运筹学

（整数线性规划）

王焕钢

清华大学自动化系

1. 整数线性规划的数学模型
2. 割平面法
3. 分枝定界法
4. 0-1变量的作用

要点：整数线性规划的数学模型

整数线性规划问题

$$\max\ (\text{or } \min) \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t. } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\text{ or } = \text{ or } \ge) b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

部分或所有变量是整数变量

纯整数线性规划：所有变量是整数变量

混合整数线性规划：同时包含整数和非整数变量

0-1型整数线性规划：所有变量只能等于0或1

整数线性规划的松弛问题

去除整数规划的整数约束后的问题称为其松弛问题

如前面的一般性整数规划问题的松弛问题为

$$\max\ (\text{or } \min)\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (\text{ or } = \text{ or } \ge) b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

原问题与松弛问题目标函数最优值之间的关系？

一般情况，原问题的解并不一定是其松弛问题的最优解附近的整数解

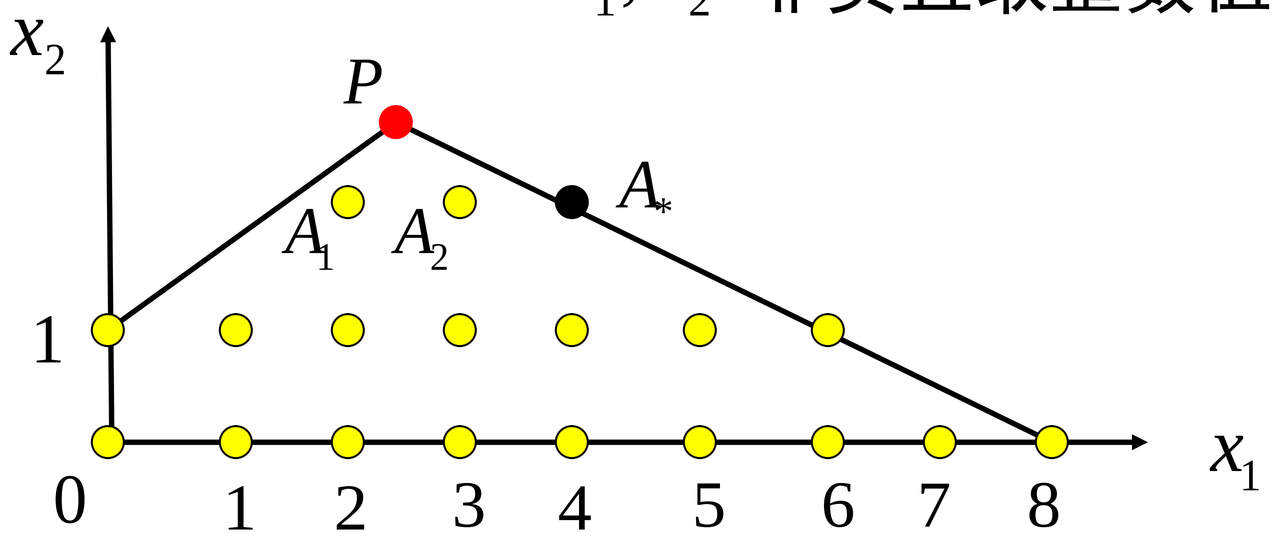
例4：

$$\max \quad x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.} \quad -2x_1 + 3x_2 \le 3$$

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$

x_1, x_2 非负且取整数值

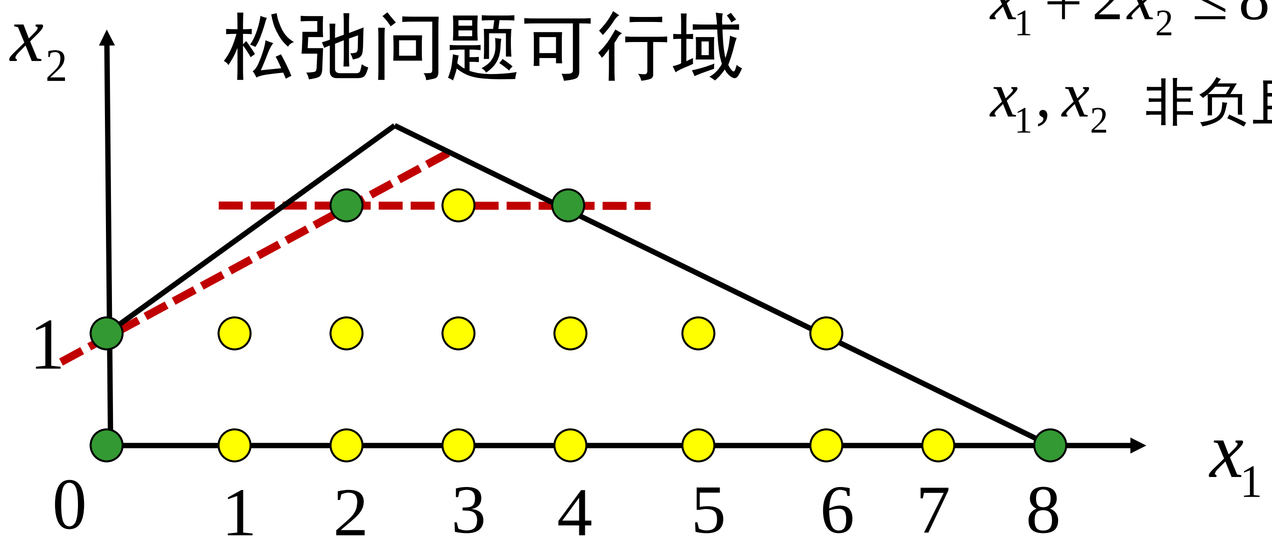


P 点是松弛问题最优解，距其最近的整数可行解是 A_1, A_2 ，但最优解是 A_*

要点：割平面法的基本原理

割平面法的基本思想

$$\max \quad x_1 + 4x_2$$
$$\text{s.t.} \quad -2x_1 + 3x_2 \le 3$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
x_1, x_2 非负且取整数值



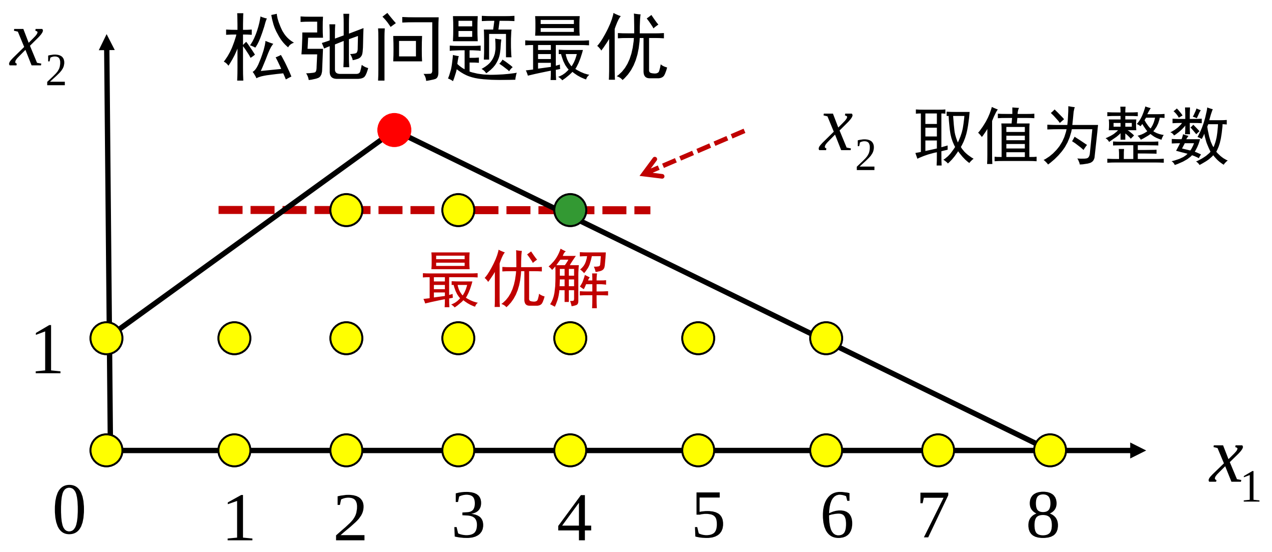
通过增加约束，使得在不改变原整数线性规划问题可行域的前提下，新得到松弛问题的最优顶点是整数解，则松弛问题的最优解就是整数规划的最优解

