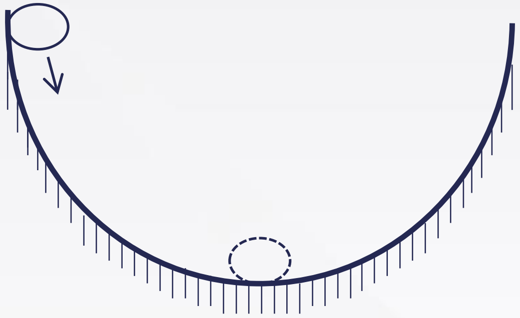
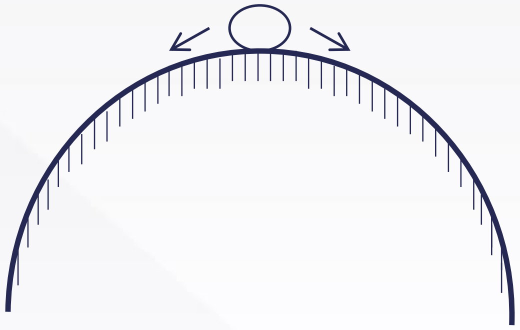
本章教学内容

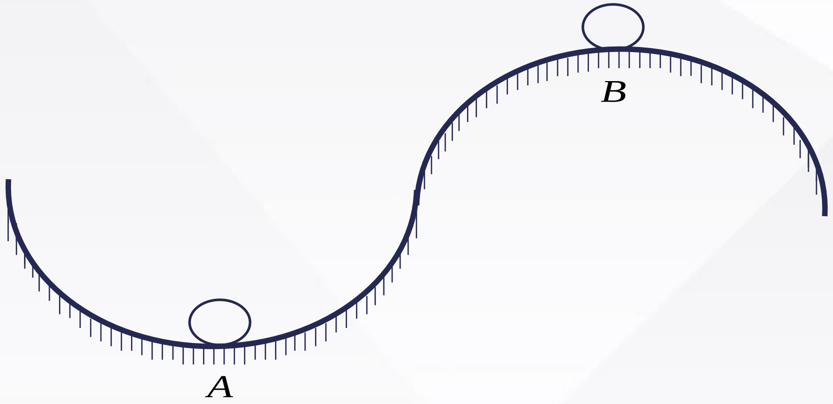
基本内容

- 稳定性定义
- 线性定常系统稳定性的代数判据——Routh判据
- 李雅普诺夫方法

稳定性

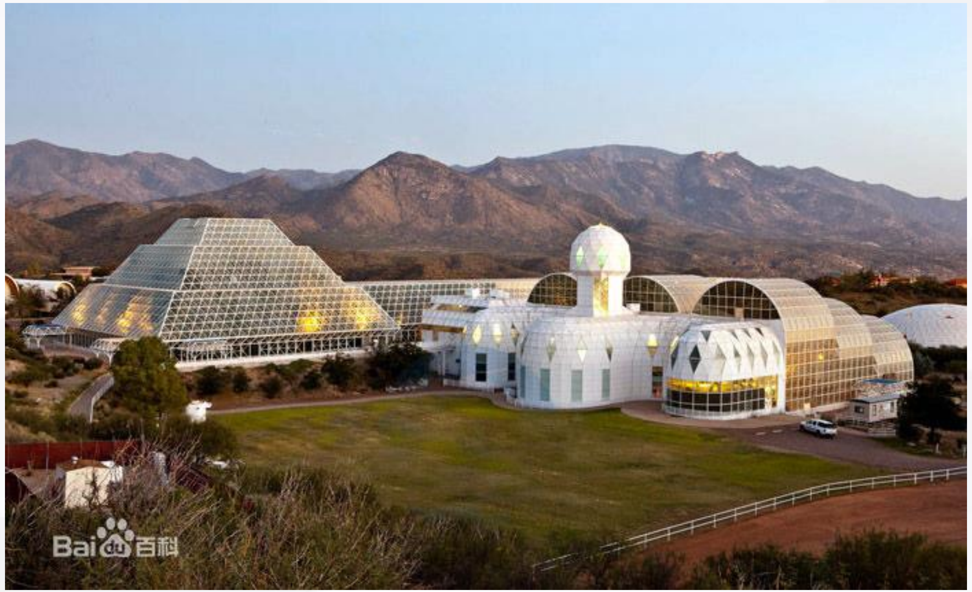


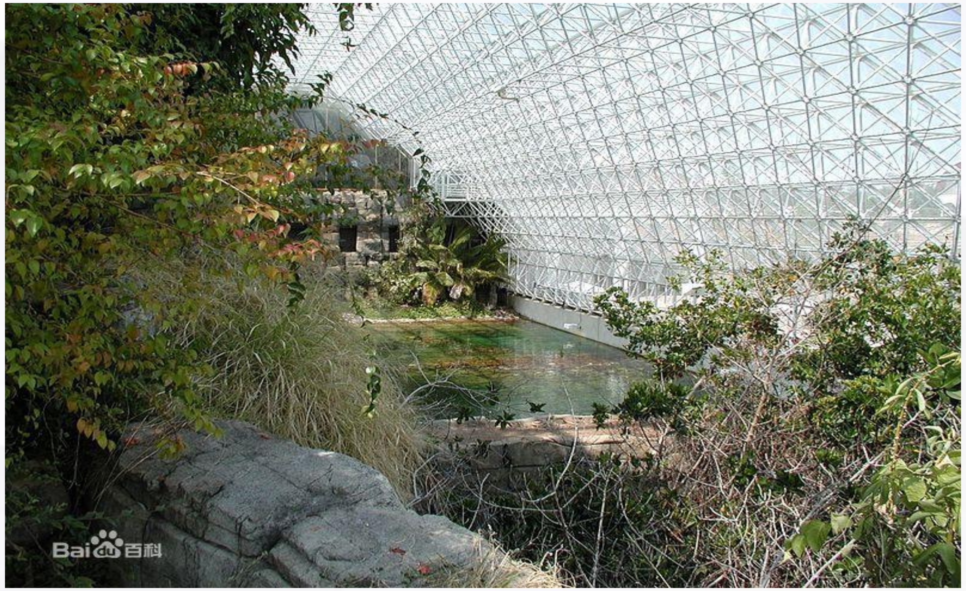




稳定与不稳定运动示意图

现实生活中的各种稳定性





稳定性

前面讲的随动系统是一个四阶微分方程，代入参数得

$$0.025\varphi^{(4)} + 0.55\varphi^{(3)} + 1.5\varphi'' + \varphi' + \varphi = \psi$$

特征方程 $0.025s^4 + 0.55s^3 + 1.5s^2 + s + 1 = 0$

特征根 $s_1 = -18.94, s_2 = -2.61, s_{3,4} = -0.228 \pm j0.871$

$\varphi(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + Ce^{-0.228t}\sin(0.871t + \theta) + \varphi^*(t)$（$\varphi^*(t)$**为特解**）

A、B、C、θ **由初始条件求出**

当$t \to \infty$，**前三项**$\to$ 0，$\varphi(t) \to \varphi^*(t)$

现将k（k**为开环比例系数）增大10倍，再解特征方程得**

$s_1 = -18.87$，$s_2 = -4.13$，$s_{3,4} = 0.501 \pm j2.21$

稳定性

于是得 $\varphi(t)=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}+Ce^{0.501t}\sin(2.21t+\theta)+\varphi^*(t)$

