运筹学第七次作业参考答案（20231108）

1. 考虑一个总期限为$N+1$年的设备更新问题：公司最初拥有一台新设备，每到第 n ($n=1,2,\dots,N$) 年的**年末**需要决定继续使用原有设备还是重新更换一台新设备，以使总收益最大。已知重新购买一台新设备的价值为C元，其T年末的残值为

$$S(T)=\begin{cases}N-T, & if \quad N\geq T\\ 0 \quad , & otherwise\end{cases}$$

又对有 T 年役龄的该设备，第 $T+1$ 年可创收益为

$$P(T)=\begin{cases}N^2-T^2, & if \quad N\geq T\\ 0 \quad , & otherwise\end{cases}$$

要求：

a） 对此问题建立动态规划模型。

b） 当$N=3$， $C=10$时求数值解。

解:

a) 建立序贯决策模型，一共有N个决策阶段。

状态：第k年末设备的役龄s_k ,$k=1,2,\dots,N+1$，其中$s_1=1$

决策：第k年末是否更新设备x_k ,$k=1,2,\dots,N$

状态集：$S_1=\{1\},S_2=\{1,2\},\dots,S_{N+1}=\{1,2,\dots,N+1\}$

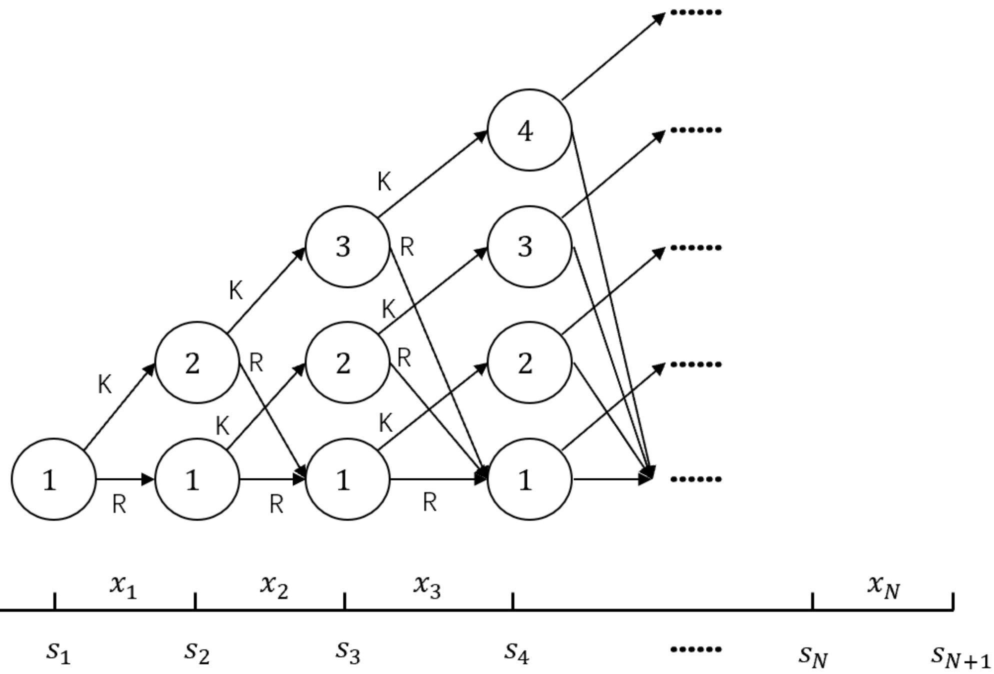
允许决策集：$U=\{R:\text{更新Renewal}，K:\text{保留Keep}\}$

状态转移函数：$s_{k+1}=T_k(s_k,x_k)=\begin{cases}s_k+1, & x_k=K\\ 1 \quad , & x_k=R\end{cases}$,$k=1,2,\dots,N$

阶段指标函数：$d_k(s_k,x_k)=\begin{cases}P(s_k) & ,x_k=K\\ P(0)+S(s_k)-C & ,x_k=R\end{cases}$, $k=1,2,\dots,N$

