运筹学

14. 网络分析 (续)

李 力
清华大学

Email: li-li@tsinghua.edu.cn

2023.12.

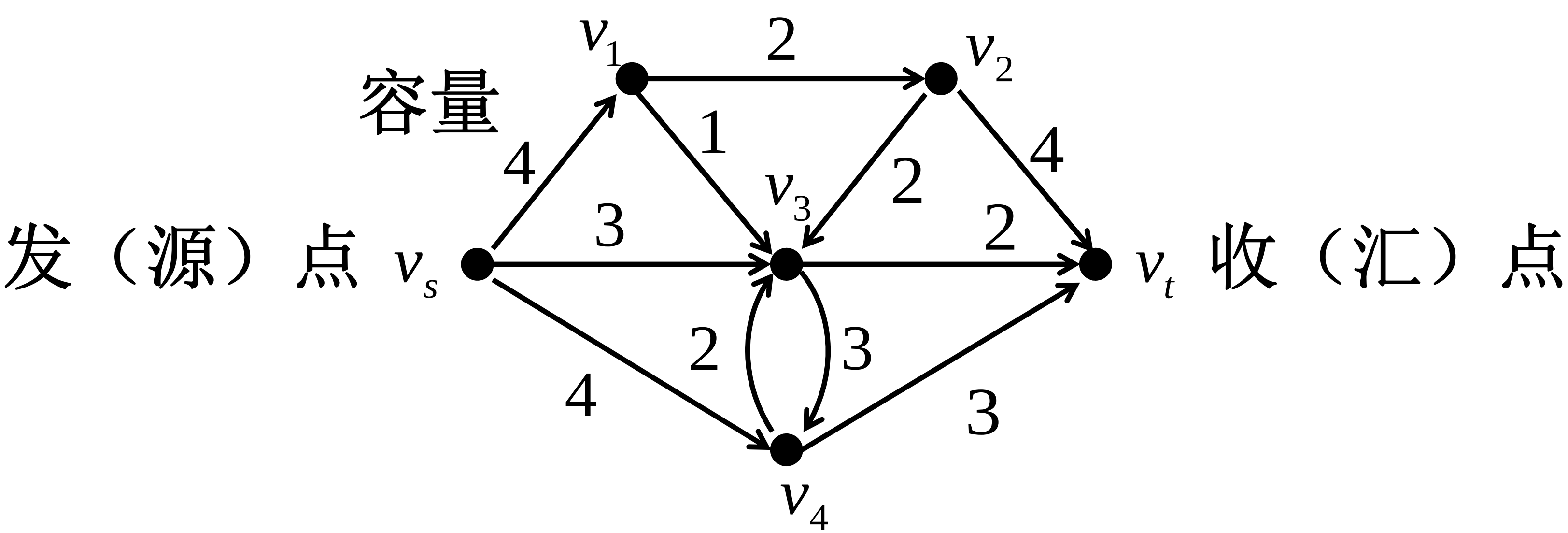
主要内容

最大流

最小费用最大流

最大流

例、最大输油量问题



目标：从发点到收点的总输油量最大

约束：1）容量约束，各边流量不大于容量

2）流量平衡约束，各点进出流量总和相等

容量网络

有向连通图 $G=(V,E)$ 各边 (v_i,v_j) 有非负容量 c_{ij} ，仅有一个入次为 **0** 的点 v_s ，称为发（源）点，仅有一个出次为 **0** 的点 v_t ，称为收（汇）点，将该网络记为 $G=(V,E,C)$ ，其中 $C=\{c_{ij}\}$

可行流 满足以下流量平衡约束和容量约束的 $X=\{x_{ij}\}$

$$\sum_{(v_i,v_j)\in E} x_{ij} = \sum_{(v_k,v_i)\in E} x_{ki},\ \forall v_i \in V,\ i \neq s,t$$ （流量平衡约束）

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij},\ \forall (v_i,v_j)\in E$$ （容量约束）

