运筹学

5. 线性规划的对偶理论

李 力
清华大学

Email: li-li@tsinghua.edu.cn

2023.10.

对偶性与对偶算法

为何要研究线性规划的对偶问题

1. 对于线性规划问题 $p^* = \min_x \left\{ c^T x : Ax \geq b \right\}$，其对偶问题可以被理解为一个寻找最小值 p^* 的下界的问题。

对于任意的 $y \geq 0$ 和可行解 x，我们总有 $y^T Ax \geq y^T b$。如果我们恰好可以找到一个 $\bar{y}$ 使得 $\bar{y}^T A = c^T$，那么就可以得出对于所有可行的 x，$c^T x = \bar{y}^T Ax \geq b^T \bar{y}$。即集合 $\left\{ b^T \bar{y} : A\bar{y}^T = c\ \bar{y} \geq \ \right\}$ 里的任意一个数都是原问题的一个下界。

为了找到最好的下界，我们就最大化那个集合，于是就有了对偶问题 $d^* = \max_y \left\{ b^T y : A^T y = c ; y \geq \ \right\}$，且弱对偶性 $d^* \leq p^*$ 成立。

更加深入的解释可以参考 Farkas 引理。

为何要研究线性规划的对偶问题

2. 给定一个线性规划问题，如何判断有没有可行解？

单纯形法如果用大M法或者两阶段法的时候，可能出现换不走人工变量，操作之后回到原来的问题的情况（这种情况不属于作业或考试范围）

基于Farkas引理和其他一系列定理，我们可以知道原问题和对偶问题存在密切联系。如果Farkas引理定义的对应系统有解，则原系统无解。这样就提供了一个简单的证明原问题没解的途径。

对偶问题及其主要性质

考虑标准线性规划问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \vec{b}$$

$$x_j \ge 0, \forall 1 \le j \le n$$

单纯形方法的本质是寻找满足以下两个条件的基矩阵

$$B = \left(P_{j(1)}, P_{j(2)}, \cdots, P_{j(m)}\right)$$

其实也就是那个待求的极点

可行性条件： $B^{-1}\vec{b} \ge 0$

最优性条件： $C_B^T B^{-1} P_{j(i)} \ge c_{j(i)}, \quad \forall i > m$

考查最优性条件 $C_B^T B^{-1} P_{j(i)} \geq c_{j(i)}, \ \forall i > m$

令 $$Y_B^T = C_B^T B^{-1}$$

由 $B = \left(P_{j(1)}, P_{j(2)}, \cdots, P_{j(m)}\right)$ 可知

$$Y_B^T P_{j(i)} = c_{j(i)}, \ \forall i \leq m$$

因此，Y_B 满足以下不等式约束

$$Y^T P_j \geq c_j, \ \ j = 1, 2, \ldots, n$$

想法：可否在上述不等式构造的可行集中找出 Y_B？

再考查可行性条件 $B^{-1}\vec{b} \geq 0$

由于 $B=\left(P_{j(1)},P_{j(2)},\cdots,P_{j(m)}\right)$，$C_B=\left(c_{j(1)},c_{j(2)},\cdots,c_{j(m)}\right)^T$

当 $Y^T P_j \geq c_j$， $j=1,2,\ldots,n$ 时可知 $Y^T B \geq C_B^T$

结合上面的可行性条件，可得到

$$\left(Y^T \boxed{B\right)\left(B^{-1}}\vec{b}\right) \geq C_B^T\left(B^{-1}\vec{b}\right) \quad \Leftrightarrow \quad Y^T\vec{b} \geq Y_B^T\vec{b}$$

说明 $Y_B^T = C_B^T B^{-1}$ 是下述线性规划问题的最优解

$$\min\ Y^T\vec{b}$$

$$\text{s.t. } Y^T P_j \geq c_j\ ,\ \forall 1 \leq j \leq n$$

总结：求解相同参数决定的两个线性规划问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \vec{b}$$

$$x_j \geq 0, \forall 1 \leq j \leq n$$

$$\min \; Y^T \vec{b}$$

$$\text{s.t.} \quad Y^T P_j \geq c_j \,, \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

本质都要找满足以下条件的基矩阵 $B = \left(P_{j(1)}, P_{j(2)}, \cdots, P_{j(m)} \right)$

$$B^{-1} \vec{b} \geq 0, \qquad C_B^T B^{-1} P_{j(i)} \geq c_{j(i)}, \quad \forall i > m$$

其中第一组条件分别是左右问题的可行性和最优性条件

第二组条件则分别是左右问题的最优性和可行性条件

列向量表达的标准形式线性规划原问题和对偶问题

原问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \vec{b}$$

$$x_j \geq 0, \forall 1 \leq j \leq n$$

$\Rightarrow$

对偶问题

$$\min \ Y^T \vec{b}$$

$$\text{s.t.} \quad Y^T P_j \geq c_j \text{ , } \forall 1 \leq j \leq n$$

矩阵形式表达（$A = \left(P_1, P_2, \cdots, P_n\right)$）的原问题和对偶问题

$$\max \ C^T X$$

$$\text{s.t.} \quad AX = \vec{b}$$

$$X \geq 0$$

$\Rightarrow$

$$\min \ Y^T \vec{b}$$

$$\text{s.t.} \quad Y^T A \geq C^T$$

规范形式线性规划的原问题和对偶问题

原问题

$$\min \; C^T X$$
$$\text{s.t.} \quad AX \ge \vec{b}$$
$$X \ge 0$$

$\Rightarrow$

标准线性规划问题

$$-\max \; \left(-C^T, 0^T\right)\begin{pmatrix} X \\ \tilde{X} \end{pmatrix}$$
$$\text{s.t.} \quad \left(A, -I_m\right)\begin{pmatrix} X \\ \tilde{X} \end{pmatrix} = \vec{b}$$
$$X \ge 0, \; \tilde{X} \ge 0$$

标准线性规划对偶问题

$$-\min \; \vec{b}^T \tilde{Y}$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} A^T \\ -I_m \end{pmatrix} \tilde{Y} \ge \begin{pmatrix} -C \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

原问题的对偶问题

$$\max \; \vec{b}^T \left(-\tilde{Y}\right)$$
$$\text{s.t.} \quad A^T\left(-\tilde{Y}\right) \le C$$
$$-\tilde{Y} \ge 0$$

$\Rightarrow$

$$\max \; \vec{b}^T Y$$
$$\text{s.t.} \quad A^T Y \le C$$
$$Y \ge 0$$

考虑一般形式的线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\max\ & C^T X \\
\text{s.t.}\ & \vec{a}_i^T X = b_i,\ i = 1, \ldots, p \\
& \vec{a}_i^T X \le b_i,\ i = p+1, \ldots, m \\
& x_j \ge 0,\ \ j = 1, \ldots, q \\
& -\infty < x_j < \infty,\ i = q+1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

写成矩阵形式

$$
\begin{aligned}
\max\ & C_1^T X_1 + C_2^T X_2 \\
\text{s.t.}\ & A_{11} X_1 + A_{12} X_2 = \vec{b}_1 \\
& A_{21} X_1 + A_{22} X_2 \le \vec{b}_2 \\
& X_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

将一般形式转化为标准形式

一般形式

$$\begin{aligned}\max\ & C_1^T X_1 + C_2^T X_2 \\ \text{s.t.}\ & A_{11} X_1 + A_{12} X_2 = \vec{b}_1 \\ & A_{21} X_1 + A_{22} X_2 \le \vec{b}_2 \\ & X_1 \ge 0\end{aligned}$$

