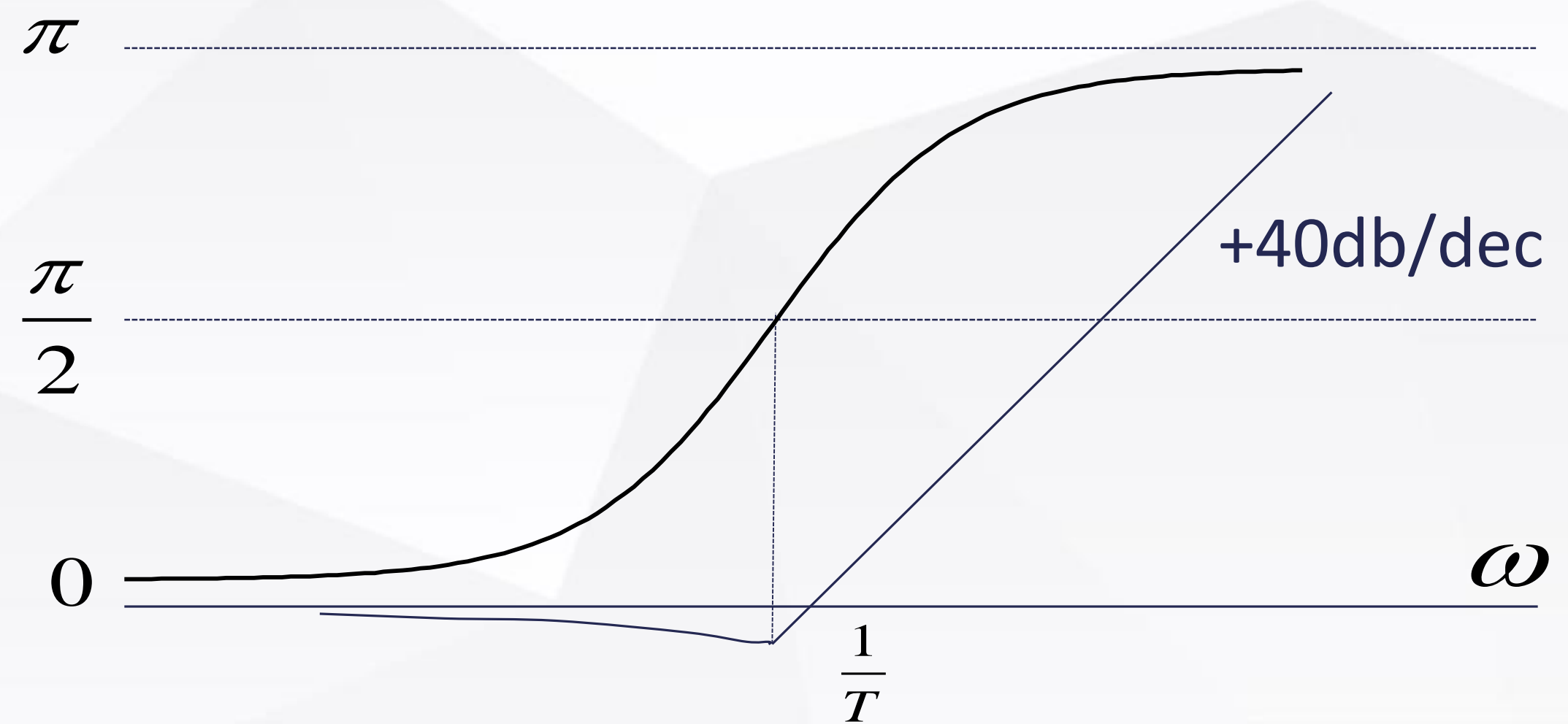
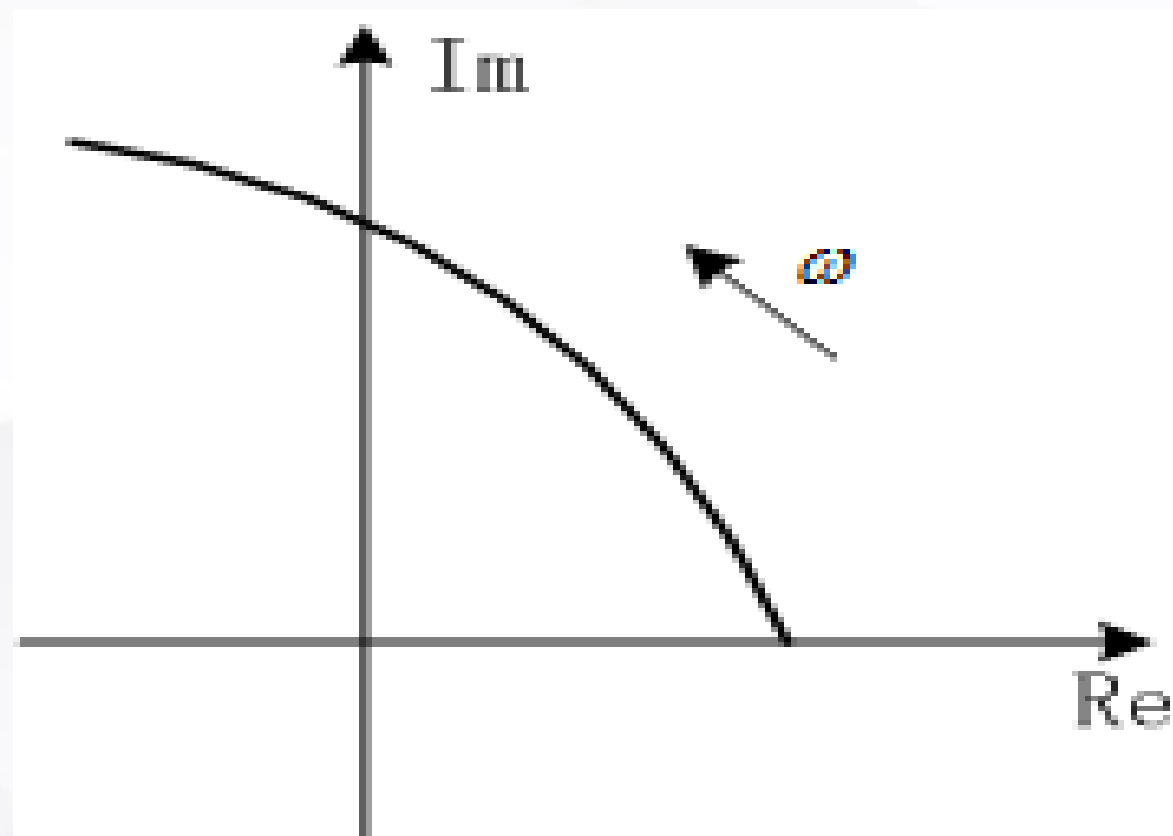
二阶微分 $G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1, (0 < \zeta < 1)$

$$| | = \sqrt{(1 - \omega^2 T^2)^2 + (2\zeta T \omega)^2}, \quad \angle = \arg \operatorname{tg} \frac{2\zeta \omega T}{1 - \omega^2 T^2}$$

$$\omega = \frac{1}{T}, \quad | | = 2\zeta$$

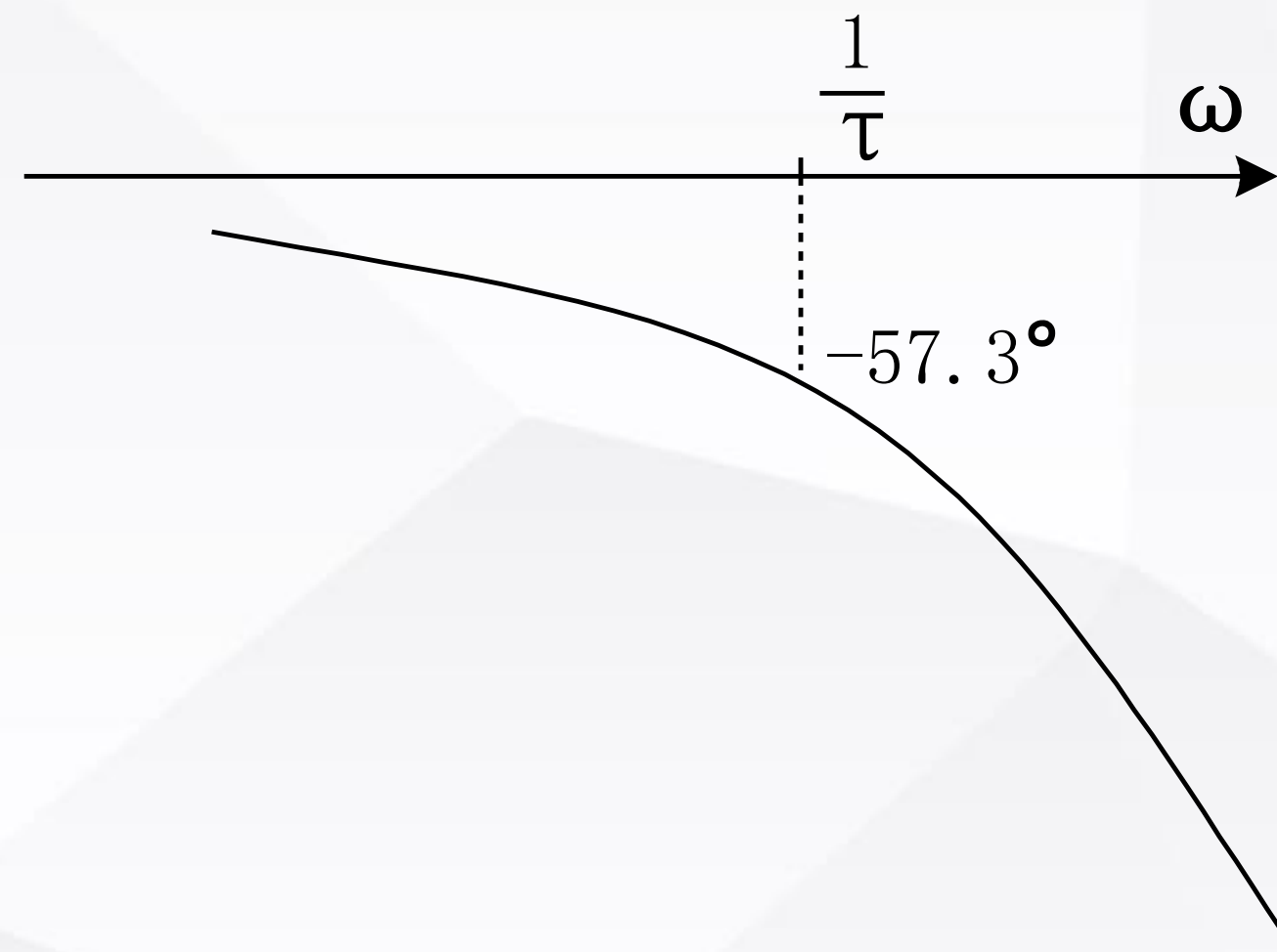
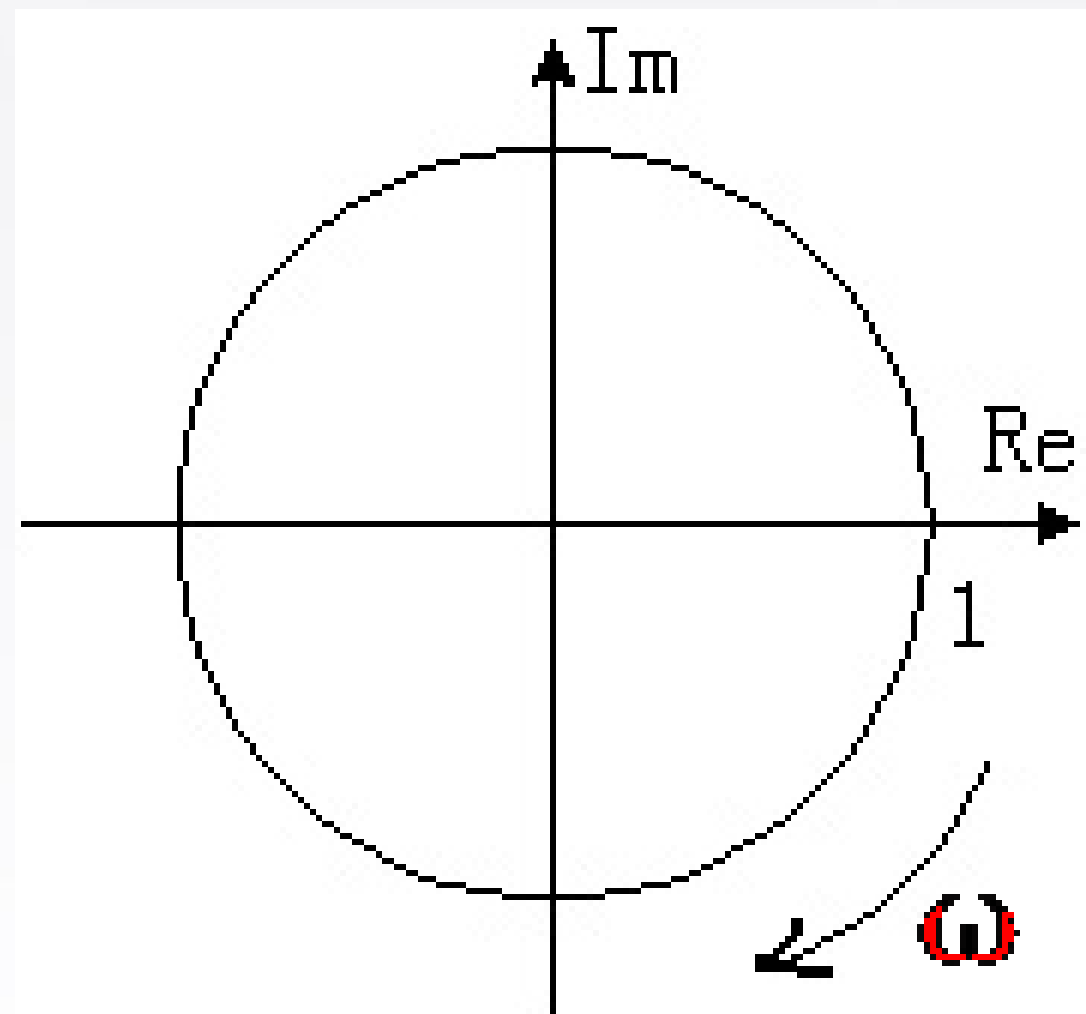
$$\omega \ll \frac{1}{T}, \quad | | \approx 1 \quad 20\lg | | = 0 \text{ 分贝}$$

$$\omega \gg \frac{1}{T}, \quad | | \approx \omega^2 T^2 \quad 20\lg | | = +40 \text{ dB / dec}$$



基本环节的频率特性

(6) 延时环节 $G(s) = e^{-\tau s}, G(j\omega) = e^{-\tau j\omega} = \cos\omega\tau - j\sin\omega\tau$
 $|| = 1, \angle = -\omega\tau$



基本环节的频率特性

(7)一阶不稳定单元

$$\frac{1}{-Ts + 1}, \frac{1}{Ts - 1} \text{ 与 } \frac{-1}{Ts + 1}$$

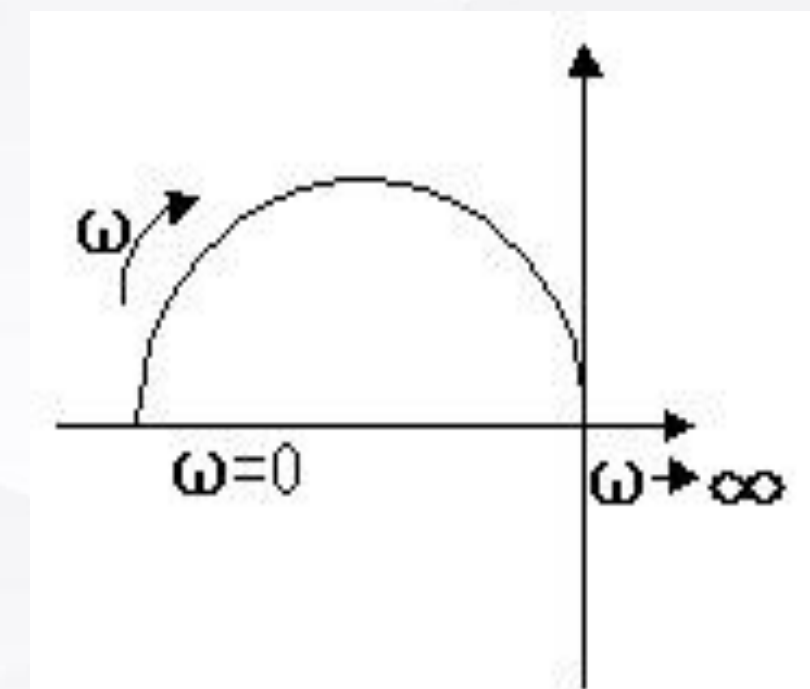
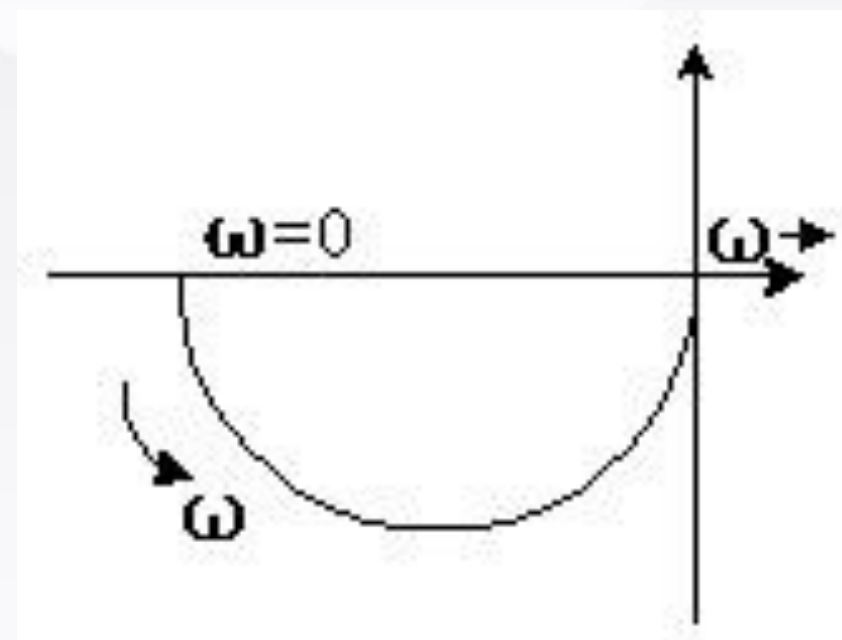
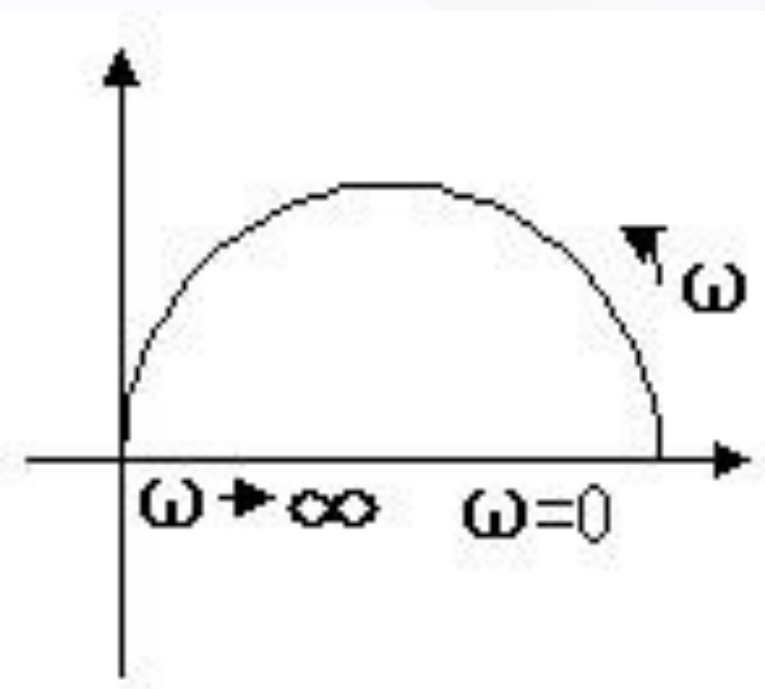
以上三者的模都是半圆

$$\begin{aligned}\angle &= -\operatorname{arctg} g \frac{-\omega T}{1} \\ &= -(0 \rightarrow -90^\circ) \\ &= (0 \rightarrow 90^\circ)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle &= 180^\circ - \operatorname{arctg} g \frac{-\omega T}{1} \\ &= 180^\circ - (0^\circ \rightarrow -90^\circ) \\ &= 180^\circ \rightarrow 270^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle &= -180^\circ - \operatorname{arctg} g \omega T \\ &= -180^\circ - (0 \rightarrow 90^\circ) \\ &= -180^\circ \rightarrow -270^\circ \\ &= 180^\circ \rightarrow 90^\circ\end{aligned}$$

图像分别为:



复杂系统频率特性的绘制

复杂系统频率特性的绘制

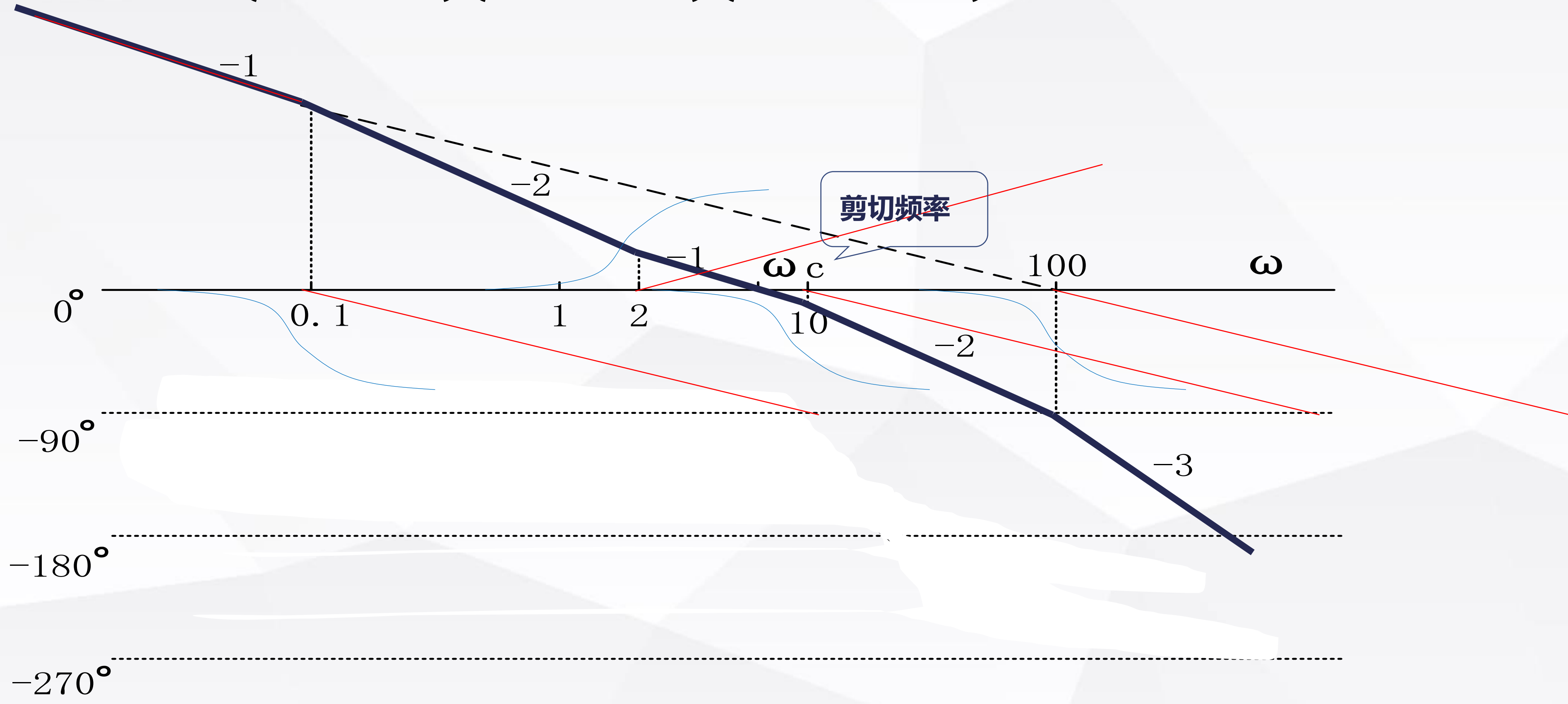
复杂系统近似对数频率特性的绘制原则：

- 获得复杂系统传递函数，并变为标准型
- 进一步分解为基本单元相乘的形式
- 将这些单元按照转折点频率的大小排序
- 分别绘制各单元的近似幅频特性和相频特性
- 将幅频特性和相频特性逐次相加

根据对数频率特性可以较为容易的画出极坐标图

复杂系统频率特性的绘制

例1: $G(s) = \frac{100(0.5s + 1)}{s(10s + 1)(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$



相频特性: $\theta(\omega) = -90^\circ - \text{arctg}10\omega - \text{arctg}0.1\omega - \text{arctg}0.01\omega + \text{arctg}0.5\omega$

复杂系统频率特性的绘制

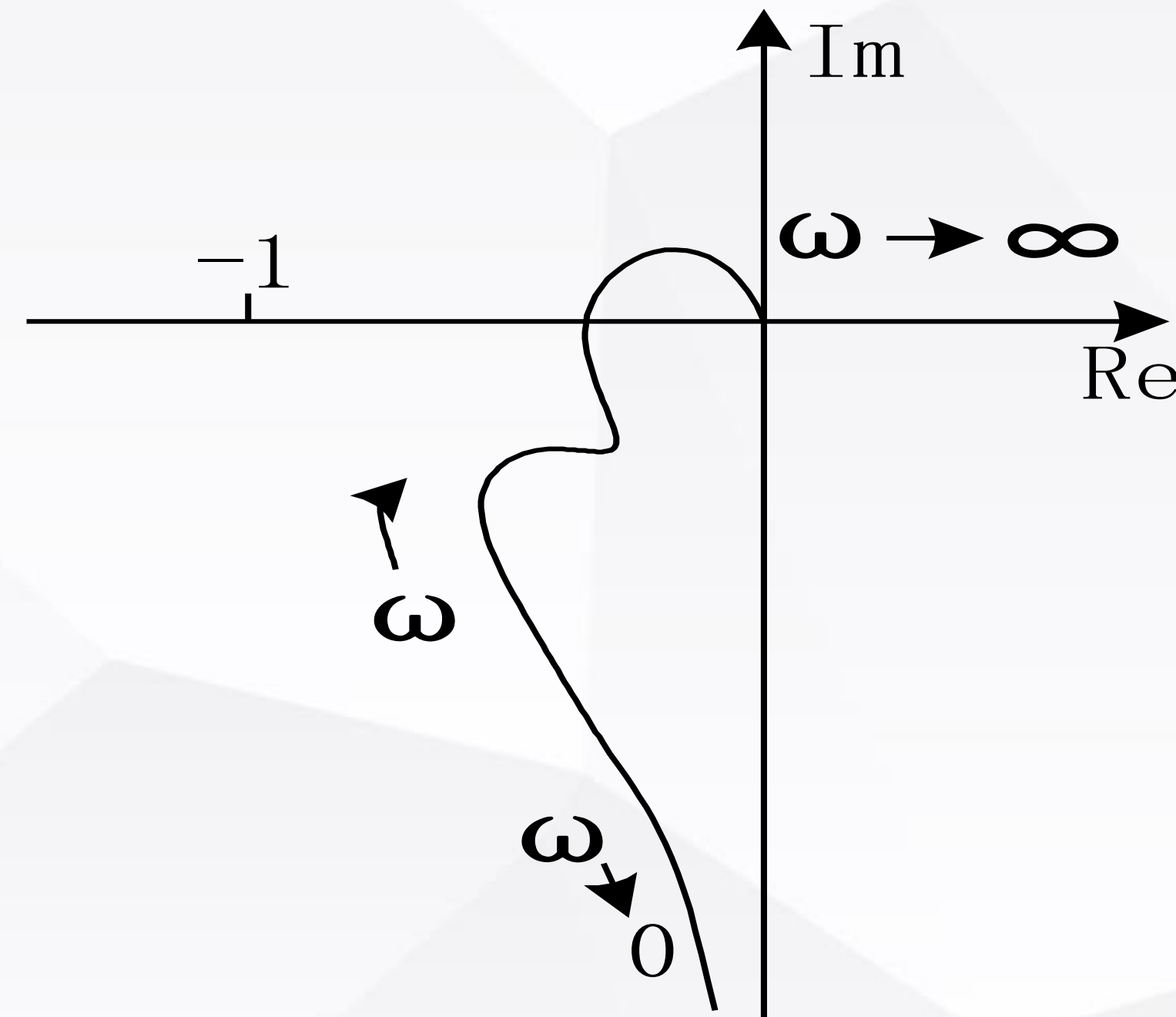
极坐标图大致形状：

模从很大 $\rightarrow 0$

角从 $-\frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{3\pi}{2}$

-1点位置如图所示

当角 = 180° 时，模小于1

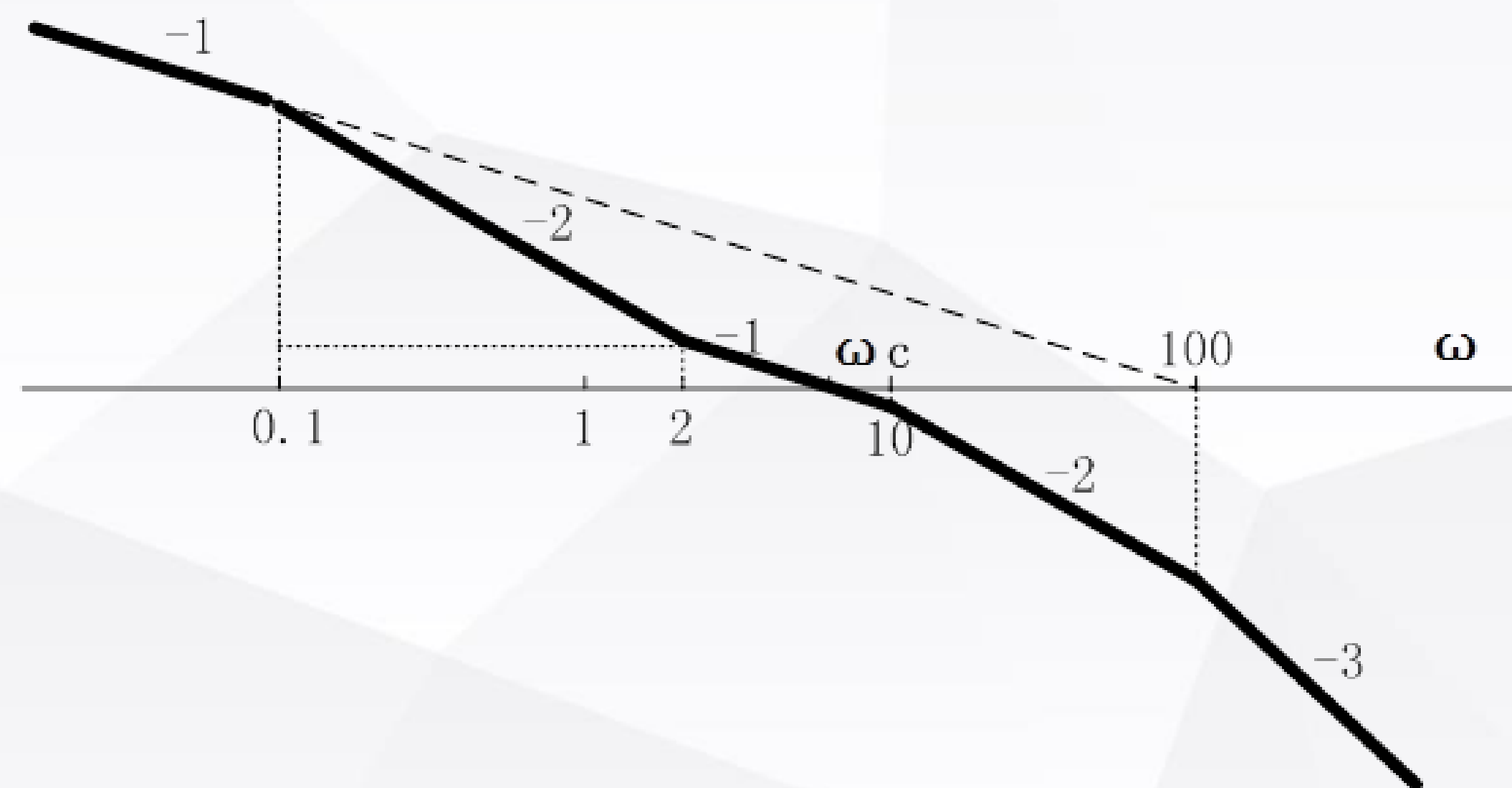


复杂系统频率特性的绘制

剪切频率求法1：作图法

$$20 \lg \frac{100}{0.1} = 40 \lg \frac{2}{0.1} + 20 \lg \frac{\omega_c}{2}$$

$$\therefore \omega_c = 5$$



复杂系统频率特性的绘制

剪切频率的求法2：计算解法

(1) 确定剪切频率的大概区间：
介于 (2-10)

