运筹学

x. Quiz

李 力

清华大学

Email: li-li@tsinghua.edu.cn

2023.10.

1. 线性规划

测试题1.1

农民特德有500英亩的土地种植小麦、玉米或甜菜。他需要200吨小麦和240吨玉米来养牛。这些农作物可以在他的土地上种植，也可以从批发商那里购买。任何超过这些数量的产品都可以出售：小麦170美元/吨，玉米150美元/吨。任何短缺必须以小麦238美元/吨，玉米210美元/吨的价格从批发商处购买。特德也能种甜菜。少于6000吨甜菜可以卖36美元/吨。但由于甜菜生产的经济配额，超过6000吨的甜菜只能以每吨10美元的价格出售。亩产量：小麦2.5吨/英亩，玉米3吨/英亩，甜菜20吨/英亩。种植花费：小麦150美元/英亩，玉米230美元/英亩，甜菜260美元/英亩。

请问特德如何种地才能获得最大收益？

决策变量

- $x_{W,C,B}$ Acres of Wheat, Corn, Beets Planted
- $w_{W,C,B}$ Tons of Wheat, Corn, Beets sold (at favorable price).
- e_B Tons of beans sold at lower price
- $y_{W,C}$ Tons of Wheat, Corn purchased.

⋆ Note that Farmer Ted has *recourse*. After he observes the weather event, he can decide how much of each crop to sell or purchase!

整个问题

maximize

$$-150x_W - 230x_C - 260x_B - 238y_W + 170w_W - 210y_C + 150w_C + 36w_B + 10e_B$$

subject to

$$\begin{aligned}
x_W + x_C + x_B &\leq 500 \\
2.5x_W + y_W - w_W &= 200 \\
3x_C + y_C - w_C &= 240 \\
20x_B - w_B - e_B &= 0 \\
w_B &\leq 6000 \\
x_W, x_C, x_B, y_W, y_C, e_B, w_W, w_C, w_B &\geq 0
\end{aligned}$$

测试题1的答案

	Wheat	Corn	Beets
Plant (acres)	120	80	300
Production	300	240	6000
Sales	100	0	6000
Purchase	0	0	0

- Profit: $118,600

1. 线性规划

测试题1.2：证明或证否：若一个线性规划问题在两个顶点上达到最优值，则此线性规划问题必有无穷多个最优解。

测试题1.2：证明或证否：若一个线性规划问题在两个顶点上达到最优值，则此线性规划问题必有无穷多个最优解。

显然，这两点两线上的所有点都是最优解

测试题1.3：证明或证否：如果标准模型的矩阵 A 不是行满秩矩阵，则只可能无可行解。

测试题1.3：证明或证否：如果标准模型的矩阵 A 不是行满秩矩阵，则只可能无可行解。

◎ 错误，举反例。

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

此时 A 行不满秩，但是有可行解$x = [1,1,1]^{\mathrm{T}}$。

1. 线性规划

测试题1.4：证明或证否：给定1个可行基矩阵 P 可唯一确定1个顶点，反之给定1个顶点可唯一确定1个可行基矩阵 P。

测试题1.4：证明或证否：给定1个可行基矩阵 P 可唯一确定1个顶点，反之给定1个顶点可唯一确定1个可行基矩阵 P。

后半句错误。在退化情况下，一个顶点可对应多个可行基矩阵。参见课件中Beale 给出的退化例子

测试题1.5：证明或证否：只有一个线性规划问题的可行域集合是无界的，该问题才有可能存在无界的解

1. 线性规划

测试题1.5：证明或证否：只有一个线性规划问题的可行域集合是无界的，该问题才有可能存在无界的解

$$-n\,|c|_\infty\,|x|_\infty \le z \le n\,|c|_\infty\,|x|_\infty$$

$|w|_\infty$ 为 向量 w 的无穷范数

测试题1.6：对于一个线性规划标准型问题，给定一组决策变量的值，如何判断其是否是基本可行解？如果是基本可行解，如何判断下一步往何基本可行解翻转？

测试题1.6：对于一个线性规划标准型问题，给定一组决策变量的值，如何判断其是否是基本可行解？如果是基本可行解，如何判断下一步往何基本可行解翻转？

判断方法：是否存在一组基B，使得$B^{-1}b = x \geq 0$。

下一步：计算检验数，判断进基出基（参考单纯形法）。

测试题1.7：

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Maximize} & 2x_1 & +x_2 & & & \\
\text{Subject to:} & & & & & \\
 & x_1 & -x_2 & \leq & 10 & (1) \\
 & 2x_1 & -x_2 & \leq & 40 & (2)
\end{array}
$$

$$x_1,\, x_2 \geq 0\,.$$

测试题1.7：

$$
\begin{array}{llll}
\text{Maximize} & 2x_1 + x_2 & & \\
\text{Subject to:} & & & \\
& x_1 - x_2 \le 10 & & (1) \\
& 2x_1 - x_2 \le 40 & & (2) \\
& x_1,\, x_2 \ge 0\,. & &
\end{array}
$$

Basic Variable	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
	1	−2	−1	0	0	0
s_1	0	1	−1	1	0	10
s_2	0	2	−1	0	1	40

第一步

Basic Variable	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
	1	0	−3	2	0	20
x_1	0	1	−1	1	0	10
s_2	0	0	1	−2	1	20

第二步

测试题1.7：

Basic Variable	z	x_1	x_2	s_1	s_2	
	1	0	0	-4	3	80
x_1	0	1	0	-1	1	30
x_2	0	0	1	-2	1	20

第三步

$$x_1, x_2 \geq 0 .$$

因为没有约束条件能阻止我们将变量s1的值变为无穷大，而且目标函数也将因为含有4s_1项而变为无穷大。因此本问题存在无界的最优解。

测试题1.8：用单纯形法求解

1	0	0	1	0	0	1
20	1	0	0	1	0	100
200	20	1	0	0	1	10000
100	10	1	0	0	0	0

First such example by Klee and Minty in 1972:

$$\text{maximize} \quad \sum_{j=1}^{d} 10^{d-j} x_j$$

$$\begin{aligned} \text{subject to} \quad 2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i &\leq 100^{i-1} \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, d. \end{aligned}$$

In practice, this looks like:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & & & \leq & 1 \\ 20x_1 & + & x_2 & & & \leq & 100 \\ 200x_1 & + & 20x_2 & + & x_3 & \leq & 10000. \end{array}$$

1. 线性规划

测试题1.8

1	0	0	1	0	0	1
20	1	0	0	1	0	100
200	20	1	0	0	1	10000
100	10	1	0	0	0	0

1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	−20	1	0	80
0	20	1	−200	0	1	9800
0	10	1	−100	0	0	−100

1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	−20	1	0	80
0	0	1	200	−20	1	8200
0	0	1	100	−10	0	−900

1	0	0	1	0	0	1
20	1	0	0	1	0	100
−200	0	1	0	−20	1	8000
−100	0	1	0	−10	0	−1000

测试题1.8：

1	0	0	1	0	0	1
20	1	0	0	1	0	100
−200	0	1	0	−20	1	8000
100	0	0	0	10	−1	−9000

1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	−20	1	0	80
0	0	1	200	−20	1	8200
0	0	0	−100	10	−1	−9100

1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	−20	1	0	80
0	20	1	−200	0	1	9800
0	−10	0	100	0	−1	−9900

1	0	0	1	0	0	1
20	1	0	0	1	0	100
200	20	1	0	0	1	10000
−100	−10	0	0	0	−1	−10000

测试题1.9：给出下面问题的对偶问题，并讨论解的存在性

$$\begin{aligned} \max \quad & a\,x_1 + b\,x_2 \\ s.t. \quad & x_1 - x_2 \le 1 \\ & -x_1 + x_2 \le 2 \end{aligned}$$

测试题1.9：

测试题1.10：给出下面问题的对偶问题，并求出最优解

$$\min\ 5x_1 + 11x_2$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} 6x_1 + x_2 \geq 6 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1 + 6x_2 \geq 6 \end{cases}$$

测试题1. 10：

◎ 直接写出对偶问题

$$\max \ 6y_1+10y_2+12y_3+12y_4+10y_5+6y_6$$

$$\text{s.t.}\ 6y_1+5y_2+4y_3+3y_4+2y_5+y_6=5$$

$$y_1+2y_2+3y_3+4y_4+5y_5+6y_6=11$$

$$y_i\geq 0,\qquad i=1,2,\dots,6$$

对偶问题的最优解为

$$y=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}5\\ 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/7\\ 13/7\end{bmatrix}\geq 0$$

对应的基变量为y_4和y_5。由互补松弛性定理，原问题第 4、5 条不等式取等号，

$$3x_1+4x_2=12$$

$$2x_1+5x_2=10$$

解得$x^*=\left[\frac{20}{7},\frac{6}{7}\right]^{\mathrm{T}}$。

测试题1. 11：给出下面问题的对偶问题

$$
\begin{aligned}
\max \quad & d^\top x \\
s.t. \quad & Fx = 0 \\
& Ix \leq c \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

1. 线性规划

引入松弛变量 x' ，则有标准形式(P)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} \\
s.t. \quad & \begin{bmatrix} I & 1 \\ F & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} \geq 0
\end{aligned}
$$

很容易得到对偶问题(D)

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}^{\top} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \\
s.t. \quad & \begin{bmatrix} I^{\top} & F^{\top} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

1. 线性规划

使用分块矩阵乘法展开以上分块矩阵得到

$$\begin{aligned} \min \quad & c^\top y \\ s.t. \quad & F^\top y' + I^\top y \geq d \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

测试题1.12：

生产I、II两种产品，要占用A、B、C设备时间，每件产品机时利润如表所示：

	产品I	产品II	每天可用时间
占用A机时	0	5	15
占用B机时	6	2	24
占用C机时	1	1	5
利润	2	1	

如何生产使每天利润最大?

1. 线性规划

确定变量： 生产两种产品的件数 x_1, x_2

每天利润： $2x_1 + x_2$

约束条件： $5x_2 \le 15$ A机时约束

$6x_1 + 2x_2 \le 24$ B机时约束

$x_1 + x_2 \le 5$ C机时约束

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ 非负约束

测试题1.13：请写出上述问题的对偶问题，并阐述其物理/经济意义？

1. 线性规划

现在，该生产厂对外承包

候选的承包商，经过调研得知如下信息：

① 该厂现有三种设备A、B、C，对应的每日可用时间分别是15小时、24小时和5小时；

② 该厂宣布对外承包前，利用这三种设备生产两种产品I、II；

③ 产品I、II投放市场后的利润分别不低于2、1

那么，候选承包商应该如何投标才最划算？

后续承包商获得的信息如下：

	A	B	C	市场最低利润
产品I	0	6	1	2
产品II	5	2	1	1
运行时间	15	24	5	

设备A、B、C的单位承租（投标）价格为 y_1, y_2, y_3

目标： $\min\ 15y_1 + 24y_2 + 5y_3$

对比这两个优化问题：

$$
\begin{aligned}
\max\ & 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\ & 5x_2 \le 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\
& x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\min\ & 15y_1 + 24y_2 + 5y_3 \\
\text{s.t.}\ & 6y_2 + y_3 \ge 2 \\
& 5y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 1 \\
& y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

两个问题的最优目标函数值（有限）相同！

测试题1. 14：试说明在线性规划问题的最优单纯形表中，如果存在非基变量检验数为 0 ，且其所在列上存在非 0 系数，则该问题存在无穷多最优解 。

考虑标准线性规划问题

$$\min c^T x$$
$$s.t.\ Ax = b$$
$$x \geq 0$$

其中：$x \in R^n, c \in R^n, A \in R^{m\times n}. b \in R^m$

利用单纯性表得到最优解时，当到达最后一步时，不失一般性地，假设x_1、x_2、…、x_l为基变量，x_{l+1}、x_{l+2}…、x_n为非基变量，同时至少存在一个检验数$\zeta_j = 0(l+1 \leq j \leq n)$，

考虑到此时问题等价于

$$\min z = z_0 - \xi^T x = z_0 - \zeta_{l+1} x_{l+1} - \cdots \zeta_{j-1} x_{j-1} - 0 \cdot x_j - \zeta_{j+1} x_{j+1} - \cdots - \zeta_n x_n$$
$$s.t. x_B + B^{-1} N x_N = \bar{b}$$
$$x \geq 0$$

可见：此时改变x_j的值，最优值不会受到影响，但需要注意的是，更改后的值x_j仍要满足约束条件。

以期中试题为例，对于如下问题：

$$\min 24y_1 + 6y_2 + 5y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 6y_7 + y_8 + y_9$$

$$\text{s.t. } 7y_1 + 6y_2 + 2.5y_3 + y_4 + 0.75y_5 + 0.4y_6 + y_7 + y_8 = 6$$

$$7y_1 + y_2 + y_3 + 0.75y_4 + y_5 + y_6 + 6y_7 + y_9 = 7$$

$$y_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,9$$

得到如下单纯形表时

BV	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	RHS
y_1	1	3	1	1/4	0	-1/5	-1	4/7	-3/7	3/7
y_5	0	-20	-6	-1	1	12/5	20	-4	4	4
	0	-6	-1	0	0	-2/5	-6	-5/7	-5/7	z-156/7

若令 y_4 入基，y_1出基，得到下表

BV	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	RHS
y_4	4	12	4	1	0	-4/5	-4	16/7	-12/7	12/7
y_5	4	-8	-2	0	1	8/5	16	-12/7	16/7	40/7
	0	-6	-1	0	0	-2/5	-6	-5/7	-5/7	z-156/7

这样得到的两个最优解之间的连线上的任一点均为最优解。

因此有，最优解

$$y=\left(\frac{3}{7}\alpha,0,0,\frac{12}{7}-\frac{12}{7}\alpha,\frac{40}{7}-\frac{12}{7}\alpha,0,0,0,0\right)^T$$

其中$\alpha\in[0,1]$。

另一方面，其实此时考虑问题

$$\min z=z_0-\xi^T x=z_0-\zeta_{l+1}x_{l+1}-\cdots\zeta_{j-1}x_{j-1}-0\cdot x_j-\zeta_{j+1}x_{j+1}-\cdots-\zeta_n x_n$$

$$s.t.\, x_B+B^{-1}Nx_N=\bar{b}$$

$$x\geq 0$$

在对最优值没有影响，且满足约束条件时，其它非基变量保持零，可以得到：

$$\min 24y_1+3y_4+3y_5$$

$$s.t.\, 7y_1+y_4+0.75y_5=6$$

$$7y_1+0.75y_4+y_5=7$$

$$y_1,y_4,y_5\geq 0$$

可见，只需要满足约束条件，总有最优值$\frac{156}{7}$

易知此时有最优解

$$y=\left(\frac{3}{7}\alpha,0,0,\frac{12}{7}-\frac{12}{7}\alpha,\frac{40}{7}-\frac{12}{7}\alpha,0,0,0,0\right)^T$$