标准形式

$$\begin{aligned}\max\ & C_1^T X_1 + C_2^T X_2^+ - C_2^T X_2^- \\ \text{s.t.}\ & A_{11} X_1 + A_{12} X_2^+ - A_{12} X_2^- = \vec{b}_1 \\ & A_{21} X_1 + A_{22} X_2^+ - A_{22} X_2^- + X_3 = \vec{b}_2 \\ & X_1 \ge 0,\ X_2^+ \ge 0,\ X_2^- \ge 0,\ X_3 \ge 0\end{aligned}$$

写出转化后的标准形式的对偶问题

原问题

$$\max\ C_1^T X_1 + C_2^T X_2^+ - C_2^T X_2^-$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & A_{11}X_1 + A_{12}X_2^+ - A_{12}X_2^- = \vec{b}_1 \\
& A_{21}X_1 + A_{22}X_2^+ - A_{22}X_2^- + X_3 = \vec{b}_2 \\
& X_1 \ge 0,\ X_2^+ \ge 0,\ X_2^- \ge 0,\ X_3 \ge 0
\end{aligned}$$

对偶问题

$$\begin{aligned}
\min\ & Y_1^T\vec{b}_1 + Y_2^T\vec{b}_2 \\
\text{s.t.}\quad & Y_1^T A_{11} + Y_2^T A_{21} \ge C_1^T \\
& Y_1^T A_{12} + Y_2^T A_{22} \ge C_2^T \\
& -Y_1^T A_{12} - Y_2^T A_{22} \ge -C_2^T \\
& Y_2 \ge 0
\end{aligned}
\quad\Leftrightarrow\quad
\begin{aligned}
\min\ & Y_1^T\vec{b}_1 + Y_2^T\vec{b}_2 \\
\text{s.t.}\quad & Y_1^T A_{11} + Y_2^T A_{21} \ge C_1^T \\
& Y_1^T A_{12} + Y_2^T A_{22} = C_2^T \\
& Y_2 \ge 0
\end{aligned}$$

一般形式的线性规划问题的对偶问题的对偶问题

原问题

$$\begin{aligned}\min\ & Y_1^T\vec{b}_1+Y_2^T\vec{b}_2\\ \text{s.t.}\ & Y_1^T A_{11}+Y_2^T A_{21}\ge C_1^T\\ & Y_1^T A_{12}+Y_2^T A_{22}=C_2^T\\ & Y_2\ge 0\end{aligned}
\quad\Leftrightarrow\quad
\begin{aligned}-\max\ & -\vec{b}_1^T Y_1-\vec{b}_2^T Y_2\\ \text{s.t.}\ & -A_{11}^T Y_1-A_{21}^T Y_2\le -C_1\\ & -A_{12}^T Y_1-A_{22}^T Y_2=-C_2\\ & Y_2\ge 0\end{aligned}$$

对偶问题

$$\begin{aligned}-\min\ & -X_1^T C_1-X_2^T C_2\\ \text{s.t.}\ & -X_1^T A_{11}^T-X_2^T A_{12}^T=-\vec{b}_1^T\\ & -X_1^T A_{21}^T-X_2^T A_{22}^T\ge -\vec{b}_2^T\\ & X_1\ge 0\end{aligned}
\quad\Leftrightarrow\quad
\begin{aligned}\max\ & C_1^T X_1+C_2^T X_2\\ \text{s.t.}\ & A_{11}X_1+A_{12}X_2=\vec{b}_1\\ & A_{21}X_1+A_{22}X_2\le\vec{b}_2\\ & X_1\ge 0\end{aligned}$$

对偶问题的对偶问题是原问题 $\Leftrightarrow$ 互为对偶问题

比较一般形式的线性规划问题与其对偶问题

$$\max \ C_1^T X_1 + C_2^T X_2 \qquad\qquad \min \ Y_1^T \vec{b}_1 + Y_2^T \vec{b}_2$$

$$\text{s.t.} \ A_{11} X_1 + A_{12} X_2 = \vec{b}_1 \qquad\qquad \text{s.t.} \ Y_1^T A_{11} + Y_2^T A_{21} \geq C_1^T$$

$$A_{21} X_1 + A_{22} X_2 \leq \vec{b}_2 \qquad\qquad Y_1^T A_{12} + Y_2^T A_{22} = C_2^T$$

$$X_1 \geq 0 \qquad\qquad Y_2 \geq 0$$

<u>规律总结</u>

1）每个对偶变量对应原问题的一个约束

2）原问题是等式约束则对偶变量无不等式非负约束

3）原问题是不等式约束则对偶变量有不等式约束

4）原问题变量和对偶问题的约束同样符合上述规律

标准线性规划（求最大）问题的对偶性质

弱对偶性：若 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 分别是原、对偶问题可行解，即

$$A\hat{X} = \vec{b},\ \hat{X} \geq 0 \qquad \hat{Y}^T A \geq C^T$$

则 $$\hat{Y}^T \vec{b} = \hat{Y}^T A \hat{X} \geq C^T \hat{X}$$

强对偶性：若原问题有最优顶点 X^*，则对偶问题一定

也有最优解 $Y^{*T} = C_B^T B^{-1}$，反之亦然，并且

$$Y^{*T}\vec{b} = \left(C_B^T B^{-1}\right)\vec{b} = C_B^T\left(B^{-1}\vec{b}\right) = C^T X^*$$

其中 B 是最优基矩阵

线性规划问题的对偶性质

弱对偶性：原问题任何可行解的目标函数值都是对偶问题最优目标值的界（推论：原对偶问题目标值相等的一对可行解是各自的最优解）

强对偶性：原对偶问题只要有一个存在有界的最优解，另一个就有有界最优解，且最优目标值相等

能断定的情况：原问题有最优解 $\Rightarrow$ 对偶问题有最优解

原问题无界 $\Rightarrow$ 对偶问题无可行解

不能断定的情况：原问题无可行解 $\Rightarrow$ ？

线性规划问题的对偶性质

Theorem (Weak Duality Theorem)

For the canonical form LPP, if $\boldsymbol{x}$ is a feasible solution (not necessarily basic) of the primal problem and $\boldsymbol{u}$ is a feasible solution (not necessarily basic) of the dual problem, then

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{u}$$

Proof.

Because $\boldsymbol{x}$ is a feasible solution of the primal problem, we have $A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}$. So, for any $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$, we have

线性规划问题的对偶性质

$$\boldsymbol{u}^T A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u}$$

Because $\boldsymbol{u}$ is a feasible solution to the dual problem, we have $A^T \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{c}$. So, for any $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, we have

$$\boldsymbol{x}^T A^T \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{c}$$

Combining these two inequalities, we have $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{u}^T A\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{u}$.