$\therefore$ 只要$C\neq 0$，当$t\to\infty,\varphi(t)\to\infty$，达不到$\varphi^*(t)$

可见$\varphi(t)$取决于特征根，组成$\varphi(t)$的分量诸如$e^{\lambda_i t}$，叫运动模态。

由这个例子我们可以得到下面的结论：

线性系统稳定的充分必要条件是特征方程的根必须具有负的实部，或说特征根都在s平面的左半平面

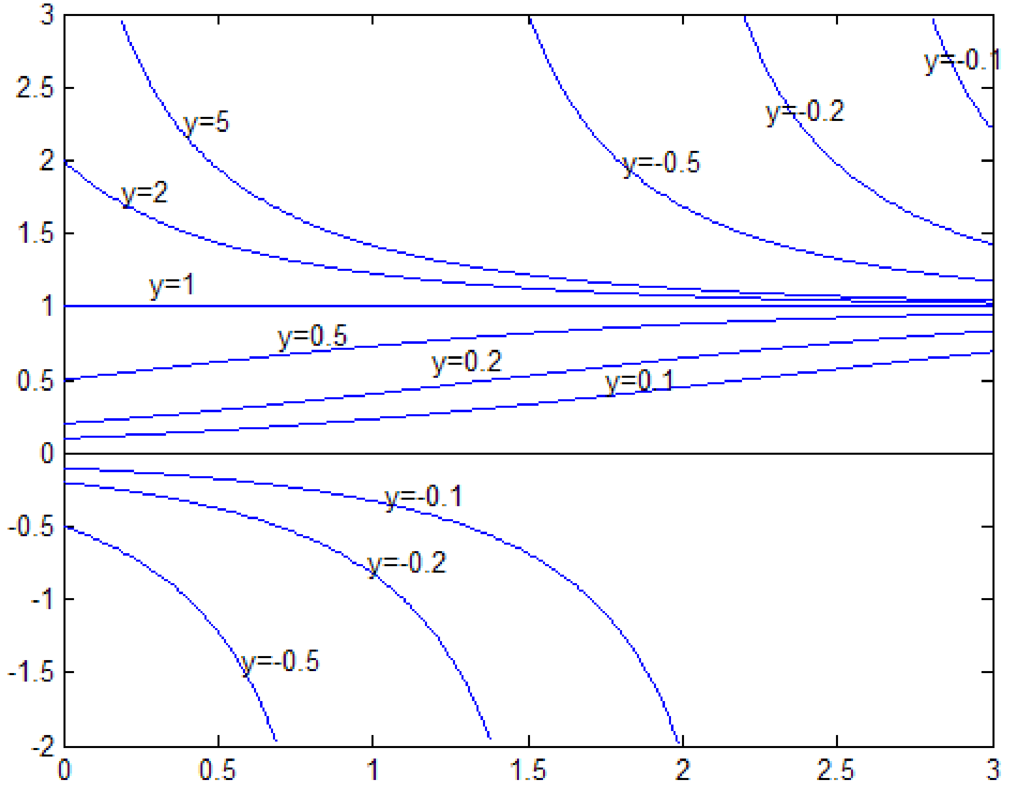
但是，对于非线性方程，在有些初始条件下，解能达到一种确定的状态，称为稳定的运动，而在另一些初始条件下的解表现为不稳定的运动。所以，对一个非线性系统，不能笼统地称系统稳定与否，而只能说哪些解是稳定的，哪些是不稳定的。

见教科书p184图3.2.1例

稳定性

$\frac{dy}{dt} + y(y-1) = 0$，$y(0) = y_0$ **解析解为：** $y(t) = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{y_0})e^{-t}}$

解曲线是：



$y_0 = 1$，$y(t) = 1$

$y_0 = 2$，$y(t) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-t}}$

$y_0 = -0.5$，$y(t) = \dfrac{1}{1 - 3e^{-t}}$

$t = 1.1$

稳定的Liapunov定义

数学知识：一个高阶微分方程可以化成一个一阶微分方程组

$$a_3 x^{(3)} + a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = u$$

设： $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ x_3 = x'' \end{cases}$ **有：** $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{a_3}(-a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3) + \dfrac{1}{a_3} u \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{a_0}{a_3} & -\dfrac{a_1}{a_3} & -\dfrac{a_2}{a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{a_3} \end{bmatrix} u$$

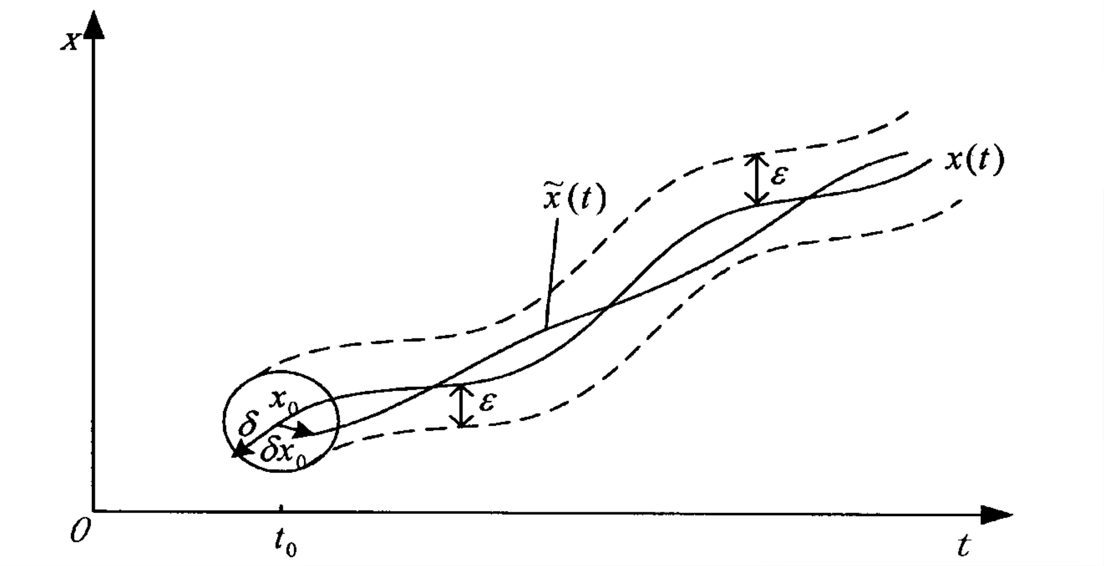
系统的变换可以用状态向量在高维空间中的运动轨迹描述

稳定的Liapunov定义

1. Liapunov稳定性定义

$$\dot{X} = f(X, t, u)$$

如果一个关于X的微分方程组，在初始条件$X(t_0) = X_0$下有解$X(t)$，且对于任意给定的正数$\varepsilon > 0$，总存在一个正数$\delta(\varepsilon)$，当初始条件X_0变为$\tilde{X}_0$时，只要$\|\tilde{X}_0 - X_0\| \leq \delta$，其相应解$\tilde{X}(t)$在$t > t_0$的任何时刻都满足$\|\tilde{X}(t) - X(t)\| < \varepsilon$，则称解$X(t)$是稳定的。如果不存在这样的正数$\delta$，则称解$X(t)$是不稳定的。