求策略$\boldsymbol{p}=\{x_1,\dots,x_N\}$，使得下述过程指标函数达到最小

$$\sum_{k=1}^{N}d_k(s_k,x_k)$$



b) 方法一：用逆推法

$$f_4(s_4) = 0$$

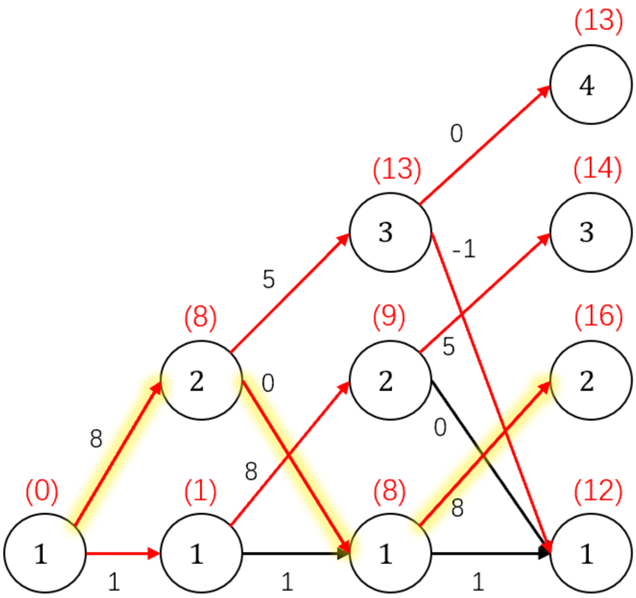
$$\forall s_3 \in S_3 = \{1,2,3\}, \qquad f_3(s_3) = \max_{x_3 \in U} d_3(s_3, x_3)$$
$$= \max_{x_3 \in U} \{P(s_3), P(0) + S(s_3) - C\}$$
$$= \max_{x_3 \in U} \{9 - s_3^2, 2 - s_3\}$$
$$= 9 - s_3^2$$

$$\forall s_2 \in S_2 = \{1,2\}, \qquad f_2(s_2) = \max_{x_2 \in U} d_2(s_2, x_2) + f_3\big(T_2(s_2, x_2)\big)$$
$$= \max_{x_2 \in U} \{9 - s_2^2 + 9 - (s_2 + 1)^2, 2 - s_2 + 9 - 1^2\}$$
$$= \max_{x_2 \in U} \{17 - 2s_2^2 - 2s_2, 10 - s_2\}$$
$$= \begin{cases} 13, & s_2 = 1 \ \ (x_2 = K) \\ 8, & s_2 = 2 \ \ (x_2 = R) \end{cases}$$

$$\forall s_1 \in S_1 = \{1\}, \qquad f_1(s_1) = \max_{x_1 \in U} d_1(s_1, x_1) + f_2\big(T_1(s_1, x_1)\big)$$
$$= \max_{x_1 \in U} \{9 - s_1^2 + 8, 2 - s_1 + 13\}$$
$$= 16$$

得到最优策略为$\boldsymbol{p}^* = \{K, R, K\}$，即第1年末不更新，第2年末更新，第3年末不更新，此时最大收益为16。

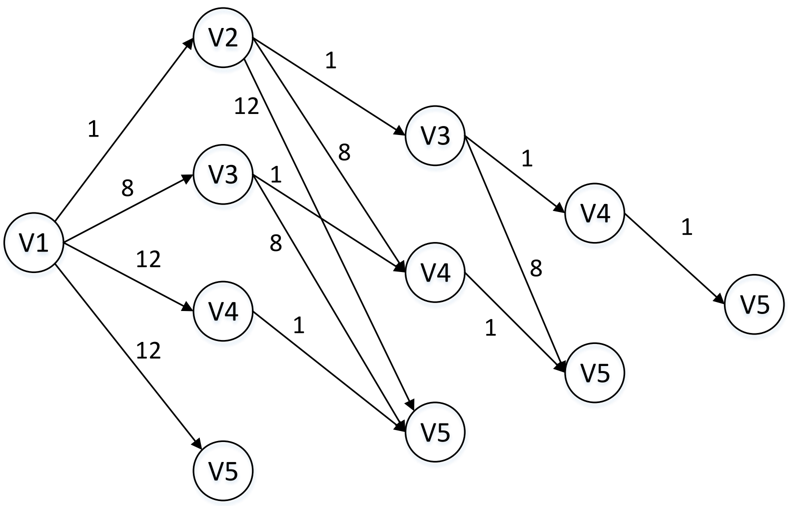
方法二：用顺推法，可以直接在图上进行操作，边上的数值表示该边带来的利润，节点括号内数值表示当前状态最大利润。