强对偶性的证明需要Farkas引理，请期待我们新写的教材

线性规划问题的对偶性质

Based on weak and strong duality theorems, we can get the co-feasibility relationship between the primal and dual problems as follows

Theorem

For the canonical form LPP, the co-feasibility relationship between the primal and dual problems can be determined as

Dual \ Primal	Infeasible	Optimal	Unbounded
Infeasible	√	×	√
Optimal	×	√	×
Unbounded	√	×	×

线性规划问题的对偶性质

原问题有有界的最优解 -> 对偶问题有有界的最优解
原问题有无界的最优解 -> 对偶问题无解
原问题无解 -> 对偶问题无解或者有无界的最优解

对偶问题有有界的最优解 -> 原问题有有界的最优解
对偶问题有无界的最优解 -> 原问题无解
对偶问题无解 -> 原问题无解或者有无界的最优解

证明用弱对偶性，强对偶性和构造法。

原问题无可行解的例子

原问题（无可行解）

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \ge 1 \\ & -x_1 - x_2 \ge 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

对偶问题（无可行解）

$$\begin{aligned} \max\ & y_1 + y_2 \\ \text{s.t.}\ & y_1 - y_2 = 1 \\ & y_1 - y_2 = 0 \\ & y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

原问题（无可行解）

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \ge 1 \\ & -x_1 - x_2 \ge 1 \\ & x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

对偶问题（可行，无界）

$$\begin{aligned} \max\ & y_1 + y_2 \\ \text{s.t.}\ & y_1 - y_2 \le 1 \\ & y_1 - y_2 \le 0 \\ & y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0 \end{aligned}$$

标准形式线性规划互补松弛定理

$$\max \ C^T X$$
$$\text{s.t.} \quad AX = \vec{b}$$
$$X \geq 0$$

$$\min \ Y^T \vec{b}$$
$$\text{s.t.} \quad Y^T A \geq C^T$$

若 $\hat{X}$、 $\hat{Y}$ 分别是上述原对偶问题可行解，则它们分别是各自问题最优解的充要条件是满足互补松弛性等式

$$\left(\hat{Y}^T A - C^T\right)\hat{X} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\hat{Y}^T P_j - c_j\right)\hat{x}_j = 0, \ \forall j$$

含义：如果原（对偶）问题某不等式是松的（不等于**0**）

其对应的对偶（原）不等式必须是紧的（等于**0**）

理由： 对偶性质 + $\left(\hat{Y}^T A - C^T\right)\hat{X} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{Y}^T \vec{b} = C^T \hat{X}$

标准形式线性规划互补松弛定理

证明充分性 $\hat{Y}^T\left(\vec{b}-A\hat{X}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{b}^T\hat{Y}=\hat{Y}^T A\hat{X}$

$$\hat{X}^T\left(A^T\hat{Y}-C\right)=0 \quad \Rightarrow \quad C^T\hat{X}=\hat{Y}^T A\hat{X}$$

由以上两式可得 $C^T\hat{X}=\vec{b}^T\hat{Y}$ ，根据弱对偶性的推论可知两者分别是各自问题的最优解

证明必要性　当 $\hat{X}$ 和 $\hat{Y}$ 是原、对偶问题的最优解时

由强对偶性可知 $C^T\hat{X}=\vec{b}^T\hat{Y}$ 再利用可行性条件

$\vec{b}-A\hat{X}\geq 0, \hat{X}\geq 0, A^T\hat{Y}-C\geq 0, \hat{Y}\geq 0$ 可得

$$0\leq \hat{Y}^T\left(\vec{b}-A\hat{X}\right)=C^T\hat{X}-\hat{Y}^T A\hat{X}=\left(C^T-\hat{Y}^T A\right)\hat{X}\leq 0$$

所以 $\hat{Y}^T\left(\vec{b}-A\hat{X}\right)=0,\ \hat{X}^T\left(A^T\hat{Y}-C\right)=0$

一般形式的线性规划互补松弛定理

$$\max\ C_1^T X_1 + C_2^T X_2 \qquad\qquad \min\ Y_1^T \vec{b}_1 + Y_2^T \vec{b}_2$$

$$\text{s.t.}\ \ A_{11}X_1 + A_{12}X_2 = \vec{b}_1 \qquad\qquad \text{s.t.}\ \ Y_1^T A_{11} + Y_2^T A_{21} \geq C_1^T$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 \leq \vec{b}_2 \qquad\qquad Y_1^T A_{12} + Y_2^T A_{22} = C_2^T$$

$$X_1 \geq 0 \qquad\qquad Y_2 \geq 0$$

原问题可行解 $\hat{X}_1, \hat{X}_2$ 和对偶问题可行解 $\hat{Y}_1, \hat{Y}_2$ 都是最优解的充要条件是

$$\left(Y_1^T A_{11} + Y_2^T A_{21} - C_1^T\right)\hat{X}_1 = 0,\ \hat{Y}_2^T\left(\vec{b}_2 - A_{21}\hat{X}_1 - A_{22}\hat{X}_2\right) = 0$$

理由 $$Y_1^T \vec{b}_1 + Y_2^T \vec{b}_2 - \left(C_1^T \hat{X}_1 + C_2^T \hat{X}_2\right)$$

$$= \left(Y_1^T A_{11} + Y_2^T A_{21} - C_1^T\right)\hat{X}_1 + \hat{Y}_2^T\left(\vec{b}_2 - A_{21}\hat{X}_1 - A_{22}\hat{X}_2\right)$$

例

$$\min \ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}x_5\geq\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

$$x_j\geq 0,\ j=1,2,3,4,5$$

原问题最优解为$X^*=(1,0,0,0,1)^T$，求对偶问题最优解

$$\max \ 4y_1+3y_2$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\\3\end{pmatrix}y_1+\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\\1\end{pmatrix}y_2\leq\begin{pmatrix}2\\3\\5\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$y_i\geq 0, i=1,2$$

例

$$\min \ 2x_1+3x_2+5x_3+2x_4+3x_5$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}x_4+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}x_5 \ge \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

$$x_j \ge 0, \ j=1,2,3,4,5$$

原问题最优解为 $X^*=(1,0,0,0,1)^T$，求对偶问题最优解

$$\max \ 4y_1+3y_2$$

$$X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{s.t.} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\\3\end{pmatrix}y_1+\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\1\\1\end{pmatrix}y_2 \le \begin{pmatrix}2\\3\\5\\2\\3\end{pmatrix}$$

$$y_i \ge 0, i=1,2$$

$$y_1+2y_2=2$$

$$3y_1+y_2=3$$

$$y_1 \ge 0, \ y_2 \ge 0$$

例　　原问题　$\max \ 2x_1+4x_2+x_3+x_4$

$$\text{s.t.}\quad \begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}3\\1\\1\\1\end{pmatrix}x_2+\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}x_3+\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}x_4\le\begin{pmatrix}8\\6\\6\\9\end{pmatrix}$$

$$x_j\ge 0,\ j=1,2,3,4$$

对偶问题　$\min \ 8y_1+6y_2+6y_3+9y_4$

$$\text{s.t.}\quad \begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}y_1+\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}y_2+\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}y_3+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}y_4\ge\begin{pmatrix}2\\4\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$y_i\ge 0, i=1,2,3,4$$

已知原问题最优解　$X^*=(2,2,4,0)^T$，求对偶问题最优解

利用互补松弛定理

对偶问题 $\min\ 8y_1+6y_2+6y_3+9y_4$

$$\text{s.t.}\quad \begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}y_1+\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}y_2+\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}y_3+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}y_4\ge\begin{pmatrix}2\\4\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$y_i\ge 0,\ i=1,2,3,4$$

原问题最优解 $X^*=(2,2,4,0)^T \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned}&y_1+2y_2+y_4=2\\&3y_1+y_2+y_3+y_4=4\\&y_3+y_4=1\end{aligned}$

