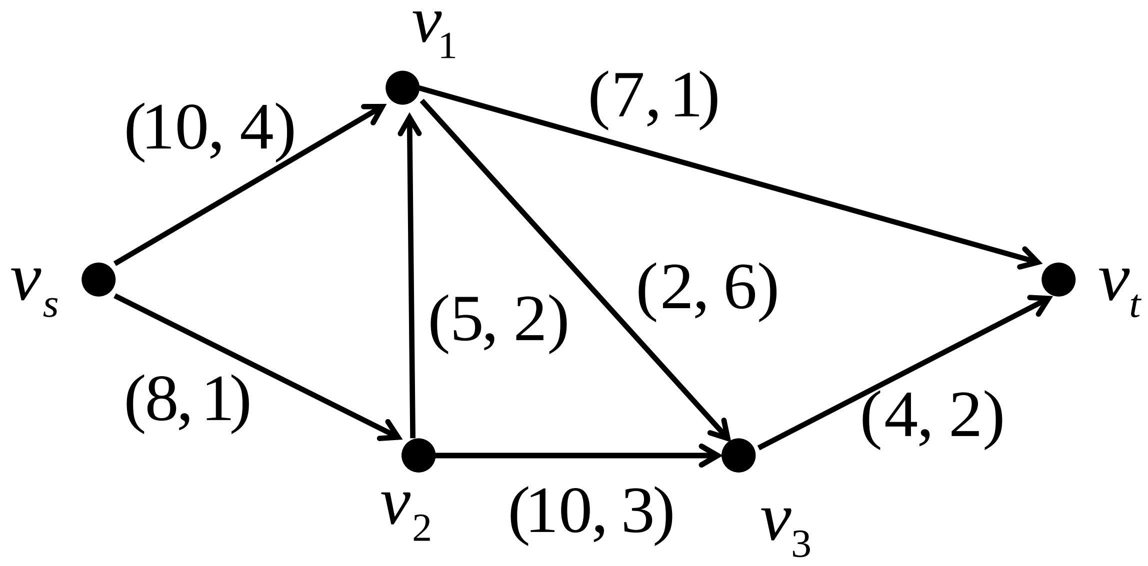
要点：最小费用流问题描述

例　最小费用流问题



括号内第一个数字是容量，第二个是单位流量费用

目标：从发点到收点的总的流量费用最小

约束：1）容量约束，各边流量不大于容量

2）流量平衡约束，各点进出流量总和相等

3）从发点到收点的总流量为 w

最小费用流问题的一般提法

容量网络 $G=(V,E,C)$ 的每边另外赋值非负的单位流量费用 $d_{ij},\forall(v_i,v_j)\in E$，记为 $G=(V,E,C,D)$，给定从 v_s 到 v_t 的总流量 w，要求一个总流量等于 w 的可行流 $X=\{x_{ij}\}$ 使得总费用

$$\sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij}$$

达到最小，特别是，如果给定总流量等于最大流，所求问题称为最小费用最大流问题。

下例中可行流 $X=\{x_{ij}\}$ 要满足的流量平衡约束

中间节点：

v_1： $(x_{13}+x_{1t})-(x_{s1}+x_{21})=0$

v_2： $(x_{23}+x_{21})-x_{s2}=0$

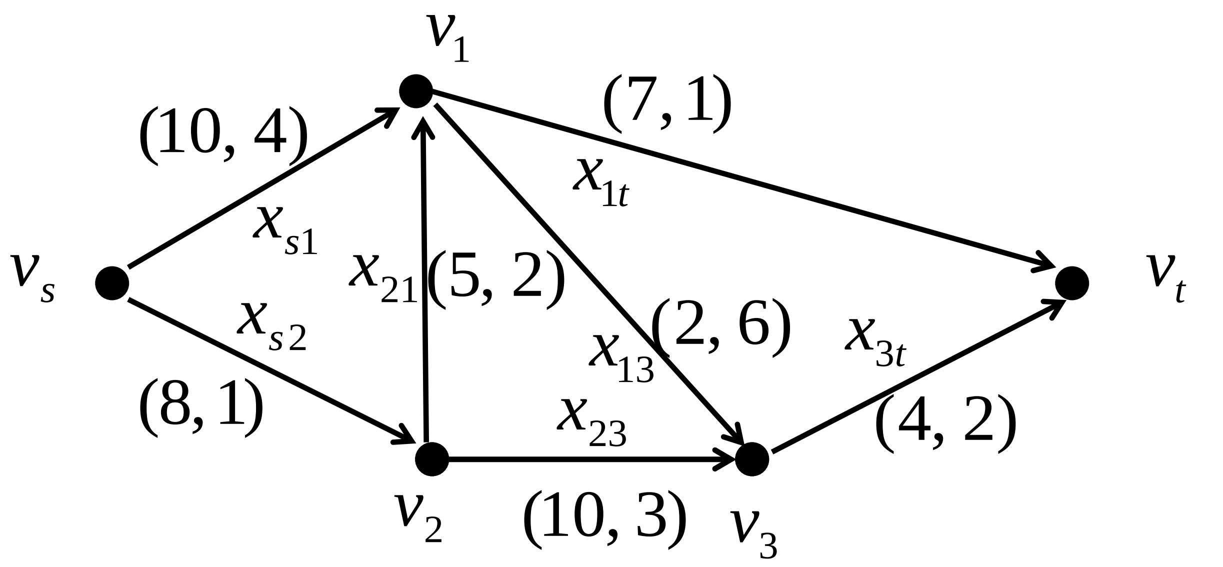
v_3： $x_{3t}-(x_{13}+x_{23})=0$

发点：

v_s： $(x_{s1}+x_{s2})-0=w$

收点：

v_t： $0-(x_{1t}+x_{3t})=-w$



$$v_1:\ (x_{13}+x_{1t})-(x_{s1}+x_{21})=0$$

$$v_2:\ (x_{23}+x_{21})-x_{s2}=0$$

$$v_3:\ x_{3t}-(x_{13}+x_{23})=0$$

$$v_s:\ (x_{s1}+x_{s2})-0=w$$

$$v_t:\ 0-(x_{1t}+x_{3t})=-w$$

$$\Rightarrow$$

$$\sum_{j\in V_i^+} x_{ij}-\sum_{j\in V_i^-} x_{ji}=0$$

$$i=1,2,3$$

$$\sum_{j\in V_s^+} x_{ij}-\sum_{j\in V_s^-} x_{ji}=w$$

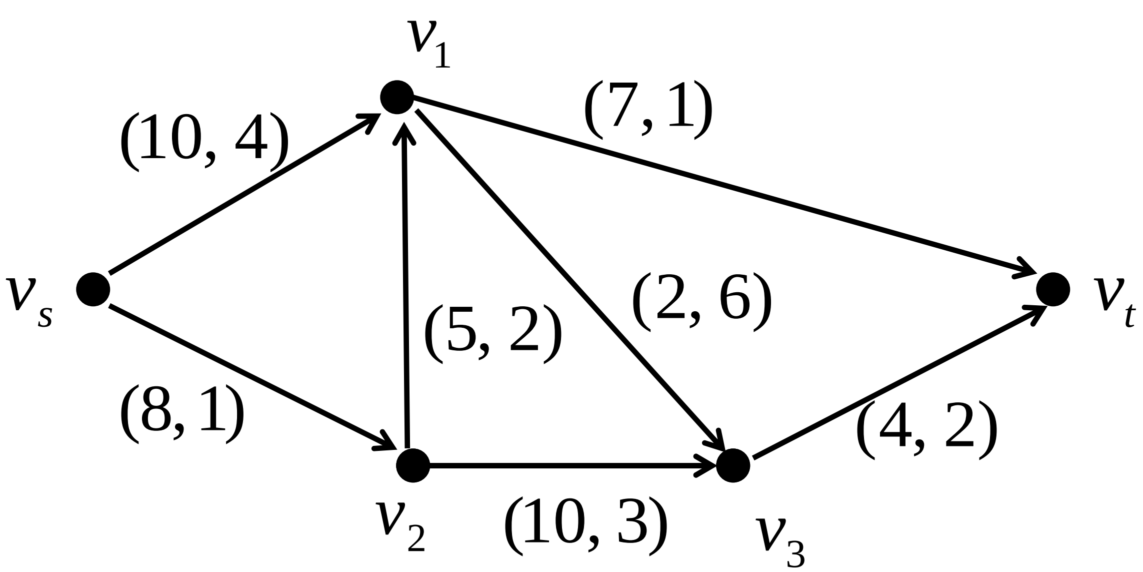
$$\sum_{j\in V_t^+} x_{ij}-\sum_{j\in V_t^-} x_{ji}=-w$$

再用 w_i 表示 v_i 的净发出流量，即

$$w_s=w \quad w_t=-w \quad w_i=0,\ i=1,2,3$$

流量平衡约束可统一写成

$$\sum_{j\in V_i^+} x_{ij}-\sum_{j\in V_i^-} x_{ji}=w_i\ , \quad \forall i$$



$$\min D^T X$$

$$s.t.\ \ AX = B,\ \ 0 \le X \le C$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$D^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad C^T = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 5 & 2 & 10 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

网络 $G=(V,E,C,D)$ 的最小费用流问题

$$\min \sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{(v_i,v_j)\in E} P_{ij}x_{ij}=\vec{w},\ 0\le x_{ij}\le c_{ij},\ \forall (v_i,v_j)\in E$$

其中，P_{ij} 的第 v_i 行等于1，第 v_j 行等于-1，其余为零

$\vec{w}$ 的第1行等于 w，最后一行等于 $-w$，其余为零

是一种特殊的线性规划问题

要点：求最小费用流的启发算法

网络流量 $W < w$，如何满足流量要求？

已知条件：X 是最大流问题的一个可行流

（满足所有中间节点的流量平衡条件和容量约束）

例如：$x_{ij} = 0, \forall (v_i, v_j) \in E$

X 是最大流的充要条件（增广链定理）：

不存在关于 X 的可增广链

可以采用的方法：

寻找关于 X 的可增广链，如果找不到，X 已经是最大流，原问题不可行；否则增加流量

假设 μ 是从 v_s 到 v_t 关于 X 的可增广链，用 μ^+ 表示其前向边的集合， μ^- 表示后向边的集合，用 W 表示当前的总流量。

如果沿该增广链增加流量 σ ，由容量约束知

$$\sigma = \min\left\{ \min_{(v_i,v_j)\in\mu^+} c_{ij} - x_{ij}, \min_{(v_i,v_j)\in\mu^-} x_{ij} \right\}$$

由于增加后的总流量为 $W+\sigma$ ，应满足 $W+\sigma \le w$

所以最终选用的流量增加值应该为

$$\delta = \min\{w-W, \sigma\} = \min\left\{ w-W, \min_{(v_i,v_j)\in\mu^+} c_{ij} - x_{ij}, \min_{(v_i,v_j)\in\mu^-} x_{ij} \right\}$$

沿 μ 对 X 进行调整获得新的流量 $\overline{X}=\{\overline{x}_{ij}\}$，则

$$\overline{x}_{ij}=x_{ij}+\delta\,,\quad \forall(v_i,v_j)\in\mu^+$$

$$\overline{x}_{ij}=x_{ij}-\delta\,,\quad \forall(v_i,v_j)\in\mu^-$$

$$\overline{x}_{ij}=x_{ij}\,,\qquad \forall(v_i,v_j)\in E-\mu^+\cup\mu^-$$

流量调整前后原目标函数的改变为

$$\sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}\overline{x}_{ij}-\sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij}=\left(\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+} d_{ij}-\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-} d_{ij}\right)\delta$$

记 $d(\mu)=\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+} d_{ij}-\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-} d_{ij}$

$d(\mu)$是沿 μ 增加单位流量的费用，称为 μ 的费用

直观想法：选择费用最小的可增广链增加总流量

根据前面的讨论可形成下面的最小费用流算法：

1）令 $X=\{x_{ij}\},\ x_{ij}=0,\ \forall(v_i,v_j)\in E,\ W=0$

2）如果 $W=w$ ，停止，否则求出费用 $d(\mu)$ 最小的可增广链 μ（如果没有可增广链，停止）

3）令 $\delta=\min\left\{w-W,\ \min\limits_{(v_i,v_j)\in\mu^+} c_{ij}-x_{ij},\ \min\limits_{(v_i,v_j)\in\mu^-} x_{ij}\right\}$

$$\bar{x}_{ij}=x_{ij}+\delta,\quad \forall(v_i,v_j)\in\mu^+$$

$$\bar{x}_{ij}=x_{ij}-\delta,\quad \forall(v_i,v_j)\in\mu^-$$

$$\bar{x}_{ij}=x_{ij},\qquad \forall(v_i,v_j)\in E-\mu^+\cup\mu^-$$

4）用 $\bar{X}$ 替换 X ，$W+\delta$ 替换 W，回到 2）

对前面的最小费用流算法要解决的问题

1）理论问题

算法停止于 $W=w$ 时所产生的 X 是否是最小费用流问题的解？

2）实现问题

如何方便地求出费用 $d(\mu)$ 最小的可增广链？

要点：最小费用流问题的KKT条件

最小费用流问题

$$\min \sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{(v_i,v_j)\in E} P_{ij}x_{ij} = \vec{w},\ \ 0 \le x_{ij} \le c_{ij},\ \ \forall (v_i,v_j) \in E$$

原问题

$$\min \sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{(v_i,v_j)\in E} P_{ij}x_{ij} = \vec{w},\ \ -x_{ij} \le 0,\ \ x_{ij} - c_{ij} \le 0, \forall \left(v_i,v_j\right) \in E$$

原问题

$$\min \sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{(v_i,v_j)\in E} P_{ij}x_{ij} = \vec{w}, \quad -x_{ij} \le 0, \; x_{ij} - c_{ij} \le 0, \forall\left(v_i, v_j\right) \in E$$

拉格朗日函数

$$L\left(X, \vec{z}, \vec{\lambda}, \vec{\mu}\right)$$

$$= \sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij} + \sum_{(v_i,v_j)\in E} \vec{z}^T\left(P_{ij}x_{ij} - \vec{w}\right) + \sum_{(v_i,v_j)\in E} \lambda_{ij}\left(-x_{ij}\right) + \sum_{(v_i,v_j)\in E} \mu_{ij}\left(x_{ij} - c_{ij}\right)$$

$$= \sum_{(v_i,v_j)\in E} \left(d_{ij} + \vec{z}^T P_{ij} - \lambda_{ij} + \mu_{ij}\right)x_{ij} - \vec{z}^T\vec{w} - \sum_{(v_i,v_j)\in E} \mu_{ij}c_{ij}$$

拉格朗日函数 $L\left(X,\vec{z},\vec{\lambda},\vec{\mu}\right)$

$$=\sum_{(v_i,v_j)\in E}\left(d_{ij}+\vec{z}^T P_{ij}-\lambda_{ij}+\mu_{ij}\right)x_{ij}-\vec{z}^T\vec{w}-\sum_{(v_i,v_j)\in E}\mu_{ij}c_{ij}$$

梯度条件 $d_{ij}+\vec{z}^T P_{ij}-\lambda_{ij}+\mu_{ij}=0,\ \forall\left(v_i,v_j\right)\in E$

互补松弛条件 $\lambda_{ij}x_{ij}=0,\ \mu_{ij}\left(c_{ij}-x_{ij}\right)=0,\ \forall\left(v_i,v_j\right)\in E$

对偶问题

$$\max\ -\vec{z}^T\vec{w}-\sum_{(v_i,v_j)\in E}\mu_{ij}c_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad -\vec{z}^T P_{ij}+\lambda_{ij}-\mu_{ij}=d_{ij},\ \lambda_{ij}\ge 0,\ \mu_{ij}\ge 0,\ \forall(v_i,v_j)\in E$$

结论：可行流 $X=\{x_{ij}\}$ 是最小费用流问题最优解的充要条件是，存在 $\vec{z}$，$\vec{\lambda}\geq 0$ 和 $\vec{\mu}\geq 0$ 一起满足

$$d_{ij}+\vec{z}^{T}P_{ij}-\lambda_{ij}+\mu_{ij}=0,\ \ \forall\left(v_i,v_j\right)\in E$$

$$\lambda_{ij}x_{ij}=0,\ \ \mu_{ij}\left(c_{ij}-x_{ij}\right)=0,\ \ \forall\left(v_i,v_j\right)\in E$$

进一步可得：$\lambda_{ij}=d_{ij}+\vec{z}^{T}P_{ij}+\mu_{ij}$，$\lambda_{ij}\geq 0$，$\forall\left(v_i,v_j\right)\in E$

结论：可行流 $X=\{x_{ij}\}$ 是最小费用流问题最优解的充要条件是，存在 $\vec{z}$，$\vec{\lambda}\geq 0$ 和 $\vec{\mu}\geq 0$ 一起满足

$$d_{ij}+\vec{z}^T P_{ij}-\lambda_{ij}+\mu_{ij}=0,\ \forall(v_i,v_j)\in E$$

$$\lambda_{ij}x_{ij}=0,\ \mu_{ij}(c_{ij}-x_{ij})=0,\ \forall(v_i,v_j)\in E$$

等价条件：存在 $\vec{z}$ 和 $\vec{\mu}\geq 0$ 一起满足

$$d_{ij}+z_i-z_j+\mu_{ij}\geq 0,\ \forall(v_i,v_j)\in E$$

$$x_{ij}(d_{ij}+z_i-z_j+\mu_{ij})=0,\ \mu_{ij}(c_{ij}-x_{ij})=0,\ \forall(v_i,v_j)\in E$$

互补松弛定理：可行流 $X=\{x_{ij}\}$ 是原问题最优解的充要条件是，存在等式约束的对偶变量 $\vec{z}=\{z_i\}$ 满足

$$\begin{cases} x_{ij}=0 & \forall\ d_{ij}+z_i-z_j>0 \\ x_{ij}=c_{ij} & \forall\ d_{ij}+z_i-z_j<0 \end{cases}$$

充分性：取 $\hat{\mu}_{ij}=\max\{0,-(d_{ij}+z_i-z_j)\}$，对任意 $(v_i,v_j)\in E$

可知 $\hat{\mu}_{ij}\geq 0$，$\hat{\mu}_{ij}\geq -(d_{ij}+z_i-z_j) \Leftrightarrow \hat{\mu}_{ij}+d_{ij}+z_i-z_j\geq 0$

$$x_{ij}\left(d_{ij}+z_i-z_j+\hat{\mu}_{ij}\right)=0,\ \hat{\mu}_{ij}\left(c_{ij}-x_{ij}\right)=0$$

满足非负和互补松弛条件

互补松弛定理：可行流 $X=\{x_{ij}\}$ 是原问题最优解的充要条件是，存在等式约束的对偶变量 $\vec{z}=\{z_i\}$ 满足

$$\begin{cases} x_{ij}=0 & \forall\ d_{ij}+z_i-z_j>0 \\ x_{ij}=c_{ij} & \forall\ d_{ij}+z_i-z_j<0 \end{cases}$$

必要性：$d_{ij}+z_i-z_j>0 \Rightarrow d_{ij}+z_i-z_j+\mu_{ij}>0 \Rightarrow x_{ij}=0$

$$d_{ij}+z_i-z_j<0 \Rightarrow \mu_{ij}>0 \Rightarrow x_{ij}=c_{ij}$$

定义：

记 $\sigma_{ij}(\vec{z}) = d_{ij} + z_i - z_j$，称其为边$(v_i, v_j)$的简化成本

用简化成本描述互补松弛定理：

可行流 $X = \{x_{ij}\}$ 是原问题最优解的充要条件是，存在等式约束的对偶变量 $\vec{z} = \{z_i\}$，对任意$(v_i, v_j) \in E$ 满足

$$\begin{cases} x_{ij} = 0 & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z}) > 0 \\ x_{ij} = c_{ij} & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z}) < 0 \end{cases}$$

要点：基于互补松弛定理求解
最小费用流的一种途径

利用互补松弛定理求解最小费用流问题的一种途径

首先确定一对 $(X,\vec{z})$ 满足以下条件：

1）容量约束 $0 \le x_{ij} \le c_{ij}, \forall (v_i, v_j) \in E$

2）中间结点等式约束 $\sum_{(v_i,v_j)\in E} x_{ij} - \sum_{(v_j,v_i)\in E} x_{ji} = 0, \quad \forall i \notin \{s,t\}$

3）总流量不超过给定流量 $\sum_{(v_s,v_j)\in E} x_{sj} = \hat{w} \le w$

4）互补松弛条件 $x_{ij} = 0, \forall \sigma_{ij}(\vec{z}) > 0$； $x_{ij} = c_{ij}, \forall \sigma_{ij}(\vec{z}) < 0$

例如 $x_{ij} = 0, \forall (v_i, v_j) \in E$， $z_i = 0, \forall v_i \in V$ 满足以上条件

然后找可增广链，在满足上述条件的前提下增加总流量

要点：满足互补松弛条件的可增广链

设 $(v_i,v_j)\in E$ 为增广边，增广前后的流量为 x_{ij} 和 x'_{ij}，满足

$$\text{增广前}\begin{cases} x_{ij}=0 & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z})>0 \\ x_{ij}=c_{ij} & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z})<0 \end{cases} \qquad \text{增广后}\begin{cases} x'_{ij}=0 & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z})>0 \\ x'_{ij}=c_{ij} & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z})<0 \end{cases}$$

由于增广边流量必须改变，以下两种情况必有一种发生：

（1）$0\le x_{ij}<x'_{ij}\le c_{ij}$ ；（2）$c_{ij}\ge x_{ij}>x'_{ij}\ge 0$

如果 $\sigma_{ij}(\vec{z})>0$，（1）和 $x'_{ij}=0$ 矛盾，（2）和 $x_{ij}=0$ 矛盾

如果 $\sigma_{ij}(\vec{z})<0$，（1）和 $x_{ij}=c_{ij}$ 矛盾，（2）和 $x'_{ij}=c_{ij}$ 矛盾

结论：当且仅当 $\sigma_{ij}(\vec{z})=0$ 时，其边可用做增广边

我们把 $\sigma_{ij}(\vec{z})=0$ 的可增广边称为可用边

实现前述途径要解决的关键问题：

对于任意给定的可行流 $\{x_{ij}\}$，如何调整对偶向量 $\vec{z}$，确定一条由可用边组成的可增广链

解决问题的基本想法：

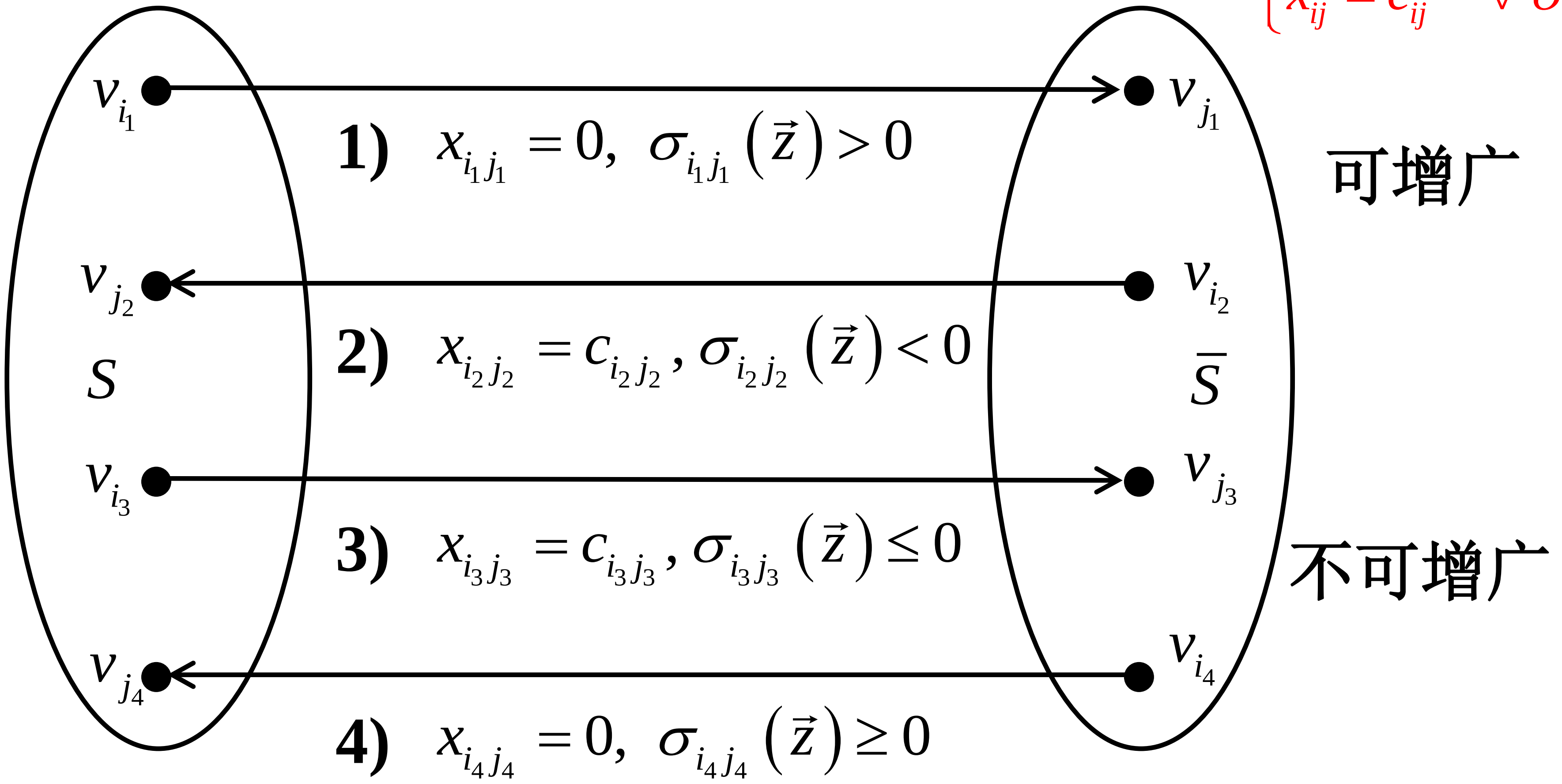
首先令 $S=\{v_s\}$，用 $\bar{S}$ 表示其补集

如果割集 $\{S,\bar{S}\}$ 不含可增广边（前向可增，后向可减）当前流已是最大流，原问题无解

如果割集 $\{S,\bar{S}\}$ 中有可增广边，调整 $\vec{z}$ 获得可用边（若有这样的边无须调整），然后增加 S

没有可用边的割集 $\{S, \bar{S}\}$ 中所有边的情况

$$\begin{cases} x_{ij} = 0 & \forall\, \sigma_{ij}(\vec{z}) > 0 \\ x_{ij} = c_{ij} & \forall\, \sigma_{ij}(\vec{z}) < 0 \end{cases}$$



注意：不会有 $0 < x_{ij} < c_{ij}$ 的边，否则有可用边

要点：保持互补松弛条件的增广方法

（整数费用网络情况）

保持属于S的对偶变量不变，将属于$\bar{S}$的对偶变量加 1

即令 $z_i' = z_i, \forall v_i \in S$，$z_i' = z_i + 1, \forall v_i \in \bar{S}$，割集 $\{S, \bar{S}\}$中所有边的简化成本 $\sigma_{ij}(\vec{z}') = d_{ij} + z_i' - z_j'$ 的改变情况如下：

1) $x_{i_1 j_1} = 0,\ \sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}') = \sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}) - 1 \geq 0$

2) $x_{i_2 j_2} = c_{i_2 j_2},\ \sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}') = \sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}) + 1 \leq 0$

3) $x_{i_3 j_3} = c_{i_3 j_3},\ \sigma_{i_3 j_3}(\vec{z}) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{i_3 j_3}(\vec{z}') = \sigma_{i_3 j_3}(\vec{z}) - 1 < 0$

4) $x_{i_4 j_4} = 0,\ \sigma_{i_4 j_4}(\vec{z}) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{i_4 j_4}(\vec{z}') = \sigma_{i_4 j_4}(\vec{z}) + 1 > 0$

不在割集中的所有边的简化成本显然不变

结论：以上操作可以保持互补松弛条件不变！

$$\begin{cases} x_{ij} = 0 & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z}) > 0 \\ x_{ij} = c_{ij} & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z}) < 0 \end{cases}$$

注意可增广边的简化成本改变情况

1) $x_{i_1 j_1}=0,\ \sigma_{i_1 j_1}(\vec{z})>0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}')=\sigma_{i_1 j_1}(\vec{z})-1\geq 0$

2) $x_{i_2 j_2}=c_{i_2 j_2},\sigma_{i_2 j_2}(\vec{z})<0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}')=\sigma_{i_2 j_2}(\vec{z})+1\leq 0$

如果有 $\sigma_{i_1 j_1}(\vec{z})=1$，　则有 $\sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}')=0$

如果有 $\sigma_{i_2 j_2}(\vec{z})=-1$，则有 $\sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}')=0$

出现上述任何一种情况都可得到可用边，如果上述情况都没有出现，则继续保持

1) $x_{i_1 j_1}=0,\ \sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}')>0$　　**2)** $x_{i_2 j_2}=c_{i_2 j_2},\sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}')<0$

此时可以继续上述操作，将属于 $\bar{S}$ 的对偶变量加 **1**

要点：保持互补松弛条件的增广方法
（一般网络情况）

上述操作的次数有个上限，这就是

$$\eta = \left|\sigma_{\hat{i}\hat{j}}(\vec{z})\right| = \min\left\{\left|\sigma_{ij}(\vec{z})\right| \text{ s.t. } (v_i, v_j) \in \hat{E}\right\}$$

其中 $\hat{E}$ 表示割集 $\{S, \bar{S}\}$ 中所有可增广边的集合，当操作进行了 η 次以后，一定得到 $\sigma_{\hat{i}\hat{j}}(\vec{z}) = 0$ 的可增广边 $(v_{\hat{i}}, v_{\hat{j}})$

基于以上分析，可以一次完成上述 η 次操作，即令

$$\begin{aligned} z_i' &= z_i & \forall v_i \in S \\ z_i' &= z_i + \eta & \forall v_i \in \bar{S} \end{aligned}$$

结论：按以上公式得到的 $\vec{z}$ 不仅能够保持互补松弛条件不变，且能得到 $\sigma_{\hat{i}\hat{j}}(\vec{z}) = 0$ 的可增广边 $(v_{\hat{i}}, v_{\hat{j}})$

保持互补松弛条件的增广方法总结

1）令 $S=\{v_s\}$，用 $\bar{S}$ 表示其补集

2）如果割集 $\{S,\bar{S}\}$ 中没有可增广边，停止（原问题没有可行解），否则用 $\hat{E}$ 表示其所有可增广边的集合

3）由下式决定 η 和 $\left(v_{\hat{i}},v_{\hat{j}}\right)$

$$\eta=\left|\sigma_{\hat{i}\hat{j}}\left(\vec{z}\right)\right|=\min\left\{\left|\sigma_{ij}\left(\vec{z}\right)\right|\ \text{s.t.}\ \left(v_i,v_j\right)\in\hat{E}\right\}$$

4）对所有 $v_i\in\bar{S}$ 用 $z_i+\eta$ 替换 z_i

5）令 $v=\bar{S}\cap\left\{v_{\hat{i}},v_{\hat{j}}\right\}$，用 $S\cup\{v\}$ 和 $\bar{S}\setminus\{v\}$ 分别替换 S 和 $\bar{S}$