$$G(s) = \frac{100(0.5s + 1)}{s(10s + 1)(0.1s + 1)(0.01s + 1)}$$

(2) 依照近似原则，转折频率在剪切频率左边的项，

$Tj\omega_c + 1 \approx Tj\omega_c$ ，在右边的项， $Tj\omega_c + 1 \approx 1$

分子单元模： $0.5\omega_c * 100$

分母单元模： $\omega_c * 10 \omega_c$

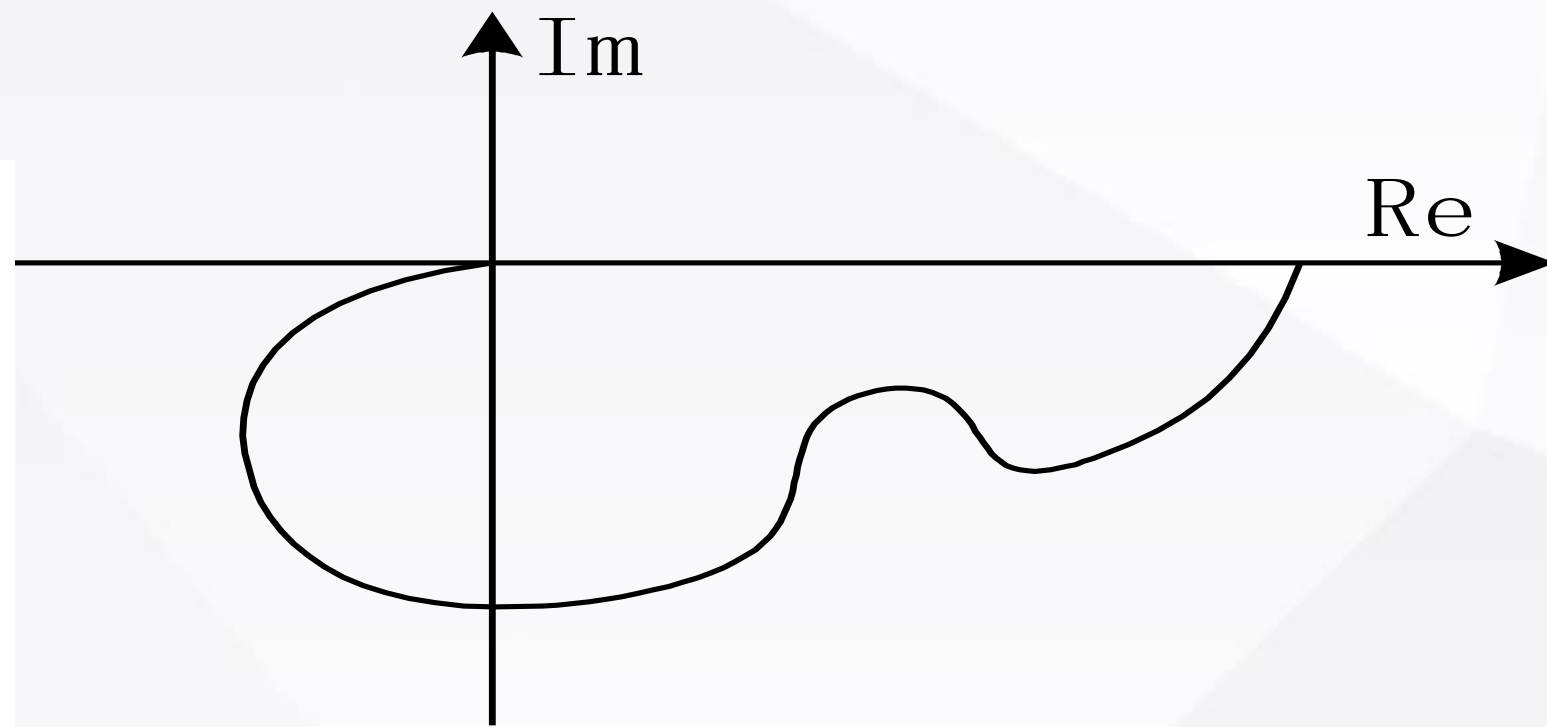
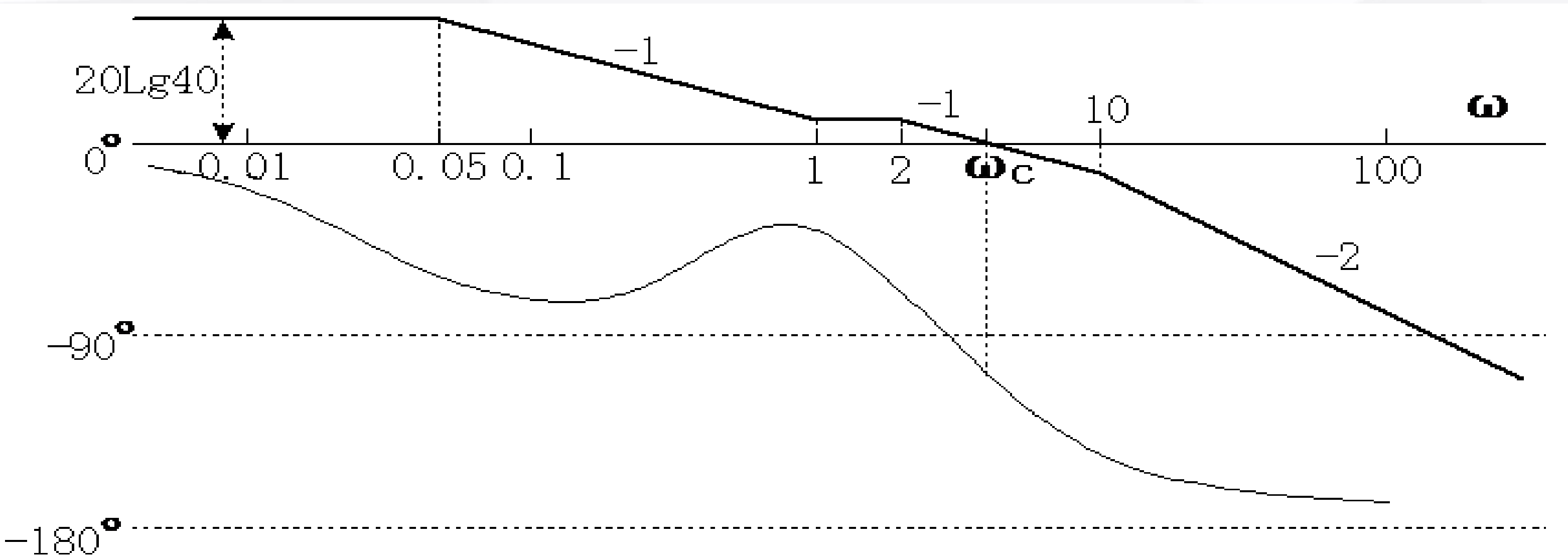
(3) 在剪切频率处，幅值特性为1，即分子模等于分母模

所以： $100 * 0.5 \omega_c = \omega_c * 10 \omega_c$

得 $\omega_c = 5$

复杂系统频率特性的绘制

例2: $G(s) = \frac{40(s+1)}{(20s+1)(0.5s+1)(0.1s+1)}$



由图可知: $20 \lg 40 = 20 \lg \frac{1}{0.05} + 20 \lg \frac{\omega_c}{2}$

解得 $\omega_c = 4 \quad \theta(\omega_c) = -98.5^\circ$

快速解法: $40 * \omega_c = 20 \omega_c * 0.5 \omega_c$

复杂系统频率特性的绘制

例3：带有二阶系统的频率特性。

$$G(s) = \frac{2000(0.2s + 1)^2}{s(s + 1)(s^2 + 4s + 100)}$$

$$G(s) = \frac{20(0.2s + 1)^2}{s(s + 1)((0.1s)^2 + 0.04s + 1)}$$

复杂频率特性的绘制

幅频特性:

低频段:

斜率: -20 , 与 ω 轴交于 $\omega = 20$

$\omega = 1$, 斜率: -40

转折频率:

$\omega = 5$, 斜率: 0

$\omega = 10$, 斜率: -40

$$G(s) = \frac{20(0.2s + 1)^2}{s(s + 1)((0.1s)^2 + 0.04s + 1)}$$

二阶系统修正:

$$\zeta = 0.2, \quad T = 0.1$$

$$\omega_r = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 9.59,$$

$$M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} = 8.14dB$$

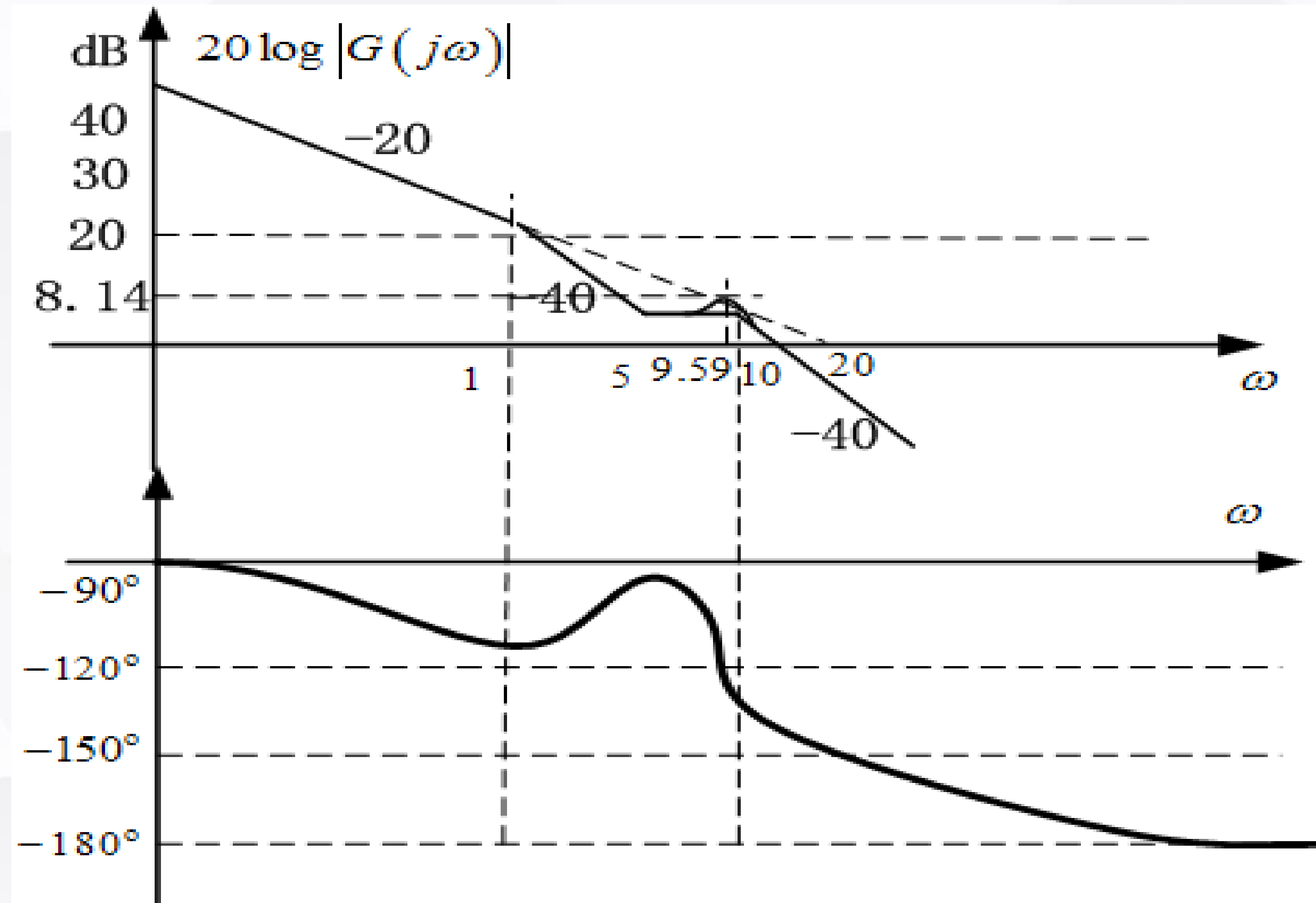
复杂频率特性的绘制

相频特性：相频特性的画法为：起点，终点，转折点。

各环节角度	$\omega = 0$	$\omega = 1$	$\omega = 5$	$\omega = 10$	$\omega = \infty$
s^{-1}	-90	-90	-90	-90	-90
$-tg^{-1}\omega$	0	-45	-78.7	-84.3	-90
$2tg^{-1}0.2\omega$	0	22.6	90	126.8	180
$-tg^{-1}\frac{4\omega}{100-\omega^2}$	0	-2.3	-15	-90	-180
总和	-90	-114.7	-93.7	-137.5	-180

$$\theta(\omega) = -90^0 - \operatorname{arctg}\omega + 2\operatorname{arctg}0.2\omega - \operatorname{arctg}\frac{4\omega}{100-\omega^2}$$

复杂频率特性的绘制



复杂频率特性的绘制

最小相位系统：所有的零极点都在左半平面

幅频特性与相频特性有确定的关系：

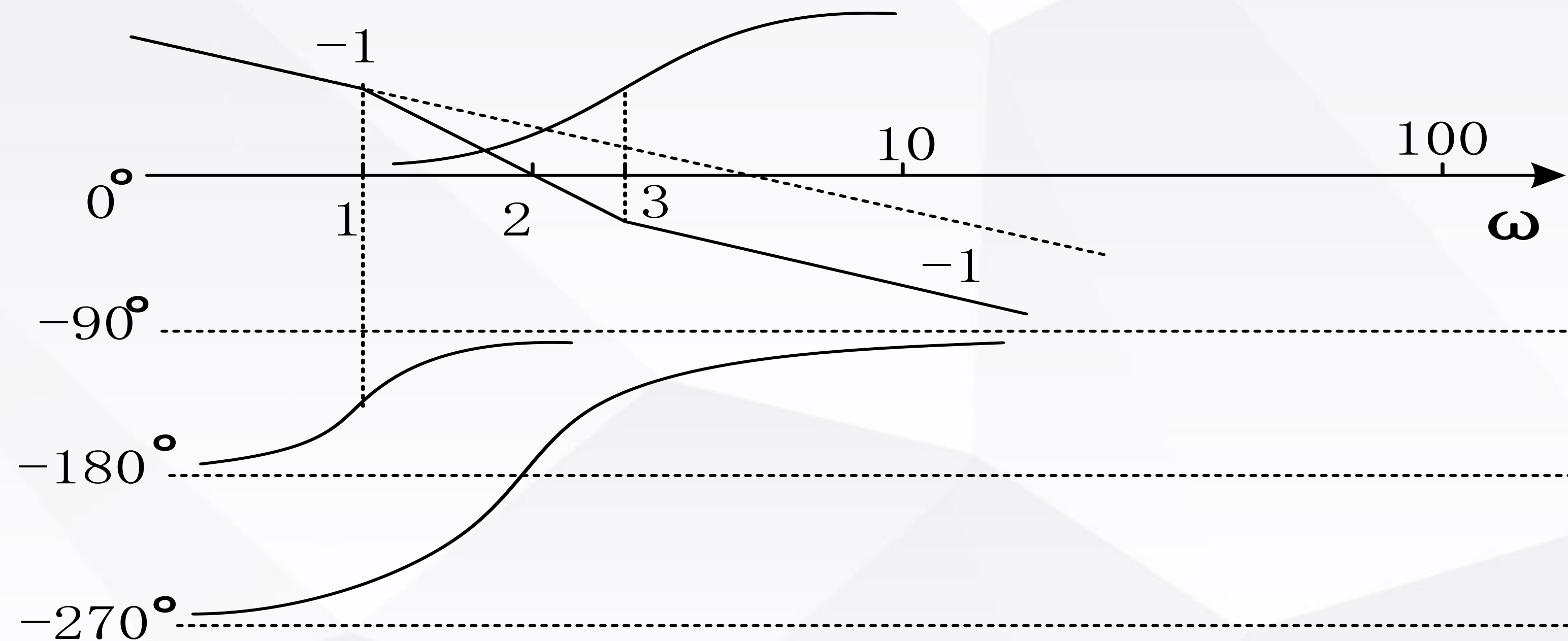
如果幅频特性的斜率为-1的宽度足够长，

则对应的相频特性趋近于 $-\frac{\pi}{2}$

类似，幅频特性斜率为 $-k$ 对应的相角为 $-\frac{k\pi}{2}$

复杂频率特性的绘制

例4)：非最小相位系统 $G_o(s) = \frac{6(0.33s + 1)}{s(s - 1)}$



非最小相位系统的幅相之间的关系没有象最小相位系统那样有确定的规律，必须根据具体对象具体分析。（试画出极坐标图）

复杂频率特性的绘制

例5) : 带参数频率特性 $G_o(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$

在以下三种情况下各自画出对数图和极坐标图

(1) $T_a > T_b > T_1 > 0$

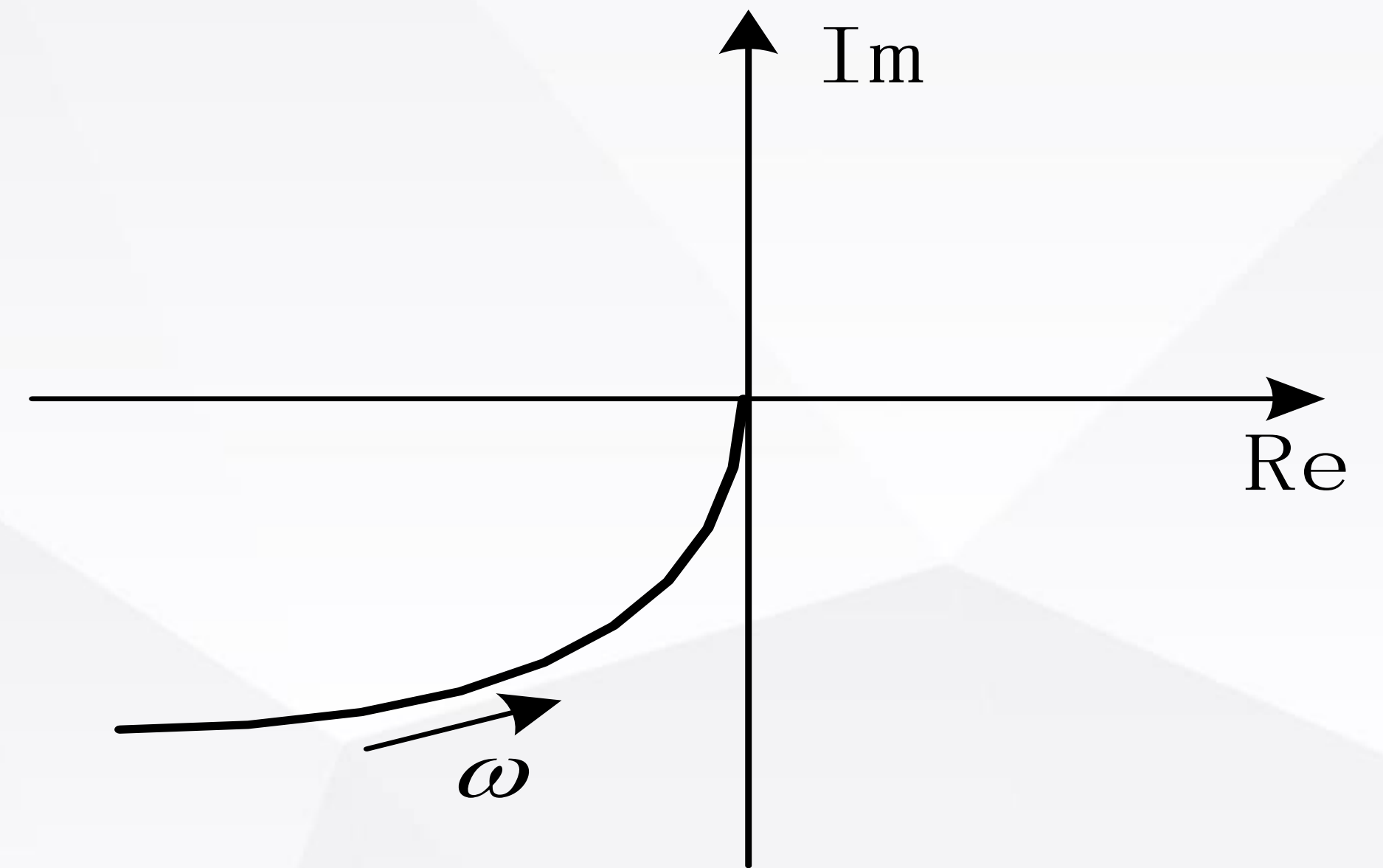
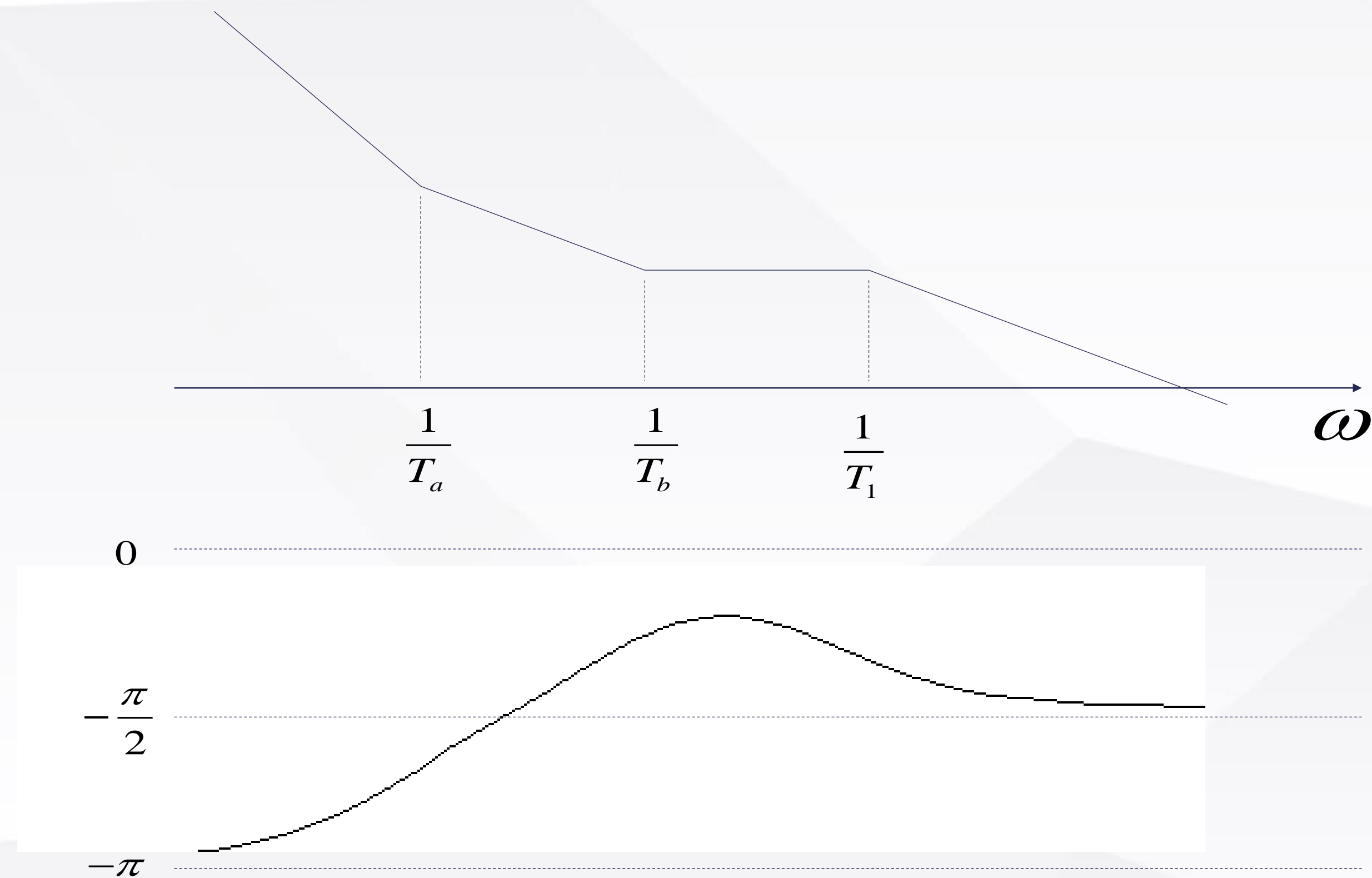
(2) $T_a > T_1 > T_b > 0$

(3) $T_1 > T_a > T_b > 0$

复杂频率特性的绘制

(1) $T_a > T_b > T_1 > 0$

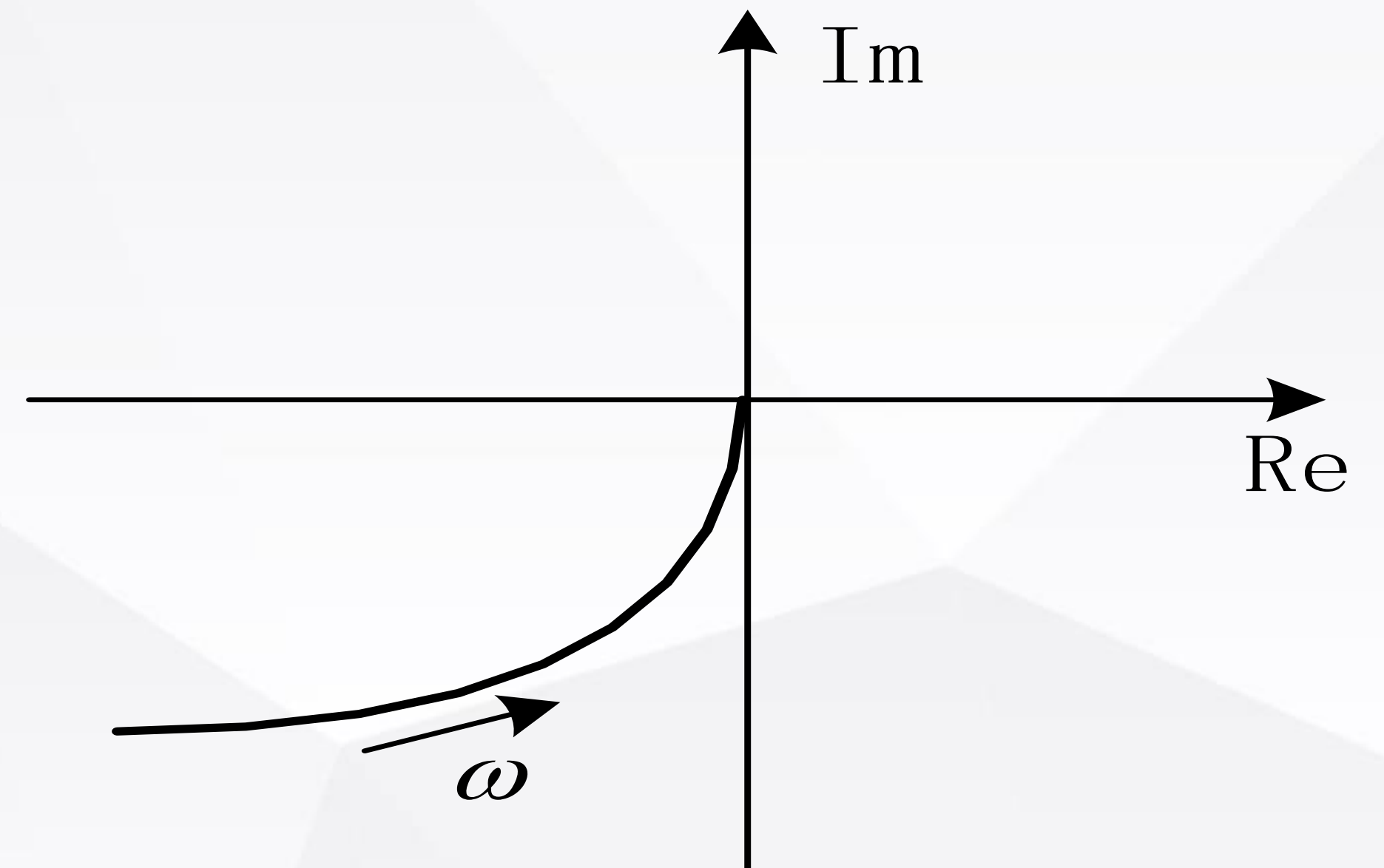
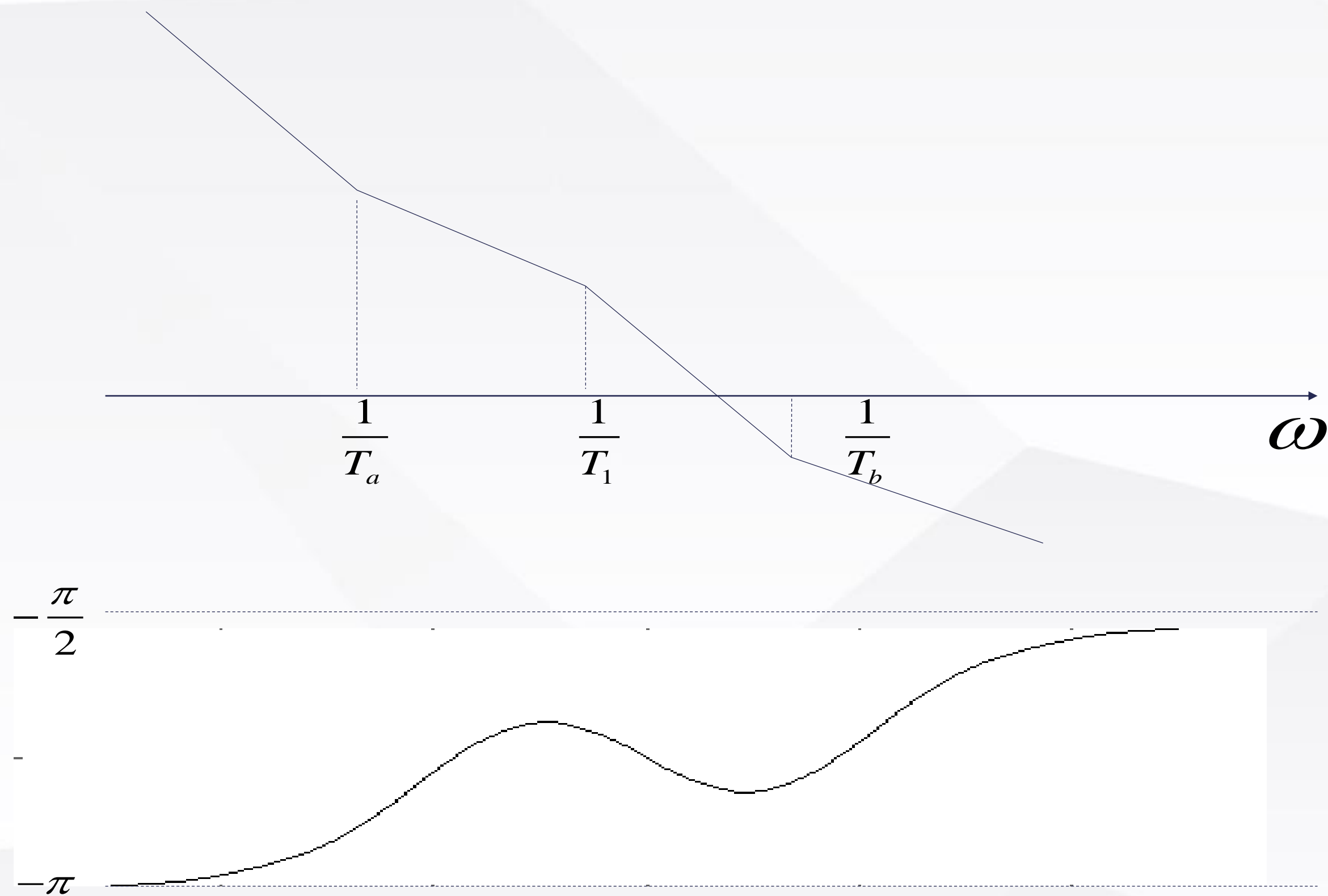
$$G_o(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$$