其中$\alpha\in[0,1]$。

测试题1.15：

已知下述优化问题的一个最优解为 $x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 0, x_3 = \frac{13}{3}$

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 + x_2 - 4x_3 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\
& x_1 + x_2 - x_3 \le -4 \\
& -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\
& x_i \ge 0,\quad i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

求其对偶问题的最优解。

原问题的对偶问题为

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + x_2 - 4x_3 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ & x_1 + x_2 - x_3 \le -4 \\ & -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ & x_i \ge 0,\quad i = 1,2,3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \max\ & -9y_1 + 4y_2 - 4y_3 \\ s.t.\ & y_1 + y_2 - y_3 \ge -1 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \ge -1 \\ & 2y_1 - y_2 + y_3 \ge 4 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

设其最优解为 y_1^*, y_2^*, y_3^*

$$-9y_1^* + 4y_2^* - 4y_3^* = \frac{1}{3} + 0 - 4\times\frac{13}{3} = -17$$

$$y_1^* + y_2^* - y_3^* = -1$$

$$2y_1^* - y_2^* + y_3^* = 4$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -4 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 线性规划

只能解得 $y_1^* = 1, y_3^* = y_2^* + 2$

$$y_1^* = 1, y_2^* = \alpha, y_3^* = \alpha + 2$$

带入对偶问题的约束条件

$$\begin{cases} 1+\alpha-(\alpha+2) \geq -1 \\ 1+\alpha+(\alpha+2) \geq -1 \\ 2-\alpha+(\alpha+2) \geq 4 \\ \alpha \geq 0 \\ \alpha+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \geq -1 \\ \alpha \geq -2 \\ 4 \geq 4 \\ \alpha \geq 0 \\ \alpha \geq -2 \end{cases}$$

对偶问题的最优解 $y_1^* = 1, y_2^* = \alpha, y_3^* = \alpha + 2, \forall \alpha \geq 0$

测试题1.16：x是原问题的可行解（乃至最优解），给定互补松弛条件，求出y，问y是否一定是对偶问题的可行解?（来自2021年选课同学邢海潼）

测试题1.16：x是原问题的可行解（乃至最优解），给定互补松弛条件，求出y，问y是否一定是对偶问题的可行解?（来自2021年选课同学邢海潼）

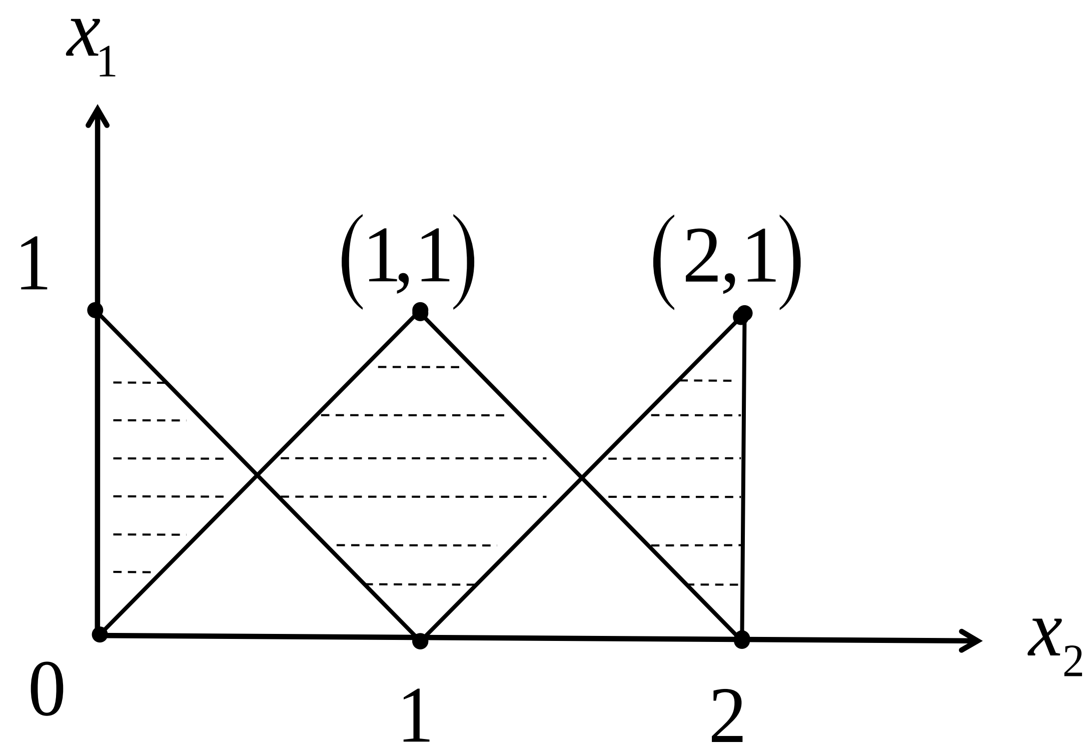
可以证明：1）如果原问题unbounded，那么无论您怎么选x，互补松弛也求不出可行的y

2）如果原问题有finite optimal value，则

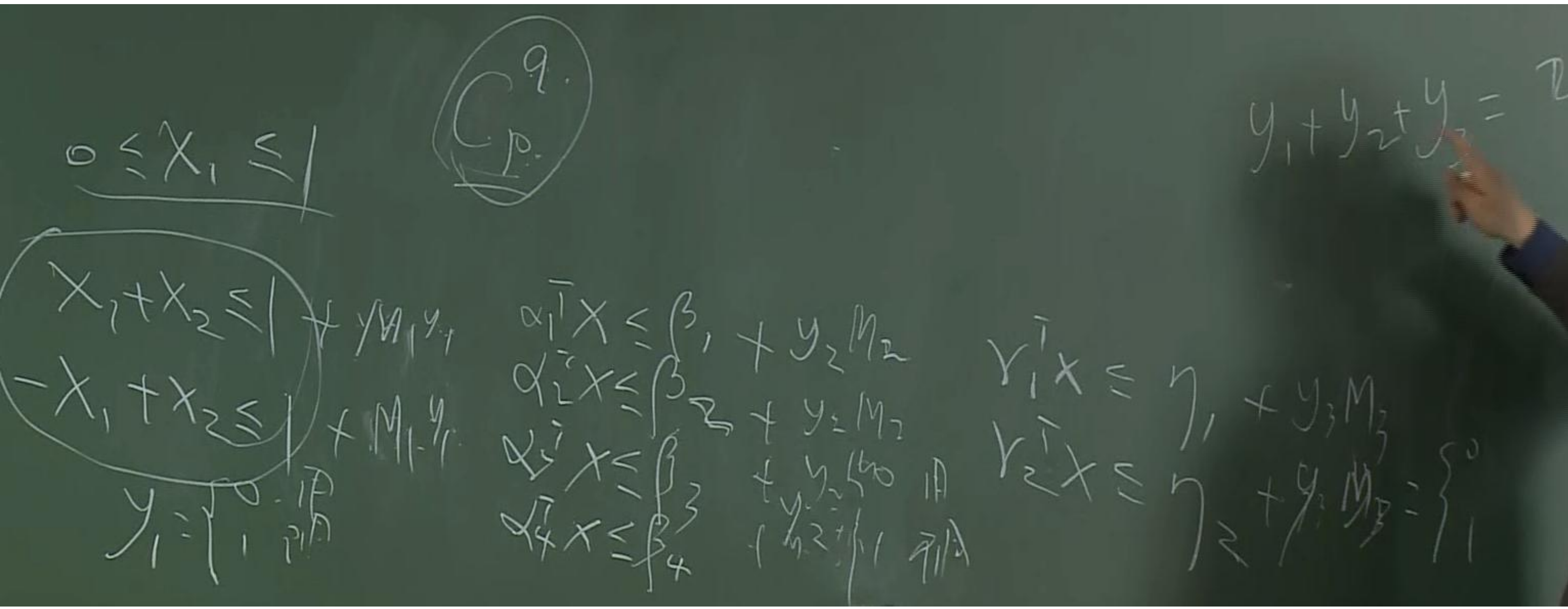
2.1)x是最优解，y一定对于对偶问题feasible。

2.2)x不是最优解，必然y不可行，否则违背弱对偶性。

测试题2.1：如何用一组线性不等式描述下面集合？



测试题2. 1：如何用一组线性不等式描述下面的集合？



测试题2.2：请用混合整数规划建模最短路问题？

2. 整数规划

- 设起点为1，终点为n，引入0-1变量x_{ij},弧(i,j)在最短路上，则x_{ij}=1，对起点和终点以外的任意一个顶点，如果

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

说明从i出发的所有弧中必然有一条在最短路上，即最短路经过该顶点，则从其它顶点到该顶点的弧中必然有一条弧在最短路上，所以有

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ji} = 1$$

2. 整数规划

- 对于1点和n点，则必然满足

$$\sum_{j=1}^{n} x_{1j} = 1, \sum_{j=1}^{n} x_{jn} = 1$$

2. 整数规划

$$\min z = \sum_{(i,j)\in E} W_{ij} X_{ij}$$

$$st.\begin{cases} \sum_{(i,j)\in E} X_{ij} = \sum_{(i,j)\in E} X_{ji} & 1 < i < N \\ \sum_{(i,j)\in E} X_{1j} = 1 & \sum_{(i,j)\in E} X_{jn} = 1 \\ X_{ij} = 0\text{或}1 & \end{cases}$$

测试题2.3：求解整数规划问题

$$
\begin{aligned}
\max\quad & x_1 + x_2 \\
s.t.\quad & 2x_1 + x_2 \le 6 \\
& 4x_1 + 5x_2 \le 20 \\
& x_1, x_2 \ge 0,\ \text{且为整数}
\end{aligned}
$$

2. 整数规划

1) 先解松弛问题。

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	1	1	0	0	0
x_3	2	1	1	0	6
x_4	4	5	0	1	20

x_2 进基， x_4 出基

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	1/5	0	0	-1/5	-4
x_3	6/5	0	1	-1/5	2
x_2	4/5	1	0	1/5	4

x_1 进基， x_3 出基

2. 整数规划

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
Z	0	0	-1/6	-1/6	-13/3
x_1	1	0	5/6	-1/6	5/3
x_2	0	1	-2/3	1/3	8/3

已得到松弛问题的最优解，但非整数解，生成割平面。第 0 行、第 1 行和第 2 行均可生成割平面。(8 分)

2. 整数规划

2) 选取第 1 行生成的割平面条件：

$$\frac{5}{6}x_3+\frac{5}{6}x_4 \geq \frac{2}{3}$$

- 将下述方程

$$-\frac{5}{6}x_3-\frac{5}{6}x_4+s_1=-\frac{2}{3}$$

- 加入松弛问题的终表，如下所示：

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	RHS
Z	0	0	-1/6	-1/6	0	-13/3
x_1	1	0	5/6	-1/6	0	5/3
x_2	0	1	-2/3	1/3	0	8/3
s_1	0	0	-5/6	-5/6	1	-2/3

2. 整数规划

采用对偶单纯型法，x_3 进基，s_1 出基

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	RHS
Z	0	0	0	0	-1/5	-21/5
x_1	1	0	0	-1	1	1
x_2	0	1	0	1	-4/5	16/5
x_3	0	0	1	1	-6/5	4/5

已得到最优解，但非整数解，继续生成割平面。(4 分)

2. 整数规划

3) 选取第 2 行生成的割平面条件：

$$\frac{1}{5}s_1 \ge \frac{1}{5}$$

将下述方程

$$-\frac{1}{5}s_1 + s_2 = -\frac{1}{5}$$

加入上述终表中，如下所示：

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	RHS
Z	0	0	0	0	-1/5	0	-21/5
x_1	1	0	0	-1	1	0	1
x_2	0	1	0	1	-4/5	0	16/5
x_3	0	0	1	1	-6/5	0	4/5
s_2	0	0	0	0	-1/5	1	-1/5

采用对偶单纯型法，s_1 进基，s_2 出基

	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	RHS
Z	0	0	0	0	0	-1	-4
x_1	1	0	0	-1	0	5	0
x_2	0	1	0	1	0	-4	4
x_3	0	0	1	1	0	-6	2
s_1	0	0	0	0	1	-5	1

- 此时得到一个最优解 $(x_1, x_2) = (0, 4)$，$z_{\max} = 4$。(8 分)
- 注：此题存在多解，$(x_1, x_2) = (1, 3)$，$(x_1, x_2) = (2, 2)$ 也为原问题的最优解。