例： $\max \quad x_1 + 4x_2$

$$\text{s.t.} \quad -2x_1 + 3x_2 \le 3$$

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$

x_1, x_2 非负且取整数值



可用一个约束割去松弛问题最优解，不改变可行集

考虑纯整数规划问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

所有变量取整数值

假设等式约束中参数全部是整数（不失一般性），

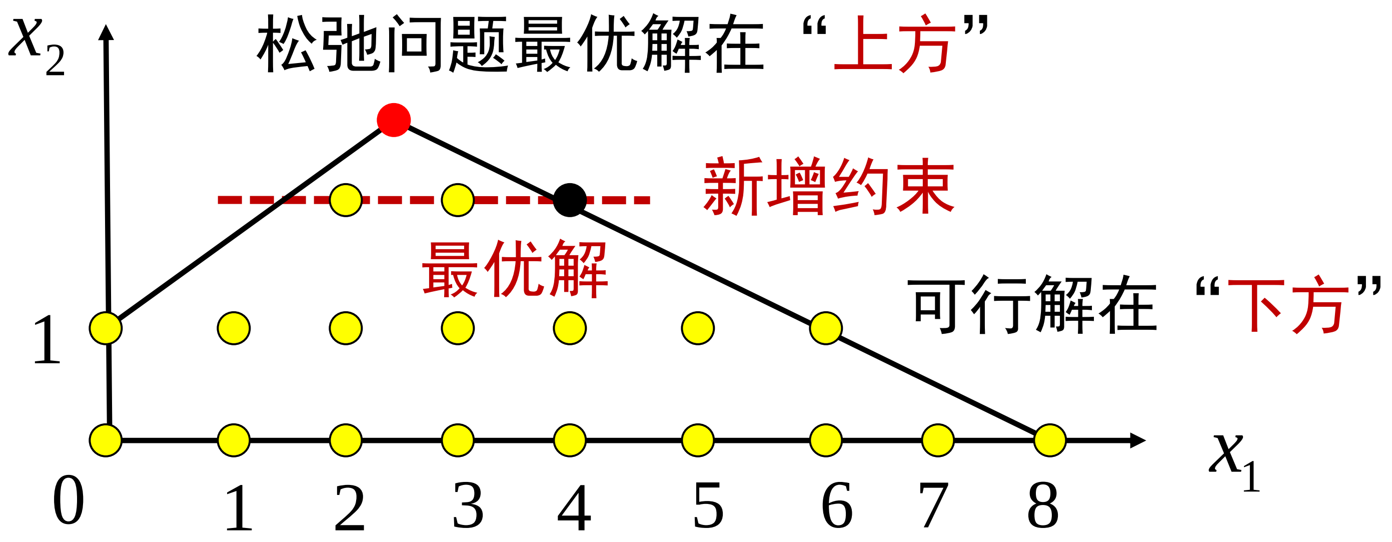
如何找到合适的约束条件（割平面）实现不改变原问题可行域，将松弛问题的最优解“割去”？

例： $\max \quad x_1 + 4x_2$

$$\text{s.t.} \quad -2x_1 + 3x_2 \le 3$$

$$x_1 + 2x_2 \le 8$$

x_1, x_2 非负且取整数值



可用一个约束割去松弛问题最优解，不改变可行集

要点：割平面的构造方法

考虑对应的松弛问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

用 Q, K 分别代表最优的基变量和非基变量下标集

等式约束可写成 $x_i + \sum_{j \in K} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i, \quad i \in Q$

对应的最优解为 $x_i^* = \bar{b}_i, \forall i \in Q, x_j^* = 0, \forall j \in K$

如果所有 $\bar{b}_i, i \in Q$ 都是整数，已得原问题最优解（因为松弛问题的可行集包含原问题的可行集）

否则，取非整数 $\bar{b}_k, k \in Q$ ，令

$$\bar{a}_{kj} = N_{kj} + \alpha_{kj},\ \forall j \in K,\ \bar{b}_k = M_k + \beta_k$$

其中 N_{kj}, M_k 为整数，α_{kj} 为非负小数，β_k 为正小数，例如

$$5.2 = 5 + 0.2,\ -5.2 = -6 + 0.8$$

代入等式约束 $x_k + \sum_{j \in K} \bar{a}_{kj} x_j = \bar{b}_k$ 可得

$$x_k + \sum_{j \in K} N_{kj} x_j - M_k = \beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j$$

考虑差值

$$\Delta_k(X)=\beta_k-\sum_{j\in K}\alpha_{kj}x_j=\left(x_k+\sum_{j\in K}N_{kj}x_j-M_k\right)$$

1）对于松弛问题的最优解 $X^*=\left(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\right)^T$

由于 $x_j^*=0,\forall j\in K$

所以 $\Delta_k\left(X^*\right)=\beta_k-\sum_{j\in K}\alpha_{kj}x_j^*=\beta_k>0$

松弛问题的最优解在 $\beta_k-\sum_{j\in K}\alpha_{kj}x_j=0$ “上方”

2）对原问题的任意的可行解 $\overline{X}$（整数解）

由于 $\boxed{\overline{x}_k + \sum_{j\in K} N_{kj}\overline{x}_j - M_k} = \beta_k - \sum_{j\in K} \alpha_{kj}\overline{x}_j$

整数

β_k 是正小数，$\sum_{j\in K} \alpha_{kj}\overline{x}_j \geq 0$

如果 $\sum_{j\in K} \alpha_{kj}\overline{x}_j < 1$，则成立 $\left|\beta_k - \sum_{j\in K} \alpha_{kj}\overline{x}_j\right| < 1$，又因为

$\overline{x}_k + \sum_{j\in K} N_{kj}\overline{x}_j - M_k$ 是整数，一定有

$$\Delta_k\left(\overline{X}\right) = \beta_k - \sum_{j\in K} \alpha_{kj}x_j = 0$$

如果 $\sum_{j\in K} \alpha_{kj}\overline{x}_j \geq 1$，一定有 $\Delta_k\left(\overline{X}\right) < 0$

可行解在约束

$$\beta_k - \sum_{j\in K} \alpha_{kj}x_j = 0$$

的“下方”

总结前面的讨论可知

对于差值 $\Delta_k(X) = \beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j$

当前获得的松弛问题最优的基本可行解 X^* 满足

$$\Delta_k(X^*) > 0$$

原问题的任意的可行解 $\overline{X}$ 满足

$$\Delta_k(\overline{X}) \le 0$$

说明当前非基变量构成的平面方程 $\beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j = 0$

将当前最优的基本可行解和原问题的所有可行解分

割在 $\beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j > 0$ 和 $\beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j \le 0$ 两个区域