复杂频率特性的绘制

(2) $T_a > T_1 > T_b > 0$

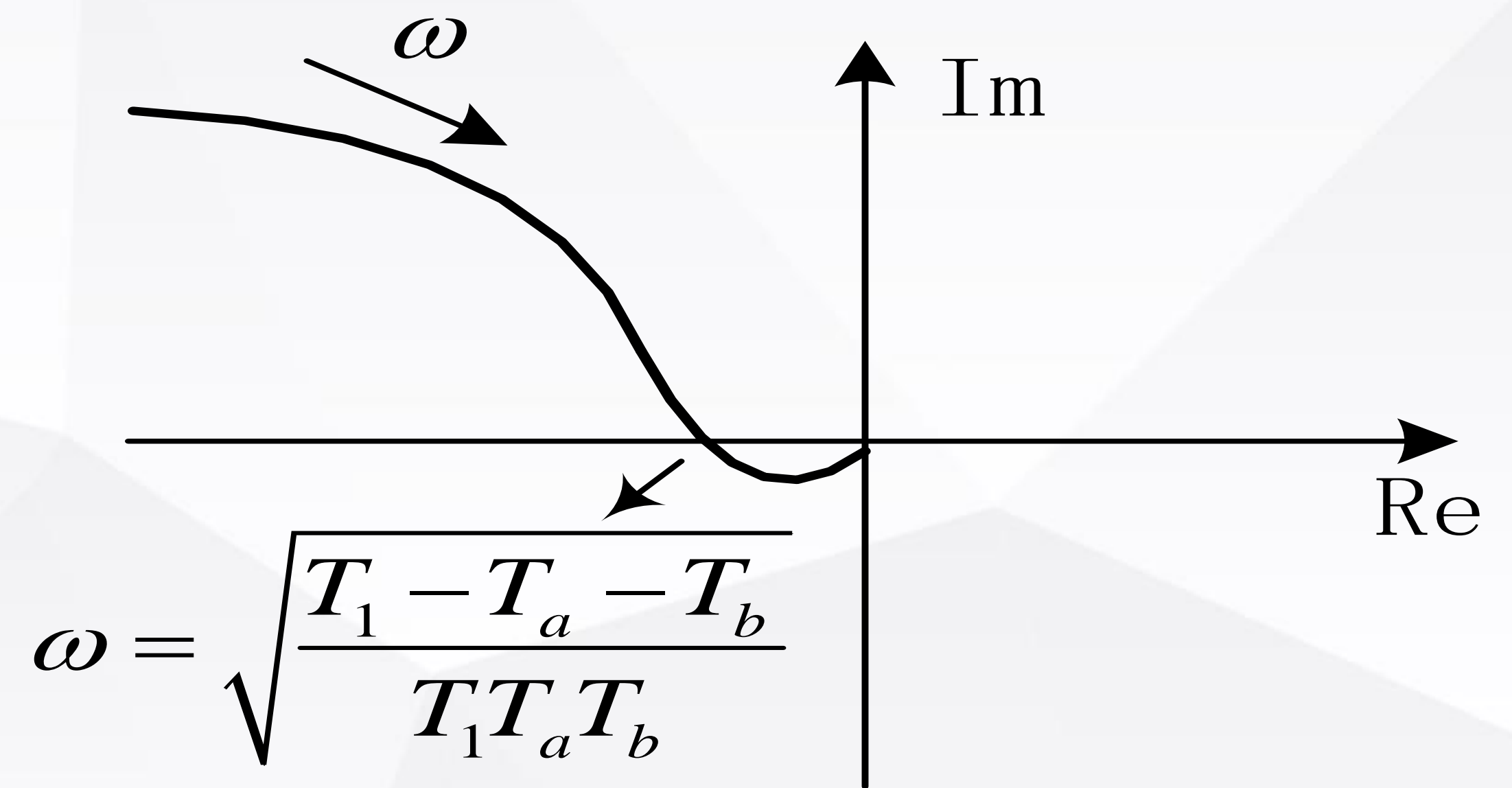
$$G_o(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$$



复杂频率特性的绘制

(3) $T_1 > T_a > T_b > 0$

$$G_o(s) = \frac{K(T_a s + 1)(T_b s + 1)}{s^2(T_1 s + 1)}$$



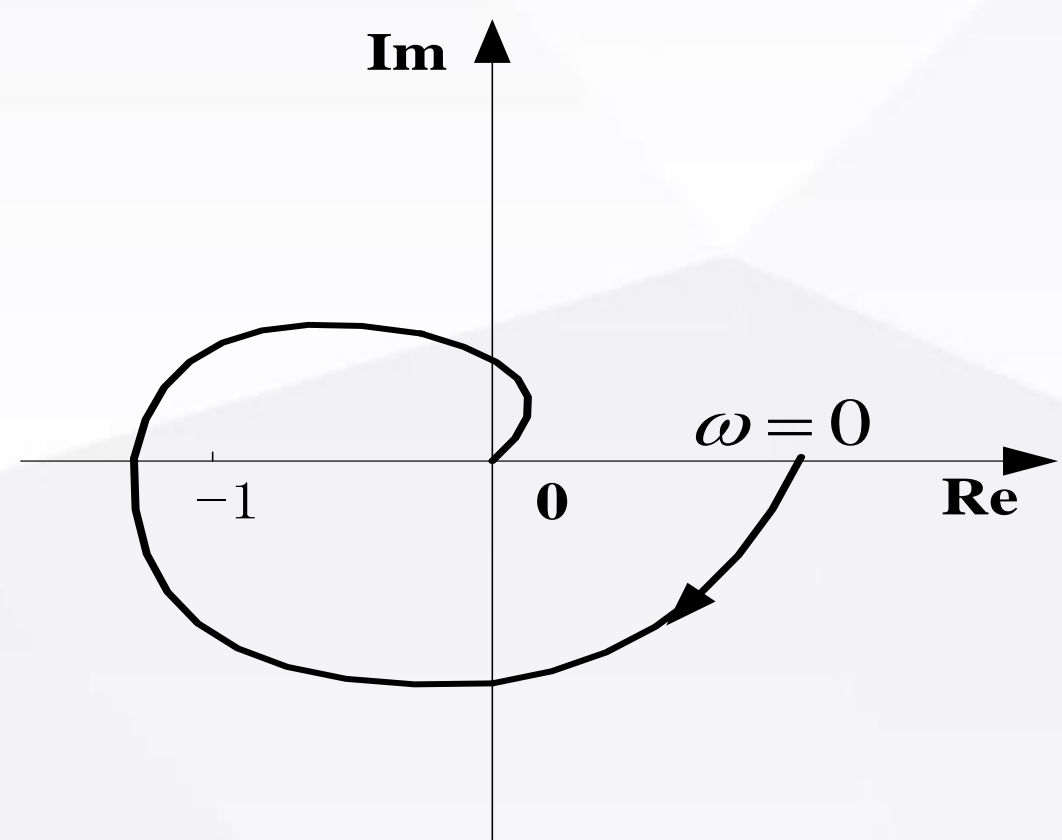
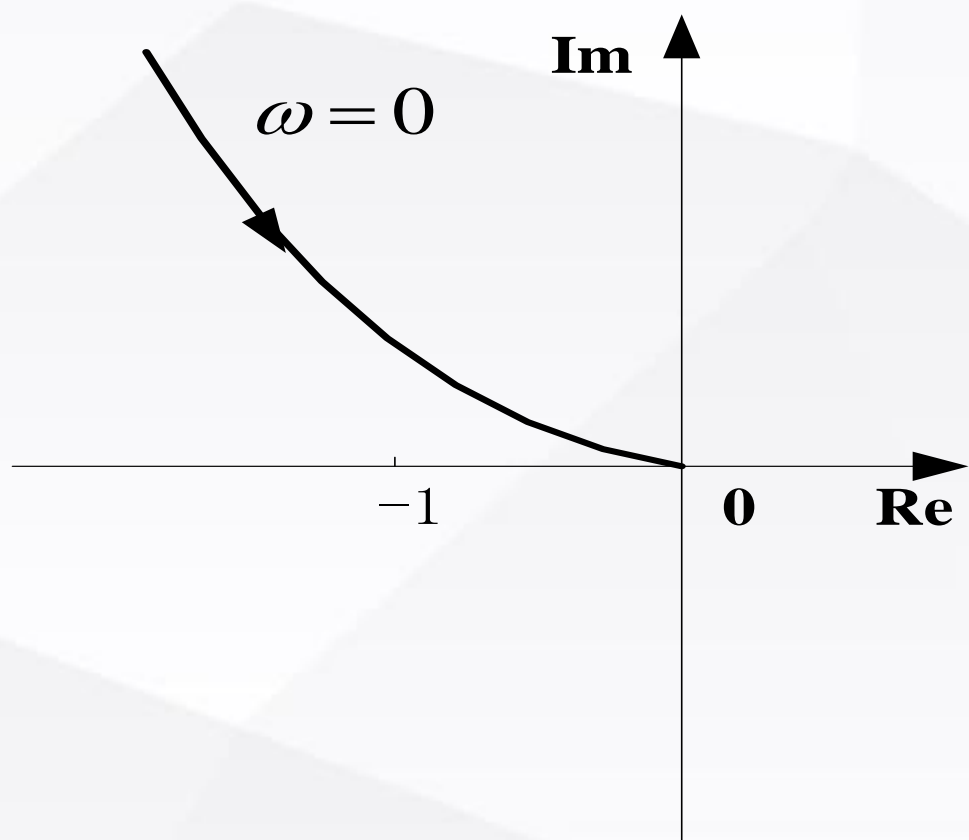
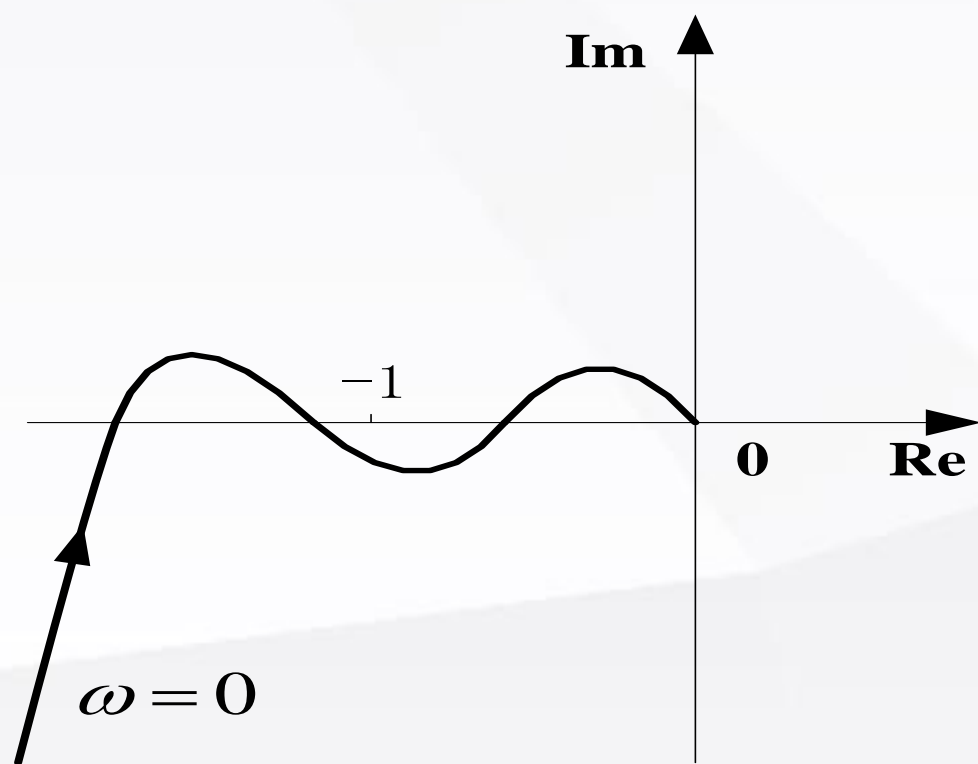
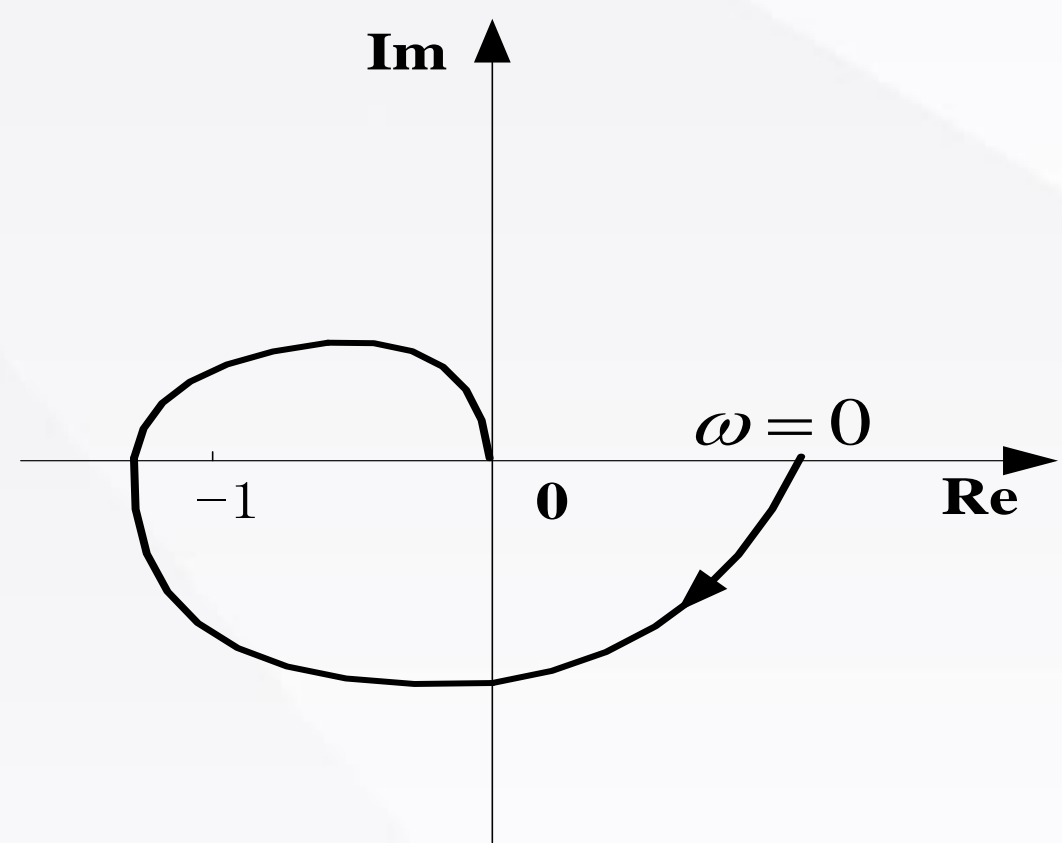
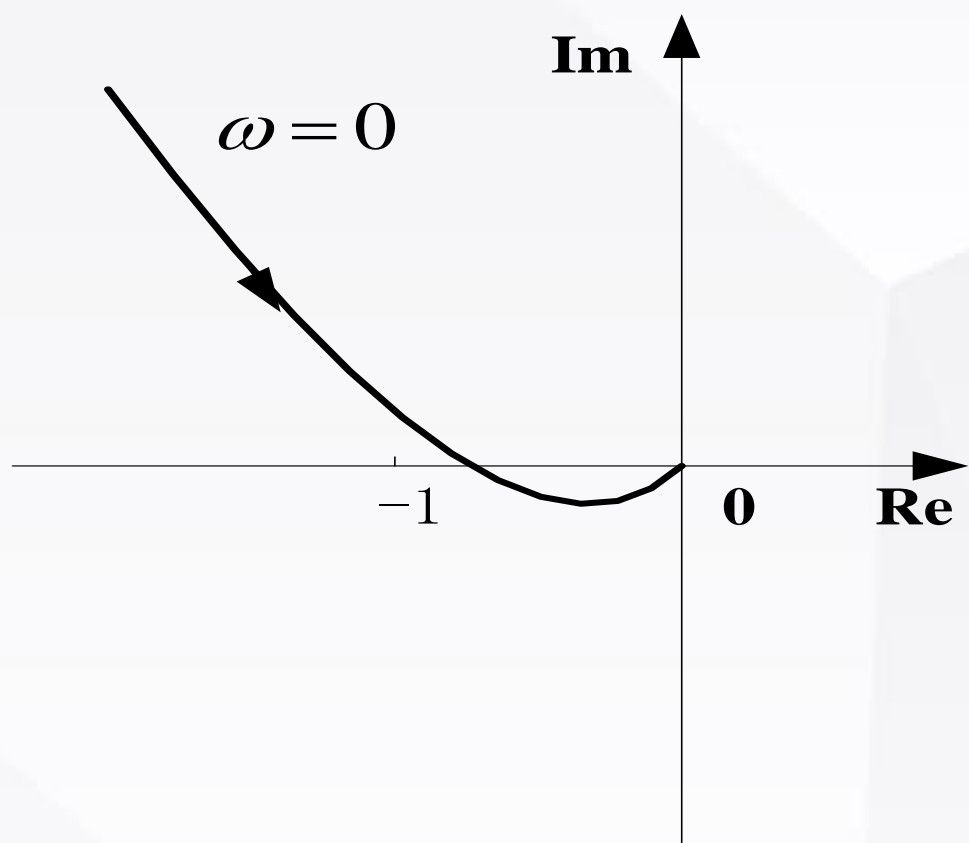
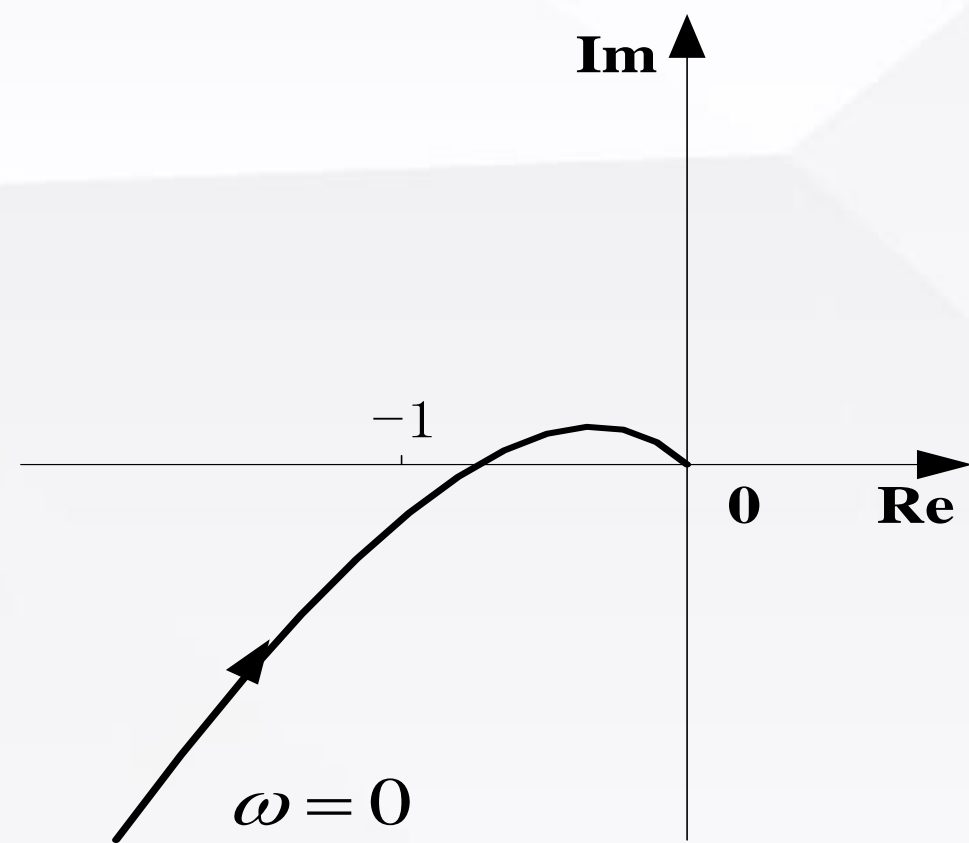
复杂频率特性的绘制

6) 附加练习

给定一些传递函数找出各自对应的极坐标图（并判断闭环系统的稳定性，若不稳定，有几个极点在右半平面）。

$$\begin{aligned} 1) \quad G_o(s) &= \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)(T_3s + 1)} & 2) \quad G_o(s) &= \frac{K}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \\ 3) \quad G_o(s) &= \frac{K(T_0s + 1)}{(T_1s + 1) \cdots \cdots (T_5s + 1)} & 4) \quad G_o(s) &= \frac{K(T_as + 1)(T_bs + 1)}{s(T_1s + 1) \cdots \cdots (T_4s + 1)} \end{aligned}$$

复杂频率特性的绘制



复杂频率特性的绘制

思考：对于上题中的 4) 系统，以下几种情况的
Nyquist曲线各如何？

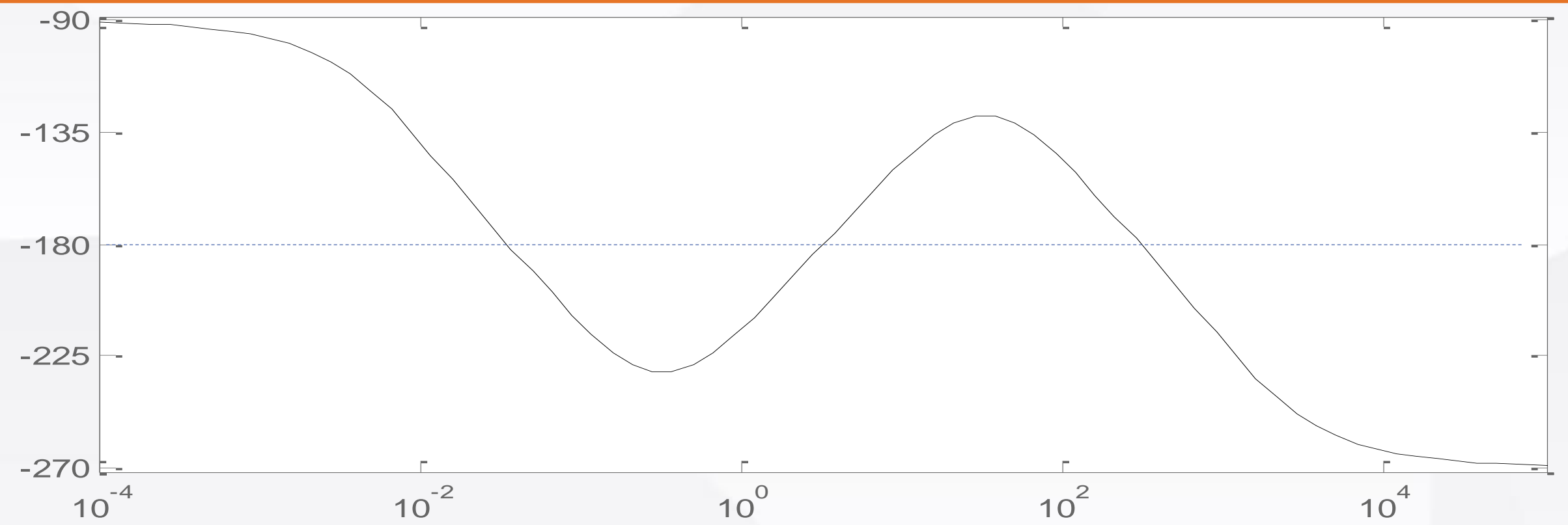
a. $T_1 > T_2 > T_a > T_b > T_3 > T_4$

b. $T_1 > T_2 > T_3 > T_a > T_b > T_4$

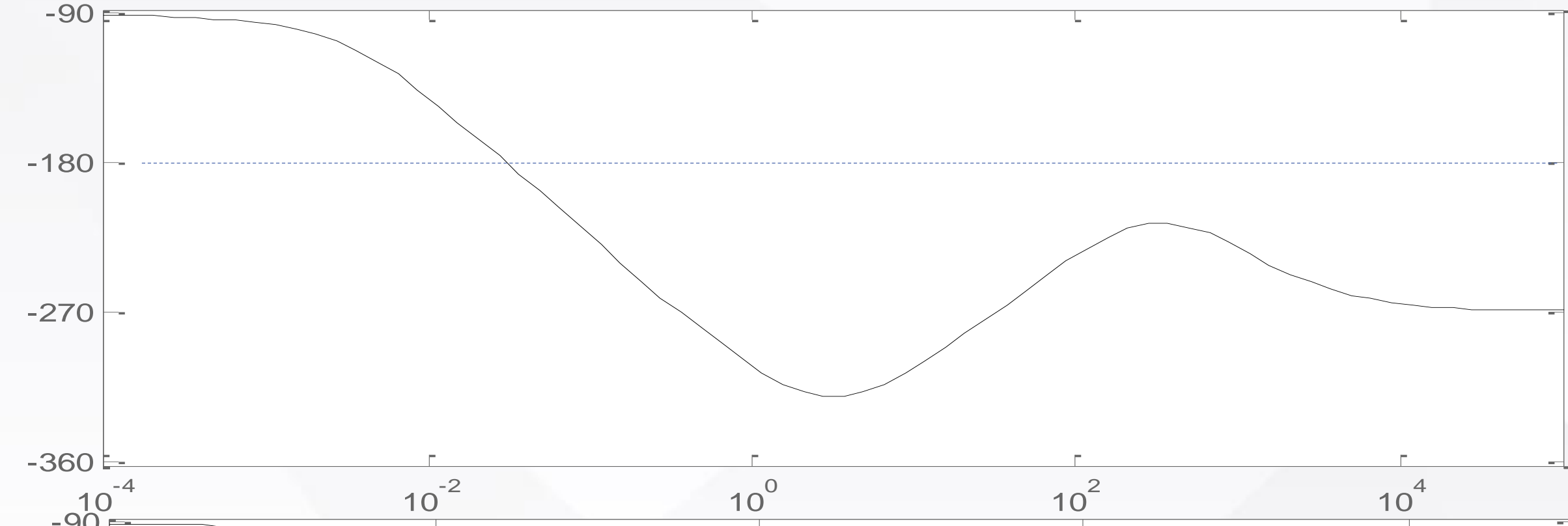
c. $T_1 > T_2 > T_3 > T_4 > T_a > T_b$

复杂频率特性的绘制

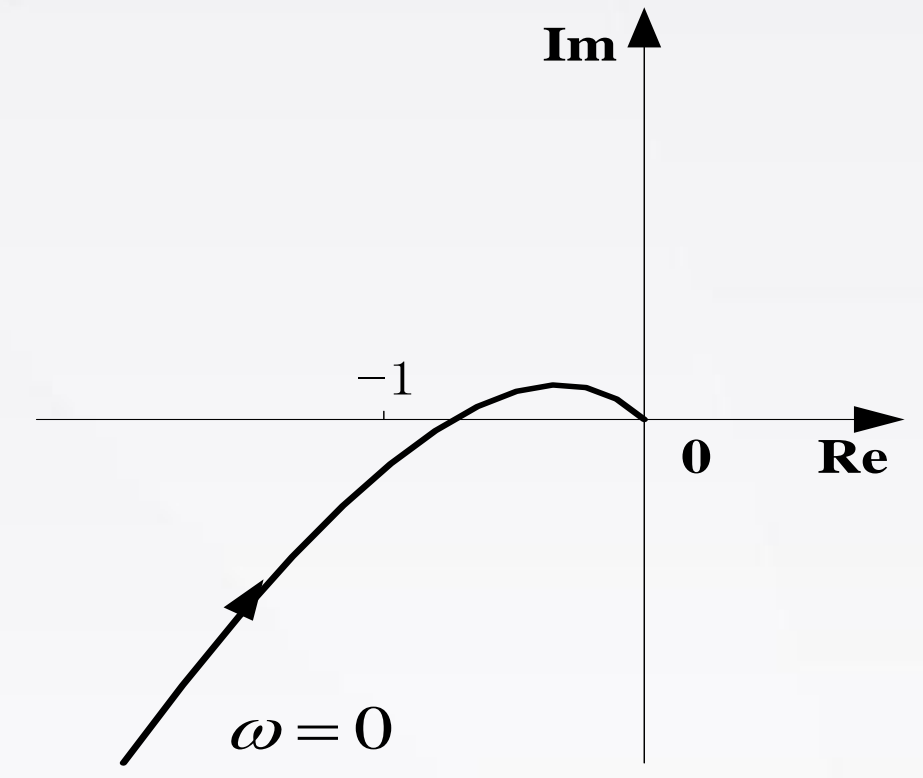
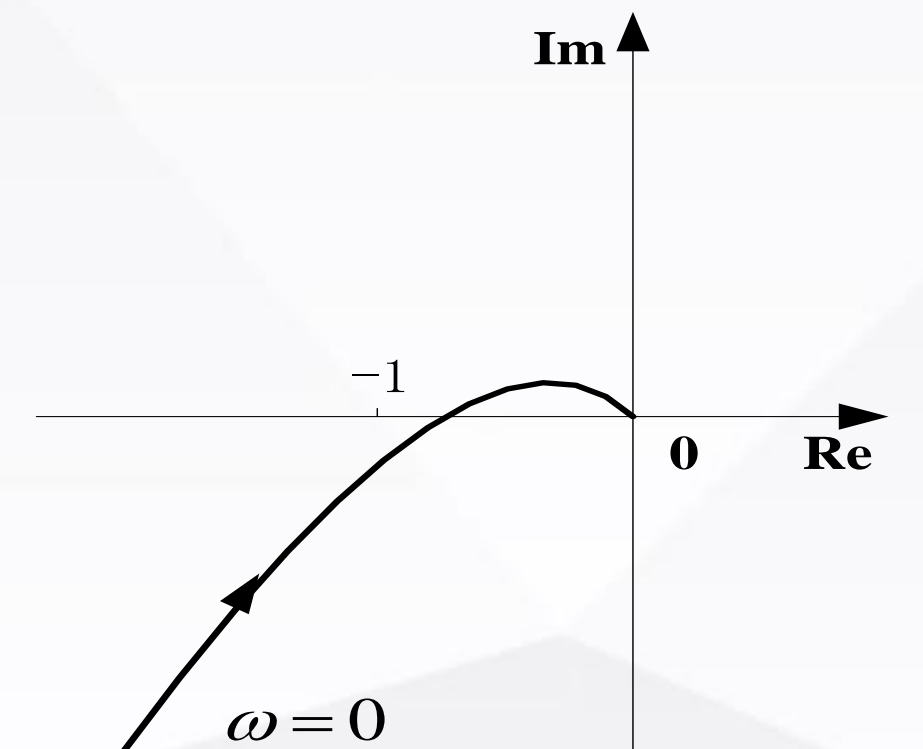
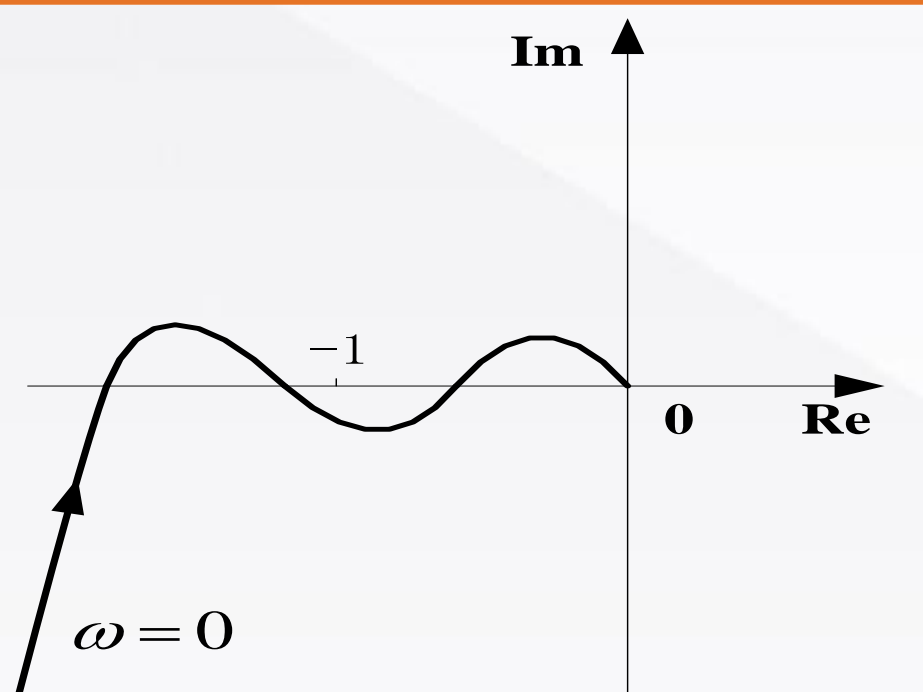
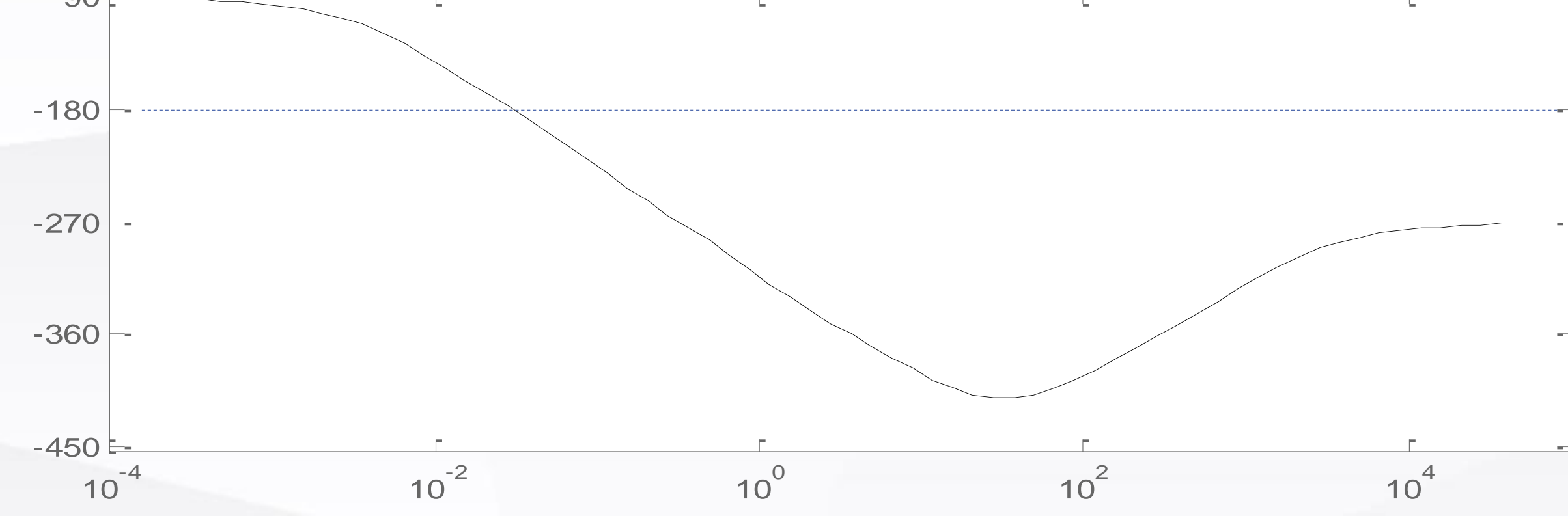
a