2. 整数规划

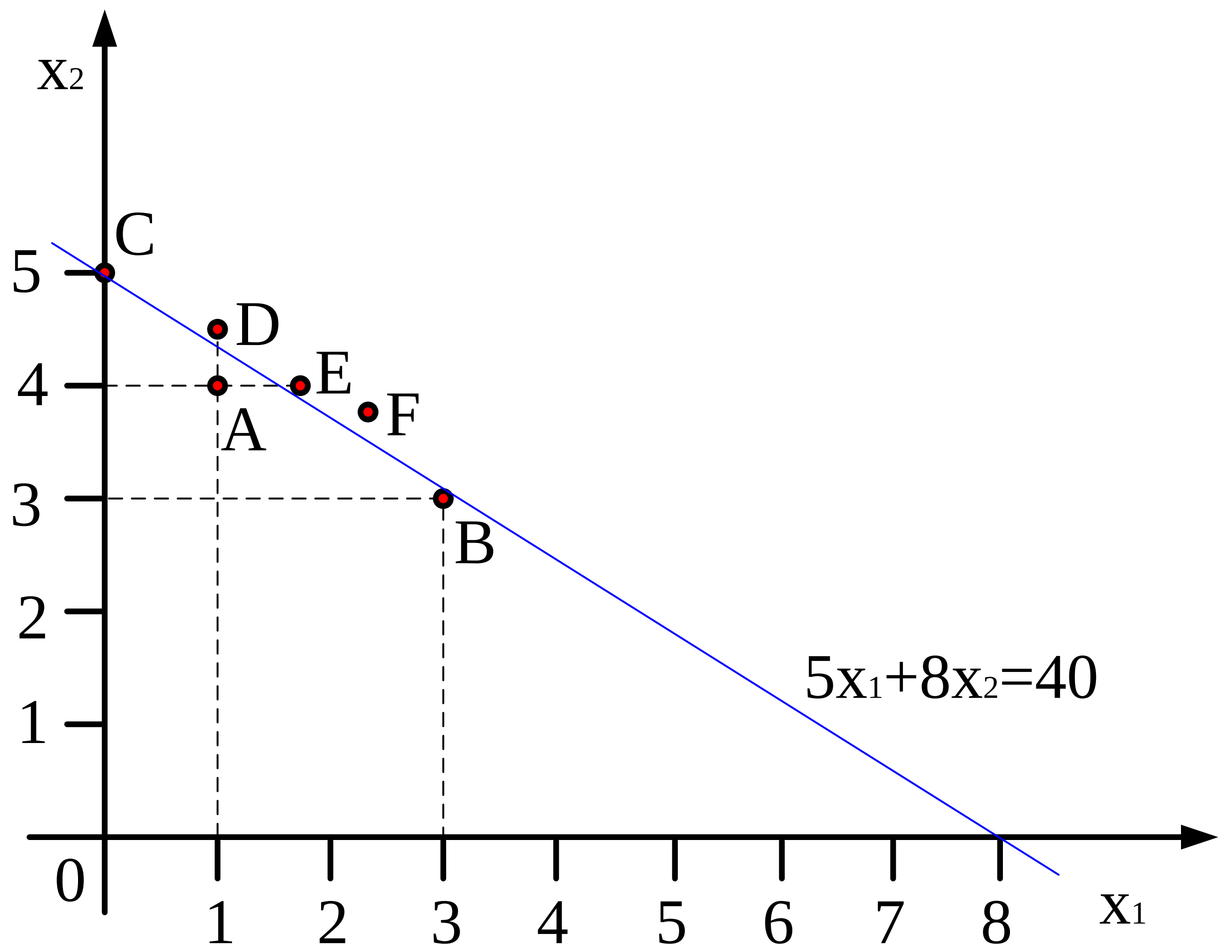
测试题2.4：

已知用分枝定界法求解某整数规划问题时，一共求解了A、B、C、D、E、F、G七个线性规划问题，其最优结果分别如下图所示：

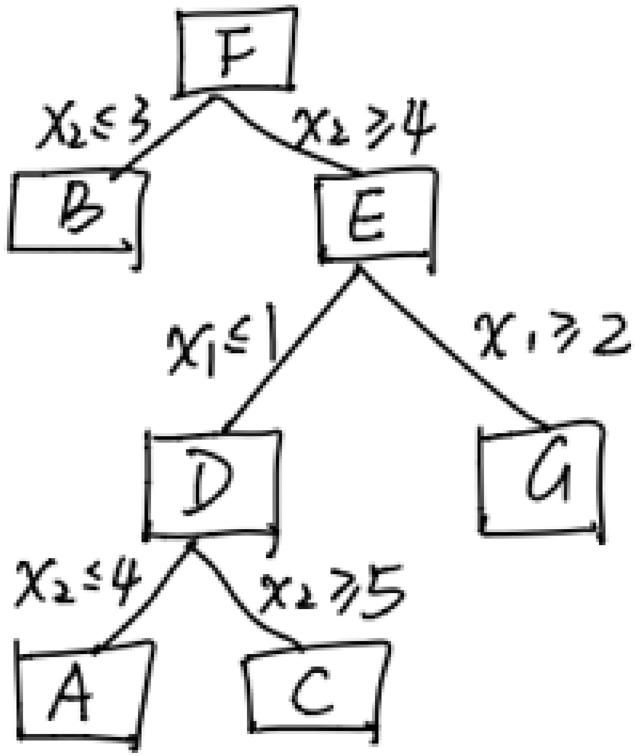
A	B	C	D	E	F	G
$x_1=1$ $x_2=4$ $z=37$	$x_1=3$ $x_2=3$ $z=39$	$x_1=0$ $x_2=5$ $z=40$	$x_1=1$ $x_2=4\frac{4}{9}$ $z=40\frac{5}{9}$	$x_1=1.8$ $x_2=4$ $z=41$	$x_1=2.25$ $x_2=3.75$ $z=41.25$	无可行解

1. 求 max z 还是求 min z？其最优结果是什么？
2. 画出分枝定界法的求解过程，并在每个分枝上标明新增加的约束条件。
3. 已知初始下界值为0，初始的上界值？怎样变化？

测试题2. 4：



测试题2.4：



2. 整数规划

解整数线性规划问题的分枝定界法步骤：

第 1 步　令活点集合 $:=\{O\}$（注："O"代表原问题，下面的正整数"k"代表子问题(P_k))，上界 $U:=+\infty$，当前最好的整数解：$=\varnothing$；

第 2 步　若活点集合 $=\varnothing$，则转向第 7 步，否则，选择一个分枝点 $k\in$ 活点集合，从活点集合中去掉点 k；

第 3 步　解点 k 对应的松弛 LP 问题，若此问题无解，转回第 2 步；

第 4 步　若点 k 对应的松弛 LP 问题的最优值 $z_k\geqslant U$，则点 k 被剪枝，转回第 2 步；

第 5 步　若点 k 对应的松弛 LP 问题的最优解 $\boldsymbol{x}^k$ 满足整数要求（此时一定有 $z_k<U$），则

当前最好整数解：$=\boldsymbol{x}^k$

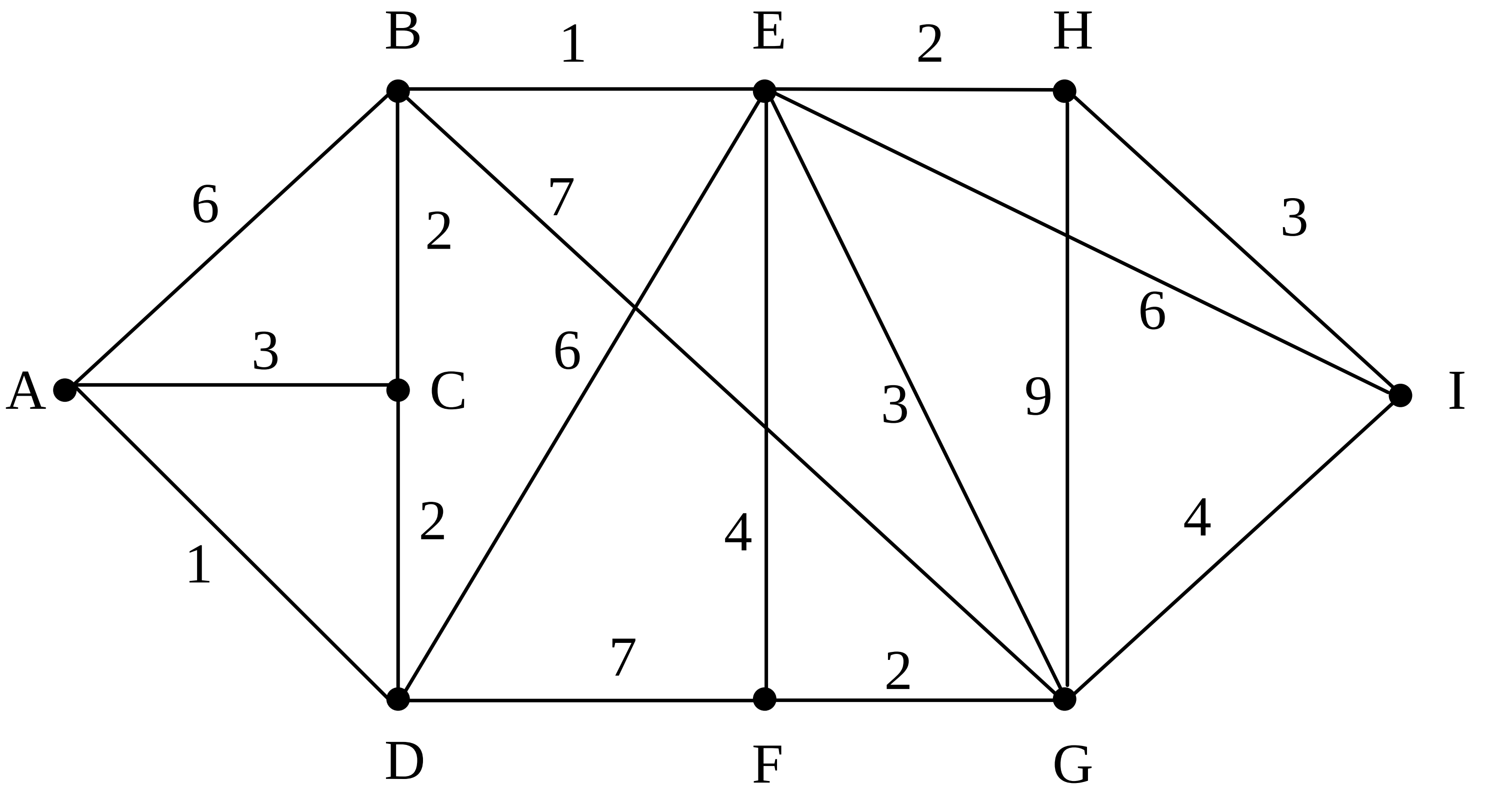
上界 $U:=z_k$

转回第 2 步；

第 6 步　若点 k 对应的松弛 LP 问题的最优解 $\boldsymbol{x}^k$ 不满足整数要求，按 $\boldsymbol{x}^k$ 的某个非整数分量生成点 k 的两个后代点，令这两个后代点为活点，并加入到活点集合中，转回第 2 步；

第 7 步　若当前最好的整数解 $=\varnothing$，$U=+\infty$，则原 ILP 问题无解，否则，当前最好的整数解就是原 ILP 的最优解，U 就是最优值.计算停止.

测试题3.1：求最短路



测试题3. 1：求最短路

◎ 用值迭代法:

A	B	C	D	E	F	G	H	I
∞	∞	∞	∞	6	∞	4	3	0
∞	7	∞	12	5	6	4	3	0
13	6	9	11	5	6	4	3	0
12	6	8	11	5	6	4	3	0
11,C,D	6,E	8,B	10,C	5,H	6,G	4,I	3,I	0,I

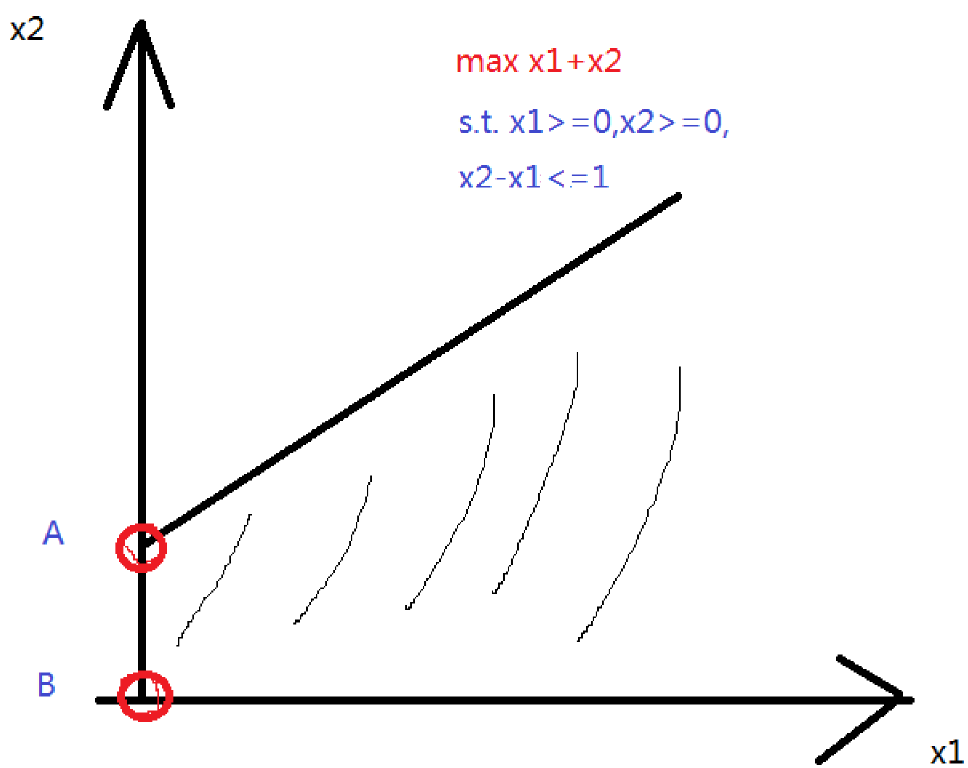
所以最短路径为 A->C->B->E->H->I 和 A->D->C->B->E->H->I，值为 11。

4. 期中复习

测试题4.1：判断以下说法是否正确，并说明理由：

- 如果线性规划问题的某个顶点优于所有相邻顶点，这个顶点就是最优解
- 对目标函数极大化的线性规划问题，检验数小于或等于零是基本可行解(即基可行解)成为最优解的充分条件。
- 如果标准线性规划问题的可行基矩阵不同，它们对应的顶点也不同。

如果线性规划问题的某个顶点优于所有相邻顶点，这个顶点就是最优解



测试题4.2：判断以下说法是否正确，并说明理由：

- **标准线性规划问题的某个可行解如果是最优解，则它一定是基本可行解。**
- **如果线性规划的原问题存在可行解，则其对偶问题也一定存在可行解。**
- **由等式和不等式AX=b，X≥0定义的集合如果不是空集，就一定有顶点。**

4. 期中复习

测试题4.3：判断以下说法是否正确，并说明理由：

- 如果线性规划的原问题和对偶问题都有可行解，则该线性规划问题一定有有限的最优解。
- 用割平面法求解纯整数规划问题，构造的割平面有可能切去一些可行解。
- 用求解纯整数线性规划问题的割平面方法也能求解混合整数线性规划问题。
- 用分支定界法求解极大化的整数线性规划问题时，任何一个分支的松弛问题的最优目标值均可以作为原问题的目标函数的一个下界。

4. 期中复习

测试题4.4：判断以下说法是否正确，并说明理由：

- 如果B是$\min\{CX \mid s.t.\ AX=b, X\geqslant 0\}$最优解对应的基矩阵，其对应的检验数一定非负。
- 如果标准线性规划问题的可行基矩阵不同，则它们对应的基本可行解也一定不同。
- 用割平面法求解纯整数线性规划问题时，原问题的可行域在迭代过程中会不断变小。
- 如果某个线性规划问题无界，则其对偶问题一定无可行解。

测试题4. 5：

（25 分）考虑如下线性规划问题（原线性规划问题）：

$$\max \ cx_1+2x_2+x_3-4x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1+x_2-x_4=4+2b & (1)\\ 2x_1-x_2+3x_3-2x_4=5+7b & (2)\\ x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0 \end{cases}$$

模型中 c, b 是两个参数，要求：

（a） 组成两个新的约束 $(1)'=(1)+(2)$，$(2)'=(2)-2\times(1)$，形成新的线性规划问题，并且以 x_1, x_2 为基变量列出新规划问题的初始单纯形表；