根据前面的讨论，若对松弛问题增加不等式约束

$\beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j \le 0$ 形成新的松弛问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$-\sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j \le -\beta_k$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

那么当前**不满足整数约束的最优解将被切割掉**，而原问题的所有的**可行解都仍然包含在新的可行集中**

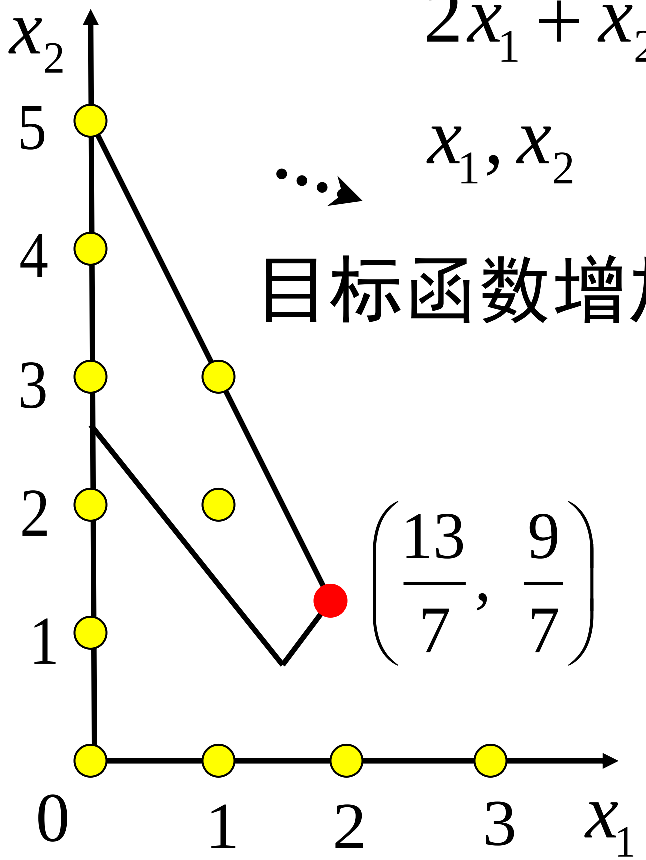
例： max $3x_1 - x_2$

s.t. $3x_1 - 2x_2 \le 3$ $\qquad 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$

$5x_1 + 4x_2 \ge 10$ $\qquad 5x_1 + 4x_2 - x_4 = 10$

$2x_1 + x_2 \le 5$ $\qquad 2x_1 + x_2 + x_5 = 5$

x_1, x_2 非负且取整数值



松弛问题可行集及最优解如左图所示不满足整数约束

此时等式约束如下：

$$x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 = \frac{13}{7}$$

$$x_2 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_5 = \frac{9}{7}$$

$$x_4 - \frac{3}{7}x_3 + \frac{22}{7}x_5 = \frac{31}{7}$$

利用等式约束 $x_1+\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}x_5=\frac{13}{7}$

$$\boxed{-\sum_{j\in K}\alpha_{kj}x_j\le-\beta_k}$$

构造割平面约束，因为

$$\frac{1}{7}=0+\frac{1}{7},\ \frac{2}{7}=0+\frac{2}{7},\ \frac{13}{7}=1+\frac{6}{7}$$

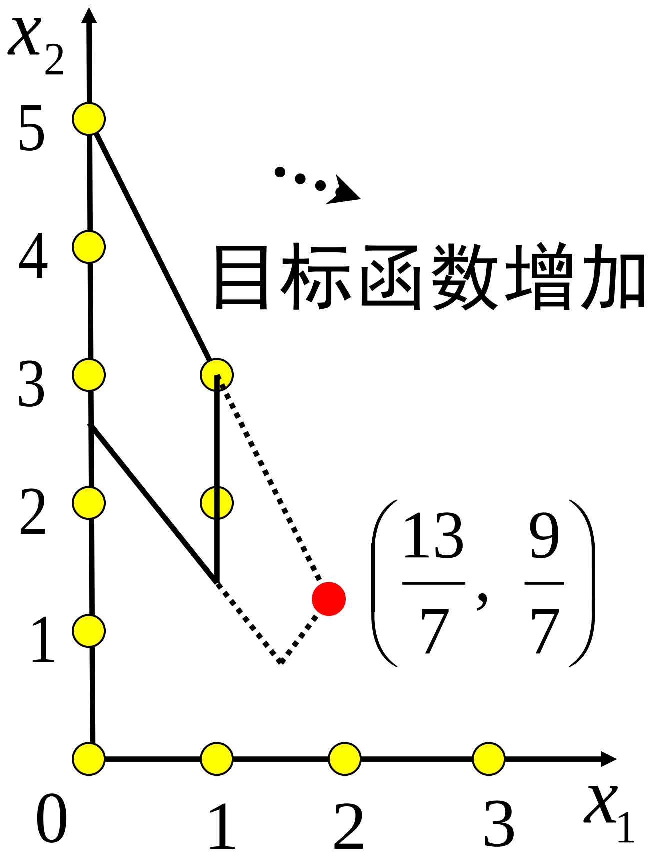
所以割平面约束为 $-\frac{1}{7}x_3-\frac{2}{7}x_5\le-\frac{6}{7}$

利用 $3x_1-2x_2+x_3=3,\ 2x_1+x_2+x_5=5$

可得原变量表示的割平面约束为 $x_1\le1$

新的优化问题为 $\max\ 3x_1 - x_2$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 3x_1 - 2x_2 \le 3 \\ & 5x_1 + 4x_2 \ge 10 \\ & 2x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1 \le 1 \\ & x_1, x_2 \quad \text{非负且取整数值} \end{aligned}$$



新的松弛问题可行集及原可行集被切割部分见左图

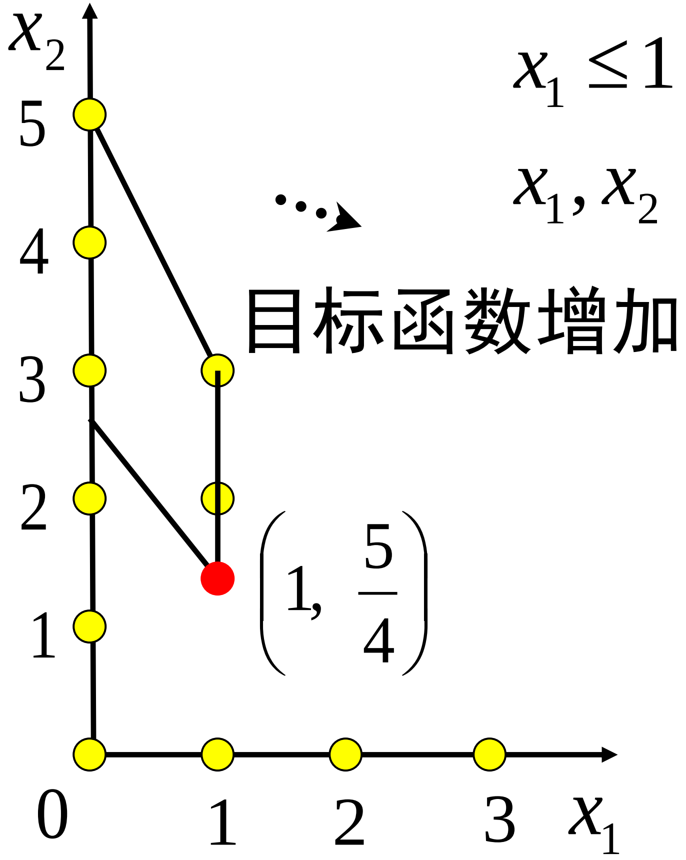
1）原最优解被切割掉

2）所有整数解被保存

$$\max \quad 3x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 3x_1 - 2x_2 \le 3$$
$$5x_1 + 4x_2 \ge 10$$
$$2x_1 + x_2 \le 5$$
$$x_1 \le 1$$
x_1, x_2 非负且取整数值

