运筹学期中考试题答案（A卷）

一、（20分）请判断以下说法是否正确，并简述理由：

1. 若某个标准线性规划问题的可行基矩阵不同，则它们对应的顶点也不同；
2. 线性规划问题若有可行解，则至少存在一个顶点；
3. 分枝定界法不能求解混合整数线性规划问题；
4. 如果某个线性规划的原问题和其对偶问题都有可行解，则该线性规划问题一定有有限的最优目标值。

答案：

1. 错；(2’) 退化情况同一个顶点可能对应多个基矩阵。 (3’)
2. 错；(2’) 如问题 min. x 可行域为整个实数轴，不存在顶点。 (3’)
3. 错；(2’) 对整数变量进行分枝即可。(3’)
4. 对；(2’) 根据对偶理论，对偶问题的任意可行解对应的目标函数值都是原问题最优目标值的一个上界（假设原问题为 max 问题），又原问题存在可行解，可得原问题最优目标值一定有界。(3’)

二、（20分）以下数表是求解某线性规划最小化问题的一个中间阶段

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_1	1	2/3	0	0	4/3	0	4
x_4	0	$-7/3$	3	1	$-2/3$	0	2
x_6	0	$-2/3$	-2	0	2/3	1	2
	0	8/3	-11	0	4/3	0	$z-8$

假设当前基矩阵为 $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$，相应的成本系数为 $C_B^T=[c_1 \quad c_4 \quad c_6]=[-1 \quad -3 \quad 1]$。

1. 用单纯形法求解原问题。
2. 请写出原问题。

答案：

1. 检验数定义可知：$\mathrm{z} = c_B^T B^{-1}\mathrm{b} + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N)x_N = z_0 + \sigma_N^T x_N$，而单纯形表最后一行表示的等式为 $\sigma_N^T x_N = z - z_0$，可知 $z_0 = 8 = -c_B^T B^{-1}\mathrm{b}$，故题目中单纯表对应的问题为：

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad -c_B^T x_B - c_N^T x_N \\ &\text{s.t.} \qquad Ax = b \\ &\qquad\qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

即将原最小化问题等价转换为了最大化问题, (2')

此时应将 x_2 进基，x_1 出基, (2')

对应单纯形表为：(2')

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_1	3/2	1	0	0	2	0	6
x_4	7/2	0	3	1	4	0	16
x_6	0	0	-2	0	2	1	6
	-4	0	-11	0	-4	0	$z-24$

故最优解为(0,6,0,16,0,6)，原问题最优值为−24。(4')

2.由单纯形表迭代过程可知，$\bar{b} = B^{-1}b$，故 $\mathrm{b} = \mathrm{B}\bar{b} = [10,6,4]^T$， (3')

$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 4/3 \\ -7/3 & 3 & -2/3 \\ -2/3 & -2 & 2/3 \end{bmatrix}$，故 $N = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (3')

而 $\sigma_N^T = -c_N^T + c_B^T B^{-1} N$， (2') 故有：

$c_N^T = \sigma_N^T + c_B^T B^{-1} N = [8/3, -11, 4/3]^T + [-17/3, 11, -4/3]^T = [-3,0,0]^T$。(2')

注：由于不同教材中对检验数的定义不同，以及单纯型表最后含义也不一致，故此题答案不唯一，两问中进出基选择与检验数定义一致即可。

三、（15 分）利用对偶单纯形法求解以下线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

答案：

原问题不等式约束取反并添加松弛变量得：（3’）

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -5 \\ & -2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_5 = -6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

用对偶单纯形法列表得：(9’)

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_4	-1	-2	-3	1	0	-5
x_5	$\boxed{-2}$	-2	-1	0	1	-6
	3	4	5	0	0	

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_4	0	$\boxed{-1}$	-5/2	1	-1/2	-2
x_1	1	1	1/2	0	-1/2	3
	0	1	7/2	0	3/2	

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_2	0	1	5/2	-1	1/2	2
x_1	1	0	-2	1	-1	1
	0	0	1	1	1	

故最优解为 $\boldsymbol{x}^* = [1,2,0]^{\mathrm{T}}$，最优值为 11。(3’)

四、（15 分）利用对偶理论给出下述线性规划最优目标值的一个上界：

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 5x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = 10 \\ & 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