（b） 假定 $b=0$，则 c 为何值时，x_1, x_2 为新线性规划问题的最优基变量；

（c） 假定 $c=3$，则 b 为何值时，x_1, x_2 为原线性规划问题的最优基变量；

（d） 假定 y_1, y_2 是原规划问题的影子价格，求出新规划问题的影子价格。

测试题5.1：请判断一下说法是否正确，并简述理由

- 负梯度方向是使目标函数下降最多的方向。
- 用梯度下降法求解任何非线性目标函数，都不能在有限次迭代后求得最优解。
- 用斐波那契法进行直线搜索，所需要的总迭代次数只和误差阈值有关。
- 若给定误差阈值，用 0.618法或牛顿法(假定收敛)进行直线搜索，所需要的总迭代次数都和目标函数无关。

测试题5.2：请判断一下说法是否正确，并简述理由

- 用任何一种共轭梯度法求解凸目标函数的无约束优化问题，只要初始点相同，迭代过程的轨迹也一定相同。
- 对于不等式约束优化问题，可行集的内点不可能是KT解。

如果 $f(X)$ 是凸集 $\Omega \subset R^n$ 上的凸函数，那么对任意 $X \in \Omega, \nabla^2 f(X)$（假设存在）的最小特征根都大于或等于 0；

测试题5. 3：请求解下述问题

$$\min_x f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2$$

$$\text{s.t. } x_1 - x_2 = 1$$

$$x_1 + 10x_2 > 10$$

5. 非线性规划

将目标函数和约束条件转换成拉格朗日函数：

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x) + \lambda h(x) + \mu g(x)$$
$$= (x_1-1)^2 + (x_2+2)^2 + \lambda(x_1-x_2-1) + \mu(10-x_1-10x_2)$$

再通过KKT条件建立方程组：

$$\nabla L_x = \langle\frac{\partial L}{\partial x_1},\frac{\partial L}{\partial x_2}\rangle = \langle 2x_1-2+\lambda+\mu, 2x_2+4-\lambda-10\mu\rangle$$

$$\begin{cases} \nabla_x L = \langle 2x_1-2+\lambda+\mu, 2x_2+4-\lambda-10\mu\rangle = \langle 0,0\rangle \\ \mu g(x) = \mu(10-x_1-10x_2) = 0 \\ h(x) = x_1-x_2-1 = 0 \\ g(x) = 10-x_1-10x_2 \le 0 \\ \lambda \ne 0 \\ \mu \ge 0 \end{cases}$$

方程一可以将x_1和x_2用λ和μ表示：

$$\begin{cases} x_1 = 1-\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2} \\ x_2 = -2+\frac{\lambda}{2}+5\mu \end{cases}$$

将x_1和x_2代h(x)：

$$h(x) = \left(1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}\right) - \left(-2 + \frac{\lambda}{2} + 5\mu\right) - 1 = 2 - \lambda - \frac{11}{2}\mu = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 - \frac{11}{2}\mu$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2} = 1 - \frac{\left(2 - \frac{11}{2}\mu\right)}{2} - \frac{\mu}{2} = \frac{9}{4}\mu \\ x_2 = -2 + \frac{\lambda}{2} + 5\mu = -2 + \frac{\left(2 - \frac{11}{2}\mu\right)}{2} + 5\mu = -1 + \frac{9}{4}\mu \end{cases}$$

再将x_1和x_2代μg(x)：

$$\mu g(x) = \mu\left(10 - \frac{9}{4}\mu - 10\left(-1 + \frac{9}{4}\mu\right)\right) = \mu\left(20 - \frac{99\mu}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mu = 0 \ or \ \mu = \frac{80}{99}$$

当μ = 0时，

$$\begin{cases} x_1 = \frac{9}{4}\mu = 0 \\ x_2 = -1 + \frac{9}{4}\mu = -1 \end{cases}$$

$$g(x) = 10 - x_1 - 10x_2 = 20$$

这不满足约束条件g(x) ≤ 0。再来看μ = 80/99：

$$when\ \mu = \frac{80}{99}\ then \begin{cases} x_1 = \frac{9}{4}\mu = \frac{20}{11} \\ x_2 = -1 + \frac{9}{4}\mu = \frac{9}{11} \end{cases}$$

$$g(x) = 10 - x_1 - 10x_2 = 10 - \frac{20}{11} - \frac{90}{11} = 0 \leq 0$$

所以当μ = 80/99能够得到极值点(20/11, 9/11)，此时f(x)的极小值是：

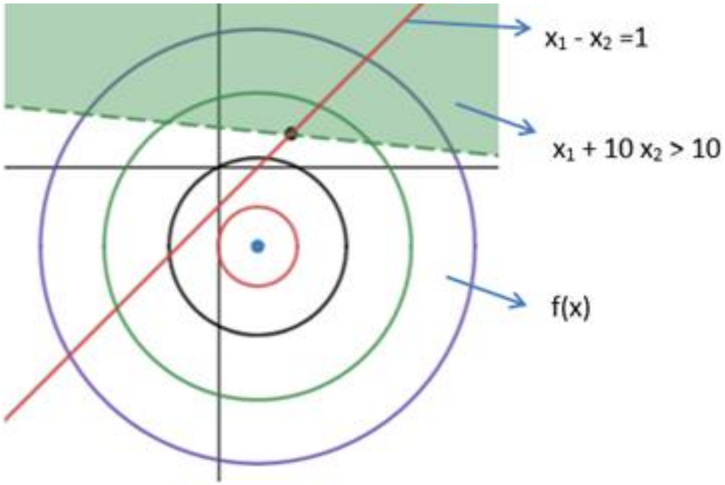
$$f(x) = \left(\frac{20}{11} - 1\right)^2 + \left(\frac{9}{11} + 2\right)^2 = \frac{1042}{121} \approx 8.612$$

测试题5. 3：请求解下述问题

$$\min_{x} f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 2)^2$$

$$\text{s.t. } x_1 - x_2 = 1$$

$$x_1 + 10x_2 > 10$$



测试题5. 4：请判断一下说法是否正确，并简述理由

1.8、 如果$c=0.5\left(\sqrt{5}-1\right)$，$\{a_n\}_0^{\infty}$是 Fibonacci 数列，那么不等式$c^{n-1}a_n\geq 1$对所有非负整数$n$成立；

1.9、 如果$\hat{X}$是$\min\{f(X)\,|\,\text{s.t. } g_i(X)\leq 0, i=1,\cdots,l\}$的 KT 解，那么一定不存在$D$满足$D^T\nabla f\left(\hat{X}\right)<0,\ D^T\nabla g_i\left(\hat{X}\right)<0, \forall i=1,\cdots,l$。

2.1、 已知$b_0=b_1=1,\ b_n=b_{n-1}+b_{n-2}, \forall n\geq 2$，是否成立$0.6^{n-1}b_n\geq 1, \forall n\geq 1$？

2.2、 令$f(X)=X^TAX+b^TX$，$A\in R^{n\times n}$正定，$\vec{p}_i\in R^n, 1\leq i\leq m$互为$A$共轭向量，从任意$X_0\in R^n$出发，依次沿$\vec{p}_1,\vec{p}_2,\cdots,\vec{p}_m$进行精确直线搜索，先后得到$X_1,X_2,\cdots,X_m$。请问对哪些$i\in\{1,2,\cdots,m\}$成立$f(X_i)\leq f\left(\vec{p}_i+\sum_{0\leq j\leq i-1}(-1)^j X_j\right)$？

测试题5.5：请判断一下说法是否正确，并简述理由

2.3、 优化问题 $\min\left\{(x_1+1)^2+x_2^2 \mid \text{s.t. } (x_1-1)^2+x_2^2 \ge 1, (x_1-2)^2+x_2^2 \le 4\right\}$ 有无 KT 解？

2.4、 优化问题 $\max\left\{x_1 \mid \text{s.t. } (x_1-1)^3-x_2 \le -2, (x_1-1)^3+x_2 \le 2\right\}$ 有无 KT 解？

3、请简述负梯度方向、共轭梯度方向和牛顿方向在求解无约束优化问题时的优缺点。

4、利用 K-T 条件求出以下问题的最优解。

$$\min\left\{x_1^2-x_2 \mid \text{s.t. } x_1 \ge 1,\ x_1^2+x_2^2 \le 26, x_1+x_2=6\right\}$$

5、请举例说明，对于不等式约束的优化问题，即使最优解处起作用约束的梯度线性相关，它仍然可以满足 KT 条件。

测试题5.6：请判断一下说法是否正确，并简述理由

- **可能优化问题存在全局最优解，但不存在解满足KKT条件**

测试题5. 6：请判断一下说法是否正确，并简述理由

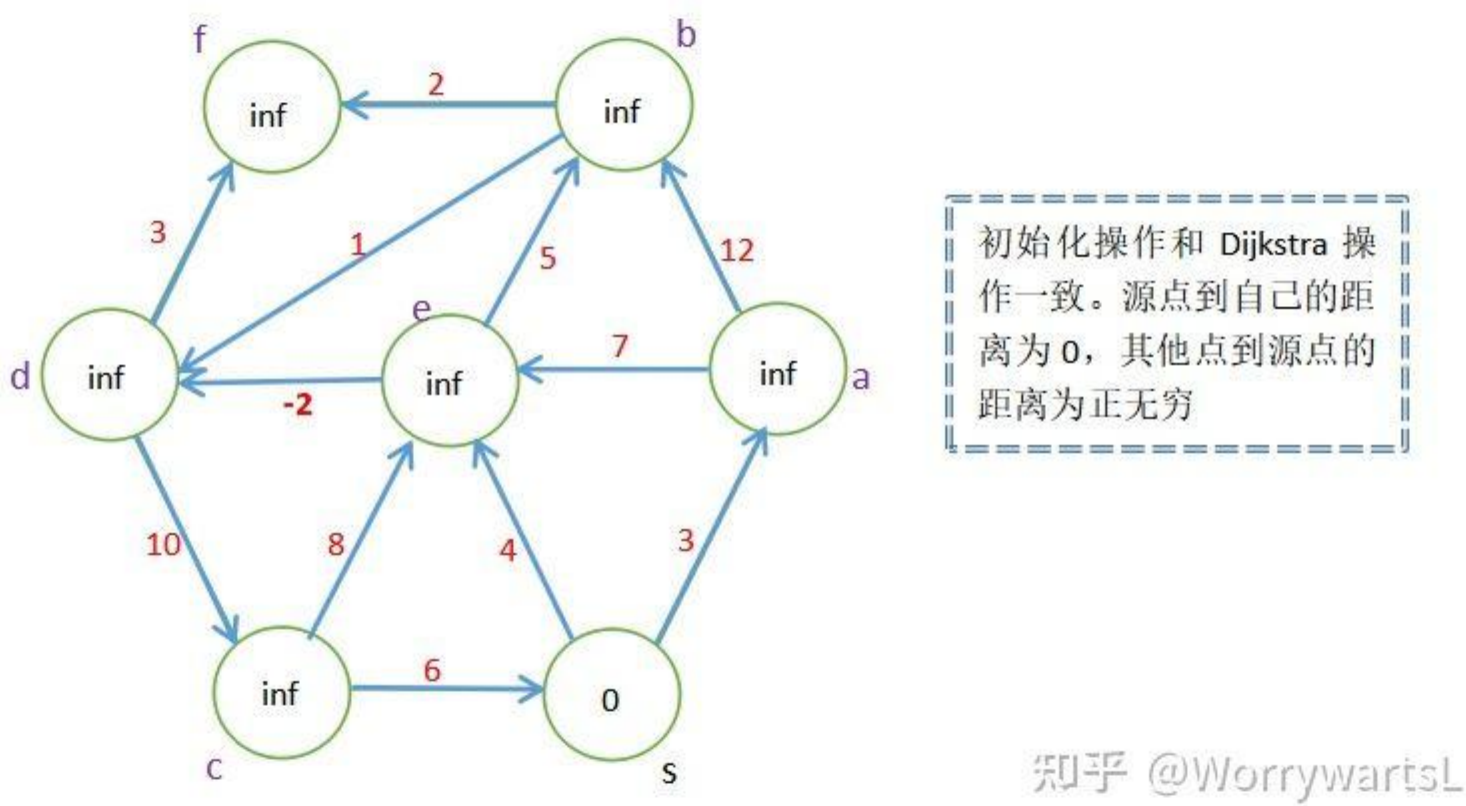
- 可能优化问题存在全局最优解，但不存在解满足KKT条件

$$\begin{aligned} \min \quad & y \\ \text{s.t.} \quad & (x-1)^2 + y^2 \le 1 \\ & (x+1)^2 + y^2 \le 1 \end{aligned}$$

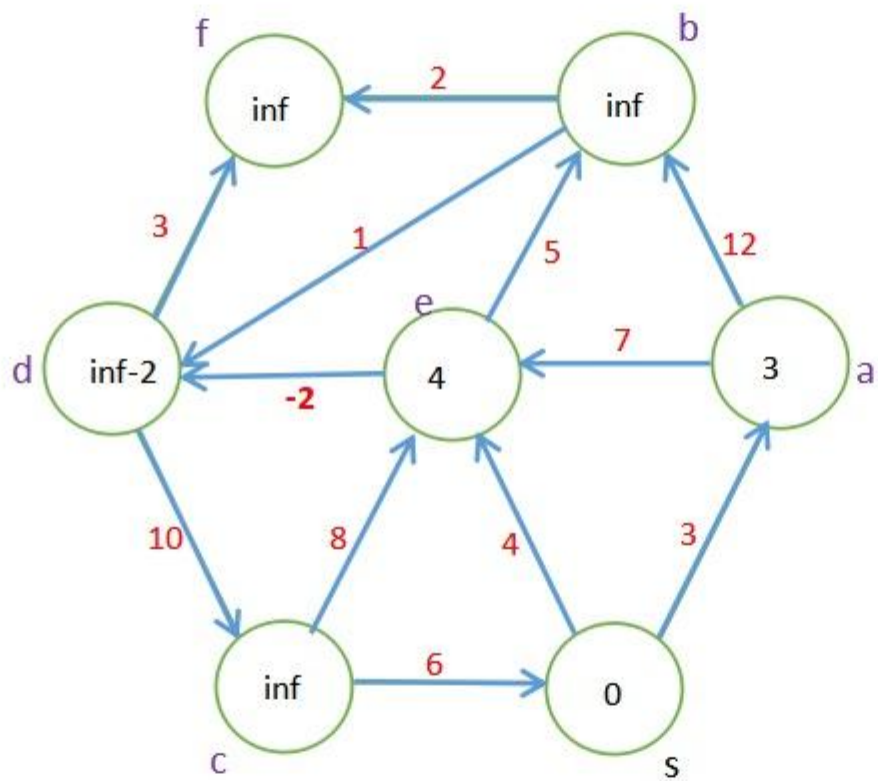
$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^2 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_2^2 \le 0. \end{aligned}$$