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$
$$5x_1 + 4x_2 - x_4 = 10$$
$$2x_1 + x_2 + x_5 = 5$$
$$x_1 + x_6 = 1$$



松弛问题可行集及
最优解如右图所示
仍不满足整数约束

此时等式约束如下：

$$
\begin{aligned}
& x_1 + x_6 = 1 \\
& x_2 - \frac{1}{4} x_4 - \frac{5}{4} x_6 = \frac{5}{4} \\
& x_3 - \frac{1}{2} x_4 - \frac{11}{2} x_6 = \frac{5}{2} \\
& x_5 + \frac{1}{4} x_4 - \frac{3}{4} x_6 = \frac{7}{4}
\end{aligned}
$$

再利用等式约束 $x_5+\frac{1}{4}x_4-\frac{3}{4}x_6=\frac{7}{4}$

构造割平面约束，因为

$$\frac{1}{4}=0+\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}=-1+\frac{1}{4},\ \frac{7}{4}=1+\frac{3}{4}$$

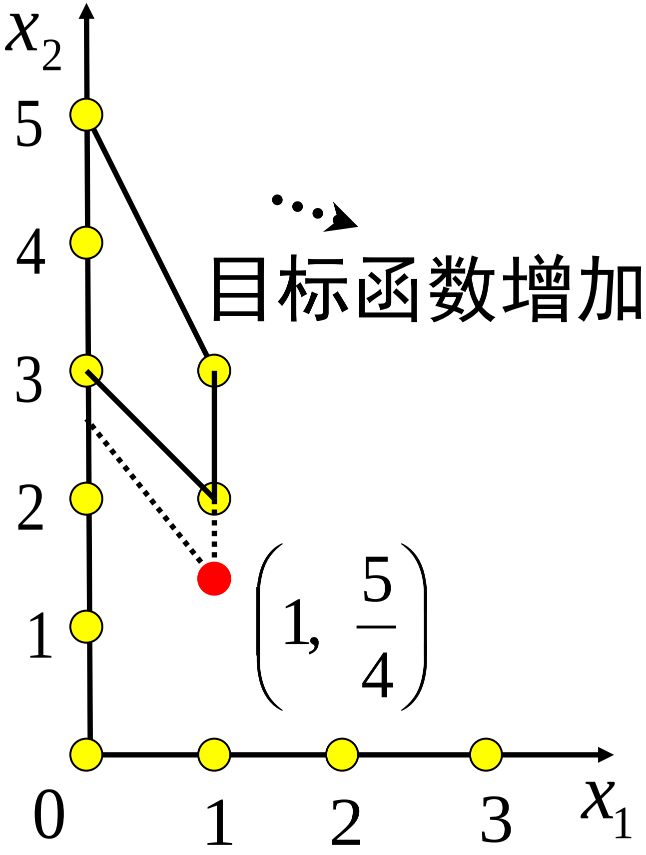
所以割平面约束为 $-\frac{1}{4}x_4-\frac{1}{4}x_6\le-\frac{3}{4}$

利用 $5x_1+4x_2-x_4=10,\ x_1+x_6=1$

可得原变量表示的割平面约束为 $x_1+x_2\ge 3$

新的优化问题为 $\max\ 3x_1 - x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & 3x_1 - 2x_2 \le 3 \\
& 5x_1 + 4x_2 \ge 10 \\
& 2x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 \le 1,\ x_1 + x_2 \ge 3 \\
& x_1, x_2 \text{ 非负且取整数值}
\end{aligned}
$$



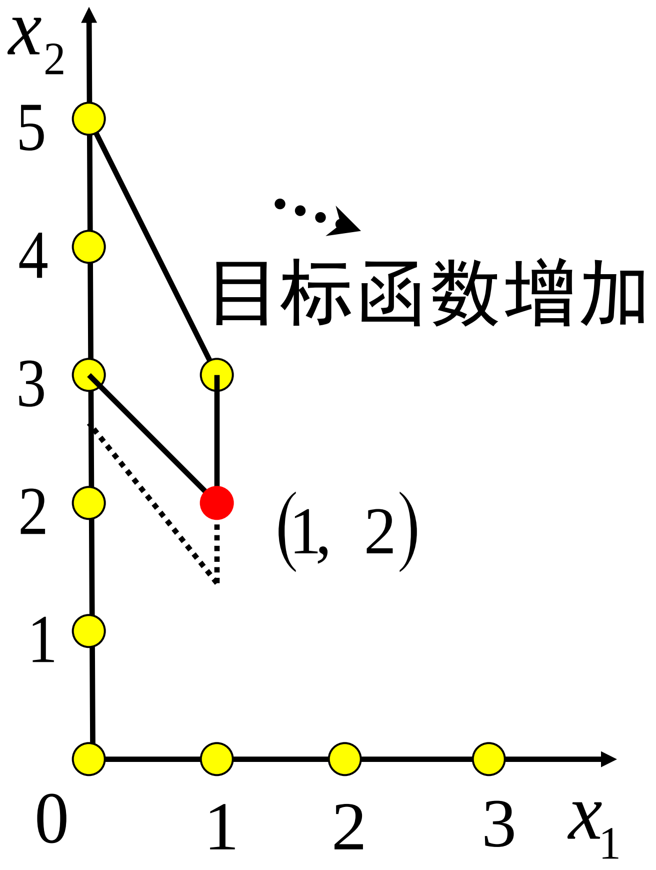
新的松弛问题可行集及原可行集被切割部分见右图

1）原最优解被切割掉

2）所有整数解被保存

对于松弛问题

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 - 2x_2 \le 3 \\ & 5x_1 + 4x_2 \ge 10 \\ & 2x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1 \le 1,\ x_1 + x_2 \ge 3 \\ & x_1, x_2 \ \text{非负} \end{aligned}$$



该松弛问题的最优解显然是右图红点，由于其满足整数约束，所以它就是原整数规划问题的最优解

对前一个松弛问题，若利用等式约束

$$x_2 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{5}{4}x_6 = \frac{5}{4}$$

构造割平面约束，因为

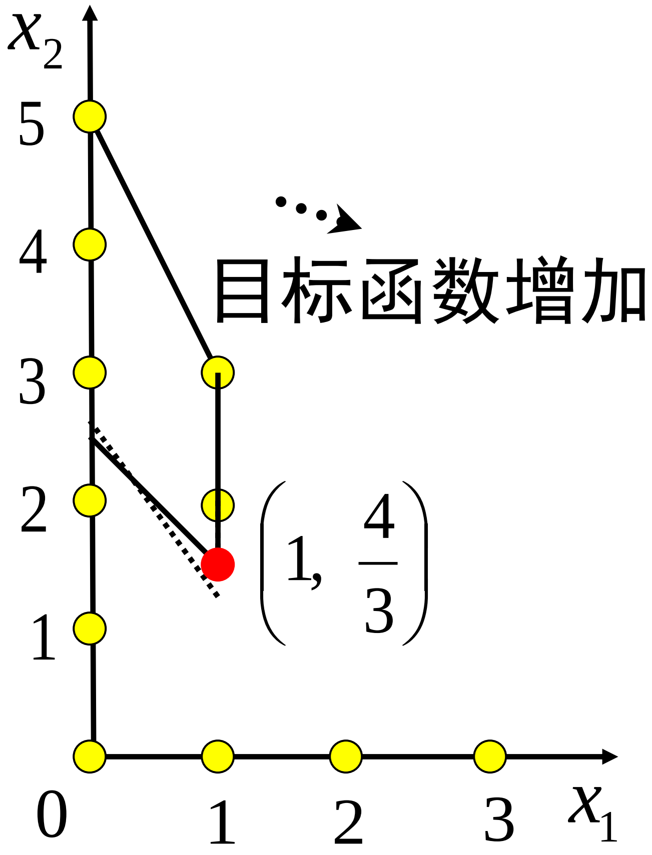
$$-\frac{1}{4} = -1 + \frac{3}{4},\ -\frac{5}{4} = -2 + \frac{3}{4},\ \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