6）如果 $\bar{S}$ 是空集（已产生可用边组成的可增广链），停止，否则回到 **2**）继续迭代

要点：示例寻求可用边

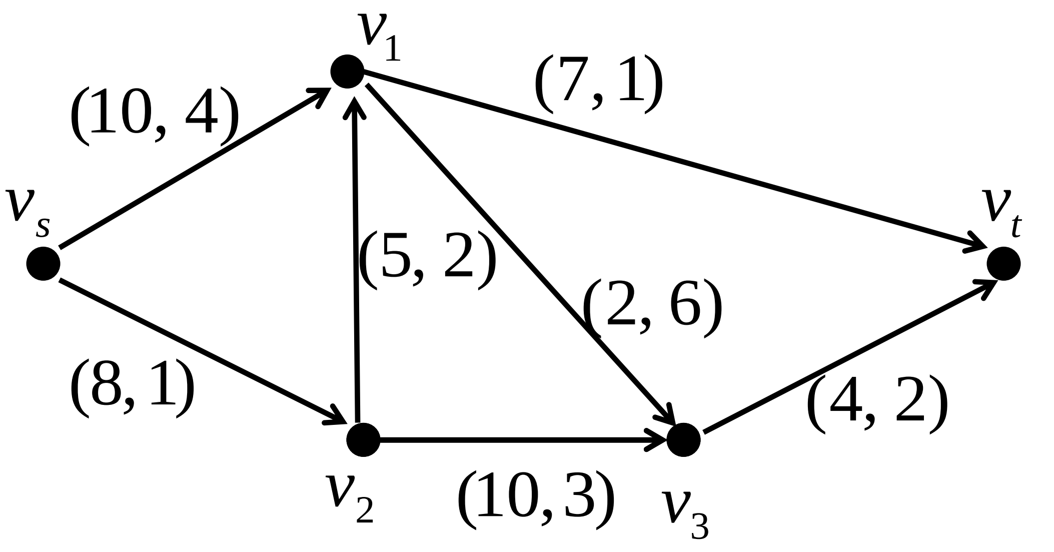
例、求解右下图所示 $w=11$ 的最小费用流问题

初值：

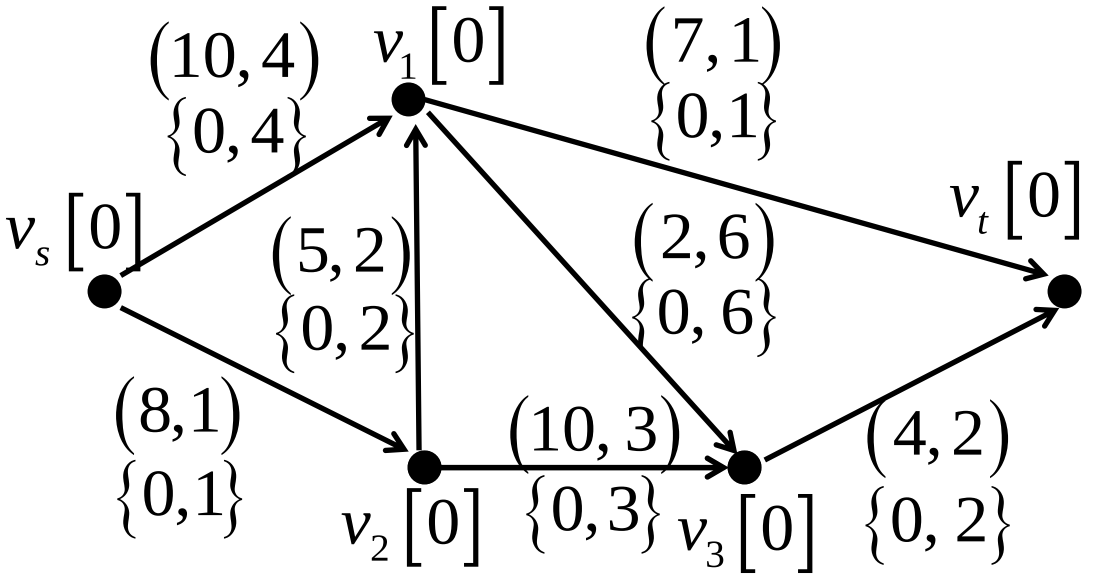
$z_i = 0, \forall v_i \in V$

$\sigma_{ij}\left(\vec{z}\right) = d_{ij}$

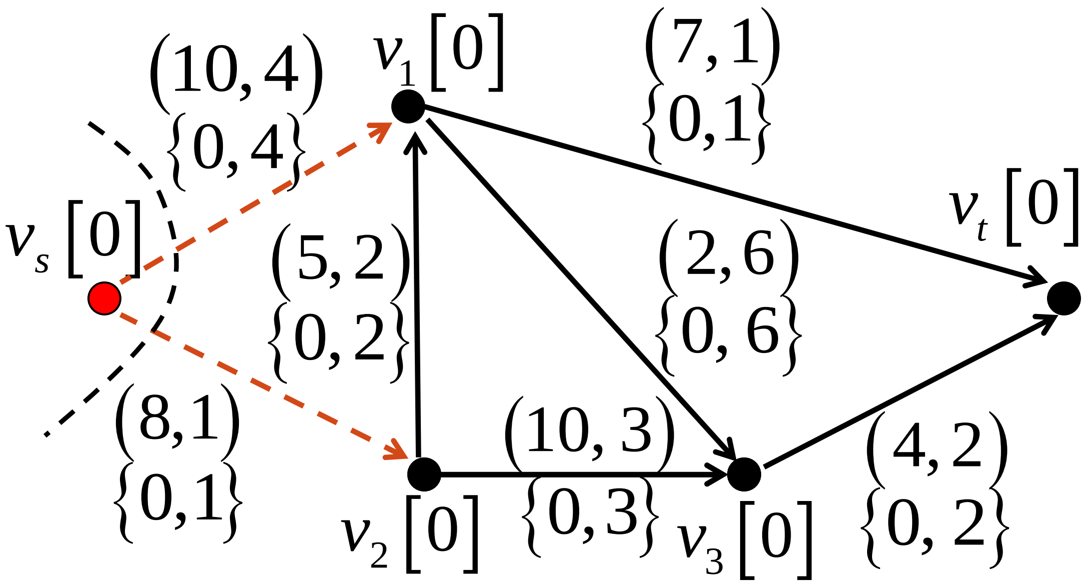
$x_{ij} = 0, \forall (v_i, v_j) \in E$



右图的中括号数字为 z_i，大括号的数字依次为 $x_{ij}, \sigma_{ij}\left(\vec{z}\right)$

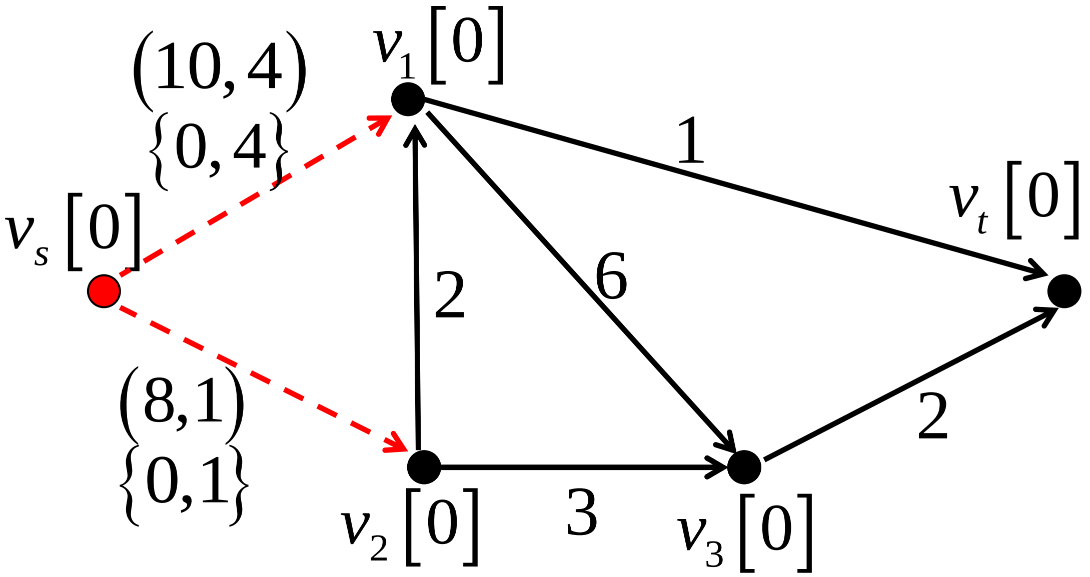


令 $S=\{v_s\}$ ，用红点表示属于 S 的点，黑点为 $\bar{S}$ 的点，用红虚线表示割集 $\{S,\bar{S}\}$ 的可增广边，如下图所示

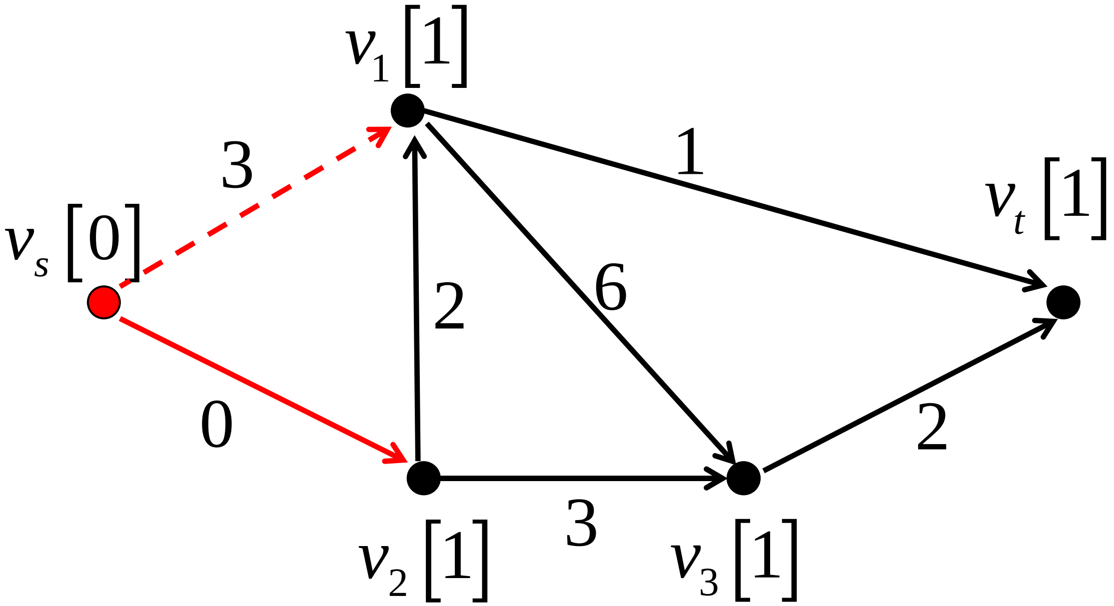


可以看出，此时没有可用边

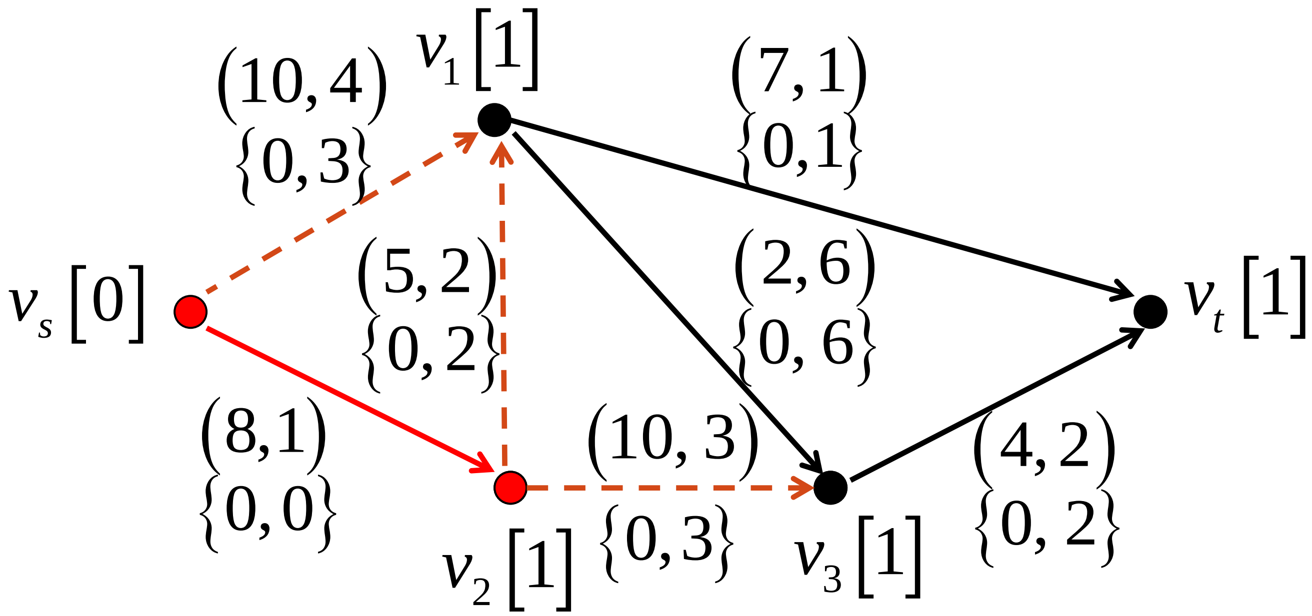
右图仅保留了对偶变量和部分边简化成本（边旁数字）



对所有 $v_j \in \bar{S}$，将 z_j换成$z_j + \min\{4,1\}$可得到右边的对偶变量和简化成本，出现可用边（用红实线表示），注意非割集边简化成本不变



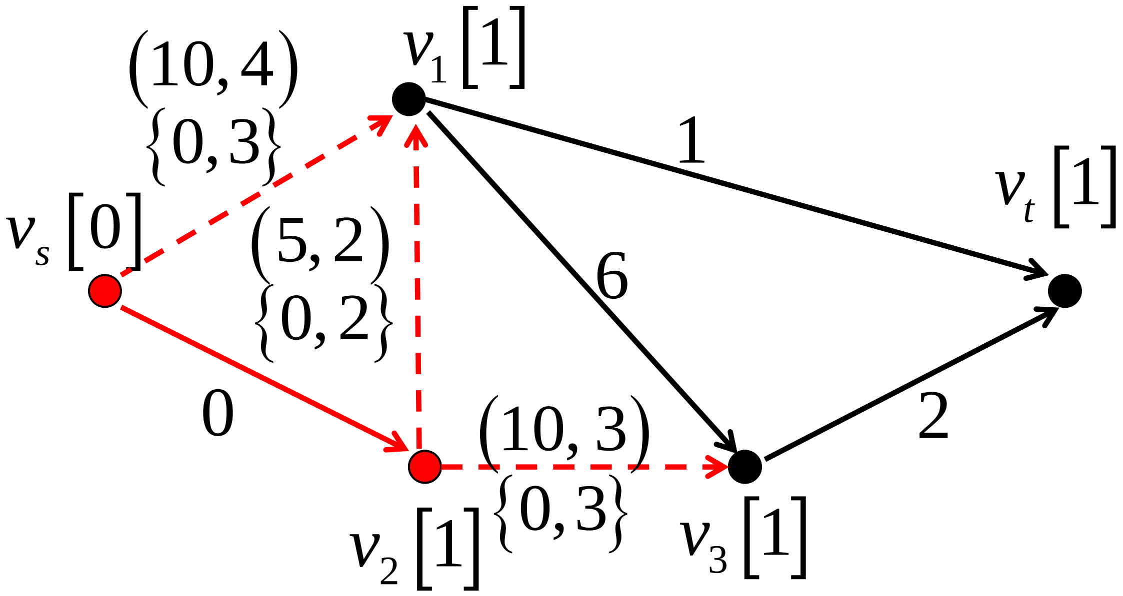
用替换后的 S 、$\vec{z}$ 和 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 得到新图如下



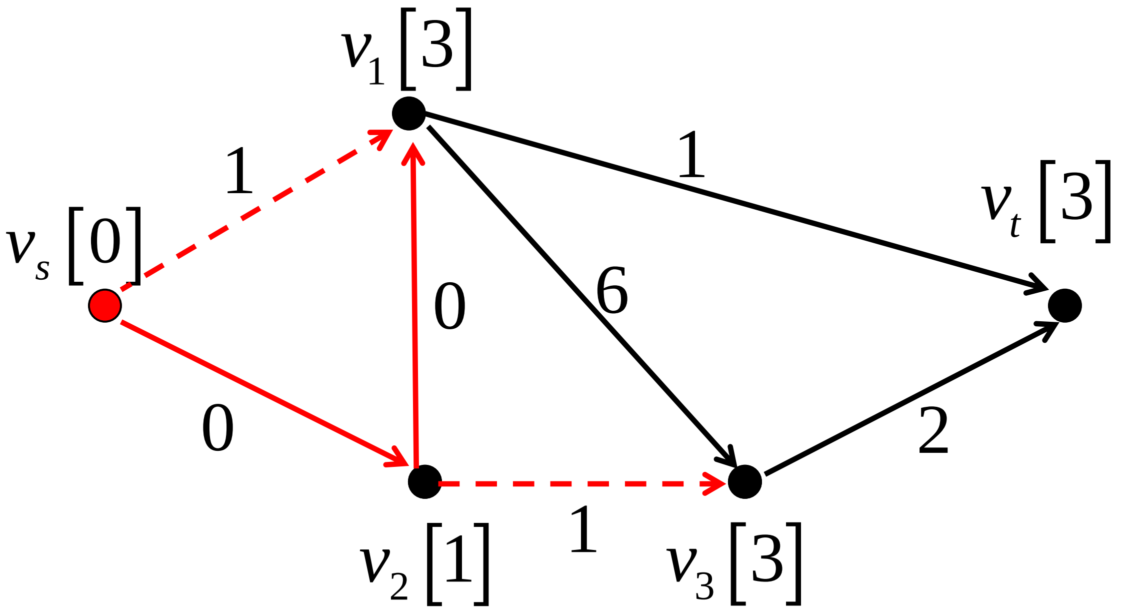
此时仍然有可增广边，但没有可用边

要点：示例求可增广链

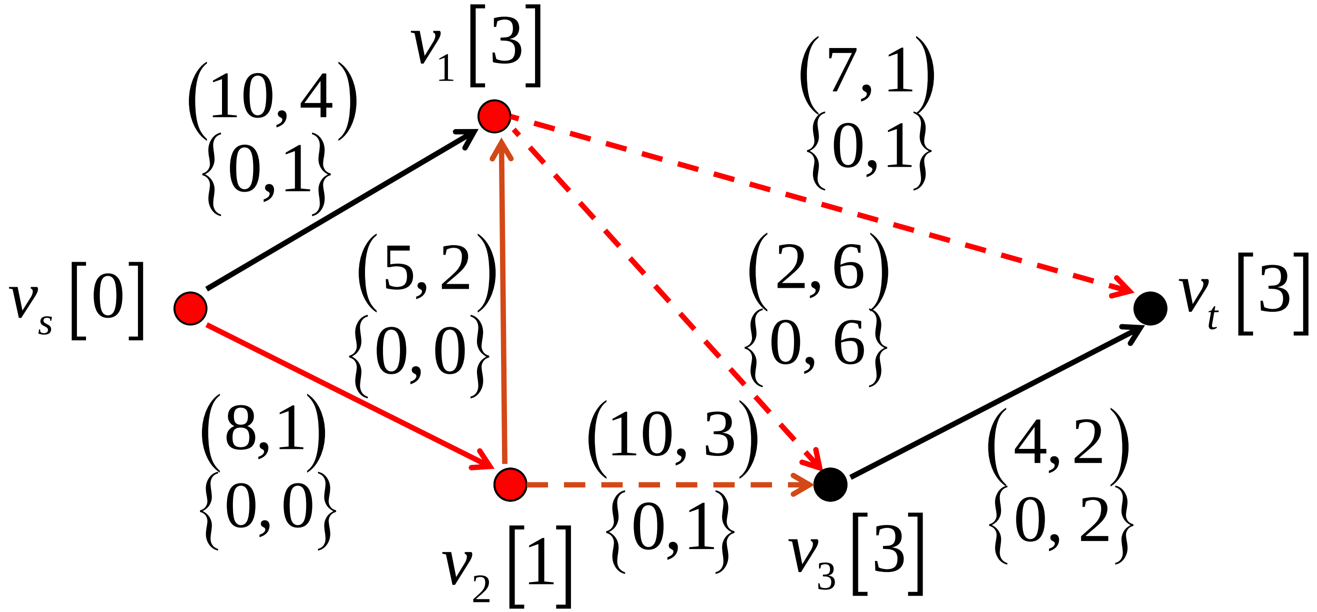
右图为新对偶变量和部分边简化成本



对所有 $v_j \in \bar{S}$，将 z_j 换成 $z_j + \min\{3,2,3\}$ 可得到右边的对偶变量和简化成本，出现新的可用边

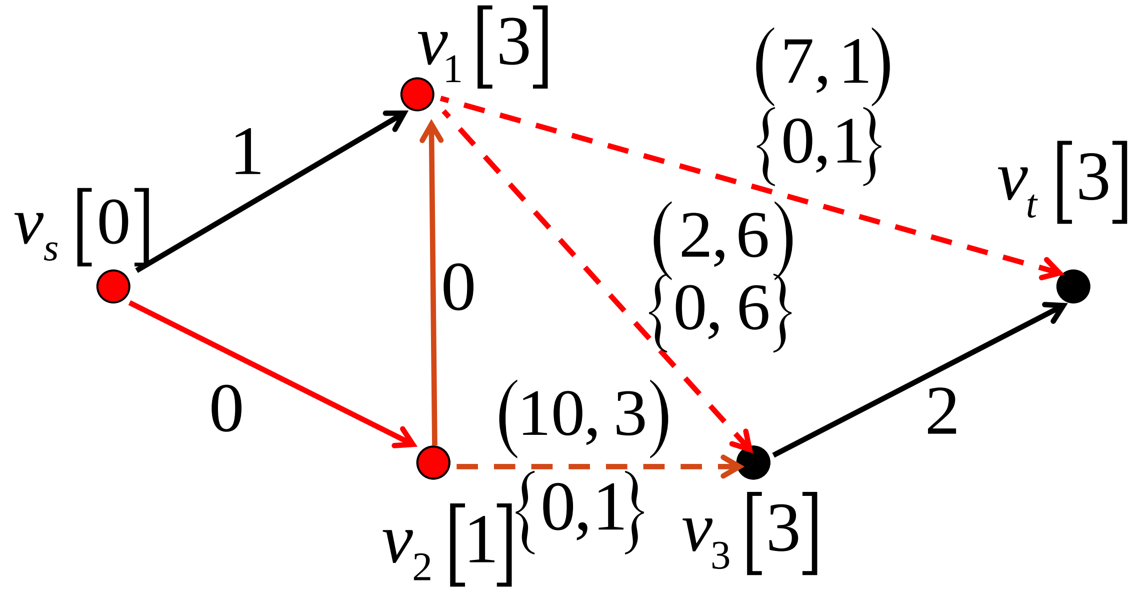


再用替换后的 S 、$\vec{z}$ 和 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 得到新图如下

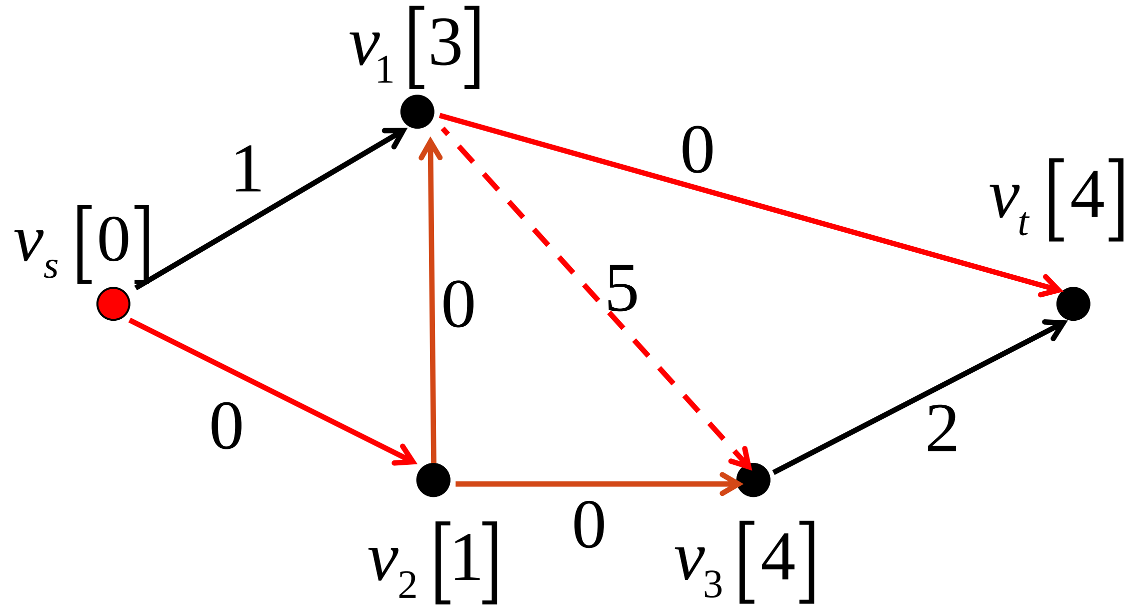


此时仍然有可增广边，但没有可用边

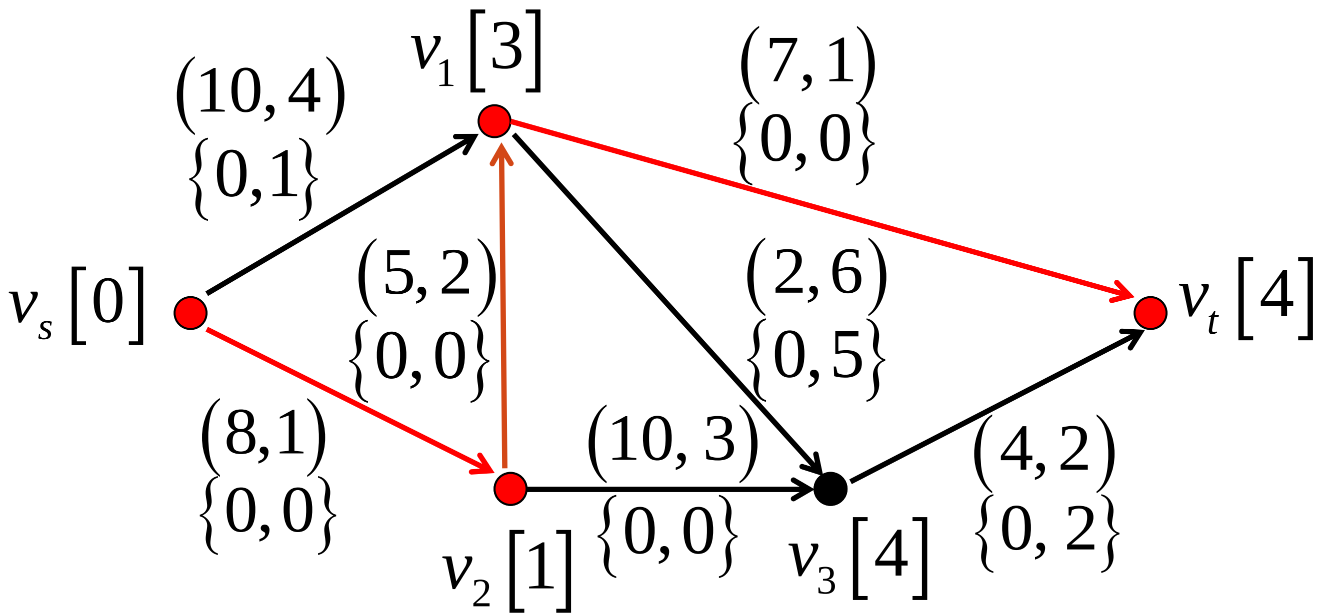
右图为新对偶变量和部分边简化成本



对所有 $v_j \in \bar{S}$，将 z_j 换成 $z_j + \min\{1,6,1\}$ 可得到右边的对偶变量和简化成本，出现新的可用边



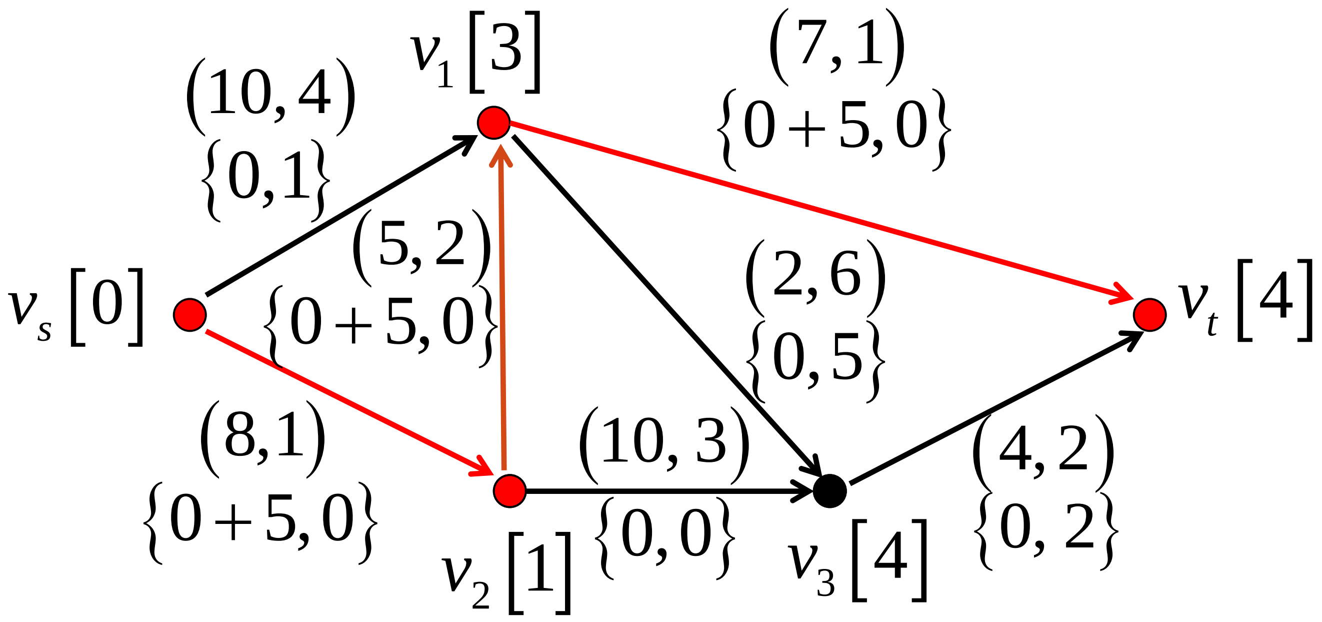
再用替换后的 S 、$\vec{z}$ 和 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 得到新图如下



此时已产生从 v_s 到 v_t 的可用边组成的可增广链

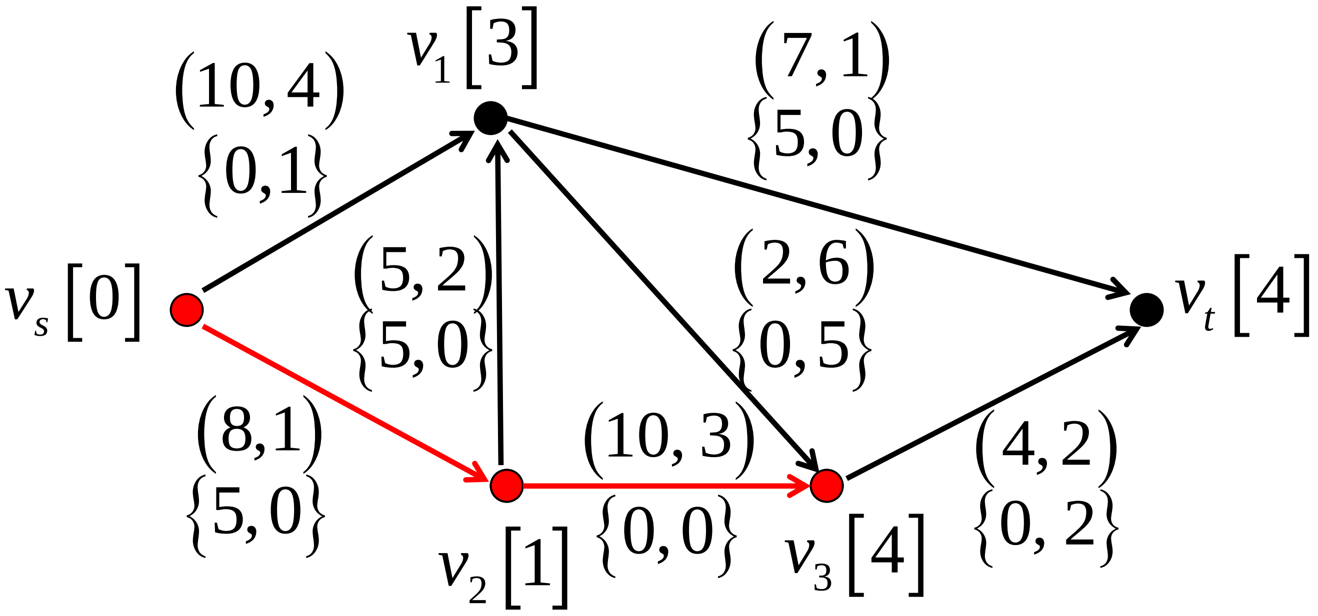
要点：沿可增广链改进最小费用流

沿简化成本等于零的可增广链增加流量，得到下图，其中可增流量为 $\min\{11, 8, 5, 7\} = 5$ ，其中11来自总流量约束



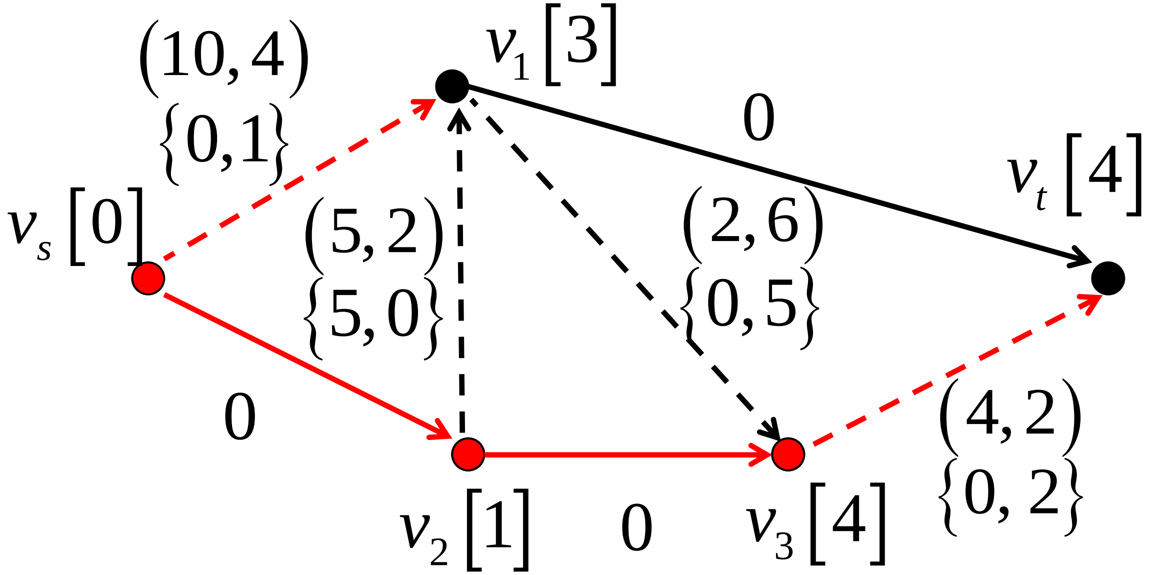
可验证，上述流量和对偶变量满足互补松弛条件

重新从 $S=\{v_s\}$ 和当前 $\vec{z}$ 与 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 开始迭代，得下图