测试题6.1：用Bellman-Ford算法求解如下问题

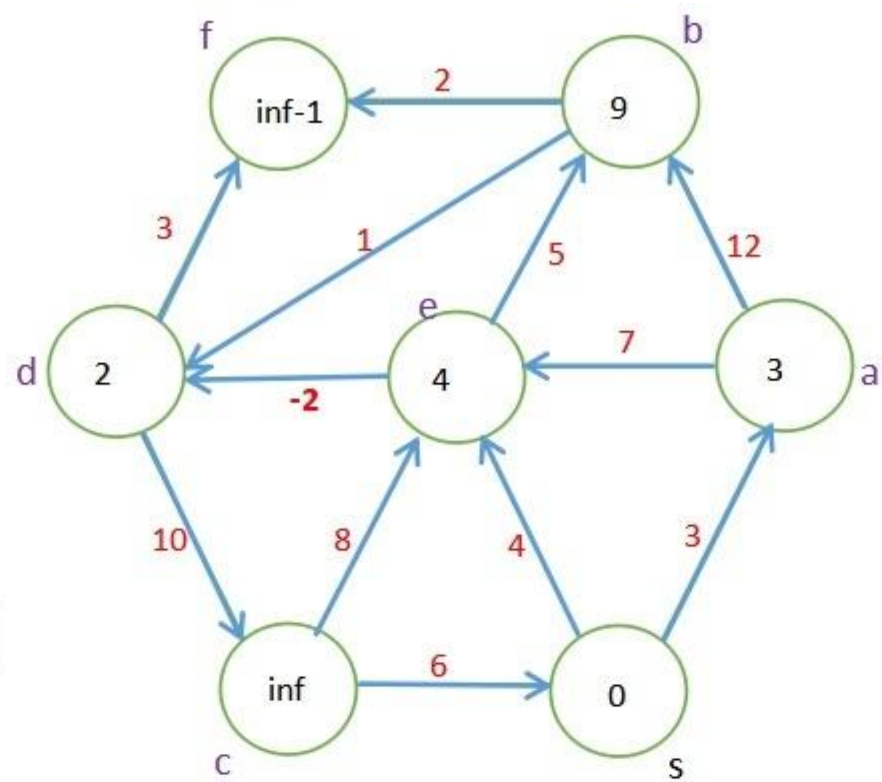


测试题6.1：用Bellman-Ford算法求解如下问题



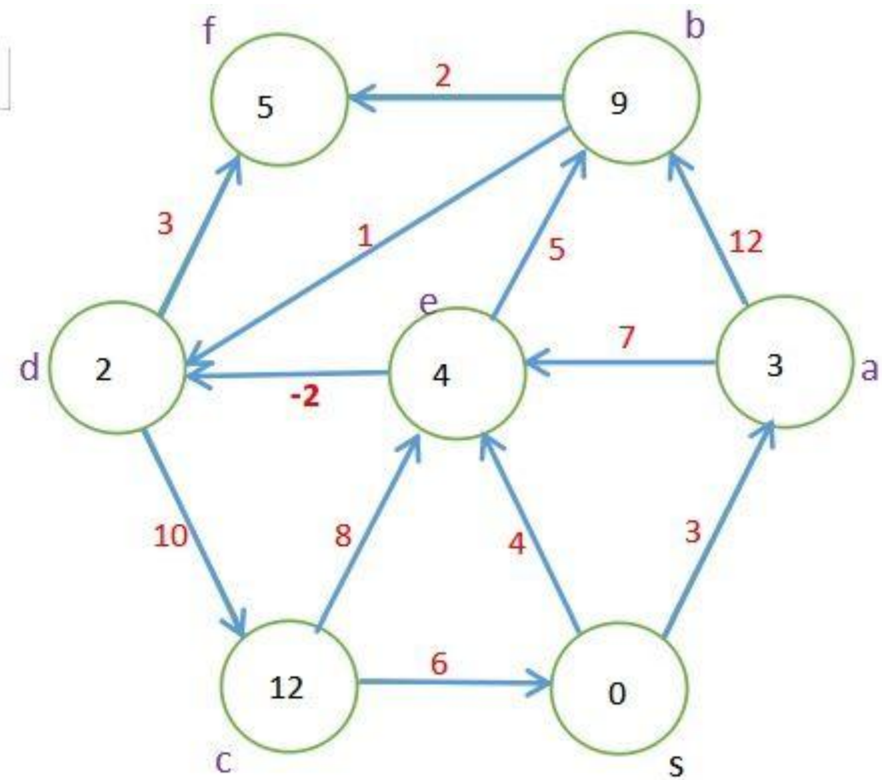
第一次迭代：找到不超过1条边的最短路。

测试题6.1：用Bellman-Ford算法求解如下问题



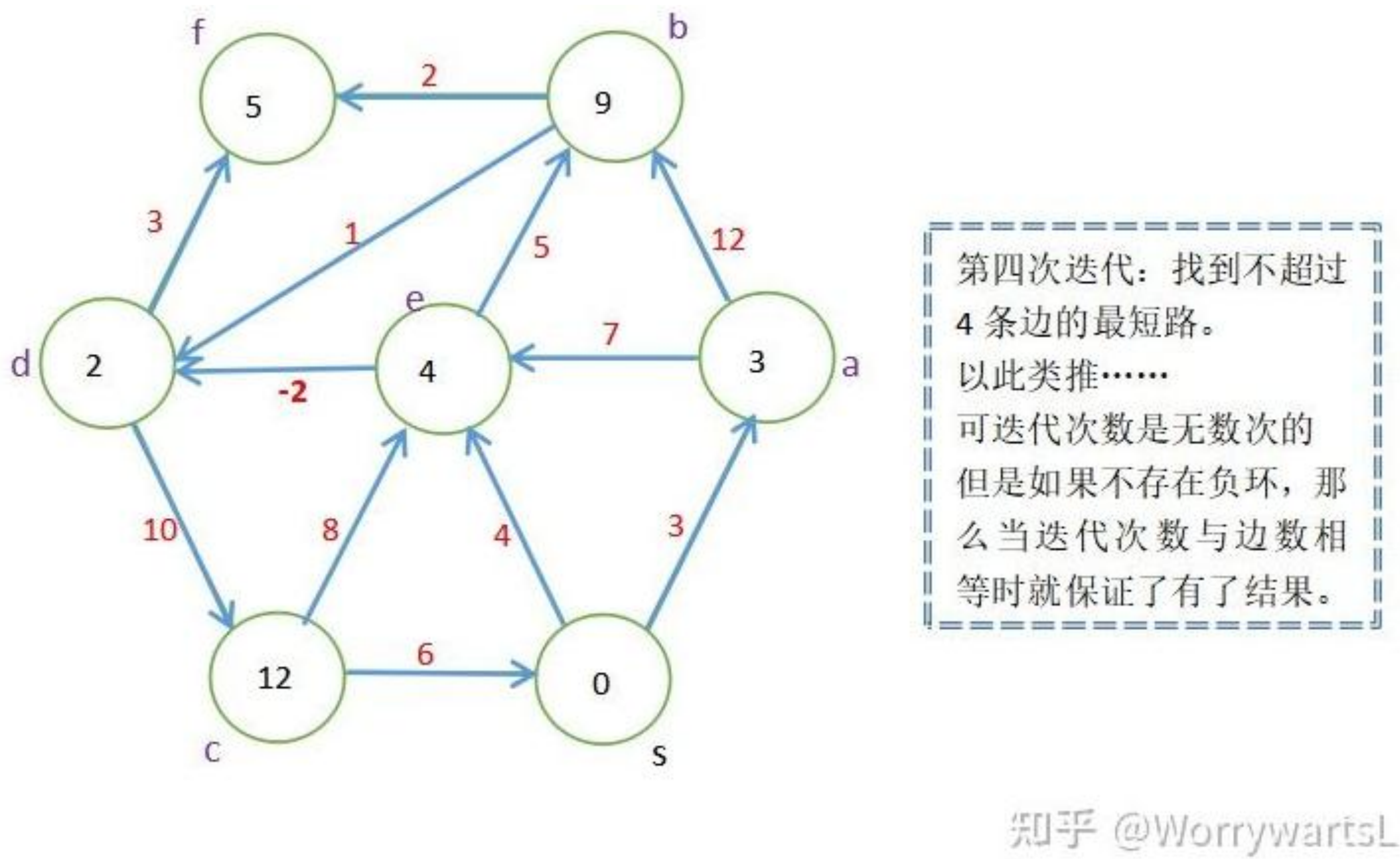
第二次迭代：找到不超过2条边的最短路。

测试题6.1：用Bellman-Ford算法求解如下问题

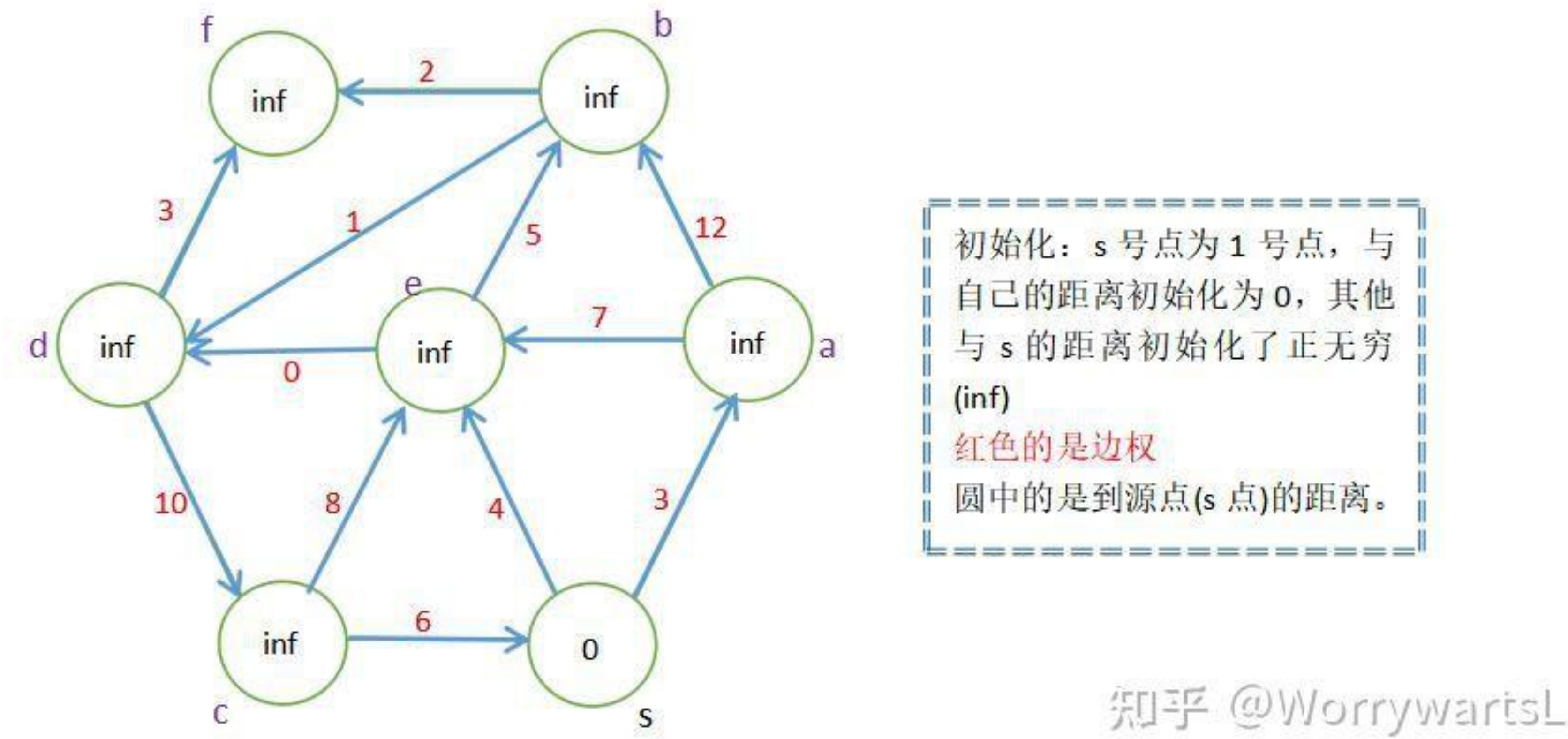


第三次迭代：找到不超过3条边的最短路。

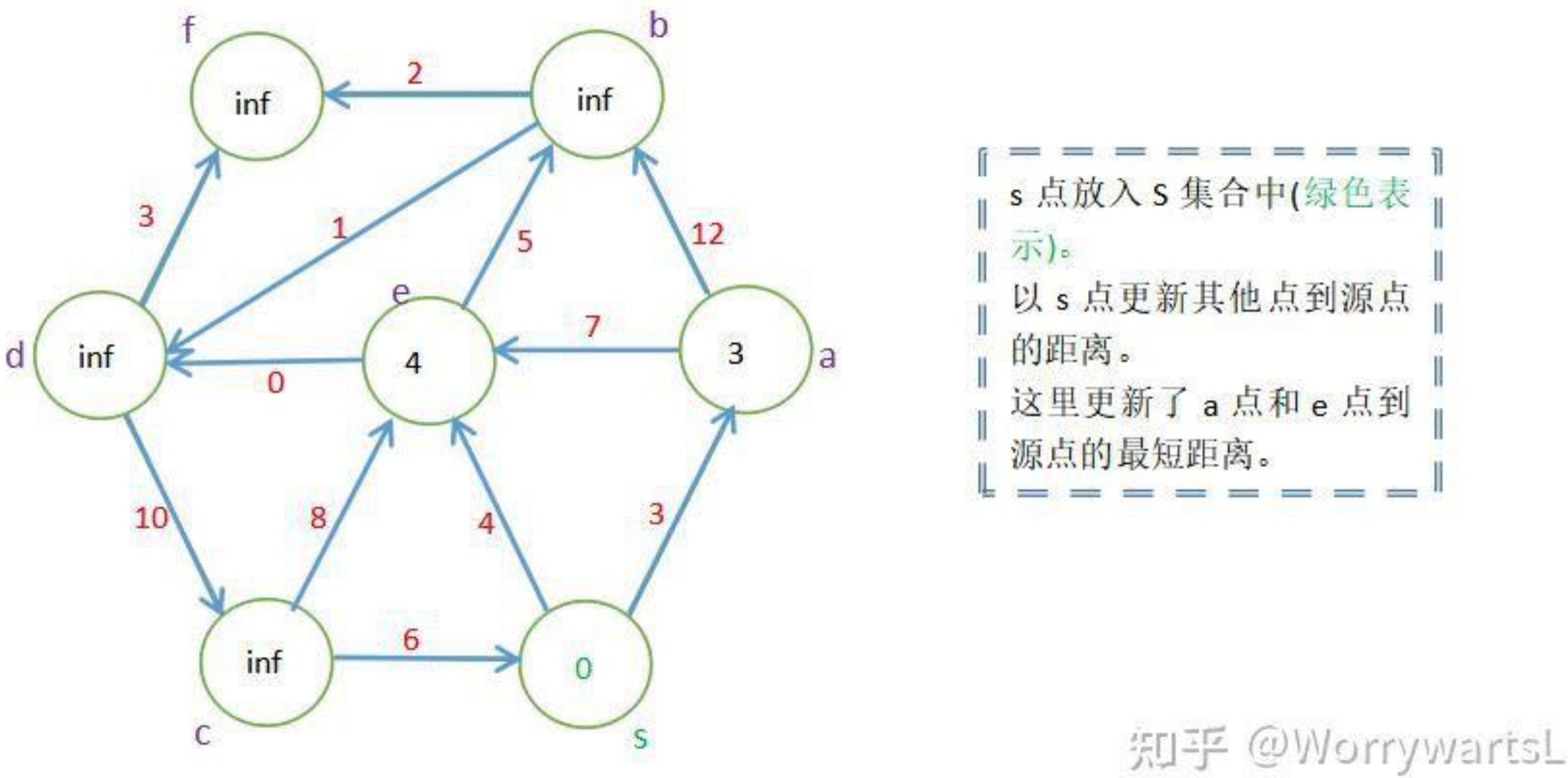
测试题6.1：用Bellman-Ford算法求解如下问题



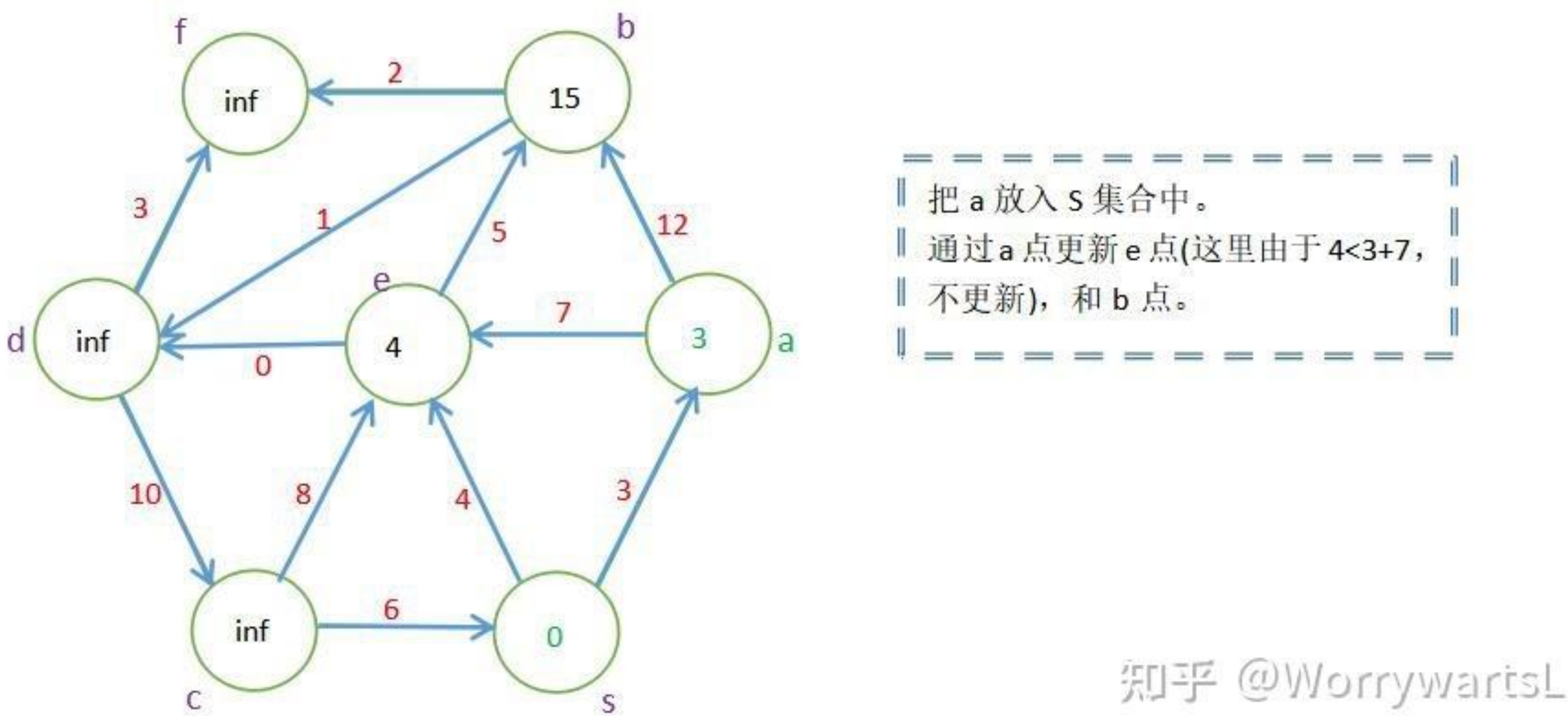
测试题6.2：用Dijkstra算法求解如下问题



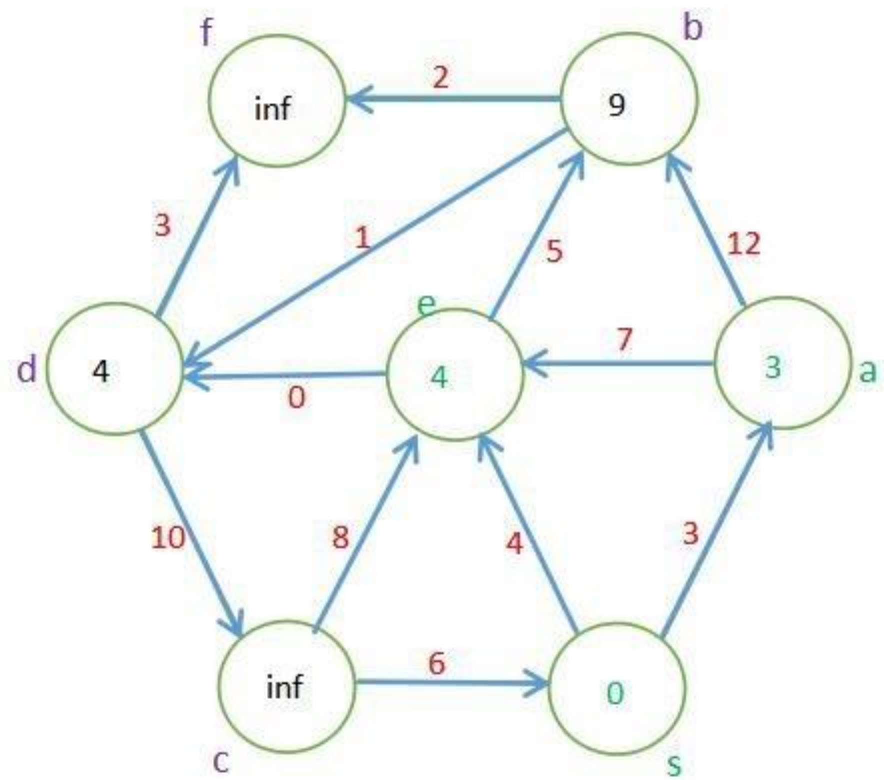
测试题6.2：用Dijkstra算法求解如下问题