b



c



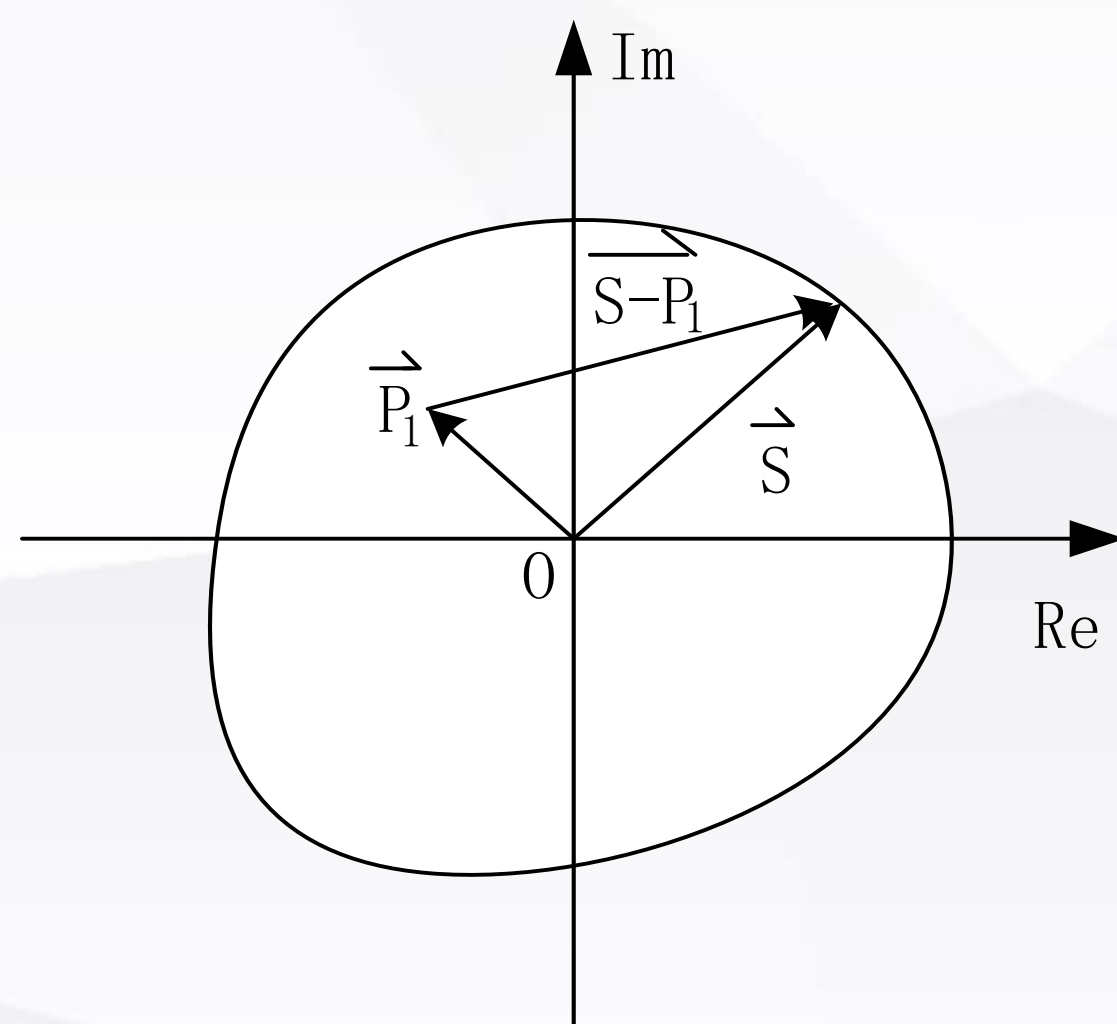
Nyquist稳定判据

Nyquist稳定判据

幅角定理

设 $W(s)$ 在复平面一个封闭曲线内具有 P 个极点和 Z 个零点,
当 s 向量沿封闭曲线顺时针向旋转一圈, 所有向量 $\overrightarrow{s - z_j}, \overrightarrow{s - p_j}$
也都顺时针旋转一周

$\therefore W(s)$ 顺时针向旋转的圈数 $N = Z - P$



$$W(s) = \frac{\prod_{j=1}^Z (s - z_j)}{\prod_{i=1}^P (s - p_i)}$$

Nyquist稳定判据

设系统的开环传递函数： $Q(s) = \frac{N(s)}{P(s)} = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^z (s - z_j)}{\prod_{i=1}^p (s - p_i)}$

构造一个函数

$$W(s) = 1 + Q(s) = \frac{P(s) + N(s)}{P(s)} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{闭环分母} \\ \longrightarrow \text{开环分母} \end{array}$$

做一封闭曲线D包围整个右半平面，且已知有p个开环极点在其中。

现在我们关心的是这其中系统是否有闭环极点？或者说 $W(s)$ 是否有零点

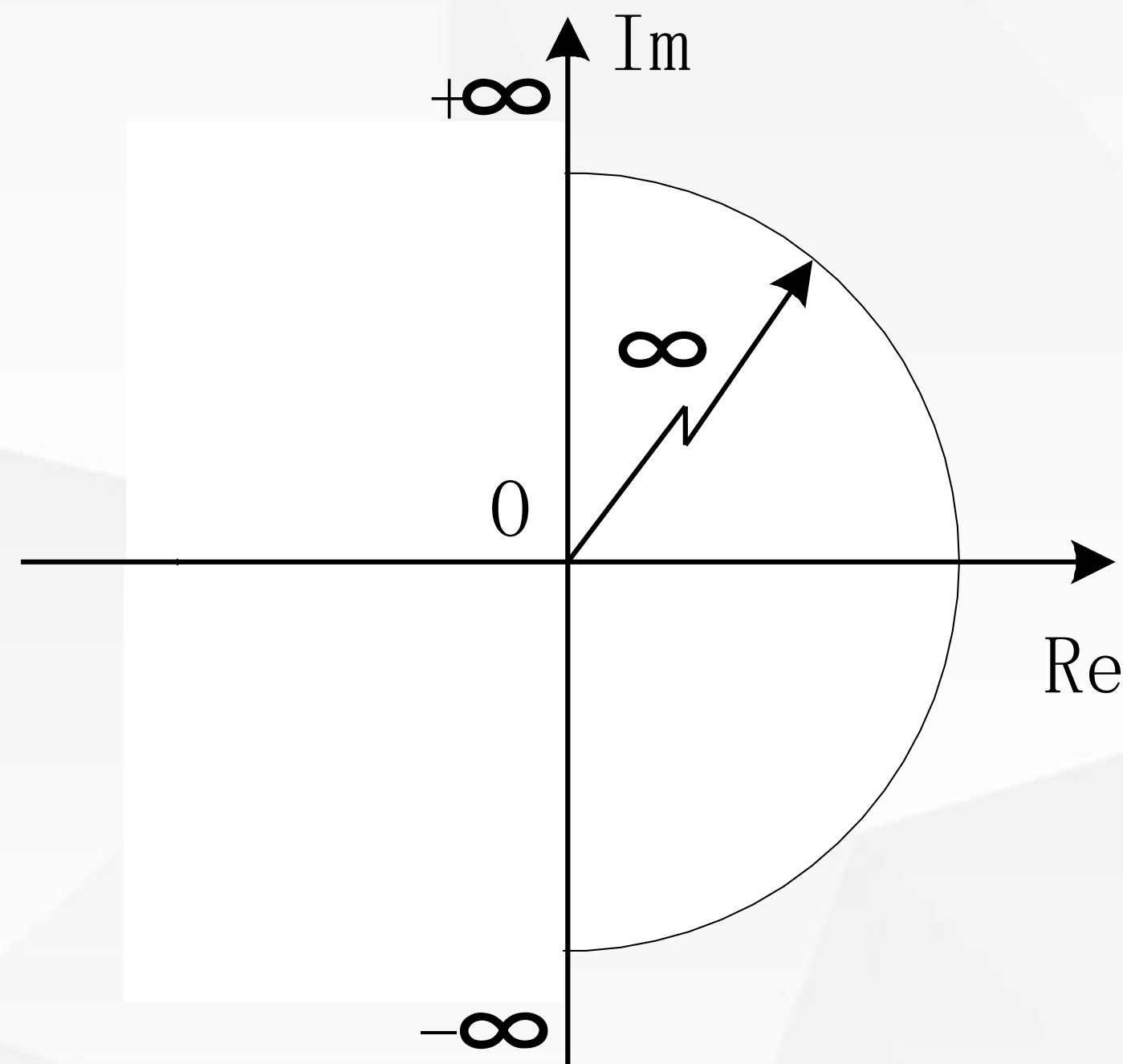
Nyquist稳定判据

按幅角定理，当 s 沿D形围线顺时针向旋转一圈

$1 + Q(s)$ 顺时针向旋转的圈数=

闭环在右半平面的极点数 z

—开环在右半平面的极点数 p



Nyquist稳定判据

s沿D形围线顺时针向旋转一圈如何对应 $1 + Q(s)$ 的变化

当s沿D形围线顺旋一圈

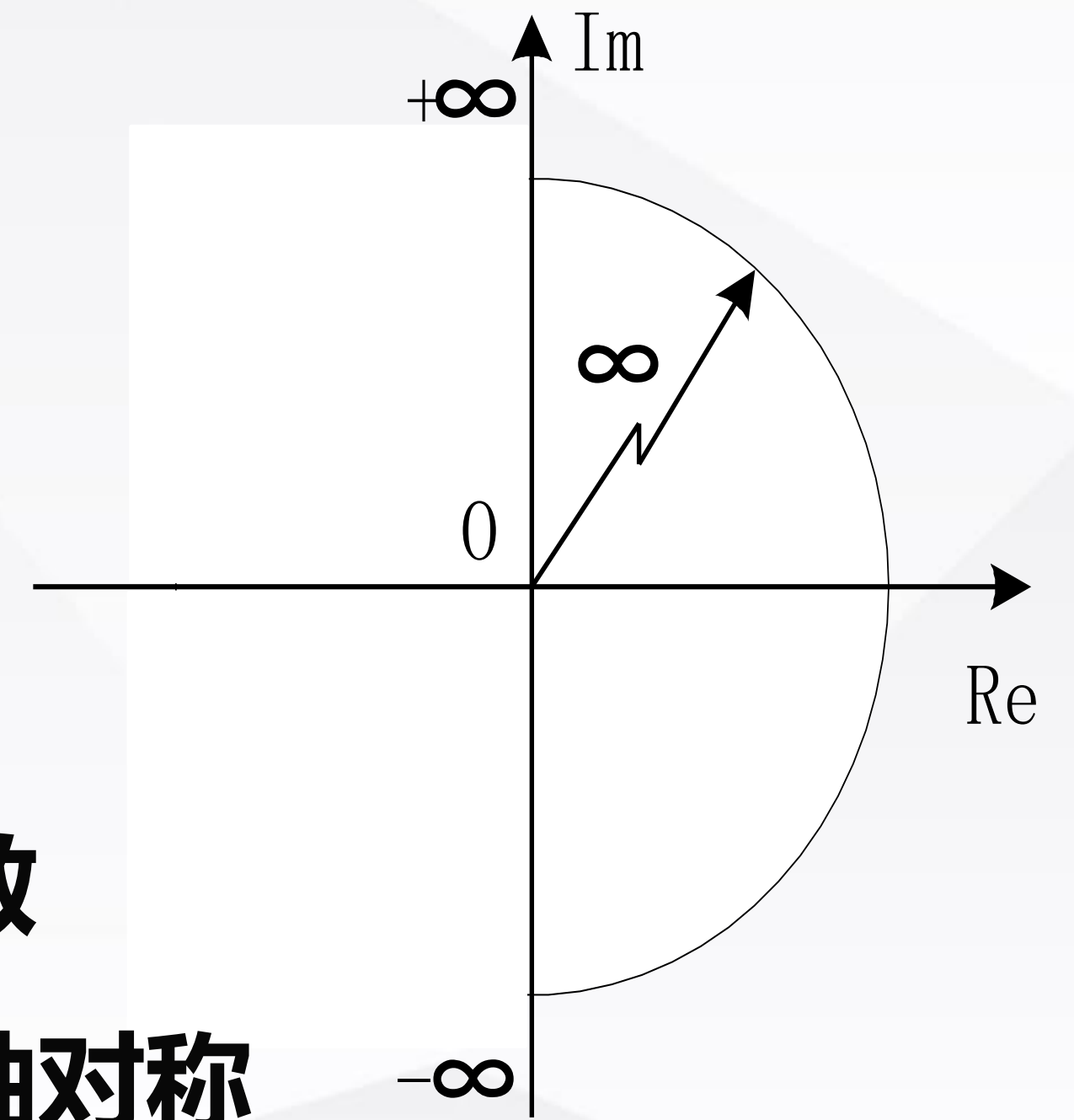
$s \rightarrow \infty, (Q(s) \rightarrow 0) \because Q(s)$ 的分母次数大于分子次数

即当s沿无穷大半圆旋转时, $Q(s)$ 在 origin 处蠕动。

\therefore 我们只看 ω 从 $-\infty \rightarrow +\infty (s = j\omega), 1 + Q(j\omega)$ 旋转的圈数

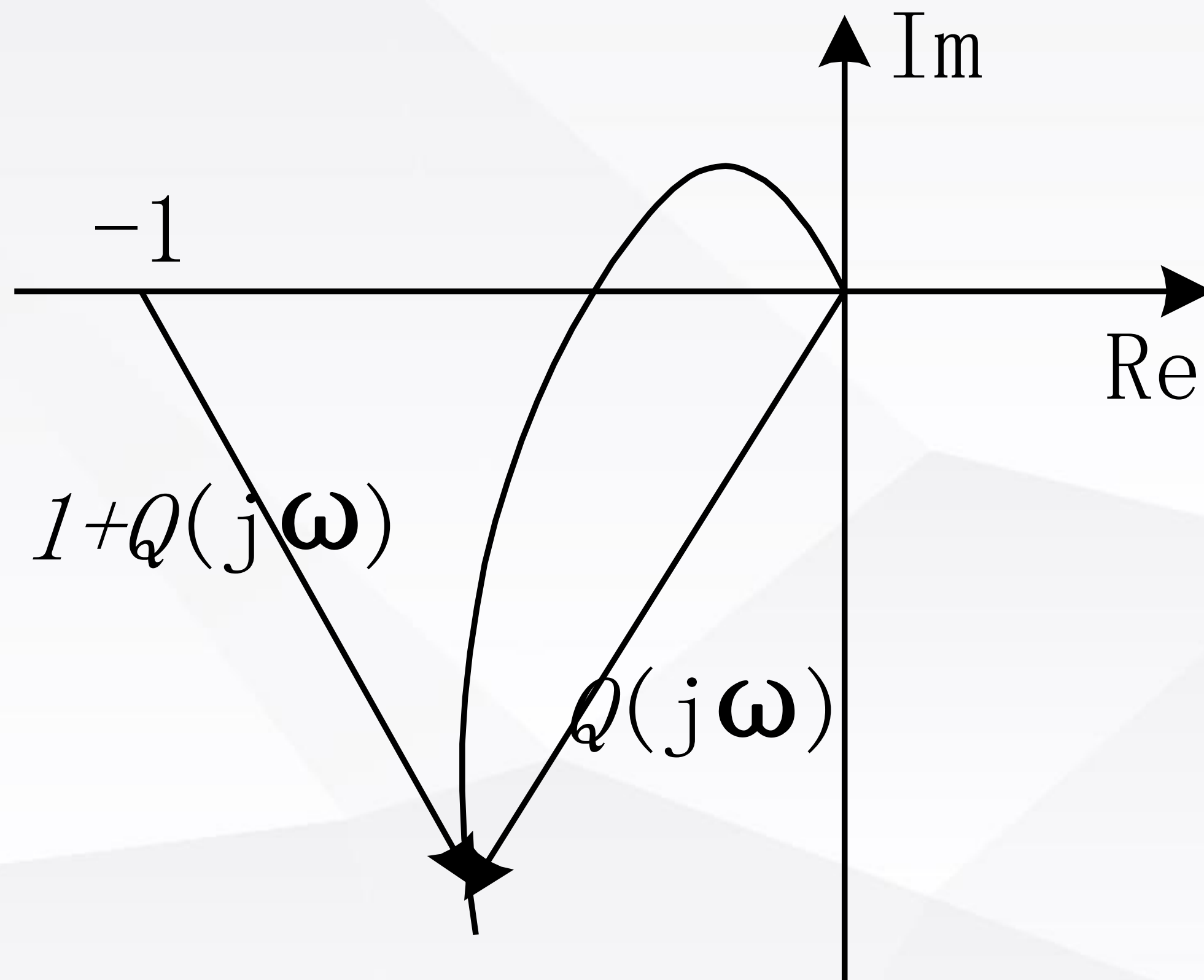
ω 从 $-\infty \rightarrow 0$ 和 $0 \rightarrow +\infty$ 变化中, $Q(j\omega)$ 共轭, 关于实轴对称

$\omega: 0 \rightarrow +\infty, Q(j\omega)$ 不恰恰是开环的频率特性吗?



Nyquist稳定判据

什么是 $1 + Q(j\omega)$? 从-1点指向 $Q(j\omega)$ 的向量



Nyquist稳定判据

设 $1 + Q(j\omega)$ 旋转的圈数为 N 闭环在右半平面的极点数为 Z 开环在右半平面的极点数为 P 。按幅角定理，应满足 $N = Z - P$

按幅角定理，若闭环系统稳定，在右半平面应有0个极点，
现在已知开环在右半平面有 P 个极点，则

稳定的充要条件是： $1 + Q(j\omega)$ 应顺时针向转 $-P$ 圈，即逆时针向转 P 圈

Nyquist稳定判据

设系统开环传递函数 $Q(s)$ 有 P 个极点在右半 s 平面，闭环系统稳定的充分必要条件是当 ω 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$, $1 + Q(j\omega)$ 应逆时针向旋转 P 圈。

Nyquist稳定判据-举例

1. $G_o(s) = \frac{K}{(10s + 1)(2s + 1)(0.2s + 1)}$, $K = 20$

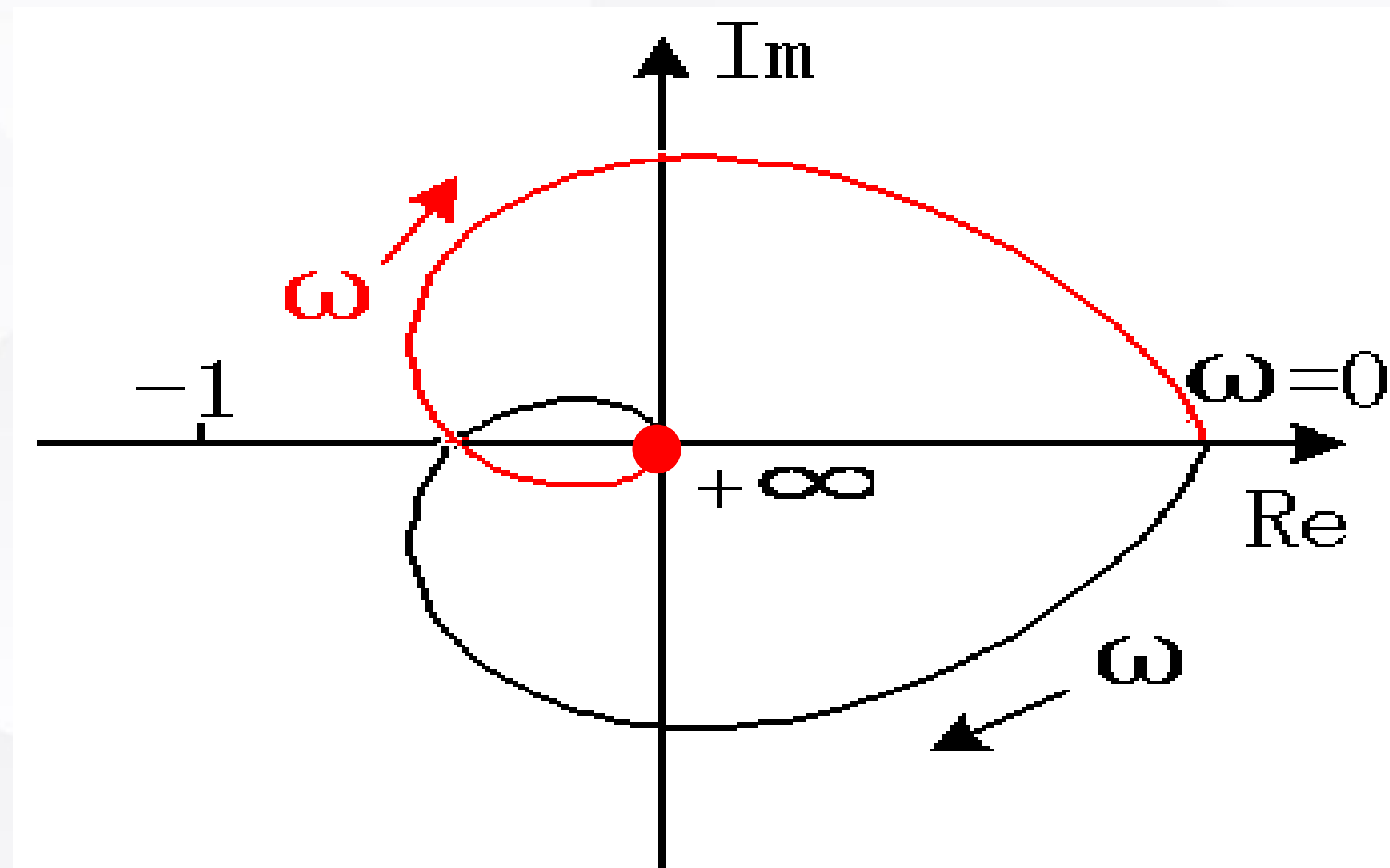
由 $G_o(s)$ 可知, $P = 0$, 其极坐标图如例 1 所示。 (ω 从 $-\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$)

当 ω 从 $-\infty \rightarrow +\infty$

$1 + G_o(j\omega)$ 旋转0圈,

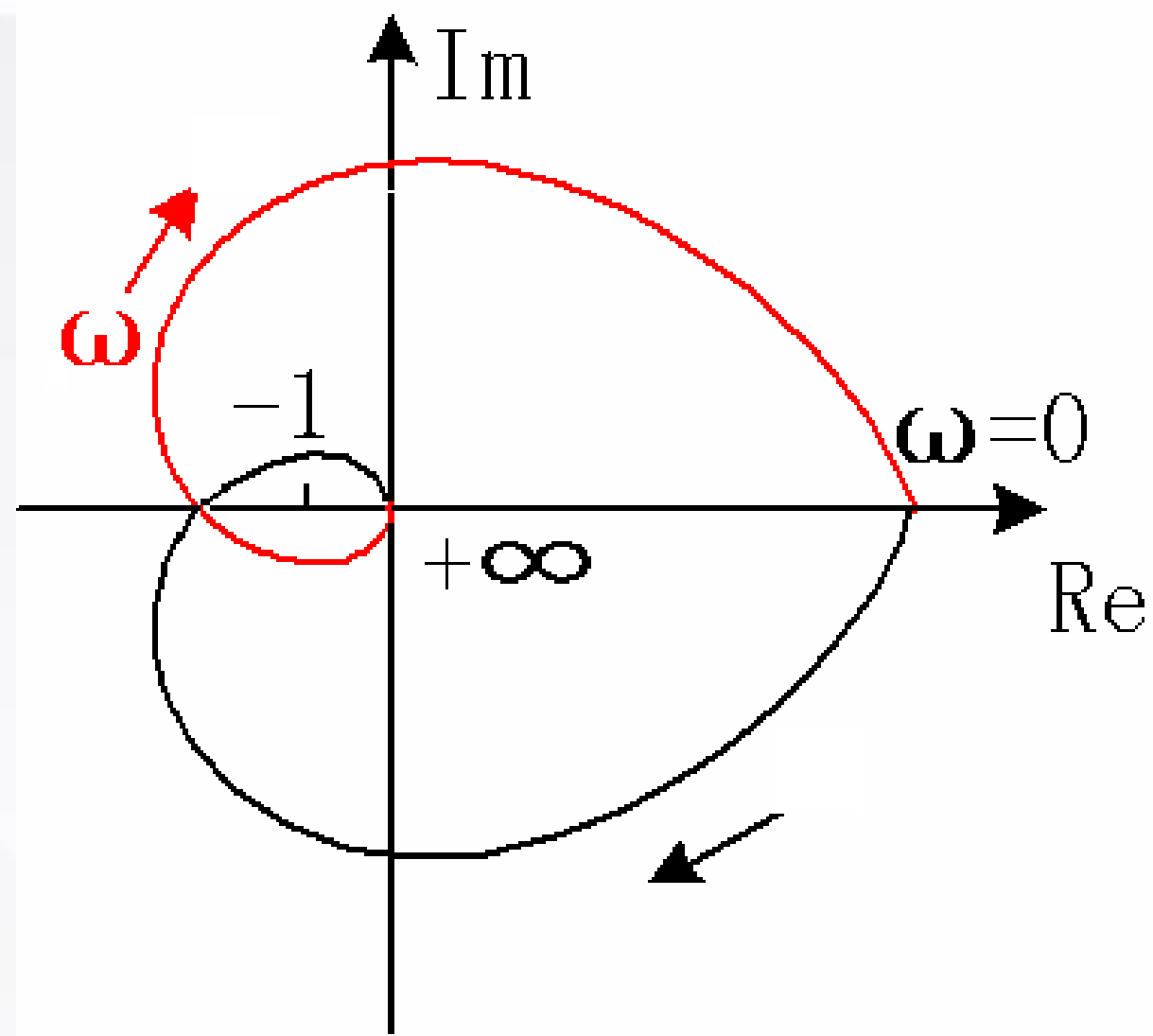
即 $N = 0$ 又知 $P = 0$,

$\therefore Z = 0$ 闭环稳定



Nyquist稳定判据-举例

2. $G_o(s)$ 同例 1, 但 $K = 100$ 其极坐标图如下所示。



可以判断出: $N = 2$, 又 $P = 0$, $\therefore Z = 2$ 闭环有两个根在右半平面

从以上两例总结出规律: $G_o(j\omega)$ 稳定与否看其极坐标图包不包-1点

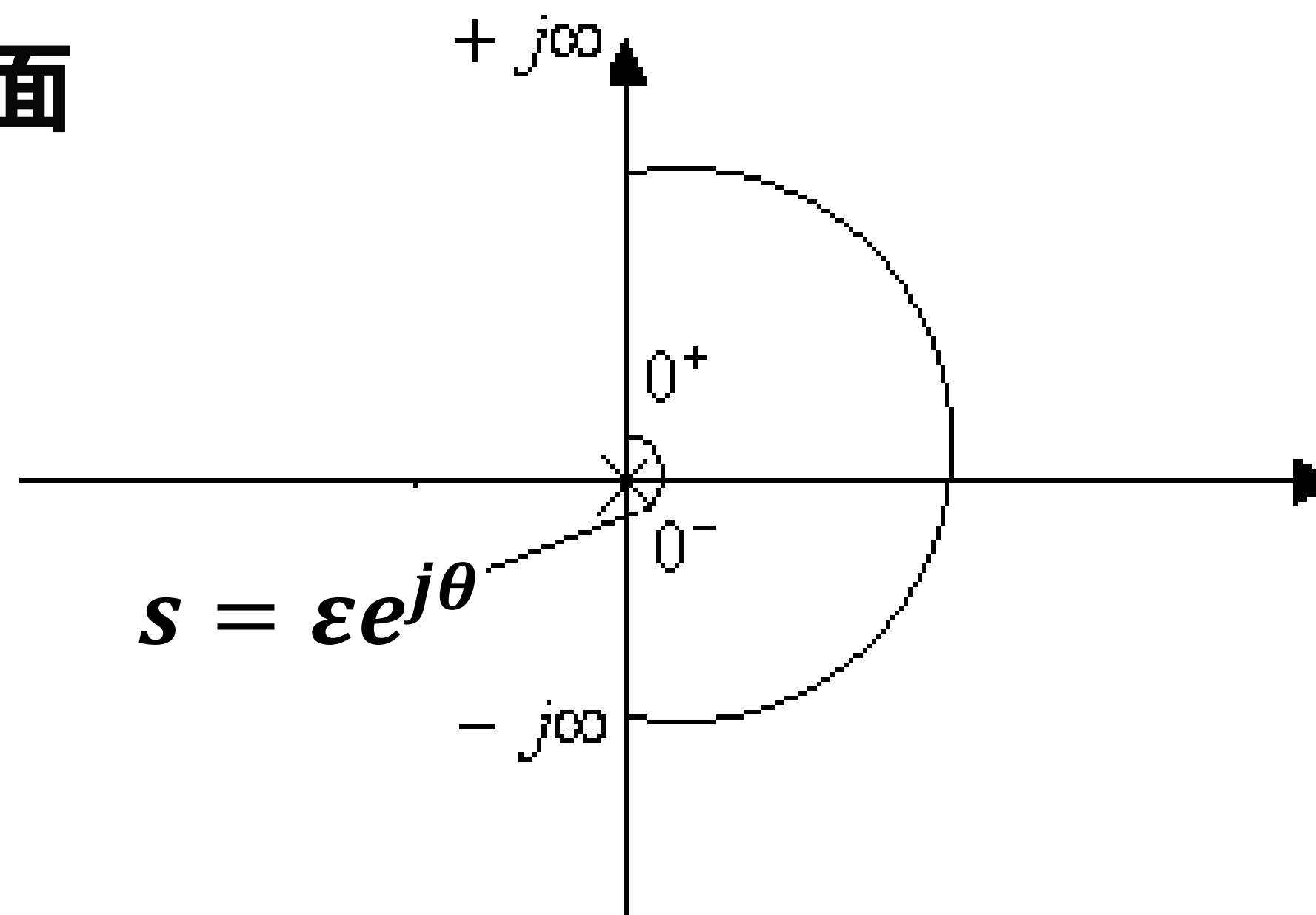
Nyquist稳定判据-举例

3. $G_o(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.1s+1)}, \quad K=2$

前面已说过D形围线不能通过 $W(s)$ 的零点, 现在已知开环有一个极点在虚轴上即在D形围线上, \therefore 要对D形围线加以改造, 如图

这样就把 $s=0$ 的极点归到左半平面

\therefore 仍认为 $P=0$



Nyquist稳定判据-举例

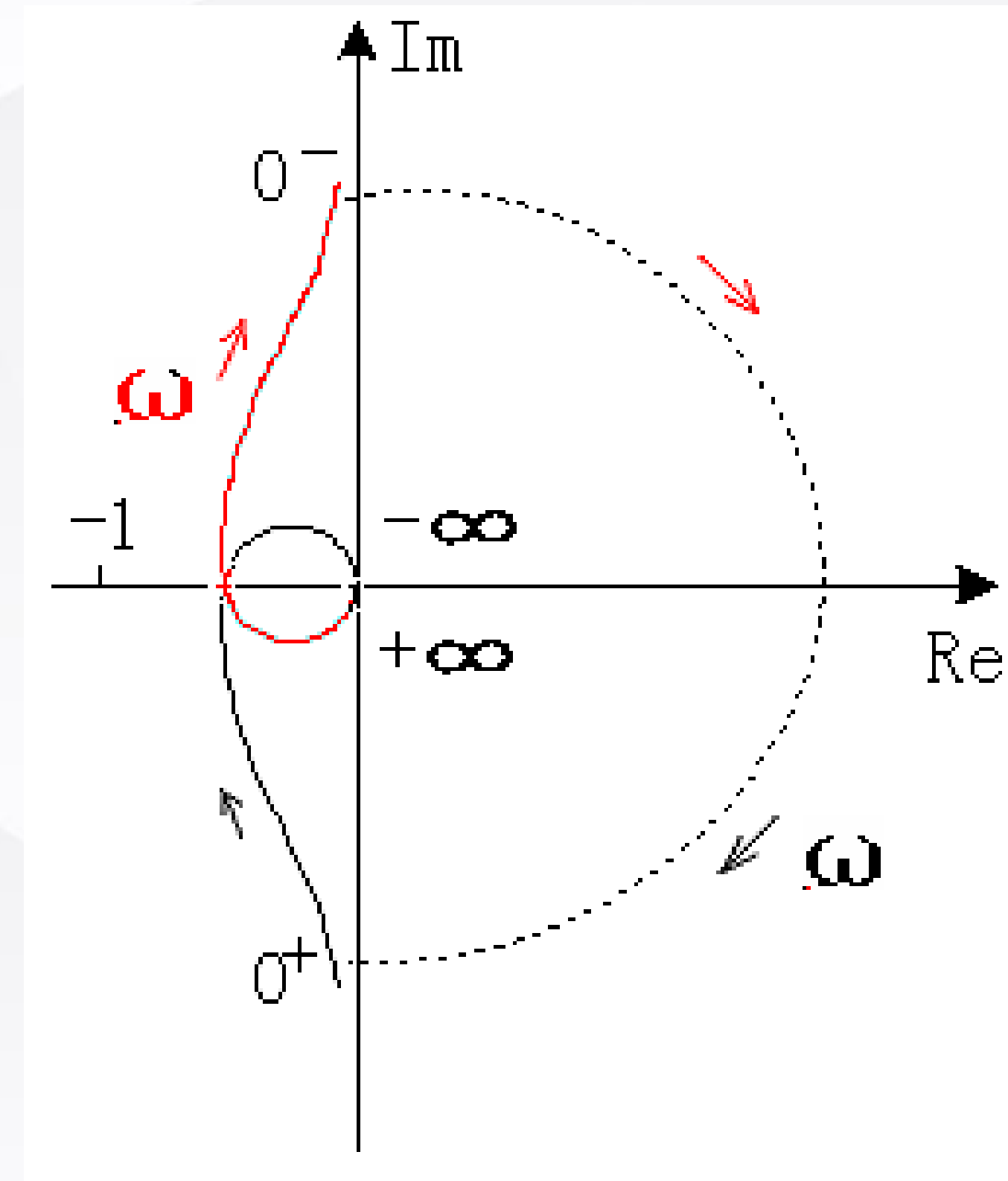
$$\omega = 0^- \rightarrow \omega = 0^+$$

$$s = \varepsilon e^{j\theta} \quad \theta \text{ 从 } -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