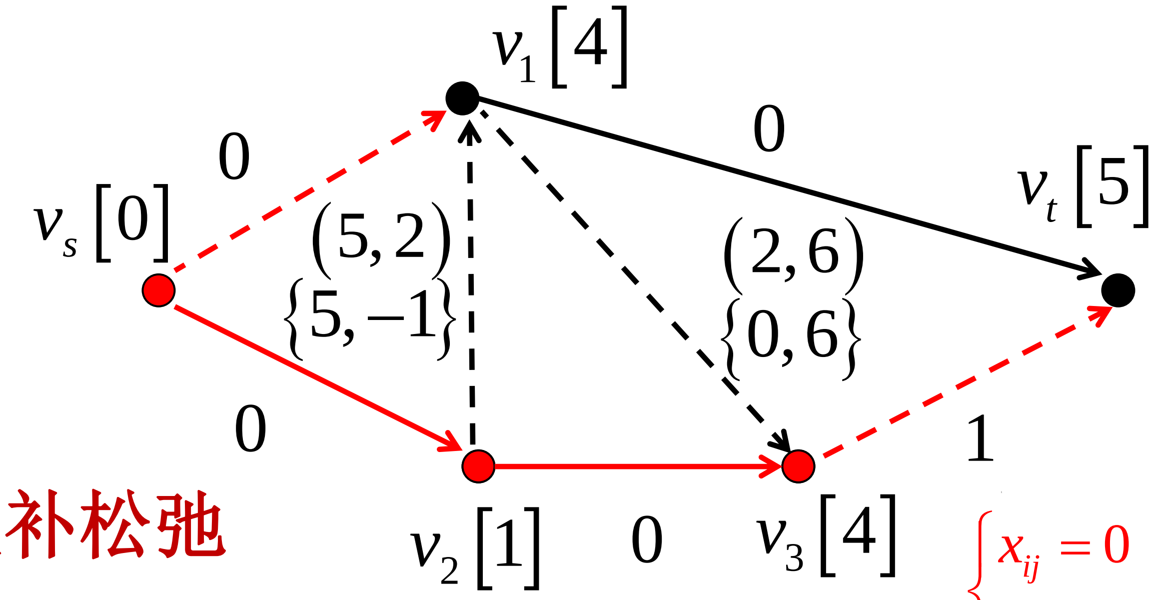


利用可用边可得 $S=\{v_s,v_2,v_3\}$

右图红虚线为可增广边，黑虚线不是



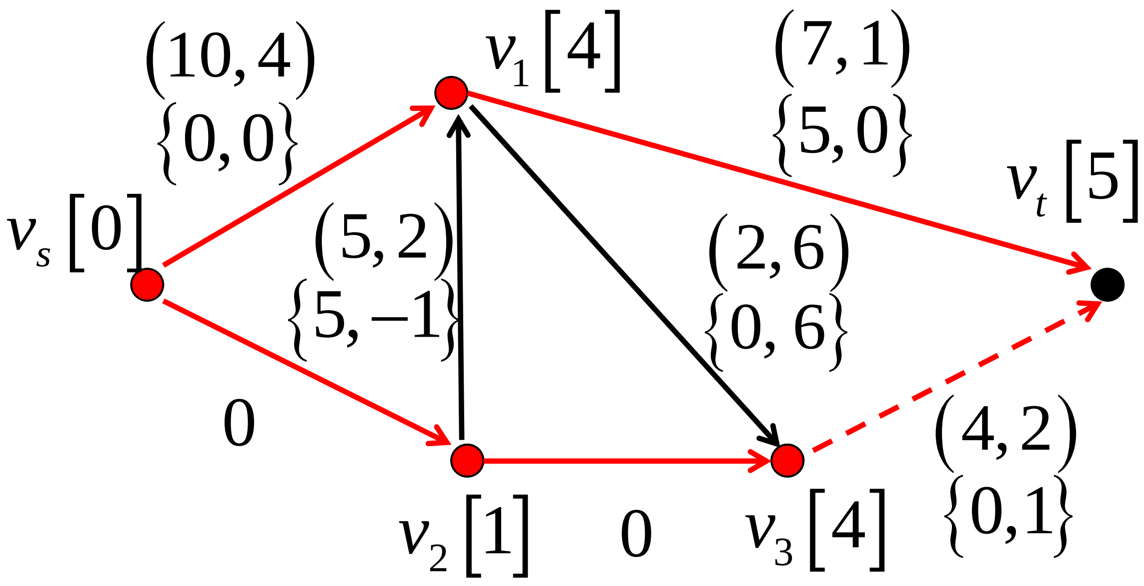
对所有 $v_j \in \bar{S}$，将 z_j 换成 $z_j + \min\{1,2\}$ 可得到右边的对偶变量和简化成本



注意：所有虚线上互补松弛条件保持成立！

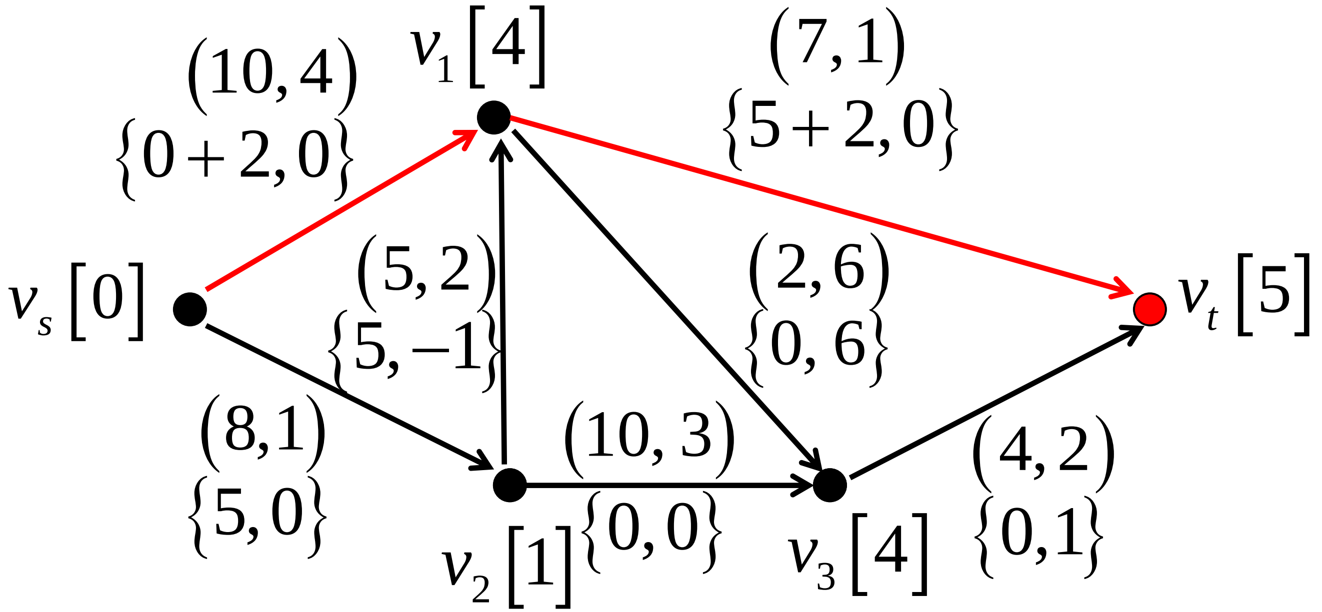
$$\begin{cases} x_{ij} = 0 & \forall\, \sigma_{ij}(\vec{z}) > 0 \\ x_{ij} = c_{ij} & \forall\, \sigma_{ij}(\vec{z}) < 0 \end{cases}$$

再用替换后的 S 、$\vec{z}$ 和 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 得到新图如下



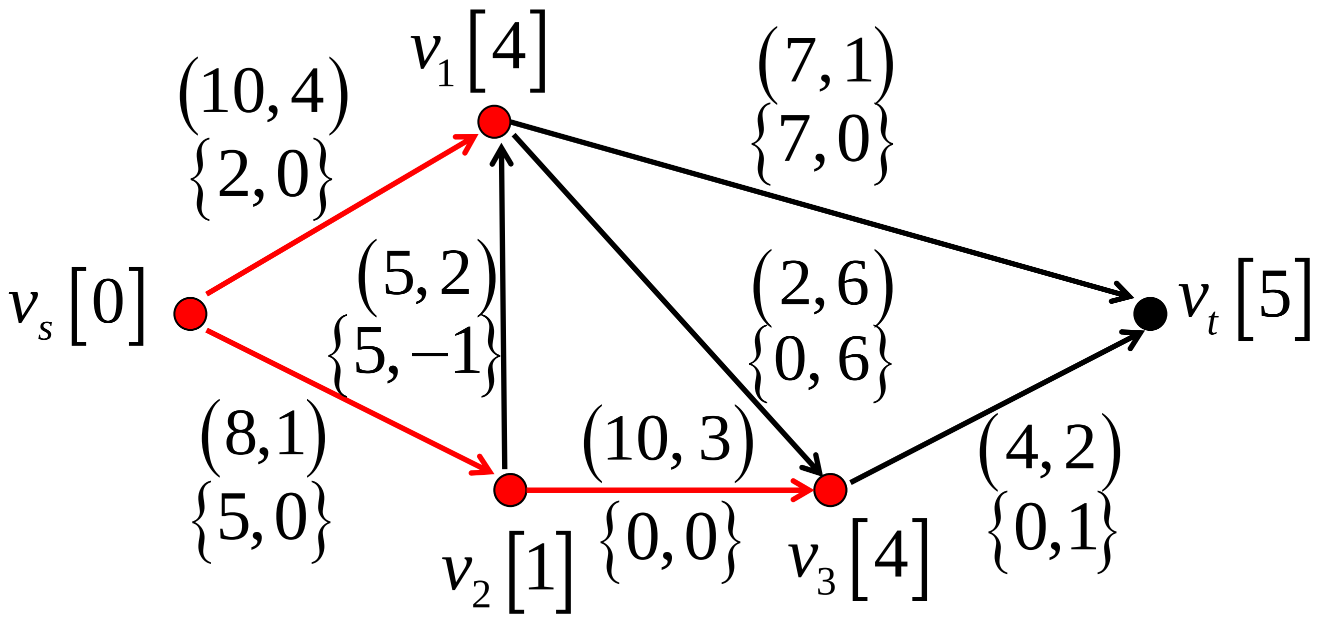
此时已产生一条从 v_s 到 v_t 的简化成本等于零的可增广链

沿简化成本等于零的可增广链增加流量，得到下图，其中可增流量为 $\min\{11-5, 10, 7-5\}=2$



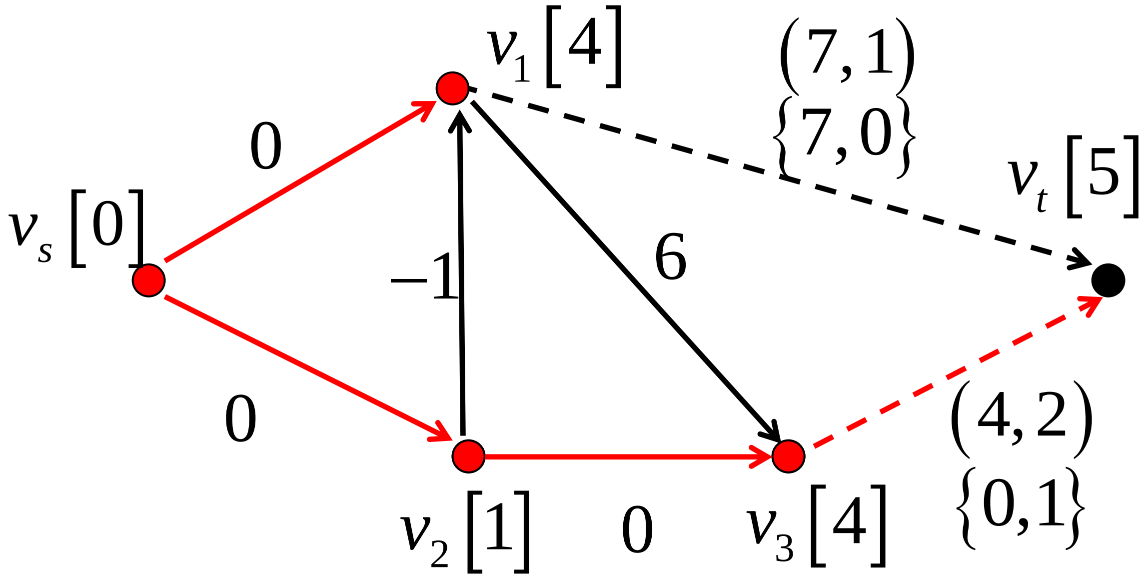
可验证，上述流量和对偶变量满足互补松弛条件

重新从 $S=\{v_s\}$ 和当前 $\vec{z}$ 与 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 开始迭代，得下图

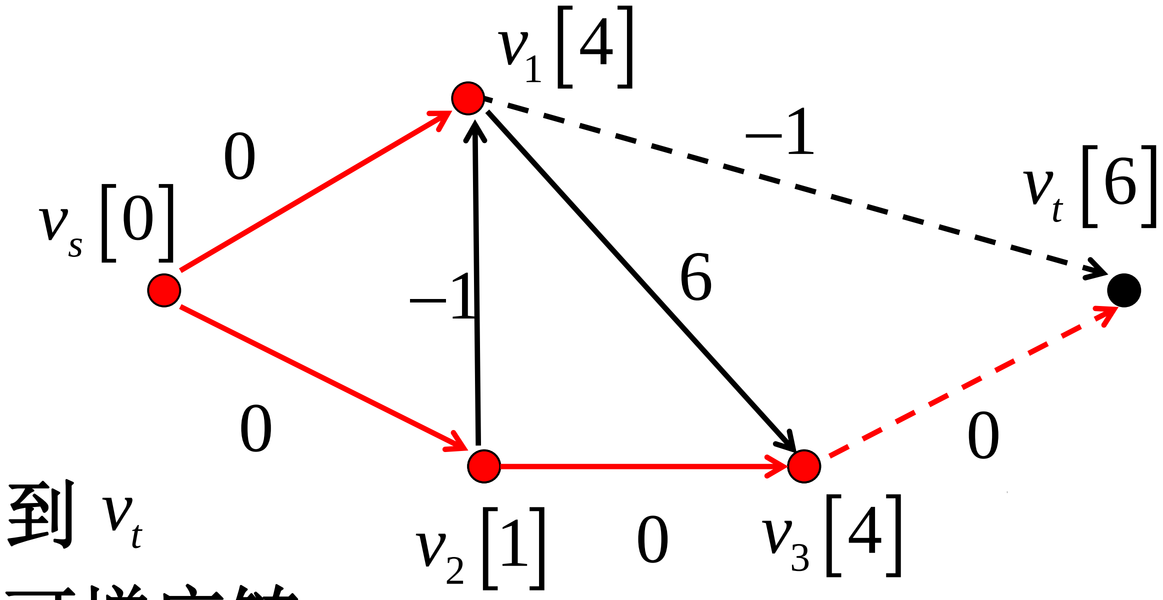


利用可用边可得 $S=\{v_s,v_1,v_2,v_3\}$

右图红虚线为可增广边，黑虚线不是

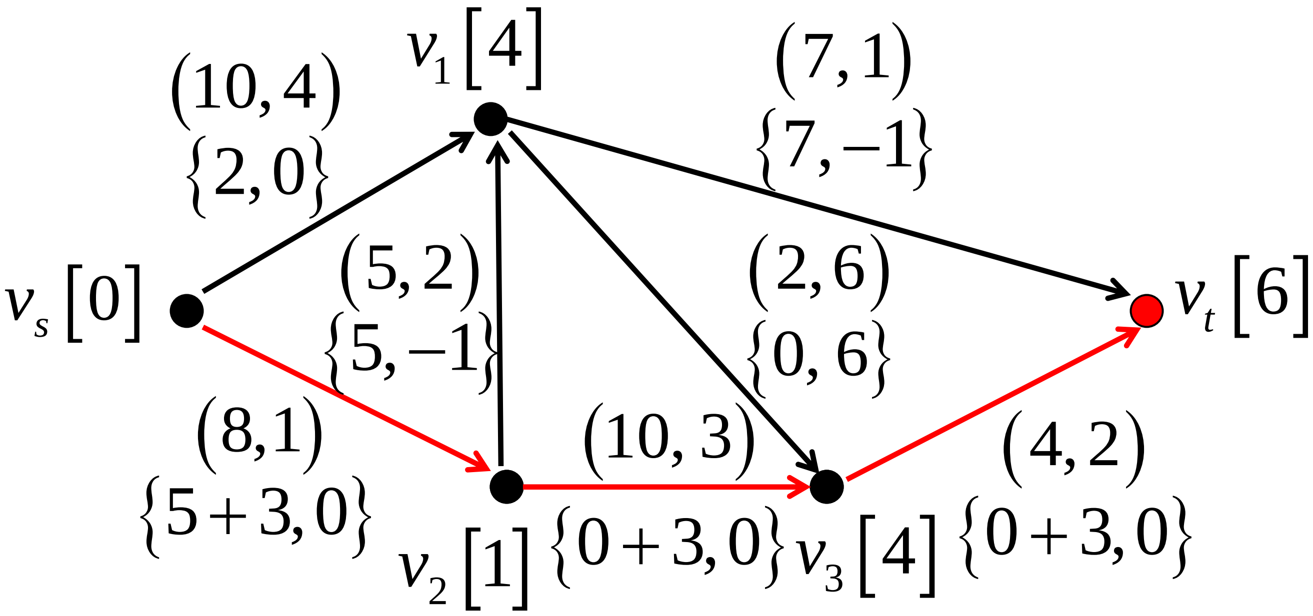


对所有 $v_j \in \bar{S}$，将 z_j 换成 $z_j + \min\{1\}$ 可得到右边的对偶变量和简化成本



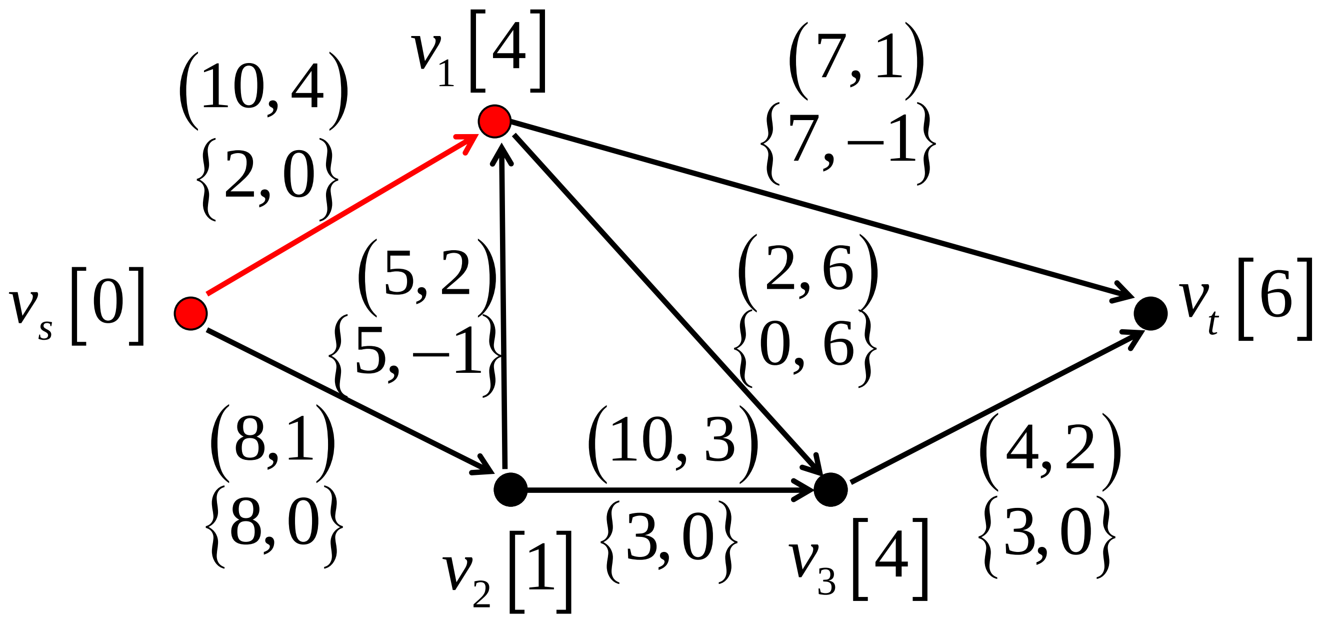
此时已产生一条从 v_s 到 v_t 的简化成本等于零的可增广链

沿简化成本等于零的可增广链增加流量，得到下图，其中可增流量为 $\min\{11-7, 8-5, 10, 4\} = 3$



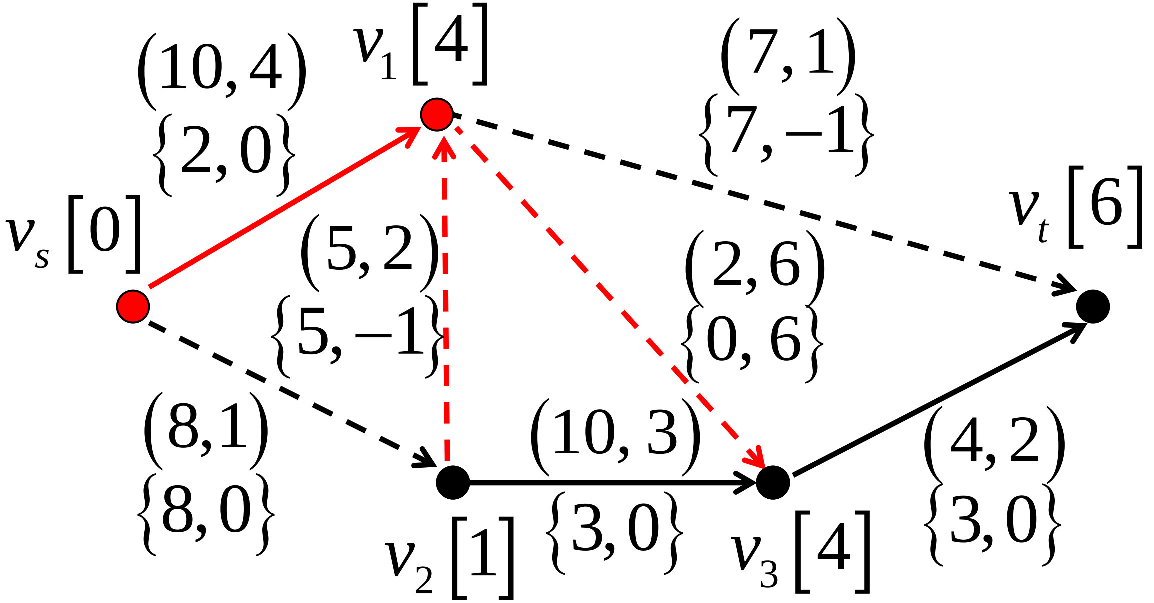
可验证，上述流量和对偶变量满足互补松弛条件

重新从 $S=\{v_s\}$ 和当前 $\vec{z}$ 与 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 开始迭代，得下图



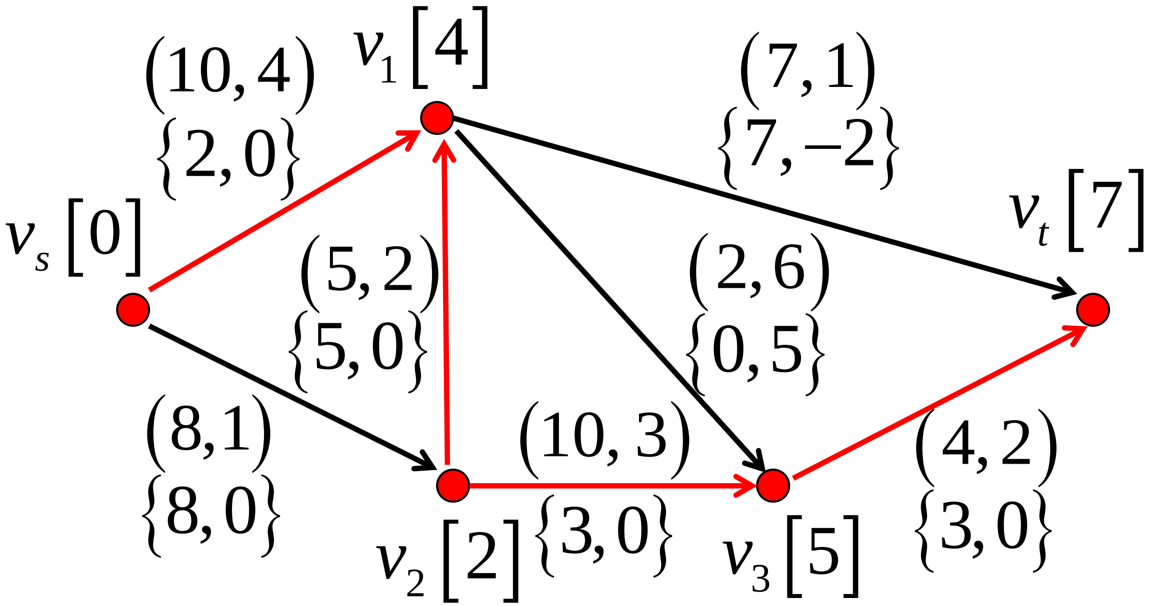
利用可用边可得 $S=\{v_s,v_1\}$

右图红虚线为可增广边，黑虚线不是

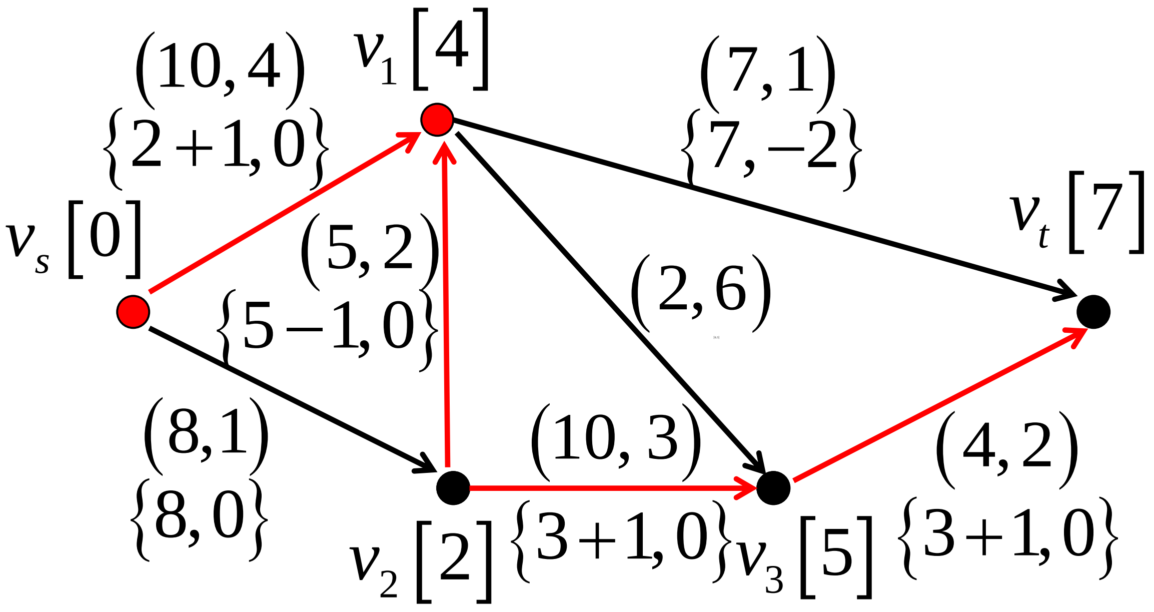


对所有 $v_j \in \bar{S}$，将 z_j 换成 $z_j + \min\{|-1|, 6\}$ 可得到右边的对偶变量和简化成本

此时已得到可增广链



沿简化成本等于零的可增广链增加流量，得到下图，其中可增流量为 $\min\{11-10,10-2,5,10-3,4-3\}$



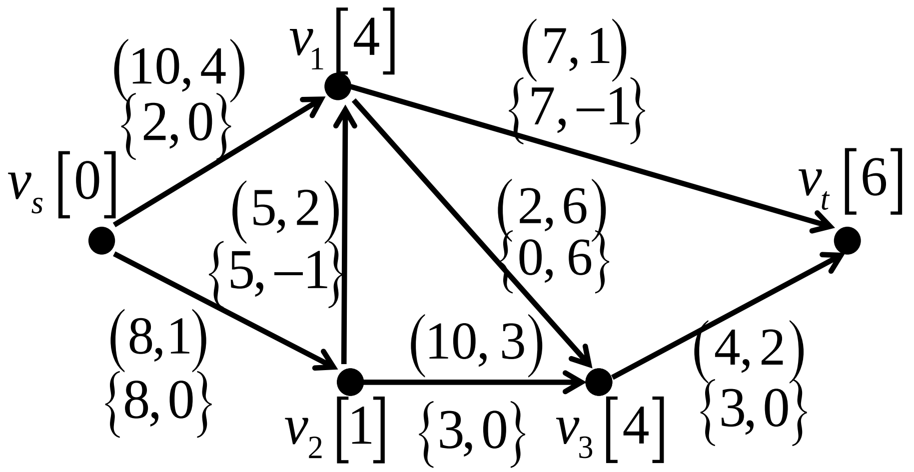
可验证，上述流量和对偶变量满足互补松弛条件

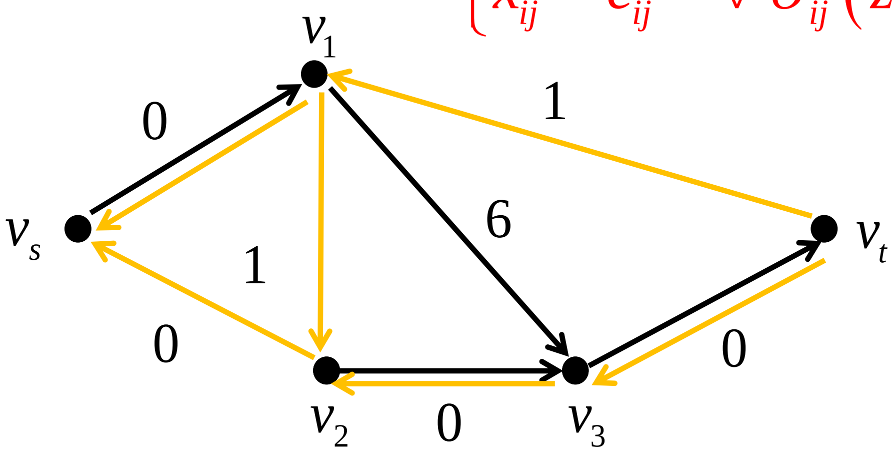
实际流量等于**11**，满足所有流量约束，已得到最优解

要点：寻求可增广链的最短路等效

对前面可用增广链的确定方法的新认识

$$\begin{cases} x_{ij}=0 & \forall\, \sigma_{ij}(\vec{z})>0 \\ x_{ij}=c_{ij} & \forall\, \sigma_{ij}(\vec{z})<0 \end{cases}$$