少一个方程（非退化情况不会发生），定理是否有用？

利用互补松弛定理

对偶问题

$$\min\ 8y_1+6y_2+6y_3+9y_4$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}y_1+\begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}y_2+\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}y_3+\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}y_4\ge\begin{pmatrix}2\\4\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$y_i\ge 0,\ i=1,2,3,4$$

方法1：尽可能消去变量，转化为一元函数求最优

方法2：看看还有什么条件没有用到？

影子价格

原问题

$$\begin{aligned} &\max\ C^T X \\ &\text{s.t.}\ \ AX \le \vec{b} \\ &\qquad X \ge 0 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} &\max\ C^T X \\ &\text{s.t.}\ \ \vec{a}_i^T X \le b_i\ ,\ \forall 1 \le i \le m \end{aligned}$$

如果增加某些 b_i 的数值，最优目标值应该增加

<u>能否定量地刻划增加不同 b_i 的效果？</u>

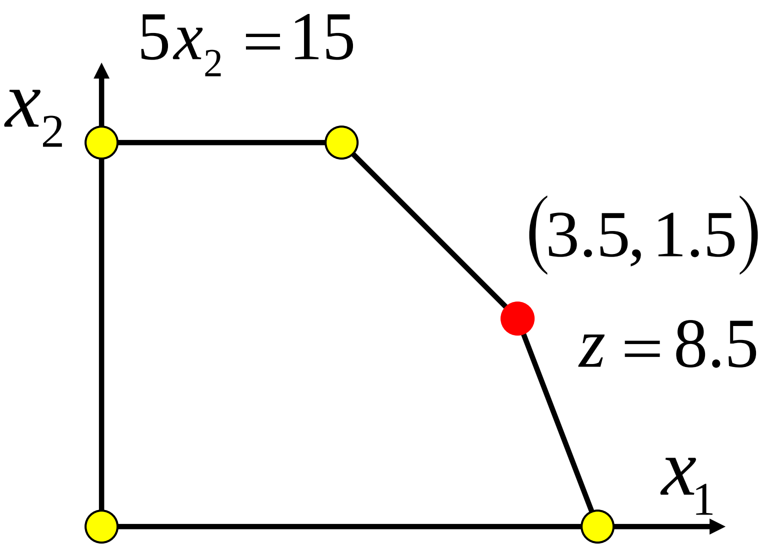
例1

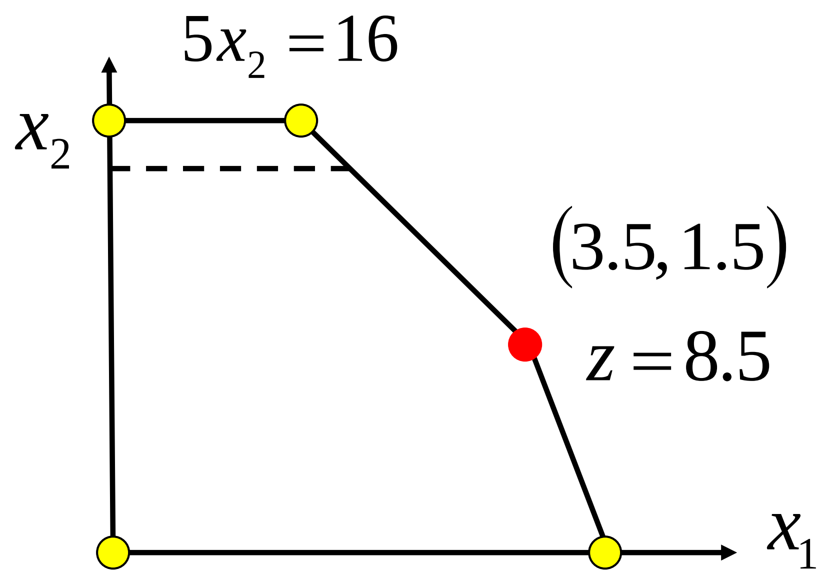
$$\max\ z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\ \ 5x_2 \le 15,\ \ 6x_1 + 2x_2 \le 24,\ x_1 + x_2 \le 5$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

