运筹学第二次作业（20230927）参考答案

1. 假设以下集合均为非空集合，请判断哪些集合一定有极点，并给出理由：

a）$\Omega=\left\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A x}=\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}_{+}^{n}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m}\right\}$。

b）$\Omega=\left\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m}\right\}$，其中 $\mathbf{A}$ 为行满秩矩阵。

c）$\Omega=\left\{\mathbf{x} \mid \mathbf{A x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n}, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m}\right\}$，其中 $\mathbf{A}$ 为列满秩矩阵。

解：

a) 该集合一定有顶点。

该集合的约束是标准形式的 LP 问题，且已知非空。则根据定理 1.2.5，其至少有一个基本可行解，继而根据定理 1.2.4，该基本可行解为 Ω 中的顶点。

b) 该集合**不**一定有顶点。

举反例即可。令$A=[1 \quad 1]$，$b=0$，则A行满秩且Ω_2非空，但此时

$$\Omega_2=\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 | x_1+x_2 \geq 0\}$$

没有顶点。

c) 该集合一定有顶点。

设$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m}$，且$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1^T, \boldsymbol{a}_2^T, \ldots, \boldsymbol{a}_m^T)^T$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$，其中$\boldsymbol{a}_i^T$表示$\boldsymbol{A}$的第$i$行。

由题意，$\boldsymbol{A x} \geq \boldsymbol{b}$有解，则必有边界上的解$\boldsymbol{x}$（否则可向任一超平面的内法向量方向移动到达边界），设起作用的约束（取等号）下标为$c_1, c_2, \ldots, c_k$.

因为$\boldsymbol{A}$列满秩，$m \geq n$，必能找到n个行向量线性无关，于是$k \geq n$，也即必能找到一点$\boldsymbol{x}^*$，满足：

$$\boldsymbol{a}_{c_1}^T \boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{b}_{c_1}$$

$$\ldots$$

$$\boldsymbol{a}_{c_k}^T \boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{b}_{c_k}$$

$$\boldsymbol{a}_{c_{k+1}}^T \boldsymbol{x}^*>\boldsymbol{b}_{c_{k+1}}$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{a}_{c_m}^T \boldsymbol{x}^* > \boldsymbol{b}_{c_m}$$

事实上当$k > n$时，存在冗余等式约束可去掉，故只用考虑$k = n$的情况。

当$k = n$时，等式约束解唯一。任何异于$\boldsymbol{x}^*$的解，前k个约束至少一个取大于号，其线性组合不可能为$\boldsymbol{x}^*$, 所以$\boldsymbol{x}^*$为顶点。

2. 验证 Beale 的例子

考虑如下线性规划问题

$$\begin{aligned}
\max_{x_1, x_2, \ldots, x_7} \quad & \frac{3}{4}x_4 - 20x_5 + \frac{1}{2}x_6 - 6x_7 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0 \\
& x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0 \\
& x_3 + x_6 = 1 \\
& x_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, 7
\end{aligned}$$

假设我们选择的初始基变量是$\{x_1, x_2, x_3\}$，则得到如下的单纯型表

$\mathbf{x}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_1	1	0	0	1/4	−8	−1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	−12	−1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	3/4	−20	1/2	−6	$z-0$

第一次选择x_4作为进基变量，x_1作为出基变量，进行翻转，基变量变为$\{x_4, x_2, x_3\}$，得到如下的单纯型表

$\mathbf{x}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_4	4	0	0	1	−32	−4	36	0
x_2	−2	1	0	0	4	3/2	−15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	−3	0	0	0	4	7/2	−33	$z-0$

第二次选择 x_5 作为进基变量， x_2 作为出基变量，进行翻转，基变量变为 $\{x_4, x_5, x_3\}$，得到如下的单纯型表

$\mathbf{x}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_4	−12	8	0	1	0	8	−84	0
x_5	−1/2	1/4	0	0	1	3/8	−15/4	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	−1	−1	0	0	0	2	−18	$z-0$

第三次选择 x_6 作为进基变量， x_4 作为出基变量，进行翻转，基变量变为 $\{x_6, x_5, x_3\}$，得到如下的单纯型表

x_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	−3/2	1	0	1/8	0	1	−21/2	0
x_5	1/16	−1/8	0	−3/64	1	0	3/16	0
x_3	3/2	−1	1	−1/8	0	0	21/2	1
	2	−3	0	−1/4	0	0	3	$z-0$

第四次选择 x_7 作为进基变量， x_5 作为出基变量，进行翻转，基变量变为 $\{x_6, x_7, x_3\}$，得到如下的单纯型表

$\mathbf{x}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	2	−6	0	−5/2	56	1	0	0
x_7	1/3	−2/3	0	−1/4	16/3	0	1	0
x_3	−2	6	1	5/2	−56	0	0	1
	1	−1	0	1/2	−16	0	0	$z-0$

第五次选择 x_1 作为进基变量， x_6 作为出基变量，进行翻转，基变量变为 $\{x_1, x_7, x_3\}$，得到如下的单纯型表

$\mathbf{x}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_1	1	−3	0	−5/4	28	1/2	0	0
x_7	0	1/3	0	1/6	−4	−1/6	1	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	2	0	7/4	−44	−1/2	0	$z-0$