可行流的网络总流量 $W=\sum_{(v_s,v_j)\in E} x_{sj} = \sum_{(v_k,v_t)\in E} x_{kt}$

最大流问题

确定使网络总流量达到最大的可行流

数学规划模型

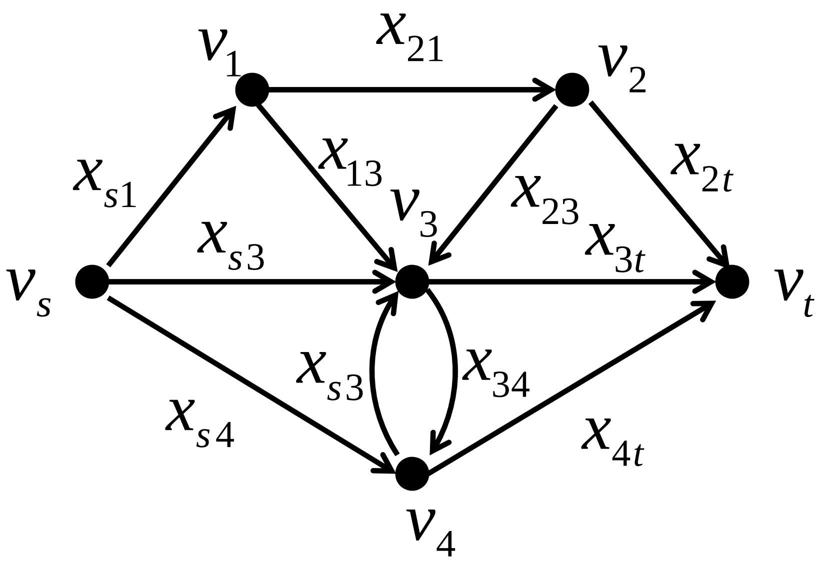
$$\max \quad W$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(v_i,v_j)\in E} x_{ij} - \sum_{(v_j,v_i)\in E} x_{ji} = \begin{cases} W & \text{if} \quad i = s \\ 0 & \text{if} \quad i \notin \{s,t\} \\ -W & \text{if} \quad i = t \end{cases}$$

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij}, \ \forall (v_i, v_j) \in E$$

是一种特殊的线性规划问题，存在有效的网络优化算法

可利用有向图的关联矩阵表示流量平衡约束



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} W \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -W \end{pmatrix}$$

最大流问题的割集

$\{S,\bar{S}\}$ 是 $G=(V,E)$ 的割集，且满足 $v_s \in S$，$v_t \in \bar{S}$

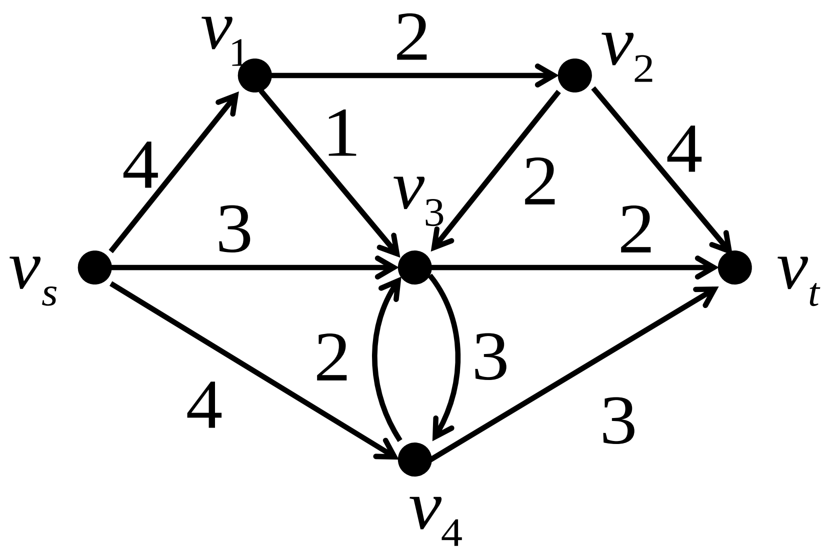
割集容量

割集 $\{S,\bar{S}\}$ 中，所有始点属于 S 、终点属于 $\bar{S}$ 的边的容量和称为 $\{S,\bar{S}\}$ 的割集容量，记为 $C(S,\bar{S})$