所以割平面约束为 $-\frac{3}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_6 \le -\frac{1}{4}$

利用 $5x_1 + 4x_2 - x_4 = 10,\ x_1 + x_6 = 1$

可得原变量表示的割平面约束为 $x_1 + x_2 \ge \frac{7}{3}$

对于松弛问题



$$
\begin{aligned}
\max\ & 3x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\ & 3x_1 - 2x_2 \le 3 \\
& 5x_1 + 4x_2 \ge 10 \\
& 2x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 \le 1,\ x_1 + x_2 \ge 7/3 \\
& x_1, x_2\ \text{非负}
\end{aligned}
$$

松弛问题可行集及最优解如右图所示仍不满足整数约束

用不同等式构造割平面效果不同！

每次增加一个不等式约束后，可以用新的不等式约束的松弛变量做新增加的基变量，从而上一个松弛问题的非基变量都没有改变，因此其检验数也不改变，每次增加一个不等式约束后，可以在上一个松弛问题的最后的单纯型表的基础上用对偶单纯型法求解新的松弛问题

$$-\sum_{j\in K}\alpha_{kj}x_j \le -\beta_k \quad \Rightarrow \quad -\sum_{j\in K}\alpha_{kj}x_j + x_{n+1} = -\beta_k$$

求解如下线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + x_2 \\
\text{s.t. } & 5x_2 \le 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\
& x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \quad \text{为整数}
\end{aligned}
$$

化为标准型：

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + x_2 \\
\text{s.t. } & 5x_2 + x_3 = 15 \\
& 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\
& x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\
& x_i \ge 0,\ i = 1, \cdots, 5 \qquad x_1,\ x_2 \ \text{为整数}
\end{aligned}
$$

最终表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	5/4	–15/2	15/2
x_1	1	0	0	1/4	–1/2	7/2
x_2	0	1	0	–1/4	3/2	3/2
	0	0	0	0	–1	$Z-5$