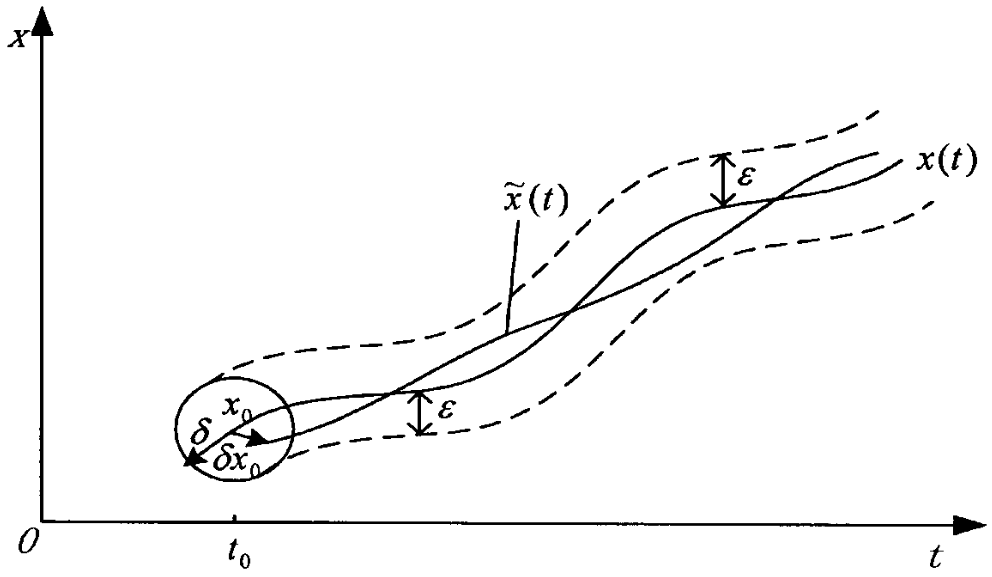
稳定的Liapunov定义

- **大范围稳定**

  δ任意大，即任意初始状态点都趋近稳定

- **渐进稳定**

  稳定，存在δ，$\tilde{x}(t)$无限趋于$x(t)$



工程上总是希望系统是大范围渐近稳定的。

稳定的Liapunov定义

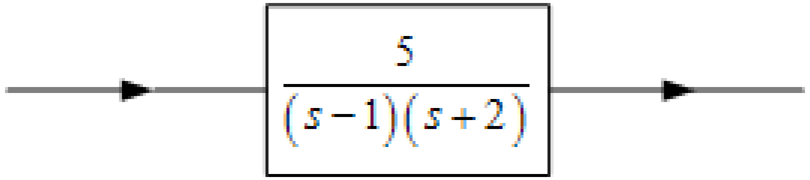
Liapunov第一方法（见教科书P190）

- 若线性化后系统特征方程的所有根均为负实数或实部为负的复数，则原系统的运动不但是稳定的而且是渐近稳定的。线性化过程中被忽略的高于一阶的项也不会使运动变成不稳定。
- 若线性化后系统特征方程的诸根中，只要有一个为正实数或实部为正的复数，则原系统的运动就是不稳定的。被忽略的高于一阶的项也不会使运动变成稳定。
- 若线性化后系统特征方程的诸根中，有一些是实部为零的，而其余均具有负实部，则实际系统运动的稳定与否与被忽略的高阶项有关。这种情况下不可能按照线性化后的方程来判断原系统的运动稳定性。若要分析原系统的运动稳定性必须分析原系统的非线性数学模型

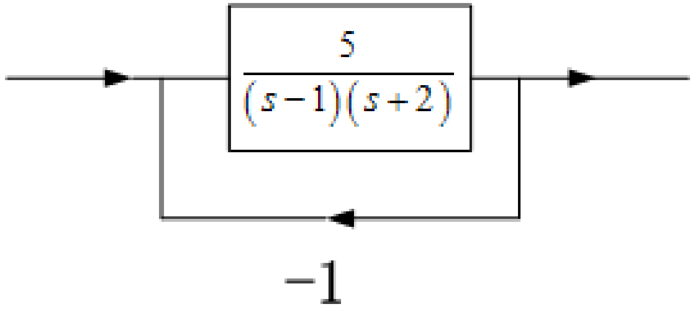
严格的说Liapunov第一方法只适用于无穷小范围内

稳定的Liapunov定义

开环不稳定系统闭环可能稳定



极点为1和-2，存在正根，不稳定。加反馈后：



$G(s)=\frac{5}{s^2+s+3}$，**极点为** $\frac{-1\pm i\sqrt{11}}{2}$，

实部小于0，稳定。

线性定常系统稳定性的代数判据

稳定性的代数判据

根据微分方程特征方程的系数，不解方程来判断是否有右半平面的根

Routh和Hurwitz分别独立提出了稳定性判据，其功能是判断一个代数多项式有几个根位于复数平面的右半面

例1 特征方程

$$2s^6+5s^5+3s^4+4s^3+6s^2+14s+7=0$$

构造*Routh*表如下：

Routh判据

例1 特征方程 $2s^6+5s^5+3s^4+4s^3+6s^2+14s+7=0$

s^6	s^6: 2	s^4: 3	s^2: 6	s^0: 7
s^5	s^5: 5	s^3: 4	s^1: 14	
s^4	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & 3\\5 & 4\end{vmatrix}=\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & 6\\5 & 14\end{vmatrix}=\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & 7\\5 & 0\end{vmatrix}=7$	
s^3	$\frac{18}{7}$	-11		
s^2	$\frac{115}{18}$	7		
s^1	$-\frac{1589}{115}$			
s^0	7			

$$\frac{18}{7}=-\frac{5}{7}\begin{vmatrix}5 & 4\\ \frac{7}{5} & \frac{2}{5}\end{vmatrix}$$

Routh判据

例1 特征方程 $2s^6+5s^5+3s^4+4s^3+6s^2+14s+7=0$

s^6	s^6: 2	s^4: 3	s^2: 6	s^0: 7
s^5	s^5: 5	s^3: 4	s^1: 14	
s^4	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & 3\\5 & 4\end{vmatrix}=\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & 6\\5 & 14\end{vmatrix}=\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}2 & 7\\5 & 0\end{vmatrix}=7$	
s^3	$\frac{18}{7}$	-11		
s^2	$\frac{115}{18}$	7		
s^1	$-\frac{1589}{115}$			
s^0	7			

一次变号

二次变号

- 第一列系数全为正是系统稳定的充分必要条件。
- 出现负号说明有右半平面的根，变号的次数对应于右半平面根的个数。

Routh判据

例2 特征方程 $s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 20s + 24 = 0$

- **第一列系数出现0，用小正数 ϵ 代替。**
- **ϵ=0时需判断符号**
- **若ϵ 处上下元素符号相同，表示有一对纯虚根；不相同则表示一次变号**

s^4	1	10	24
s^3	5	20	
s^2	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}1 & 10\\5 & 20\end{vmatrix}=6$	$-\frac{1}{5}\begin{vmatrix}1 & 24\\5 & 0\end{vmatrix}=24$	
s^1	$-\frac{1}{6}\begin{vmatrix}5 & 20\\6 & 24\end{vmatrix}=0(\epsilon)$		
s^0	$-\frac{1}{\epsilon}\begin{vmatrix}6 & 24\\\epsilon & 0\end{vmatrix}=24$		

此例解得根为

$\pm 2j, -2, -3$

Routh判据

例3 特征方程 $s^3 - 3s + 2 = 0$

s^3	1	-3
s^2	$0(\epsilon)$	2
s^1	$-\frac{1}{\epsilon}\begin{vmatrix}1 & -3\\ \epsilon & 2\end{vmatrix} = -3 - \frac{2}{\epsilon}$	
s^0	2	

一次变号

二次变号

此例解得根为

$1, 1, -2$

两次变号，说明有两个根在右半平面。

Routh判据

例4　特征方程　$s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	$0(8)$	$0(96)$	
s^2	24	-50	
s^1	112.7		
s^0	-50		

出现全零行时构造辅助多项式 $2s^4 + 48s^2 - 50$，**以求导所得** $8s^3 + 96s$ **代替全零行**

Routh判据

例4　特征方程　$s^5+2s^4+24s^3+48s^2-25s-50=0$

s^5	1	24	−25
s^4	2		−50
s^3	0(8)	0(96)	
s^2	24		
s^1	112.7		
s^0	−50		

0上下同号说明有一对纯虚根

出现全0行说明有一对大小相等原点对称的根(由辅助多项式$2s^4+48s^2-50$解出)