测试题6.2：用Dijkstra算法求解如下问题

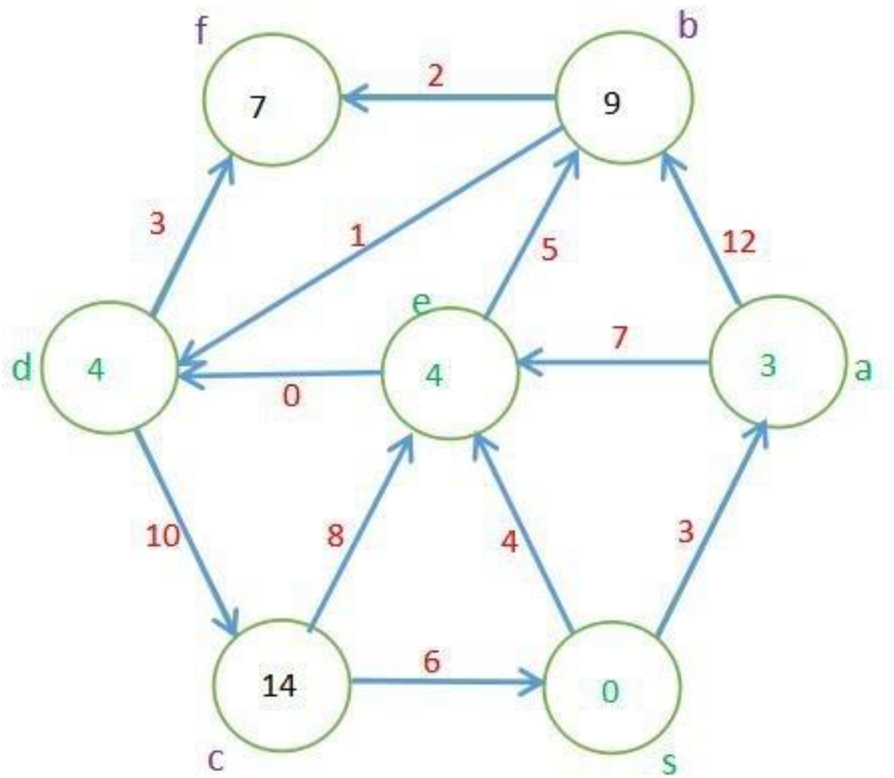


测试题6.2：用Dijkstra算法求解如下问题



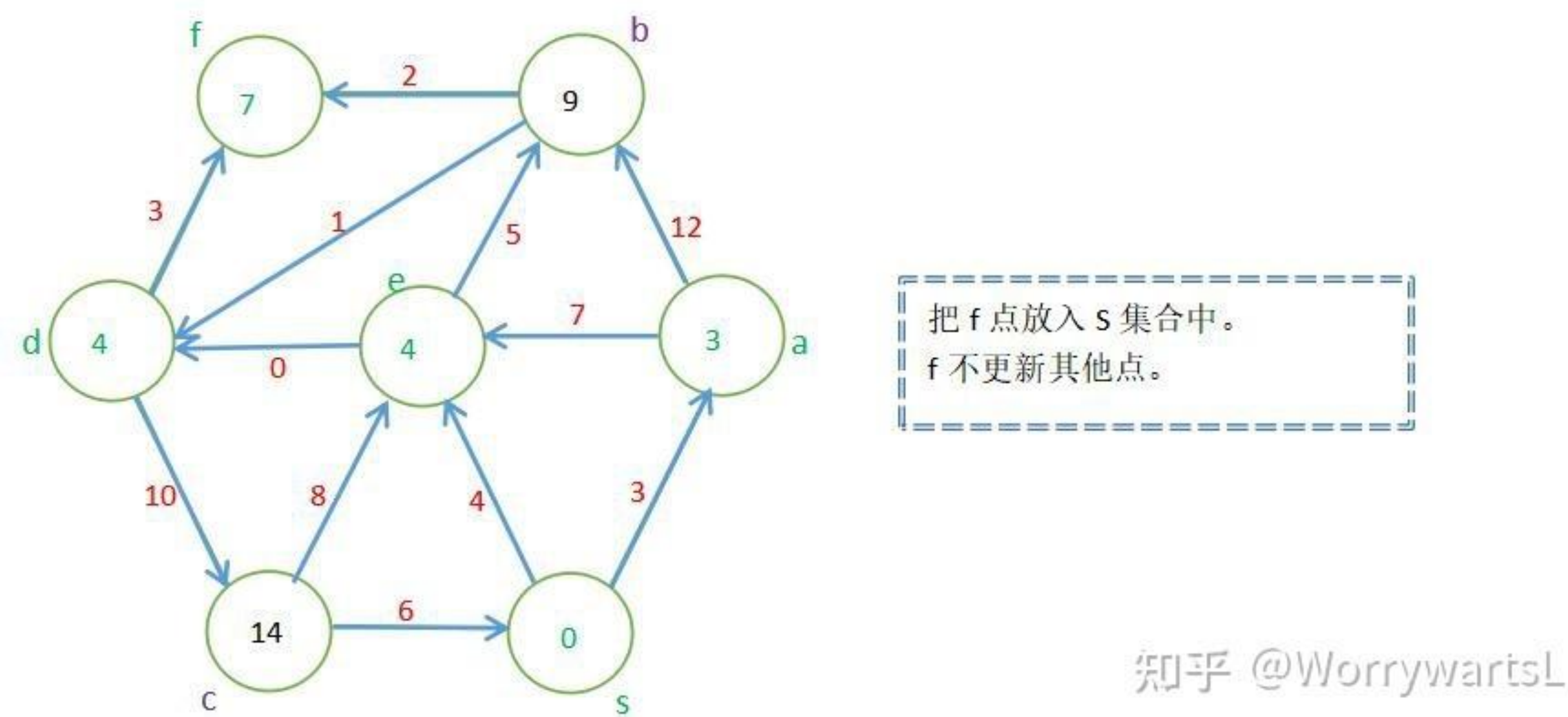
把 e 点放入 S 集合中。
通过 e 点更新 d 点和 f 点。

测试题6.2：用Dijkstra算法求解如下问题

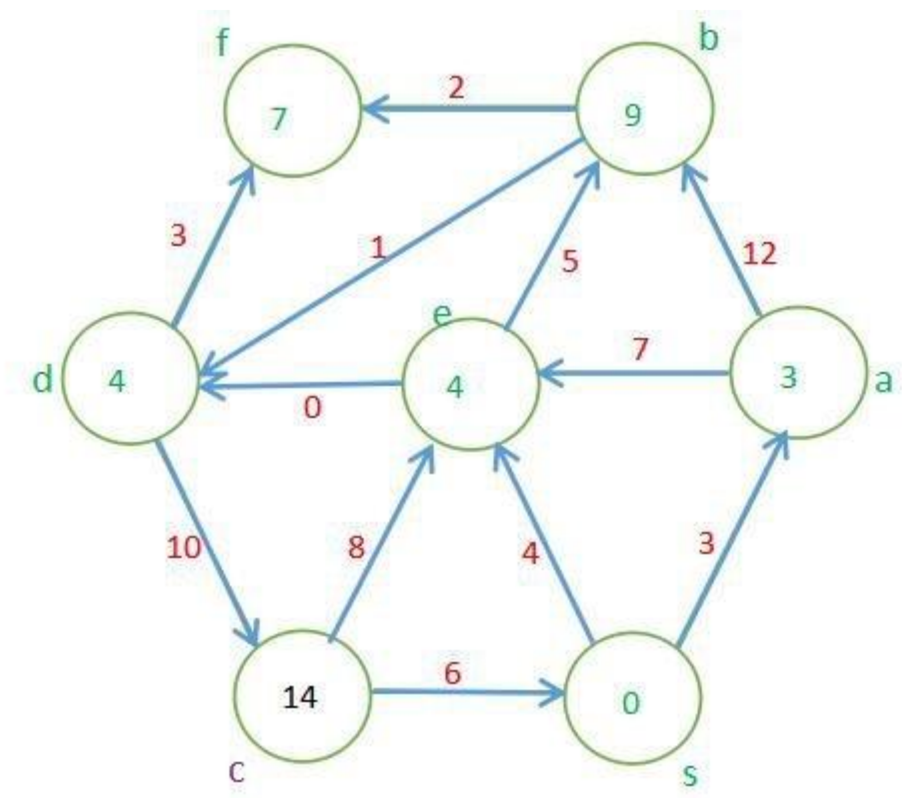


把 d 点放入 S 集合中。
通过 d 点更新 f 点和 c 点。

测试题6.2：用Dijkstra算法求解如下问题

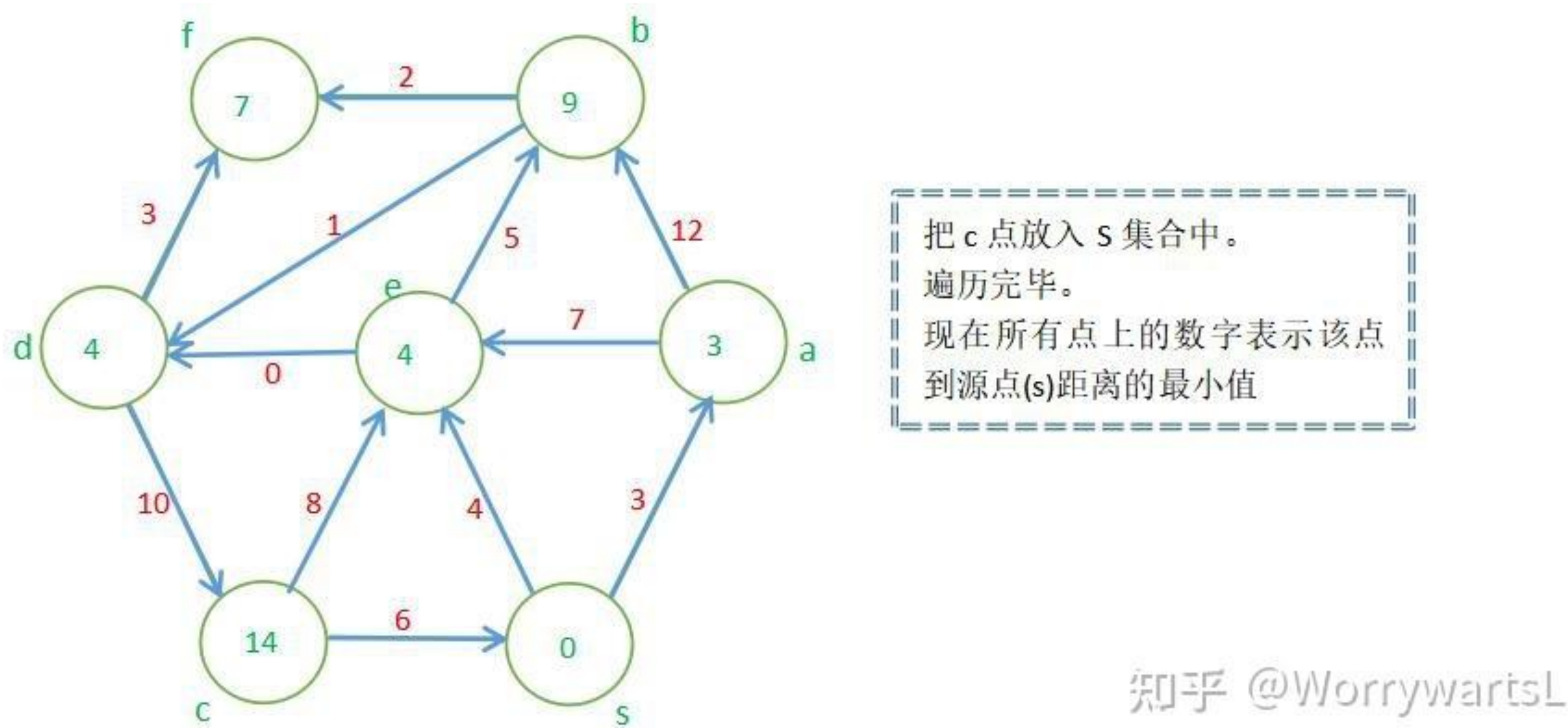


测试题6.2：用Dijkstra算法求解如下问题



把 b 点放入 S 集合中。
b到 f 和 d 的距离无法更新 f 和 d。

测试题6.2：用Dijkstra算法求解如下问题



测试题6. 3：求解如下问题

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1+4x_2+x_3+7x_4+x_5+4x_6+5x_7+2x_8 \\