利用等式约束 $x_1+\frac{1}{4}x_4-\frac{1}{2}x_5=\frac{7}{2}$ 构造割平面

$$-\frac{1}{4}x_4-\frac{1}{2}x_5\le-\frac{1}{2}$$

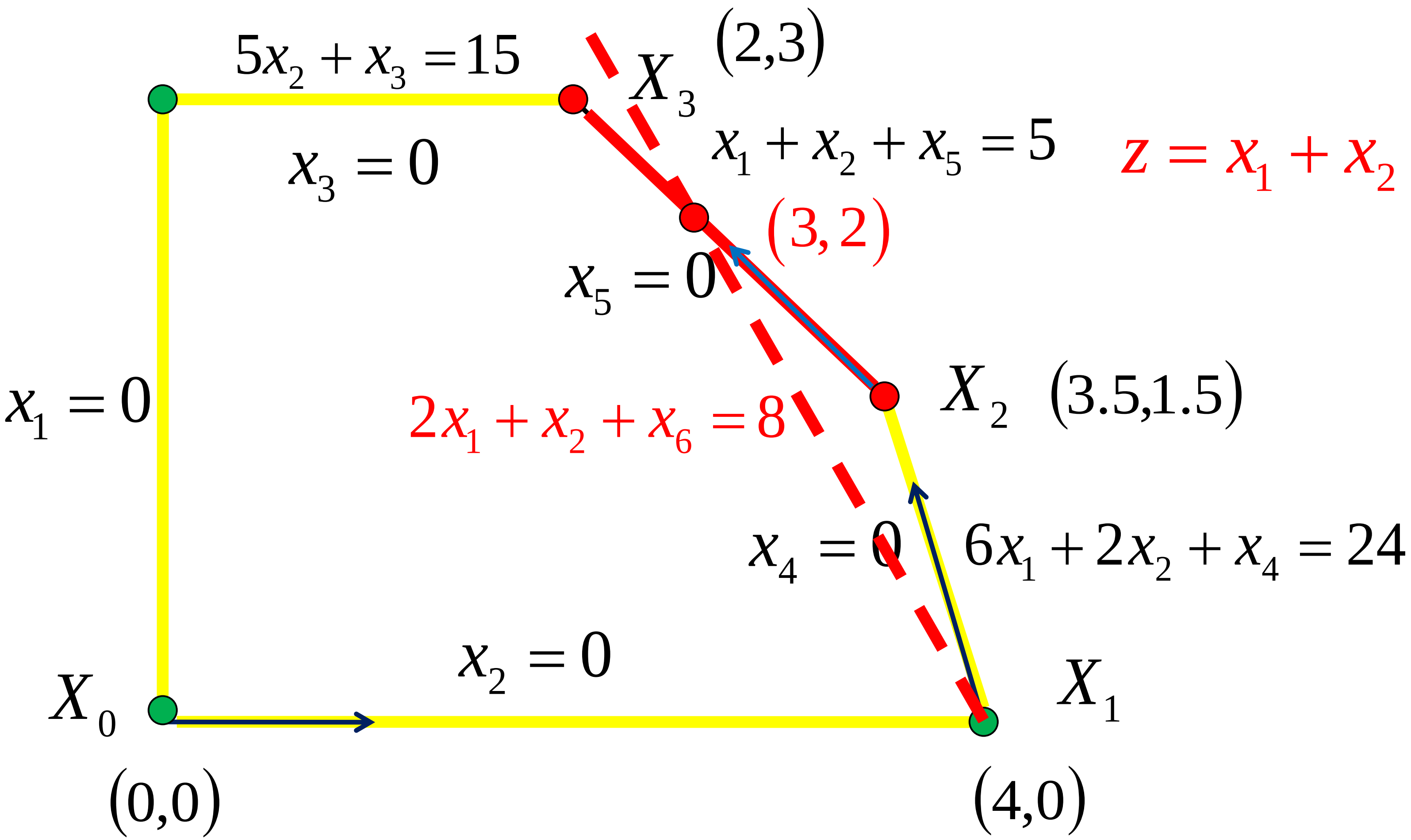
利用 $6x_1+2x_2+x_4=24$

$x_1+x_2+x_5=5$

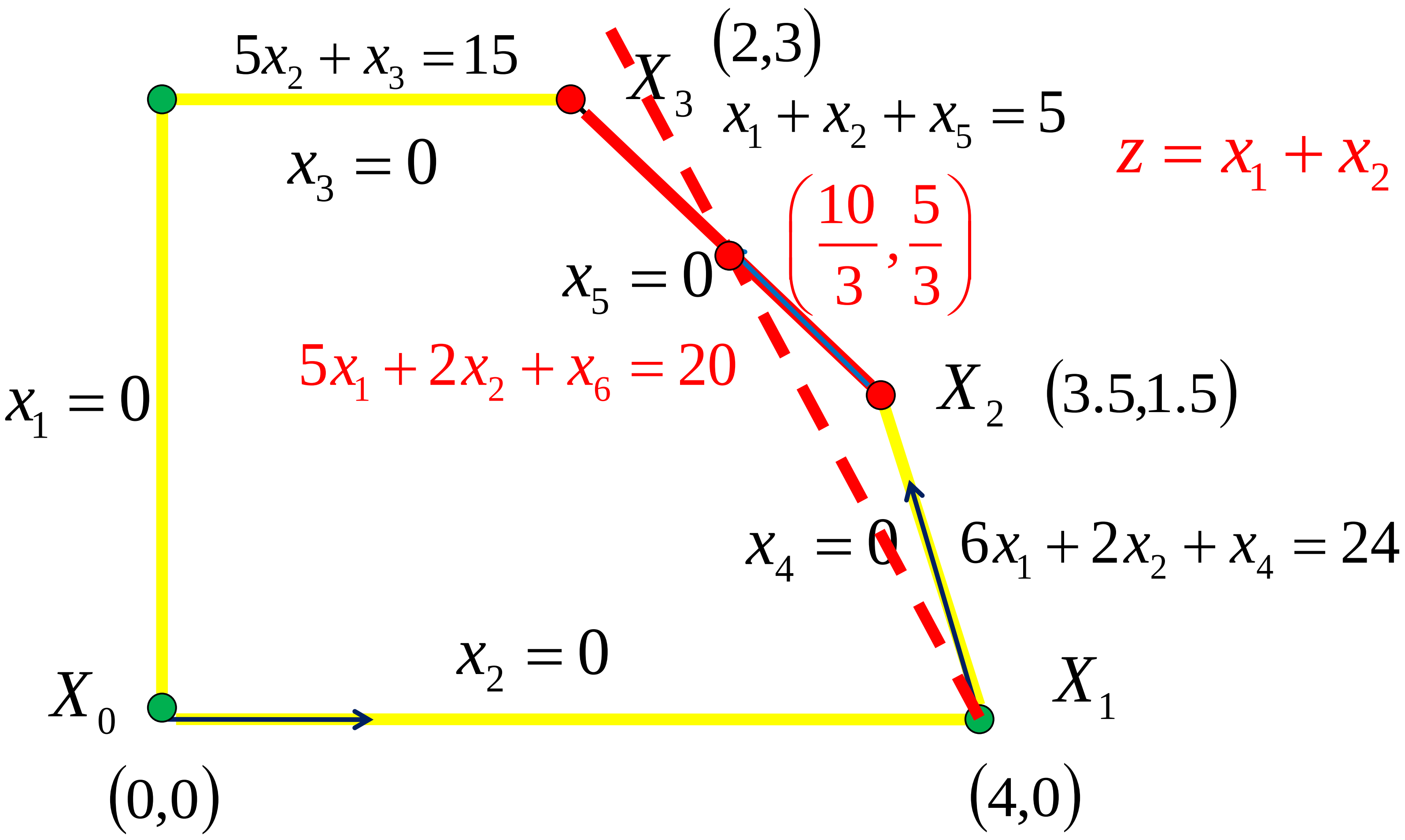
可得原变量表示的割平面约束为 $2x_1+x_2\le 8$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_3	0	0	1	$5/4$	$-15/2$	0	$15/2$
x_1	1	0	0	$1/4$	$-1/2$	0	$7/2$
x_2	0	1	0	$-1/4$	$3/2$	0	$3/2$
x_6	0	0	0	$-1/4$	$-1/2$	1	$-1/2$
	0	0	0	0	-1	0	$Z-5$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_3	0	0	1	0	5	5	5
x_1	1	0	0	0	-1	1	3
x_2	0	1	0	0	2	-1	2
x_4	0	0	0	1	2	-4	2
	0	0	0	0	-1	0	$Z-5$


$5x_2 + x_3 = 15$
$(2,3)$
X_3
$x_1 + x_2 + x_5 = 5$
$z = x_1 + x_2$
$x_3 = 0$
$(3,2)$
$x_5 = 0$
$x_1 = 0$
$2x_1 + x_2 + x_6 = 8$
X_2
$(3.5,1.5)$
$x_4 = 0$
$6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24$
$x_2 = 0$
X_0
X_1
$(0,0)$
$(4,0)$

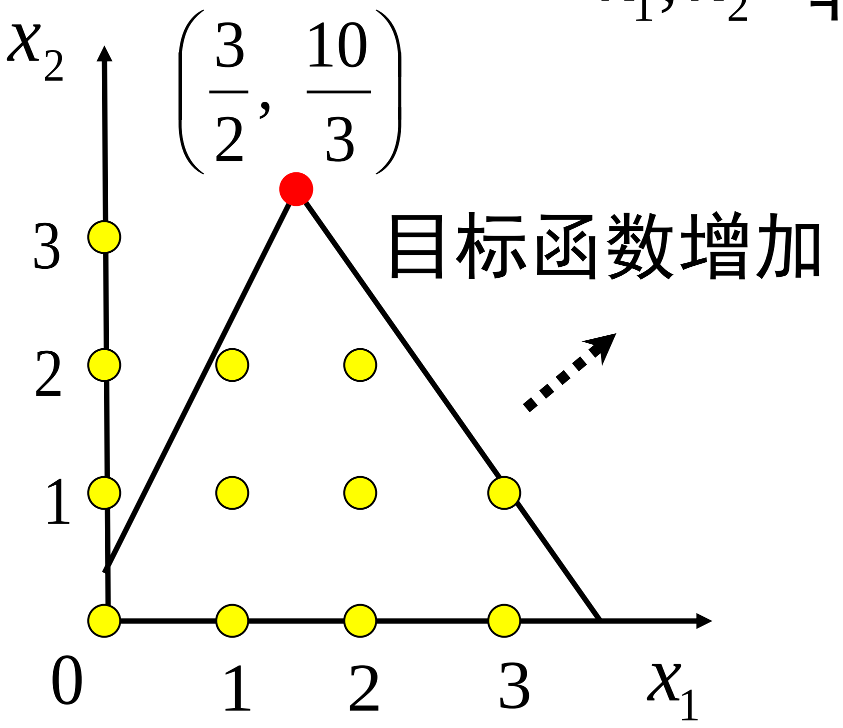
利用约束 $x_2 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{2}x_5 = \frac{3}{2}$ 构造割平面 $5x_1 + 2x_2 \le 20$



要点：可解混合整数规划的分枝定界法

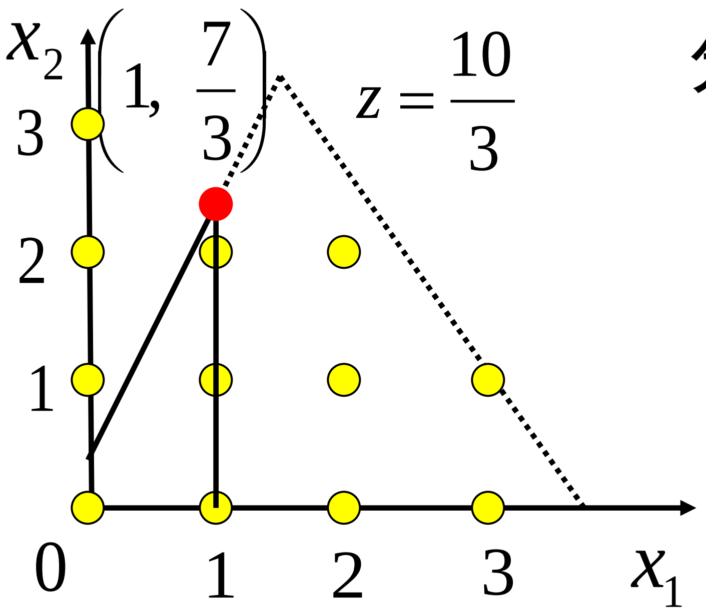
例：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\
& -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\
& x_1, x_2 \ \text{非负且取整数值}
\end{aligned}
$$