一次变号说明有一个正实根

关于稳定的必要条件

设想特征方程的根全部为负实数或实部为负的共轭复数，则特征方程一定可以分解成下面一些因式的乘积

$$(s+\alpha), \quad (s+\beta+j\gamma)(s+\beta-j\gamma) \qquad \alpha,\beta,\gamma>0$$

$$(s+\alpha), \quad (s^2+2\beta s+\beta^2+\gamma^2)$$

可见特征方程全部系数必为正（幂次不缺项）

结论：特征**方程系数全为正是系统稳定的必要条件（但不充分）**

一、二、三阶系统稳定的充要条件

用Routh判据来分析一、二、三阶系统，得到稳定的充要条件

$a_1 s + a_0 = 0,$ $\qquad a_1 > 0, a_0 > 0$

$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0,$ $\qquad a_2, a_1, a_0 > 0$

$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0,$ $\qquad a_3, a_2, a_1, a_0 > 0$，且$a_2 a_1 > a_3 a_0$

参数稳定性和参数稳定域

系统传递函数一般可表示为如下形式

$$G\ (s)=\frac{k(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^{\gamma}(T_1 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$

系统的参数集中体现在k(开环比例系数)和诸T，它们是影响系统稳定的主要因素

- **一般情况下，k过大不利于稳定（有些特殊情况，条件稳定）**
- **增大时间常数，不利于稳定**
- **增多时间常数，不利于稳定**

参数稳定性和参数稳定域

参数稳定域（单参数稳定域）

设一个单位负反馈系统的开环传递函数

$$G_{开}(s)=\frac{k(\frac{1}{3}s+1)}{s(s+1)(2s+1)}$$

试找出k的稳定范围。（指闭环系统）

首先列出特征方程： $1+G_{开}(s)=0$

即 $s(s+1)(2s+1)+k\left(\frac{1}{3}s+1\right)=0,\qquad 2s^3+3s^2+\left(1+\frac{1}{3}k\right)s+k=0$

根据Routh判据 $\begin{cases} k>0 \\ 3\left(1+\frac{1}{3}k\right)>2k \end{cases}$ $\quad\therefore 0<k<3$**是**k**的稳定范围**

参数稳定性和参数稳定域

双参数稳定域

$$G_{开}(s)=\frac{k(\tau s+1)}{s(s+1)(2s+1)} \qquad k,\tau>0$$

特征方程： $2s^3+3s^2+(1+k\tau)s+k=0$

$$3(1+k\tau)>2k$$

$$\tau>\frac{2}{3}-\frac{1}{k}$$

试画出$\tau-k$的关系曲线

李雅普诺夫稳定性分析

李雅普诺夫稳定性分析

1 基本概念

2 李雅普诺夫方法

3 构造李雅普诺夫函数的方法

基本概念

1.1 标量函数的定号性

1.2 李雅普诺夫稳定性

基本概念

1.1 标量函数的定号性

[定义 1-1] 称标量函数$V(x)$正定（半正定）：若$V(\mathbf{0})=0$，且对任意非零x，$V(x)>0$ ($V(x)\geq 0$)。

[定义 1-2] 称标量函数$V(x)$负定 (半负定): 若$-V(x)$是正定 (半正定）的。

[定义 1-3] 正定和半正定（负定和半负定）统称为非负定（非正定)。无任何定号性称为不定。

基本概念

1.1 标量函数的定号性

- 注意，$V(\mathbf{0})=0$ 是定号性的必要条件。在不引起混淆时，可直接用 $V(x)>0$ 表示正定，其余类推。

- 定号性可以是原点邻域上的局部性质，如：标量函数 $V(x)=[(x_1^2+x_2^2)-1](x_1^2+x_2^2)$ 在域 $\{\Omega \mid x_1^2+x_2^2<1\}$ 上是负定的。

基本概念

1.1 标量函数的定号性

例如，在二维空间中：

$x_1^2 + x_2^2$ 正定

$(x_1 + x_2)^2$ 半正定

$-(x_1^4 + x_2^2)$ 负定

$-x_1^2$ 半负定

$x_1^2 - x_2^2$ 不定

基本概念

1.1 标量函数的定号性

考虑二次型函数 $x^T A x$ 的定号性，A 是实对称矩阵

[定理 1-1] 实对称矩阵 A 是正定（半正定）的，当且仅当所有特征值均大于（大于等于）零。

[定理 1-2] 实对称矩阵 A 是正定（半正定）的，当且仅当所有主子式均大于（大于等于）零。

基本概念

1.1 标量函数的定号性

实对称矩阵 A 的各阶顺序主子式：

$$\pi_1 = a_{11}, \quad \pi_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\pi_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \cdots\cdots, \quad \pi_n = |A|$$

基本概念

1.1 标量函数的定号性

[定理 1-3（赛尔维斯特判据）] 实对称矩阵 A 为

（1） 正定当且仅当 $\pi_k > 0, k = 1, 2, \cdots, n$

（2） 负定当且仅当 $(-1)^k \pi_k > 0, k = 1, \cdots, n$

（3）半正定的充要条件是所有主子式都大于等于 0

基本概念

1.1 标量函数的定号性

- 在判断矩阵 A 的正定性时，可以将**主子式**简化为**顺序主子式**
- 在判断矩阵 A 的半正定性时，**不可以**将**主子式**简化为**顺序主子式**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

基本概念

1.1 标量函数的定号性

1.2 李雅普诺夫稳定性

基本概念

1.2 李雅普诺夫稳定性

向量的 2 范数：实数向量 $z \in R^n$，其 2 范数定义为

$$\|z\| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2}$$

基本概念

1.2 李雅普诺夫稳定性

[定义 1-4] 对于系统 $\dot{x} = f(x, t)$，满足 $f(x_e, t) = 0$ 的状态 x_e 称作系统的平衡状态或平衡点。

[定义 1-5] 若某一平衡点附近足够小的邻域内没有别的平衡点，则称它为孤立平衡点。

基本概念

1.2 李雅普诺夫稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\sin\left(x_1(t)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

基本概念

1.2 李雅普诺夫稳定性

[定义 1-6] 假设 x_e 是系统 $\dot{x}=f(x)$ 的孤立平衡状态。如果对于任意给定正实数 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得从满足不等式

$$\left\|\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_e\right\|\le\delta(\varepsilon)$$

的任意初始状态出发的系统运动 $x(t)$ 均成立

$$\left\|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}_e\right\|\le\varepsilon,t\ge t_0$$

则称平衡状态 x_e 是（在李雅普诺夫意义下）**稳定的**。

称平衡状态 x_e **不稳定**：若 x_e 不满足上述稳定的条件。

基本概念

1.2 李雅普诺夫稳定性

[定义 1-7] 称平衡状态 x_e **渐近稳定**：若 x_e 稳定，且存在一个邻域 （**吸引域**），其内出发的运动恒有 $\lim_{t\to\infty}\|x - x_e\| = 0$。