\text{s.t.}\ & x_2+x_5-x_1=0,\ x_3-x_2-x_4-x_7=0,\ x_1+x_4+x_6=4 \\
& -x_3-x_8=-4,\ x_7+x_8-x_5-x_6=0 \\
& x_1\le 4,\ x_2\le 1,\ x_3\le 2,\ x_4\le 1,\ x_5\le 1,\ x_6\le 2,\ x_7\le 2,\ x_8\le 3 \\
& x_i\ge 0,\ \text{且取整数，}\ i=1,2,\cdots,8
\end{aligned}
$$

测试题6. 3：求解如下问题

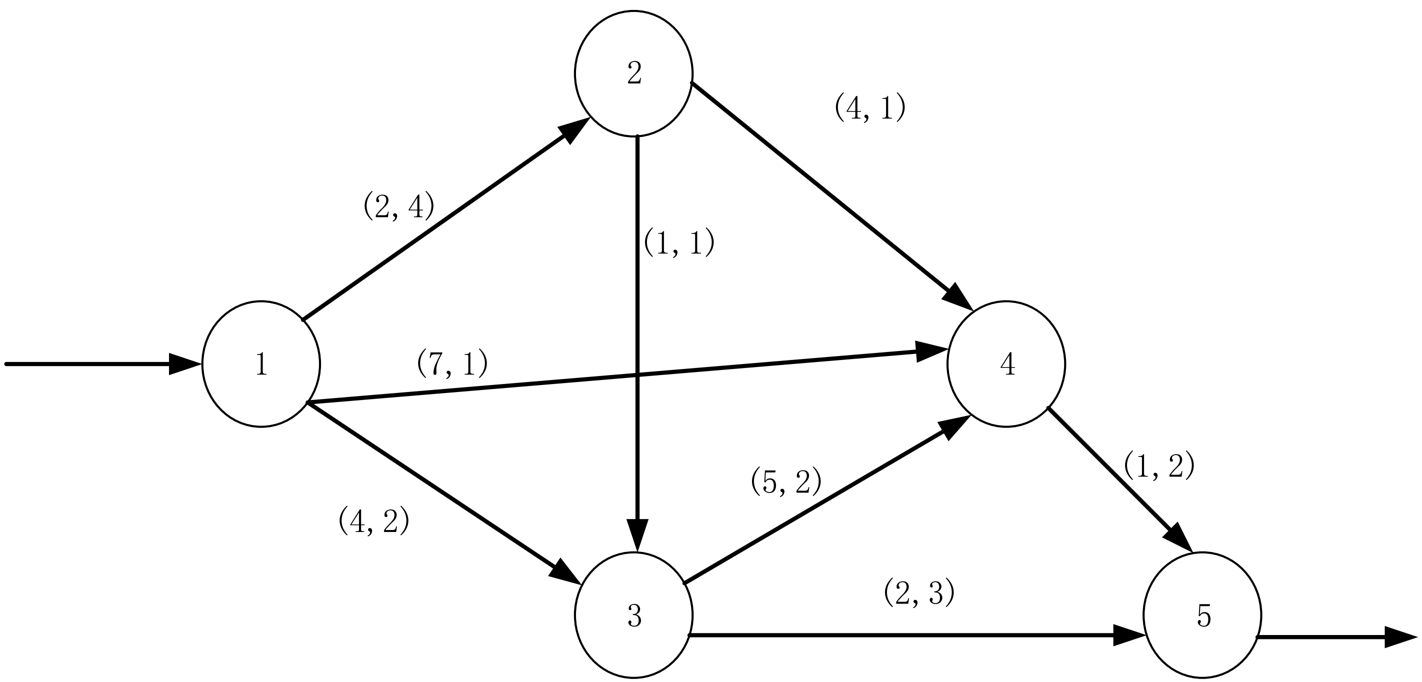
$$\min\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 + x_5 + 4x_6 + 5x_7 + 2x_8$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

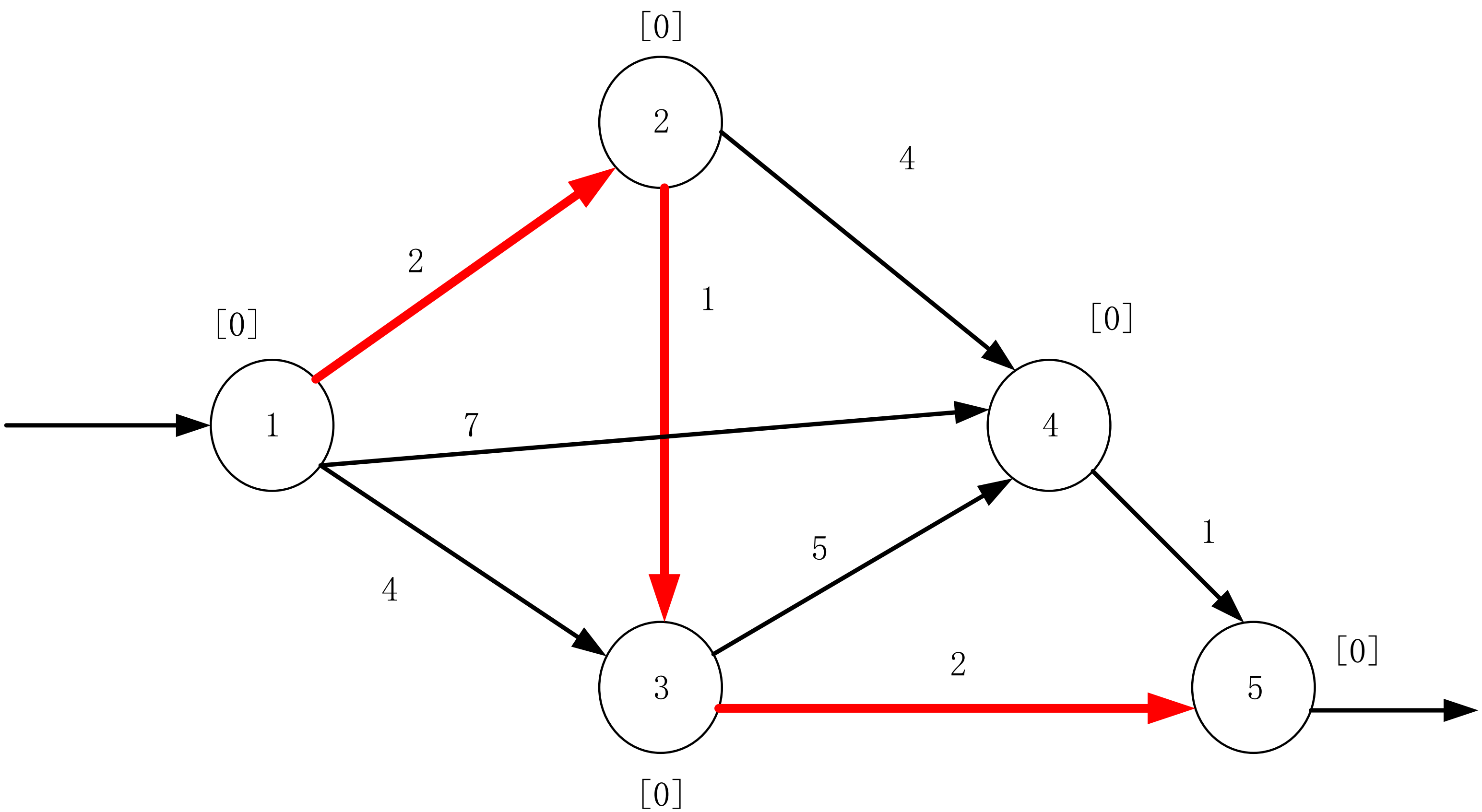
$$0 \le x_1 \le 4, 0 \le x_2 \le 1, 0 \le x_3 \le 2, 0 \le x_4 \le 1$$