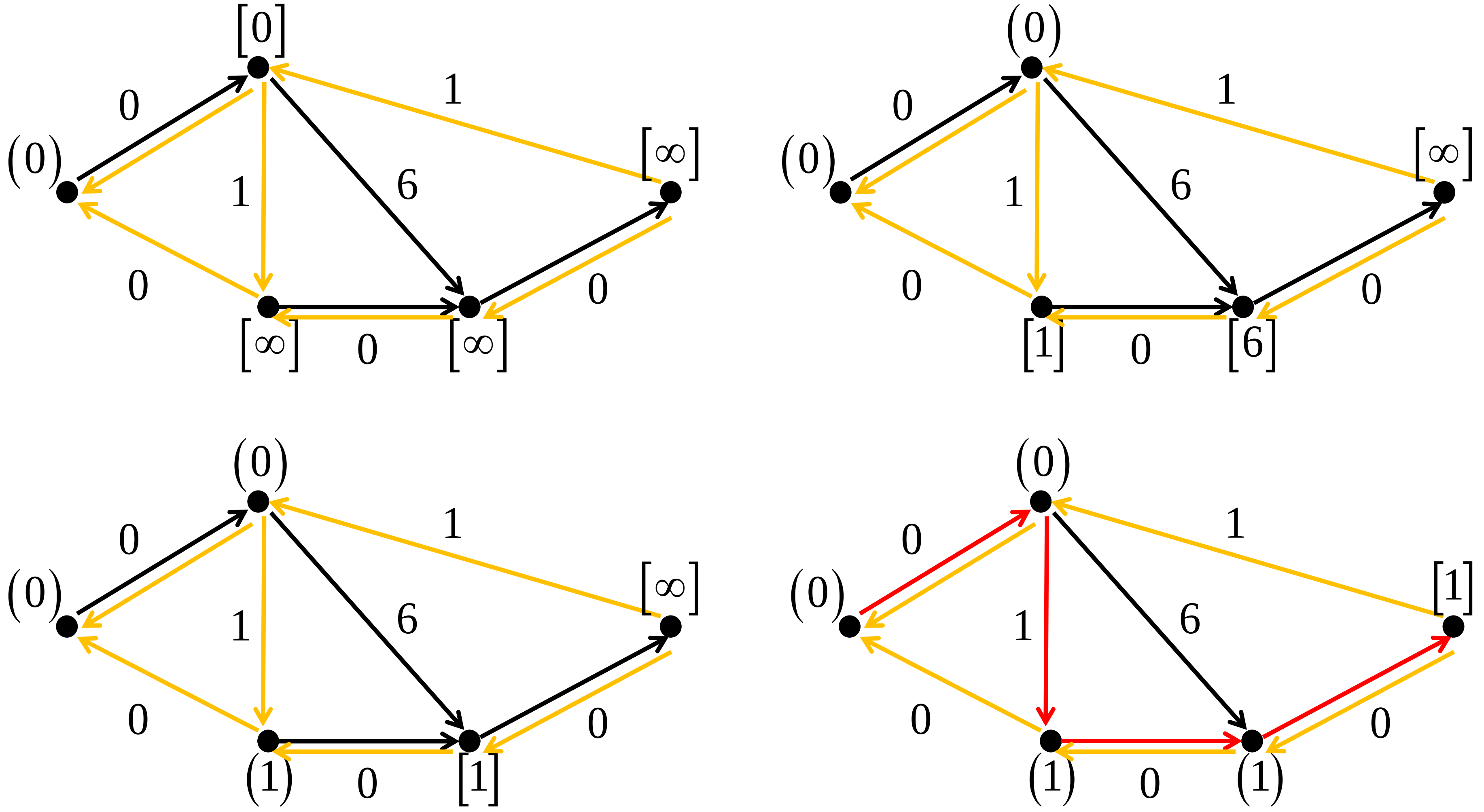
上面右边是开始确定第三条增广链时的图，左边是由其导出的**长度网络**，导出规则如下：

1）保留所有可增边（图中的黑色边）；

2）把所有可减边反向（图中的橙色边，可增可减边则增加一条反向边）；

3）各边长度取简约成本的绝对值

用**Dijkstra**算法求前面的长度网络（下面第一图）从 v_s 到各点的最短路，得到最后的最短路径图（用红色表示）



下面左右图分别是确定第三条增广链的开始和结束图，和右上求最短路的结果图对比，可以看出：

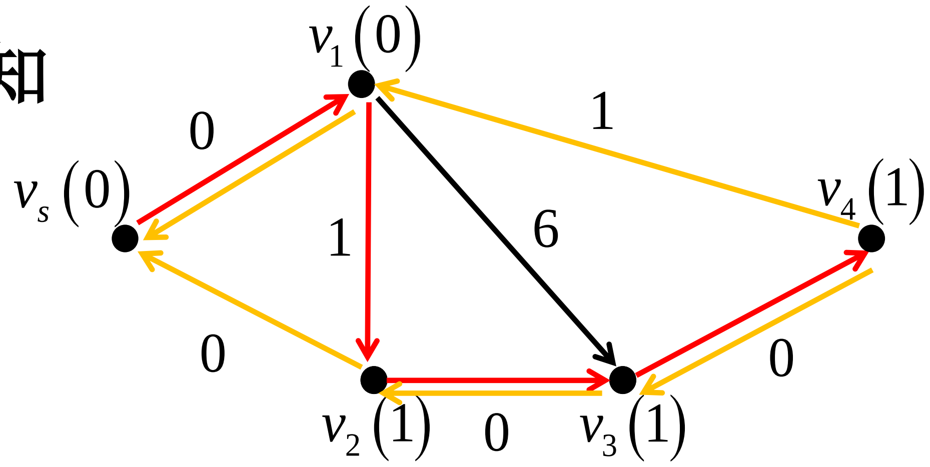
1）最短路就是所求可增广链；

2）对偶变量和最短路径（用 ρ_i 表示）满足以下关系

$$z_i' = z_i + \min\{\rho_i, \rho_t\}, \forall v_i \in V$$

从前面求最短路的过程可知

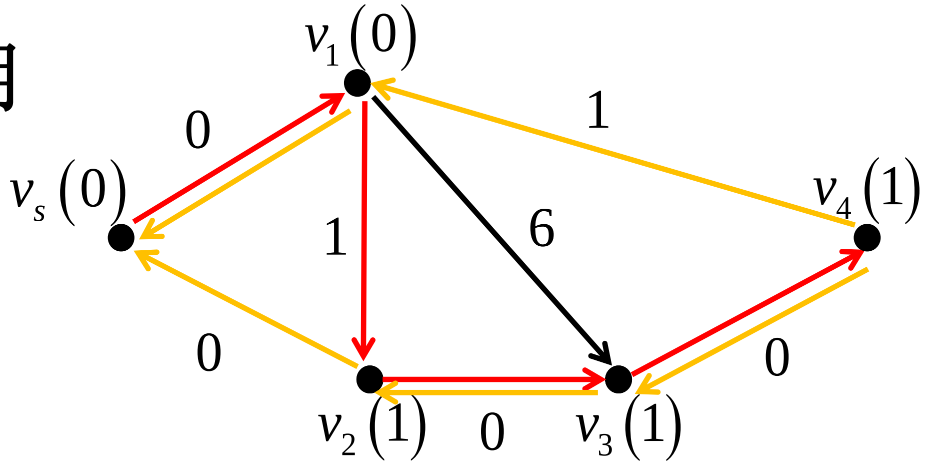
该结论具有一般性

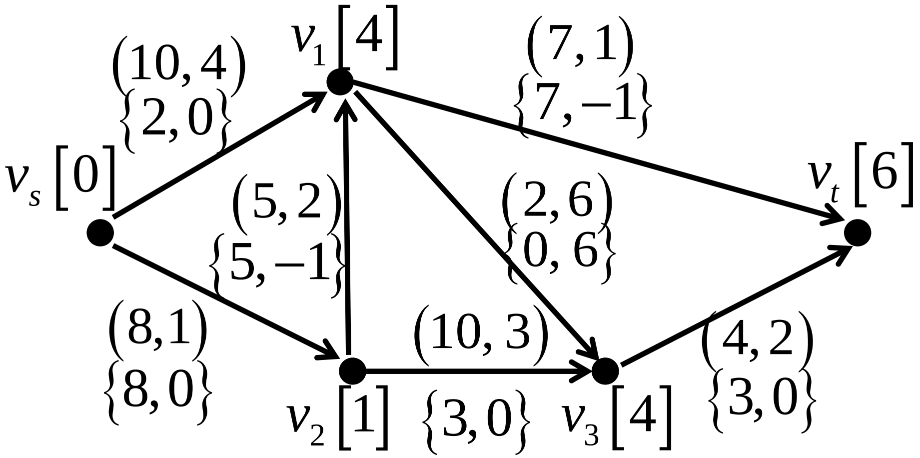


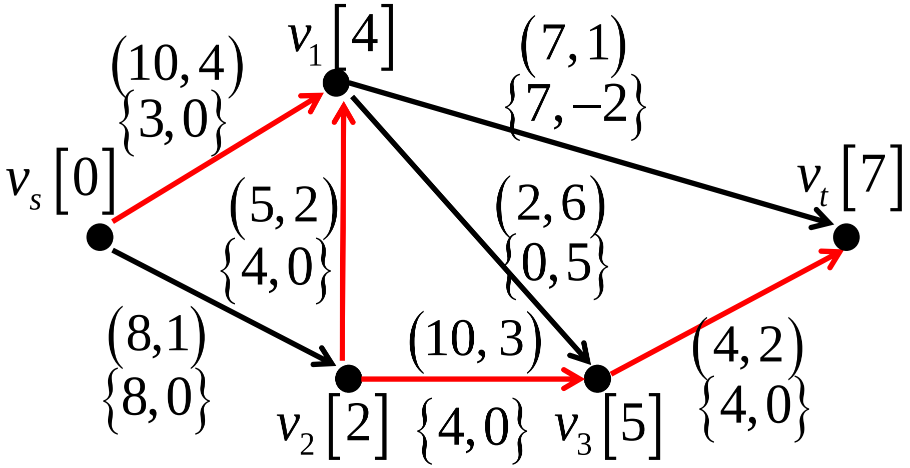
1）最短路就是所求可增广链；

2）对偶变量和最短路径（用 ρ_i 表示）满足以下关系

$$z_i' = z_i + \min\{\rho_i, \rho_t\}, \forall v_i \in V$$







要点：等价的最小费用流求解算法

和确定可用增广链方法等价的最小费用流求解算法：

1）令 $x_{ij}=0, \forall(v_i,v_j)\in E$，$z_i=0, \forall v_i\in V$，$\hat{w}=0$

2）如果 $\hat{w}=w$，停止

3）利用当前流量和简化成本构造长度网络

4）求出从 v_s 到每个 v_i 的最短路程 ρ_i，如果到某个 v_i 没有通路，令 $\rho_i=\infty$

5）如果 $\rho_t=\infty$，停止（没有可增广链）

6）利用从 v_s 到 v_t 的最短路和所有的 ρ_i 修改原变量、对偶变量（$z_i'=z_i+\min\{\rho_i,\rho_t\}$）和总流量，再用新数值替换原数值，然后回到 2）

定理：在前述算法中，如果每步迭代开始时的对偶变量Z 和流量 X 一起满足互补松弛条件，那么经过一步迭代后的对偶变量Z' 和流量X'仍然一起满足互补松弛条件

推论：只要最小费用流问题有最优解，那么前述算法一定可以经过有限次迭代求得最优解

推论：容量和总流量均为整数的最小费用流问题存在整数最优解

直接证明定理

首先说明，以下两组条件等价

$$\begin{cases} x_{ij}=0 & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z})>0 \\ x_{ij}=c_{ij} & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z})<0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{ij}(\vec{z})\le 0 & \forall\ x_{ij}>0 \\ \sigma_{ij}(\vec{z})\ge 0 & \forall\ x_{ij}<c_{ij} \end{cases}$$

理由：当左边成立时，若右边上面不成立，则会产生 $x_{ij}>0$ 和 $x_{ij}=0$ 需要同时成立的矛盾，若右边下面不成立，则会产生 $x_{ij}<c_{ij}$ 和 $x_{ij}=c_{ij}$ 需要同时成立的矛盾。

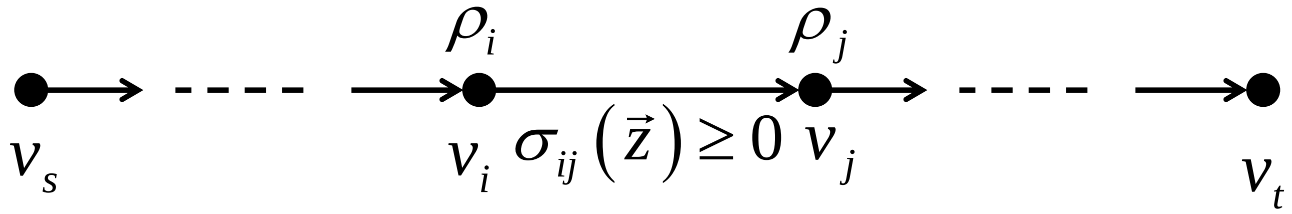
同理可说明，右边成立时左边必须成立。

下面先证明 $\sigma_{ij}(\vec{z}') \le 0,\ \forall\ x'_{ij} > 0$。分两种情形讨论：

1） $x_{ij} = 0$

$\Rightarrow \quad x'_{ij} > x_{ij} \quad \Rightarrow \quad (v_i, v_j) \in \mu^+$（可增广链的前向边）

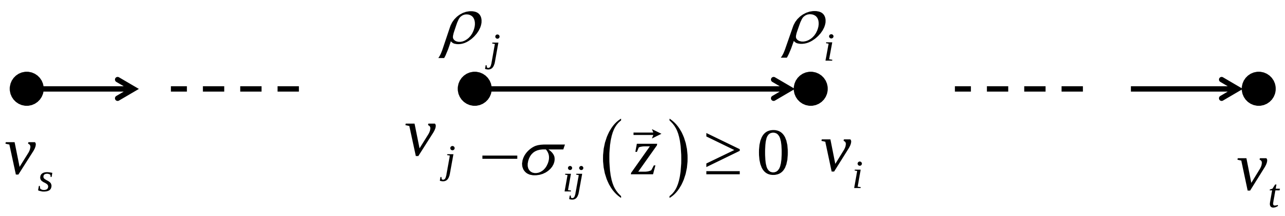
$\Rightarrow$



$\Rightarrow \quad \rho_i \le \rho_t\,,\quad \rho_j \le \rho_t,\quad \rho_j = \rho_i + \sigma_{ij}(\vec{z})$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(\vec{z}') &= d_{ij} + z'_i - z'_j \\
\Rightarrow \qquad &= d_{ij} + z_i + \min\{\rho_i, \rho_t\} - z_j - \min\{\rho_j, \rho_t\} \\
&= d_{ij} + z_i - z_j + (\rho_i - \rho_j) \\
&= d_{ij} + z_i - z_j - \sigma_{ij}(\vec{z}) = 0
\end{aligned}$$

2） $x_{ij} > 0$

$\Rightarrow$ 存在 

（不一定在增广链上）

$$\Rightarrow \quad \rho_i \leq \rho_j - \sigma_{ij}(\vec{z})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \min\{\rho_i, \rho_t\} &\leq \min\{\rho_j - \sigma_{ij}(\vec{z}), \rho_t\} \\ &\leq \min\{\rho_j, \rho_t\} - \sigma_{ij}(\vec{z}) \end{aligned}$$

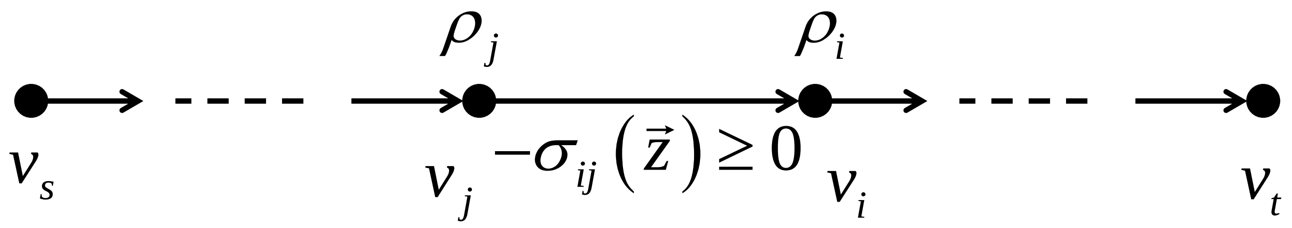
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}(\vec{z}') &= d_{ij} + z_i' - z_j' \\ &= d_{ij} + z_i - z_j + \min\{\rho_i, \rho_t\} - \min\{\rho_j, \rho_t\} \\ &\leq d_{ij} + z_i - z_j - \sigma_{ij}(\vec{z}) = 0 \end{aligned}$$

下面再证明 $\sigma_{ij}(\vec{z}') \geq 0,\ \forall\ x'_{ij} < c_{ij}$。同样分两种情形讨论：

1） $x_{ij} = c_{ij}$

$\Rightarrow \quad x'_{ij} < x_{ij} \quad \Rightarrow \quad (v_i, v_j) \in \mu^-$（可增广链的后向边）

$\Rightarrow$



$\Rightarrow \quad \rho_i \leq \rho_t\ , \quad \rho_j \leq \rho_t, \quad \rho_i = \rho_j - \sigma_{ij}(\vec{z})$

$$\sigma_{ij}(\vec{z}') = d_{ij} + z'_i - z'_j$$

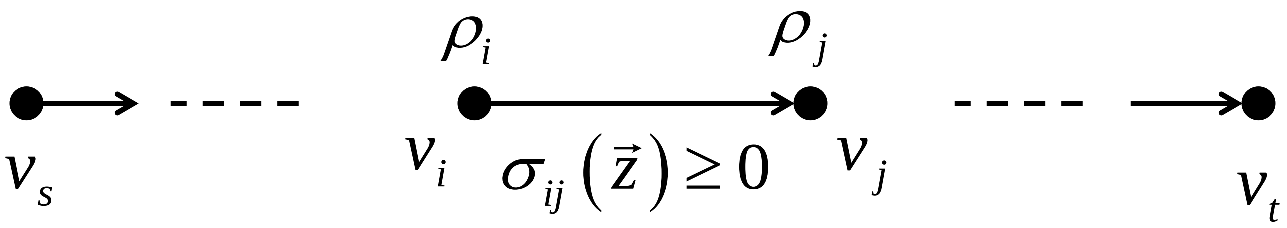
$$\Rightarrow \quad = d_{ij} + z_i + \min\{\rho_i, \rho_t\} - z_j - \min\{\rho_j, \rho_t\}$$

$$= d_{ij} + z_i - z_j + (\rho_i - \rho_j)$$

$$= d_{ij} + z_i - z_j - \sigma_{ij}(\vec{z}) = 0$$

2） $x_{ij} < c_{ij}$

$\Rightarrow$ 存在



（不一定在增广链上）

$$\Rightarrow \quad \rho_j \leq \rho_i + \sigma_{ij}(\vec{z})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \min\{\rho_j, \rho_t\} &\leq \min\{\rho_i + \sigma_{ij}(\vec{z}), \rho_t\} \\ &\leq \min\{\rho_i, \rho_t\} + \sigma_{ij}(\vec{z}) \end{aligned}$$

$$\sigma_{ij}(\vec{z}') = d_{ij} + z_i' - z_j'$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} &= d_{ij} + z_i - z_j + \min\{\rho_i, \rho_t\} - \min\{\rho_j, \rho_t\} \\ &\geq d_{ij} + z_i - z_j - \sigma_{ij}(\vec{z}) = 0 \end{aligned}$$

证毕

要点：再看最小费用流启发算法

和前面方法等价的简单方法

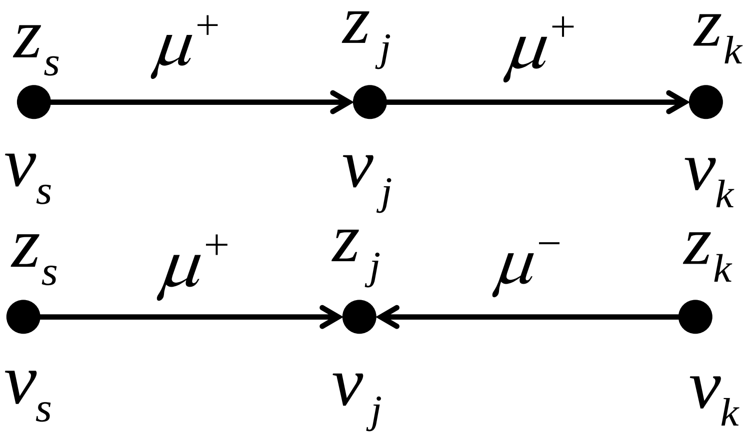
对长度网络中任意的从 v_s 到 v_t 的可增广链 μ，分别记前向边和后向边为 μ^+ 和 μ^-，其在长度网络的长度为

$$\begin{aligned}
&\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+}\sigma_{ij}(\vec{z}) + \sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-}\left(-\sigma_{ij}(\vec{z})\right) \\
&= \sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+}\left(d_{ij}+z_i-z_j\right) - \sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-}\left(d_{ij}+z_i-z_j\right) \\
&= d(\mu) + \sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+}\left(z_i-z_j\right) - \sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-}\left(z_i-z_j\right)
\end{aligned}$$

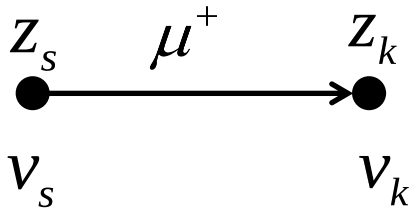
其中 $d(\mu)=\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+}d_{ij}+\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-}\left(-d_{ij}\right)$ 称为增广链 μ 的费用

长度表达式的简化表示

利用 $(z_s - z_j) + (z_j - z_k) = z_s - z_k$



$\Leftrightarrow$

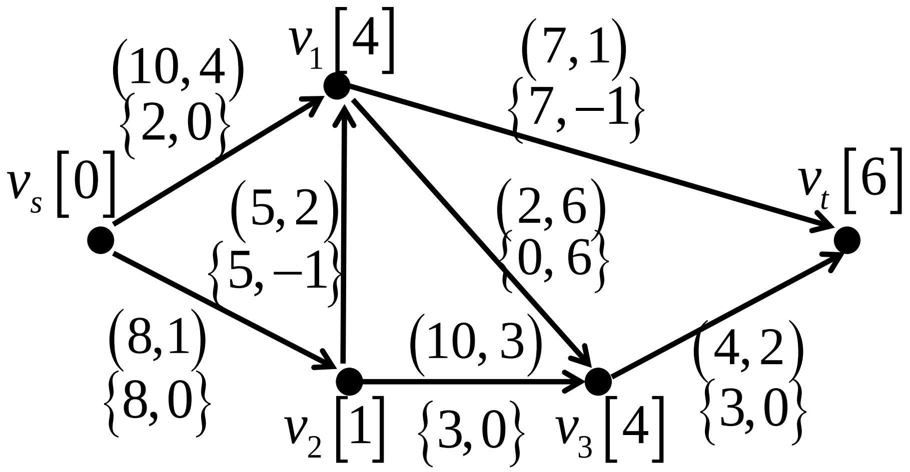


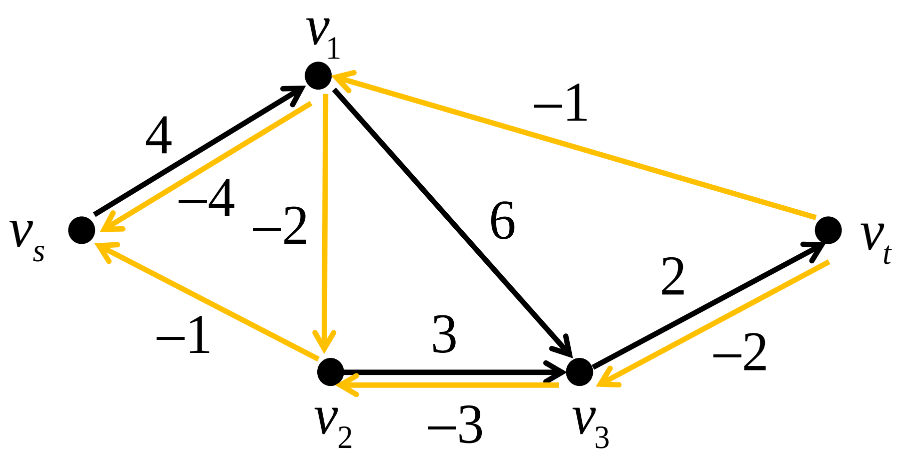
$(z_s - z_j) - (z_k - z_j) = z_s - z_k$

可推得 $$\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+}\left(z_j - z_i\right) - \sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-}\left(z_j - z_i\right) = z_s - z_t$$

因此 $$\min_{\mu} d(\mu) + \sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+}\left(z_j - z_i\right) - \sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-}\left(z_j - z_i\right) \Leftrightarrow \min_{\mu} d(\mu)$$

结论：在构造长度网络时，用费用作为可增边的长度，用费用的负数作为可减边的长度，由此得到费用网络，如下图所示，再求最短路确定可用的可增广链





注意：1）由于不涉及简化成本，所以无需计算对偶变量

2）不能用Dijkstra算法求最短路

求解最小费用流的简单算法（不用计算对偶变量）

1）令 $X=\{x_{ij}\}, x_{ij}=0, \forall(v_i,v_j)\in E,\ \hat{w}=0$

2）如果 $\hat{w}=w$ ，停止，否则求出费用 $d(\mu)$ 最小的可增广链 μ_t（如果没有可增广链，停止）

3）令 $\delta=\min\left\{w-\hat{w}, \min\limits_{(v_i,v_j)\in\mu_t^+} c_{ij}-x_{ij}, \min\limits_{(v_i,v_j)\in\mu_t^-} x_{ij}\right\}$

$$
\begin{aligned}
x'_{ij} &= x_{ij}+\delta & \forall(v_i,v_j)\in\mu_t^+ \\
x'_{ij} &= x_{ij}-\delta & \forall(v_i,v_j)\in\mu_t^- \\
x'_{ij} &= x_{ij} & \forall(v_i,v_j)\in E\setminus\left(\mu_t^+\cup\mu_t^-\right)
\end{aligned}
$$

4）用 X' 替换 X ，$\hat{w}+\delta$ 替换 $\hat{w}$ ，回到 2）

该算法每步得到的流量和理论算法相同，故可得最优解

要点：运输问题特点

例：某种物品有 m 个产地，记为 $A_1, A_2, \cdots, A_m$，各产地产量分别是 $a_1, a_2, \cdots, a_m$；有 n 个销地 $B_1, B_2, \cdots, B_n$，各销地销量分别是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$；假定从产地 A_i 向销地 B_j 运输单位物品运价是 c_{ij}；问怎样调运这些物品能使总费用最小？

销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}	a_2
$\vdots$					$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}	a_m
销量	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

数学规划模型

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \forall 1 \le i \le m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \forall 1 \le j \le n$$

$$x_{ij} \ge 0, \ \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

假定 $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = Q$ （产销平衡运输问题）

如下例

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	8 x_{11}	6 x_{12}	10 x_{13}	9 x_{14}	35
A_2	9 x_{21}	12 x_{22}	13 x_{23}	7 x_{24}	50
A_3	14 x_{31}	9 x_{32}	16 x_{33}	5 x_{34}	40
销量	45	20	30	30	

数学规划模型为

$$\min \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} = 8x_{11}+6x_{12}+10x_{13}+9x_{14}+9x_{21}+12x_{22}+13x_{23}$$

$$+7x_{24}+14x_{31}+9x_{32}+16x_{33}+5x_{34}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=35 \\ & x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=50 \\ & x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=40 \\ & x_{11}+x_{21}+x_{31}=45 \\ & x_{12}+x_{22}+x_{32}=20 \\ & x_{13}+x_{23}+x_{33}=30 \\ & x_{14}+x_{24}+x_{34}=30 \qquad x_{ij}\ge 0,\ \forall 1\le i\le 3, 1\le j\le 4 \end{aligned}$$

运输问题 $\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij}$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = 1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij} \ge 0, \ i = 1,2,\cdots,m, \ j = 1,2,\cdots,n$$

是一种特殊的最小费用流问题

$$\min \sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j\in V_i^+} x_{ij} - \sum_{j\in V_i^-} x_{ji} = w_i, \ \forall v_i \in V$$

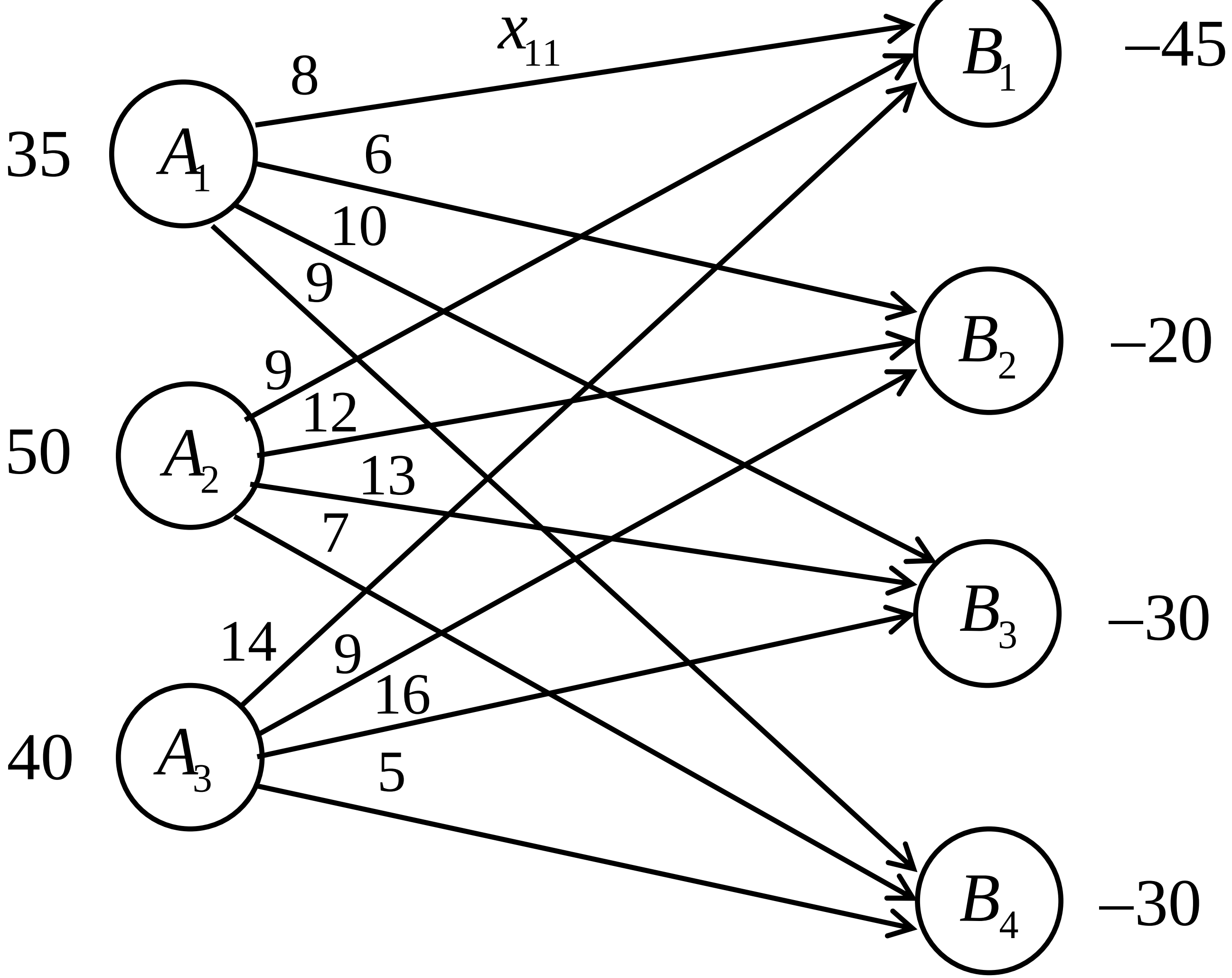
$$0 \le x_{ij} \le c_{ij}, \ \forall (v_i,v_j) \in E$$