[定义 1-8] 称平衡状态 x_e **全局渐近稳定**：若 x_e 渐近稳定，且吸引域充满整个状态空间。

- 平衡状态唯一是全局渐近稳定的必要条件。

基本概念

1.2 李雅普诺夫稳定性

李雅普诺夫稳定性的示意性说明

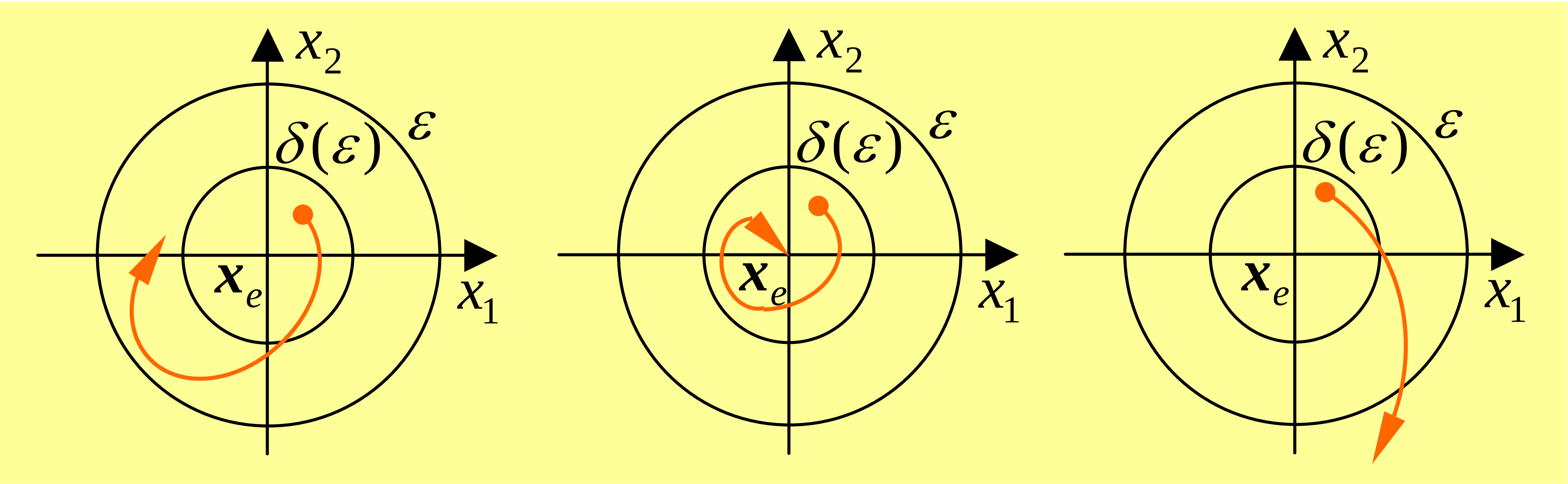


图 1-1 稳定　　图 1-2 渐近稳定　　图 1-3 不稳定

基本概念

本节小结

- 标量函数的定号性：

  正定(半正定)、负定(半负定)

- 二次型函数 $x^T A x$ 的定号性：

  A 的特征值、主子式、顺序主子式

- 平衡状态、孤立平衡状态

- 平衡状态的稳定性、渐近稳定性、全局渐近稳定性、吸引域

李雅普诺夫稳定性

1 基本概念

2 李雅普诺夫方法

3 构造李雅普诺夫函数的方法

李雅普诺夫方法

2.1 第一方法（间接法）

设 x_e 是系统

$$\dot{x} = f(x) \qquad \textbf{(2-1)}$$

的平衡状态。该系统在 x_e 处的线性化模型为：

$$\dot{y} = Ay，\quad A = \left.\frac{\partial f}{\partial x^T}\right|_{x = x_e} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{x=x_e}$$

其中 $y = x - x_e$。

李雅普诺夫方法

2.1 第一方法（间接法）

设 x_e **是系统**

$$\dot{x} = f(x) \qquad \text{(2-1)}$$

的平衡状态。该系统在 x_e **处的线性化模型为：**

$$\dot{y} = Ay，\quad A = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^T}\right|_{x = x_e} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}\right|_{x=x_e}$$

其中 $y = x - x_e$。

李雅普诺夫方法

2.1 第一方法（间接法）

根据 A 的特征值，有如下稳定性判别定理：

[定理 2-1] 若 A 的特征值均具有负实部，x_e 是渐近稳定的；若存在特征值具有正实部，x_e 是不稳定的；其它情况，则不能判定。

- 线性化方法不能给出全局稳定性的判断。如果系统有多个平衡点，则可直接判断原点不是其全局渐近稳定平衡点。

李雅普诺夫方法

2.1 第一方法（间接法）

[例 2-1] 判断下列系统在原点处的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \cos x_1 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2 \end{cases}$$

解：原点是系统的平衡点（唯一？）。在原点处线性化可得：

$$A = \begin{bmatrix} -x_2 \sin x_1 & \cos x_1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix}\Bigg|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

特征根均在左半开平面内，因此原点是该系统的渐近稳定平衡点。

李雅普诺夫方法

2.1 第一方法（间接法）

[例 2-2] 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_1 x_2 \end{cases}$$

解：原点是系统的平衡点。在原点处线性化可得：

$$A = \left.\begin{bmatrix} -3x_1^2 & -4 \\ 3 - x_2 & -x_1 \end{bmatrix}\right|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

特征根均在虚轴上，间接法失效。

李雅普诺夫方法

2.2 第二方法（直接法）

思想来源：

系统变化可以看成一种运动过程；

运动过程伴随着某种能量的变化；

稳定性意味着能量的单调消耗性；

能量消耗反过来可以描述稳定性。

关键是：是否能找到这个能量函数！

李雅普诺夫方法

2.2 第二方法（直接法）

设原点是系统

$$\dot{x} = f(x) \qquad (2\text{-}1)$$

的平衡状态。$V(x)$是正定的标量函数（能量函数），它沿系统状态轨线对时间t的导数为

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial \mathbf{x}^T} f(x) \qquad (2\text{-}2)$$

李雅普诺夫第二方法是根据$V(x)$和$\dot{V}(x)$的定号性，判别系统平衡状态的稳定性。

李雅普诺夫方法

2.2 第二方法（直接法）

[定理 2-2] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$负定，则原点是渐近稳定的；进而，若$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

[定理 2-3] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$半负定，则原点是稳定的；此外，若$\dot{V}(x)$除原点外沿状态轨线不恒为零，则原点是渐近稳定的；再进一步，若$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，则原点是全局渐近稳定的。