例如

$$S=\{v_s\} \Rightarrow C(S,\bar{S})=11$$

$$S=\{v_s,v_3,v_4\} \Rightarrow C(S,\bar{S})=9$$



最小割 具有最小容量的割集

对于任意的可行流 $X=\{x_{ij}\}$ 和割集 $\{S,\bar{S}\}$

$$\sum_{(v_i,v_j)\in E} x_{ij} - \sum_{(v_j,v_i)\in E} x_{ji} = \begin{cases} W & \text{if} \quad i=s \\ 0 & \text{if} \quad i\notin\{s,t\} \\ -W & \text{if} \quad i=t \end{cases} \quad 0\le x_{ij}\le c_{ij}, \forall (v_i,v_j)\in E$$

$$\Rightarrow \quad W = \sum_{v_i\in S}\left(\sum_{(v_i,v_j)\in E} x_{ij} - \sum_{(v_j,v_i)\in E} x_{ji}\right) = \sum_{v_i\in S}\left(\sum_{\substack{v_j\in S\\(v_i,v_j)\in E}} x_{ij} - \sum_{\substack{v_j\in S\\(v_j,v_i)\in E}} x_{ji}\right)$$

$$+\sum_{v_i\in S}\left(\sum_{\substack{v_j\in \bar{S}\\(v_i,v_j)\in E}} x_{ij} - \sum_{\substack{v_j\in \bar{S}\\(v_j,v_i)\in E}} x_{ji}\right) = \sum_{v_i\in S}\left(\sum_{\substack{v_j\in \bar{S}\\(v_i,v_j)\in E}} x_{ij} - \sum_{\substack{v_j\in \bar{S}\\(v_j,v_i)\in E}} x_{ji}\right)$$

$$\le \sum_{v_i\in S}\sum_{\substack{v_j\in \bar{S}\\(v_i,v_j)\in E}} x_{ij} \le C(S,\bar{S})$$

<u>等于割集容量的可行流一定是最大流</u>

可增广链

设 μ 是从 v_s 到 v_t 的一条链，定义 μ 的方向为从 v_s 到 v_t 的方向，对于 μ 上的任意边，如果其方向和 μ 相同则称其为前向边，否则为后向边，用 μ^+ 和 μ^- 分别表示前向边和后向边的集合，如果 $X=\{x_{ij}\}$ 是一个可行流，且满足

$$x_{ij} < c_{ij} \quad \forall (v_i, v_j) \in \mu^+ \quad （前向边流量可增）$$

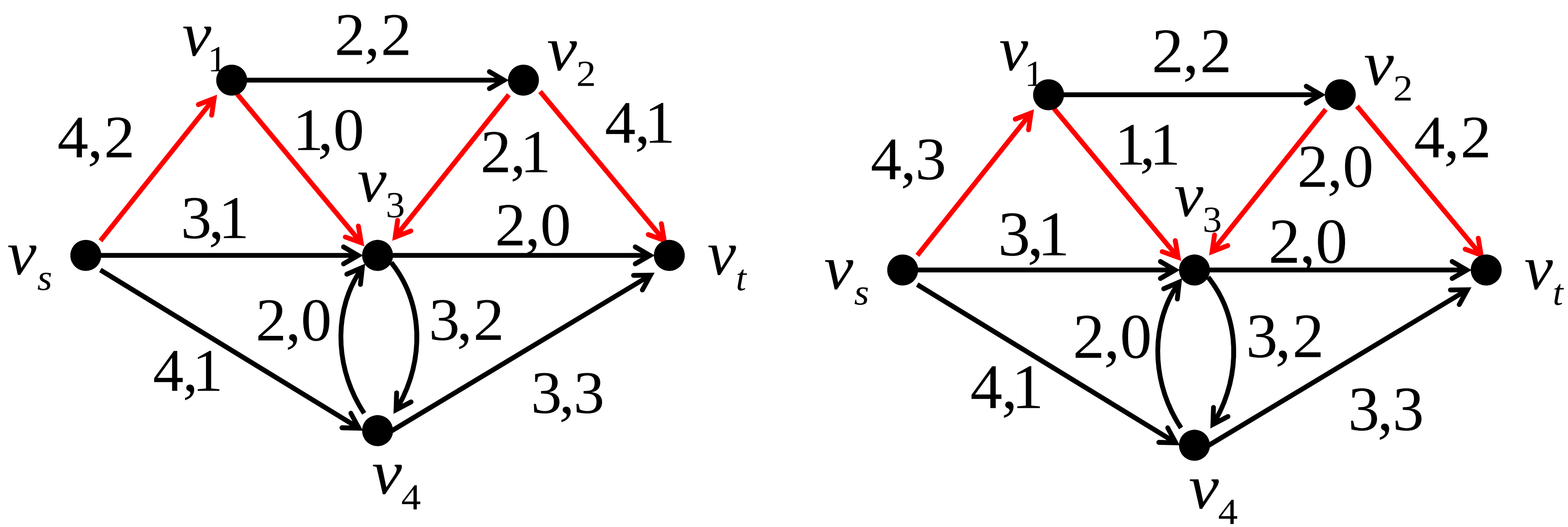
$$0 < x_{ij} \quad \forall (v_i, v_j) \in \mu^- \quad （后向边流量可减）$$