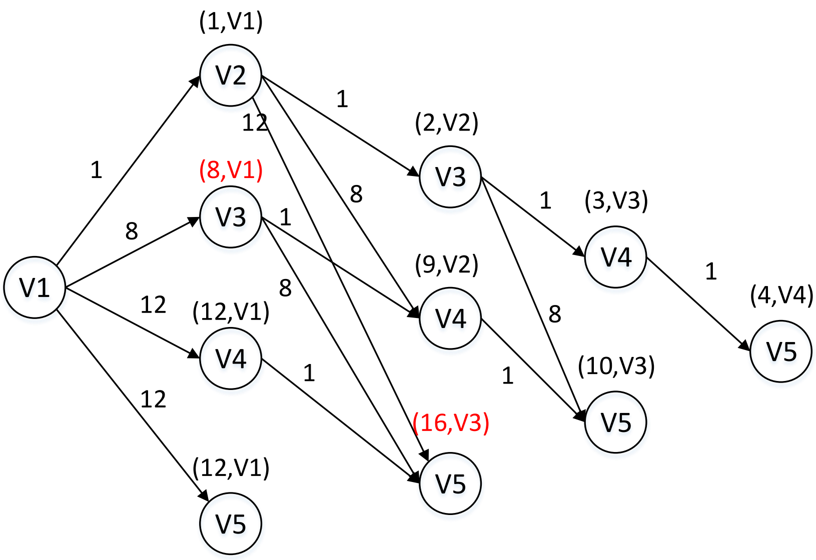
由图可知，最大收益为16，此时最优决策为第1年末不更新，第2年末更新，第3年末不更新。

方法三（另一种建模方式）：

如下图所示，节点$V_1,\ldots,V_5$分别表示第k年初时刻，边$V_i \rightarrow V_j$表示设备从第i年初使用到第j年初（第$j-1$年末），并在第j年初更新了设备。边上的数值表示该边带来的利润。

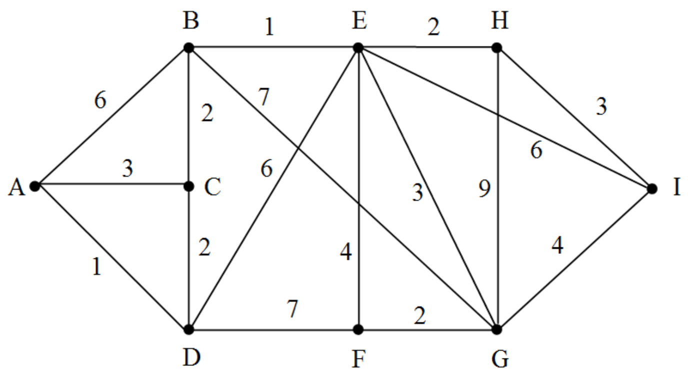


采用顺推法，每个节点上的序对表示从 V1 出发到该节点的最大代价以及最优上一节点，则：



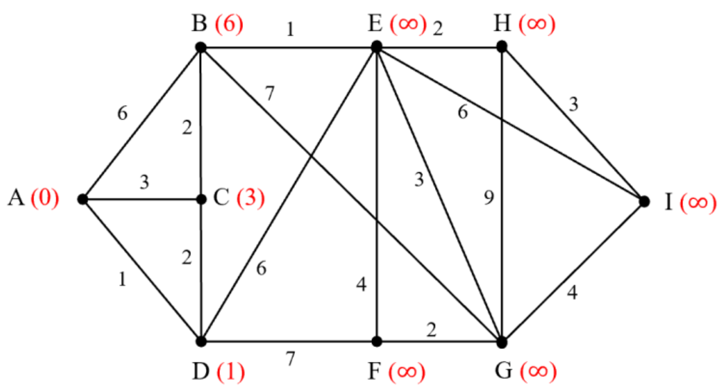
可知最优更新策略是第 3 年初（第 2 年末更新一次设备），然后一直用到第 5 年初。最大利润为 16 元。