要点：用单纯形法求运输问题

$$\min \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 & 9 & 9 & 12 & 13 & 7 & 14 & 9 & 16 & 5 \end{pmatrix}}_{C} X$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & & 1 & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & 1
\end{pmatrix}}_{A}
\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \\ x_{34} \end{pmatrix}
= \underbrace{\begin{pmatrix} 35 \\ 50 \\ 40 \\ 45 \\ 20 \\ 30 \\ 30 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

运输网络



$$p_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

如何在图上确定基本可行解

⇓

如何在图上改进基本可行解

如何计算选定进基变量后的基本可行解

⇓

如何选择进基变量使目标函数改进

⇓

如何判断已经找到最优的基本可行解

要点：运输问题的基本可行解

对于产销平衡运输问题的等式约束

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ \ i = 1,2,\cdots,m;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ \ j = 1,2,\cdots,n$$

令 $\hat{x}_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{Q}, \forall i, j$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \hat{x}_{ij} &= \frac{a_i}{Q}\sum_{j=1}^{n} b_j = a_i, \forall i \\ \sum_{i=1}^{m} \hat{x}_{ij} &= \frac{b_j}{Q}\sum_{i=1}^{m} a_i = b_j, \forall j \end{aligned}$$

是该问题的可行解，因此一定有基本可行解，且一定存在有限的最优目标值。

运输问题的数学规划模型

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \forall 1 \le i \le m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \forall 1 \le j \le n$$

$$x_{ij} \ge 0, \ \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

产销平衡： $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = Q$

在等式约束中任意删除一个，例如第一个，假设 $\bar{x}_{ij},\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n$ 满足其余的方程，即

$$\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{ij}=a_i,\ \ i=2,\cdots,m\,;\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_{ij}=b_j,\ \ j=1,2,\cdots,n$$

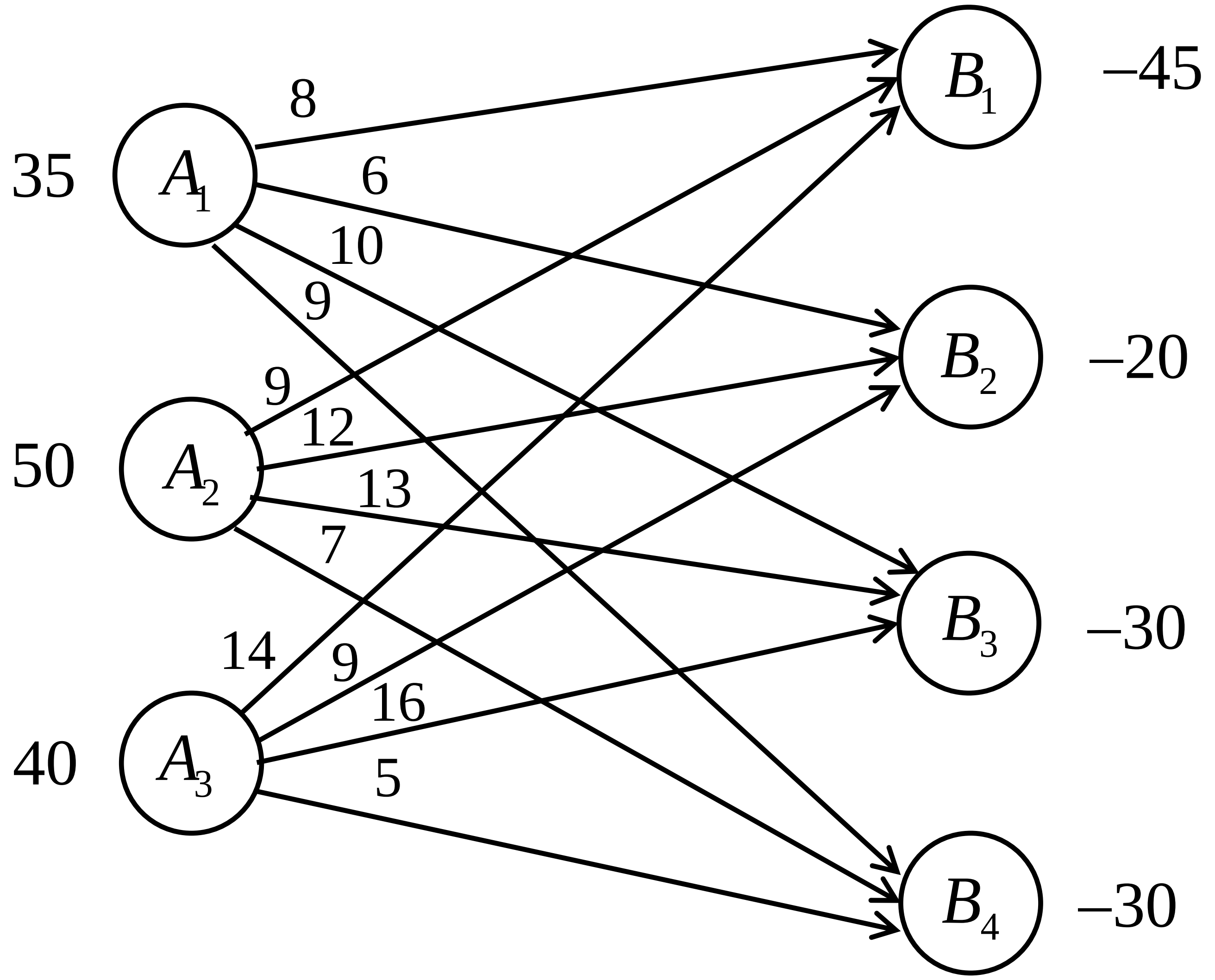
则 $$\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{1j}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{ij}-\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\bar{x}_{ij}-\sum_{i=2}^{m}a_i$$

$$=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=2}^{m}a_i=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{i=2}^{m}a_i=a_1$$

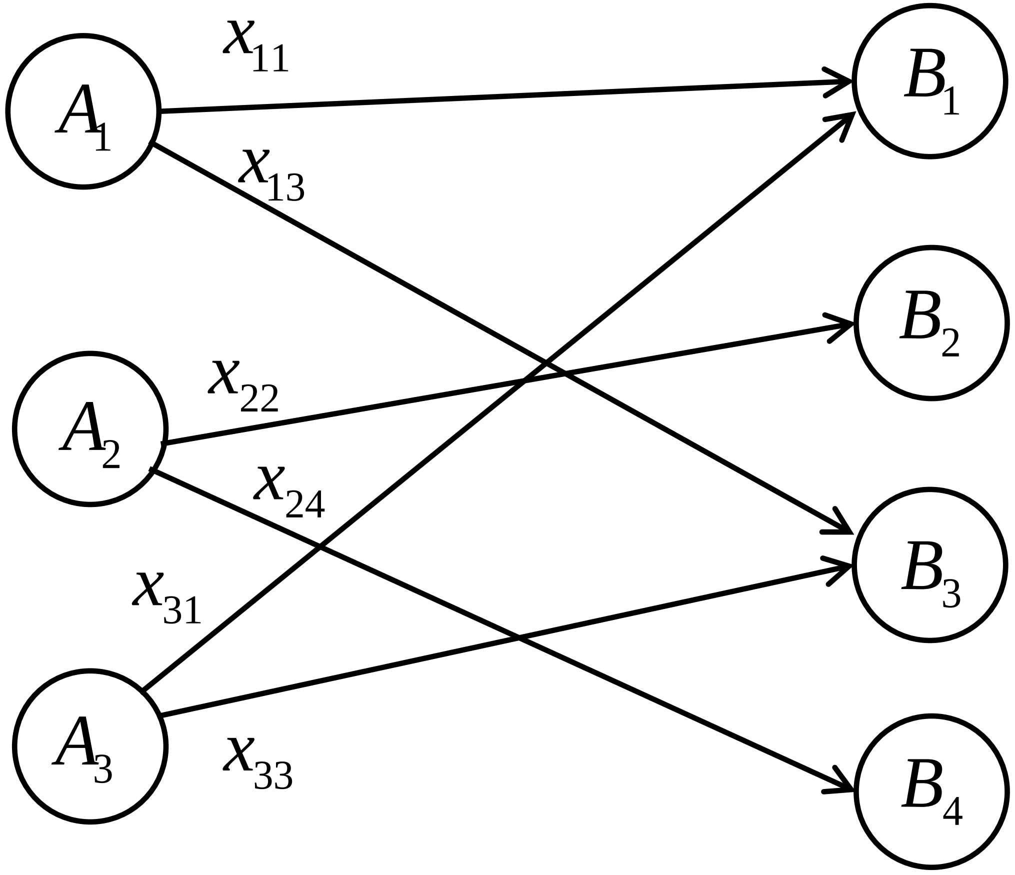
被删除的方程自动满足，所以只要考虑 $m+n-1$ 个约束，即基本可行解只有 $m+n-1$ 个基变量

要点：如何在图上确定基本可行解

如何判断一组变量的系数向量是否线性相关?



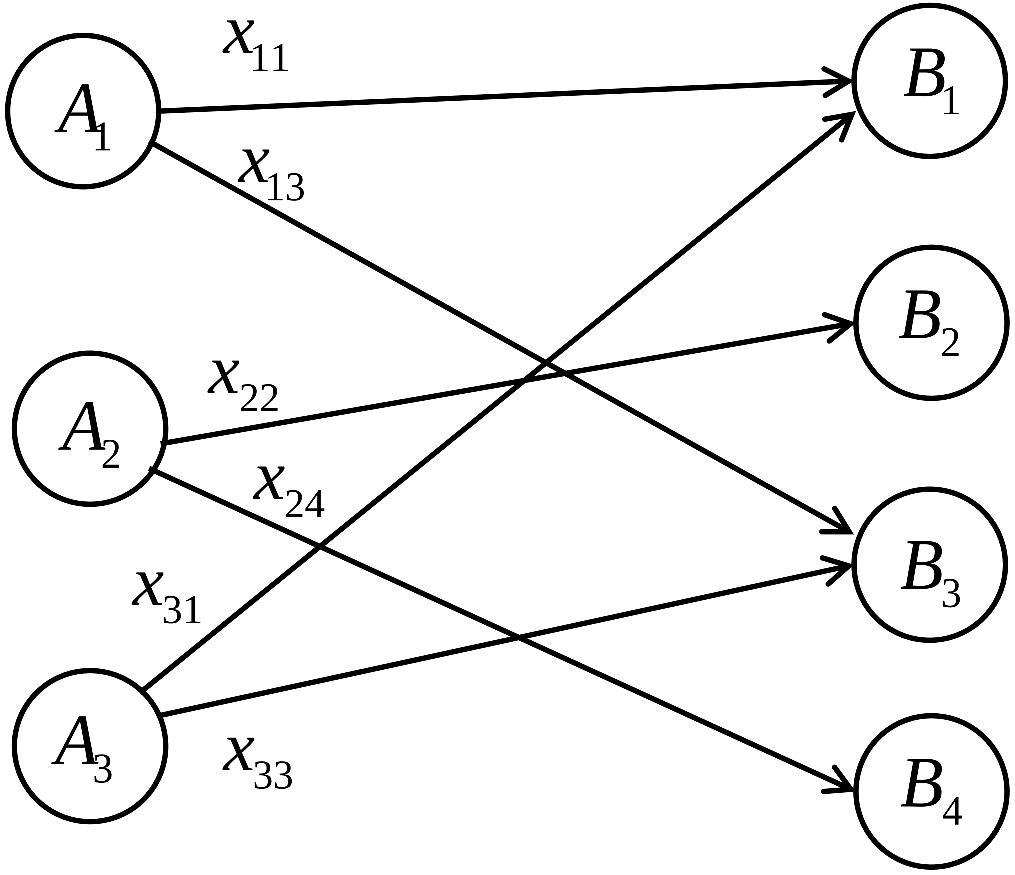
如何判断一组变量的系数向量是否线性相关？



系数向量是否线性相关等价于下述方程有无零解

$$P_{11}\alpha_{11}+P_{13}\alpha_{13}+P_{22}\alpha_{22}+P_{24}\alpha_{24}+P_{31}\alpha_{31}+P_{33}\alpha_{33}=0$$

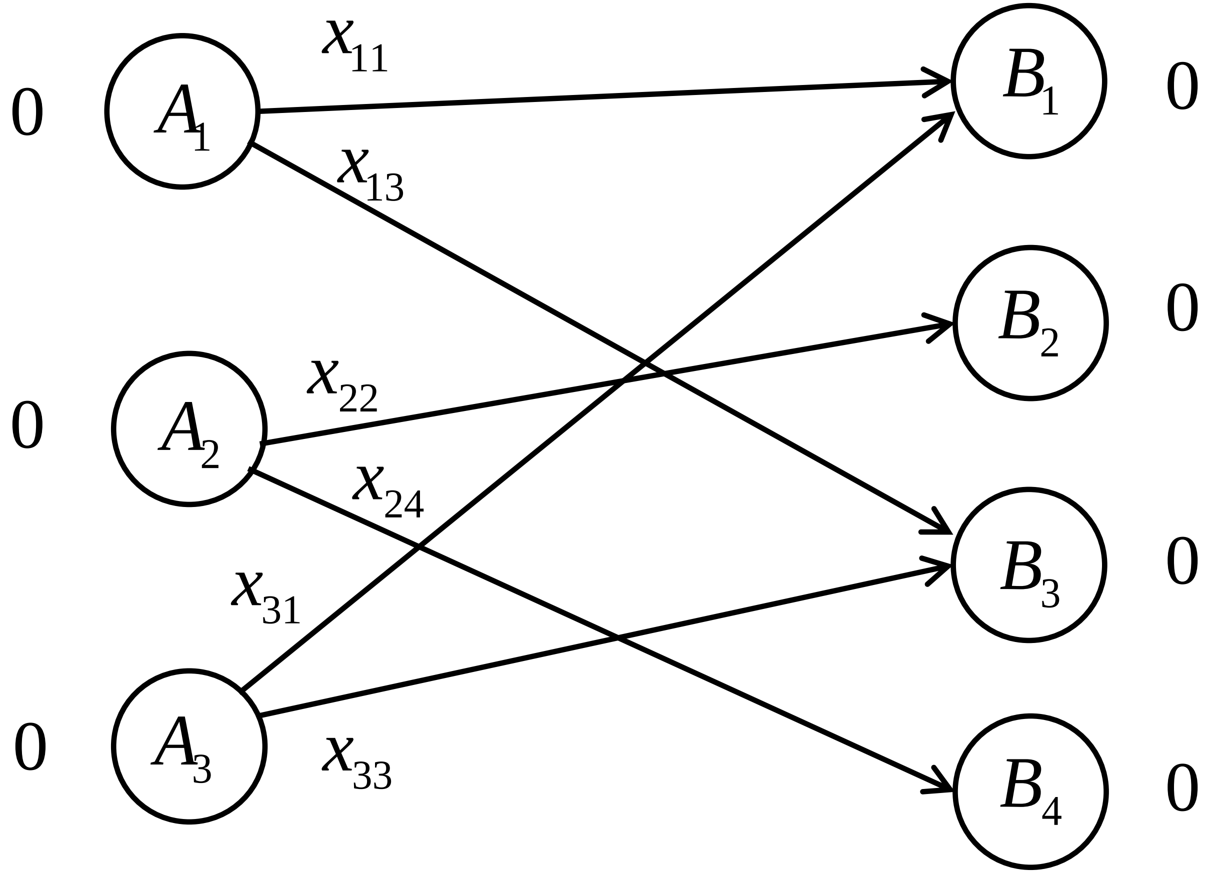
如何判断一组变量的系数向量是否线性相关？



系数向量是否线性相关等价于下述方程有无零解

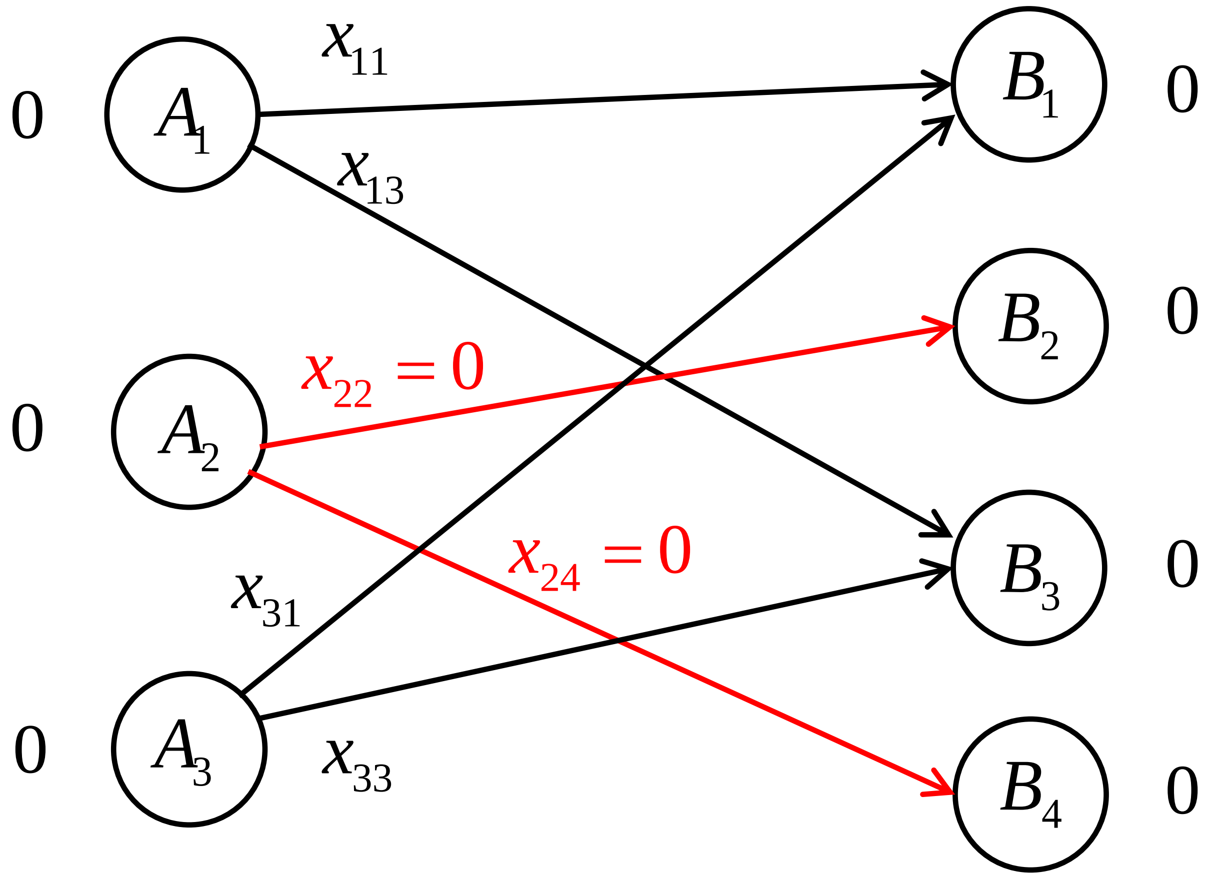
$$P_{11}x_{11} + P_{13}x_{13} + P_{22}x_{22} + P_{24}x_{24} + P_{31}x_{31} + P_{33}x_{33} = 0$$

如何判断一组变量的系数向量是否线性相关？



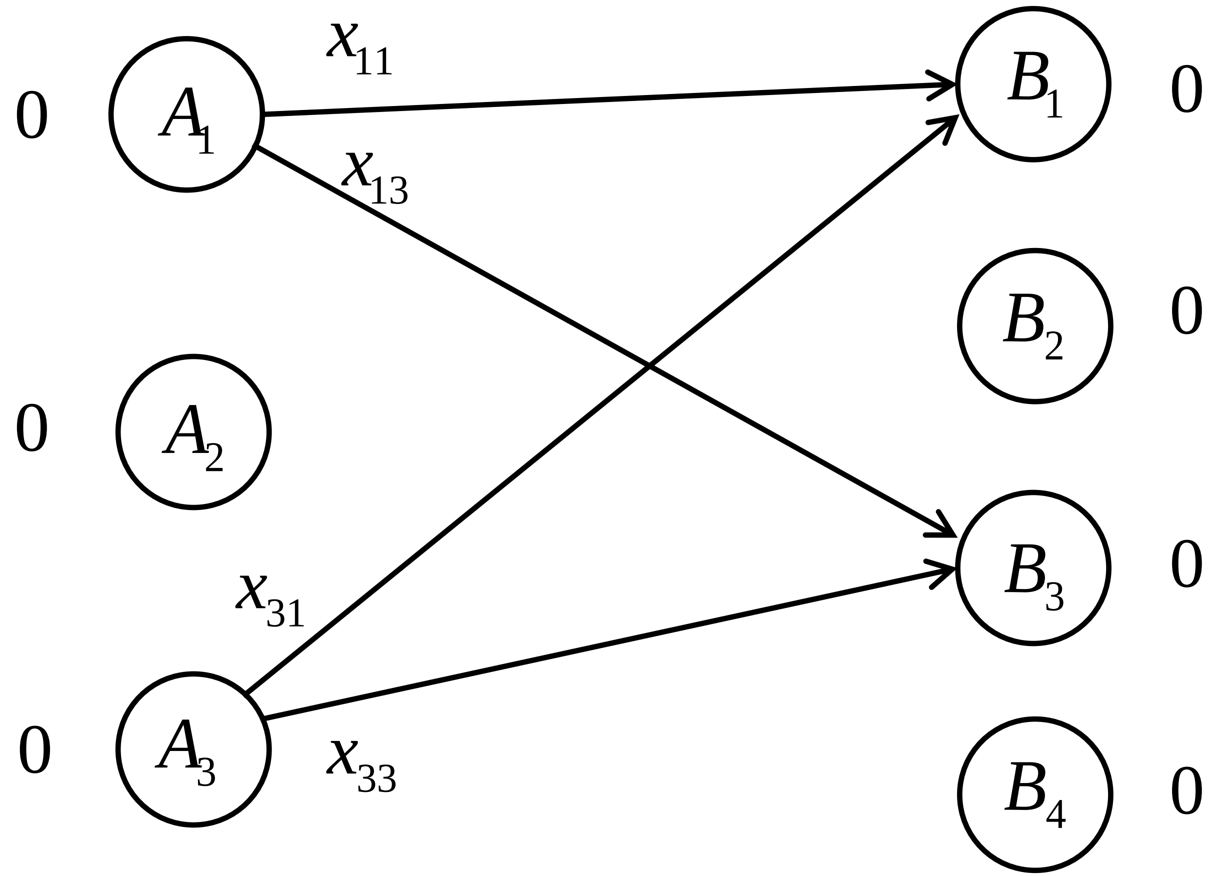
系数向量是否线性相关等价于**下述方程有无零解**

$$P_{11}x_{11} + P_{13}x_{13} + P_{22}x_{22} + P_{24}x_{24} + P_{31}x_{31} + P_{33}x_{33} = 0$$



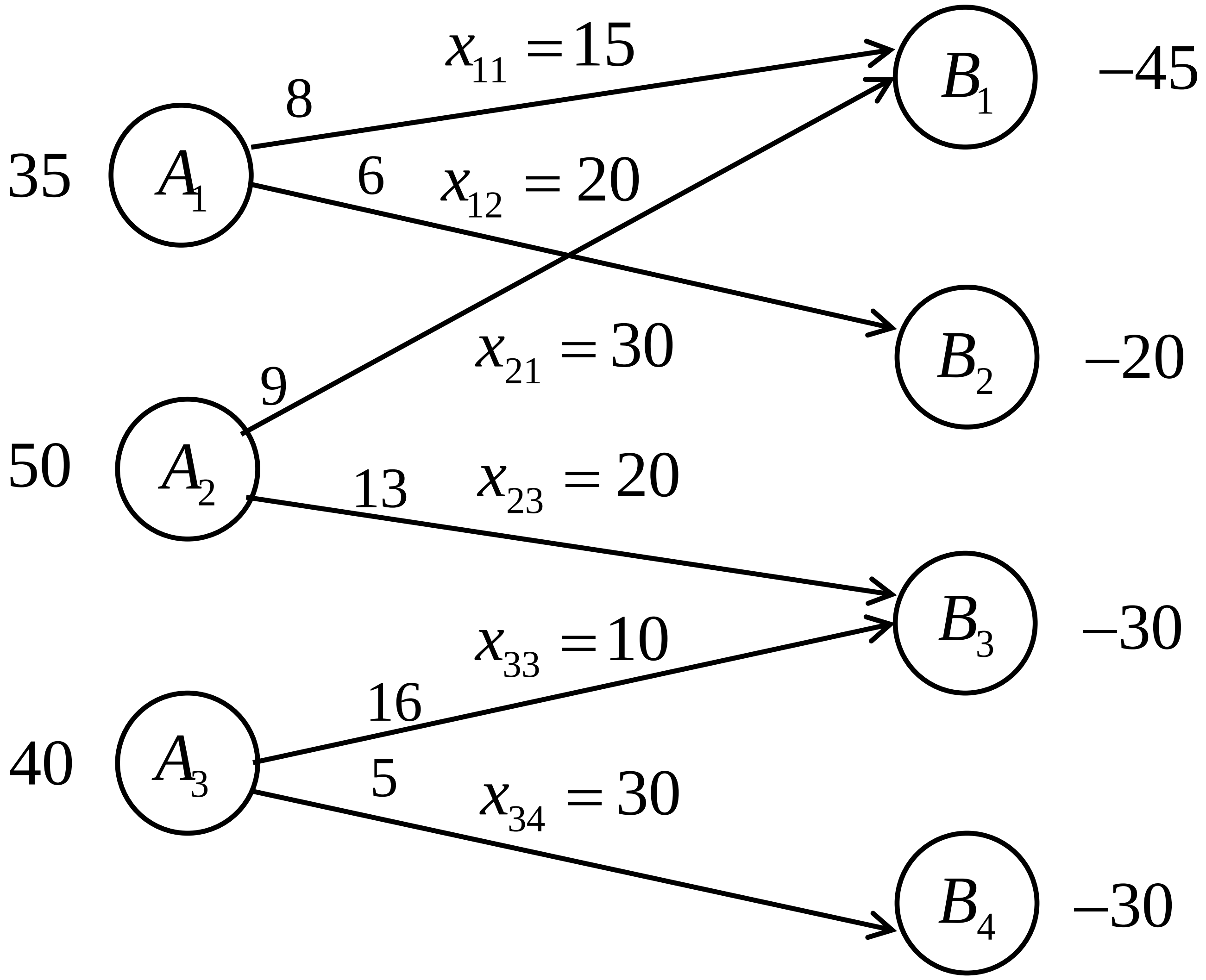
显然去除 p_{22} 和 p_{24} 不影响相关性判别：

$$P_{11}x_{11}+P_{13}x_{13}+P_{31}x_{31}+P_{33}x_{33}=0$$



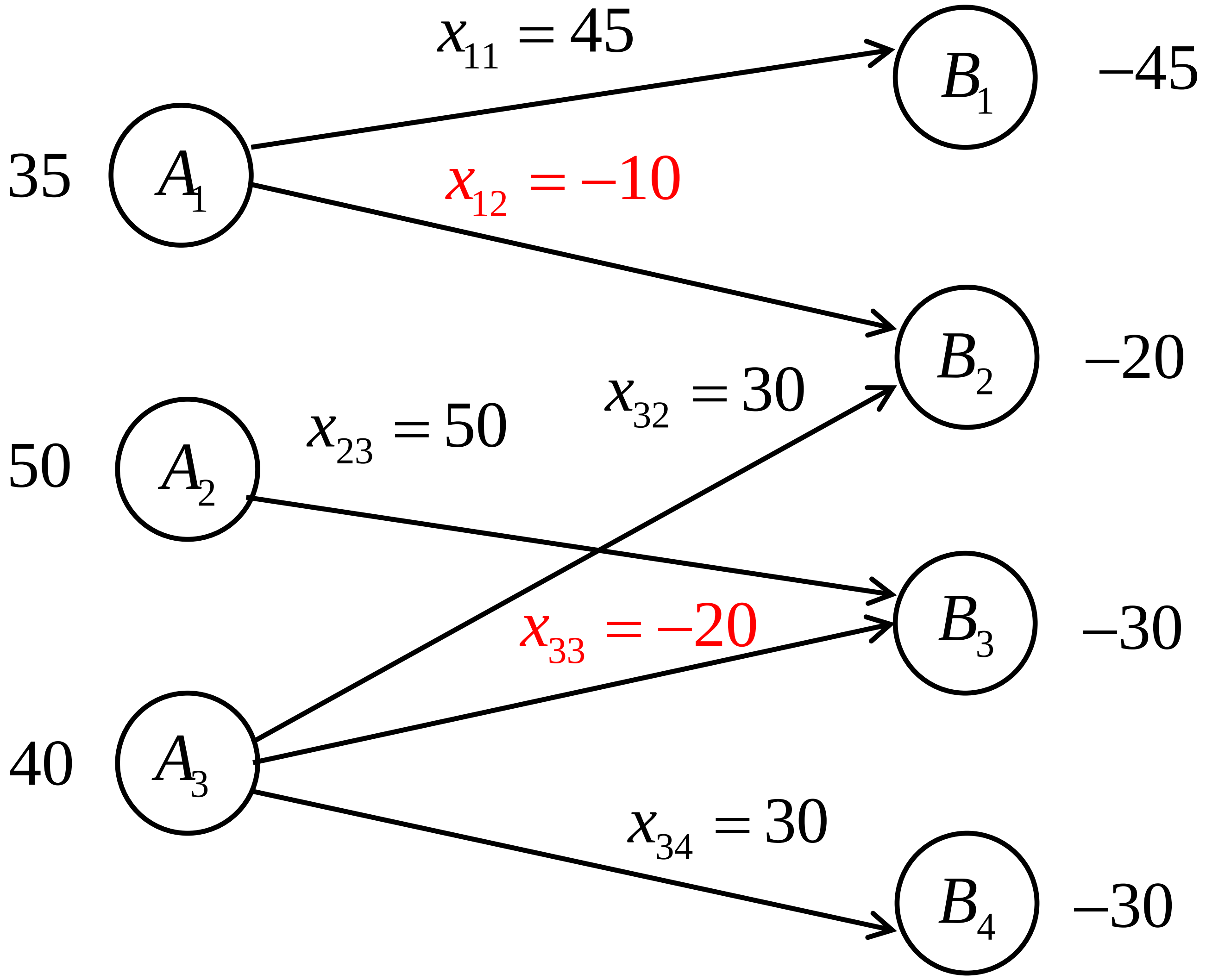
任意选定一个变量，如 x_{11}，由图可得 $x_{13}=-x_{11}$ $x_{31}=-x_{11}$，最后可得 $x_{33}=-x_{31}=x_{11}$，图中的边形成“环”，$p_{11},p_{13},p_{31},p_{33}$ 线性相关。

