

运筹学期末考试题（2022年06月18日）

（B卷）

姓名：_____ 班级：_____ 学号：_____

1. （15 分）写出如下问题的拉格朗日对偶问题（要求最终表达式不得含 x_i ），其中 $c, d > 0$, $a_i, b_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} \min_{x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}} \quad & cx_1 + dx_1^2 \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^n (a_i x_i^2 - b_i x_i) \leq 0, \\ & \sum_{i=1}^n x_i = s \end{aligned}$$

2. （15 分）求出如下问题的 KT 解，并判断其是否是局部最优解。

$$\begin{aligned} \max_{x, y} \quad & \ln(x+1) + y \\ \text{s. t.} \quad & 2x + y \leq 3 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

3. （15 分）已知无约束非线性规划问题：

$$\min_{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3 + x_1 + x_2 + \frac{3}{2}$$

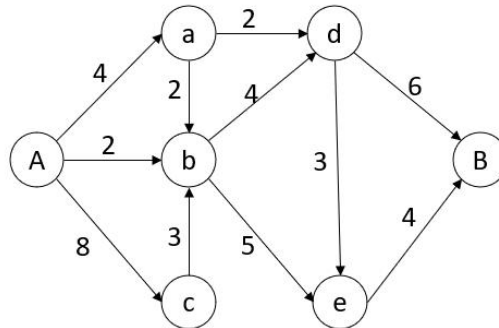
其中 $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3)^T$ 。如果采用共轭梯度法求解，从 $\mathbf{X}^{(1)} = (0, 0, 0)^T$ 出发，先会在 $\mathbf{X}^{(1)}$ 处得到方向 \mathbf{D}_1 ，沿着 \mathbf{D}_1 得到点 $\mathbf{X}^{(2)}$ ，继而得到方向 \mathbf{D}_2 和点 $\mathbf{X}^{(3)}$ ……请求出 \mathbf{D}_1 和 \mathbf{D}_2 ，并验证它们是关于某矩阵的一对共轭方向。

4. （20 分）某种物品有 3 家产地，记为 A_1, A_2, A_3 ；有 4 家销地，记为 B_1, B_2, B_3, B_4 。各产地的产量和各销地的销量，以及从各产地向各销地运输的单位物品运价如下表所示。

	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	4	12	4	11	16
A_2	2	10	3	9	10
A_3	8	5	11	6	22
销量	8	14	12	14	48

- （1）请给出一个调运方案，使总费用最小。
 （2）最优调运方案是否唯一？如果是，请说明理由；如果不是，请给出另一个与（1）不同的最优调运方案。

5. (15 分) 从 A 地到 B 地的各条道路如图所示, 现在需要在一些道路上建立收费站, 使得每个从 A 地到 B 地的车辆至少经过一个收费站。收费站的建立费用根据各道路的情况有所不同, 费用如图中各边(道路)的数字所示。请问收费站该建在哪些道路上, 使得总建站费用最小?



6. (20 分) 用求解最小费用流问题的算法, 求解如下线性规划问题:

$$\min_{x_1, \dots, x_8} 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 6x_7 + 7x_8$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 = 7$$

$$x_1 + x_4 = x_3$$

$$x_5 + x_8 = x_2$$

$$x_3 + x_8 = x_6$$

$$x_4 + x_7 = x_5$$

$$x_6 + x_7 = 7$$

$$x_1 \leq 3$$

$$x_8 \leq 4$$

$$x_3, x_5 \leq 5$$

$$x_7 \leq 6$$

$$x_6 \leq 7$$

$$x_2 \leq 8$$

$$x_4 \leq 9$$

$$x_1, \dots, x_8 \geq 0$$