[定理 2-4] $V(x)$正定，$\dot{V}(x)$也正定，则原点是不稳定的。

李雅普诺夫方法

[例 2-3] 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 7x_2 \end{cases}$$

解：原点是唯一平衡点。 考虑

$$V(\boldsymbol{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 > 0$$

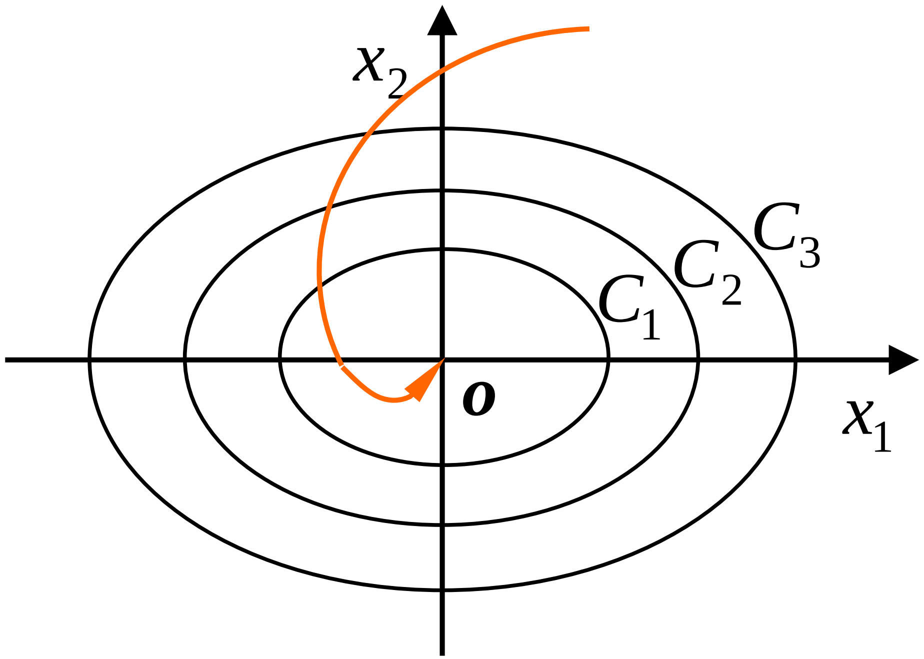
得

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -6x_1^4 - 56x_2^2 < 0$$

当$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，故原点全局渐近稳定。

李雅普诺夫方法

下图是该例中$V(x)=C$（$C_3>C_2>C_1>0$）的图形，它是一族包围原点的、闭的、随$C\to 0$向原点退缩的椭圆。



李雅普诺夫方法

- 以上均为充分条件。某$V(x)$不满足定理条件时，不能下结论。
- 若$V(x)$代表广义能量，则$\dot{V}(x)$代表广义功率。$\dot{V}(x)<0$，说明沿状态轨线运动是消耗能量的。
- 条件可以在平衡点的邻域内满足，存在收敛域或者吸收域。

李雅普诺夫方法

[例 2-4] 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -\dfrac{2x_1 + 2x_2}{(1+x_1^2)^2} \end{cases}$$

解：原点是唯一平衡点。由第一方法判定它是渐近稳定的。

李雅普诺夫方法

考虑 $$V(\boldsymbol{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 \ > \ 0$$

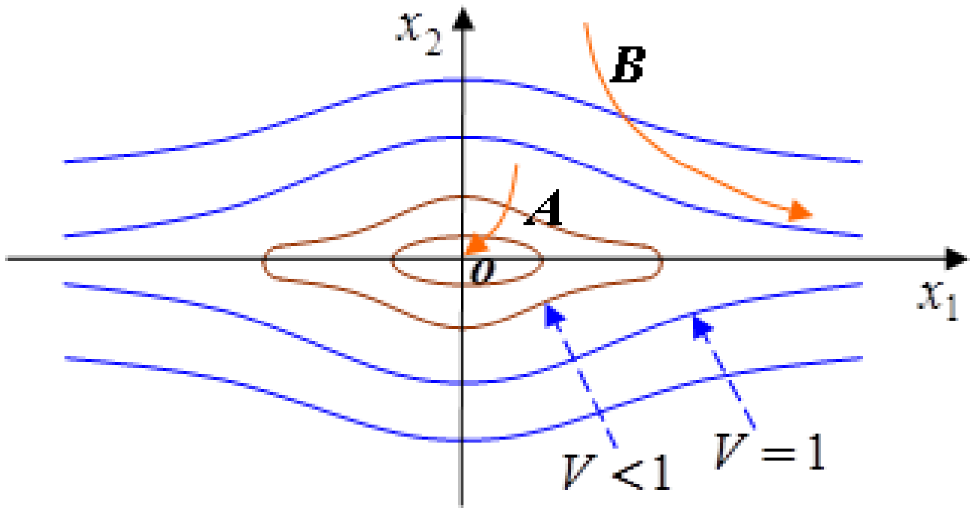
则 $$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\frac{4x_1^2}{(1+x_1^2)^4} - \frac{4x_2^2}{(1+x_1^2)^2} \ < \ 0$$

所以原点是渐近稳定的。但当 $x_1 \to \infty$, $x_2 \to 0$ 时，$V(x) \to 1$，

即 $\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$ 时，$V(x) \to \infty$ 不成立，不能保证全局渐近稳定。

李雅普诺夫方法

下图是该例中$V(x)=C$的图形。当$C<1$时，它是一族包围原点的、闭的、随$C\to 0$向原点退缩的曲线。但当$C\geq 1$时，曲线不再是闭的。从 ***A***（$C<1$）出发的轨线趋向原点；而从 ***B*** 出发（$C>1$）的轨线沿着x_1轴趋向无穷远，尽管始终有$V>0$，$\dot{V}<0$。



李雅普诺夫方法

[例 2-5] 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

试选第 1 个函数

取 $V(\boldsymbol{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 > 0$

得 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = 2x_1x_2 - 2x_2^2$ **不定，不能判定。**

李雅普诺夫方法

$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$

试选第 2 个函数

取 $V(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + x_2^2 > 0$

得 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -2x_2^2$ **半负定，故原点稳定。**

若 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$**，则** $x_2 = \dot{x}_2 \equiv 0$**，代入原方程得** $x_1 \equiv 0$**，因而** $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$**仅发生在原点处。而当**$\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$**时，**$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$**，所以原点全局渐近稳定。**

李雅普诺夫方法

试选 3 个函数

取 $V(\boldsymbol{x}) = 1.5x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = \boldsymbol{x}^T \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} > 0$

得 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -x_1^2 - x_2^2 < 0$

且当$\|\boldsymbol{x}\| \to \infty$**时，**$V(\boldsymbol{x}) \to \infty$**，所以原点全局渐近稳定。**

李雅普诺夫方法

- 此例说明，选择不同的V 函数，可能得到不同的结果，但得到的结论是不矛盾的。找到“好”的V 函数，需要经验和运气。

李雅普诺夫方法

[例 2-6] 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^4 \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1^4 \end{cases}$$

解：原点是平衡点但不唯一。线性化方法失效。

取 $$V(\boldsymbol{x}) = 0.5(x_1^2 + x_2^2) > 0$$

则 $$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -x_1^4(1 - x_2) - x_2^4(1 - x_1)$$

在 $x_2 < 1$ **且** $x_1 < 1$ **的区域内（原点是该区域的内点），** $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$ **。**

该系统在原点处是渐近稳定的。

李雅普诺夫方法

- 该例中，当$\|x\| \to \infty$时，$V(x) \to \infty$，但不能得出全局渐近稳定的结论，因为$\dot{V}(x) < 0$仅在局部区域成立。

李雅普诺夫方法

[例 2-7] 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{2}x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2)x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

解：原点是平衡点但不唯一。

李雅普诺夫方法

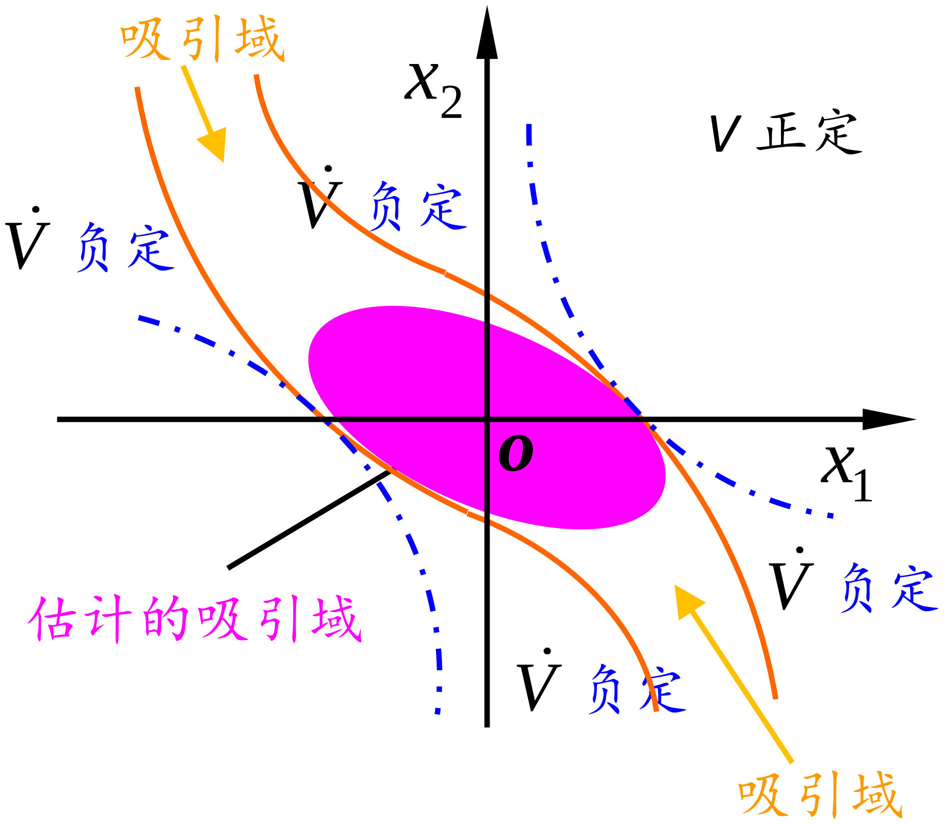
选 $$V(\boldsymbol{x})=(x_1+x_2)^2+2x_2^2>0$$