则称 μ 是从 v_s 到 v_t（关于 X ）的可增广链

例　下图中每对数字第一个是容量，第二个是一个可行流的流量，下面左图红线是可增广链，右图是对可增广链的流量进行如下调整得到新的可行流：

<u>前向边流量加**1**，后向边流量减**1**</u>

新可行流比原可行流的总流量也加**1**



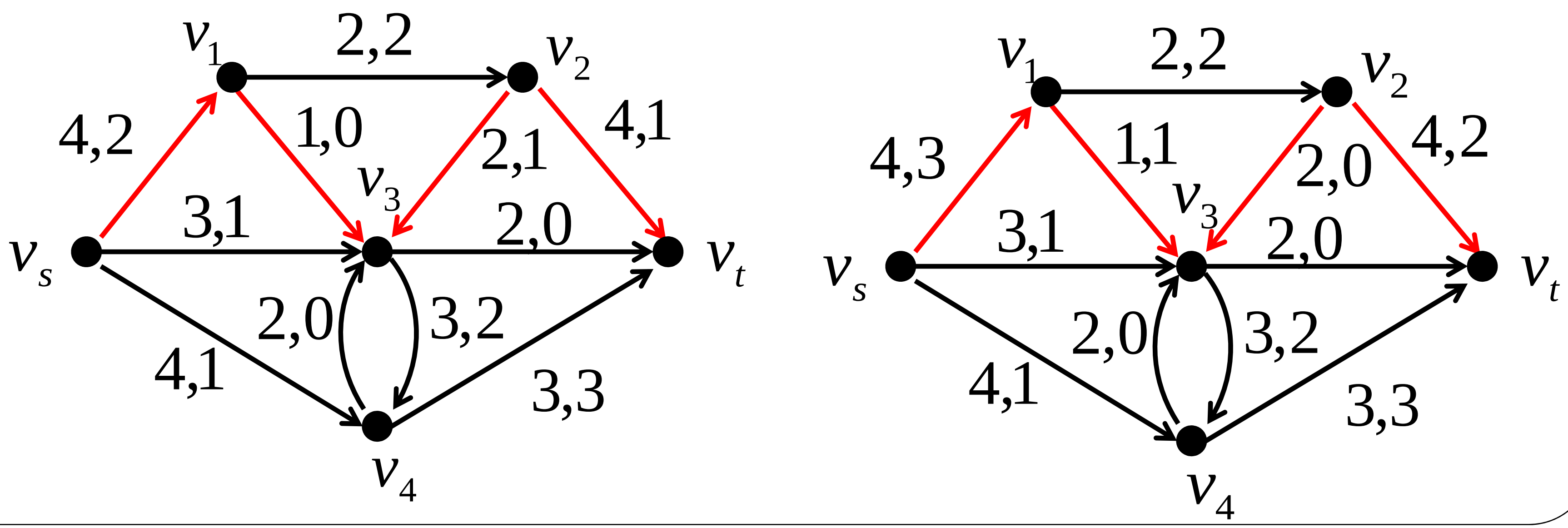
对可增广链流量的一般改进方法

已知条件 $\quad x_{ij} < c_{ij} \quad \forall(v_i, v_j) \in \mu^+$

$\qquad\qquad\quad 0 < x_{ij} \quad \forall(v_i, v_j) \in \mu^-$

令
$$\begin{aligned} \delta_{ij} &= c_{ij} - x_{ij} \quad \forall(v_i, v_j) \in \mu^+ \\ \delta_{ij} &= x_{ij} - 0 \quad \forall(v_i, v_j) \in \mu^- \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \delta = \min_{i,j} \delta_{ij}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{x}_{ij} &= x_{ij} + \delta \quad \forall(v_i, v_j) \in \mu^+ \\ \hat{x}_{ij} &= x_{ij} - \delta \quad \forall(v_i, v_j) \in \mu^- \end{aligned} \qquad \hat{x}_{ij} = x_{ij}, \ \forall(v_i, v_j) \notin \mu$$