第一个约束的常数项加1: $5x_2 \le 15 \ \rightarrow\ \ 5x_2 \le 16$

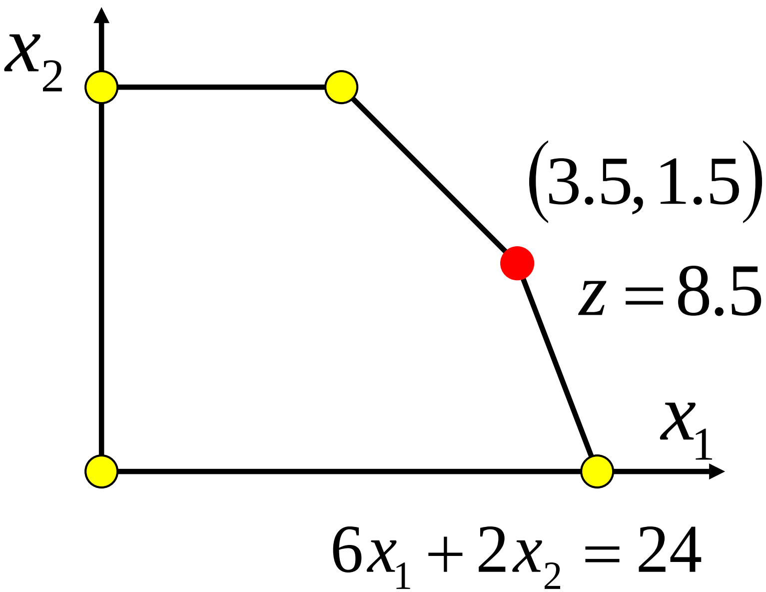


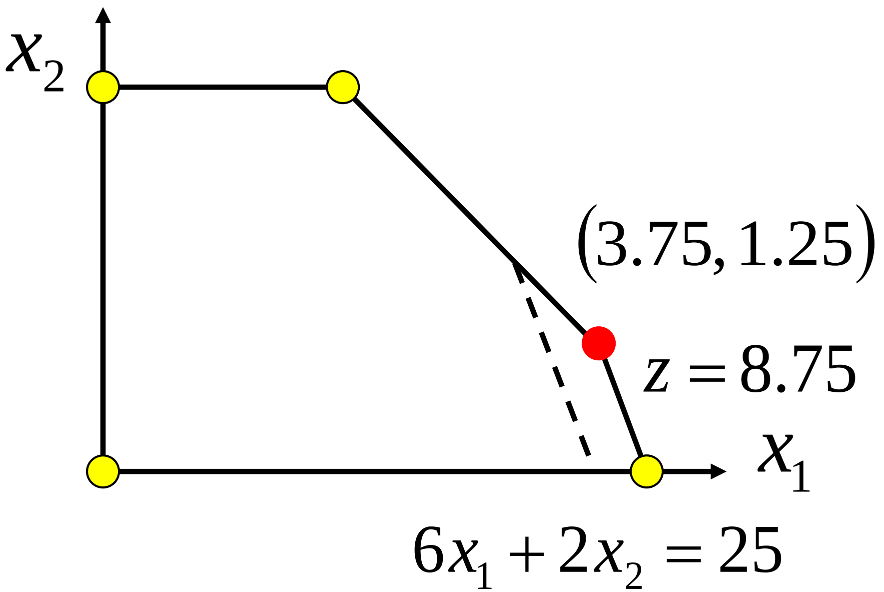


最优目标值增量 $\Delta z = 8.5 - 8.5 = 0$

第二个约束的常数项加1

$$6x_1 + 2x_2 \le 24 \quad \rightarrow \quad 6x_1 + 2x_2 \le 25$$

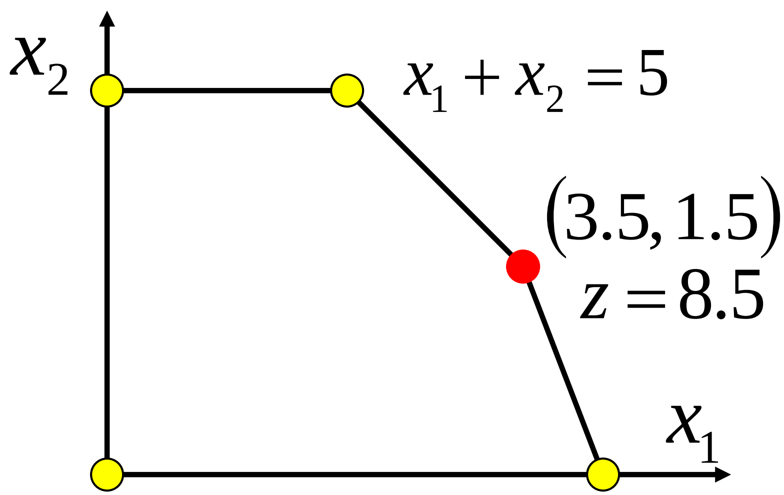


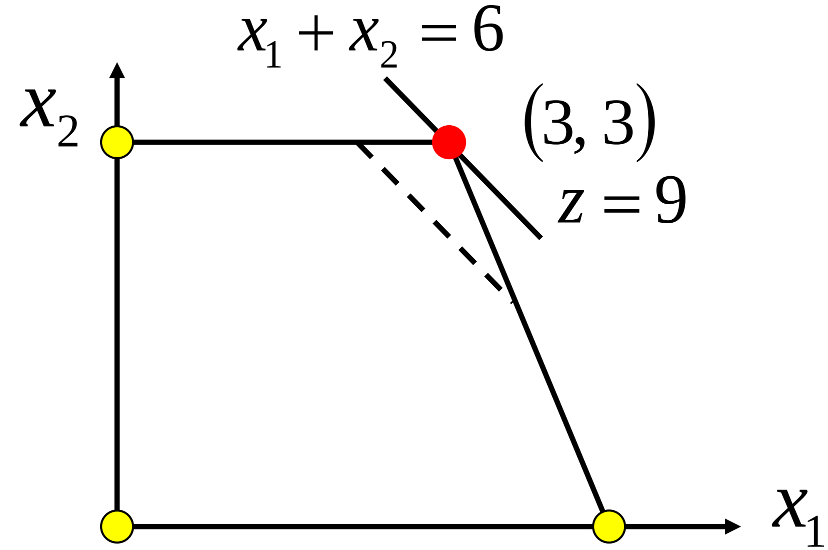


最优目标值增量 $\Delta z = 8.75 - 8.5 = 0.25$

第三个约束的常数项加1

$x_1 + x_2 \le 5 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 \le 6$





最优目标值增量 $\Delta z = 9 - 8.5 = 0.5$

不同约束常数项对最优目标值的影响

$$5x_2 \le 15 \quad \Rightarrow \quad 5x_2 \le 16 \quad \Delta z = 0$$

$$6x_1 + 2x_2 \le 24 \quad \Rightarrow \quad 6x_1 + 2x_2 \le 25 \quad \Delta z = 0.25$$

$$x_1 + x_2 \le 5 \quad \Rightarrow \quad x_1 + x_2 \le 6 \quad \Delta z = 0.5$$

例1对偶问题

$$\begin{aligned} \min\ & 15y_1 + 24y_2 + 5y_3 \\ \text{s.t.}\ & 6y_2 + y_3 \ge 2 \\ & 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1 \\ & y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

最优解 $\hat{y}_1 = 0,\ \hat{y}_2 = 0.25,\ \hat{y}_3 = 0.5$ *（用对偶性验证）*

<u>对偶问题最优解正好是最优目标函数的增量！</u>

一般情况

原问题 $\max\ C^T X$　　　　对偶问题 $\min\ Y^T b$

$$\text{s.t.}\quad AX \le \vec{b}$$

$$X \ge 0$$

$$\text{s.t.}\quad Y^T A \ge C^T$$

$$Y \ge 0$$

设对偶问题最优解为 $\hat{Y}$，由强对偶性知，原问题的最优目标值为

$$\hat{Y}^T \vec{b} = \sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i b_i$$

影子价格和对偶变量什么关系？

所以，原问题最优目标关于 $b_i, 1 \le i \le m$ 的**梯度**分别是 $\hat{y}_i, 1 \le i \le m$，说明 b_i 增加一个单位可增加 $\hat{y}_i$ 的最优目标值，故称其为 b_i 的**影子价格**

原问题 $\max\ C^T X$　　　对偶问题 $\min\ Y^T b$

$$\text{s.t.}\quad AX \le \vec{b} \qquad\qquad \text{s.t.}\quad Y^T A \ge C^T$$

$$X \ge 0 \qquad\qquad Y \ge 0$$

设 $\hat{X}$ 是原问题的最优解，$\hat{Y}$ 是对偶问题的最优解

如果原问题的某个约束在最优解处不是严格等式，

例如 $b_i - \vec{a}_i^T \hat{X} > 0$，增加 b_i 不会增加最优目标值，

所以其影子价格 $\hat{y}_i$ 等于**0**，因此有互补松弛等式

$$\hat{y}_i\left(b_i - \vec{a}_i^T \hat{X}\right) = 0, \forall 1 \le i \le m$$

同样道理可得

$$\left(\hat{Y}^T P_j - c_j\right)\hat{x}_j = 0, \forall 1 \le j \le n$$

$$\max \ 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 5x_2 \le 15$$

$$6x_1 + 2x_2 \le 24$$

$$x_1 + x_2 \le 5$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 1.5 \\ 7.5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$5x_2 = 7.5 < 15 \qquad y_1 = 0$$

$$6x_1 + 2x_2 = 24 \qquad y_2 > 0$$

$$x_1 + x_2 = 5 \qquad y_3 > 0$$

如果原问题为标准型

$$\max\left\{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \;\middle|\; s.t.\ \sum_{j=1}^{n} P_j x_j = \vec{b},\ x_j \geq 0,\ \forall 1 \leq j \leq n\right\}$$

B 是最优基矩阵，在推导强对偶性时已说明其对偶问题的最优解为 $\hat{Y}^T = C_B^T B^{-1}$，于是，非基变量 x_j 的检验数可写成

$$c_j - C_B^T B^{-1} P_j = c_j - \hat{Y}^T P_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i a_{ij}$$

