清華大學 TSINGHUA UNIVERSITY 数学作业纸

班级：自11 姓名：孙捷 编号：2021013444 科目：自动控制 第 1 页

1. (a) 解：$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1\end{cases}$ 取 $V(x) = 1-\cos x_1 + \frac{1}{2}x_2^2$

$\dot{V}(x) = \sin x_1 \cdot x_2 - x_2 \sin x_1 = 0$

$\therefore V(x) > 0$，$\dot{V}(x) = 0$ 即 $V(x)$ 正定 $\dot{V}(x)$ 半负定

$\therefore$ 原点是稳定的，但不是渐近稳定的，即也不是全局渐近稳定的。

(b) 解：$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -5x_1^4 x_2 - x_1^3\end{cases}$ 取 $V(x) = x_1^4 + 2x_2^2$

$\therefore \dot{V}(x) = 4x_1^3 x_2 - 20x_1^4 x_2^2 - 4x_1^3 x_2 = -20x_1^4 x_2^2$

$\therefore V(x) > 0$ $\dot{V}(x) < 0$ 即 $V(x)$ 正定 $\dot{V}(x)$ 负定

$\therefore$ 原点是渐近稳定的。

$\because$ $\|x\| \to \infty$ 时，$V(x) \to \infty$ $\therefore$ 原点是全局渐近稳定的

2. 解：$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g(x_1) - x_2\end{cases}$ 取 $V(x) = \int_0^{x_1} g(x_1)\,dx_1 + \frac{1}{2}x_2^2$

其中 $x_1 = x$ $x_2 = \dot{x}$

$\dot{V}(x) = g(x_1)\cdot x_2 - x_2 g(x_1) - x_2^2 = -x_2^2$

$\because g(0) = 0$，$g(x) \neq 0$，$\forall x \neq 0$，又有 x_1 与 $g(x_1)$ 同号

$\therefore \int_0^{x_1} g(x_1)\,dx_1 > 0$ $\therefore V(x) > 0$，$\dot{V}(x) < 0$

即 $V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 负定 $\therefore$ 原点是渐近稳定的

当 $x_1 \to \infty$ $x_2 = 0$ 时，$\|x\| \to \infty$，但由于不可确定此时 $\int_0^{x_1} g(x_1)\,dx_1 \to \infty$

$\therefore$ 不能确定原点是否是全局渐近稳定的，要依具体 $g(x)$ 情况

3. 解：设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix}$ 又 $A=-A^T$ $\therefore a_{ii}=0,\ a_{ij}=-a_{ji}$

$\therefore F(x) = A - diag(3x_1^2, \cdots, 3x_n^2)$

$\therefore F(x)+F^T(x) = A - diag(3x_1^2,\cdots,3x_n^2) + A^T - diag(3x_1^2,\cdots,3x_n^2)$

$= -2\,diag(3x_1^2,\cdots,3x_n^2)$

$\therefore F(x)+F^T(x)$ 负定 $\therefore$ 原点是渐近稳定的.

对于 $f(x) = Ax + \begin{pmatrix} x_1^3 \\ \vdots \\ x_n^3 \end{pmatrix}$ 假设 $A=0$，则 $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ \vdots \\ x_n^3 \end{pmatrix}$，

由于符号可变，不能保证 $\|x\|\to\infty$ 时有 $\|f(x)\|\to\infty$

$\therefore$ 原点不是全局渐近稳定的.

4. 解：$F(x) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 5bx_2^4-1 \end{pmatrix}$ $F(x)+F^T(x) = 2F(x) = 2\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 5bx_2^4-1 \end{pmatrix}$

首先保证 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 5bx_2^4-1 \end{pmatrix}$ 负定，则 $a<0$，$\begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 5bx_2^4-1 \end{vmatrix} > 0$

$\therefore \begin{cases} a<0 \\ 5abx_2^4 - a - 1 > 0 \end{cases}$ $\therefore b\le 0,\ a<-1$ 时

满足 $\forall x_2$，有 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 5bx_2^4-1 \end{pmatrix}$ 负定

$\because \|x\|\to\infty$ 时，$(x_1 - x_2 + bx_2^5)$ 在 $b\neq 0$ 时 $\to\infty$

$\therefore$ 为满足全局渐近稳定，$b\neq 0$

$\therefore$ 综上，a, b 取值范围为 $a<-1,\ b<0$

5. 解：设 $grad\,V(x) = \begin{pmatrix} \nabla_1 \\ \nabla_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$

$\therefore \dot{V}(x) = [grad\,V(x)]^T \dot{x} = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(-2x_1 - 2x_1x_2^4) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\cdot(-x_2)$

$= -2a_{11}x_1^2 - (2a_{12} + a_{21})x_1x_2 - 2a_{11}x_1^2x_2^4 - 2a_{12}x_1x_2^5 - a_{22}x_2^2$

$\because \frac{\partial \nabla_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla_2}{\partial x_1}$ $\therefore a_{12} = a_{21}$ $\therefore$ 令 $a_{12} = a_{21} = 0$　$a_{11} = a_{22} = 1$

则有 $\dot{V}(x) = -2x_1^2 - 2x_1^2x_2^4 - x_2^2 < 0$，$\therefore \dot{V}(x)$ 负定

$V(x) = \int_0^{x_1} x_1\,dx_1 + \int_0^{x_2} x_2\,dx_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)^2 > 0$　$\therefore V(x)$ 正定

$\therefore$ 原点是渐近稳定的.

又 $\because \|x\| \to \infty$ 时. $V(x) \to \infty$　$\therefore$ 原点是全局渐近稳定的