整数容量网络沿可增广链增加流量的一个推论

$$C=\{c_{ij}\}\text{ 是整数}$$
$$X=\{x_{ij}\}\text{ 是整数}\quad\Rightarrow\quad \delta=\min_{i,j}\delta_{ij}\text{ 是整数}$$
$$\delta_{ij}=c_{ij}-x_{ij}\quad\forall(v_i,v_j)\in\mu^+$$
$$\delta_{ij}=x_{ij}-0\quad\forall(v_i,v_j)\in\mu^-$$

$$\hat{x}_{ij}=x_{ij}+\delta\quad\forall(v_i,v_j)\in\mu^+$$
$$\hat{x}_{ij}=x_{ij}-\delta\quad\forall(v_i,v_j)\in\mu^-\quad\Rightarrow\quad\hat{X}=\{\hat{x}_{ij}\}\text{ 是整数}$$
$$\hat{x}_{ij}=x_{ij},\forall(v_i,v_j)\notin\mu$$

$\Rightarrow$ 整数容量网络从整数流开始最终得到的是整数流

增广链定理：一个可行流是最大流的充要条件是：不存在关于它的可增广链

必要性显然成立，下面证明充分性

用 S 表示有可增广链达到的点集，即，对任意的 $v_k \in S$ ， 存在从 v_s 到 v_k 的链，满足以下条件：

如果 (v_i, v_j) 与链的方向相同，则 $0 \le x_{ij} < c_{ij}$

如果 (v_i, v_j) 与链的方向相反，则 $0 < x_{ij} \le c_{ij}$

用 $\bar{S}$ 表示 S 的补集，不存在可增广链 $\Rightarrow$ $v_t \in \bar{S}$

由 S 的定义可知，对于任意的 $v_i \in S, v_j \in \bar{S}$

如果 $(v_i, v_j) \in E$ ，一定有 $x_{ij} = c_{ij}$ ，否则 $v_j \in S$

如果 $(v_j, v_i) \in E$ ，一定有 $x_{ji} = 0$ ，否则 $v_j \in S$

由以上关系可得

$$W = \sum_{v_i \in S} \left(\sum_{\substack{v_j \in \bar{S} \\ (v_i, v_j) \in E}} x_{ij} - \sum_{\substack{v_j \in \bar{S} \\ (v_j, v_i) \in E}} x_{ji} \right) = \sum_{v_i \in S} \sum_{\substack{v_j \in \bar{S} \\ (v_i, v_j) \in E}} c_{ij} = C(S, \bar{S})$$

由于任何可行流的流量 $\hat{W}$ 都满足

$$\hat{W} \le C(S, \bar{S})$$

所以 X 是最大流

由增广链定理的证明过程可得以下定理

最大流一最小割定理： 对于任何容量网络 $G=(V,E,C)$，从 v_s 到 v_t 的最大流的流量等于分割 v_s 和 v_t 的最小割集的容量

理由 $$\hat{W} \le C(S,\bar{S}) = W \le C(S',\bar{S}')$$

其中 $\hat{W}$ 是任意可行流的流量，$(S',\bar{S}')$ 是任意分割 v_s 和 v_t 的割集

求解最大流问题的基本方法

产生可行流 → 寻找可增广链 → 改进可行流

寻找可增广链的基本途径

首先令 $S=\{v_s\}$，用 $\bar{S}$ 表示其补集

检查割集 $\{S,\bar{S}\}$，如果其中有可增广边（前向可增，后向可减），将相应边属于 $\bar{S}$ 的点移入 S，然后对新的割集继续找可增广边，直到 $v_t\in\bar{S}$