则 $$\dot{V}(\boldsymbol{x})=2(x_1+x_2)(\dot{x}_1+\dot{x}_2)+4x_2\dot{x}_2$$
$$=(x_1^2+x_2^2)\left[2x_1(x_1+3x_2)-1\right]$$

显然，$\dot{V}(\boldsymbol{x})$在$2x_1(x_1+3x_2)<1$的区域内 (原点为该区域的内点) 负定，所以原点是渐近稳定的。

李雅普诺夫方法

该例中，$V(x)$在全空间是正定的，$\dot{V}(x)$在上图中蓝色点划线（双曲线）区域内是负定的，但该区域并不都是原点的吸引域。通常，确定吸引域是困难的。



李雅普诺夫方法

我们可以在 $\dot{V}(x)=0$ 的边界上求 V 的最小值 $V_{\min}$，则 $\left\{x \mid V(x)<V_{\min}\right\}$ 就是一个保守的吸引域（比实际的小）。

由 $\dot{V}(x)=0$，即 $2x_1(x_1+3x_2)=1$，得 $x_2=\frac{1}{3}(\frac{1}{2x_1}-x_1)$

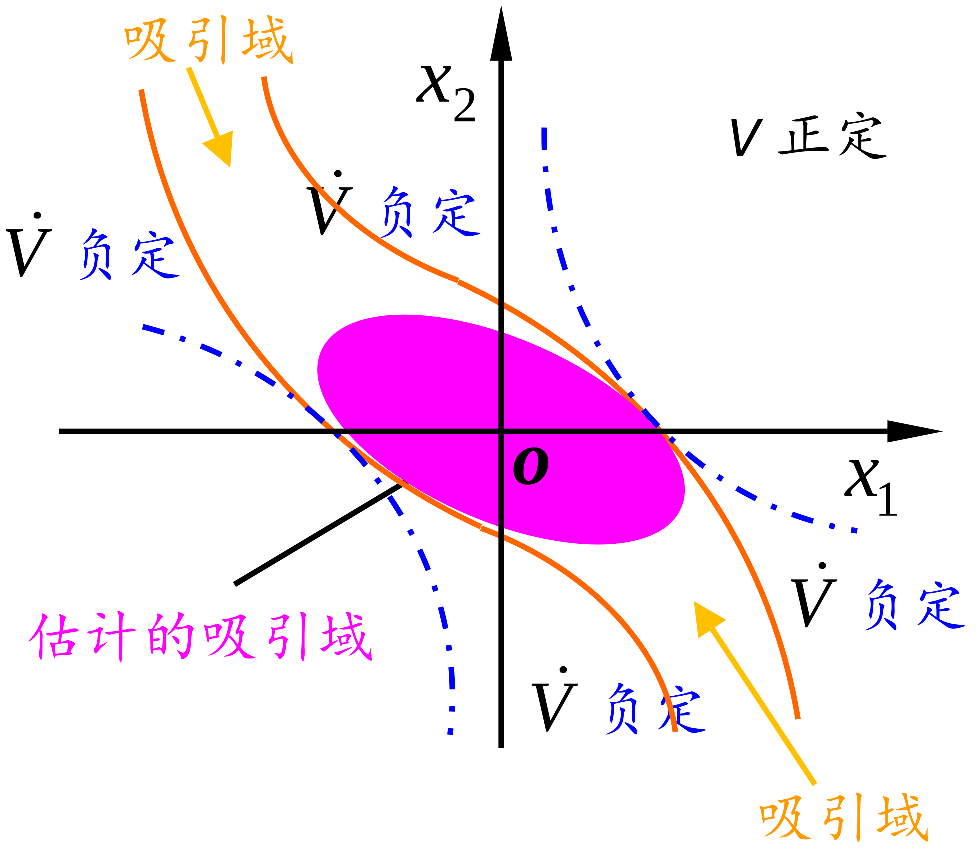
$$V(x)\Big|_{\dot{V}(x)=0}=x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2=\frac{2}{3}\left(x_1-\frac{1}{2\sqrt{2}x_1}\right)^2+\frac{\sqrt{2}}{3} \quad\Rightarrow\quad V_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

李雅普诺夫方法

得到一个保守的吸引域：

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

如图中粉色区域（椭圆）所示，橙色实线所示是仿真所得的实际（最大）吸引域。



李雅普诺夫方法

本节小结

- **李雅普诺夫第一方法(间接法)：**

$\dot{x} = f(x)$ > x_e处线性化> $\dot{y} = Ay$

A的特征值实部均为负，则x_e为渐近稳定平衡点。

A有实部为正的特征值，则x_e为不稳定平衡点

李雅普诺夫方法

本节小结

◆ 李雅普诺夫第二方法（直接法）：

[1] $V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 负定，则原点是渐近稳定的；进而，若 $\|x\|\to\infty$ 时，$V(x)\to\infty$，则原点是全局渐近稳定的。

[2] $V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 半负定，则原点是稳定的；此外，若 $\dot{V}(x)$ 除原点外沿状态轨线不恒为零，则原点是渐近稳定的；再进一步，若 $\|x\|\to\infty$ 时，$V(x)\to\infty$，则原点是全局渐近稳定的。

[3] $V(x)$ 正定，$\dot{V}(x)$ 也正定，则原点是不稳定的。

李雅普诺夫稳定性

1 基本概念

2 李雅普诺夫方法

3 构造李雅普诺夫函数的方法

构造李雅普诺夫函数的方法

对于非线性系统，**没有**一种构造李雅普诺夫函数的**通用方法**。人们通常凭**经验和技巧**来选取李雅普诺夫函数，最常见的是**二次型函数**，等价于找正定矩阵。

还有些方法适用于一些特定情形，如**克拉索夫斯基方法、变量梯度法**和**偶函数法等方法**。

构造李雅普诺夫函数的方法

3.1 克拉索夫斯基方法（Krasovskii）

考虑如下非线性系统

$$\dot{x} = f(x) \qquad \textbf{(3-1)}$$

其中 $f(x)$ **存在连续偏导数。定义雅可比（Jacobi）矩阵：**

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \triangleq \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^T} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

构造李雅普诺夫函数的方法

3.1 克拉索夫斯基方法（Krasovskii）

[定理 3-1] 设 $f(0)=0$， $f(x)$ 存在连续偏导数，且在原点的一个邻域上，$F^T(x)+F(x)$ 负定（正定），则在此邻域内除原点外， $f(x)\neq 0$。