答案：

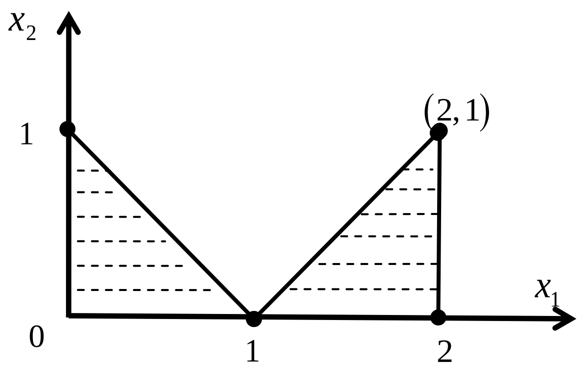
原问题求得对偶问题为：(10’)

$$\begin{aligned} \min \quad & 10y_1 + 10y_2 \\ \text{s.t.} \quad & 5y_1 + 2y_2 \geq 5 \\ & y_1 + 4y_2 \geq 3 \\ & y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ & 8y_1 + 2y_2 \geq 4 \end{aligned}$$

显然，$y = (1,1)$是一个可行解，此时 $10y_1 + 10y_2 = 20$. 由弱对偶性，20 是原问题的一个上界。(5’)

注：此题答案不唯一，利用弱对偶定理给出上界即可。

五、（15 分）某公司生产两种产品，用 x_1 和 x_2 分别代表两种产品的年产量。这两种产品可采用不同生产方式，对应决策变量的可行域如下图标出的区域。设生产两种产品的单位成本分别为 c_1、c_2，销售价格分别为 p_1、p_2，生产 A、B 产品分别有固定费用 d_1、d_2（只要生产就会发生的费用，不生产则不发生）。请列出极大化年利润的线性混合整数规划模型。



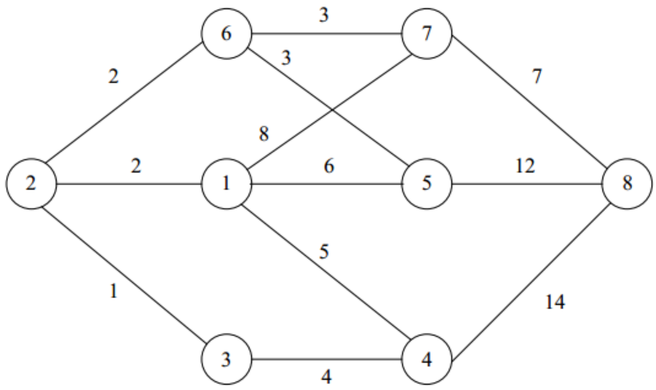
答案:

$$\begin{aligned} \max \quad & (p_1 - c_1)x_1 + (p_2 - c_2)x_2 - y_1 d_1 - y_2 d_2 \\ \text{s.t.} \quad & \left.\begin{aligned} & x_1 + x_2 \leq 1 + M_3 y_3 \\ & x_2 - x_1 \leq -1 + M_4 y_4 \\ & x_1 \leq 2,\ x_1, x_2 \geq 0 \\ & y_3 + y_4 = 1 \end{aligned}\right\} \text{约束区域二选一} \\ & \left.\begin{aligned} & x_1 \leq M_1 y_1 \\ & x_2 \leq M_2 y_2 \end{aligned}\right\} \text{0-1 变量}y_1, y_2\text{表示是否生产}x_1, x_2 \\ & y_i \in \{0,1\},\ i = 1,2,3,4 \end{aligned}$$

其中 $M_i, i = 1,2,3,4$ 是足够大的正数

注：此题答案不唯一，但要把两个约束区间二选一的关系，以及两种产品是否生产都用 0-1 变量的线性关系式表达出来。

六、（15 分）利用值迭代法求出下图中节点 1 与节点 8 之间的最短路径及相应的路径长度。



答案：

第一步：(3’)

v_i	$f_1(v_i)$	路径
1	∞	/
2	∞	/
3	∞	/
4	14	④->⑧
5	12	⑤->⑧
6	∞	/
7	7	⑦->⑧
8	0	⑧

第二步：(3’)

v_i	$f_2(v_i)$	路径
1	15	①->⑦
2	∞	/
3	18	③->④
4	14	④->⑧
5	12	⑤->⑧
6	10	⑥->⑦
7	7	⑦->⑧
8	0	⑧

第三步：(3’)

v_i	$f_3(v_i)$	路径
1	15	①->⑦
2	12	②->⑥
3	18	③->④
4	14	④->⑧
5	12	⑤->⑧
6	10	⑥->⑦
7	7	⑦->⑧
8	0	⑧

第四步：(3’)

v_i	$f_4(v_i)$	路径
1	14	①->②
2	12	②->⑥
3	13	③->②
4	14	④->⑧
5	12	⑤->⑧
6	10	⑥->⑦
7	7	⑦->⑧
8	0	⑧

第五步与第四步相同，迭代结束，节点 1 到节点 8 之间最短路径为①->②->⑥->⑦->⑧，相应路径长度为 14。(3’)