如果割集 $\{S,\bar{S}\}$ 不含可增广边，当前可行流已是最大流

求最大流的标号算法（**Ford-Fulkerson**算法）

选定初始可行流

给 v_s 标号

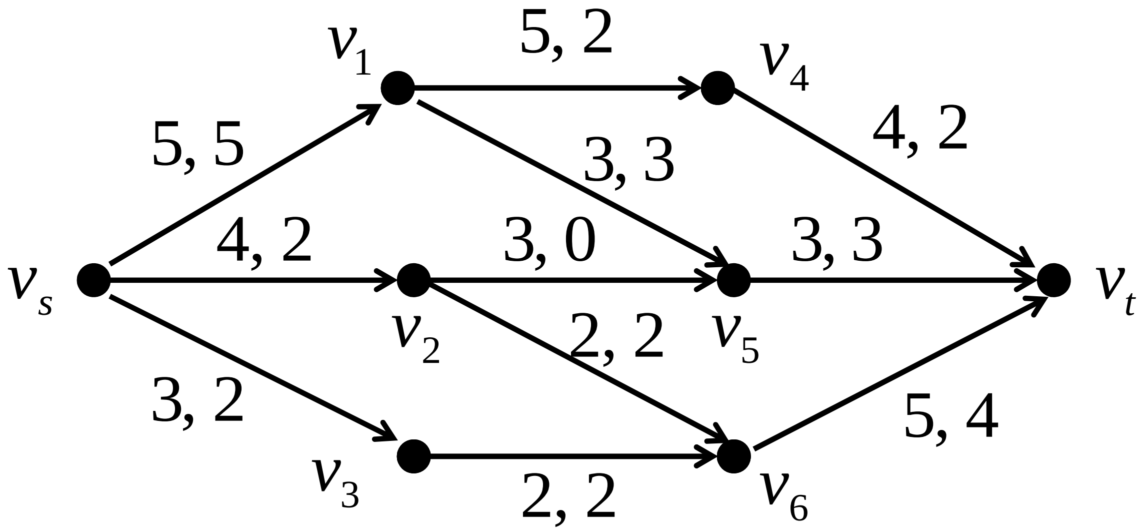
选择已标号未检查的点，对其邻点进行标号

如果已标号点没有未标号邻点，标记为已检查点

如果能标记到 v_t，构造可增广链，改进可行流

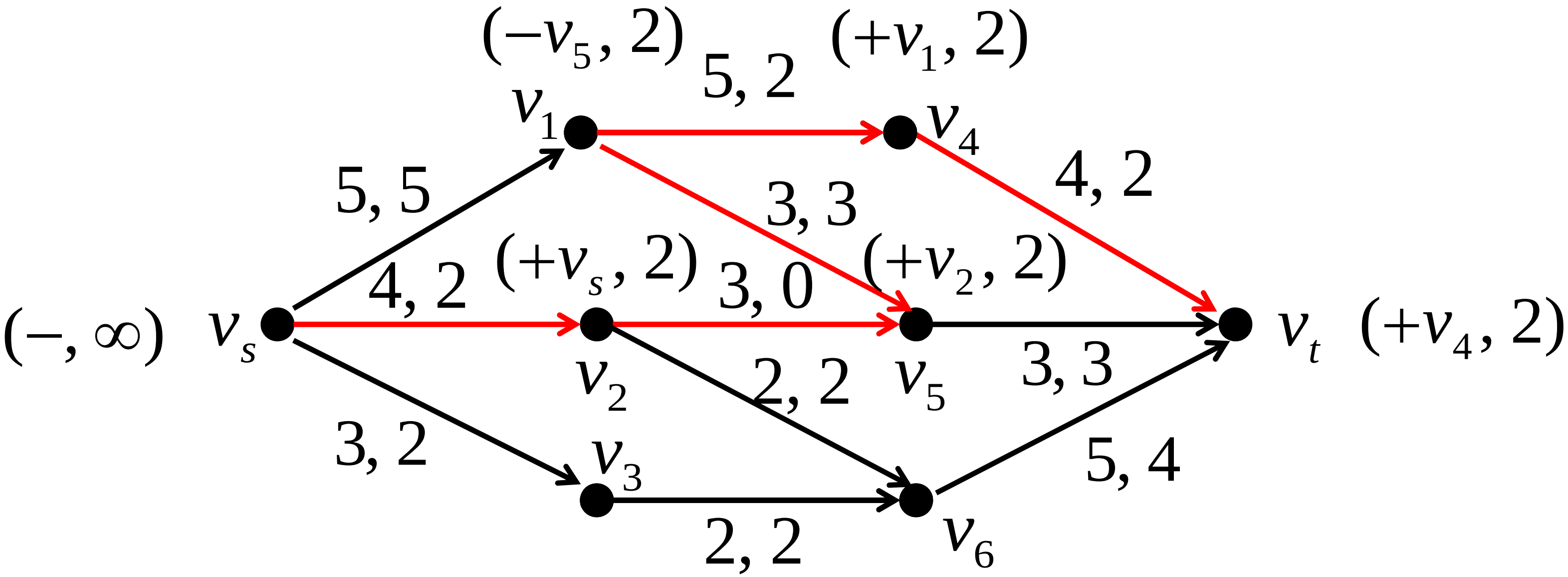
如果所有点都已检查，停止，构造最小割

例



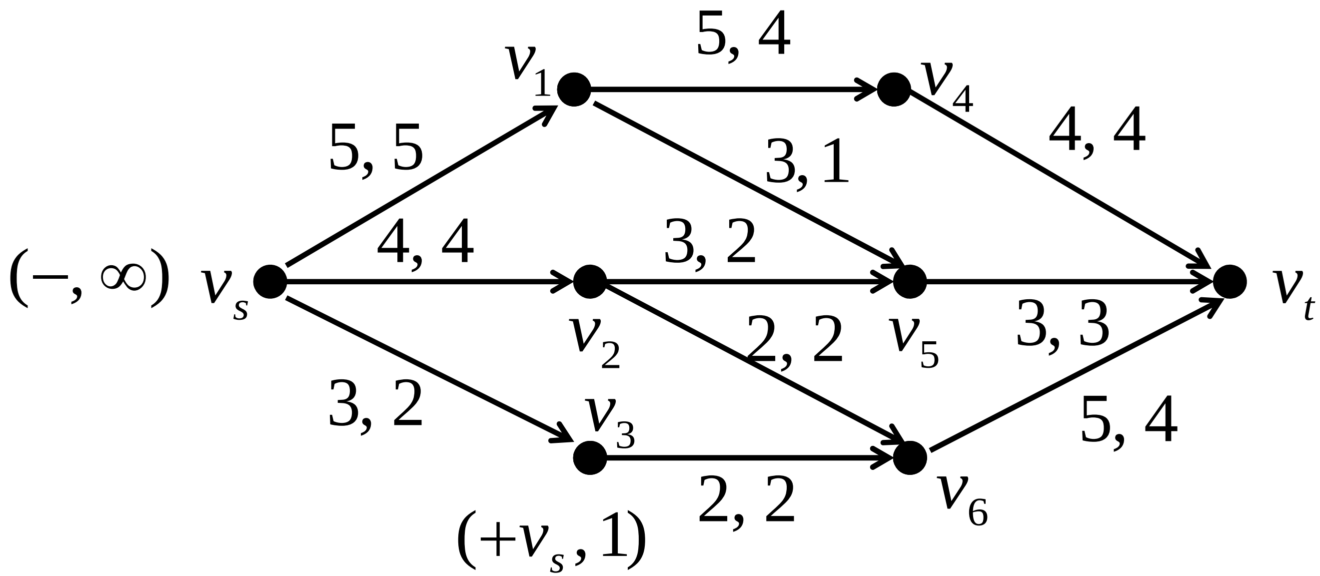
可行流量

标在边旁

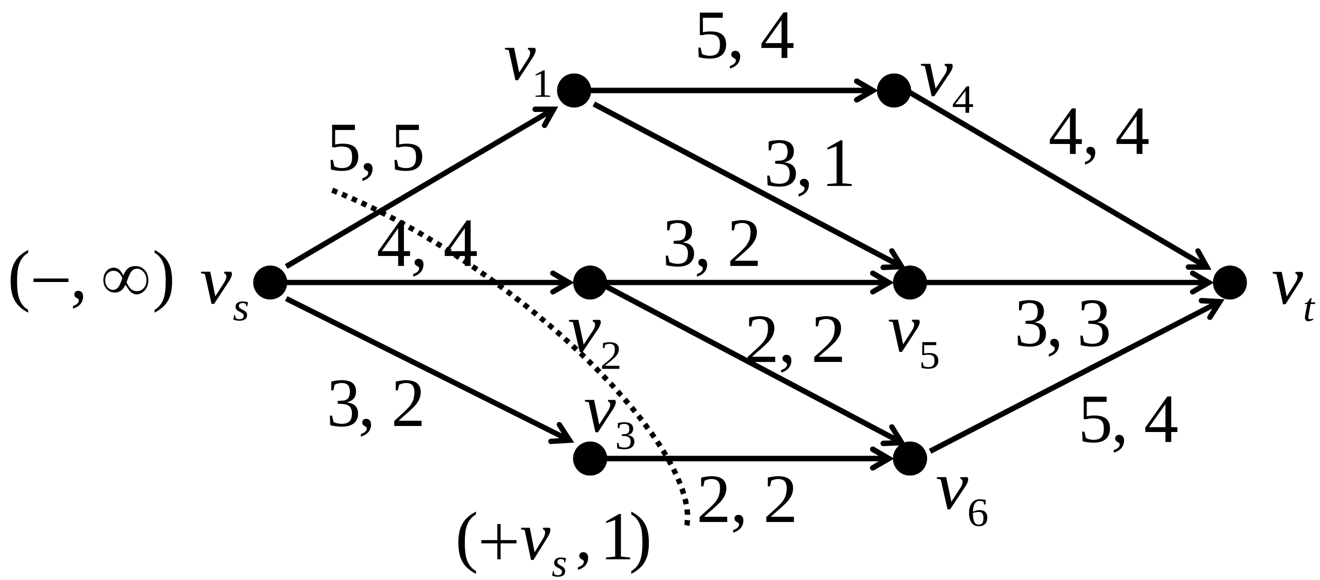


得到可增广链（红线），据此可改进当前可行流

继续标号



所有已标号点均为已检查点，停止，构造最小割

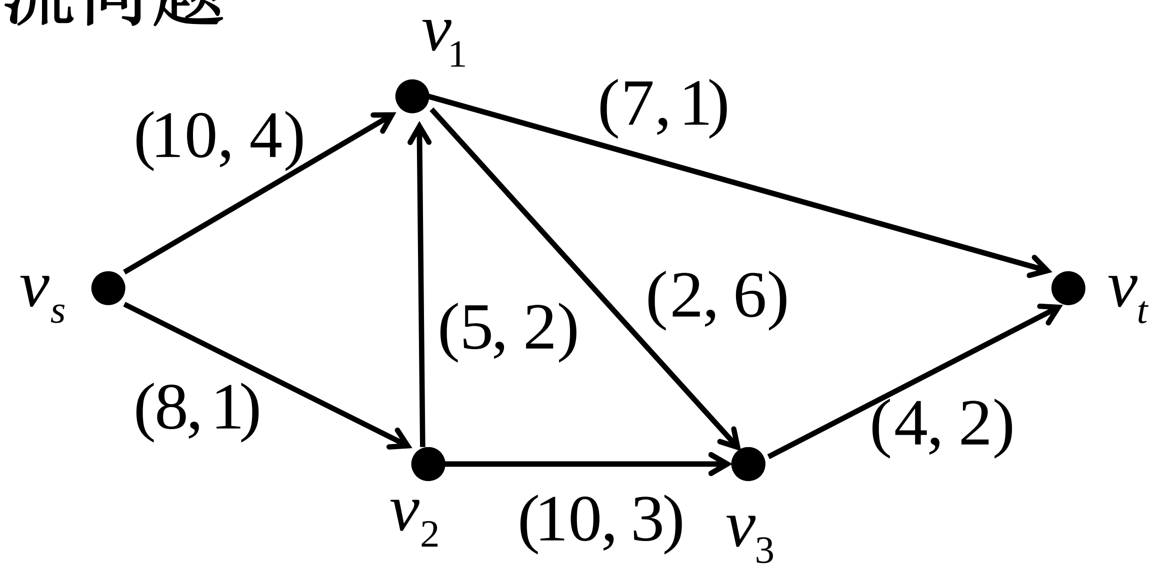