构造李雅普诺夫函数的方法

3.1 克拉索夫斯基方法（Krasovskii）

[定理 3-2] 设原点是 $\dot{x}=f(x)$ 的平衡状态，且 $f(x)$ 存在连续偏导数。若 $F^T(x)+F(x)$ 负定，则原点是渐近稳定的。进一步，当 $\|x\|\to\infty$ 时，有 $\|f(x)\|\to\infty$，则原点是全局渐近稳定的。

构造李雅普诺夫函数的方法

3.1 克拉索夫斯基方法（Krasovskii）

证明：取 $$V(x)=\|f(x)\|^2=f^T(x)f(x)$$

则 $$\dot{V}(x)=\dot{f}^T(x)f(x)+f^T(x)\dot{f}(x)$$

$$=f^T(x)[F^T(x)+F(x)]f(x)$$

若 $F^T(x)+F(x)$**负定，则由[定理 3-1]得**

$$V(x)>0，\dot{V}(x)<0。$$

证毕。

构造李雅普诺夫函数的方法

3.1 克拉索夫斯基方法（Krasovskii）

- Krasovskii 方法给出的结论仍然是充分条件，当条件不满足时，也不能下结论。
- 也可取$V(x)=f^T(x)Pf(x)$， $P>0$；称为 Jacobi 方法。

- 思考：若$F^T(x)+F(x)$正定，能下结论吗?

构造李雅普诺夫函数的方法

3.1 克拉索夫斯基方法（Krasovskii）

[例 3-1] 用 Krasovskii 方法判定下述系统原点的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = 0.5x_1^2 - x_2 \end{cases}$$

解：原点是平衡点但不唯一，由第一方法可判定它是渐近稳定的。

构造李雅普诺夫函数的方法

3.1 克拉索夫斯基方法（Krasovskii）

$$F(x)=\begin{bmatrix} x_2-1 & x_1 \\ x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

是对称矩阵，其顺序主子式为：

$$\Delta_1=x_2-1,\quad \Delta_2=1-x_2-x_1^2$$

在 $x_2<1-x_1^2$ 的域上（原点是该域的内点），

$$\Delta_1<0,\quad \Delta_2>0$$

故 $F^T(x)+F(x)$ 在该域上负定，所以原点是渐近稳定的。

构造李雅普诺夫函数的方法

3.1 克拉索夫斯基方法（Krasovskii）

[例 3-2] **用 Krasovskii 方法判定下述系统原点的稳定性。**

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

解：原点是唯一平衡点，由第一方法可判定它是渐近稳定的。

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -5 & 2x_2 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}^T(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} -10 & 2x_2+1 \\ 2x_2+1 & -2-6x_2^2 \end{bmatrix}$$

构造李雅普诺夫函数的方法

3.1 克拉索夫斯基方法（Krasovskii）

$$\boldsymbol{F}^T(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=\begin{bmatrix} -10 & 2x_2+1 \\ 2x_2+1 & -2-6x_2^2 \end{bmatrix}$$

$\Delta_1=-10<0$，$\Delta_2=20(1+3x_2^2)-(2x_2+1)^2=56x_2^2-4x_2+19>0$

故 $\boldsymbol{F}^T(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ **负定，且当** $\|\boldsymbol{x}\|\to\infty$ **时，**

$$\|\boldsymbol{f}\|^2=(-5x_1+x_2^2)^2+(x_1-x_2-x_2^3)^2\to\infty$$

所以原点是全局渐近稳定的。

构造李雅普诺夫函数的方法

3.2 变量梯度法（Schultz，Gibson）

思路：先找$\dot{V}(x)$，后求$V(x)$。

（1）设定$V(x)$的梯度$\operatorname{grad} V$：

$$[\operatorname{grad} V]^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \triangleq [\nabla_1 \quad \cdots \quad \nabla_n]$$

（2）由$\operatorname{grad} V$确定$\dot{V}(x)$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = [\operatorname{grad} V]^T \dot{\boldsymbol{x}} = \nabla_1 f_1(\boldsymbol{x}) + \cdots + \nabla_n f_n(\boldsymbol{x})$$

构造李雅普诺夫函数的方法

3.2 变量梯度法（Schultz，Gibson）

（3）由$\dot{V}(x)$求$V(x)$

$$V(\boldsymbol{x})=\int_{V(0)}^{V(\boldsymbol{x})}\mathrm{d}V(\boldsymbol{x})=\int_0^{\boldsymbol{x}}[\mathrm{grad}V]^T\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int_0^{\boldsymbol{x}}\sum_{i=1}^{n}\nabla_i\mathrm{d}x_i$$

这是一个沿解曲线的曲线积分，当被积函数是某个标量场的梯度时，结果与积分路径无关。

（4）构成梯度，满足条件 $\dfrac{\partial\nabla_i}{\partial x_j}=\dfrac{\partial\nabla_j}{\partial x_i},\quad i\neq j$

构造李雅普诺夫函数的方法

3.2 变量梯度法（Schultz，Gibson）

（5）选择一条简单的积分路径

上述条件满足时，选择按坐标的逐次积分是最方便的：

$$V(\boldsymbol{x}) = \int_0^{x_1} \nabla_1 \mathrm{d}x_1 + \int_0^{x_2} \nabla_2 \mathrm{d}x_2 + \cdots + \int_0^{x_n} \nabla_n \mathrm{d}x_n$$

注意， $\int_0^{x_1} \nabla_1 \mathrm{d}x_1$ **时，** $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$

$\int_0^{x_2} \nabla_2 \mathrm{d}x_2$ **时，** $x_1 = x_1$，$x_3 = x_4 \cdots = x_n = 0$

余类推。

可以选择合适的 ∇_i **使得该积分为正定函数。**

构造李雅普诺夫函数的方法

3.2 变量梯度法（Schultz，Gibson）

[例 3-3] 用变量梯度法判定下述系统平衡状态的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

解：原点是唯一平衡点，由第一方法可判定它是渐近稳定的。

（1）设梯度向量为：

$$\operatorname{grad} V(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \nabla_1 \\ \nabla_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

构造李雅普诺夫函数的方法

3.2 变量梯度法（Schultz，Gibson）

（2）计算导函数： $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = [\mathrm{grad}\, V]^T \dot{\boldsymbol{x}}$

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(-x_1 + 2x_1^2 x_2) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(-x_2)$$

$$= -a_{11}x_1^2(1 - 2x_1x_2) - a_{22}x_2^2 - (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + 2a_{12}x_1^2x_2^2$$

构造李雅普诺夫函数的方法

3.2 变量梯度法（Schultz，Gibson）

（3）由 $\dfrac{\partial \nabla_1}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \nabla_2}{\partial x_1}$，并假定 a_{ij} 均为常数，可得：

$$a_{12} = a_{21}$$

取 $a_{12} = a_{21} = 0$， $a_{11} = a_{22} = 1$，得到：

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -x_1^2(1 - 2x_1x_2) - x_2^2$$

若 $1 - 2x_1x_2 > 0$，则 $\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$。(注意，原点是 $1 - 2x_1x_2 > 0$ 成立的范围的内点)。

构造李雅普诺夫函数的方法

3.2 变量梯度法（Schultz，Gibson）

（4）按坐标积分求$V(x)$

$$V(\boldsymbol{x}) = \int_0^{x_1} x_1 \,\mathrm{d}x_1 + \int_0^{x_2} x_2 \,\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) > 0$$

（5）综上，$V(\boldsymbol{x}) > 0$**，且在原点的一个邻域内有**$\dot{V}(\boldsymbol{x}) < 0$**；所以原点是渐近稳定的。**