非线性规划部分题目解答提示

1、请判断以下说法是否正确，并简述理由。

1.1、负梯度方向是使目标函数下降最多的方向。

解：错误。例如$\min\ f(x)=x_1^2+2x_2^2$，取初始点为$(1,1)$，则易知牛顿方向可比负梯度方向下降更多。

1.2、用梯度下降法求解任何非线性目标函数，都不能在有限次迭代后求得最优解。

解：错误。例如$\min\ f(x)=x_1^2+x_2^2$，梯度下降法一步迭代即可得到最优解。

1.3、用斐波那契法进行直线搜索，初始区间给定，则所需要的总迭代次数只和误差阈值有关。

解：正确。由迭代次数计算公式易知。

1.4、若给定误差阈值，用 0.618 法或牛顿法（假定收敛）进行直线搜索，所需要的总迭代次数都和目标函数无关。

解：错误。命题对 0.618 法正确，但牛顿法直线搜索迭代次数与目标函数有关。

1.5、用任何一种共轭梯度法求解凸目标函数的无约束优化问题，只要初始点相同，迭代过程的轨迹也一定相同。

解：错误。命题仅对二次目标函数正确，对一般凸目标函数不成立。

1.6、对于不等式约束优化问题，可行集的内点不可能是 KT 解。

解：错误。例如$\min\{(x-1)^2|0\leqslant x\leqslant 2\}$。

1.7、如果$f(x)$是凸集$\Omega\subset\mathbb{R}^n$上的凸函数，那么对任意$X\in\Omega$，$\nabla^2 f(X)$（假设存在）的最小特征根都大于或等于 0。

解：错误。Hessian 矩阵半正定作为凸函数的必要条件时要求凸集Ω为开集，例如$f(x)=x_1^2-x_2^2$，$\Omega=\{(x_1,x_2)|x_2=0\}$，可知$\nabla^2 f(X)$并非半正定。

1.8、如果$c=0.5\left(\sqrt{5}-1\right)$，$\{a_n\}_0^\infty$是 Fibonacci 数列，那么不等式$c^{n-1}a_n\geqslant 1$对所有非负整数$n$成立。

解：正确。由 Fibonacci 数列性质易知。

1.9、如果$\tilde{X}$是$\min\{f(X)|g_i(X)\leqslant 0,\ i=1,2,\ldots,l\}$的 KT 解，那么一定不存在$D$满足$D^\top\nabla f\left(\tilde{X}\right)<0,\ D^\top\nabla g_i\left(\tilde{X}\right)<0,\ \forall i=1,2,\ldots,l$。

解：正确。由 KT 条件

$$\nabla f\left(\tilde{X}\right)+\sum_{i=1}^{l}\mu_i^\top\nabla g_i\left(\tilde{X}\right)=0,\ \mu_i\geqslant 0$$

可知$\forall D$，有

$$D^\top\nabla f\left(\tilde{X}\right)+\sum_{i=1}^{l}\mu_i D^\top\nabla g_i\left(\tilde{X}\right)=0,\ \mu_i\geqslant 0$$

从而可知命题成立。

1.10、令$f(x)=x^\top Ax+b^\top x+c$，$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$正定，$p_i\in\mathbb{R}^n,\ 1\leqslant i\leqslant n$互为$A$共轭非零向量，从任意$x_0\in\mathbb{R}^n$出发，依次沿$p_1,\ p_2,\ldots,p_n$进行精确直线搜索，先后得到$x_1,\ x_2,\ldots,x_n$，则成立

$$f(x_k)=\min\{f(x)|x=x_0+(p_1,\ldots,p_k)y,\ y\in\mathbb{R}^k\},\ \forall k\geqslant 1$$

解：正确。此命题为共轭梯度法的一个基本定理。

2、回答以下问题，并简述理由。

2.1、已知$b_0=b_1=1,\ b_n=b_{n-1}+b_{n-2},\forall n\geqslant 2$，是否成立$0.6^{n-1}b_n\geqslant 1,\forall n\geqslant 1$？

解：不成立。由于$0.6<0.5\left(\sqrt{5}-1\right)$，则不等式不一定成立。亦可通过计算具体数值进行验证，当$n=7$时，上述不等式已不成立。

2.2、令$f(X)=X^\top AX+b^\top X$，$A\in\mathbb{R}^{n\times n}$正定，$p_i\in\mathbb{R}^n,\ 1\leqslant i\leqslant m$互为$A$共轭向量，从任意$X_0\in\mathbb{R}^n$出发，依次沿$p_1,\ p_2,\ldots,p_m$进行精确直线搜索，先后得到$X_1,X_2,\ldots,X_n$。请问对哪些$i\in\{1,2,\ldots,m\}$成立

$$f(X_i)\leqslant f\left(p_i+\sum_{0\leqslant j\leqslant i-1}(-1)^j X_j\right)$$

解：应用 1.10 定理可得，上述不等式对$i=2n-1,\ n=1,2,\ldots,\lfloor(m+1)/2\rfloor$成立，关键点在于计算不等式右侧函数自变量何时包含初始点X_0。

2.3、优化问题$\min\{(x_1+1)^2+x_2^2|(x_1-1)^2+x_2^2\geqslant 1,\ (x_1-2)^2+x_2^2\leqslant 4\}$有无 KT 解？

解：最优解$(0,0)$处起作用约束的梯度线性相关，但满足全部 KT 条件，因此存

在 KT 解。

2.4、优化问题$\max\{x_1|(x_1-1)^3-x_2\leqslant-2,\ (x_1-1)^3+x_2\leqslant 2\}$有无 KT 解？

解：最优解$(1,2)$处起作用约束的梯度线性无关，但不满足 KT 条件，因此不存在 KT 解。

3、请简述负梯度方向、共轭梯度方向和牛顿方向在求解无约束优化问题时的优缺点。

解：如下图所示，图源《OR Slides-11 2021》最后一页。

三种基于梯度的搜索方向的比较

	计算量	效率		鲁棒性
		解附近	远离解	
负梯度	A	C	A	A
共轭梯度	B	B	B	B
牛顿方向	C	A	C	C

4、利用 KT 条件求出以下问题的最优解。

$$\min\{x_1^2-x_2|x_1\geqslant 1,\ x_1^2+x_2^2\leqslant 26,\ x_1+x_2=6\}$$

解：画图得出最优解$(1,5)$，并在最优解处验证 KT 条件满足即可；若无法通过画图的方法得到最优解，则列出全部 KT 条件后分类讨论。

5、请举例说明，对于不等式约束的优化问题，即使最优解处起作用约束的梯度线性相关，它仍然可以满足 KT 条件。

解：例如 2.3 题。