基本可行解对应于网络中的一个支撑树



要点：图的支撑树与基本可行解的关系

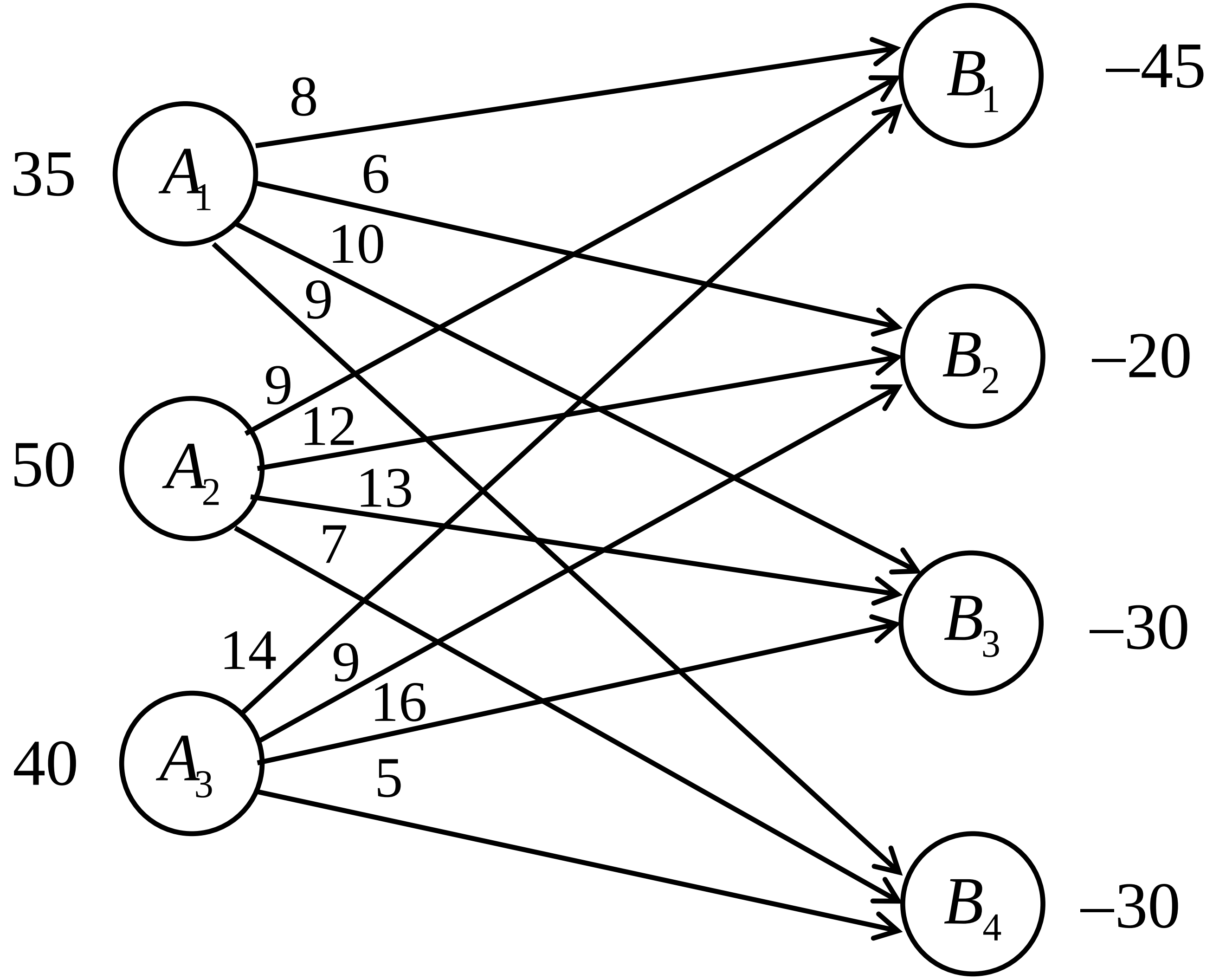
支撑树与基本可行解之间的关系

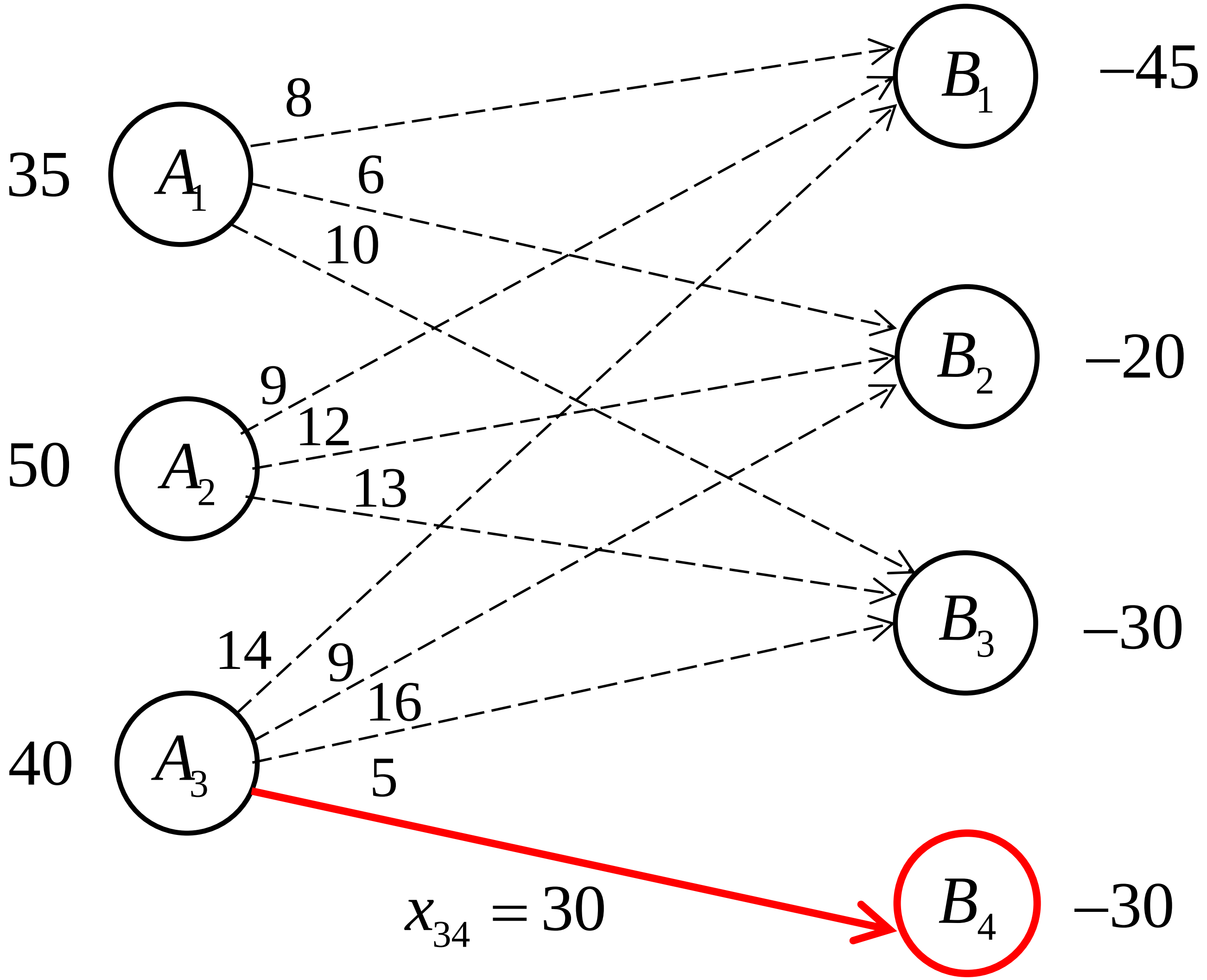


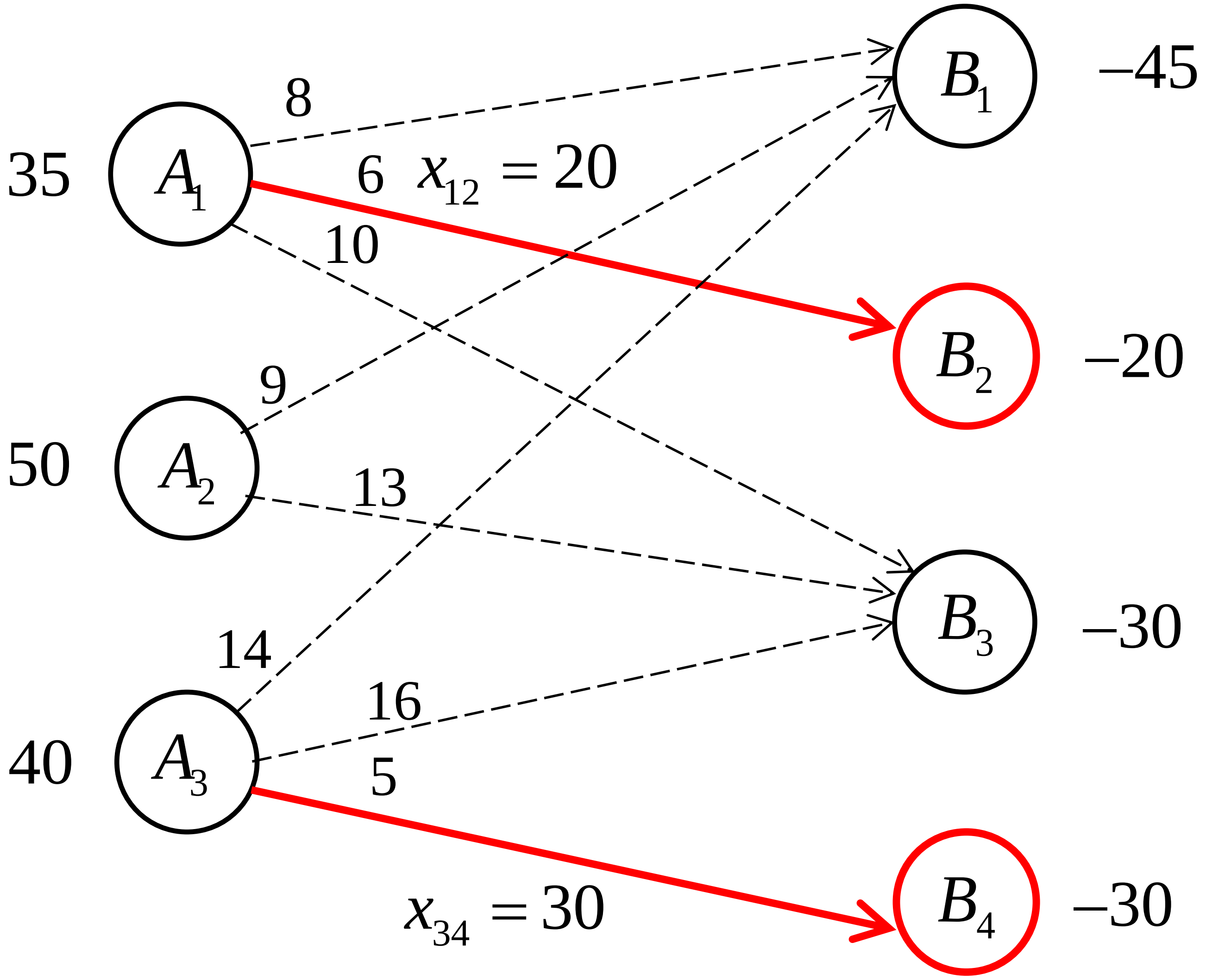
要点：产生基本可行解的最小元素法

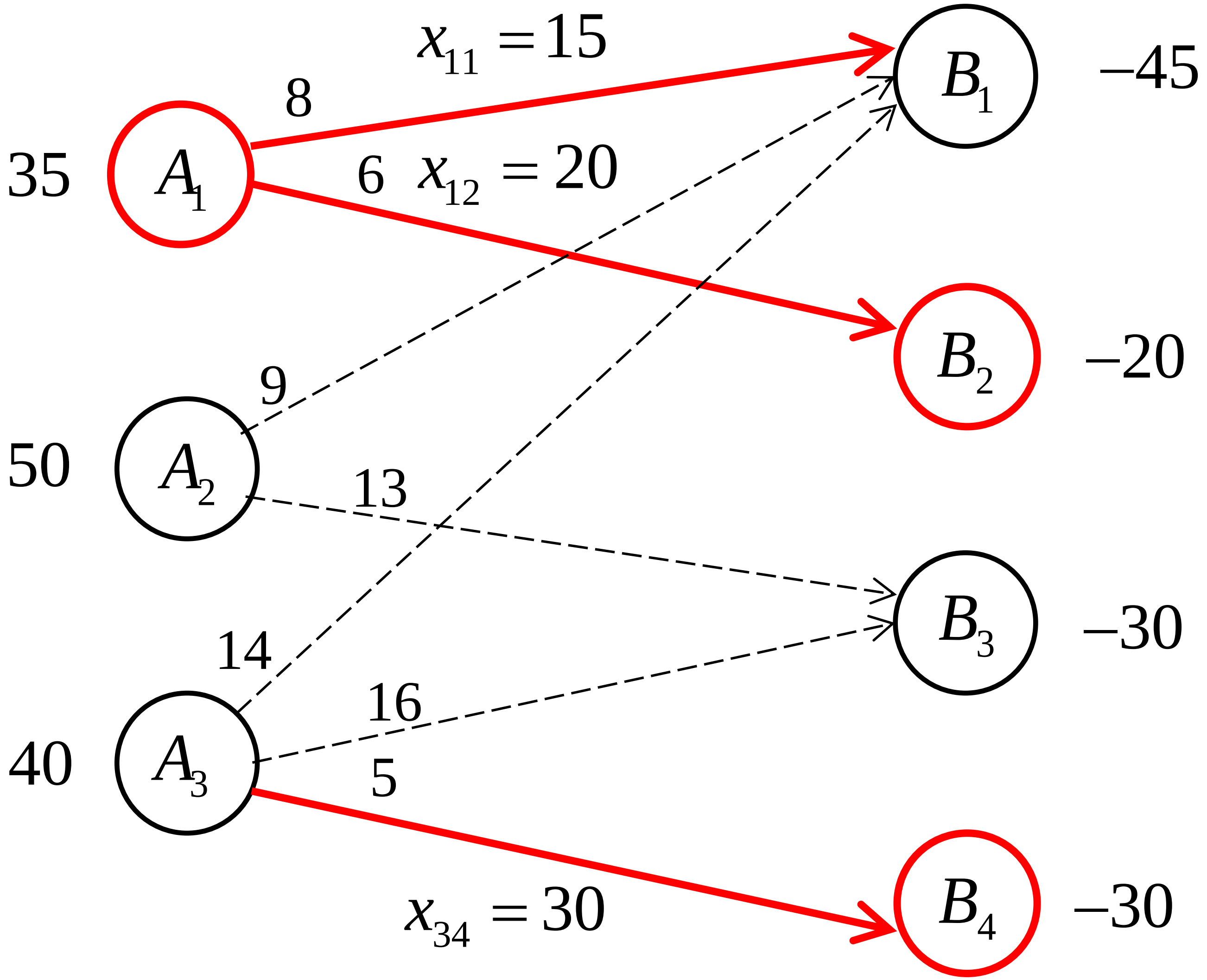
产生基本可行解的最小元素法

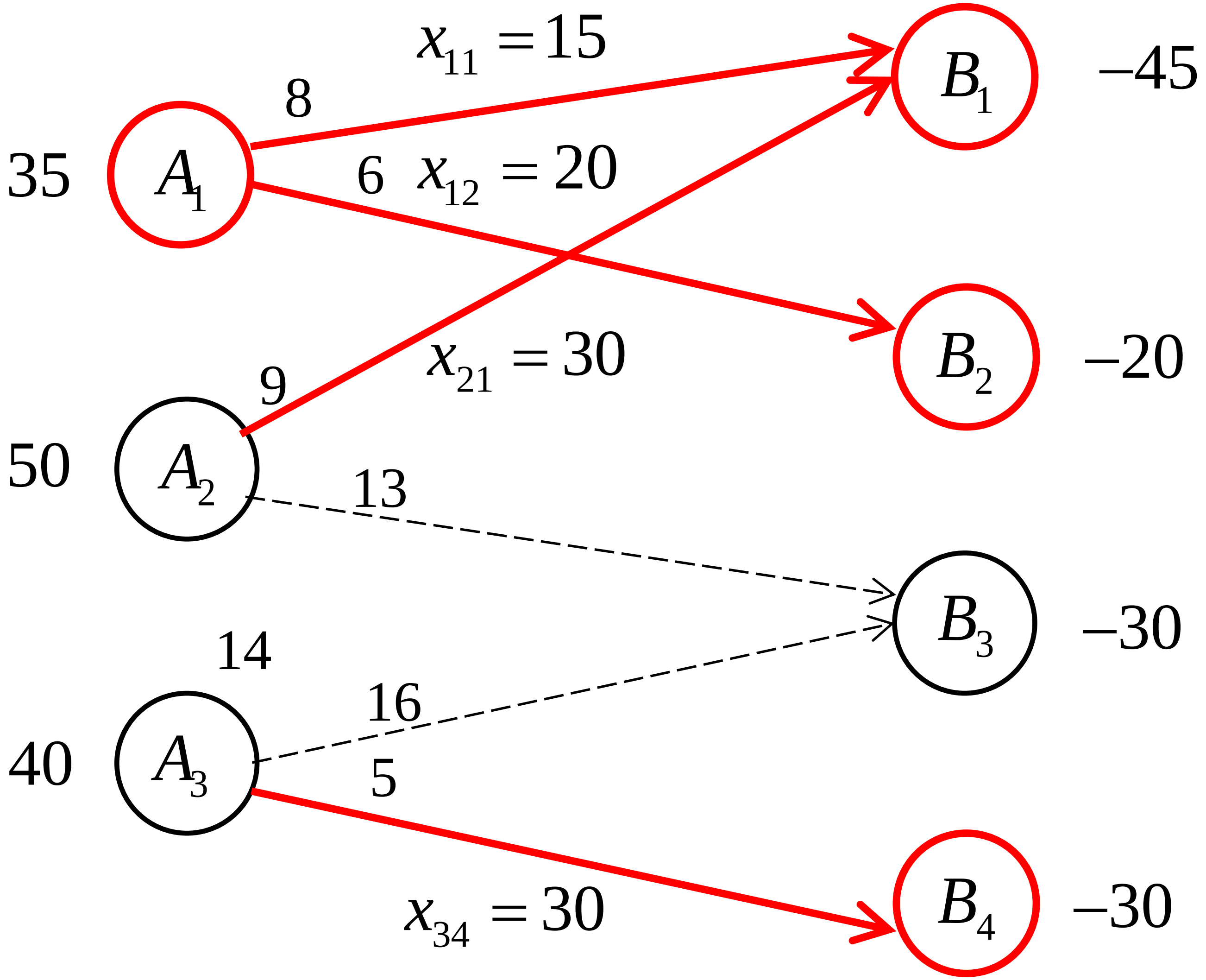
基本思想：优先安排单位成本最小的运输方式



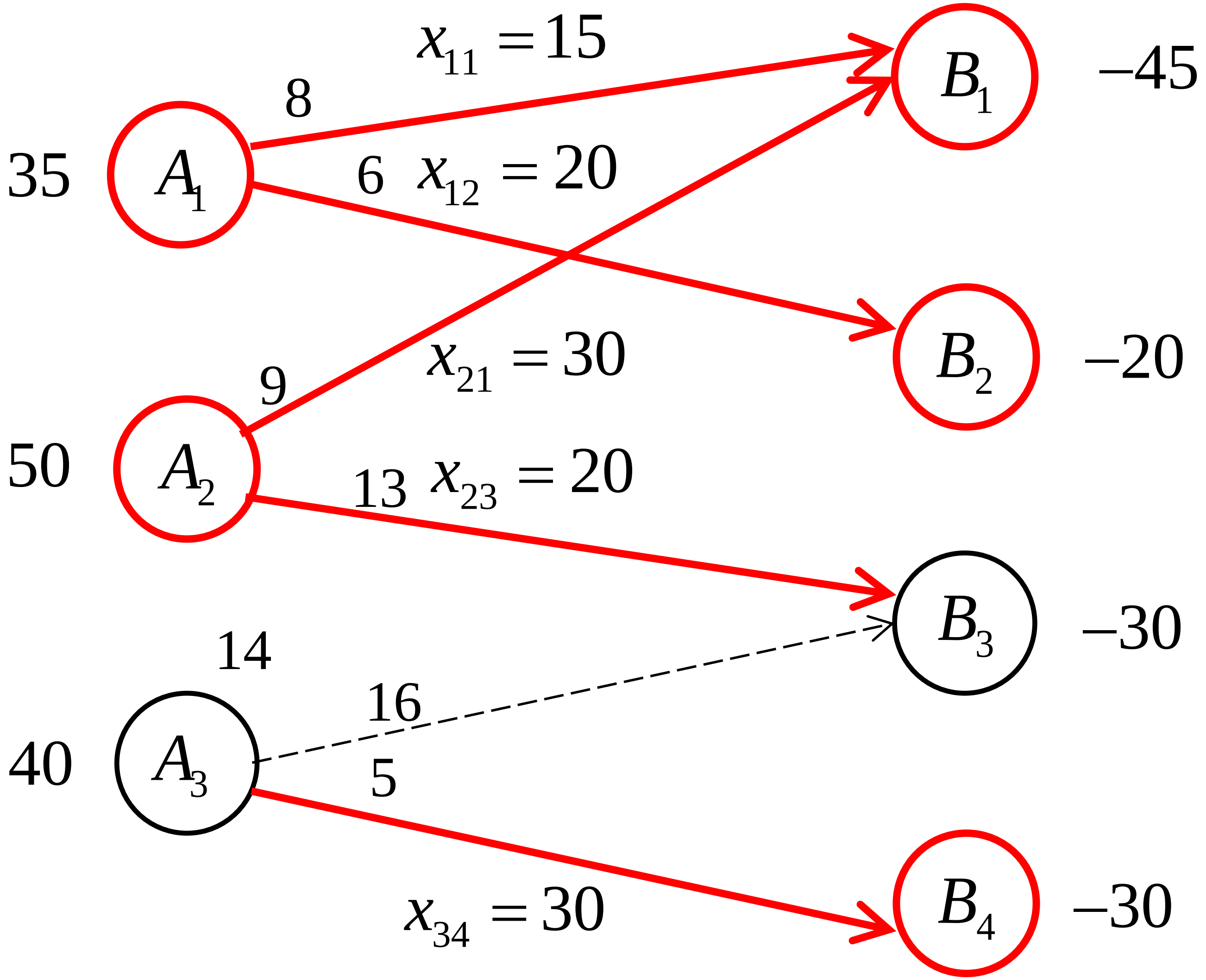

35
50
40
A_1
A_2
A_3
8
6
10
9
12
13
14
9
16
5
B_1
B_2
B_3
B_4
–45
–20
–30
–30
$x_{34}=30$


35
50
40
A_1
A_2
A_3
8
6
$x_{12}=20$
10
9
13
14
16
5
$x_{34}=30$
B_1
B_2
B_3
B_4
–45
–20
–30
–30

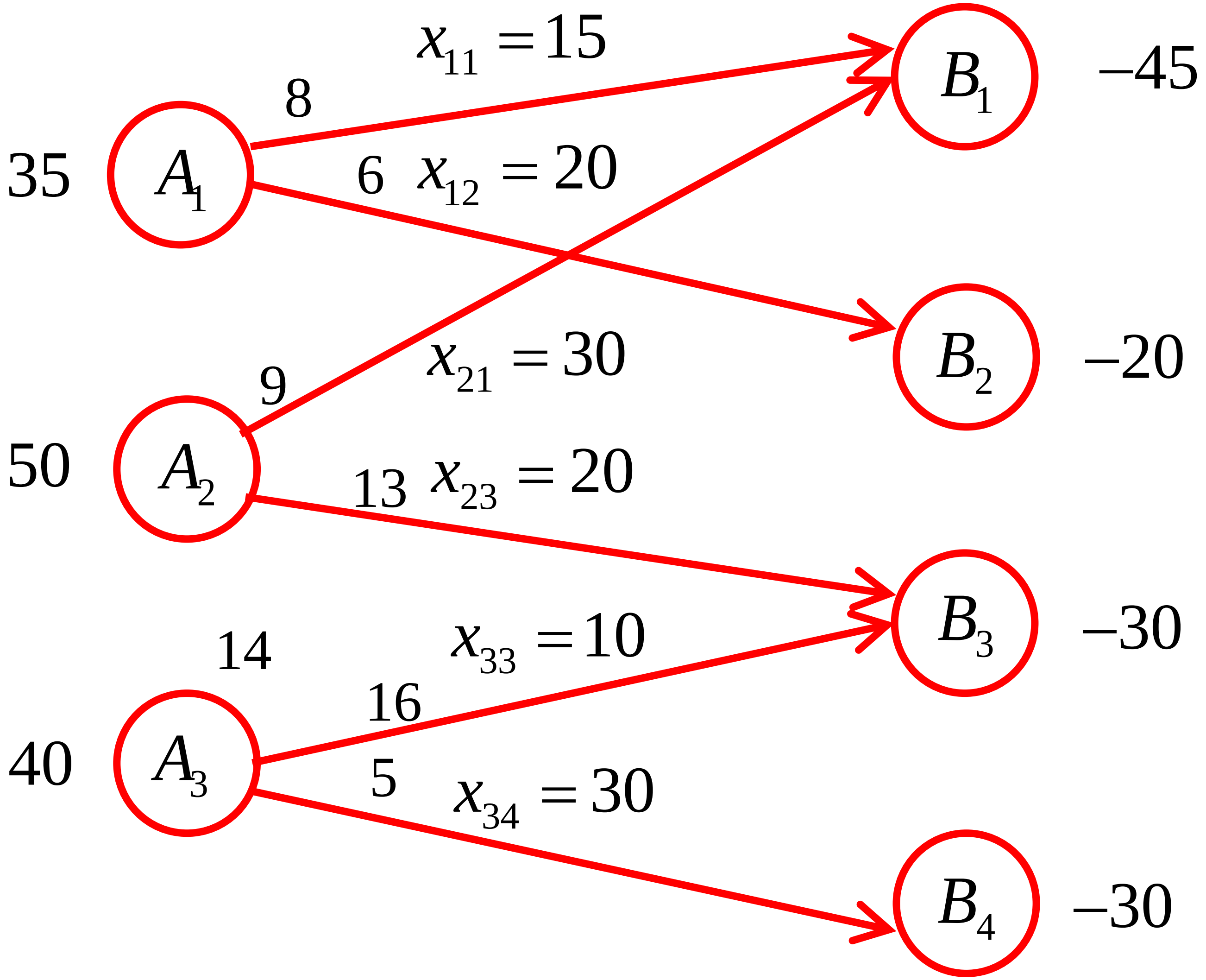

$x_{11} = 15$
8
35
A_1
6
$x_{12} = 20$
B_1
−45
B_2
−20
9
50
A_2
13
B_3
−30
14
16
40
A_3
5
$x_{34} = 30$
B_4
−30



$x_{11} = 15$
8
B_1
-45
35
A_1
6
$x_{12} = 20$
B_2
-20
$x_{21} = 30$
9
50
A_2
13
B_3
-30
14
16
40
A_3
5
$x_{34} = 30$
B_4
-30



$x_{11}=15$
8
B_1
-45
35
A_1
6
$x_{12}=20$
B_2
-20
9
$x_{21}=30$
50
A_2
13
$x_{23}=20$
B_3
-30
14
16
40
A_3
5
B_4
-30
$x_{34}=30$


35
50
40
A_1
A_2
A_3
B_1
B_2
B_3
B_4
−45
−20
−30
−30
8
6
9
13
14
16
5
$x_{11}=15$
$x_{12}=20$
$x_{21}=30$
$x_{23}=20$
$x_{33}=10$
$x_{34}=30$

要点：通过对偶变量计算检验数

运输问题原问题 $\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\cdots,m, \quad j=1,2,\cdots,n$$

对偶问题 $\max \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$

$$\text{s.t.} \quad u_i + v_j \leq c_{ij} \qquad \Rightarrow c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$$

$$i=1,2,\cdots,m \quad j=1,2,\cdots,n$$

产地 \ 销地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	8 x_{11}	6 x_{12}	10 x_{13}	9 x_{14}	35
A_2	9 x_{21}	12 x_{22}	13 x_{23}	7 x_{24}	50
A_3	14 x_{31}	9 x_{32}	16 x_{33}	5 x_{34}	40
销量	45	20	30	30	

检验数 $\sigma_{ij} = c_{ij} - C_{\overline{B}}^T \overline{B}^{-1} \overline{P}_{ij}$ ， $\forall i, j$ 则 $C_{\overline{B}}^T = \overline{Y}^T \overline{B}$，即

$$\left(c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{23}, c_{33}, c_{34}\right) = \overline{Y}^T \left(\overline{p}_{11}, \overline{p}_{12}, \overline{p}_{21}, \overline{p}_{23}, \overline{p}_{33}, \overline{p}_{34}\right)$$

其中 $\overline{P}_{ij}$ 表示 P_{ij} 删去相同的一行后的剩余向量

将 P_{ij} 被删除行对应的位置在 $\bar{Y}$ 中插入0得到 Y

方程 $\left(c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{23}, c_{33}, c_{34}\right)=\bar{Y}^{T}\left(\bar{p}_{11}, \bar{p}_{12}, \bar{p}_{21}, \bar{p}_{23}, \bar{p}_{33}, \bar{p}_{34}\right)$

等价于 $\left(c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{23}, c_{33}, c_{34}\right)=Y^{T}\left(p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{23}, p_{33}, p_{34}\right)$

由于原约束可以删除任意一行，可以在 $\bar{Y}$ 的任意

位置插入0，我们约定在最后加一个0，记

$$Y^{T}=\left(u_{1}, u_{2}, u_{3}, v_{1}, v_{2}, v_{3}, v_{4}\right)$$

下面说明，上述等式方程等价于

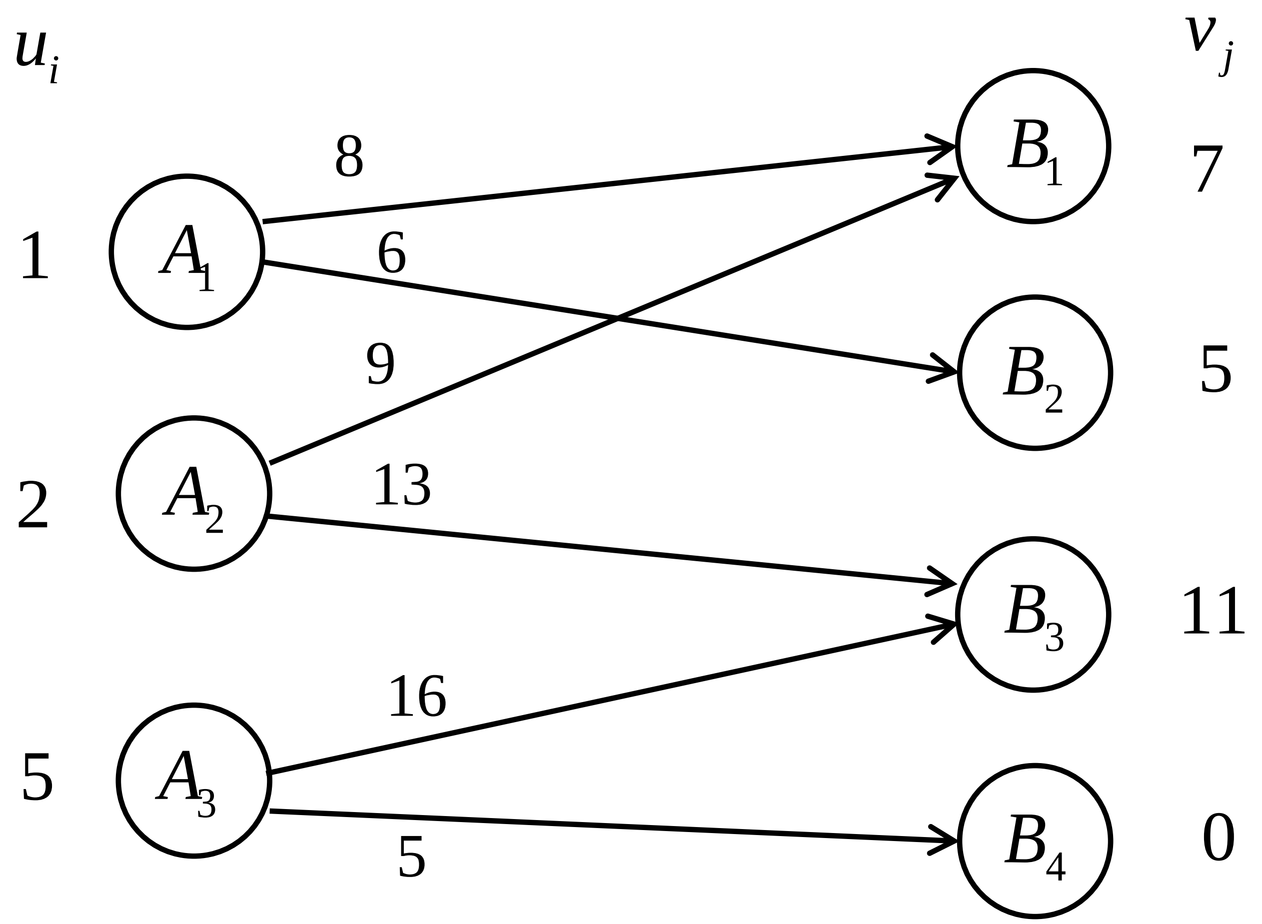
$$\begin{array}{lll} c_{11}=u_{1}+v_{1} & c_{12}=u_{1}+v_{2} & \\ c_{21}=u_{2}+v_{1} & c_{23}=u_{2}+v_{3} & v_{4}=0 \\ c_{33}=u_{3}+v_{3} & c_{34}=u_{3}+v_{4} & \end{array}$$