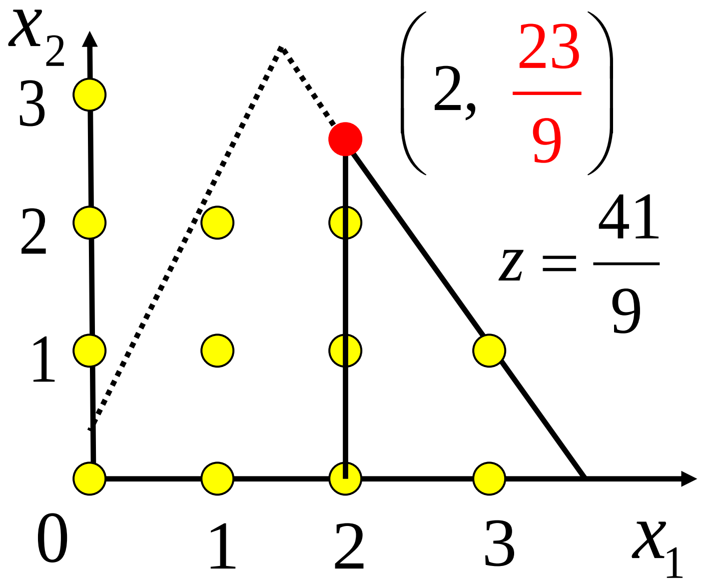


松弛问题可行集及最优解如右图所示不满足整数约束

分枝



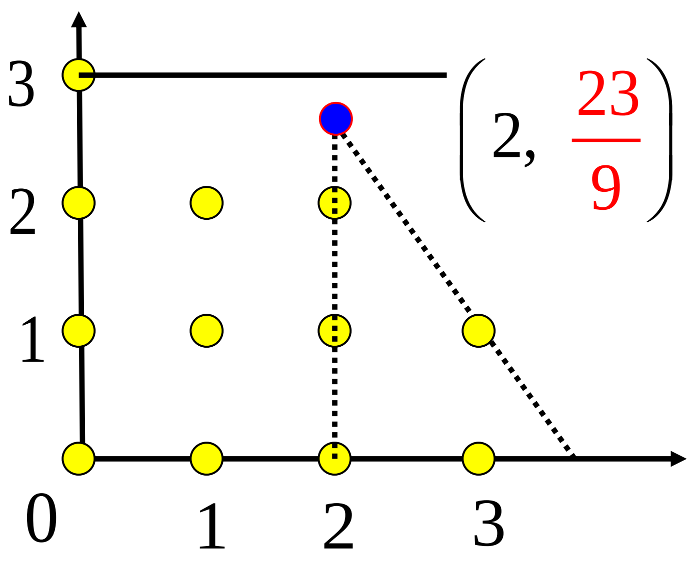
$$\begin{aligned}
\max\quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\
& -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\
& x_1 \le 1 \\
& x_1, x_2 \quad \text{非负取整}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\max\quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\
& -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\
& x_1 \ge 2 \\
& x_1, x_2 \quad \text{非负取整}
\end{aligned}$$

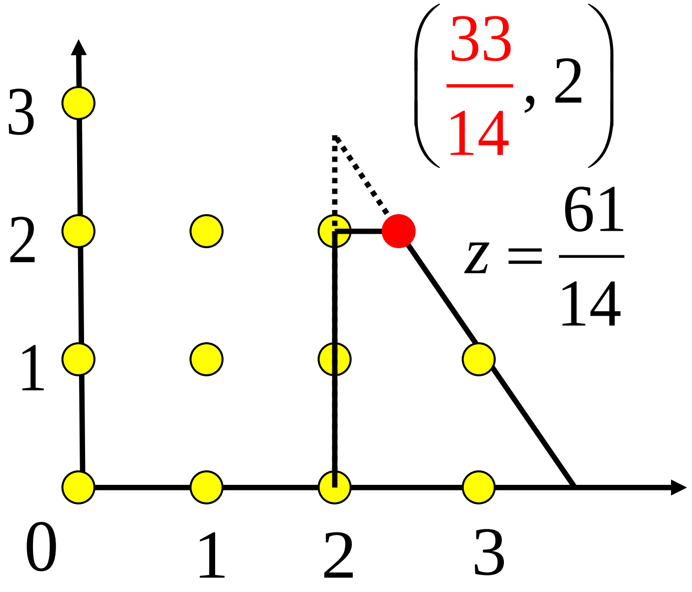
任何可行解都属于某枝问题的可行集

选目标函数值大的优先分枝



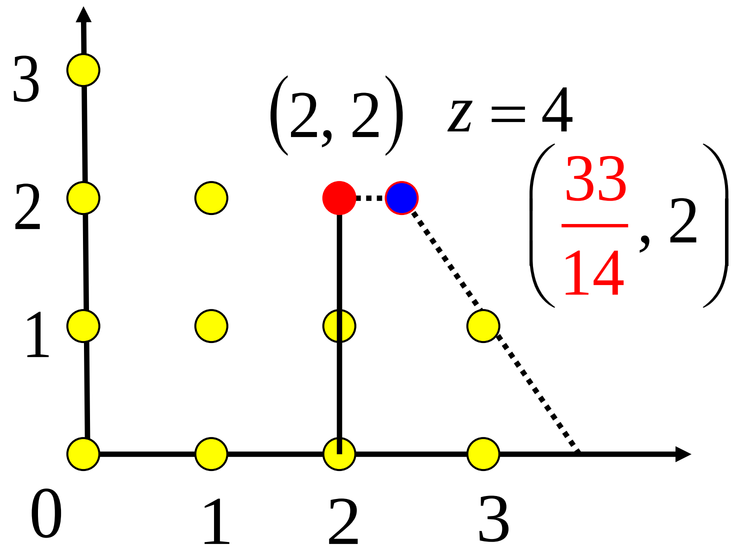
$$\max \quad x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \quad 14x_1 + 9x_2 \le 51$$
$$-6x_1 + 3x_2 \le 1$$
$$x_1 \ge 2,\ x_2 \ge 3$$
$$x_1, x_2 \quad \text{非负取整}$$

无可行解，不再考虑



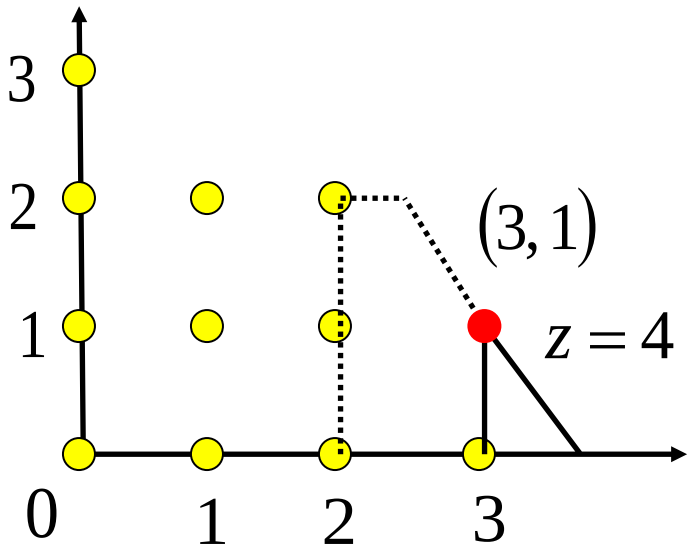
$$\max \quad x_1 + x_2$$
$$\text{s.t.} \quad 14x_1 + 9x_2 \le 51$$
$$-6x_1 + 3x_2 \le 1$$
$$x_1 \ge 2,\ x_2 \le 2$$
$$x_1, x_2 \quad \text{非负取整}$$