物理意义为生产单位 j 产品的利润减去按影子价格计算的资源的总成本，如果差值大于零，应继续生产，所以最优解必须满足所有检验数非正

注意

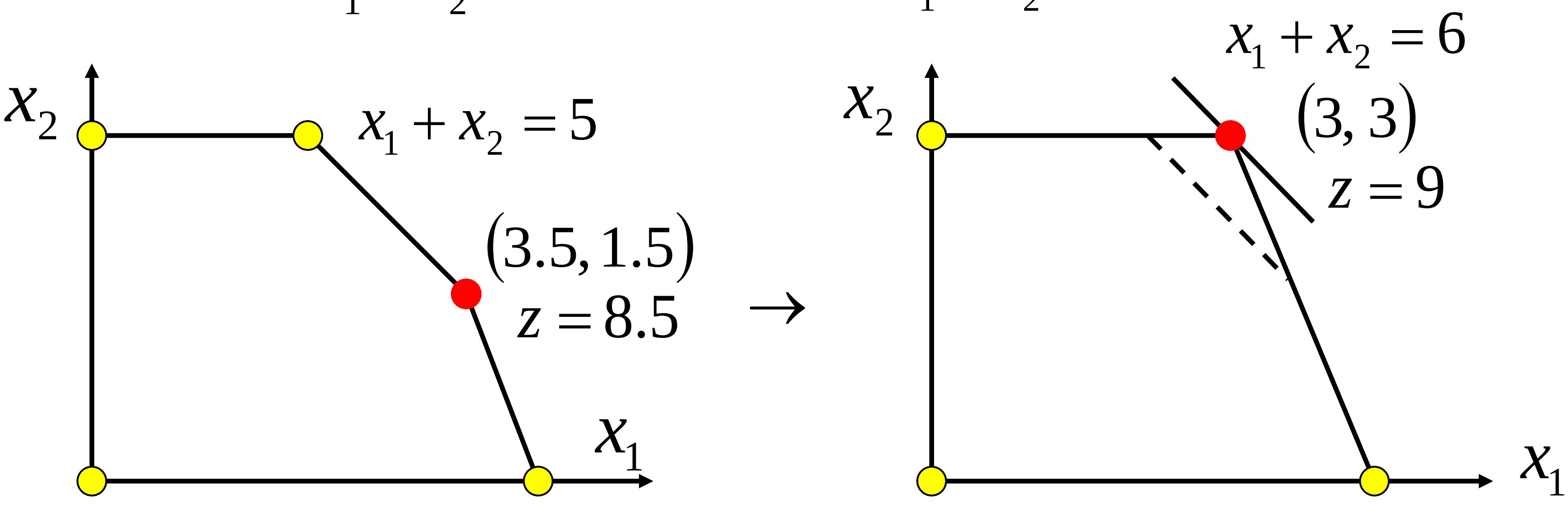
影子价格只能在局部范围内反映资源增长（即增加约束的右边常数）可以产生的目标函数的增值，一旦资源增长导致最优基矩阵改变，原来的最优对偶变量值一般情况下不等于单位资源增长带来的目标函数的增值，从而失去影子价格的意义

$\vec{b}$ 改变，但 B 不变，影子价格 $\hat{Y}^T = C_B^T B^{-1}$ 不变

$\vec{b}$ 改变导致 B 改变，影子价格 $\hat{Y}^T = C_B^T B^{-1}$ 改变

例如：例1中第三个约束的常数项加1

$$x_1 + x_2 \le 5 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 \le 6$$



影子价格不变，最优目标值增量等于 $0.5 \times (6 - 5)$

如果 $\quad x_1 + x_2 \le 5 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 \le 6.001$

最优基改变，最优目标值增量不等于 $0.5 \times (6.001 - 5)$

对偶单纯型法

出发点：已知不是最优基的对偶可行基 B

满足对偶可行性 $C_B^T B^{-1} P_{j(i)} \geq c_{j(i)}, \ \forall i > m$

不满足原可行性 $B^{-1}\vec{b} \geq 0$

问题：如何迭代找到最优基

可能的途径：

在保持对偶可行性的前提下找到满足原可行性的基

例1 $\max \ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 15 \\ 24 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1,2,\cdots,5$$

如果取$B = \left(P_2, P_1, P_5\right)$，用 B^{-1}左乘等式约束两边，可将其变换成以下等价的标准线性规划模型

$$\max \ 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1/5 \\ -1/15 \\ -2/15 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/6 \\ -1/6 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1,2,\cdots,5$$

$$\max \quad 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1/5 \\ -1/15 \\ -2/15 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/6 \\ -1/6 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1,2,\cdots,5$$

将 x_2, x_1, x_5 的表示式代入目标函数，原问题等价为

$$\max \quad 9 - \frac{1}{15} x_3 - \frac{1}{3} x_4$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1/5 \\ -1/15 \\ -2/15 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/6 \\ -1/6 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x_j \geq 0, \ j = 1,2,\cdots,5$$

变换后的等价问题对应的单纯型表为

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	$1/5$	0	0	3
x_1	1	0	$-1/15$	$1/6$	0	3
x_5	0	0	$-2/15$	$-1/6$	1	-1
	0	0	$-1/15$	$-1/3$	0	$z-9$

该单纯型表的检验数均为非正数，如果右边常数没有负数，已经得到原问题的最优解

能否在保持检验数非正的前提下消除负的右边数？

用 -1 乘第三个等式得到下述单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	1/5	0	0	3
x_1	1	0	$-1/15$	1/6	0	3
x_5	0	0	2/15	1/6	-1	1
	0	0	$-1/15$	$-1/3$	0	$z-9$

Page 49-Page 53为原始单纯型算法视角

上述做法消除了右边常数中的 -1，但使 x_5 出基，因此需要选一个非基变量进基，此时可以选 x_3 或 x_4 进基，需要考虑的问题是选谁能保持检验数非正？

回到前面的表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	$1/5$	0	0	3
x_1	1	0	$-1/15$	$1/6$	0	3
x_5	0	0	$-2/15$	$-1/6$	1	-1
	0	0	$-1/15$	$-1/3$	0	$z-9$

如果选 x_3 进基，首先将第三行除以 $-2/15$ 得到

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad \frac{-1/6}{-2/15} \quad \frac{1}{-2/15} \quad \frac{-1}{-2/15}$$

再将所得行乘以 $-(-1/15)$ 加到最后一行得到检验数

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad -(-1/15)\times\frac{-1/6}{-2/15}+(-1/3) \quad -(-1/15)\times\frac{1}{-2/15}$$

同理，对于表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	1/5	0	0	3
x_1	1	0	$-1/15$	1/6	0	3
x_5	0	0	$-2/15$	$-1/6$	1	-1
	0	0	$-1/15$	$-1/3$	0	$z-9$

如果选 x_4 进基，首先将第三行除以 $-1/6$ 得到

$$0 \quad 0 \quad \frac{-2/15}{-1/6} \quad 1 \quad \frac{1}{-1/6} \quad \frac{-1}{-1/6}$$

再将所得行乘以 $-(-1/3)$ 加到最后一行得到检验数

$$0 \quad 0 \quad -(-1/3)\times\frac{-2/15}{-1/6}+(-1/15) \quad 0 \quad -(-1/3)\times\frac{1}{-1/6}$$

选 x_3 和 x_4 进基得到的检验数分别为

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad -(-1/15)\times\frac{-1/6}{-2/15}+(-1/3) \quad -(-1/15)\times\frac{1}{-2/15}$$

$$0 \quad 0 \quad -(-1/3)\times\frac{-2/15}{-1/6}+(-1/15) \quad 0 \quad -(-1/3)\times\frac{1}{-1/6}$$

从以上数据及其产生过程可以看出，出基变量检验数一定为负数，其它基变量和进基变量检验数一定为 0，而其它非基变量检验数可分别写成

$$-(-1/6)\times\left(\frac{-1/15}{-2/15}-\frac{-1/3}{-1/6}\right),\quad -(-2/15)\times\left(\frac{-1/3}{-1/6}-\frac{-1/15}{-2/15}\right)$$