第六次选择 x_2 作为进基变量， x_7 作为出基变量，进行翻转，基变量变为 $\{x_1, x_2, x_3\}$，得到如下的单纯型表

$\mathbf{x}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_1	1	0	0	$1/4$	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	$1/2$	-12	$-1/2$	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	$3/4$	-20	$1/2$	-6	$z-0$

则此时循环到了初始状态。实际上在整个迭代过程中，虽然可行基矩阵不断改变，但对应的基本可行解始终是$\boldsymbol{x} = [0,0,1,0,0,0,0]^T$，没有变化。

如果采用 Bland 法则，请重新计算上述例子，找到最优解。

解：

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_1	1	0	0	1/4	-8	-1	9	0
x_2	0	1	0	1/2	-12	-1/2	3	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	0	0	0	3/4	-20	1/2	-6	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_4	4	0	0	1	-32	-4	36	0
x_2	-2	1	0	0	4	3/2	-15	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	-3	0	0	0	4	7/2	-33	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_4	-12	8	0	1	0	8	-84	0
x_5	-1/2	1/4	0	0	1	3/8	-15/4	0
x_3	0	0	1	0	0	1	0	1
	-1	-1	0	0	0	2	-18	z

此时根据 Bland 法则，应选择下标最小的进基变量 x_1

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	-3/2	1	0	1/8	0	1	-21/2	0
x_5	1/16	-1/8	0	-3/64	1	0	3/16	0
x_3	3/2	-1	1	-1/8	0	0	21/2	1
	2	-3	0	-1/4	0	0	3	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	0	-2	0	-1	24	1	-6	0
x_1	1	-2	0	-3/4	16	0	3	0
x_3	0	2	1	1	-24	0	6	1
	0	1	0	5/4	-32	0	-3	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	0	1	1/4	-8	0	9	1
x_2	0	1	1/2	1/2	-12	0	3	1/2
	0	0	-1/2	3/4	-20	0	-6	z-1/2

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_6	0	0	1	0	0	1	0	1
x_1	1	-1/2	3/4	0	-2	0	15/2	3/4
x_4	0	2	1	1	-24	0	6	1
	0	-3/2	-5/4	0	-2	0	-21/2	z-5/4

所有非基变量的检验数均为负数，得到最优解$\boldsymbol{x} = (3/4, 0,0,1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$，最优值为 $z_{max} = 5/4$.

3. 某线性规划问题的约束条件是

$$2x_1+3x_2+x_3=14$$
$$5x_1+x_2+x_4=9$$
$$x_i\geq 0,\ \ i=1,2,3,4$$

请问 x_1,x_2 所对应的列向量 A_1,A_2 是否构成可行基？若是，请写出 B,N，并求出 B 对应的基本可行解。

解：

$B=[A_1,A_2]=\begin{bmatrix}2&3\\5&1\end{bmatrix}$满秩，$N=[A_3,A_4]=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，则 $B^{-1}b=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}>0$

因此A_1,A_2构成可行基，基本可行解为$(1,4,0,0)^{\mathrm{T}}$

4. 用单纯型法求解以下问题，其中起点为 $x_1=x_2=0$

$$\begin{aligned}\max_{x_1,x_2}\quad & 2x_1+x_2\\ \text{s.t.}\quad & 5x_2\leq 15\\ & 6x_1+2x_2\leq 24\\ & x_1+x_2\leq 5\\ & x_1\geq 0,x_2\geq 0\end{aligned}$$

解：

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	1	1	0	0	3
x_4	3	1	0	1	0	12
x_5	1	1	0	0	1	5
	2	1	0	0	0	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	1	1	0	0	3
x_1	1	1/3	0	1/3	0	4
x_5	0	2/3	0	-1/3	1	1
	0	1/3	0	-2/3	0	z-8

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	1/2	-3/2	3/2
x_1	1	0	0	1/2	-1/2	7/2
x_2	0	1	0	-1/2	3/2	3/2
	0	0	0	-1/2	-1/2	z-17/2

此时非基变量检验数均为负，得到最优解为$(x_1, x_2) = (7/2,\ 3/2)$，最优值为 17/2.

（请同学们区分**最优解**与**最优值**的概念）

附加题：假设以下集合均为非空集合，请判断哪些集合一定有极点，并给出理由：

d） $\Omega = \left\{\mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}, \mathbf{c}^T\mathbf{x} = -1, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n\right\}$，其中 **A** 为列满秩矩阵。

解：

该集合一定有极点。

设矩阵 **B** 和向量 **b** 分别为

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{c}^\top \\ -\boldsymbol{c}^\top \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

则集合可以转换为 $\Omega = \left\{\mathbf{x} \,\middle|\, \mathbf{Bx} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{(m+2)\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m+2}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n}\right\}$. 由于 **A** 为列满秩矩阵，新加入两行只会让 **A** 的秩增加 1 或者不变，所以 **B** 也为列满秩矩阵。根据第 1 题 c)的结论，该集合一定有极点。