1、

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\\0&0&11&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&\vdots&0&0\end{bmatrix}x$$

$$Q_g=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\Rightarrow rank=4$$

完全能观

2、 总是不能观

$$\begin{bmatrix}a&b&c\\at&at+bt&ct\\at^2&b^2+at&ct^2\\at^3&bt^3+3at^2&ct^3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a&b&c\\0&a&0\\0&b^2+at-bt^2&0\\0&bt^3+3at^2-bt^3&0\end{bmatrix}\Rightarrow rank=2$$

3、 $$Q_g=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\1&0&-1\\1&2&0\\-2&0&-2\\-1&-4&-1\end{bmatrix}\Rightarrow rank=3\Rightarrow 能观$$

$$CA=\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&2&0\end{bmatrix}\qquad CA^2=\begin{bmatrix}-2&0&-2\\-1&-4&-1\end{bmatrix}$$

4、

$$\dot{x}=Ax+Bu\qquad x=\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{21}\\x_{22}\end{bmatrix}$$

$$y_2=Cx$$

$$u_2=y_1=\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{12}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_{11}\\\dot{x}_{12}\\\dot{x}_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\-3&-4&0\\2&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{21}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}u$$

$$y_2=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{21}\end{bmatrix}$$

$$Q_k=\begin{bmatrix}B&AB&A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&-4\\1&-4&13\\0&1&-4\end{bmatrix}\Rightarrow rank=2\ 不完全能控$$

$$Q_g=\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\2&1&-2\\-7&-4&4\end{bmatrix}\Rightarrow rank=3\ 完全可观$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$G_1(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+4s+3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{s^2+4s+3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2+s}{s^2+4s+3}$$

$$G_2(s) = 1\ (s+2)^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{s+2}$$

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{1}{s^2+4s+3}$$

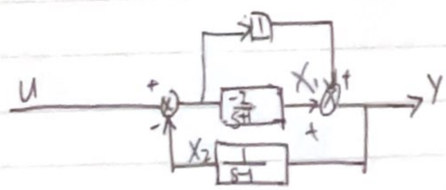
← 能控性 ⇒ 不完全可控

← 能观性 ⇒ 完全可观　阶数！

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 3 & s+4 & 0 \\ -2 & -1 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \frac{1}{s^2+4s+3}$$

5,



$$\dot{x}_1 = -2(u-x_2)-x_1$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + (u-x_2+x_1)$$

$$y = u - x_2 + x_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u$$

$$Q_k = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$ ⇒ rank=1 不完全可控

~~$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ ⇒ rank=1 不完全可观~~

$$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$ ⇒ rank=1 不完全可观

6、

解1 $Q_k = [B\ AB\ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 4 & -4 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow rank = 3$

$Q_k^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ $\quad p_1^T = [0\ 0\ 1]_{1\times3} Q_{k\,3\times3}^{-1} = [\frac{1}{4}\ -\frac{1}{4}\ \frac{1}{3}]$

$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$

$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$

$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

7、 $Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow rank = 2 \Rightarrow$ 完全可观

$Q_g^{-1} = -\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad P_1 = Q_{g\,2\times2}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\tilde{C} = CT = [0\ \ 1]$

$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$y = [0\ \ 1] x$

8.

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & -2 & -1 \\ 0 & s+2 & 0 \\ -1 & 4 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+1}$$

不完全能控

完全能观

现求其可控子空间 $Q_K = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

可控子系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$\Sigma\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (1, 1)\right)$$