映射到 $G_o(j\omega)$ 平面: $1/s$

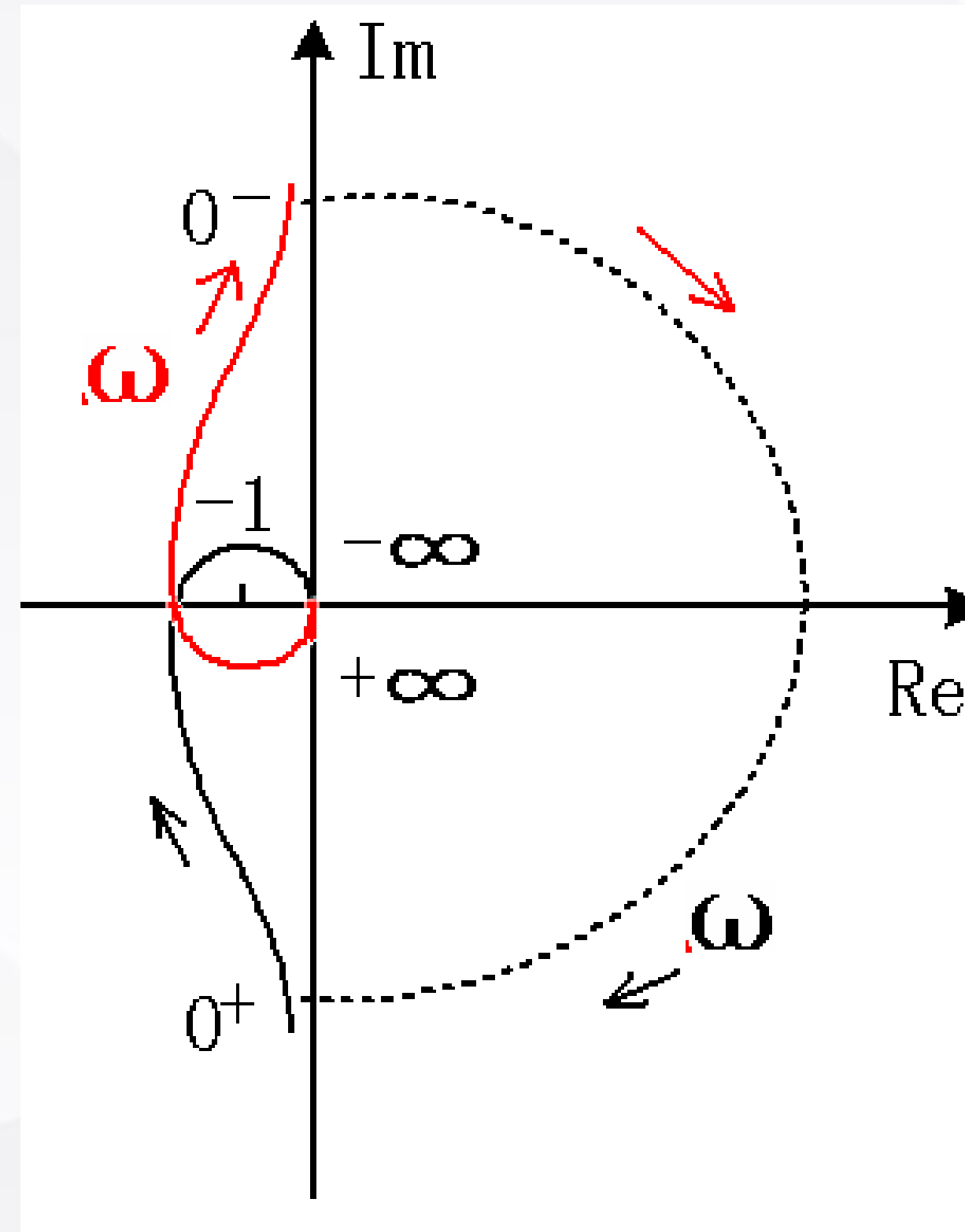
$G_o(j\omega)$ 沿无穷大半径从 $\frac{\pi}{2} \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

可以判断 $N = 0 \therefore Z = 0$



Nyquist稳定判据-举例

4. $G_o(s)$ 同例 1, 但 $K = 20$ 其极坐标图如例 4 所示。 $N = 2, Z = 2$



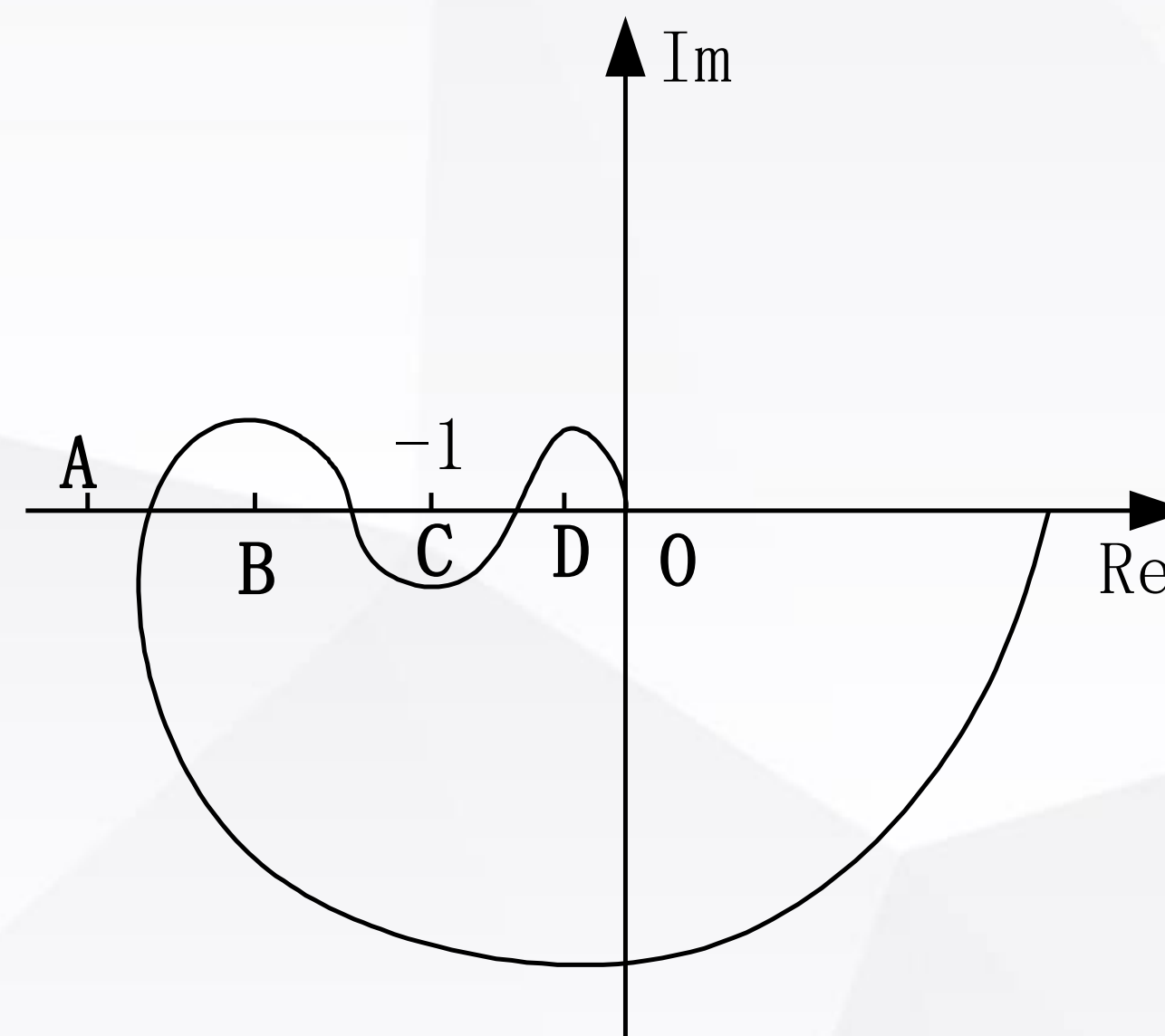
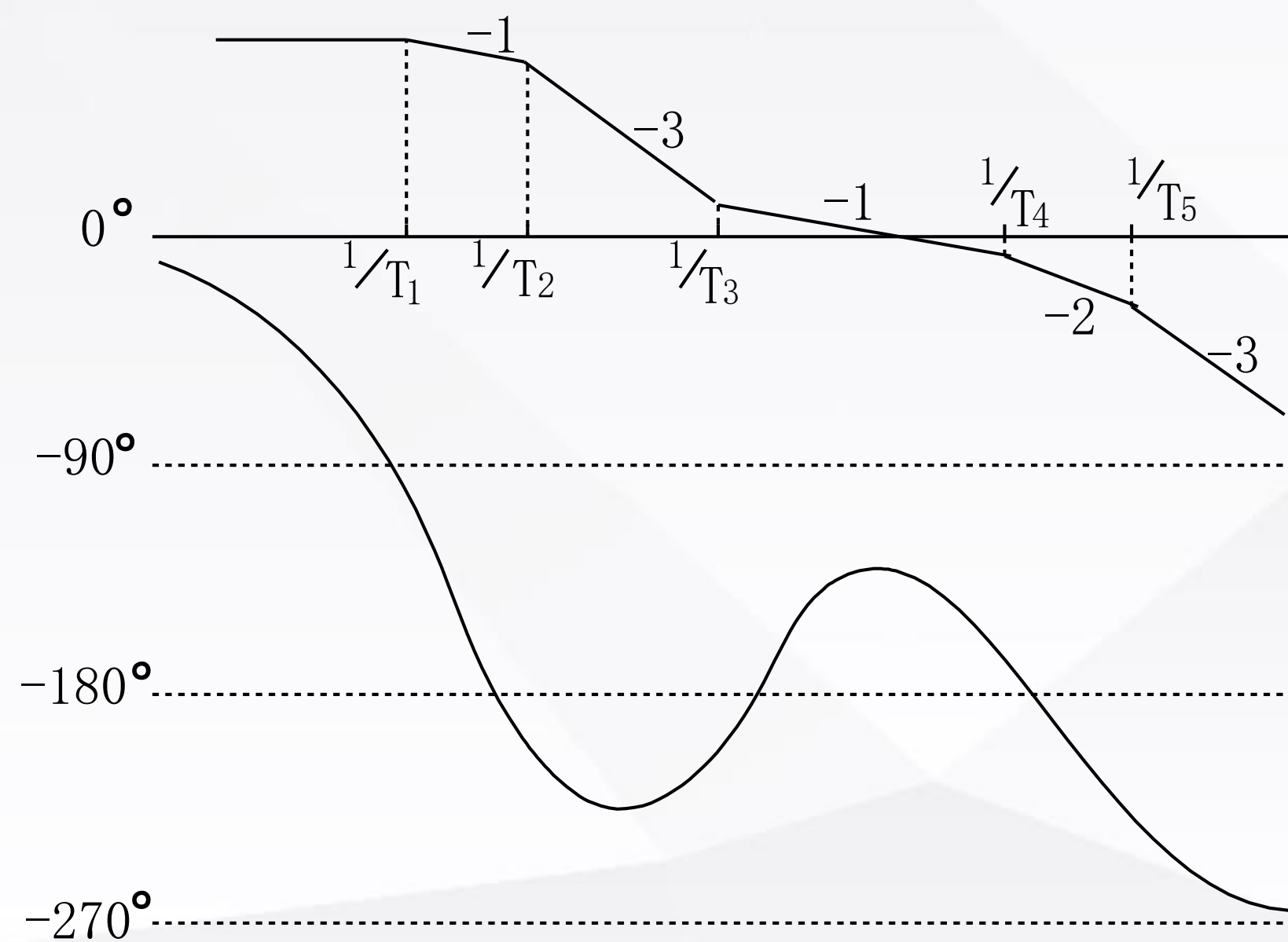
小结: $G_o(s)$ 含有一个零极点的情况,

闭环稳定与否可以从其开环极坐标图包不包-1来判断。

Nyquist稳定判据-举例

5.
$$G_o(s) = \frac{K(T_3s + 1)^2}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)^2(T_4s + 1)(T_5s + 1)}$$

对数频率特性图和极坐标图如下所示。K变，相应于极坐标的伸缩



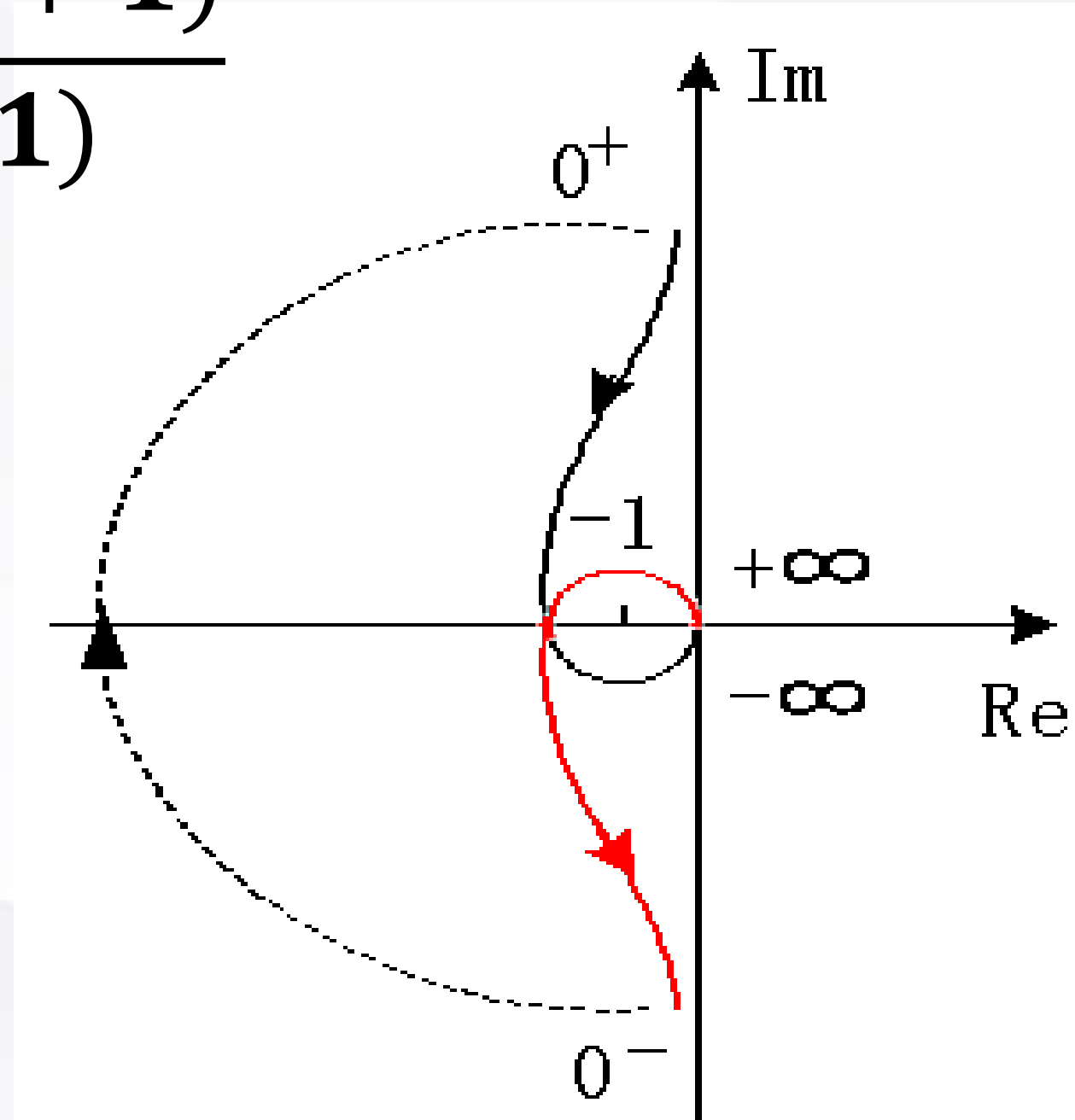
-1点的位置有四种情况（即-1点处于A, B, C, D四处），试判断哪几种情况稳定（-1点位于A, C处闭环稳定，位于B, D处闭环不稳定）

Nyquist稳定判据-举例

6. 非最小相位对象 $G_o(s) = \frac{6(0.33s + 1)}{s(s - 1)}$

其极坐标图如图所示

由图可以判断: $N = -1$ (即
 $1 + G_o(s)$ 逆钟向旋转一圈)



$\because N = Z - P$, 已知 $P = 1$

$\therefore Z = 0$ 系统稳定。如果 K 增大, 系统总是稳定的。

当 K 减少至 $G_o(j\omega)$ 不包-1, 系统就不稳定。

\therefore 非最小相位系统稳定与否不能看 $G_o(j\omega)$ 是否包-1点

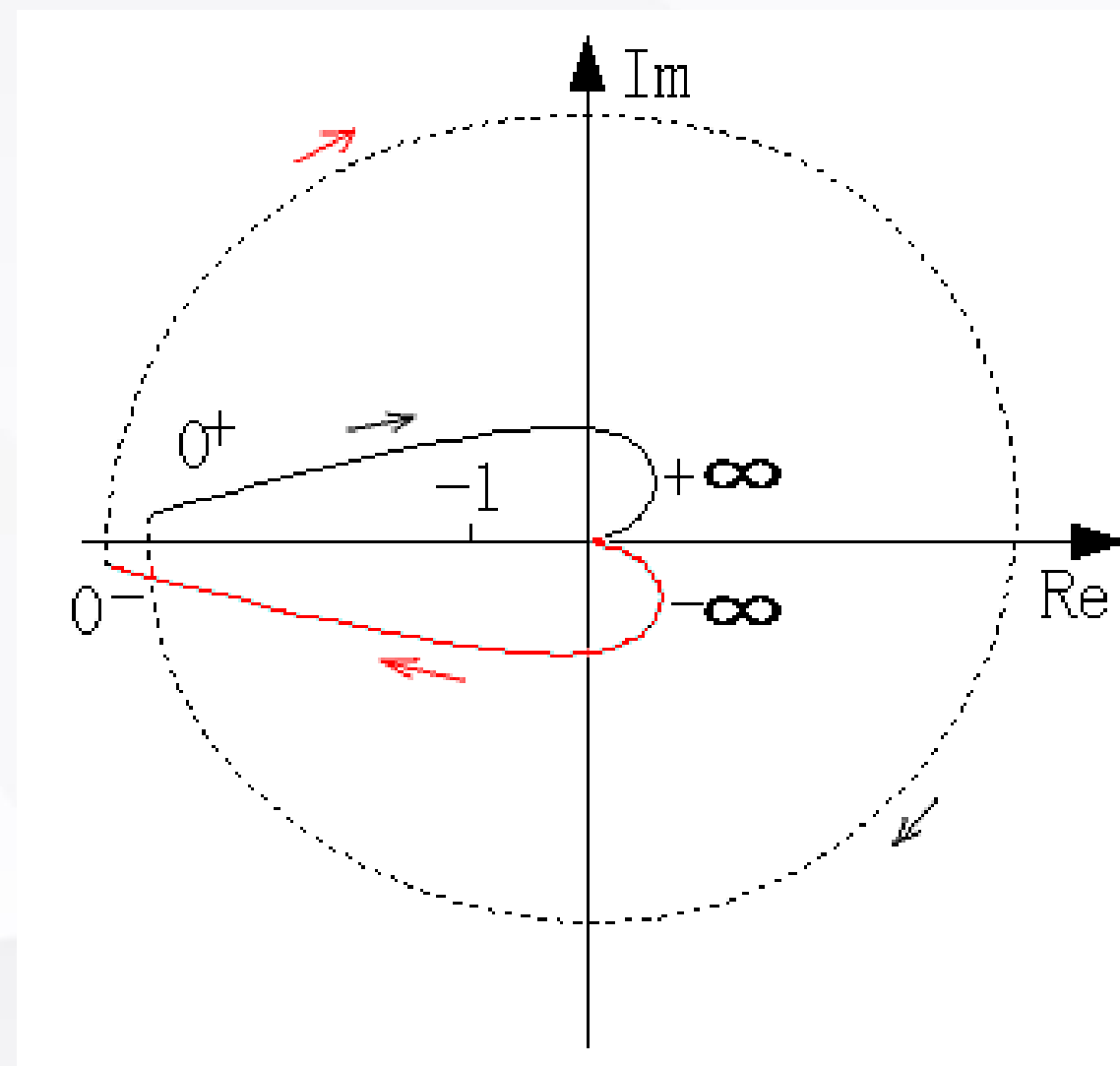
用Routh判据可以得出: 该系统稳定的范围是 $K > 3$ 。

Nyquist稳定判据-举例

结构不稳定例子 $G_o(s) = \frac{K}{s^2(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$ $P = 0$

极坐标图如图所示

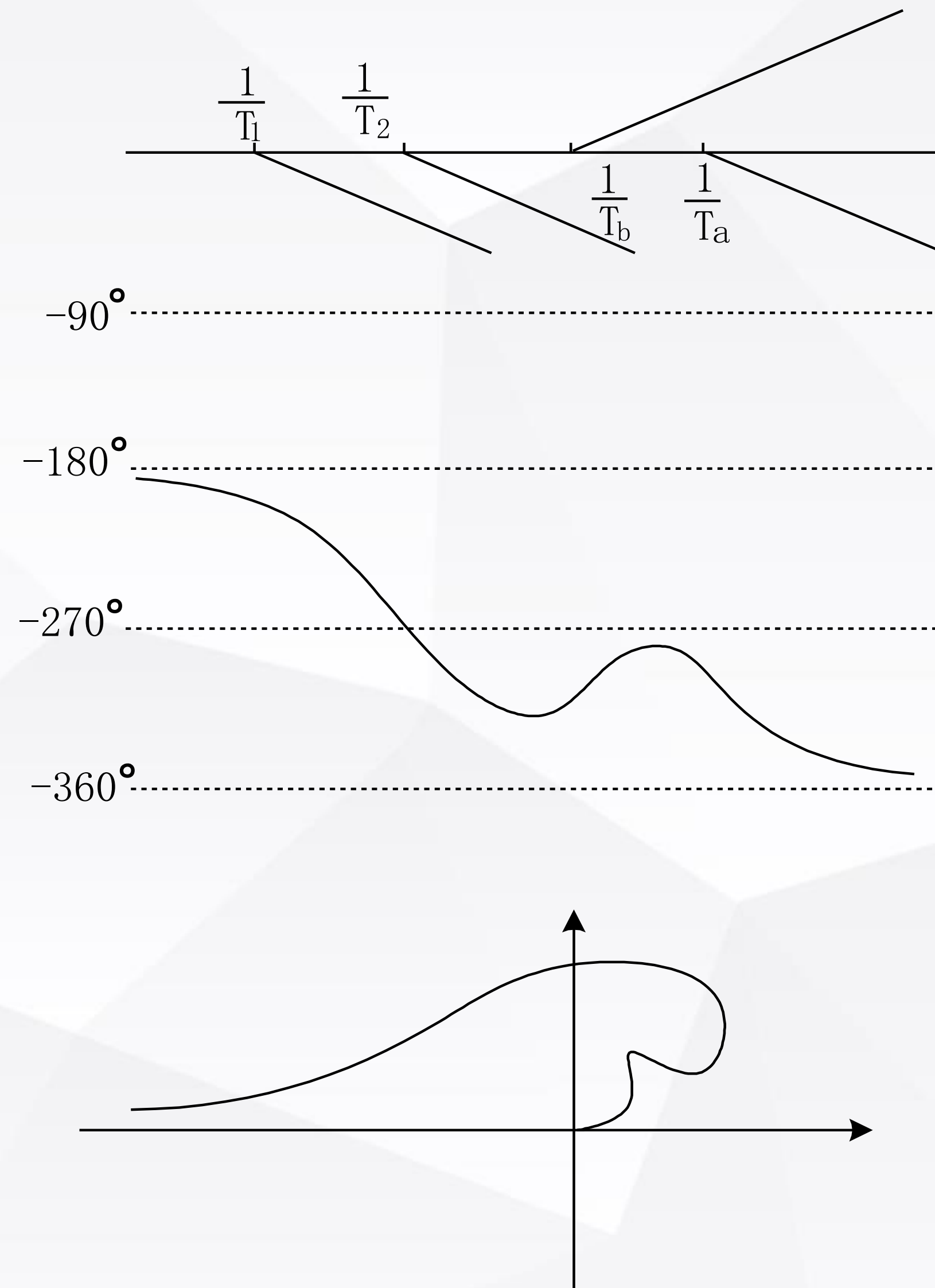
可判断出 $N = 2$, 由 $Z = N + P$ 得 $Z = 2$, 闭环不稳定