由于 $\frac{-1/15}{-2/15}\le\frac{-1/3}{-1/6}$，选 x_3 进基能保持检验数非正

对照单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	1/5	0	0	3
x_1	1	0	$-1/15$	1/6	0	3
x_5	0	0	$-2/15$	$-1/6$	1	-1
	0	0	$-1/15$	$-1/3$	0	$z-9$

和 $-(-1/6)\times\left(\dfrac{-1/15}{-2/15}-\dfrac{-1/3}{-1/6}\right)$ （x_3 进基后 x_4 的检验数）

$-(-2/15)\times\left(\dfrac{-1/3}{-1/6}-\dfrac{-1/15}{-2/15}\right)$ （x_4 进基后 x_3 的检验数）

可得规律：选等于 $\min\left\{\dfrac{-1/15}{-2/15},\dfrac{-1/3}{-1/6}\right\}$ 的变量进基

出基变量行非基变量的系数全为负数

BV	x_1	x_2	x_3	x_4		S
x_2	0	1	1/5	0		
x_1	1	0	−1/15	1/6		
x_5	0	0	−2/15	−1/6	1	−1
	0	0	−1/15	−1/3	0	$z-9$

Page 54以下为对偶单纯型算法视角

$$\frac{-2}{15}x_3+\frac{-1}{6}x_4+x_5=-1$$
$$\frac{-1}{15}x_3+\frac{-1}{3}x_4=z-9$$
$$\Leftarrow$$
$$\Downarrow$$

$$\frac{-2x_3}{15}+\frac{-x_4}{6}+x_5=-1 \quad ①$$
$$0.5\times\frac{-2x_3}{15}+2\times\frac{-x_4}{6}=z-9 \quad ②$$

$\Rightarrow$

①× (-0.5) + ② 合格

或

①× (-2) + ② 不合格

$$0.5=\min\{0.5,\ 2\}=\min\left\{\frac{-1/15}{-2/15},\ \frac{-1/3}{-1/6}\right\}$$ $\Rightarrow$ <u>选比值小的进基</u>!

出基变量行非基变量的系数中有正数

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	1/5	0	0	3
x_1	1	0	−1/15	1/6	0	3
x_5	0	0	2/15	−1/6	1	−1
	0	0	−1/15	−1/3	0	$z-9$

$$\frac{2}{15}x_3 + \frac{-1}{6}x_4 + x_5 = -1$$

$$\frac{-1}{15}x_3 + \frac{-1}{3}x_4 = z - 9 \quad \Leftarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2x_3}{15} + \frac{-x_4}{6} + x_5 = -1 \quad ①$$

$$-0.5\times\frac{2x_3}{15} + 2\times\frac{-x_4}{6} = z - 9 \quad ②$$

$\Rightarrow$ ①× **(-2) +** ② **合格**

选比值小的变量进基时不用考虑正数**!**

出基变量行非基变量的系数全为正数

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	1/5	0	0	3
x_1	1	0	−1/15	1/6	0	3
x_5	0	0	2/15	1/6	1	−1
	0	0	−1/15	−1/3	0	$z-9$

$$\frac{2}{15}x_3+\frac{1}{6}x_4+x_5=-1 \quad \Leftarrow$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2}{15}x_3+\frac{1}{6}x_4+x_5=-1$$

$$x_3\geq 0, x_4\geq 0, x_5\geq 0$$

不可能同时成立

<u>出基变量行的变量系数全为正数时原问题无解</u>！

<u>一般情况</u>：要处理的等式约束和目标约束可写成

$$\boxed{x_{j(t)} + \hat{a}_{t\,j(m+1)} x_{j(m+1)} + \cdots + \hat{a}_{t\,j(n)} x_{j(n)} = \hat{x}_{j(t)}}$$

$$\sigma_{j(m+1)} x_{j(m+1)} + \sigma_{j(m+2)} x_{j(m+2)} + \cdots + \sigma_{j(n)} x_{j(n)} = z - \hat{z}$$

其中 $x_{j(t)}$ 是出基变量，$\boxed{\hat{x}_{j(t)} < 0}$，$\sigma_{j(l)} \le 0, \forall m+1 \le l \le n$

<u>若 $\hat{a}_{t\,j(m+1)}, \hat{a}_{t\,j(m+2)}, \cdots, \hat{a}_{t\,j(n)}$ 中没负数，原问题无可行解</u>

否则可确定 $$\frac{\sigma_{j(k)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} = \min\left\{ \frac{\sigma_{j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(l)}} \,\middle|\, \text{s.t. } \hat{a}_{t\,j(l)} < 0, m+1 \le l \le n \right\}$$

<u>用 $x_{j(k)}$ 进基替换 $x_{j(t)}$，可验证所有检验数保持非正</u>

用 $x_{j(k)}$ 进基替换 $x_{j(t)}$ 得到新的检验数的过程如下：

$$x_{j(t)} + \hat{a}_{t\,j(m+1)} x_{j(m+1)} + \cdots + \hat{a}_{t\,j(k)} x_{j(k)} + \cdots + \hat{a}_{t\,j(n)} x_{j(n)} = \hat{x}_{j(t)}$$

$$\Rightarrow x_{j(k)} + \sum_{m+1 \le l \le k-1} \frac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} x_{j(l)} + \frac{1}{\hat{a}_{t\,j(k)}} x_{j(t)} + \sum_{k+1 \le l \le n} \frac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} x_{j(l)} = \frac{\hat{x}_{j(t)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} \quad ①$$

$$\sigma_{j(m+1)} x_{j(m+1)} + \sigma_{j(m+2)} x_{j(m+2)} + \cdots + \sigma_{j(k)} x_{j(k)} \cdots + \sigma_{j(n)} x_{j(n)} = z - \hat{z} \quad ②$$

①×（$-\sigma_{j(k)}$）+②

$$\Rightarrow \sum_{m+1 \le l \le k-1} \sigma'_{j(l)} x_{j(l)} + \sigma'_{j(t)} x_{j(t)} + \sum_{k+1 \le l \le n} \sigma'_{j(l)} x_{j(l)} = z - \hat{z}'$$

其中 $$\sigma'_{j(l)} = \sigma_{j(l)} - \sigma_{j(k)} \frac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} = \hat{a}_{t\,j(l)} \boxed{\left(\frac{\sigma_{j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(l)}} - \frac{\sigma_{j(k)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} \right)} \le 0, \quad \forall l$$

所有检验数保持非正

回到开始的单纯型表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	1/5	0	0	3
x_1	1	0	−1/15	1/6	0	3
x_5	0	0	−2/15	−1/6	1	−1
	0	0	−1/15	−1/3	0	$z-9$

x_3 进基 x_5 出基后的表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	0	−0.25	1.5	1.5
x_1	1	0	0	0.25	−0.5	3.5
x_3	0	0	1	1.25	−7.5	7.5
	0	0	0	−0.25	−0.5	$z-8.5$

常数项全部非负

检验数全部非正

已经得到最优解

<u>一般情况</u>：消除负的右边常数后可能在常数项中产生新的负常数，例如，在原表中将第三行除以 $-2/15$ 得

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	$1/5$	0	0	3
x_1	1	0	$-1/15$	$1/6$	0	3
x_5	0	0	1	1.25	-7.5	7.5
	0	0	$-1/15$	$-1/3$	0	$z-9$