2. 对于如下网络，分别使用值迭代法和策略迭代法求解从 A 到 I 的最短路径以及最短长度。

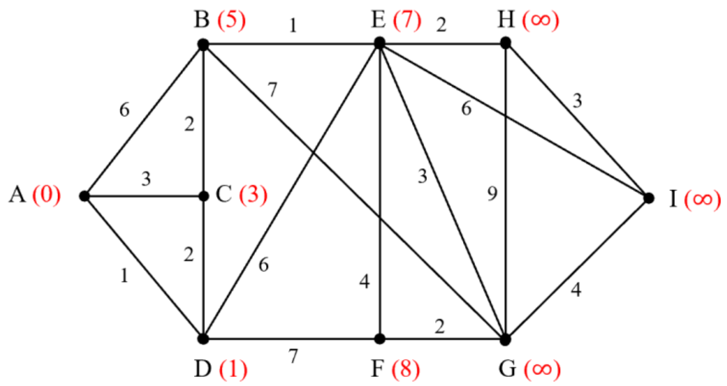


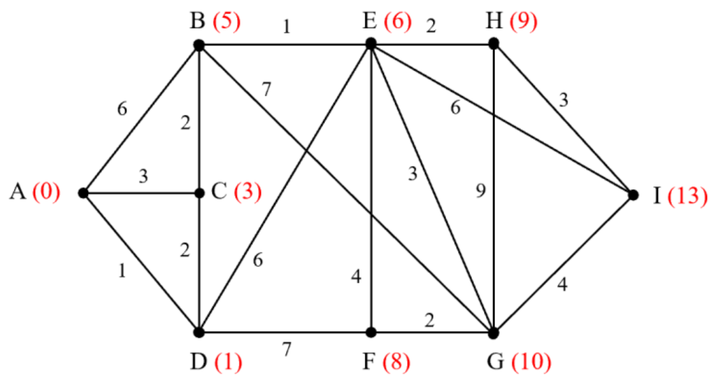
解：

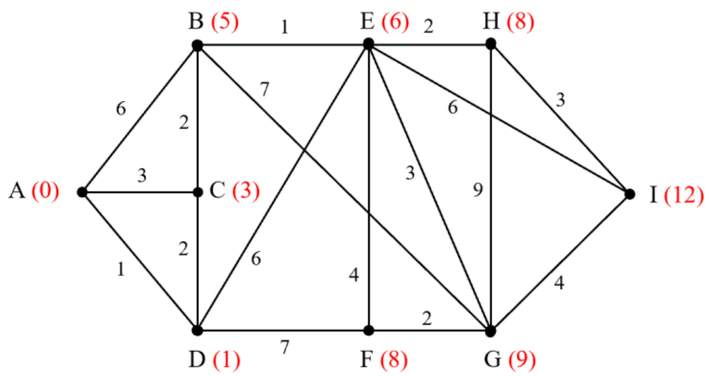
值迭代法：首先取 $f_1(v_i) = d(v_i, v_A), i \in V = \{A, B, \ldots, I\}$，初始无直接连接的节点设置路径长度为 ∞