$$0 \le x_5 \le 1, 0 \le x_6 \le 2, 0 \le x_7 \le 2, 0 \le x_8 \le 3$$

测试题6. 3：该问题等价于求解如下网络中从节点1到节点5流量为4的最小费用流问题（其中小括号中数字表示该边对应的（价格，容量））：

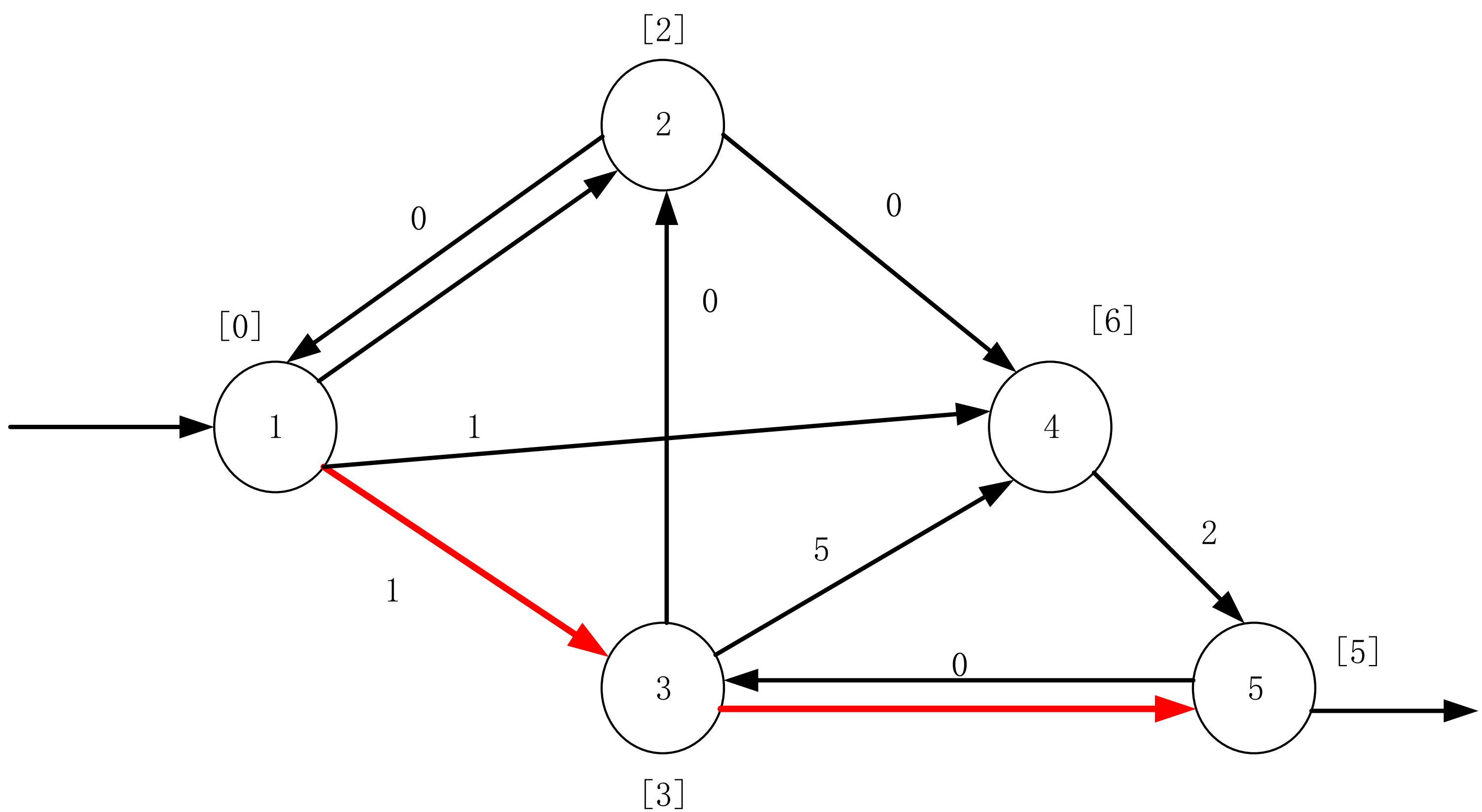


测试题6. 3：用原对偶方法进行求解，初始化流量 $x_{ij}=0,\forall(i,j)\in E$，对偶变量 $z_i=0,\forall i\in V$，简化成本 $\sigma_{ij}=c_{ij},\forall(i,j)\in E$ 第一步迭代，最短路如图所示：



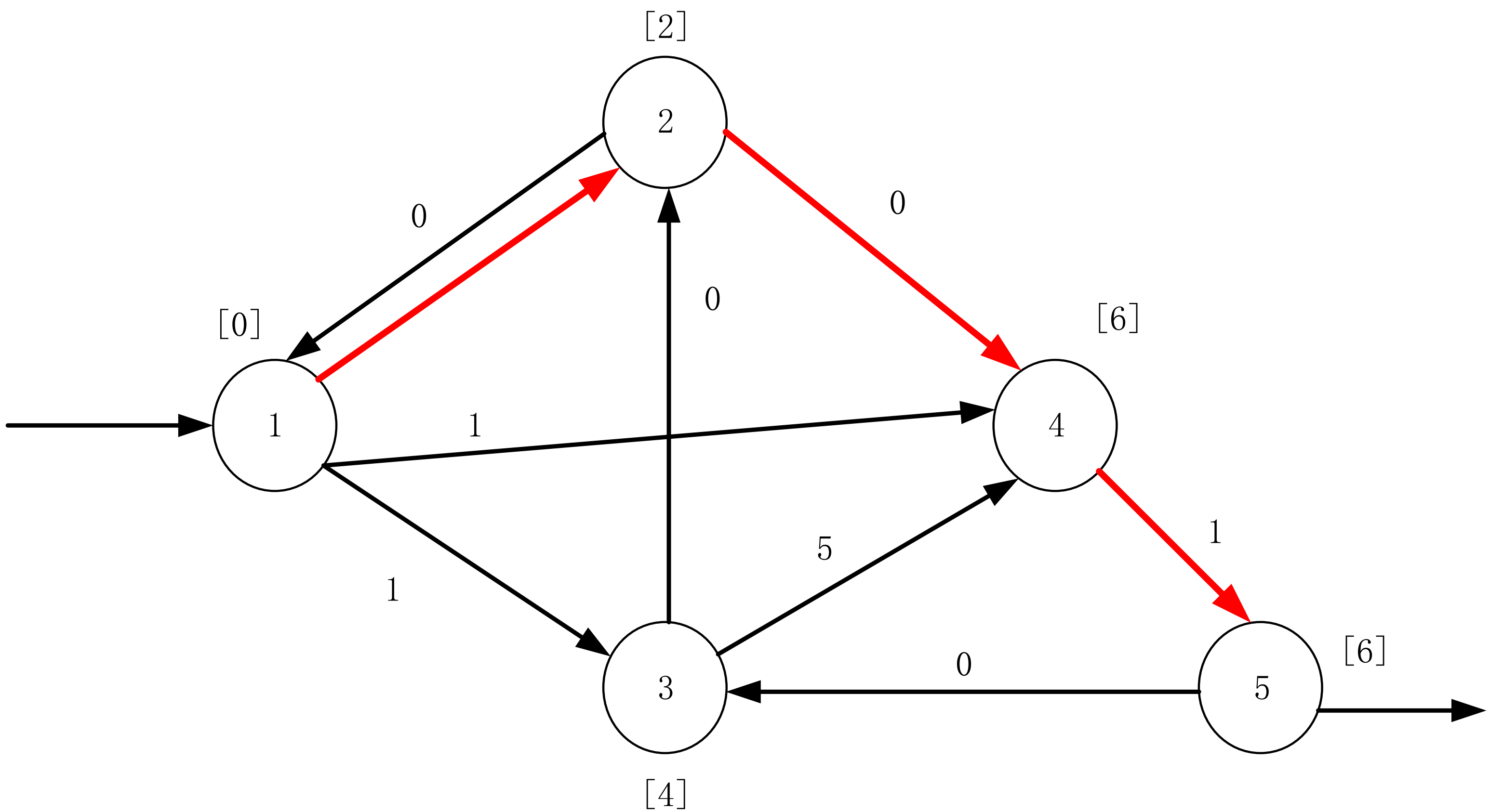
测试题6.3：最短路上流量主增量$\delta=\min\{4,4,1,3\}=1$

第二步迭代，最短路如图所示：



测试题6.3：最短路上流量主增量 $\delta = \min\{4-1, 2, 3-1\} = 2$

第三步迭代，最短路如图所示：



测试题6. 3：最短路上流量主增量 $\delta = \min\{4-3, 4-1, 1, 2\} = 1$

终上所述，最小费用流问题的最优解为

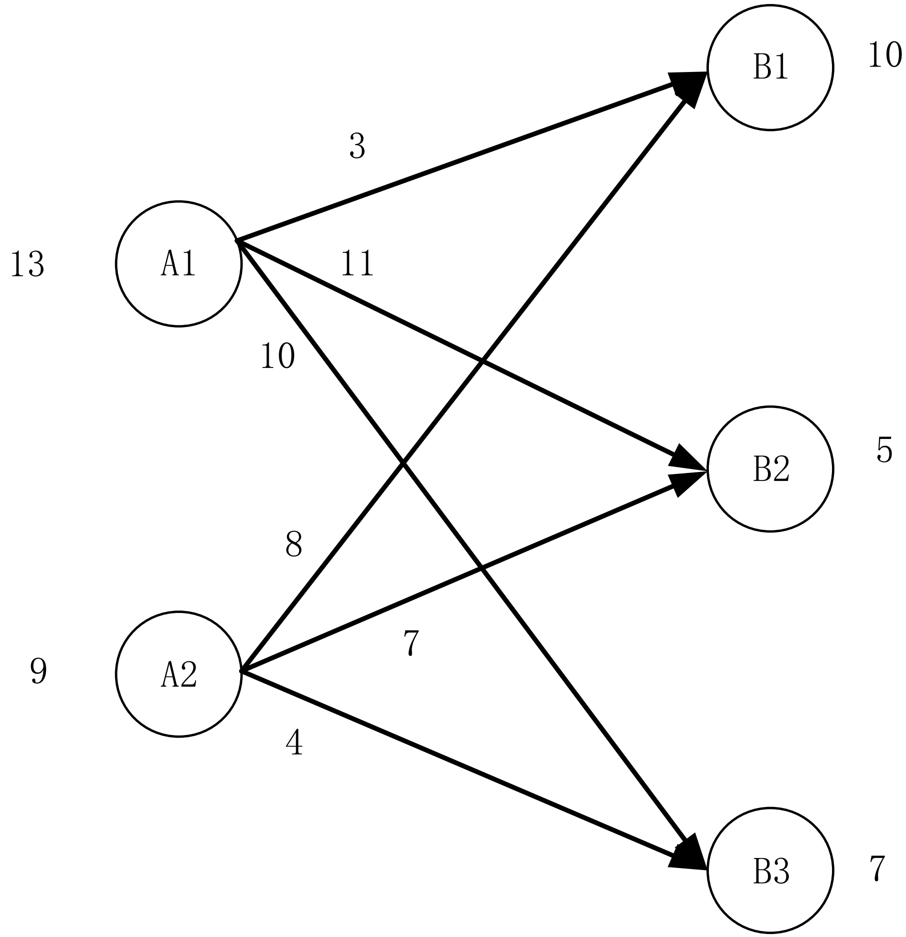
$$x = [2\ \ 1\ \ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ \ 0\ \ \ 3]$$

最优值为： $f_{\min} = [2\ 4\ 1\ 7\ 1\ 4\ 5\ 2] * [2\ 1\ 1\ 0\ 1\ 2\ 0\ 3]^T = 24$

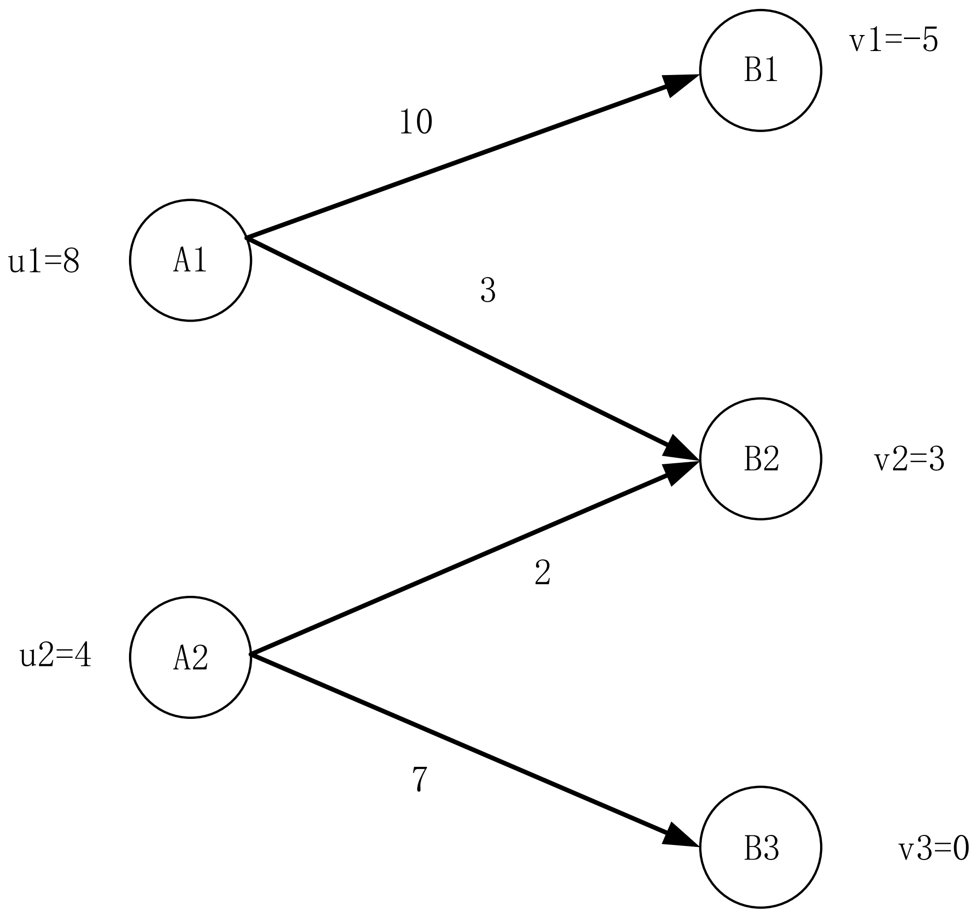
测试题6. 4：求解问题时，先考虑了其对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\min\ & 3y_1+11y_2+10y_3+8y_4+7y_5+4y_6 \\
\text{s.t.}\ & y_1+y_2+y_3=13 \\
& y_4+y_5+y_6=9 \\
& y_1+y_4=10 \\
& y_2+y_5=5 \\
& y_3+y_6=7 \\
& y_i\ge 0, i=1,2,3,4,5,6
\end{aligned}
$$

可以看出，这是一个运输问题，网络如图1所示（边上数字为单位费用）：（5分）



用最小元素法产生初始可行解如图2所示（边上数字为流量，节点旁数字为相应对偶变量，其中令v3=0）（4分）



6. 图和网络优化

可得非基变量检验数可得 $r_3 = 2$ ， $r_4 = 9$，均大于零，满足最优性条件。所以此运输问题初始可行解即最优解 $y_1 = 10, y_2 = 3, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 2, y_6 = 7$， 最优值为 105。（4分）。根据强对偶性，所以原问题的最优值也为 105。（2 分）¶

¶

原问题的解即运输问题的对偶解，所以原问题的一个解为 $x_1 = 8, x_2 = 4, x_3 = -5, x_4 = 3, x_5 = 0$。根据运输问题特性，对偶解有无穷多个，另一个解可以为 $x_1 = 0, x_2 = -4, x_3 = 3, x_4 = 11, x_5 = 8$。（5 分）¶