变换后的前两个常数值取决于 x_3 所在列的前两个数据，完全可能出现负数

<u>继续迭代能否保证收敛</u>？

由于每次迭代是从一个不可行的基矩阵转到另一个不可行的基矩阵（一旦遇到可行的基矩阵就得到了最优解），而基矩阵的总数是有限的，如果不出现循环，算法一定在有限步内停止于最优解

不可行的基矩阵的数目更加是有限的

所以，关键问题是，<u>迭代过程是否不会出现循环</u>？

为回答收敛问题，先确定一步迭代后下式中的 $\hat{z}'$

$$\sum_{m+1\le l\le k-1}\sigma'_{j(l)}x_{j(l)}+\sigma'_{j(t)}x_{j(t)}+\sum_{k+1\le l\le n}\sigma'_{j(l)}x_{j(l)}=z-\hat{z}'$$

由于上式来自 ①× $(-\sigma_{j(k)})$ + ②，其中

$$x_{j(k)}+\sum_{m+1\le l\le k-1}\frac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}x_{j(l)}+\frac{1}{\hat{a}_{t\,j(k)}}x_{j(t)}+\sum_{k+1\le l\le n}\frac{\hat{a}_{t\,j(l)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}x_{j(l)}=\frac{\hat{x}_{j(t)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} \quad ①$$

$$\sigma_{j(m+1)}x_{j(m+1)}+\sigma_{j(m+2)}x_{j(m+2)}+\cdots+\sigma_{j(k)}x_{j(k)}\cdots+\sigma_{j(n)}x_{j(n)}=z-\hat{z} \quad ②$$

可得 $$z-\hat{z}'=-\sigma_{j(k)}\times\frac{\hat{x}_{j(t)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}+z-\hat{z} \quad\Rightarrow\quad \hat{z}'=\hat{z}+\boxed{\sigma_{j(k)}\times\frac{\hat{x}_{j(t)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}}}$$

如果 $\sigma_{j(k)} < 0$（相当于非退化条件），因为

$$\hat{x}_{j(t)} < 0,\ \hat{a}_{t\,j(k)} < 0$$

所以
$$\hat{z}' = \hat{z} + \sigma_{j(k)} \times \frac{\hat{x}_{j(t)}}{\hat{a}_{t\,j(k)}} < \hat{z}$$

由于 $\hat{z}$ 和 $\hat{z}'$ 都是由对应的基矩阵决定的，$\hat{z}' < \hat{z}$ 说明在 $\hat{z}$ 以后产生的基矩阵不可能等于 $\hat{z}$ 对应的基矩阵，因此，<u>在非退化条件下可以保证算法收敛于最优解</u>，在退化情况下，只要采取辅助措施避免在具有相同 $\hat{z}$ 值的几个基矩阵中循环就可以保证收敛

为什么叫对偶单纯型法？

原问题

$$\max \quad z$$

$$\text{s.t.} \quad P_1 x_1 + P_2 x_2 + \cdots + P_n x_n = \vec{b}$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = z$$

$$x_j \ge 0, \ \forall 1 \le j \le n$$

对偶问题

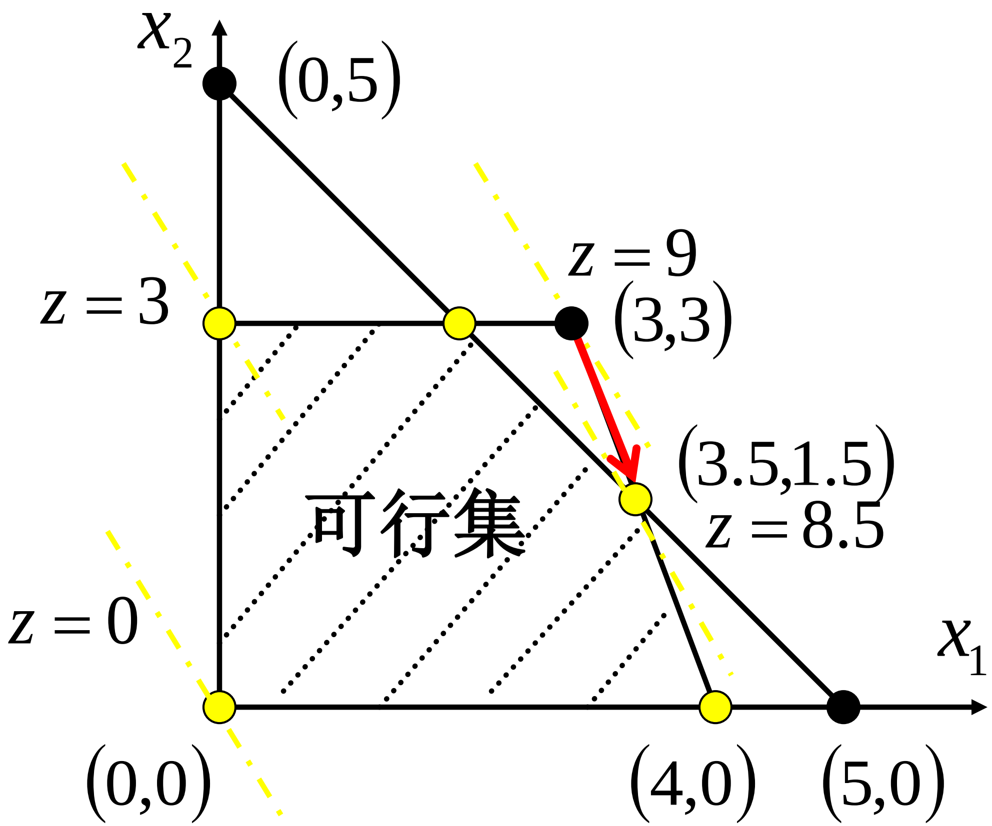
$$\min \quad Y^T \vec{b}$$

$$\text{s.t.} \quad Y^T P_j \ge c_j, \ \forall 1 \le j \le n$$

$Y_B^T = C_B^T B^{-1}$和一次迭代后的 $Y_{B'}^T = C_{B'}^T B'^{-1}$ 都是对偶问题的可行解，目标值满足 $\hat{z} = C_B^T B^{-1} \vec{b} > C_{B'}^T B'^{-1} \vec{b} = \hat{z}'$ ，该算法的本质是 在对偶问题的可行顶点集中沿着目标函数下降路径找到最优顶点，所以叫对偶单纯型法

对偶单纯型法的几何意义

例 **1** 的可行集和目标函数等值线如下图所示，其中黄点是基本可行解，黑点是不可行基矩阵确定的点



对偶单纯型法是从不可行区域逐渐减少目标函数值逼近最优解，如右图从 $(3,3)$ 到最优解 $(3.5,1.5)$

什么时候用对偶单纯型法?

例、 原问题 等价问题

$$\min\ 15x_1+24x_2+5x_3$$
$$\text{s.t.}\ \ 6x_2+x_3\ge 2$$
$$5x_1+2x_2+x_3\ge 1$$
$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\max\ (-15,-24,-5,0,0)X$$
$$\text{s.t.}\ \begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X=\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$X\ge 0$$

上述问题没有明显的初始可行基，需引入人工变量，但有明显的对偶可行基，用对偶单纯型法不需要人工变量

结论：对偶单纯型法适用于 $C\ge 0$ 的下述线性规划问题

$$\min\left\{C^T X \,\middle|\, \text{s.t.}\ \ AX\ge \vec{b},\ X\ge 0\right\}$$