怎样使其稳定呢? 加 $\frac{T_b s + 1}{T_a s + 1}$ 显然应该 $T_b > T_a$

Nyquist稳定判据-举例

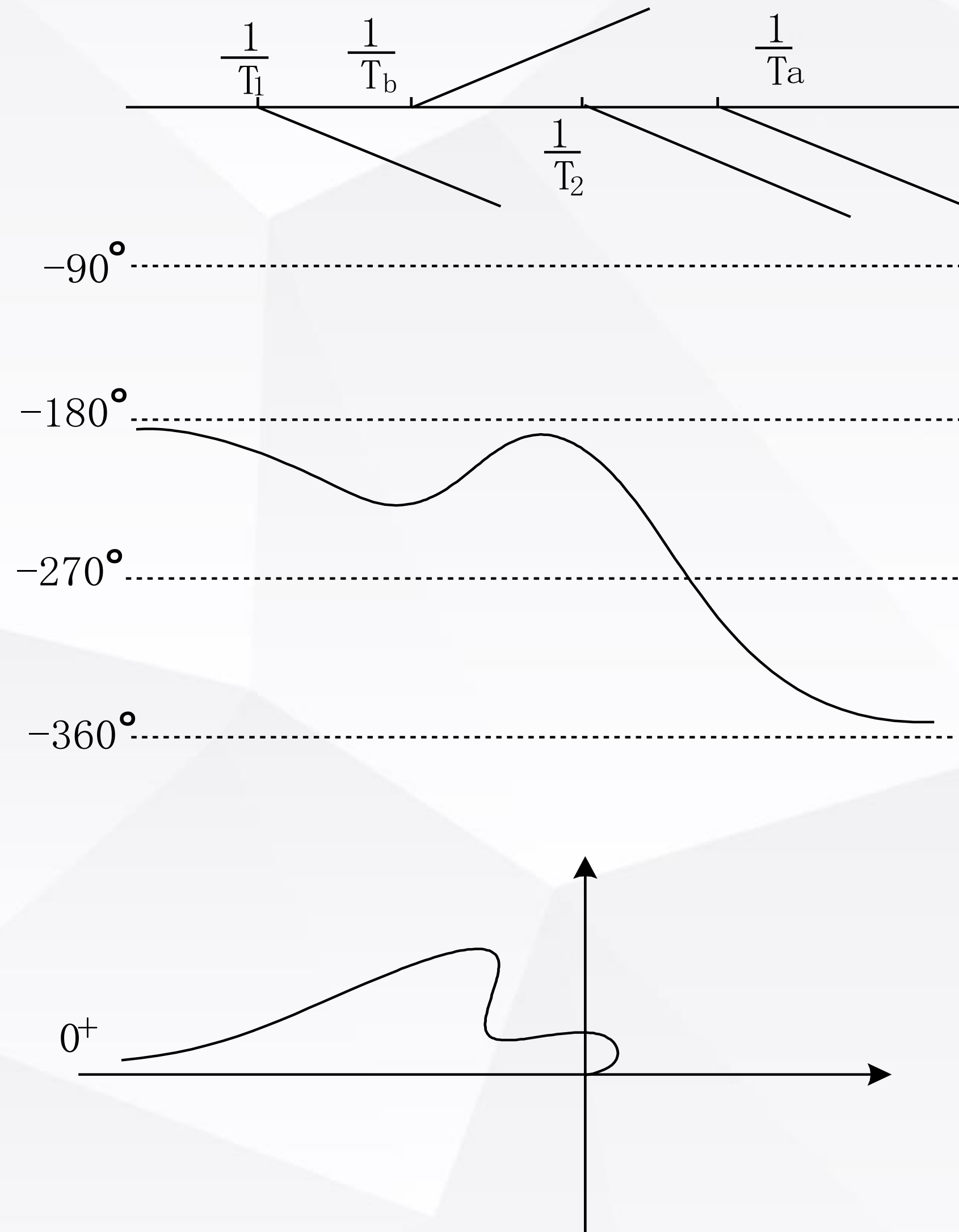
1) $T_b > T_a$ 但 $T_b < T_2 < T_1$



Nyquist稳定判据-举例

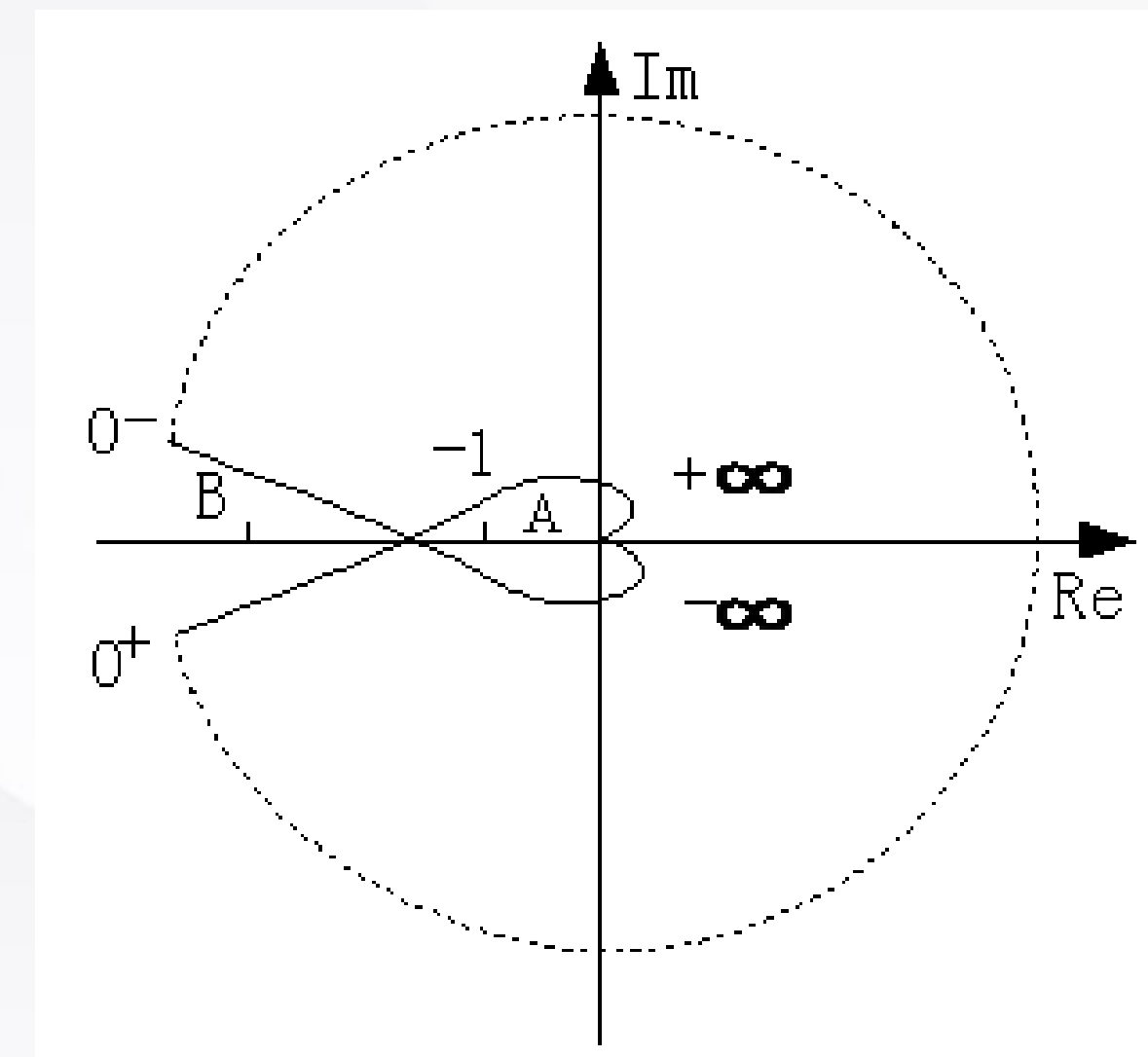
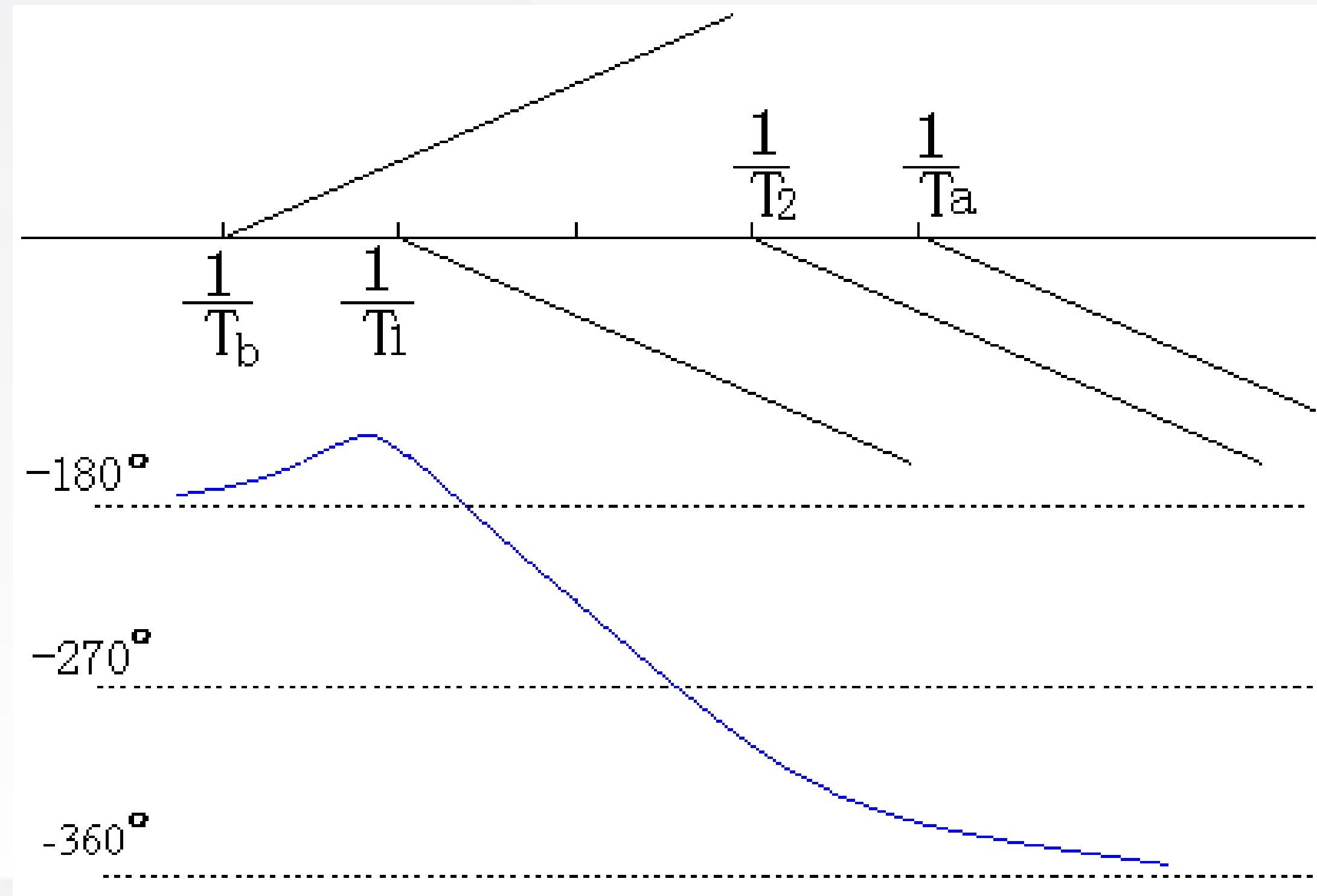
2) $T_b > T_a$ 但 $T_2 < T_b < T_1$

可见2) , 3) 的校正无济于事



Nyquist稳定判据-举例

3) $T_b > T_1 > T_2 > T_a$



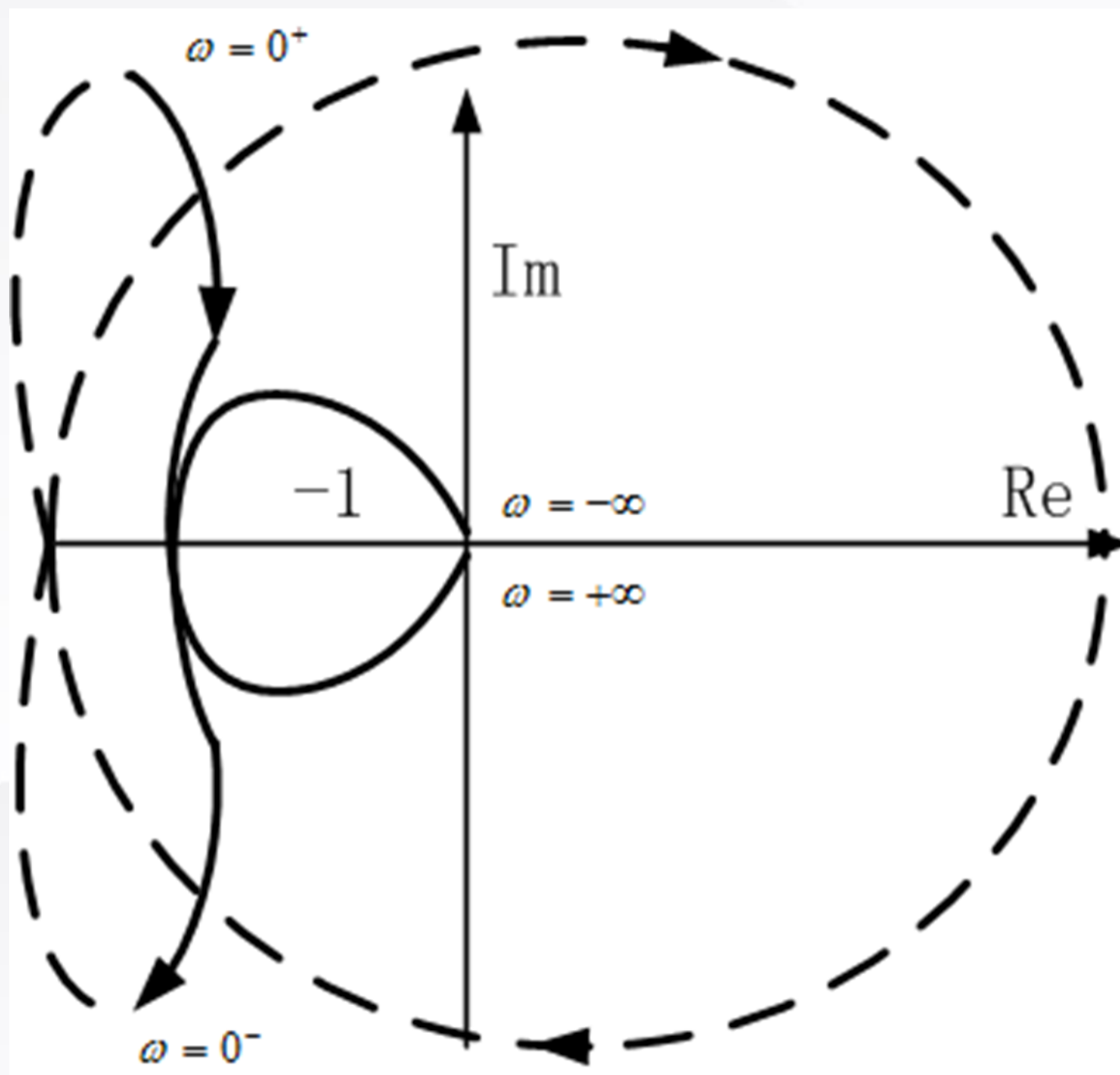
可以通过调整 K 使 -1 点处在 B，可使系统稳定。

Nyquist稳定判据-举例

三次积分的例子

传递函数为

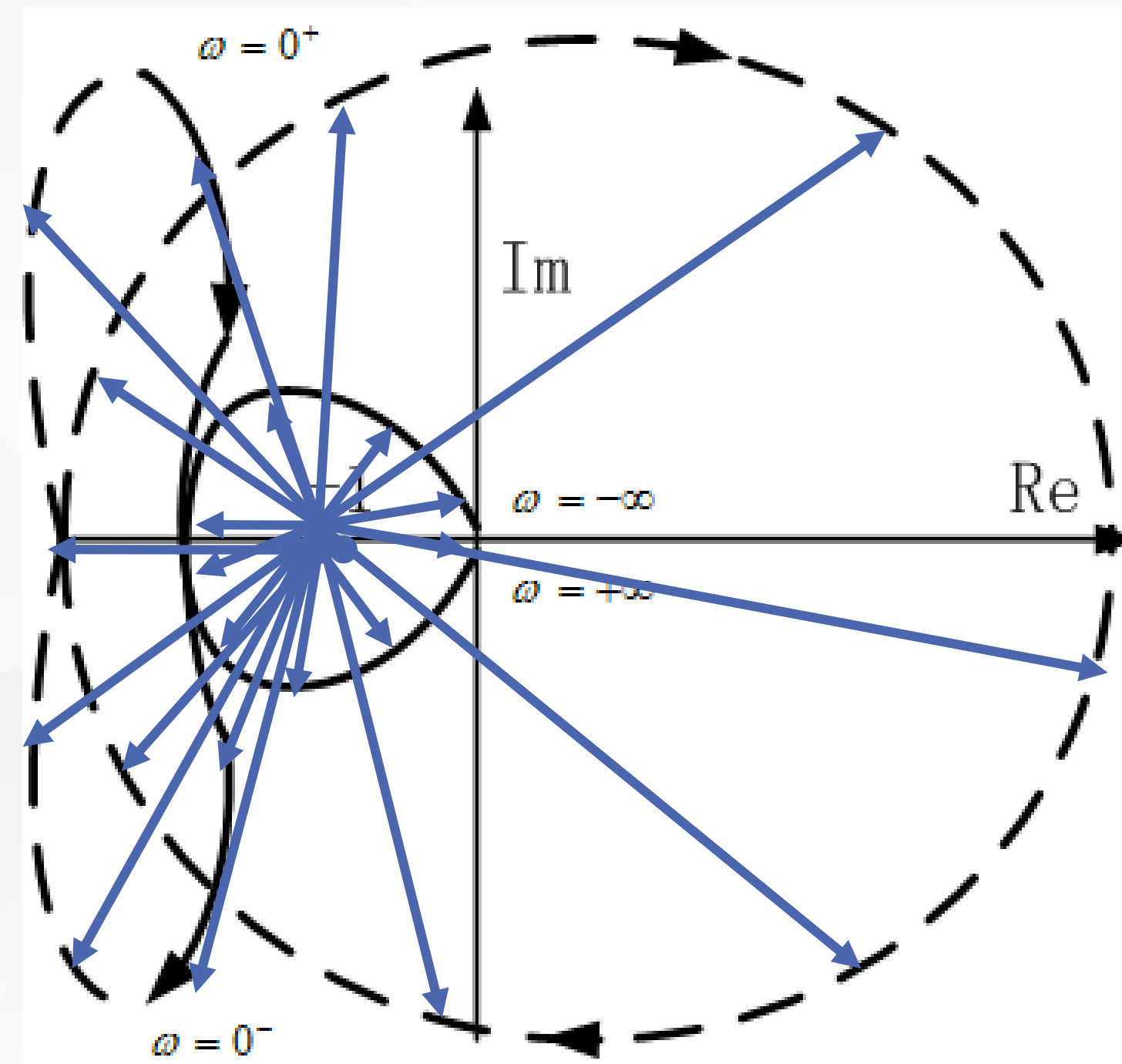
$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s^3}$$



Nyquist稳定判据-举例

$$G(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s^3}$$

从 $(-1, j0)$ 点指向矢量总旋转圈数为0，闭环系统稳定。



Nyquist稳定判据-举例

带振荡环节的例子

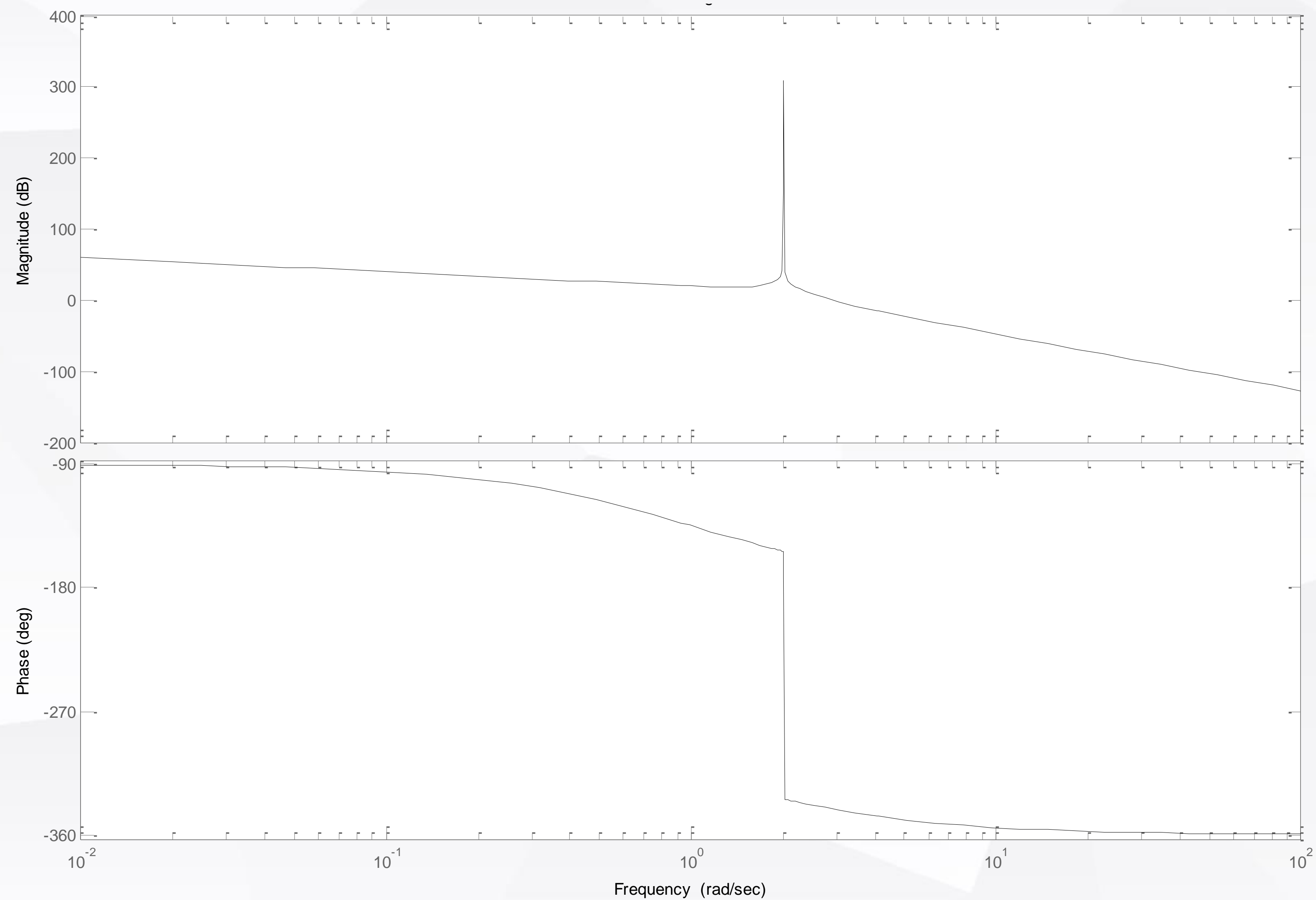
已知系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)\left(\frac{s^2}{4} + 1\right)}$$

试绘制系统概略开环幅相曲线。

特点： 出现一对纯虚极点；等幅振荡环节对应的转折频率处，幅值增益为无穷大，相角突变180度；幅相曲线在转折频率处呈现不连续现象。

Nyquist稳定判据-举例



Nyquist稳定判据-举例

开环幅频特性: $A(\omega) = \frac{40}{\omega\sqrt{1+\omega^2}(4-\omega^2)}, \omega \neq 0, \pm 2$

开环相频特性: $\omega = 0$ 时, $A(\omega) \rightarrow \infty, \varphi(\omega) = -90^\circ$
 $\omega = \infty$ 时, $A(\omega) \rightarrow 0, \varphi(\omega) = -360^\circ$

系统幅相曲线以-90度起于无穷远, 以-360度终于原点。

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctan \omega, \omega \leq 2^-$$

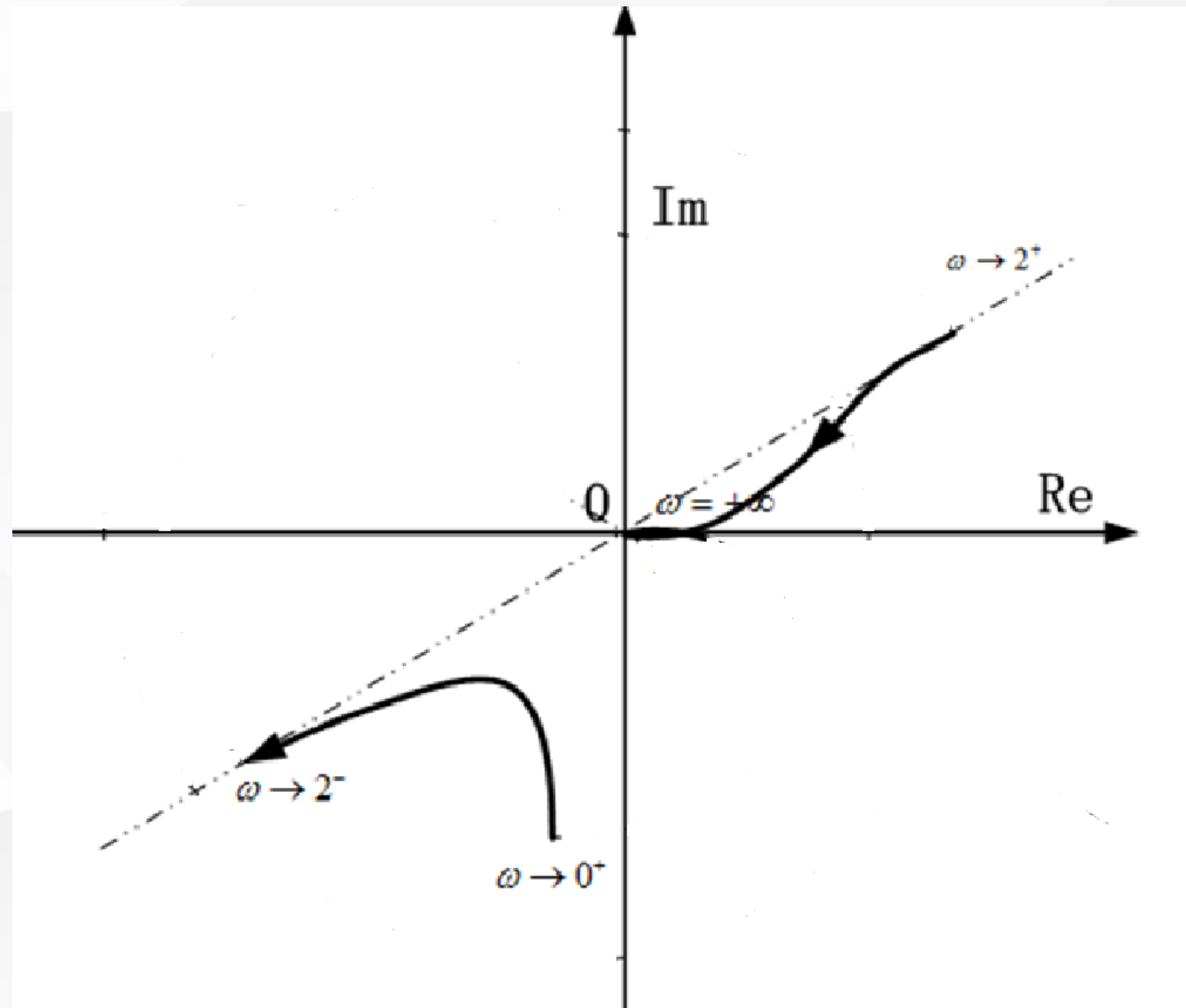
$$\varphi(\omega) = -270^\circ - \arctan \omega, \omega \leq 2^+$$

确定 $\pm 2j$ 处渐近线的方向:

$$\omega \rightarrow 2^- \text{时}, A(\omega \rightarrow 2^-) \rightarrow \infty, \varphi(\omega) = -153.4^\circ$$

$$\omega \rightarrow 2^+ \text{时}, A(\omega \rightarrow 2^+) \rightarrow \infty, \varphi(\omega) = -333.4^\circ$$

Nyquist稳定判据-举例



Nyquist稳定判据-举例

类似零极点，闭合围线需要绕过虚轴上的极点：

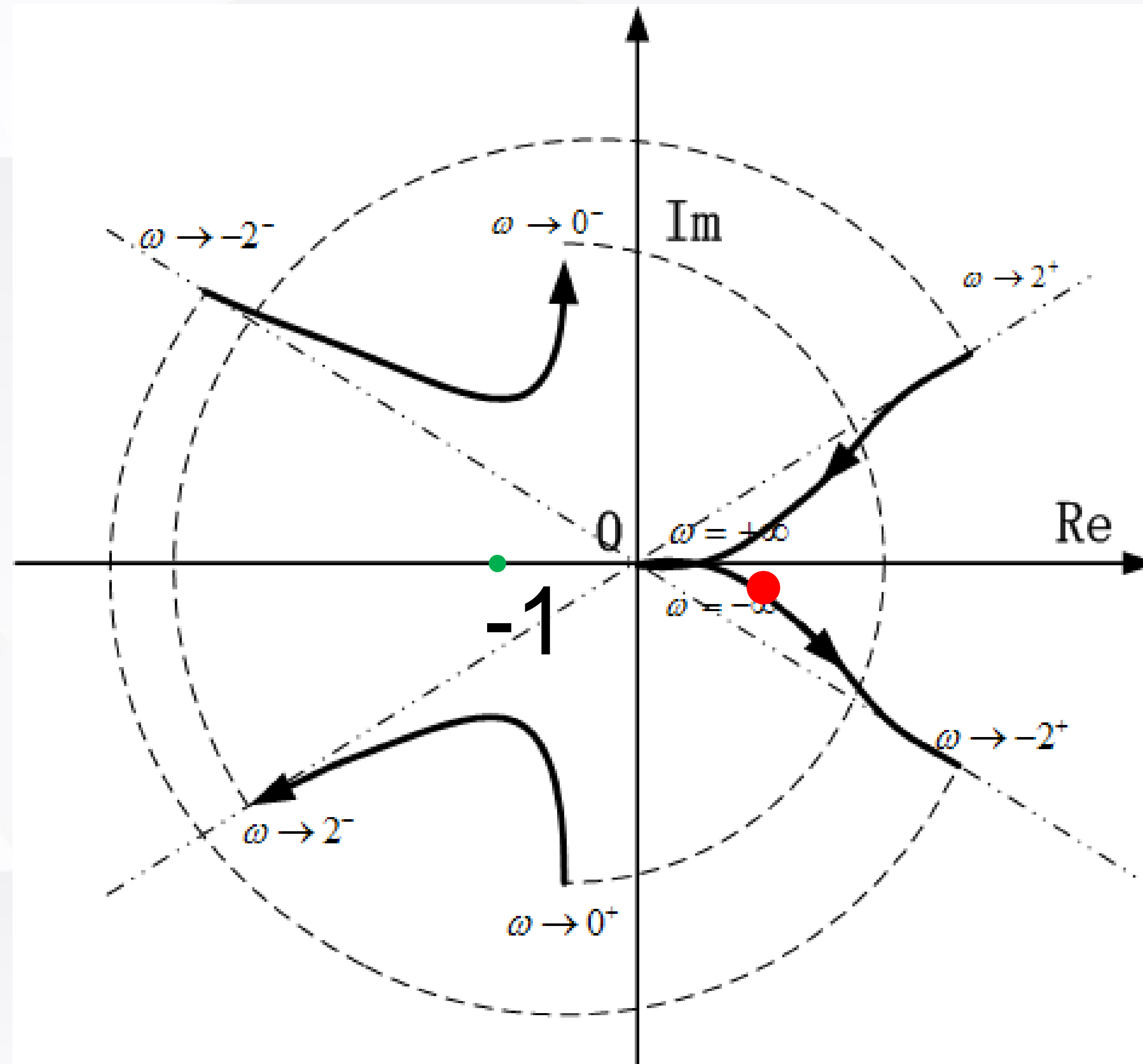
以虚轴上点 $(0, 2j)$ 为圆心，半径无穷小的右半圆方程为

$$s = j2 + \varepsilon e^{j\theta}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ θ 从 -90° 变到 90° 时，

得到一个半径为无穷大，相角从 -153.4° 顺时针方向转到 -333.4° 的圆弧，即从 2^- 到 2^+ 顺时针转半圈。

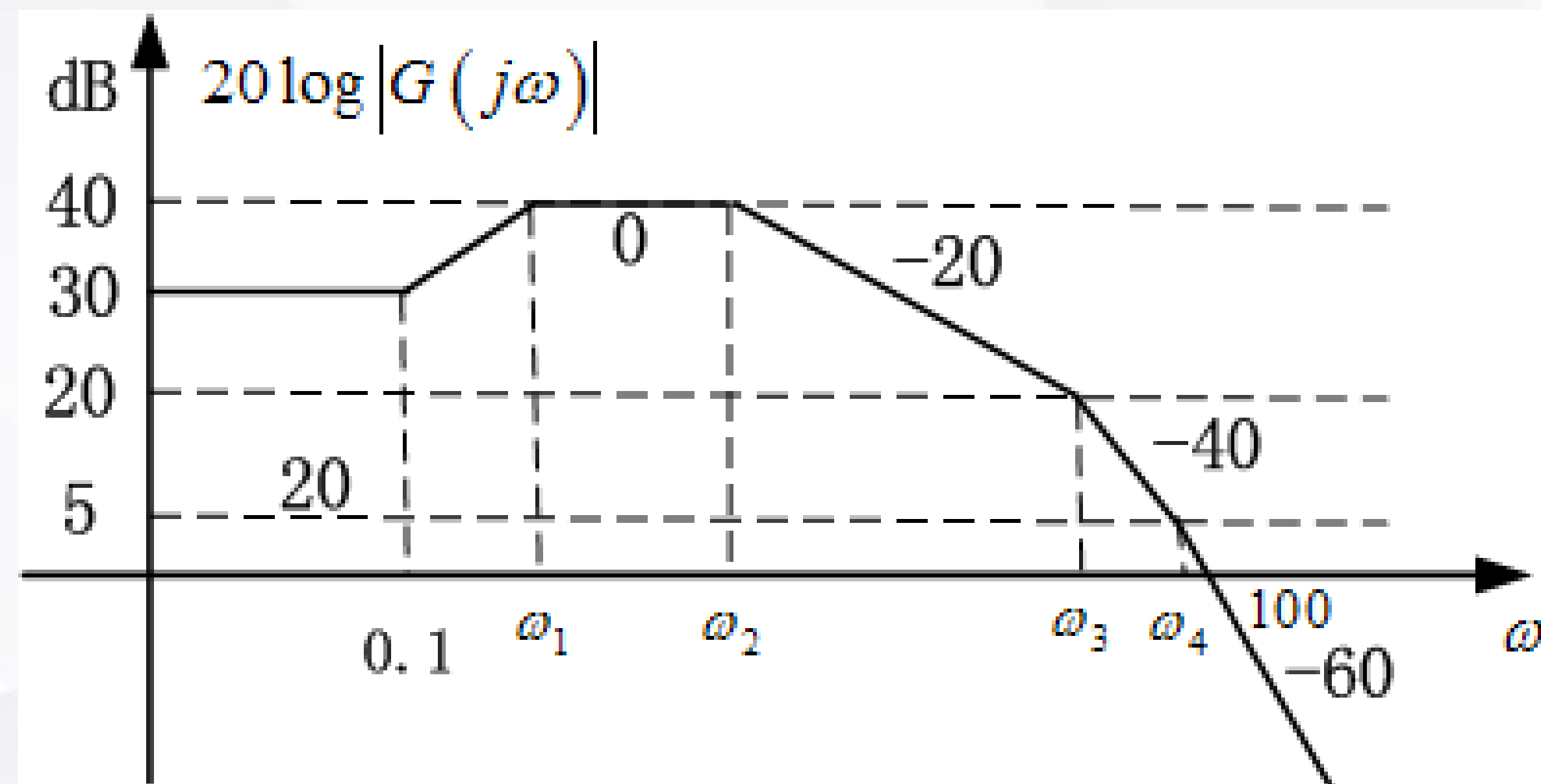
Nyquist稳定判据-举例



Nyquist稳定判据

由频率响应求取传递函数

对于最小相位系统，由开环系统的对数图可以很容易得求出对应的开环传递函数



Nyquist稳定判据

解：最小转折频率前的低频段：

$$L(\omega) = -v \times 20 \log \omega = 0, \therefore v = 0$$

$\omega = 0.1$, 斜率变化20, 属一阶微分环节

$\omega = \omega_1$, 斜率变化-20, 属惯性环节

$\omega = \omega_2$, 斜率变化-20, 属惯性环节

$\omega = \omega_3$, 斜率变化-20, 属惯性环节

$\omega = \omega_4$, 斜率变化-20, 属惯性环节

传递函数的形式是：

$$G(s) = \frac{K \left(\frac{s}{0.1} + 1 \right)}{\left(\frac{s}{\omega_1} + 1 \right) \left(\frac{s}{\omega_2} + 1 \right) \left(\frac{s}{\omega_3} + 1 \right) \left(\frac{s}{\omega_4} + 1 \right)}$$