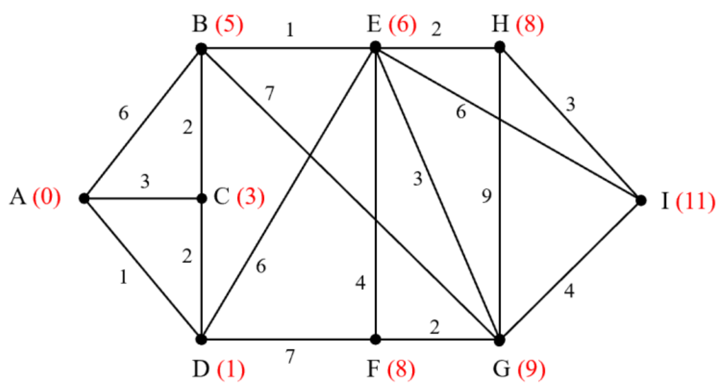


然后对 $k \geq 1$ 按公式 $f_{k+1}(v_i) = \min\limits_{i \in V}\{d(v_i, v_j), +f_k(v_j)\}$ 进行迭代









此时迭代已经收敛，得到最短路径为 11，最优路线根据各点的最优值可确定为 $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow I$ 或 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow I$

策略迭代法：首先选取一个无回路策略

$$p_1(A) = B, p_1(B) = E, p_1(C) = B, p_1(D) = F$$
$$p_1(E) = I, p_1(F) = G, p_1(G) = I, p_1(H) = I$$

由

$$f_1(A) = 6 + f_1(B), f_1(B) = 1 + f_1(E), f_1(C) = 2 + f_1(B)$$
$$f_1(D) = 7 + f_1(F), f_1(E) = 6 + f_1(I), f_1(F) = 2 + f_1(G)$$
$$f_1(G) = 4 + f_1(I), f_1(H) = 3 + f_1(I), f_1(I) = 0$$

可解得

$$\hat{f}_1(A) = 13, \hat{f}_1(B) = 7, \hat{f}_1(C) = 9, \hat{f}_1(D) = 13, \hat{f}_1(E) = 6,$$
$$\hat{f}_1(F) = 6, \hat{f}_1(G) = 4, \hat{f}_1(H) = 3, \hat{f}_1(I) = 0$$

根据公式 $c_{v,p(v)} + \hat{f}_1(p_1(v)) = \min_{j \in V, j \neq i}\{c_{ij} + \hat{f}_1(v_j)\}, \forall i \in V$ 得到改进策略为

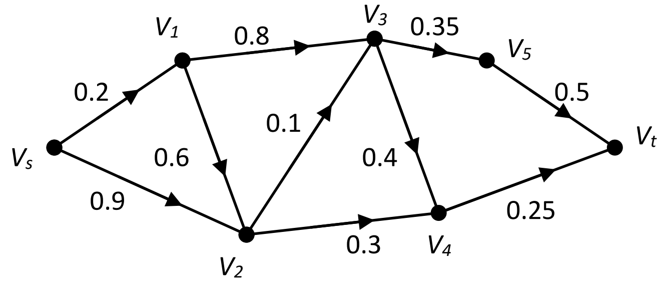
$$p_2(A) = C, p_2(B) = E, p_2(C) = B, p_2(D) = C$$
$$p_2(E) = H, p_2(F) = G, p_2(G) = I, p_2(H) = I$$

继续迭代得到

$$p_3(A) = C, p_3(B) = E, p_3(C) = B, p_3(D) = C$$
$$p_3(E) = H, p_3(F) = G, p_3(G) = I, p_3(H) = I$$

此时策略不再改变，迭代停止，得到一条从 A 到 I 的最优策略为 $A \to C \to B \to E \to H \to I$，最短长度为 11.

3. 开车从V_s到V_t的网络如下图所示，其中各边数字表示在相应路段堵车的概率。假定各路段是否堵车互相独立，求堵车概率最小的路线及其概率值。（提示：堵车概率最小等价于不堵车概率最大。）