要点：计算检验数的位势法

解方程组 $c_{11}=u_1+v_1 \quad c_{12}=u_1+v_2$

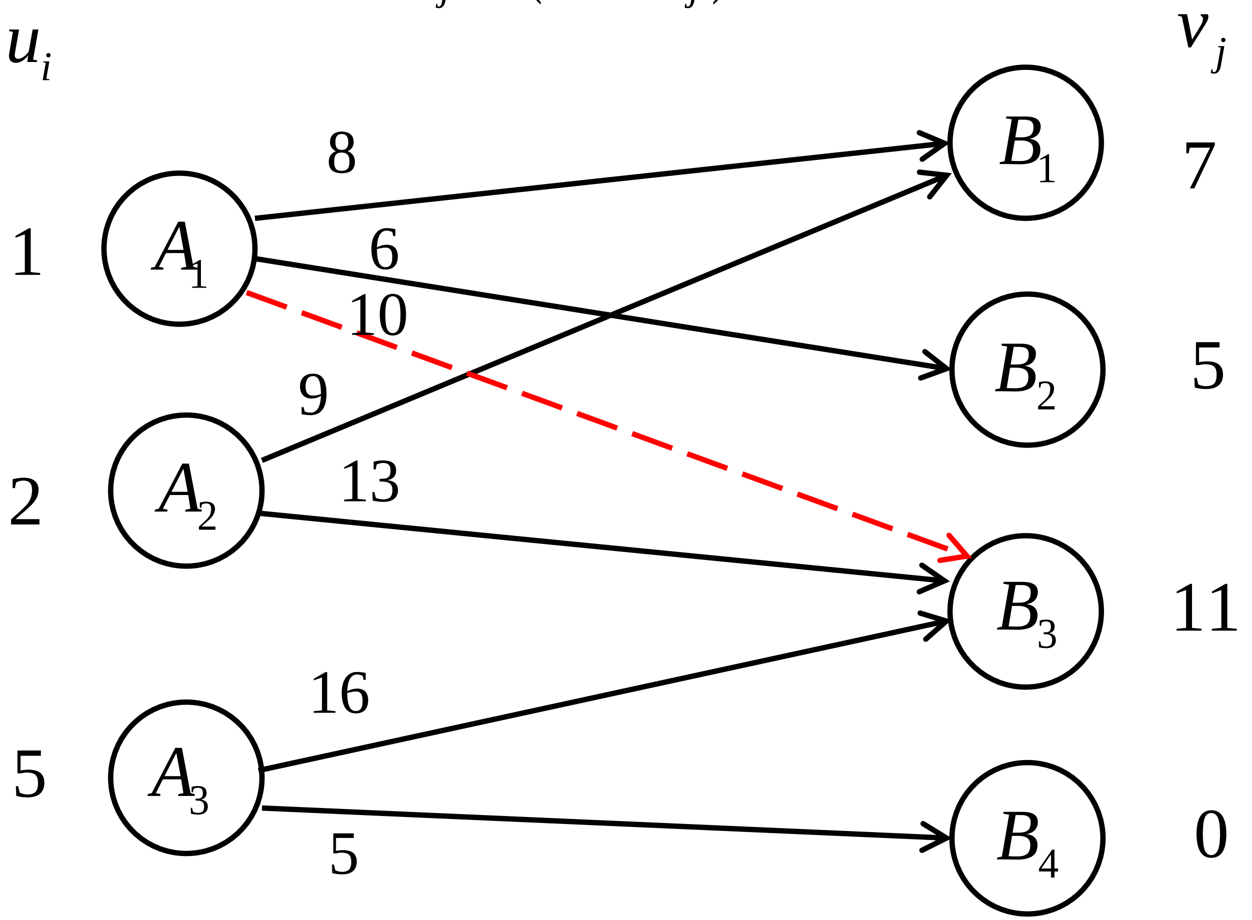
$$c_{21}=u_2+v_1 \quad c_{23}=u_2+v_3 \quad v_4=0$$

$$c_{33}=u_3+v_3 \quad c_{34}=u_3+v_4$$



计算检验数：$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3, v_4) P_{ij}$

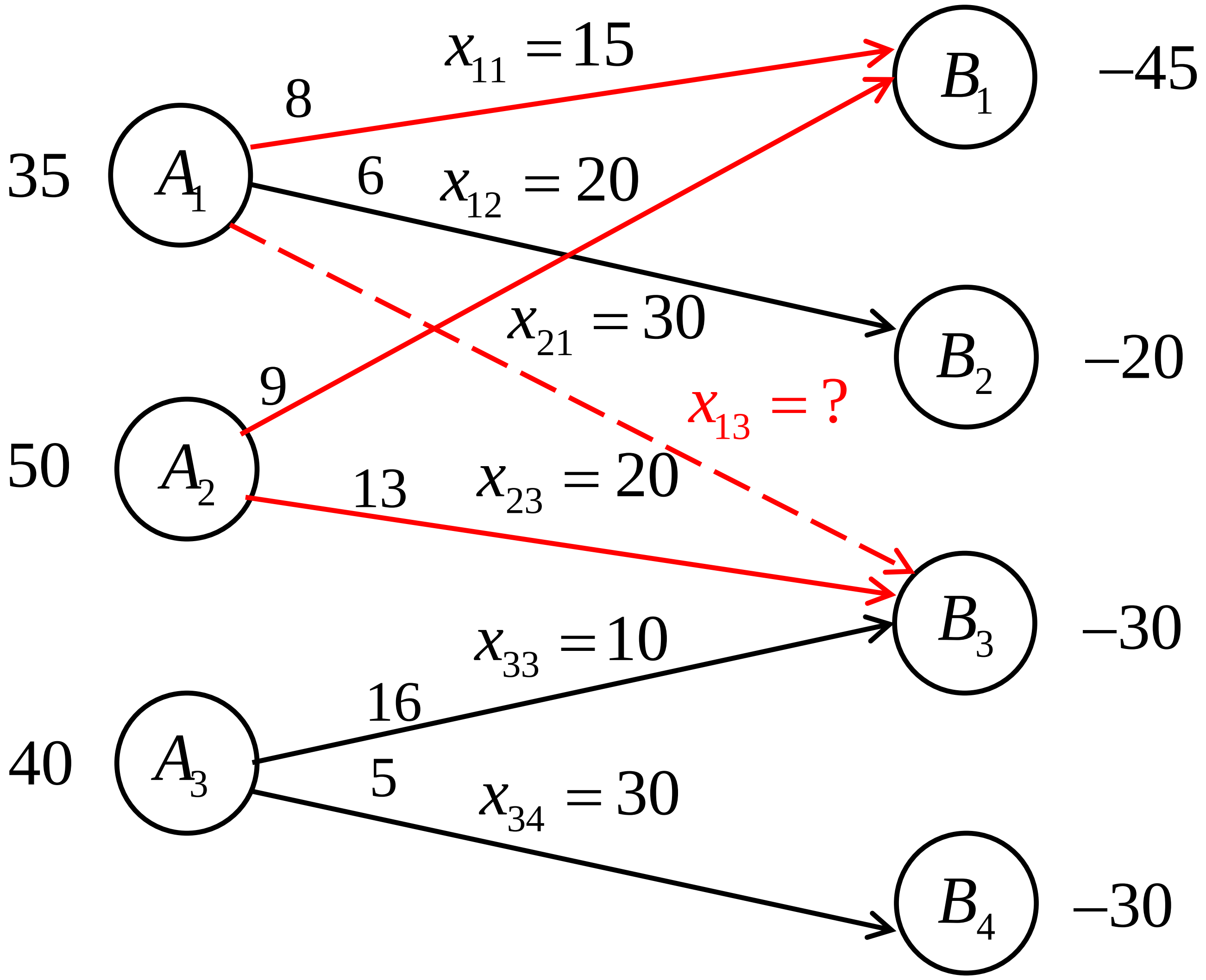
$$= c_{ij} - (u_i + v_j), \quad \forall i, j$$



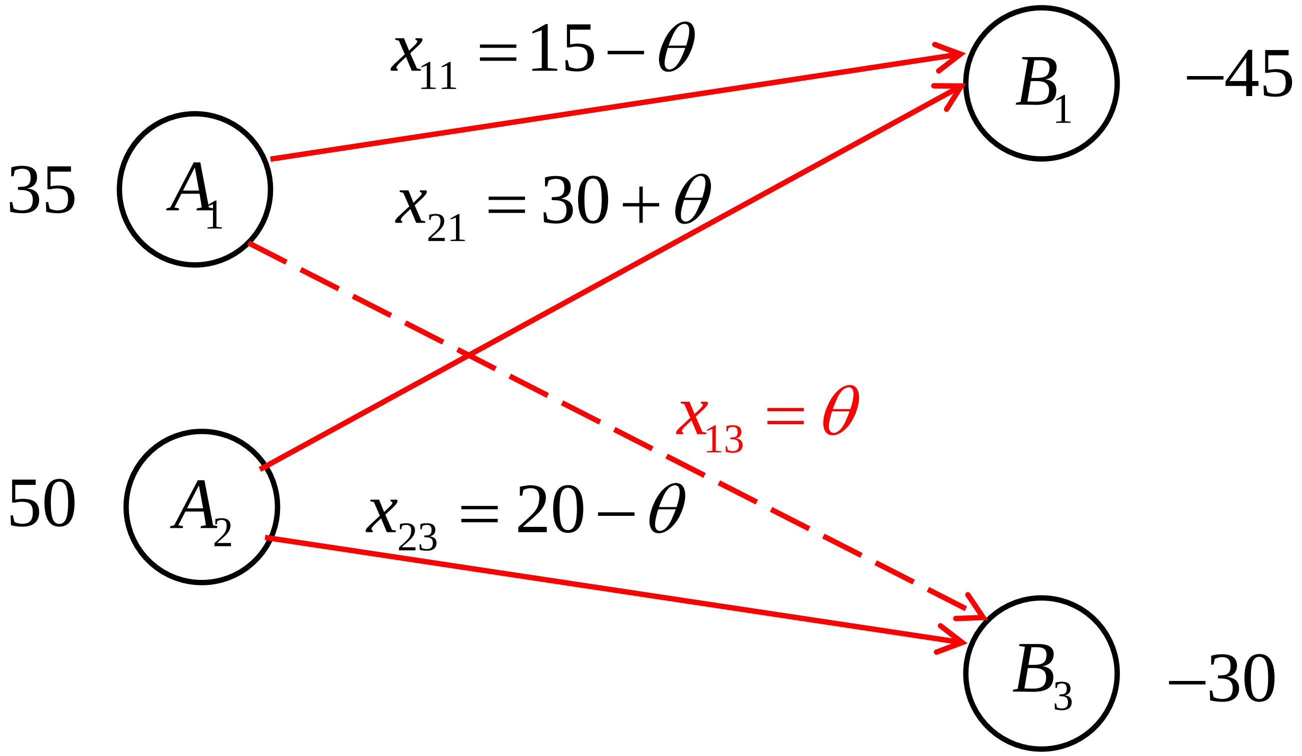
$$\sigma_{13} = 10 - (1+11) = -2$$

要点：更新支撑树改进基本可行解

基本可行解的改进即为更新支撑树

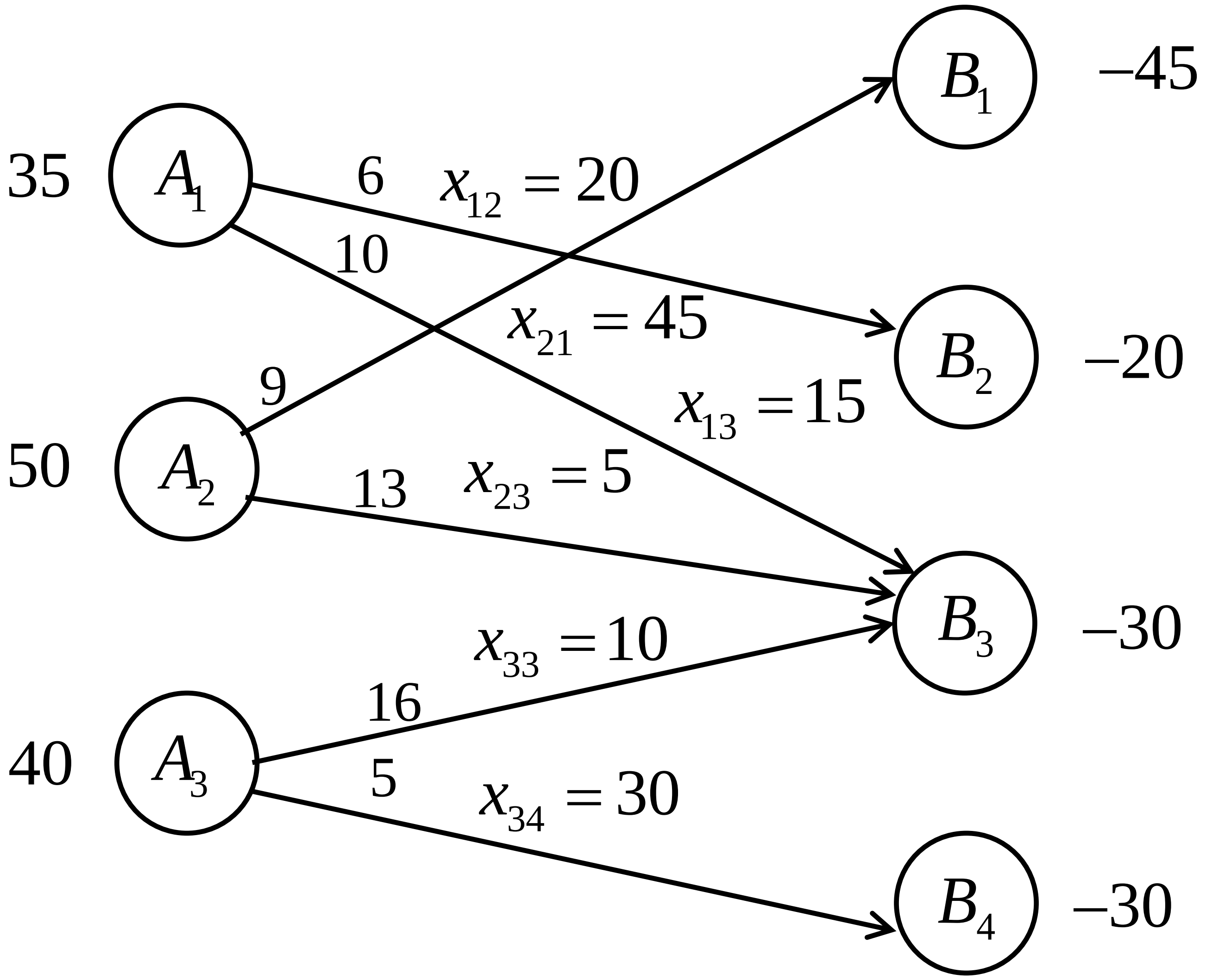


基本可行解的改进即为更新支撑树

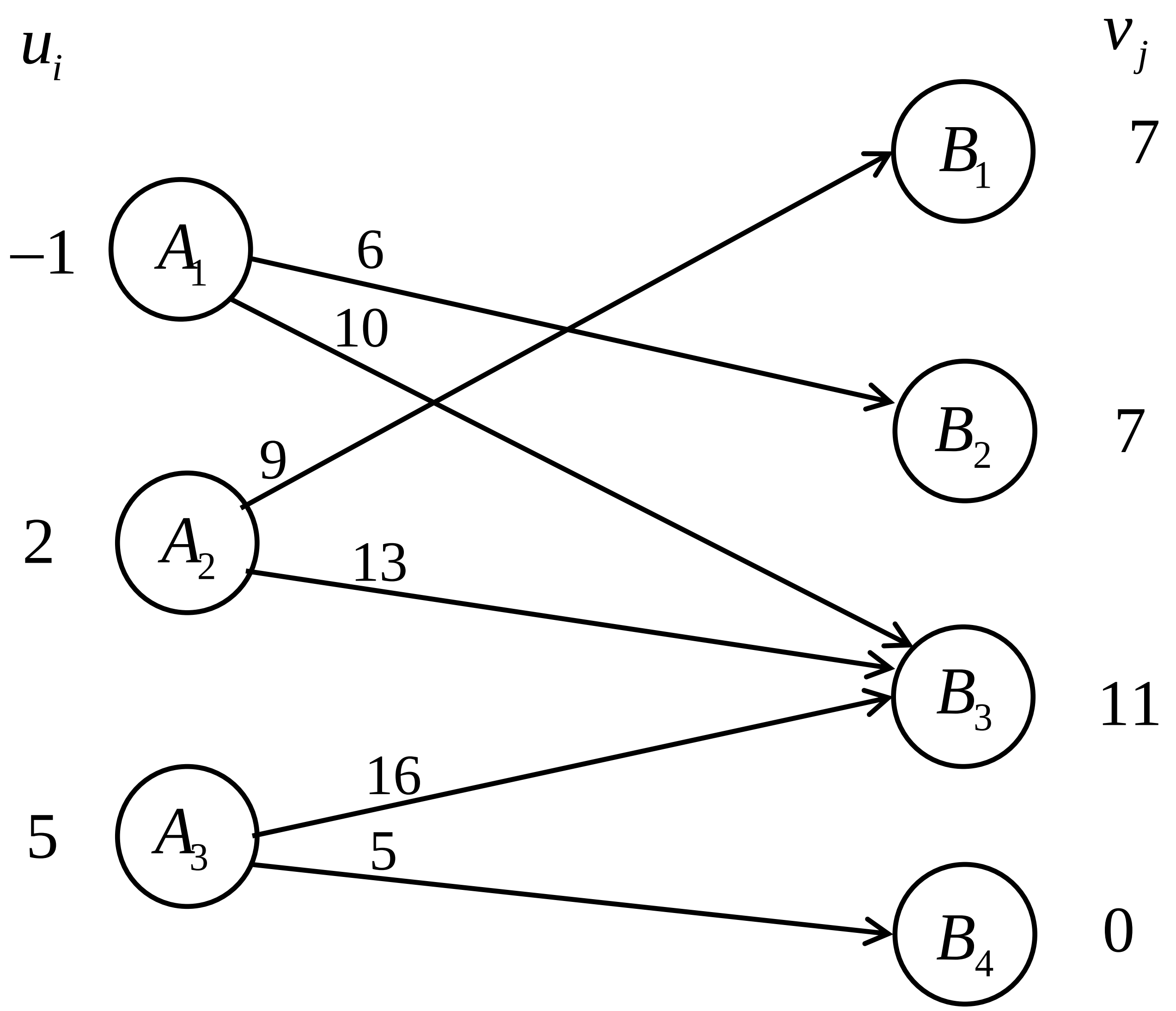


显然，当 $\theta = 15$（注意 $x_{ij} \geq 0$）时，得到一个新的支撑树。

基本可行解的改进即为更新支撑树



在支撑树上计算对偶变量的值



算法总结

1. 通过求支撑树确定初始基本可行解
2. 用位势法计算所有非基变量的检验数
3. 如果所有检验数不小于零，已得最优解，否则找出最小检验数对应的非基变量以及与其形成回路的基变量，据此确定相应非基变量的增加值以及回路基变量的新值，然后回到上一步继续迭代

要点：运输问题特殊情况处理

总产量大于总销量（产销不平衡）的运输问题

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

优化模型

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \ i=1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \ j=1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij} \ge 0, \ i=1,2,\cdots,m, \ j=1,2,\cdots,n$$

处理办法 B_{n+1} 引入假想销地

定义假想销地 B_{n+1} 的销量

$$b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j$$

往假想销地的运量本质是引入不等式的辅助变量

所以 $c_{i\,n+1}=0,\ i=1,2,\cdots,m$

优化模型 $$\min\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\ \ \sum_{j=1}^{n+1}x_{ij}=a_i,\ \ i=1,2,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ \ j=1,2,\cdots,n+1$$

$$x_{ij}\geq 0,\ \ i=1,2,\cdots,m,\ \ j=1,2,\cdots,n+1$$

加整数约束的运输问题

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \forall 1 \le i \le m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ \forall 1 \le j \le n$$

$$x_{ij}\text{为非负整数}, \ \forall 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$$

当产量和销量均为整数时，由基本可行解的产生过程和改进过程可知，最终得到的最优解一定是非负整数，所以前面给的算法同样可以解决这种整数约束的运输问题

要点：指派问题特点

例：某商业公司要开办五家新商店，要五家建筑公司分别承建，各公司营造费用报价如下，商业公司应如何分派使总造价最小

费用报价 商店 / 公司	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	8	7	15	12
A_2	7	9	17	14	10
A_3	6	9	12	8	7
A_4	6	7	14	6	10
A_5	6	9	12	10	6

标准指派问题的一般提法

有 n 件事要 n 个人完成，每人做一件事，已知第 i 个人做第 j 件事的成本是 c_{ij} ，要确定人和事之间一对一的指派方案，使完成这 n 件事的总费用最小

称 $C=\left(c_{ij}\right)_{n\times n}$ 为指派问题的系数矩阵

定义 $x_{ij}=\begin{cases}1 & 若指派第\,i\,个人做第\,j\,件事\\ 0 & 若不指派第\,i\,个人做第\,j\,件事\end{cases}$

整数规划模型 $\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\ i=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\ j=1,2,\cdots,n$$

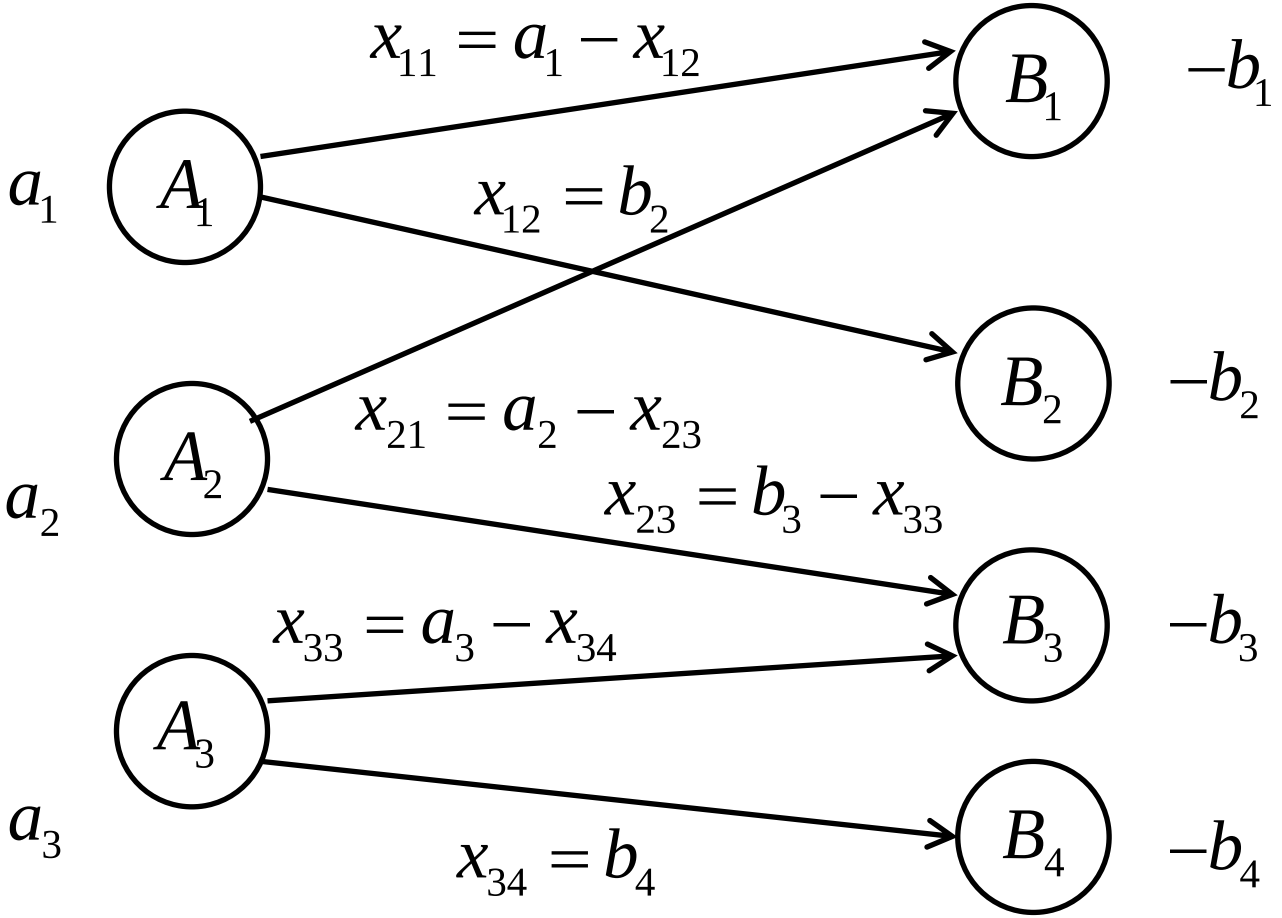
$$x_{ij}\in\{0,1\},\ \forall i,j$$

要点：指派问题与运输问题的关系

标准指派问题是特殊的产销平衡运输问题 $x_{ij} \in \{0,1\}$

销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}	1
A_2	c_{21} x_{12}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}	1
$\vdots$					$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}	1
销量	1	1	$\cdots$	1	$m=n$

运输问题的基本可行解对应于网络中的一个支撑树



推论　产量和销量都是非负整数的运输问题的基本可行解的每个分量一定是非负整数

下述运输问题的基本可行解满足 0-1 约束！

产地 \ 销地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}	1
A_2	c_{21} x_{12}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}	1
$\vdots$					$\vdots$
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}	1
销量	1	1	$\cdots$	1	$m=n$