Nyquist稳定判据

下面求解

$K, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$

$$20\log K = 30, K = 10\sqrt{10}$$

$$L(\omega_1) = 40dB, L(0.1) = 30dB$$

$$\frac{40 - 30}{\log \omega_1 - \log 0.1} = 20, \omega_1 = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$L(100) = 0dB, L(\omega_4) = 5dB$$

$$\frac{5 - 0}{\log \omega_4 - \log 100} = -60, \omega_4 = 82.54$$

$$L(\omega_3) = 20dB, L(\omega_4) = 5dB$$

$$\frac{20 - 5}{\log \omega_3 - \log \omega_4} = -40, \omega_3 = 34.81$$

$$L(\omega_3) = 20dB, L(\omega_2) = 40dB$$

$$\frac{40 - 20}{\log \omega_2 - \log \omega_3} = -20, \omega_2 = 3.48$$

Nyquist稳定判据

所以:

$$G(s) = \frac{10\sqrt{10}\left(\frac{s}{0.1} + 1\right)}{\left(\sqrt{10}s + 1\right)\left(\frac{s}{3.48} + 1\right)\left(\frac{s}{34.81} + 1\right)\left(\frac{s}{82.54} + 1\right)}$$

Nyquist稳定判据-举例

带延迟环节的例子

已知系统的开环传递函数为

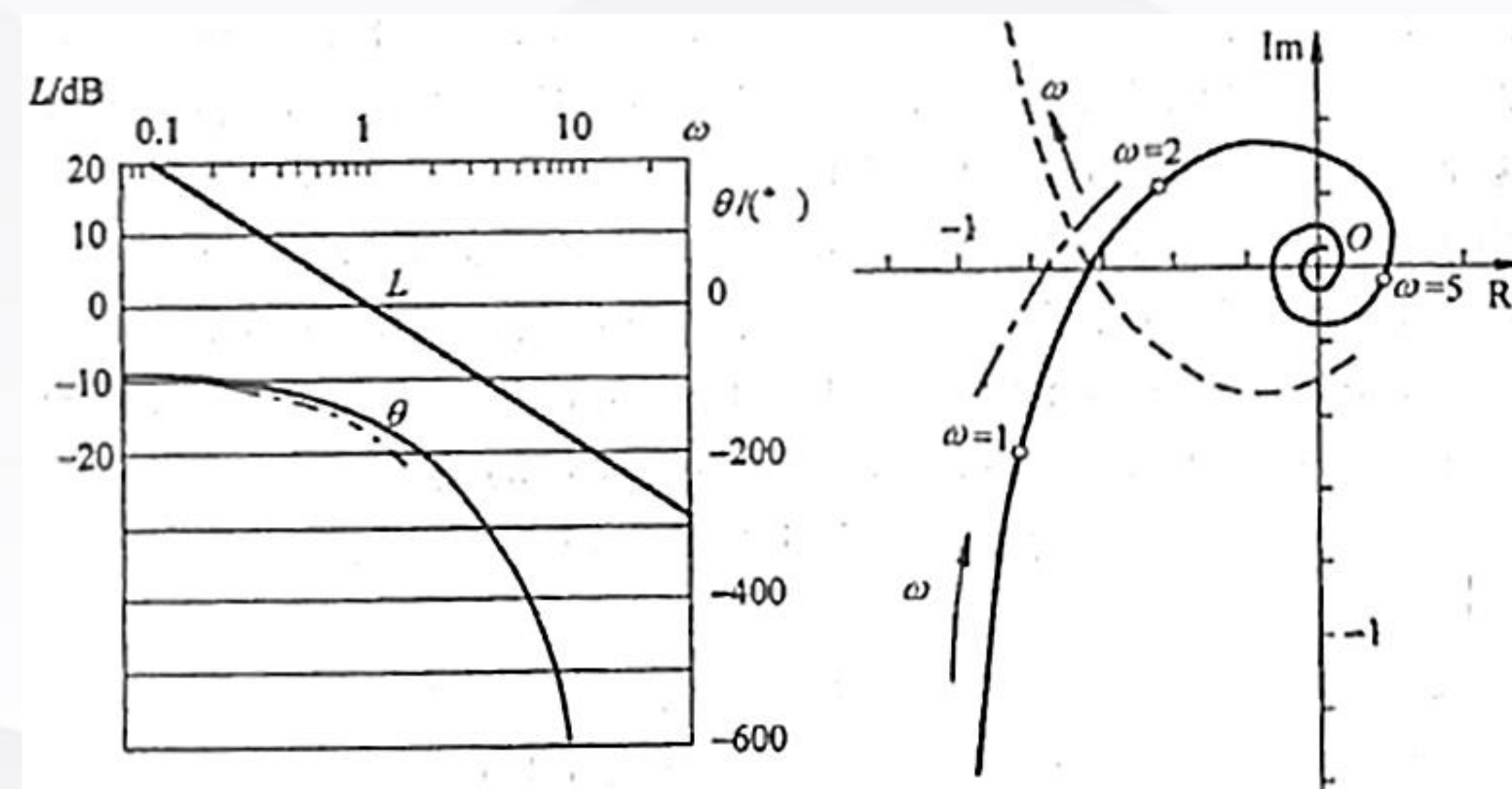
$$G(s) = \frac{K}{s} e^{-\tau s}$$

其中 $K > 0, \tau > 0$.

要求判断能使闭环系统稳定的参数范围

特点： $Q(s)$ 在复数平面的右半面上没有极点。

当 K 增大到某个值时 $Q(s)$ 必会包围 $-1 + j0$ 点而使闭环系统失去稳定
 当 τ 增大，相频特性曲线向左平移，Nyquist图中各点相角更加趋负而使闭环系统失去稳定。总之， K 增大或者 τ 增大都不利于系统稳定



Nyquist稳定判据-举例

$$Q(j\omega) = \frac{K}{\omega} e^{j(-\tau\omega - \pi/2)}$$

如果闭环系统稳定，曲线 $Q(j\omega)$ 应在 $-1+j0$ 点右方通过负实轴，即当其角为 $-\pi$ 时其模小于1，即，应有正 ω 值同时满足

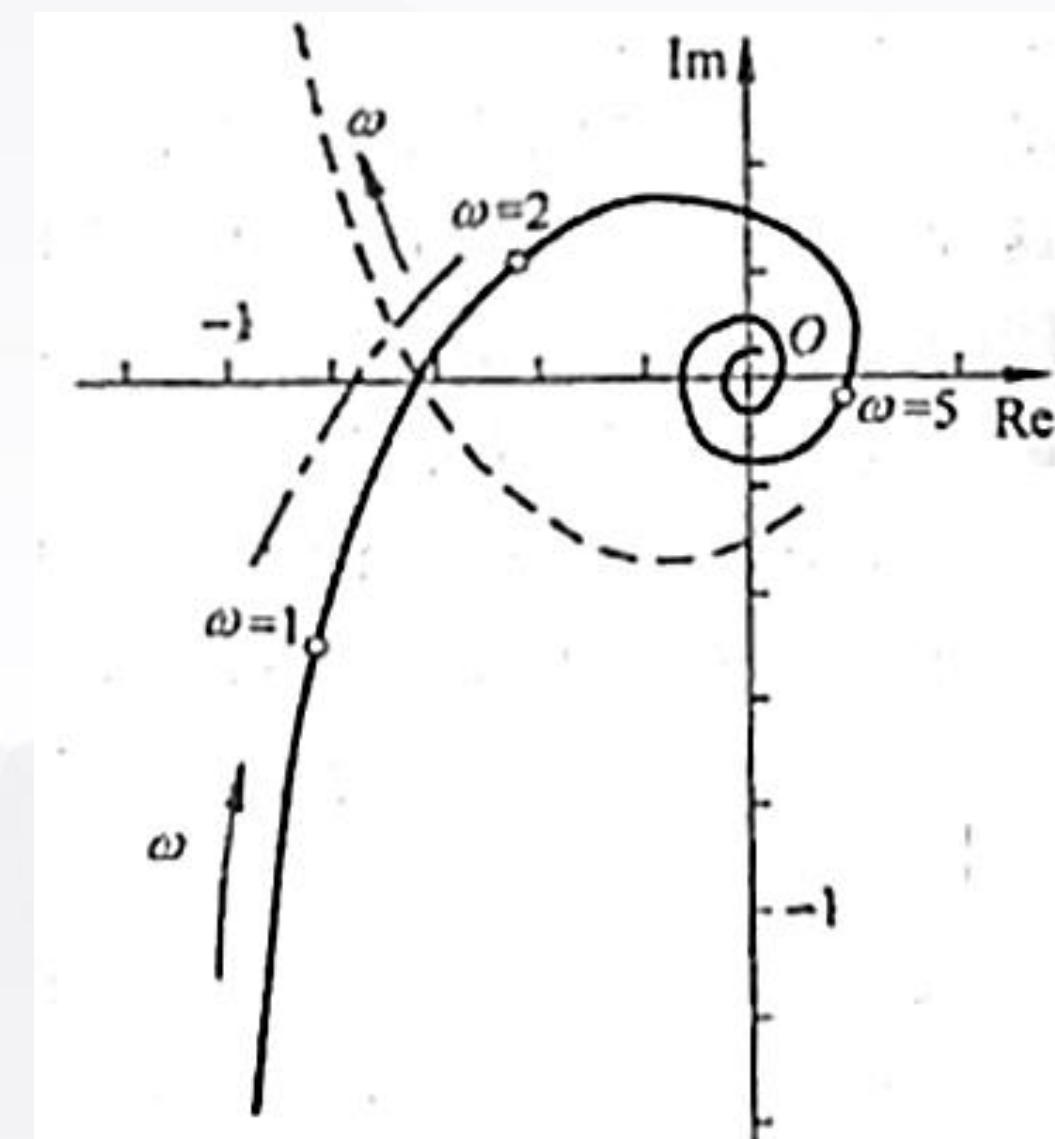
相角：
$$-\tau\omega - \frac{\pi}{2} = -\pi$$

幅值：
$$\frac{K}{\omega} < 1$$

闭环系统稳定的条件：
$$K < \frac{\pi}{2\tau}$$

总结：增益越大、延时越大，对稳定性越不利。

思考：如果延时单元换成惰性单元？



Nyquist稳定判据

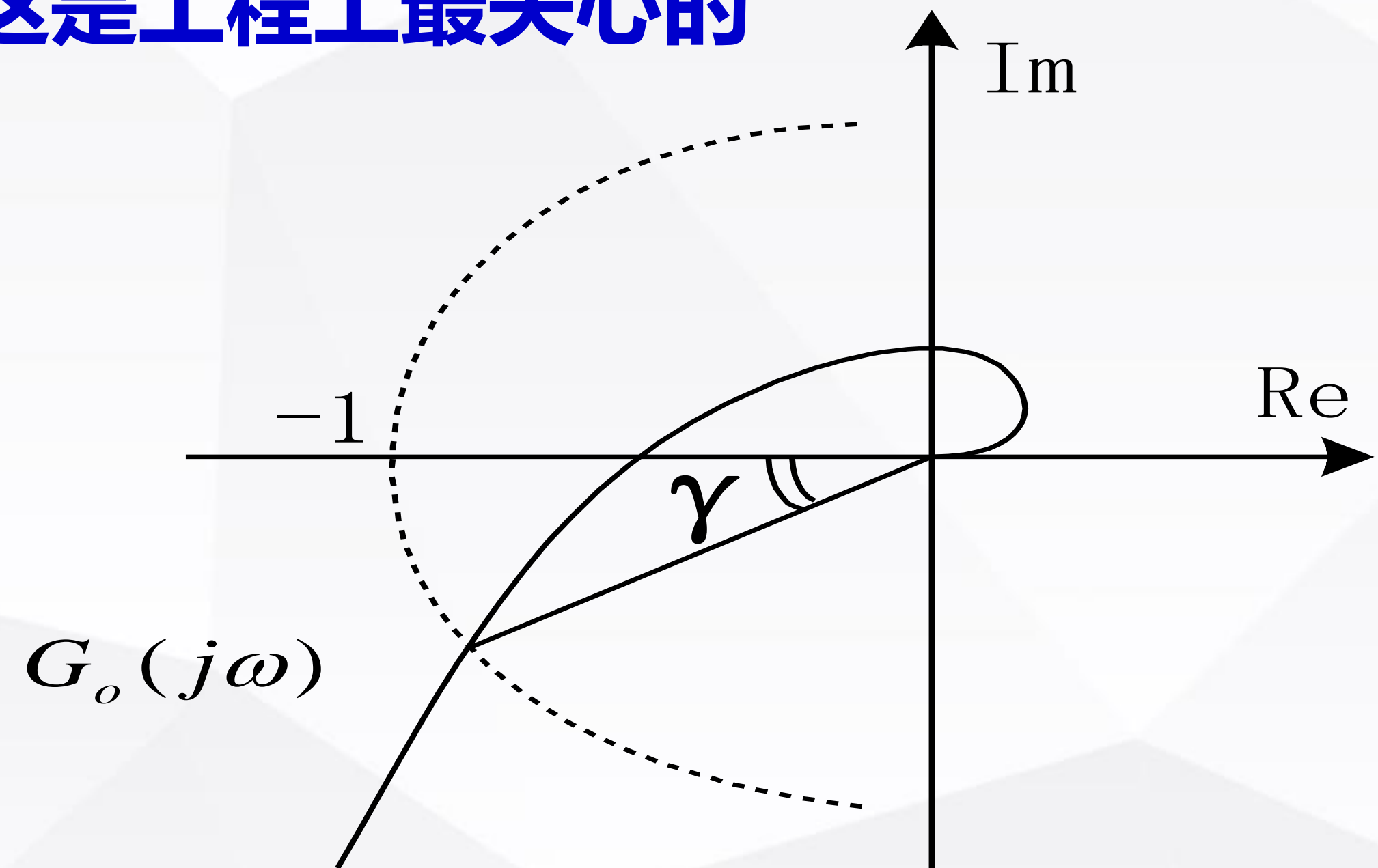
总结开环不含积分、含一个积分、含两个积分、三个积分情况下的Nyquist判据的应用

最小相位系统的稳定裕度

相对稳定性（稳定裕量）

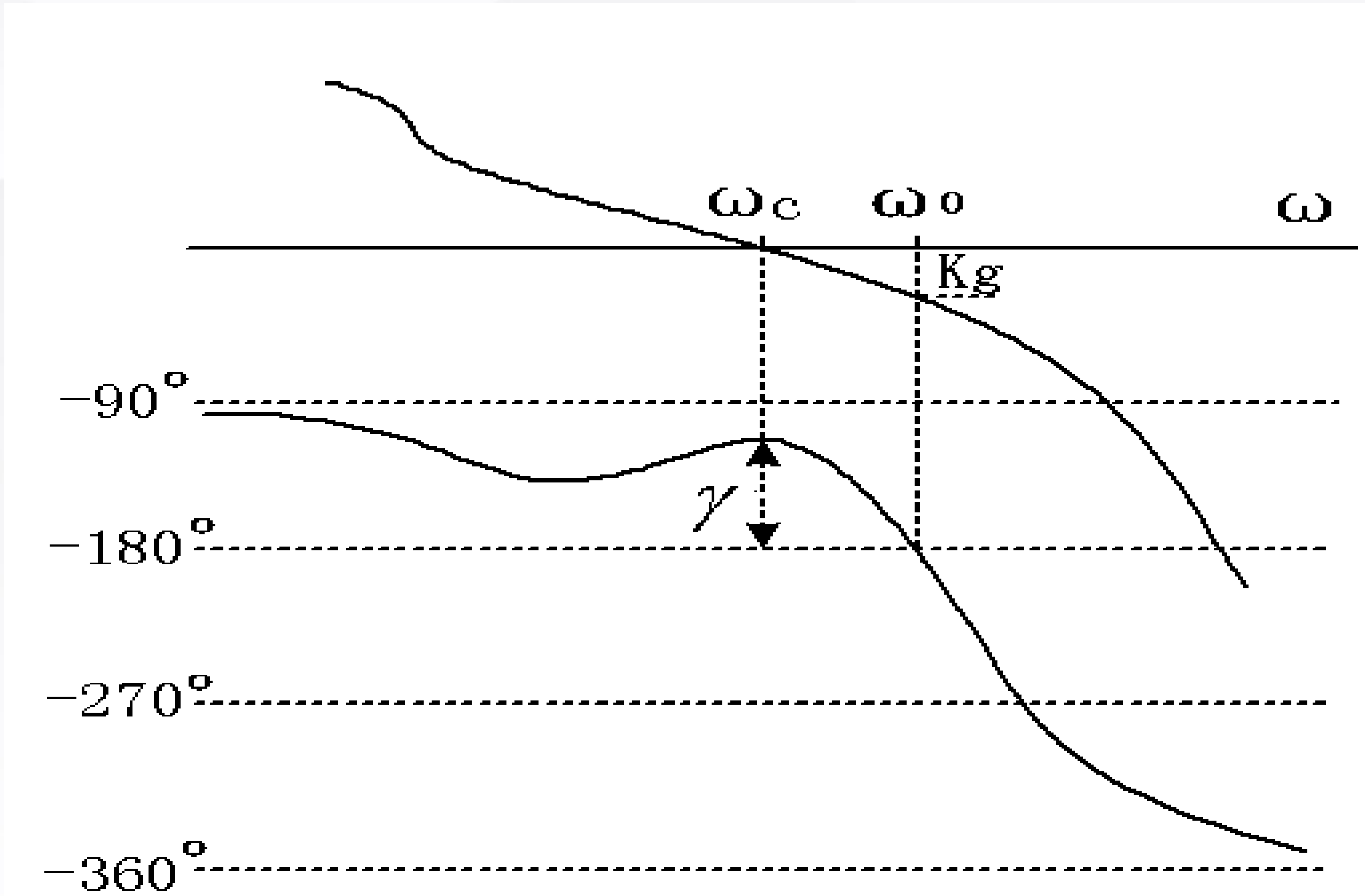
Routh判据和Nyquist判据给出系统绝对稳定的信息，但稳定程度如何，离不稳定边缘还有多远？这是工程上最关心的
由此引出稳定裕量的概念

$$\gamma = 180^\circ + \theta(\omega_c) \text{—— 相角裕量}$$



当相角为 -180° 时，开环模 <1 ，取其倒数，再用分贝表示——增益裕量Kg

相对稳定性（稳定裕量）

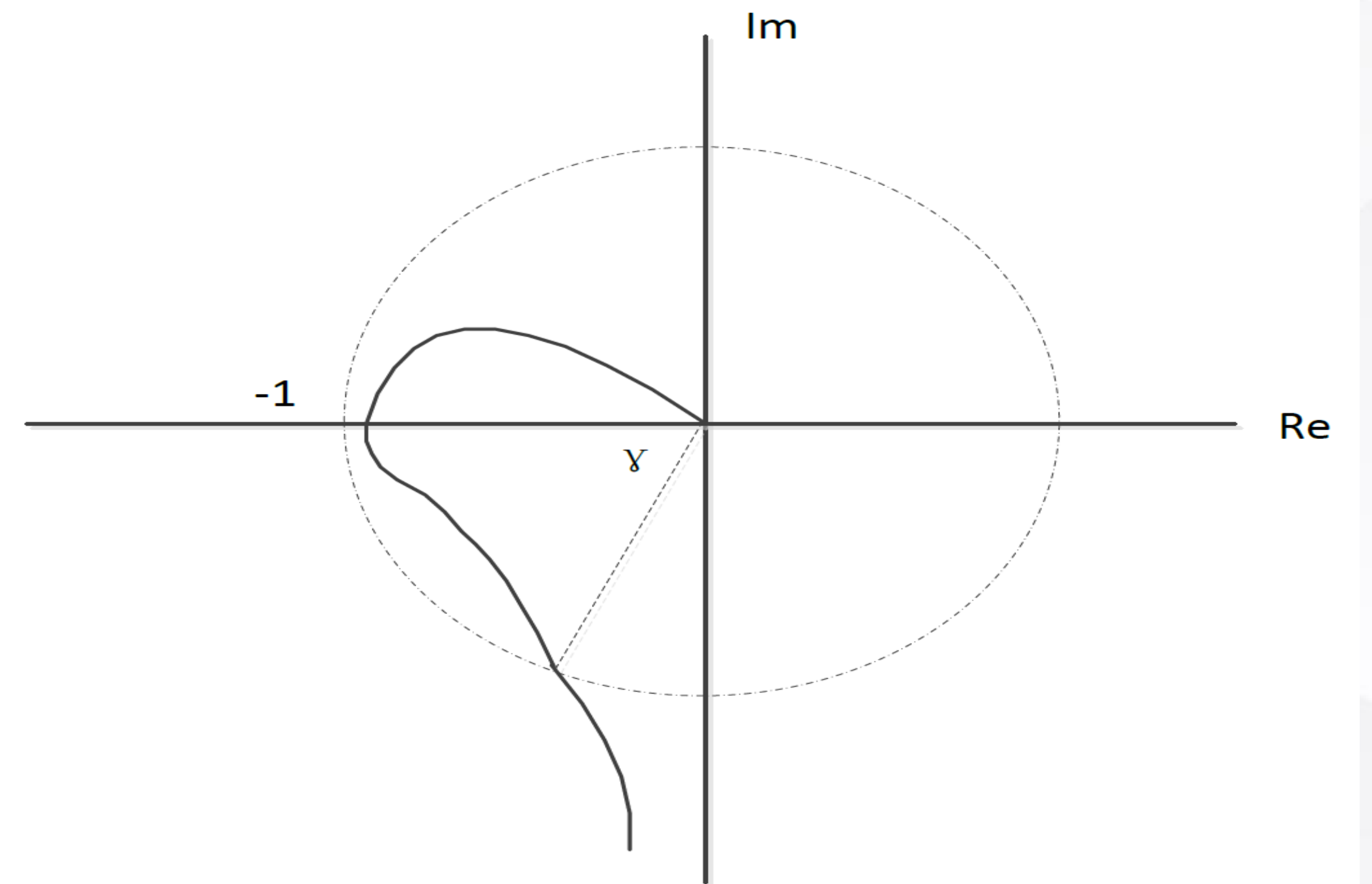
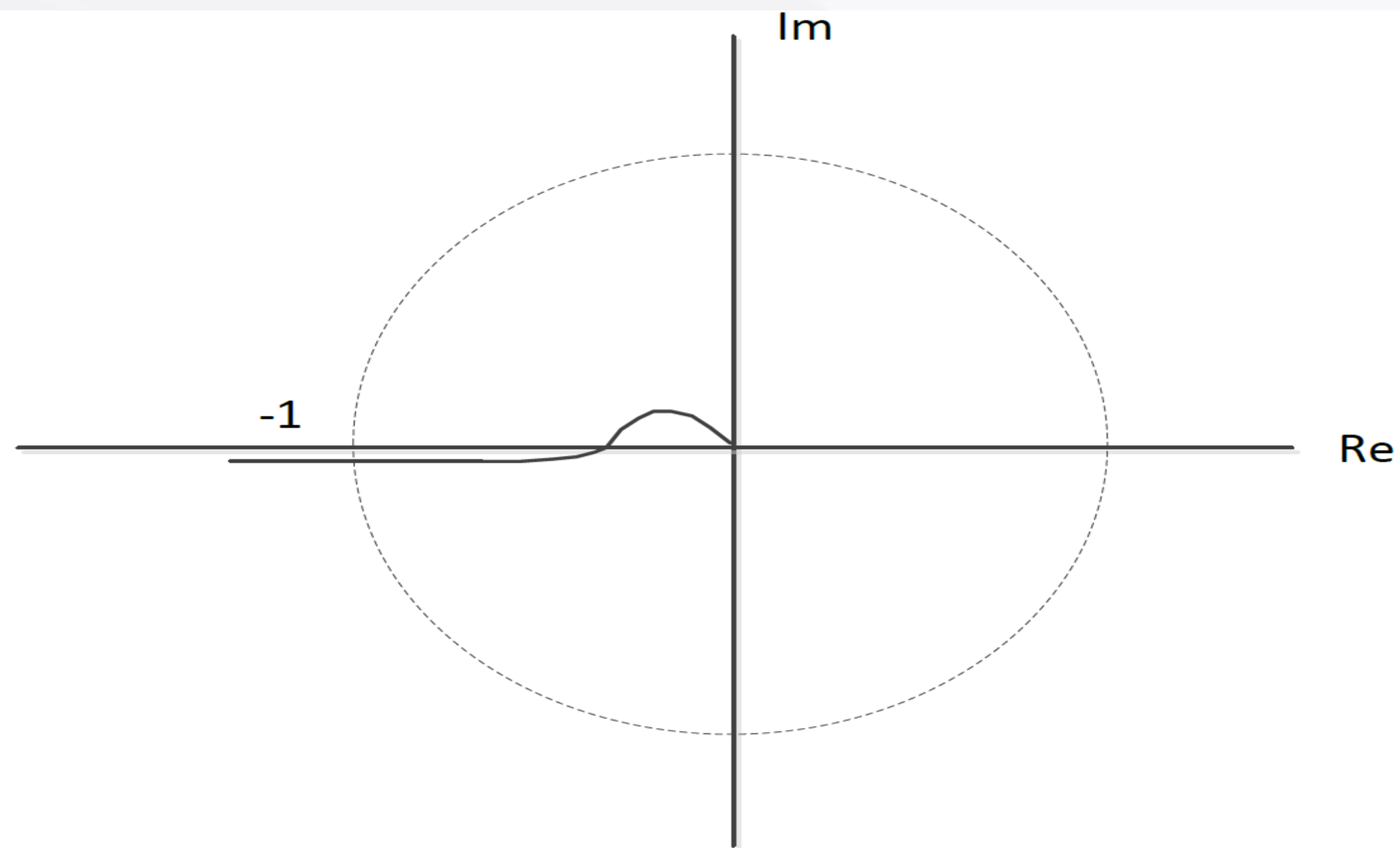


$$\theta(\omega_0) = -180^\circ \quad L_0 = -6\text{db} \quad \text{增益裕量} \quad K_g = 6\text{db}$$

相对稳定性（稳定裕量）

几点说明：

1) 两个稳定裕量需要同时考虑

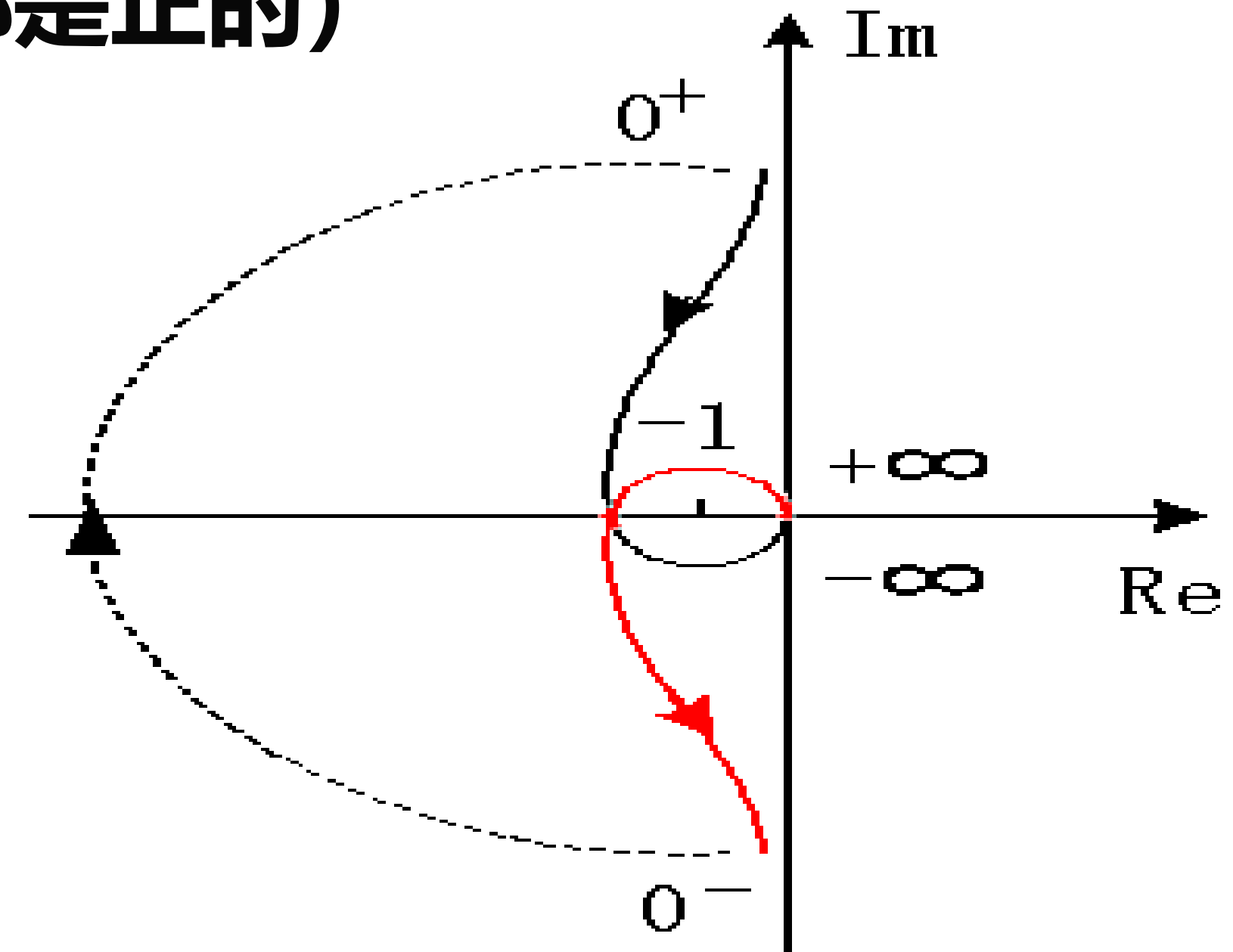


相对稳定性（稳定裕量）

2) 上述定义是针对最小相位系统 (γ, K_g 都是正的)

这两个量一正一负,
则是非最小相位系统的特征

$$G_o(s) = \frac{6(0.33s + 1)}{s(s - 1)}$$



3) 工程上根据经验一般要求 $\gamma \geq 30^\circ$ $30^\circ - 60^\circ$ 之间,

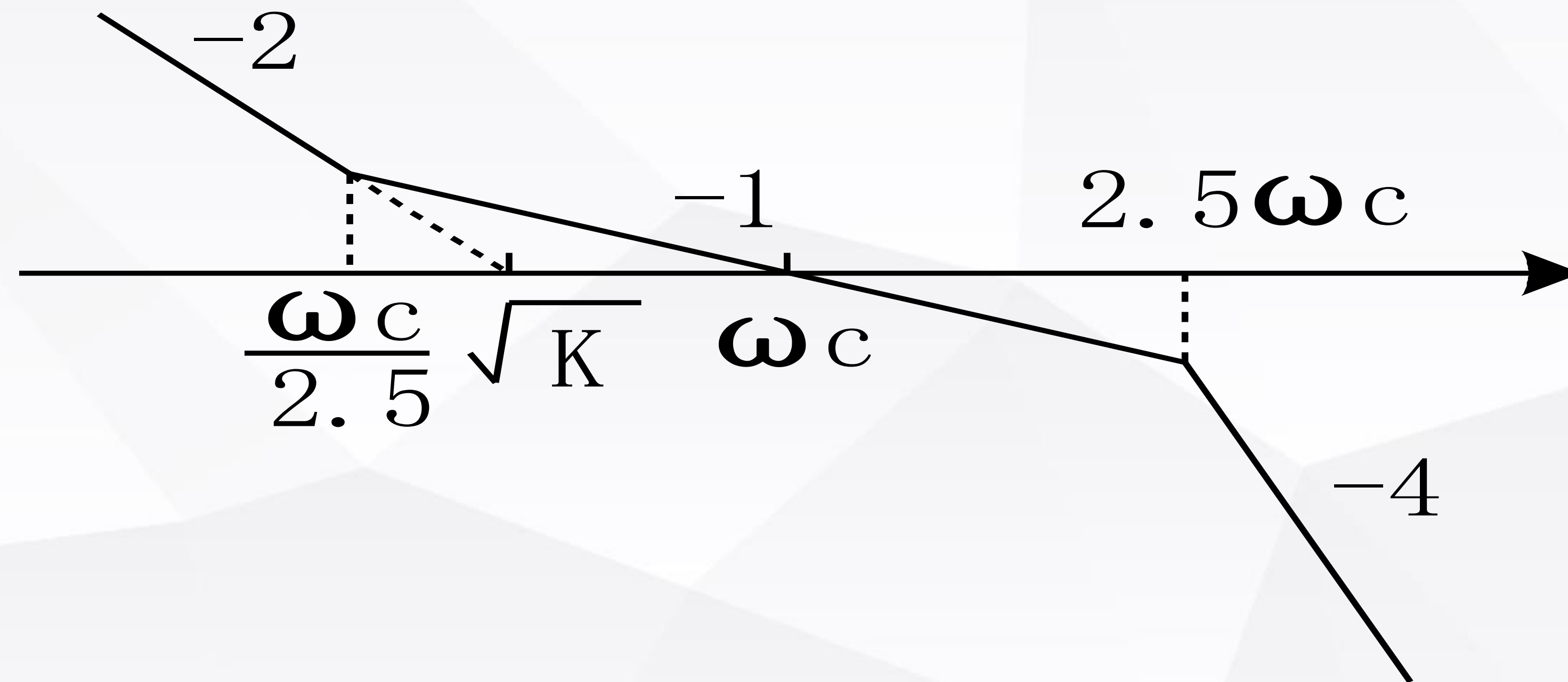
$K_g > 6db$ 主要使用 γ 这一指标。

从开环频率特性研究闭环系统性能(针对最小相位系统)