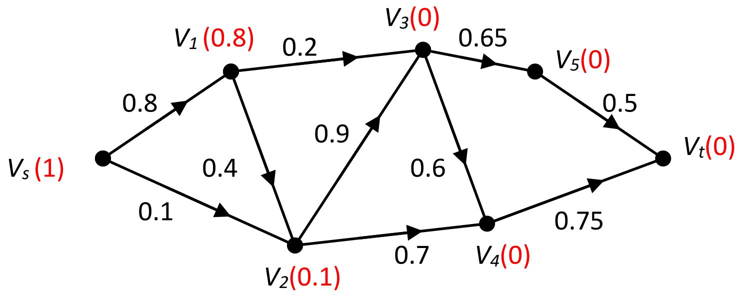


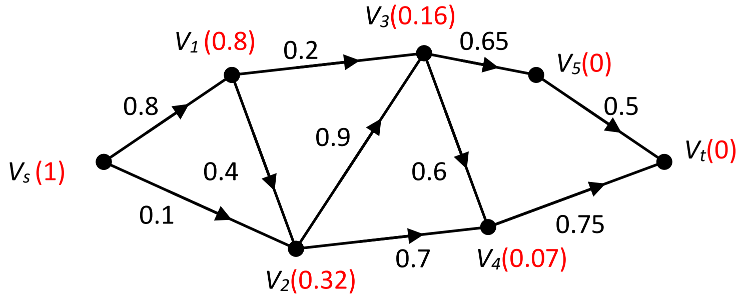
解：

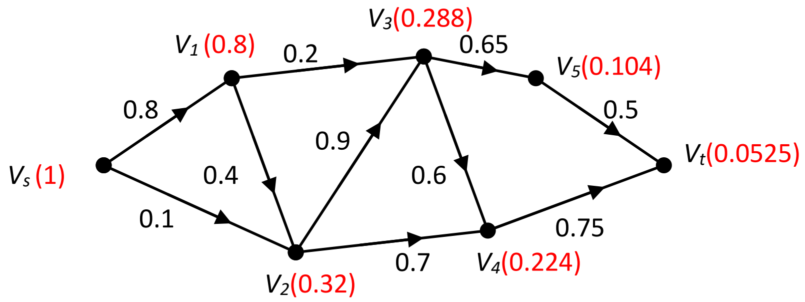
将原图各边权重转换为不堵车的概率。希望不堵车概率最大，即求概率乘积最大的路径，该问题仍然满足最优性原理。

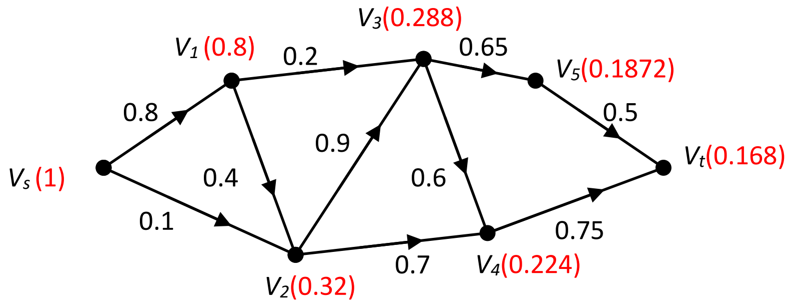
本题可以转换为多阶段决策问题，使用顺推法或逆推法求解。在此采用值迭代法求解，每次计算到V_s不堵车的最大概率。括号内表示当前节点到V_s最大的

不堵车概率，初始值为0.

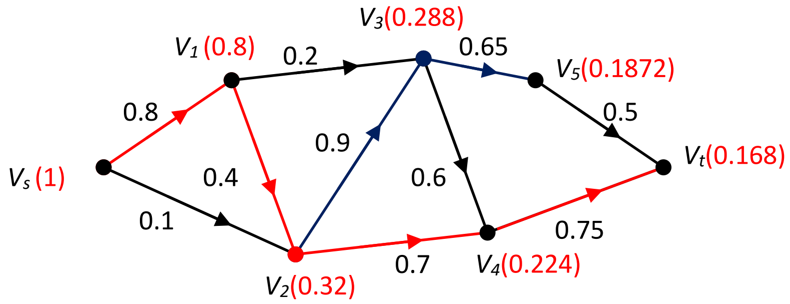








迭代终止，根据每个节点的最优值得到



堵车概率最小的路径为 $V_s \to V_1 \to V_2 \to V_4 \to V_t$，概率值为 1 - 0.168 = 0.832