继续选目标函数值大的优先分枝



$$\max \quad x_1 + x_2$$

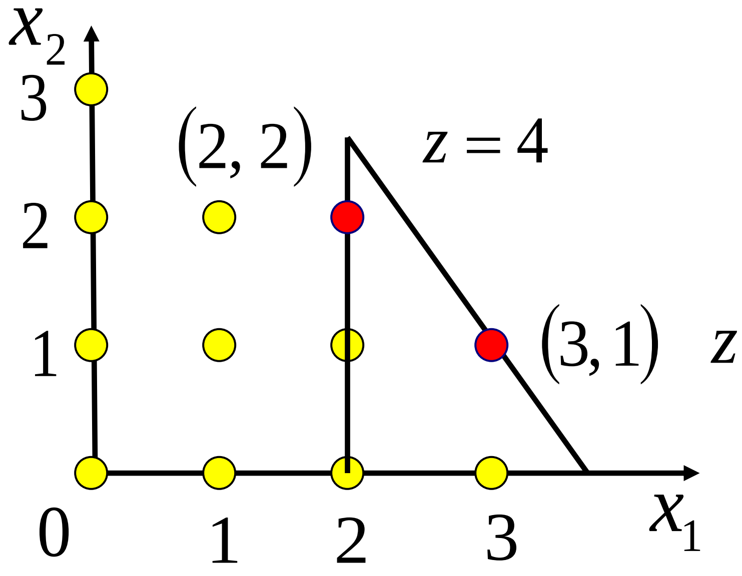
$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\ & -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\ & x_1 = 2,\ x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ \text{非负取整} \end{aligned}$$



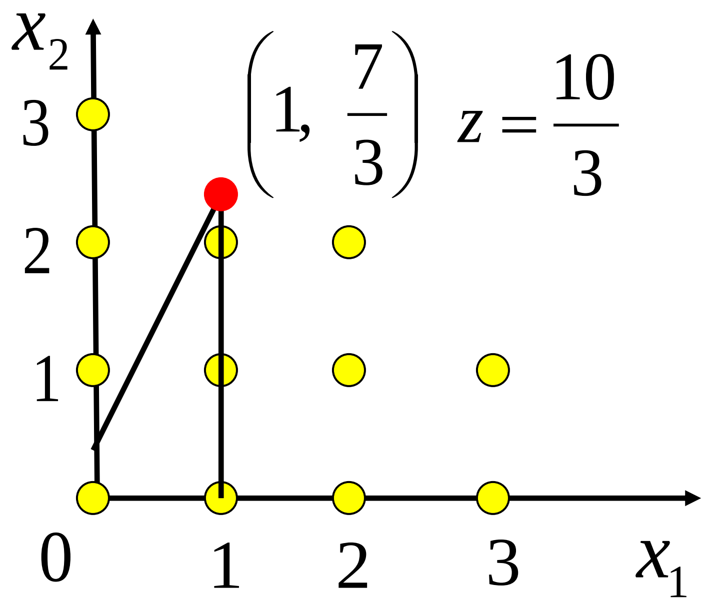
$$\max \quad x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & 14x_1 + 9x_2 \le 51 \\ & -6x_1 + 3x_2 \le 1 \\ & x_1 \ge 3,\ x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ \text{非负取整} \end{aligned}$$

定界　对于下图所示可行集，已经找到最优解，最优目标函数值等于 4 ，由此确定了该问题最优目标函数的一个下界，如果某个分枝的松弛问题的最优值小于这个界，由于整数最优目标值更小，所以可断定该枝不含最优解，不用再分枝



回到尚未确定最优解的一枝，如下图所示，由于其松弛问题的最优值小于前面确定的下界 4 ，因此可断定该枝不含最优解，因此不用再分枝，从而确定了该整数规划问题的最优解



要点：0-1变量的作用

例： 有资金 B ，可以投资 n 个项目，投资额和收益分别为 a_j 和 c_j ，要考虑三个条件：

1）若选择项目1就必须选择项目2；

2）项目3和项目4至少选一个；

3）项目5、6、7中选两个，如何投资总效益最大？

变量：$x_j=1$，投资项目 j， $x_j=0$，不投项目 j

条件1） $x_2 \ge x_1$

条件2） $x_3+x_4 \ge 1$

条件3） $x_5+x_6+x_7=2$

0-1型整数规划模型

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$ 总投资效益

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le B$$ 投资总额约束

$$x_2 \ge x_1$$ 条件1）

$$x_3 + x_4 \ge 1$$ 条件2）

$$x_5 + x_6 + x_7 = 2$$ 条件3）

$$x_j \in \{0,1\},\ \forall 1 \le j \le n$$

松弛问题的最优解与原问题将大相迳庭

用0-1变量统一互相排斥的约束条件

某工序有两种加工方式，一种方法周工时约束为：

$$0.3x_1 + 0.5x_2 \le 150$$

另一种方式周工时约束为：

$$0.2x_1 + 0.4x_2 \le 120$$

规划时可选用两种方式中的任意一种

如何将这两种互相排斥的约束条件统一在一个规划模型中？

定义0-1变量 y_1, y_2 如下：

$$y_1 = \begin{cases} 0 & \text{若采用第一种加工方式} \\ 1 & \text{若不采用第一种加工方式} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 0 & \text{若采用第二种加工方式} \\ 1 & \text{若不采用第二种加工方式} \end{cases}$$

统一的约束条件为：

$$0.3x_1 + 0.5x_2 \le 150 + M_1 y_1$$

$$0.2x_1 + 0.4x_2 \le 120 + M_2 y_2$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

其中 M_1, M_2 为充分大的正数（使约束不起作用）

一般情况，若要在下面 p 个约束条件中选用 q 个

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1,2,\cdots,p$$

定义0-1变量 $y_i, i = 1,2,\cdots,p$ 如下：

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{若采用第 } i \text{ 种加工方式} \\ 1 & \text{若不采用第 } i \text{ 种加工方式} \end{cases}$$

统一约束条件为：$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i + y_i M_i,\ i = 1, 2,\cdots, p$

$$\sum_{i=1}^{p} y_i = p - q$$

用0-1变量处理固定费用

单耗量 产品 / 资源	I	II	III	资源量
A	2	4	8	500
B	2	3	4	300
C	1	2	3	100
单件可变费用	4	5	6	
固定费用	100	150	200	
单件售价	8	10	12	

若产量0，固定费用0，否则为定值，事先不能确定

用 $x_j, j=1,2,3$ 分别代表三种产品的产量

定义0-1变量 $y_j, j=1,2,3$ 如下

$$y_j = \begin{cases} 1 & , x_j > 0 \\ 0 & , x_j = 0 \end{cases}$$

则生产利润为

$$(8-4)x_1 + (10-5)x_2 + (12-6)x_3 - 100y_1 - 150y_2 - 200y_3$$

而上述 y_j 和 x_j 的关系可用以下约束描述

$$x_1 \le M_1 y_1,\ x_2 \le M_2 y_2,\ x_3 \le M_3 y_3$$

其中 M_j 是大于 x_j 的取值上界的数