1. 从开环对数幅频特性可以判断闭环稳定性

如果开环对数频率特性穿越0分贝时的斜率为-1，并且有一定宽度

我们看如下频率特性

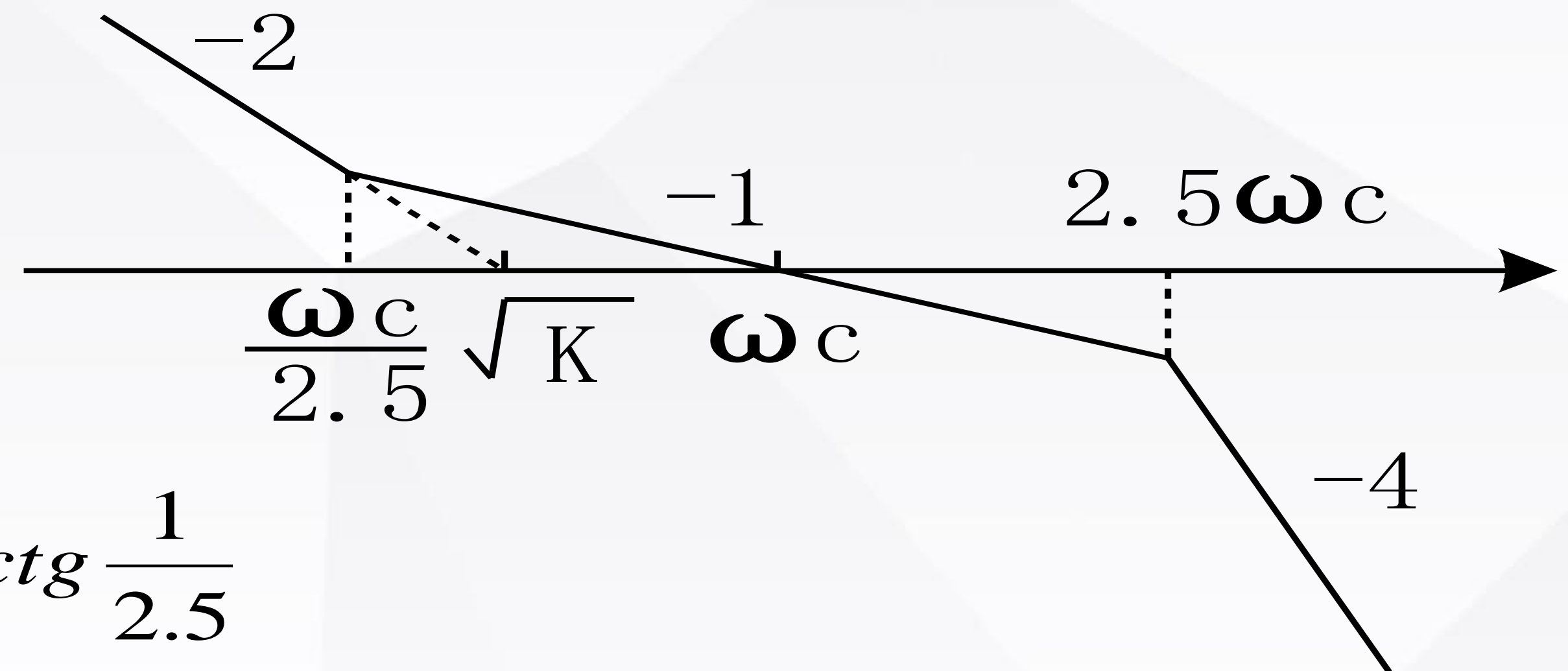


从开环频率特性研究闭环系统性能(针对最小相位系统)

$$G_o(s) = \frac{K(\frac{2.5}{\omega_c}s + 1)}{s^2(\frac{1}{2.5\omega_c}s + 1)^3}$$

$$\begin{aligned}\theta(\omega_c) &= -180^\circ + \arctg 2.5 - 3\arctg \frac{1}{2.5} \\ &= -177.2^\circ\end{aligned}$$

-1段的宽度 $\frac{2.5\omega_c}{\frac{\omega_c}{2.5}} = 6.25,$

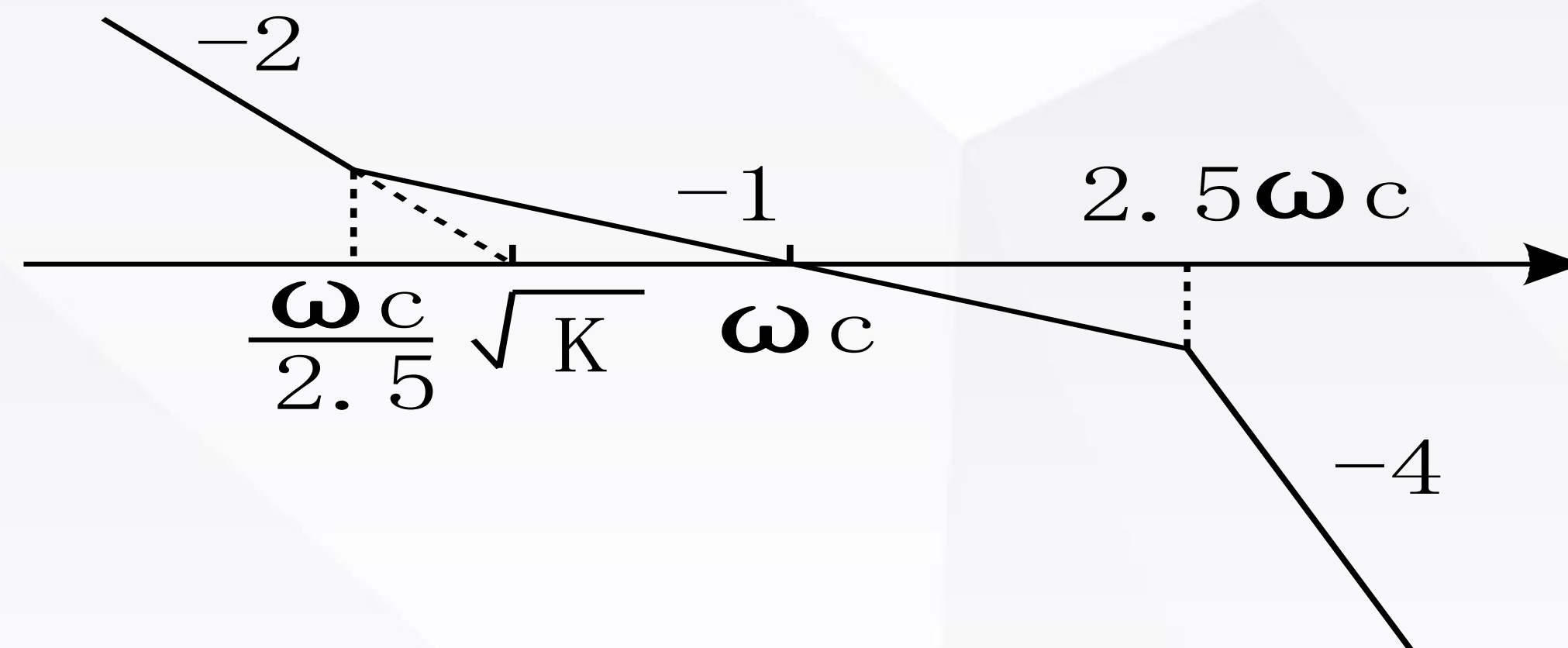


可以看出这种结构和参数几乎是临界情况。如要求闭环系统稳定

$G_o(j\omega)$ 应以-1斜率穿越0分贝轴，且-1段的宽度为5-10倍。

从开环频率特性研究闭环系统性能(针对最小相位系统)

2.从开环对数幅频特性的低频段可以判断闭环系统的静态特性



该系统II型， K 如何从图上求出？——由 K 可知系统静特性

$$20 \lg \frac{\omega_c}{\frac{\omega_c}{2.5}} = 40 \lg \frac{\sqrt{K}}{\frac{\omega_c}{2.5}} \quad \therefore \frac{K}{\left(\frac{\omega_c}{2.5}\right)^2} = 2.5 \quad \therefore K = \frac{\omega_c^2}{2.5}$$

低频段主要影响静态特性（系统型次，和 K ）

思考：如何提高低频段增益，而不改变中频段的特性？

从开环频率特性研究闭环系统性能(针对最小相位系统)

3. 从开环对数幅频特性的中频段来判断闭环系统的动态性能

稳定裕量与超调的关系

有一些近似的关系

$$M_r(\text{闭环峰值}) \approx \frac{1}{\sin \gamma}$$

$$\sigma\% \approx \begin{cases} 100(M_r - 1) & M_r \leq 1.25 \\ 50\sqrt{M_r - 1} & M_r > 1.25 \end{cases}$$

更粗略

$$\sigma\% \approx \frac{2000}{\gamma} - 20 \quad (\text{有一定的适用范围})$$

思考：如果稳定裕量不够应加入怎样的环节？

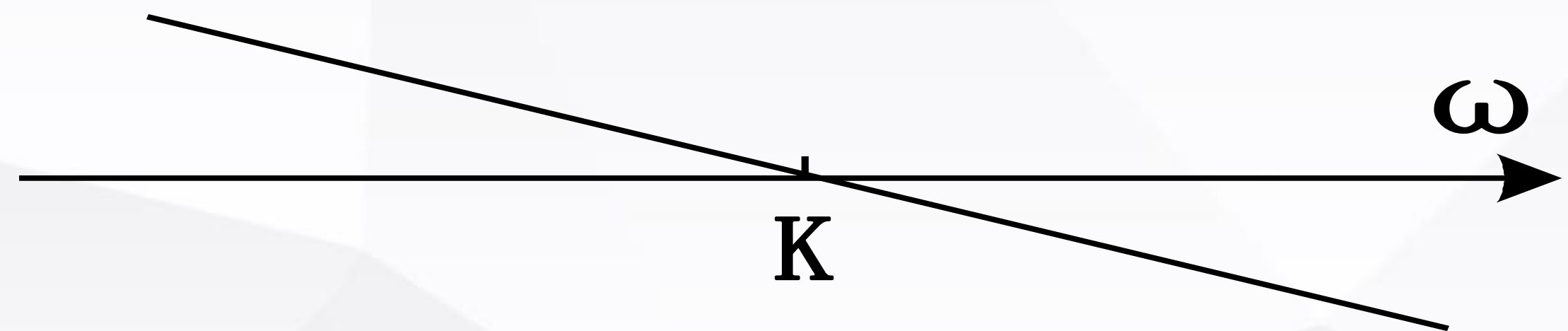
从开环频率特性研究闭环系统性能(针对最小相位系统)

剪切频率 ω_c 与过渡过程时间 t_s 的近似关系

让我们看 $G_o(s) = \frac{K}{s}$ 系统闭环以后

$$G_c(s) = \frac{K}{s+K} = \frac{1}{\frac{1}{K}s+1} \quad \left(\text{这是一个时间常数为 } \frac{1}{K} \text{ 的惯性环节}\right)$$

$$t_s = \frac{3}{K} = \frac{3}{\omega_c}$$



如果 $K \uparrow$, 即 $\omega_c \uparrow$ 频带加宽

t_s 减小, 说明频率尺度与时间尺度成反比关系

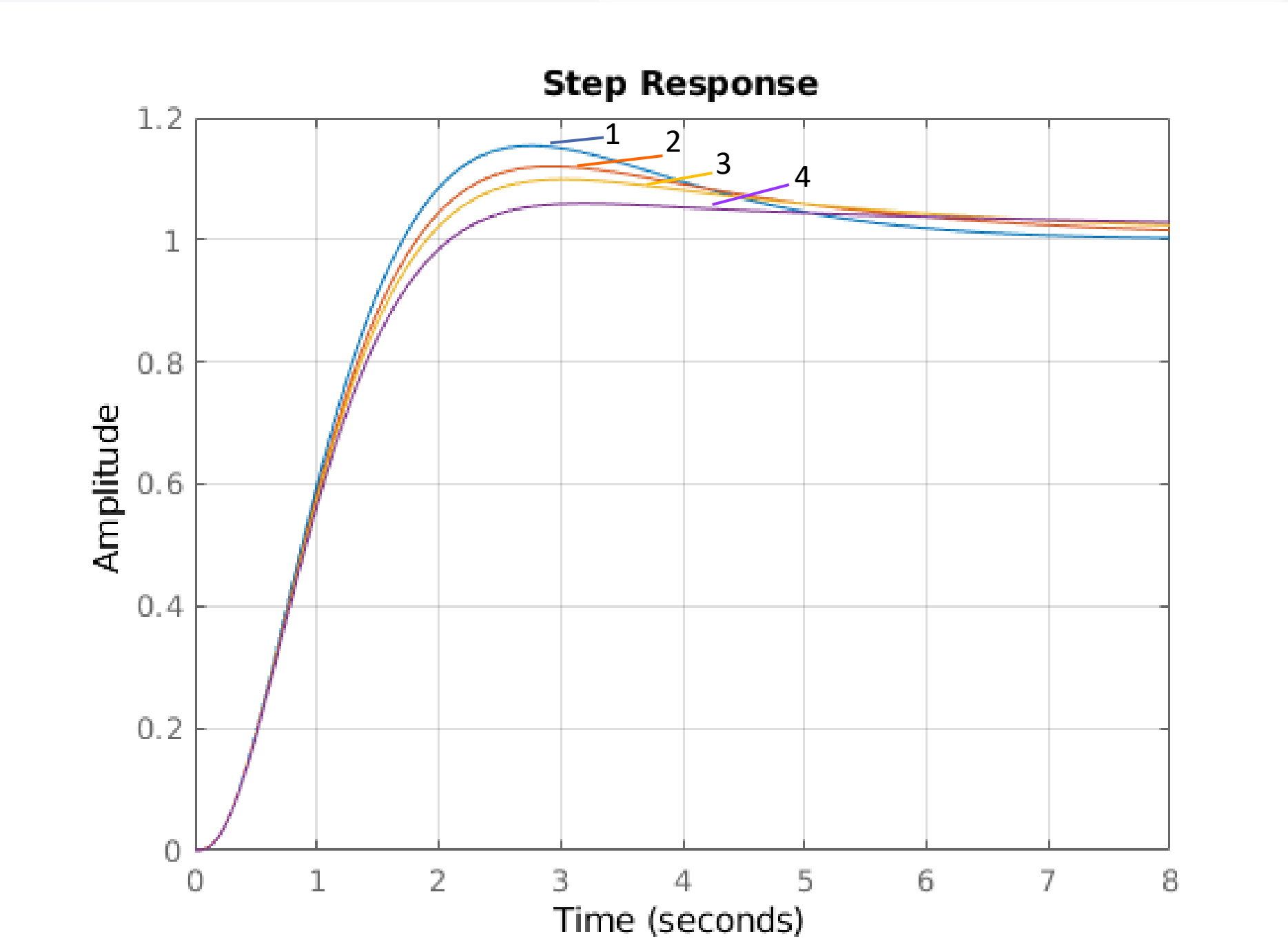
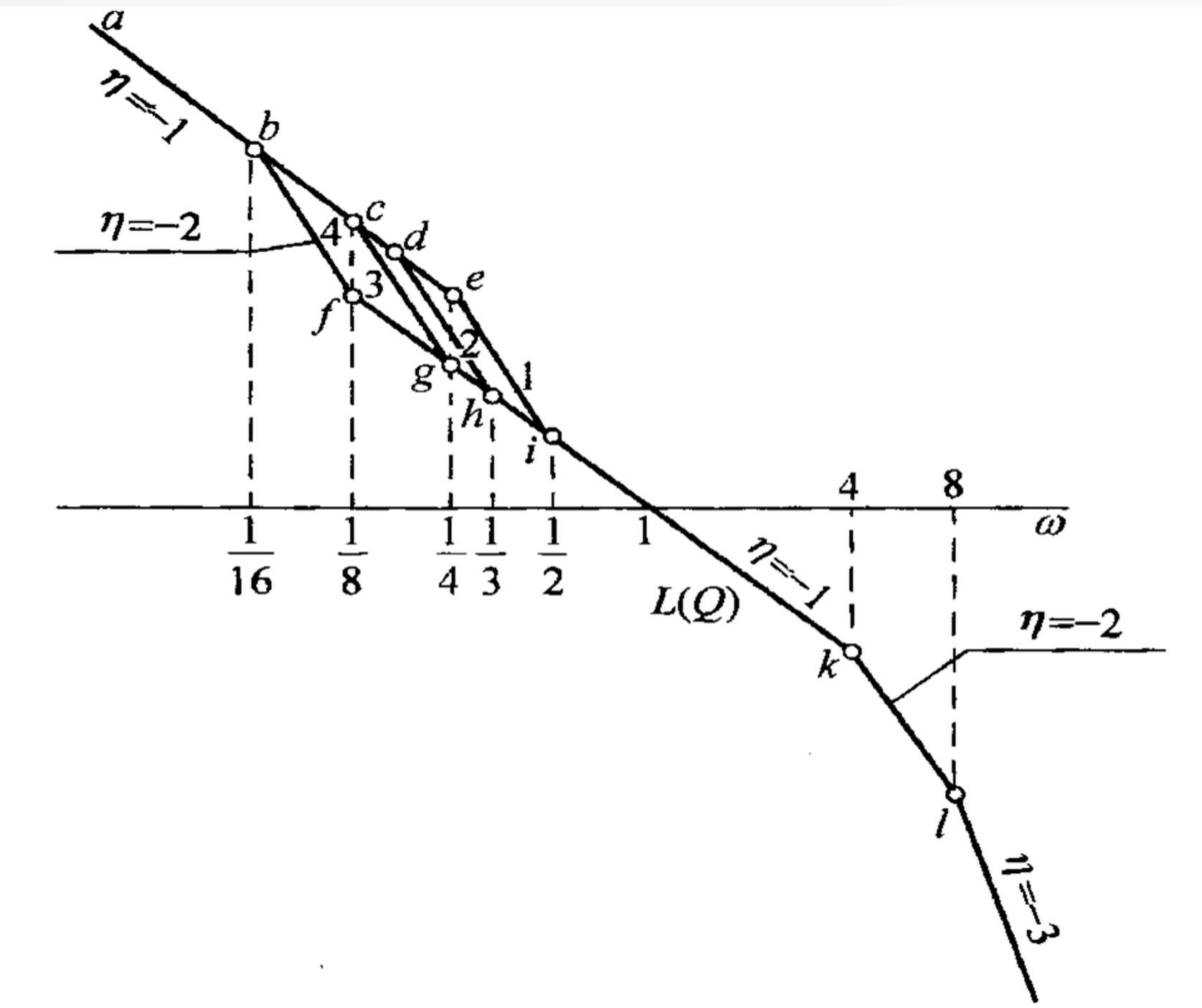
对于复杂系统也有类似关系 $t_s \approx \frac{4 \sim 9}{\omega_c}$

从开环频率特性研究闭环系统性能(针对最小相位系统)

4. 低频段特性与动态性能的关系

低频段增益越低，导致低频信号的复现速度越慢

系统的超调会变小，但是收敛时间加长，甚至出现爬行

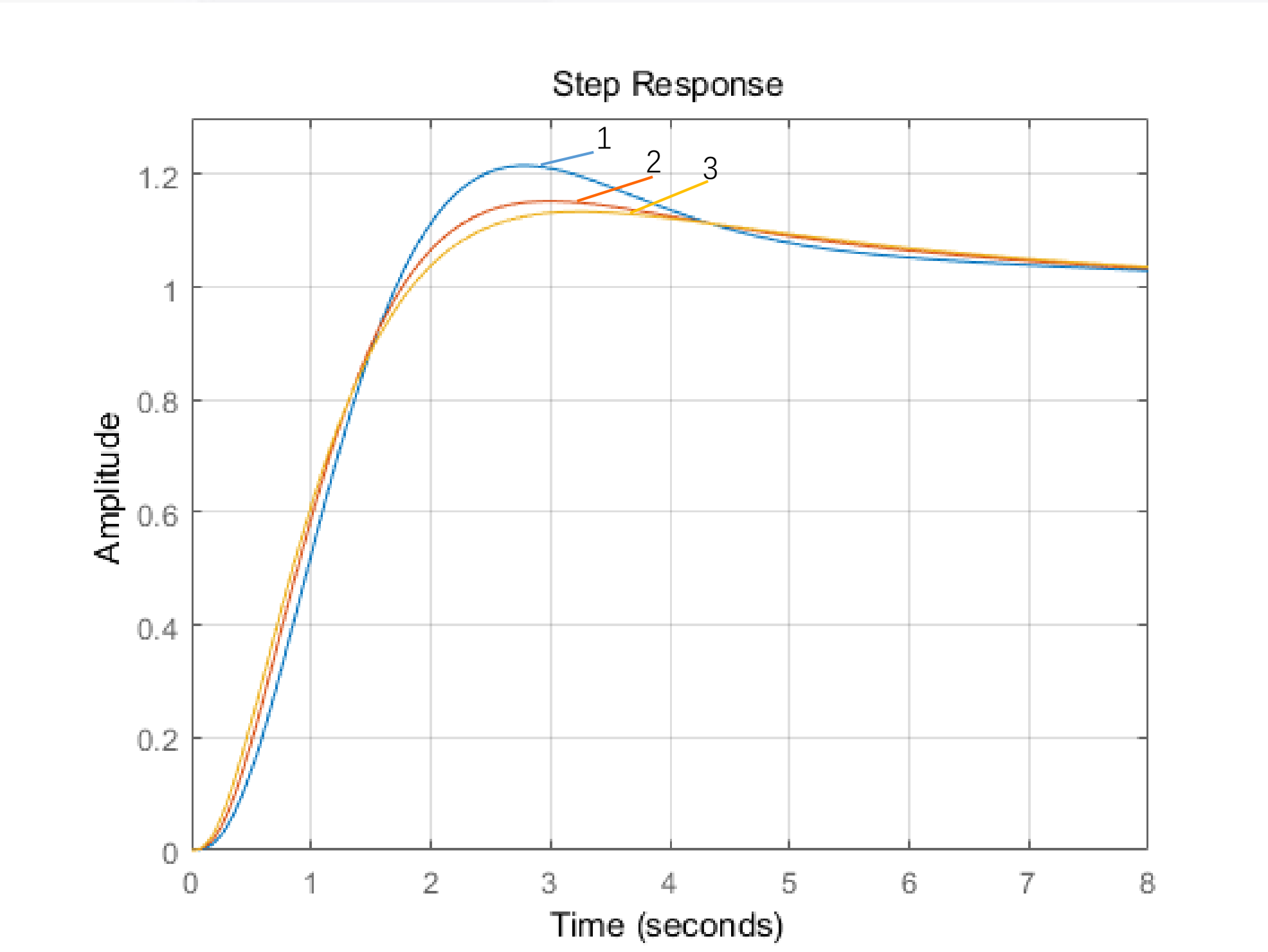
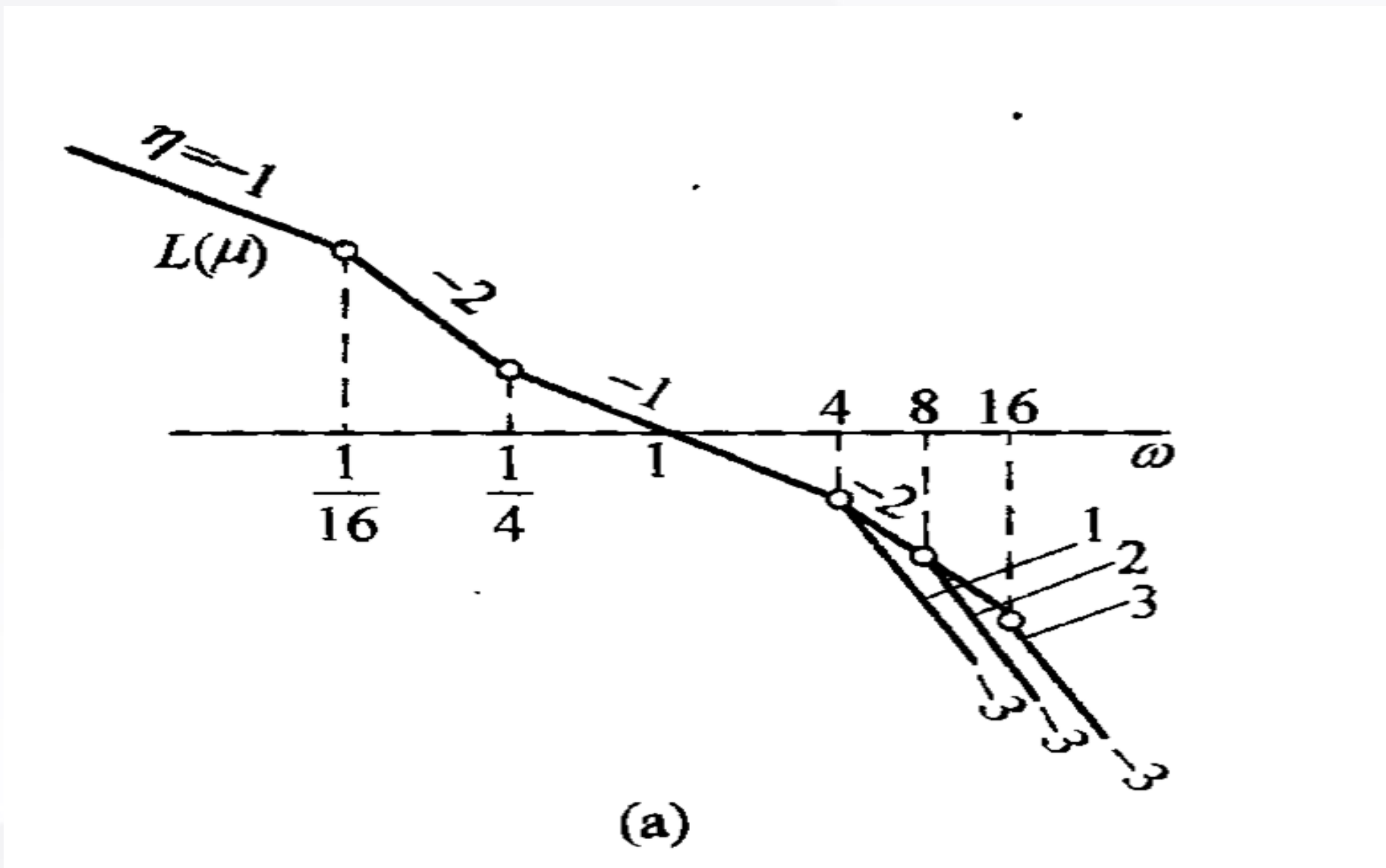


从开环频率特性研究闭环系统性能(针对最小相位系统)

5. 高频段特性与动态性能的关系

高频段要衰减得快些，抑制噪声

高频频带宽，阶跃响应上升沿好

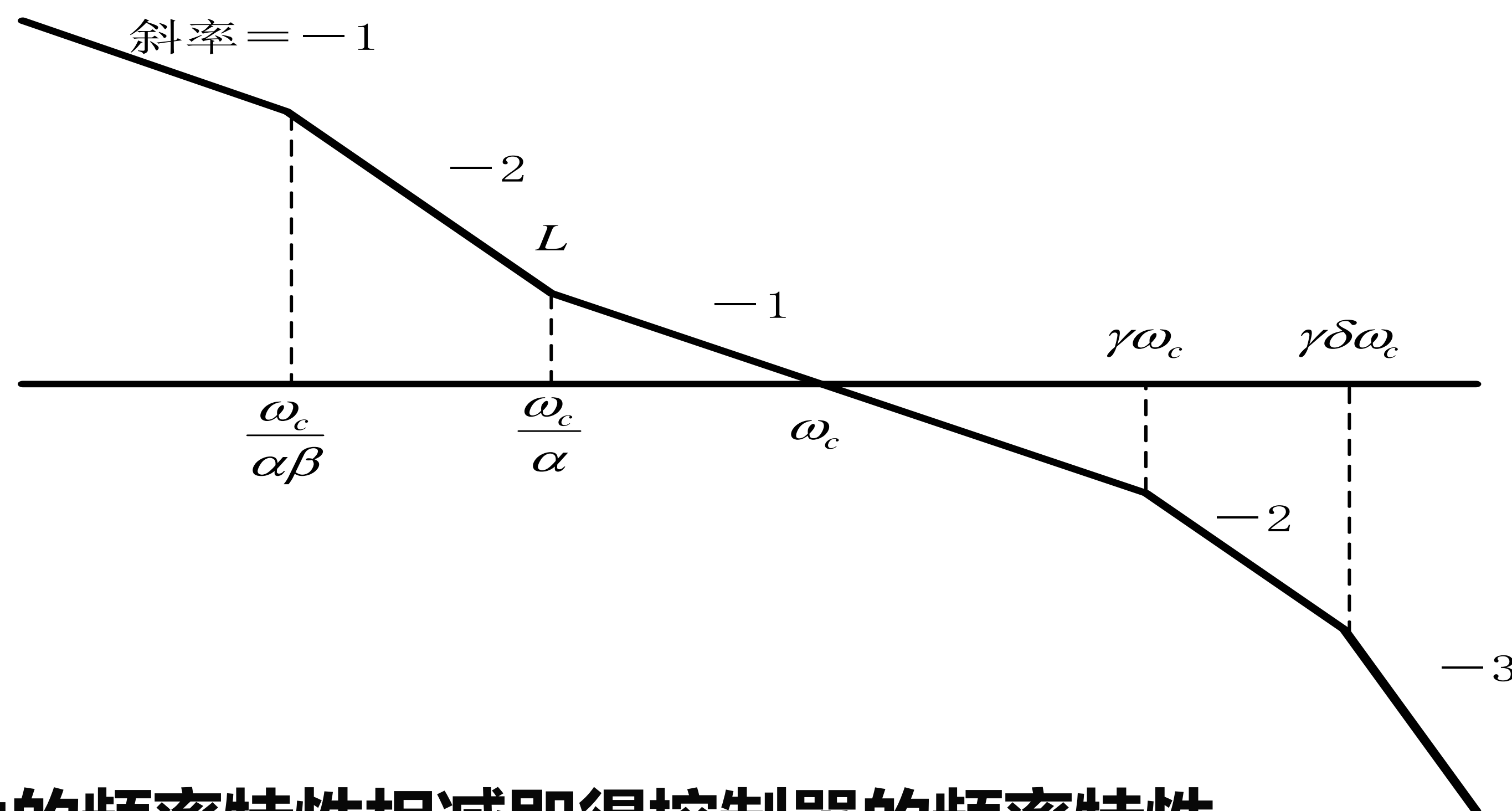


结论：低频段影响过渡过程的结尾部分，而高频段影响开始阶段

基于频率特性的控制器设计思路

根据控制要求选择理想的开环特性

例如以下所示的典型四阶开环特性



与对象的频率特性相减即得控制器的频率特性

基于频率特性的控制器设计思路

有如下经验公式

$$\begin{cases} t_s = \frac{1}{\omega_c} \left[8 - \frac{3.5}{\alpha} - \frac{4}{\beta} + \frac{100}{(\alpha\gamma\delta)^2} \right] \\ \sigma(\%) = \left(\frac{160}{\gamma^2\delta} + 6.5 \frac{\beta^*}{\alpha} + 2 \right) \end{cases} \quad \beta^* = \min(\beta, 10)$$

还有经验公式

$$\begin{cases} t_s \approx (4 \sim 9) / \omega_c \\ \sigma(\%) \approx \frac{64 + 16h}{h - 1} \end{cases}$$

h是中频 - 1段的宽度

第十章要点

- 1、频率特性的定义及物理意义；
- 2、频率特性的图像：极坐标图和对数坐标图（特别注意非最小相位系统的特殊性）；
- 3、Nyquist判据及其应用；
- 4、稳定裕量的概念及其计算（相角裕量和增益裕量）；
- 5、从开环频率特性分析闭环系统的动、静态特性

本章结束