求解下述运输问题可得标准指派问题的解

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j$$

对偶问题

$$\max \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j$$

$$\text{s.t.} \quad u_i + v_j \leq c_{ij}$$

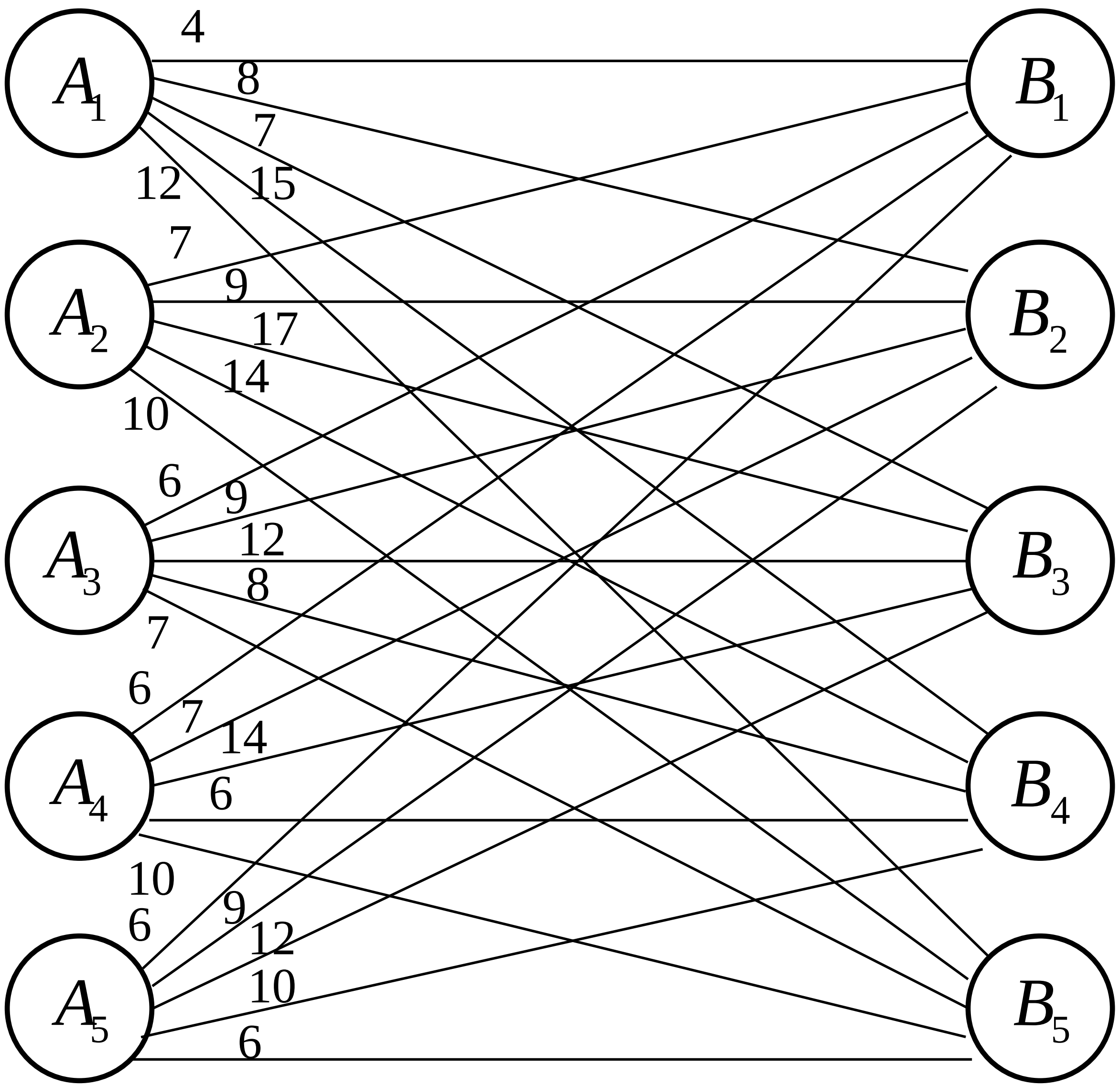
$$i = 1, 2, \cdots, m$$

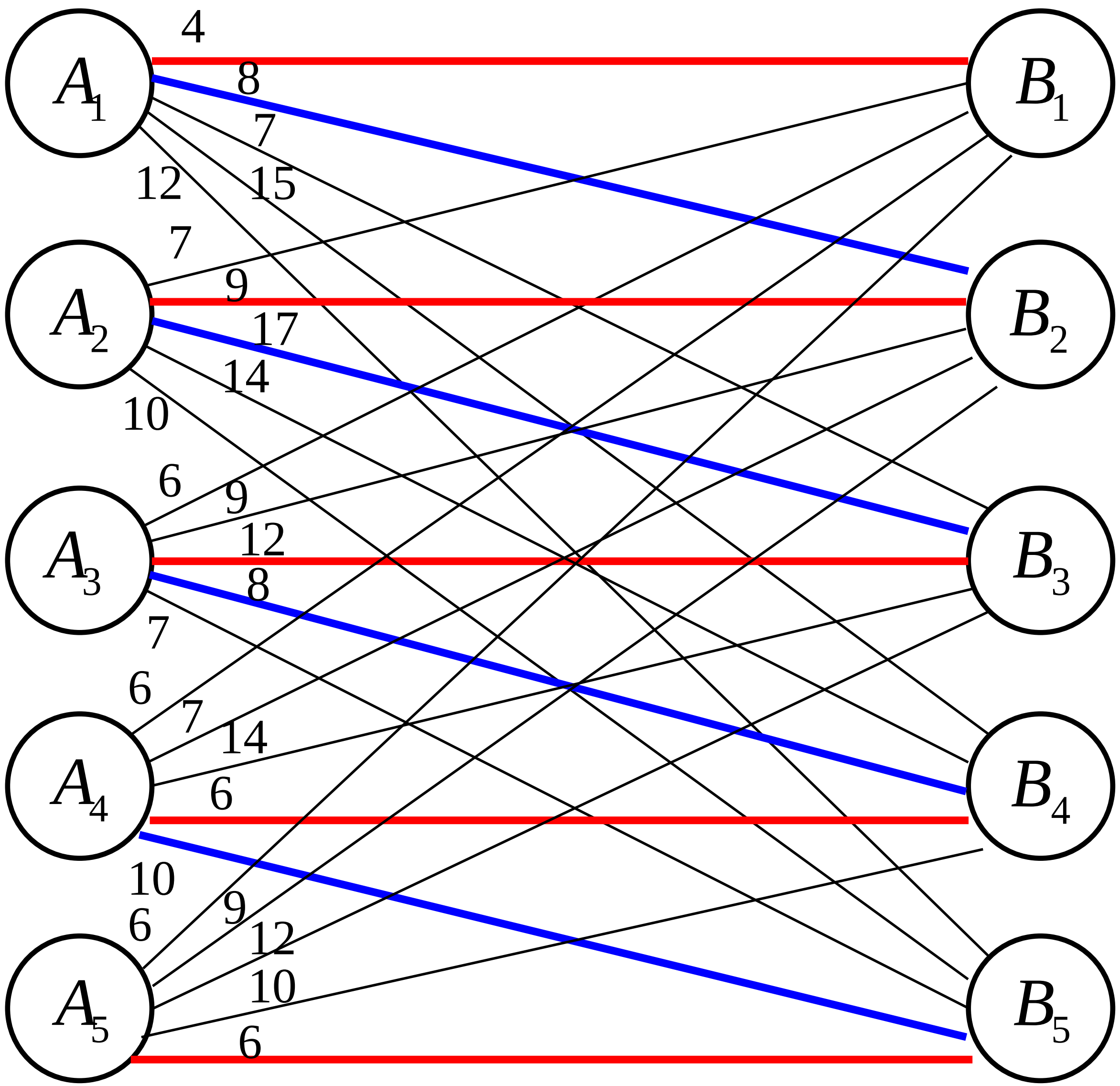
$$j = 1, 2, \cdots, n$$

要点：运输问题算法求指派问题的缺点

例：某商业公司要开办五家新商店，要五家建筑公司分别承建，各公司营造费用报价如下，商业公司应如何分派使总造价最小

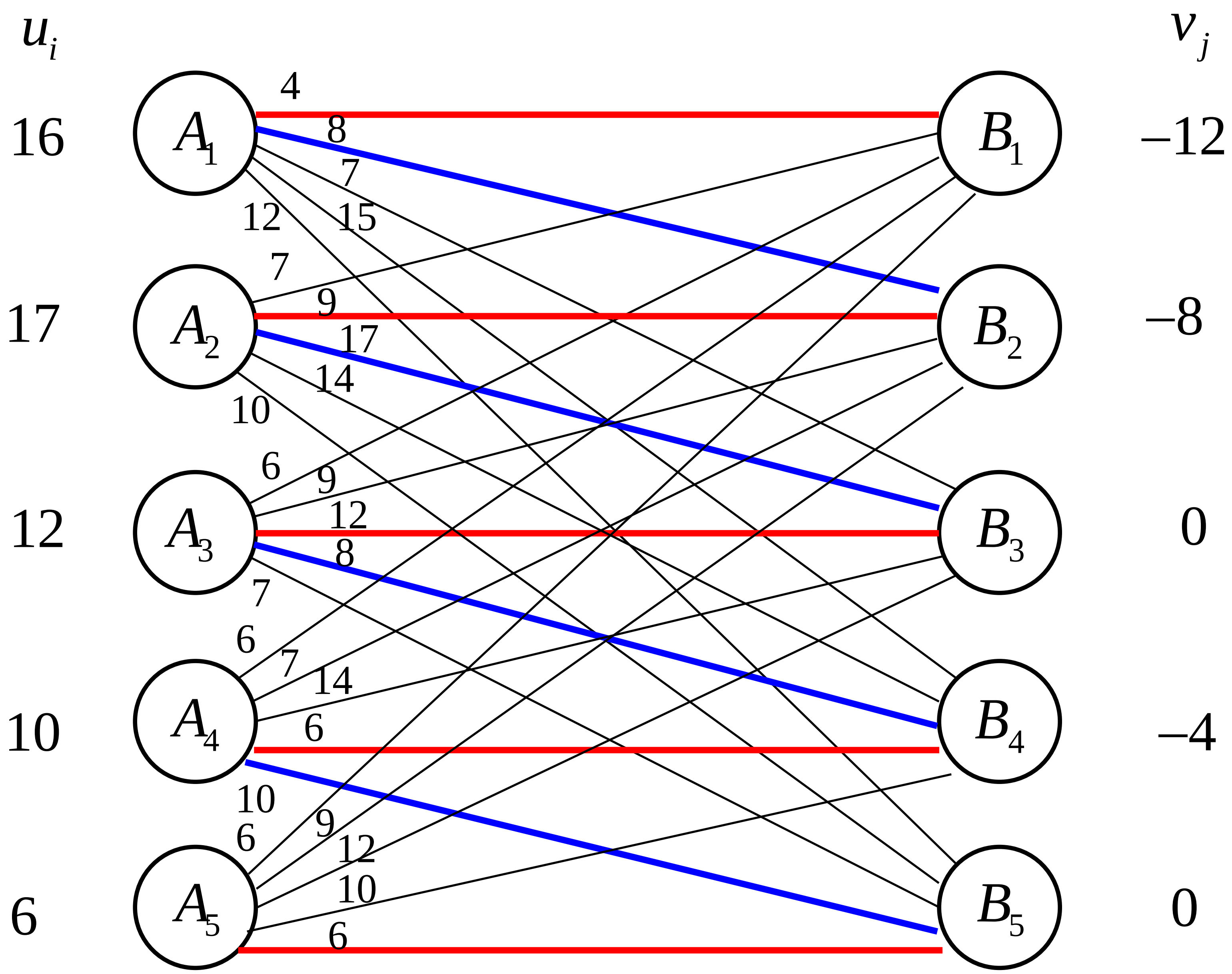
费用报价 商店 / 公司	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	4	8	7	15	12
A_2	7	9	17	14	10
A_3	6	9	12	8	7
A_4	6	7	14	6	10
A_5	6	9	12	10	6


A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
B_1
B_2
B_3
B_4
B_5
4
8
7
12
15
7
9
17
14
10
6
9
12
8
7
6
7
14
6
10
6
9
12
10
6

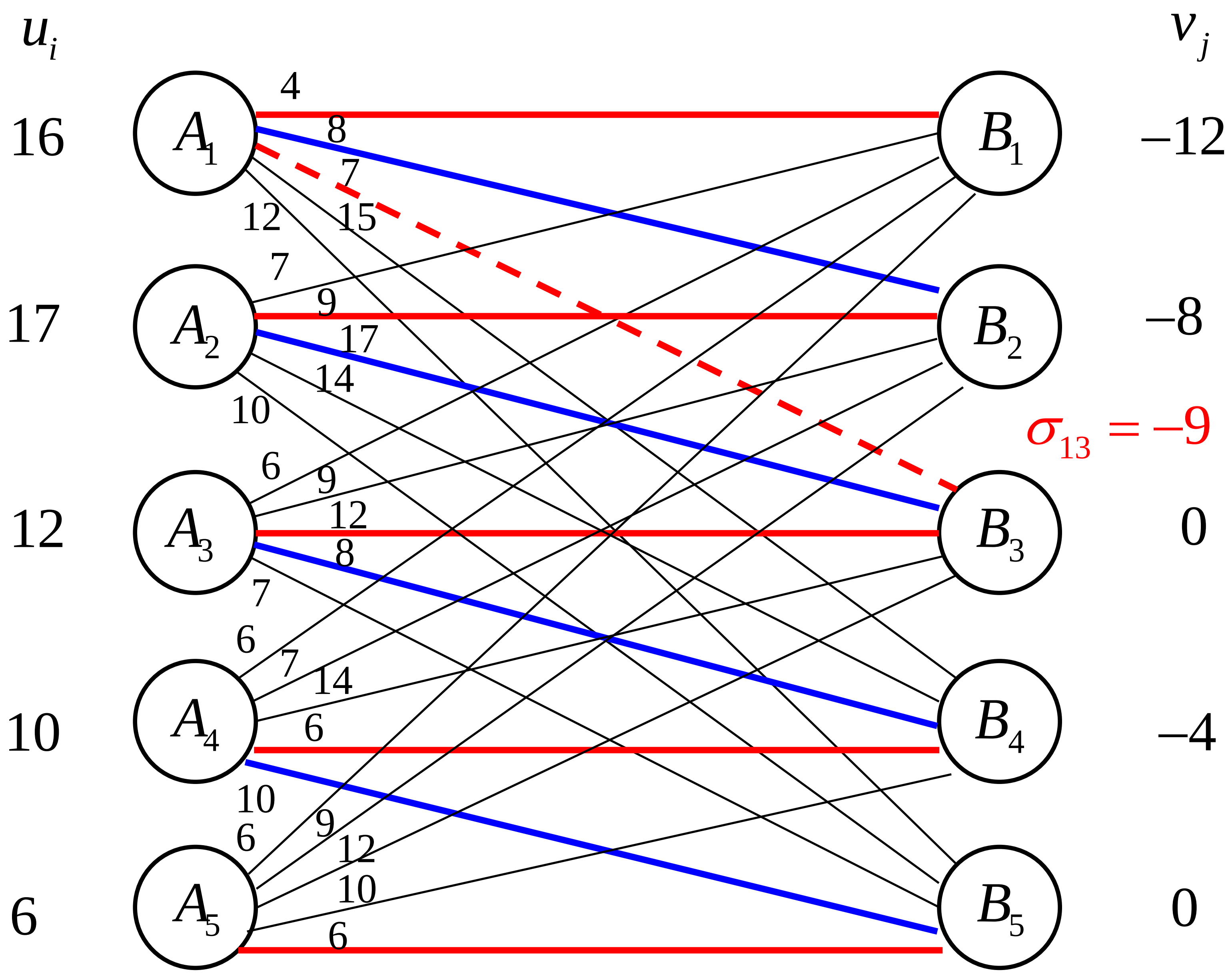


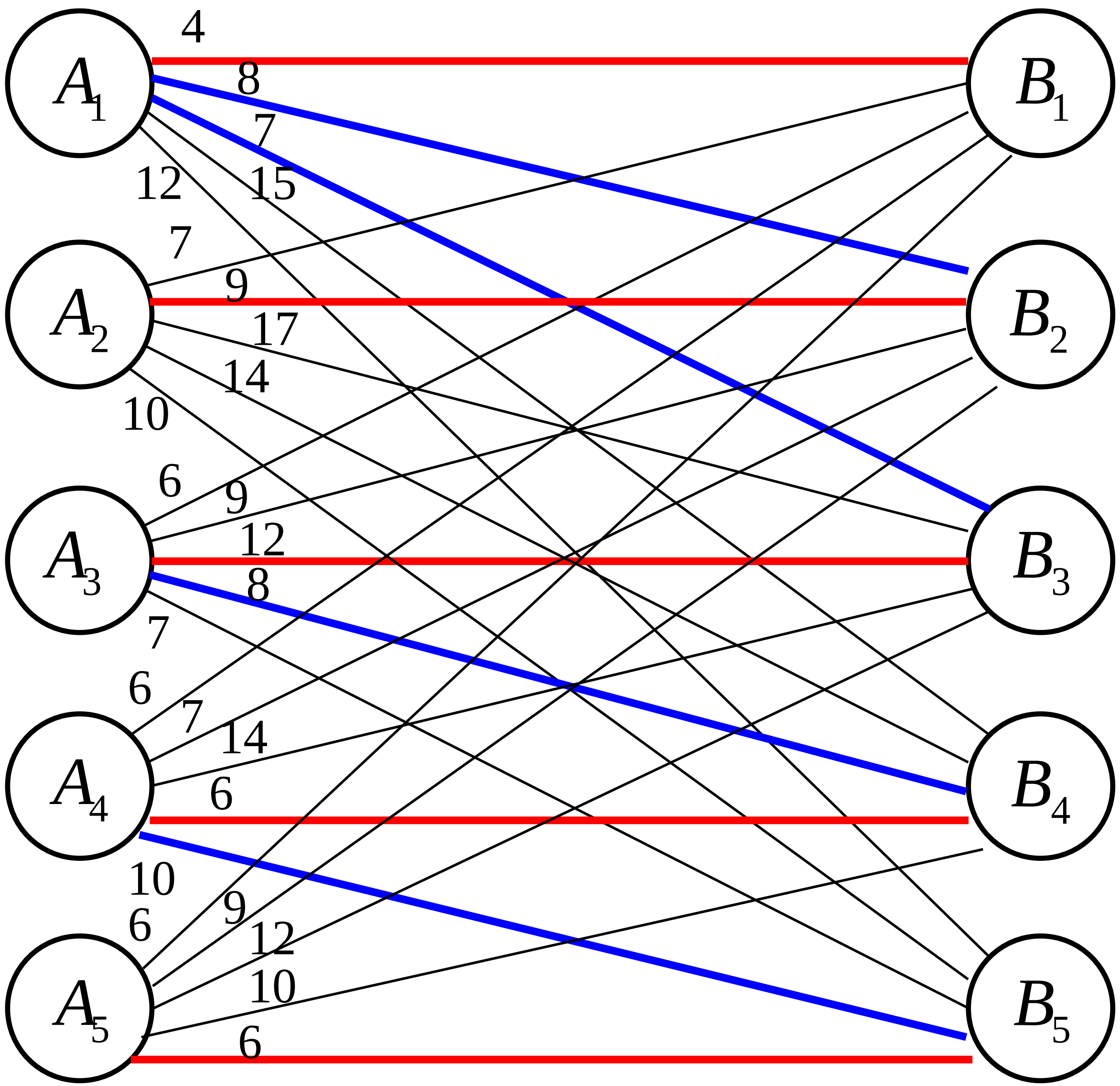
可行解：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$



u_i
v_j
16
17
12
10
6
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
B_1
B_2
B_3
B_4
B_5
−12
−8
0
−4
0
4
8
7
12
15
7
9
17
14
10
6
9
12
8
7
6
7
14
6
10
6
9
12
10
6


u_i
v_j
16
17
12
10
6
-12
-8
0
-4
0
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
B_1
B_2
B_3
B_4
B_5
4
8
7
12
15
7
9
17
14
10
6
9
12
8
7
6
7
14
6
10
6
9
12
10
6
$\sigma_{13} = -9$



可行解：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

从前面的例子可以看出，尽管可以用求解运输问题的算法求解标准指派问题，但由于存在大量的退化解，经常出现换基不能改进目标函数的情况，这种做法效率不高

进一步挖掘标准指派问题的特点可以获得更加有效的算法

要点：指派问题系数矩阵性质

标准指派问题的第一个有用的性质

任取 $1 \le k \le n$ 和任意实数 A，用 C_1 和 C_2 分别表示将 C 的第 k 行或第 k 列减去 A 以后得到的系数矩阵，则以 C，C_1 或 C_2 为系数矩阵的指派问题的最优方案相同

证明

$$\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n}\left(c_{kj}-A\right)x_{kj} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - A$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\left(c_{ik}-A\right)x_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} - A$$

目标函数差一个常数，约束相同，最优解当然相同

标准指派问题的第二个有用的性质

如果 $C \in R^{n \times n}$ 的所有元素中没有负数，且存在 n 个行列号都互不相同的零元素（简称为独立零元素），那么对应的标准指派问题的最优目标值等于零，最优方案可以由独立零元素的位置确定

例如

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

最优解 $x_{13} = x_{22} = x_{31} = x_{44} = x_{55} = 1$

要点：指派问题求解算法设想

算法设想（匈牙利算法）

一、利用第一个性质产生独立零元素

二、对给定矩阵找到最大的独立零元素组

三、当最大的独立零元素组的零元素数目不够时增加独立零元素的数目

通过以上步骤的迭代找到足够的独立零元素

例：对以下矩阵各行列减去最小值得到含零等价矩阵

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 15 & 12 \\ 7 & 9 & 17 & 14 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 8 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 6 & 10 \\ 6 & 9 & 12 & 10 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 & 11 & 8 \\ 0 & 2 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

要解决的问题：

1）如何找出最大的独立零元素组

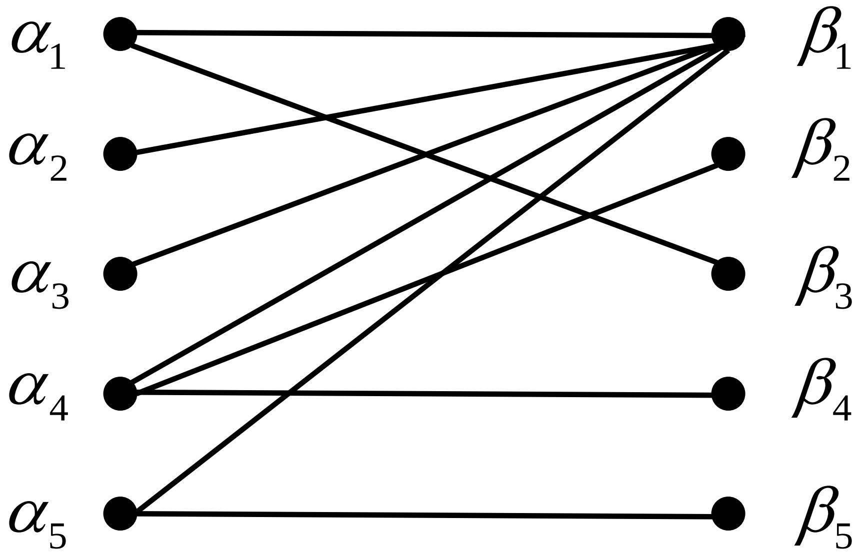
2）如果独立零元素不够怎么办

要点：在图上搜索最大独立零元素组

如何找出最大的独立零元素组？

用结点 α_i 表示第 i 行，结点 β_j 表示第 j 列，用边表示零元素位置，可得二分图（所有边端点分属两个点集）

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$



求左边矩阵最大独立零元素组等价于求右边二分图的最大对集（互相之间没有相同端点的边的最大集合）

要点：二分图对集的相关性质

对于$G=(N,E)$，给定对集 $M\subseteq E$（用红线表示），定义

M*-（非）饱和点**：和M***的边（不）关联的点

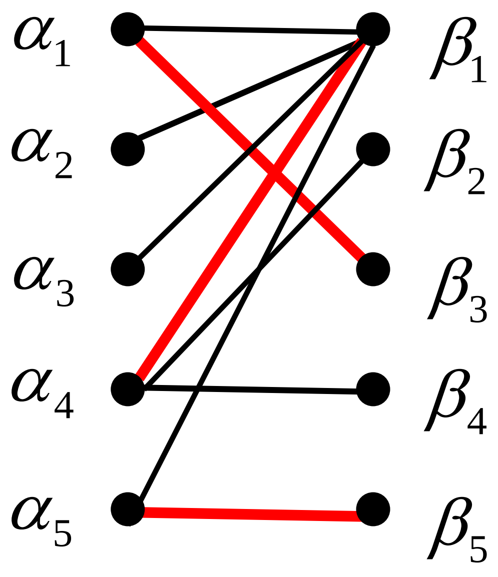
M*-交错路**：由属于和不属于M***的边交错形成的路

M*-增广路**：起点和终点都是 ***M-非饱和点的交错路

匈牙利树：起点是 ***M***-非饱和点但终点不是的交错路

覆盖 $K\subseteq N$：E 中每条边都有端点属于 K

最小覆盖：所含端点数最少的覆盖



右图 $\alpha_2\to\beta_1\to\alpha_4\to\beta_4$ 是***M***-增广路

$\beta_2\to\alpha_4\to\beta_1\to\alpha_1\to\beta_3$ 是匈牙利树

$\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5,\beta_1\}$ 是覆盖

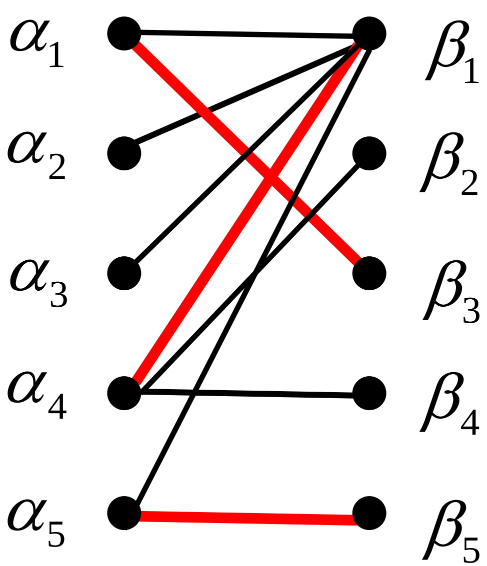
对集的边数和覆盖的点数之间的关系：

任何对集的边数都不会大于任何覆盖的点数

理由：对集每条边的两个端点至少有一个在覆盖中

扩大给定对集 M 的途径：

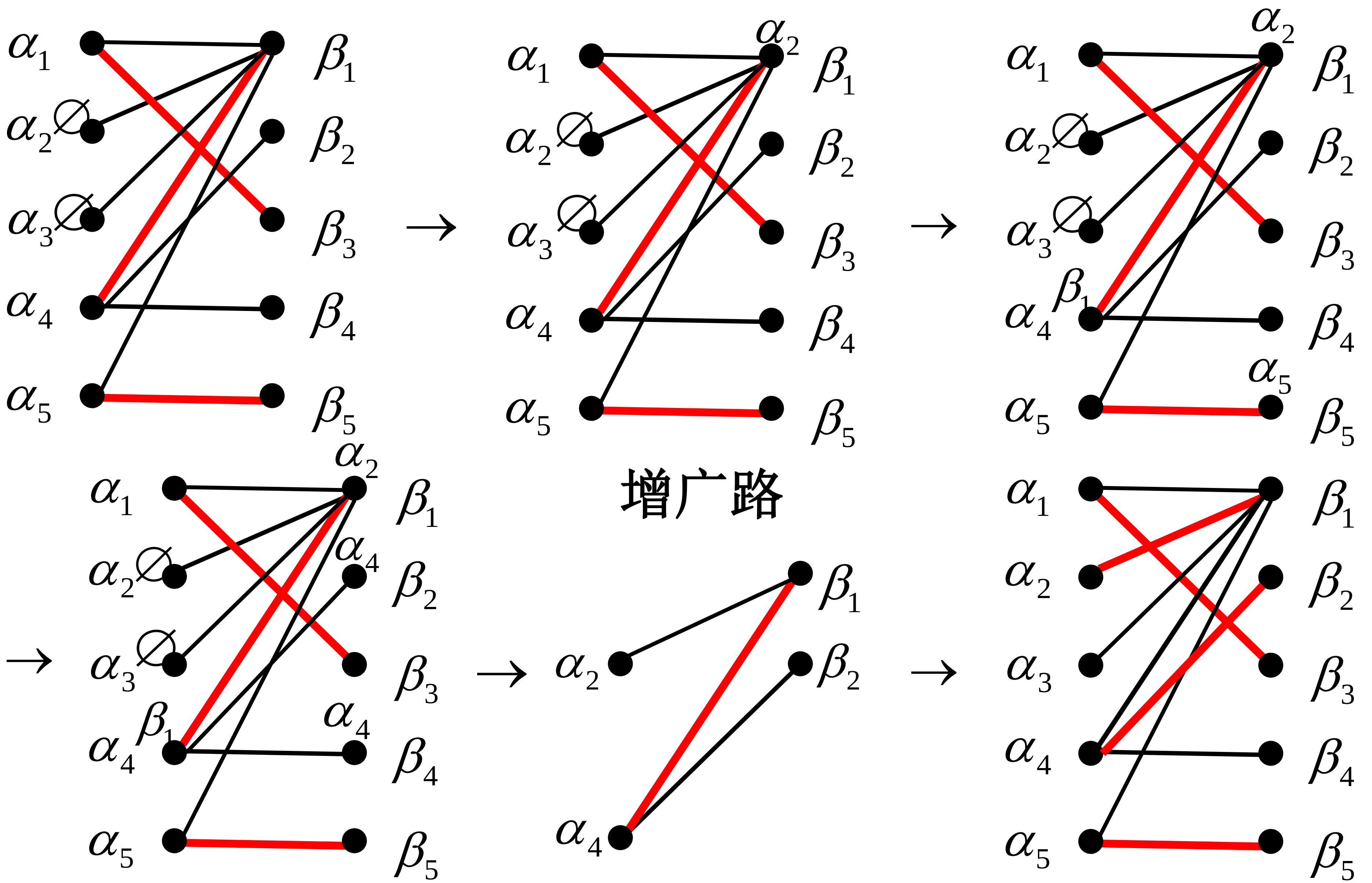
在 G 中找M-增广路



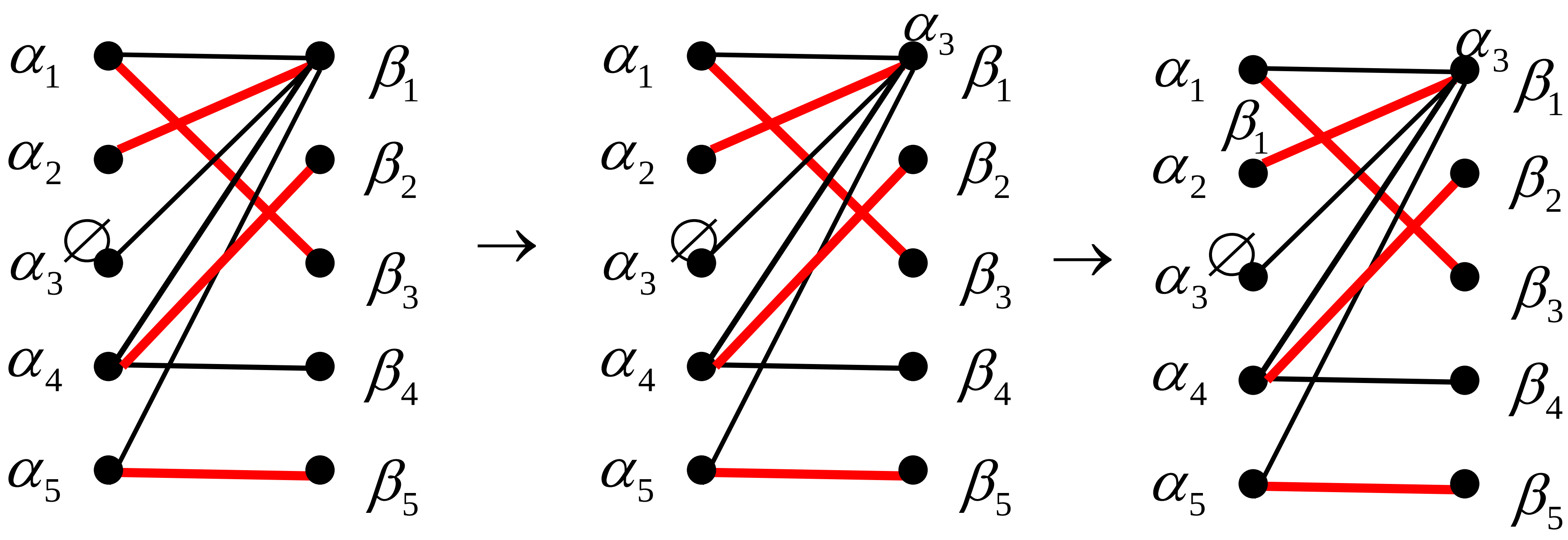
理由：如右图用 $(\alpha_2,\beta_1),(\alpha_4,\beta_4)$ 替换 (β_1,α_4) 就可扩大 M

要点：求最大对集的标号法

通过标号寻找二分图增广路



重新标号



由于从左边的非饱和点出发只能得到匈牙利树，可知不可能再有M-增广路

要点：最大对集最小覆盖

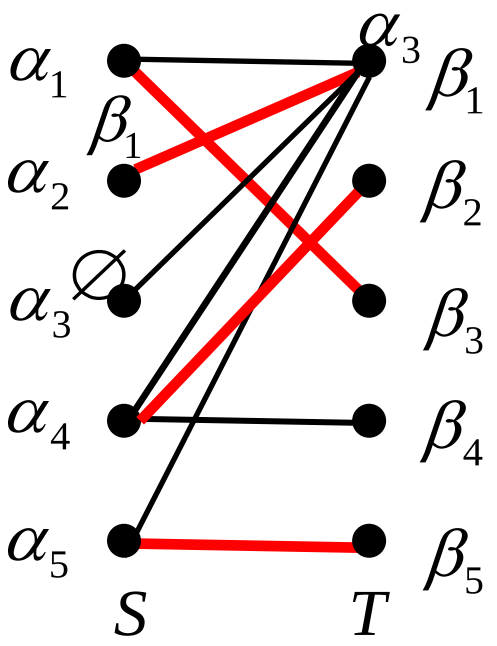
用S和T分别表示左右两边的点集合

用L表示被标注点集合　可看出：

1）$S-L=\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5\}$覆盖不属于匈牙利树的对边；

2）$T\cap L=\{\beta_1\}$覆盖属于匈牙利树的对边；

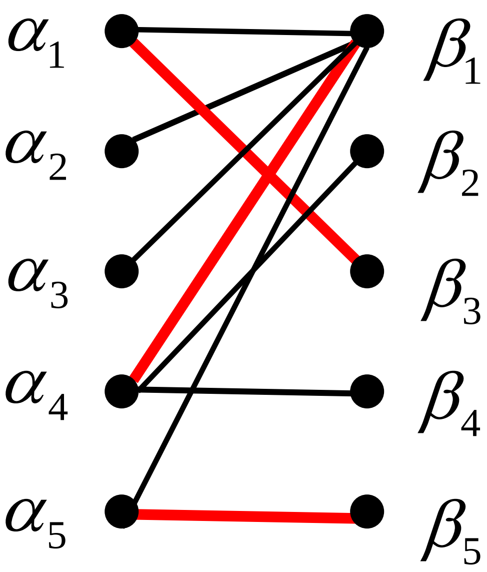
3）$S-L$ 和 $T\cap L$ 不相交



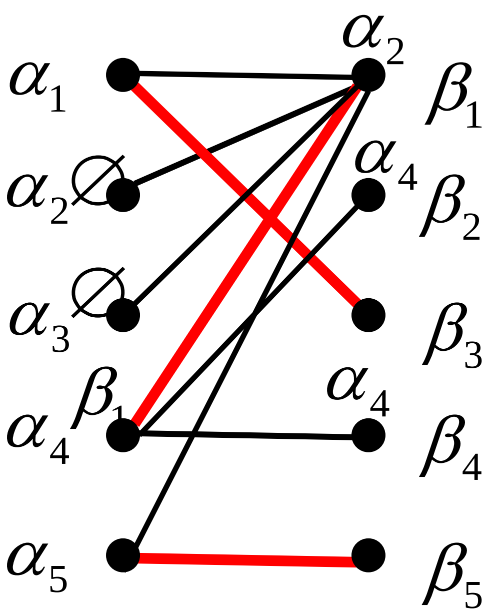
$\Rightarrow$　$(S-L)\cup(T\cap L)$和对边数相等，因此是最小覆盖

$\Rightarrow$　***M*是*G*的最大对集的充要条件是*G*中没有*M*-增广路**

以上过程可以直接在费用矩阵上实现



$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\Leftrightarrow \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 2 & 4 & & 4 & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \varnothing\rightarrow \\ \varnothing \\ 1 \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

重新标号

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} 3 & & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ 1 \\ \varnothing \to \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

不能再标号，停止，利用最后的匈牙利树 $\{(3,1),(2,1)\}$ 可得最小覆盖 $(S-L)\cup(T\cap L)=\{1,4,5\}\cup\{1\}$

对 $S-L$ 用行线

对 $T\cap L$ 用列线

$$\to \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

要点：增加独立零元素的方法

独立零元素不够怎么办？

找出未覆盖处最小的数，在没被行直线覆盖的行减去最小数，然后在有负数的列加上这个最小数

$$
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 1 & 7 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} \\ -1 \\ -1 \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$
\rightarrow
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} +1 & & & & \end{array} \\
\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ -1 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\rightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}
$$

继续用找对集方法找最大的独立零元素组

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 3 & 2 & & 4 & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ 1 \\ \varnothing \\ 2 \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\rightarrow
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}
$$

得最优解 $x_{13} = x_{22} = x_{31} = x_{44} = x_{55} = 1$

要点：特殊指派问题处理方法

目标函数求最大

$$\max \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \quad \Leftrightarrow \quad \min\left(nA - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right)$$

$$= \min\left(A\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right)$$

$$= \min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(A - c_{ij}\right)x_{ij}$$

取 $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}$ **，令** $C' = \left(A - c_{ij}\right)_{n\times n}$ **，得标准指派问题**

其它非标准情况

1）人数和事情不等

2）某人可能不能做某些事

采取下述相应措施可转换成标准指派问题

1）增加虚拟的人或事，相应费用系数为**0**

2）增加不存在的边，相应费用取为很大正数