整流定理：整数容量网络存在其所有流量都是整数的最大流

理由：从零流开始，每次按照标号算法改进后的可行流的所有流量一定还是整数

最小费用最大流问题

例、 最小费用流问题



括号内第一个数字是容量，第二个是单位流量费用

目标：从发点到收点的总的流量费用最小

约束：**1**）容量约束，各边流量不大于容量
2）流量平衡约束，各点进出流量总和相等
3）从发点到收点的总流量为 w

最小费用流问题的一般提法

容量网络 $G=(V,E,C)$ 的每边另外赋值非负的单位流量费用 $d_{ij},\forall(v_i,v_j)\in E$，记为$G=(V,E,C,D)$，给定从 v_s 到 v_t 的总流量 w，要求一个总流量等于 w 的可行流 $X=\{x_{ij}\}$ 使得总费用

$$\sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij}$$

达到最小，特别是，如果给定总流量等于最大流，所求问题称为最小费用最大流问题

数学规划模型

$$\min \sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(v_i,v_j)\in E} x_{ij} - \sum_{(v_j,v_i)\in E} x_{ji} = \begin{cases} w & \text{if} \quad i=s \\ 0 & \text{if} \quad i\notin\{s,t\} \\ -w & \text{if} \quad i=t \end{cases}$$

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij}, \ \forall (v_i,v_j)\in E$$

列向量形式

$$\min \sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij}$$

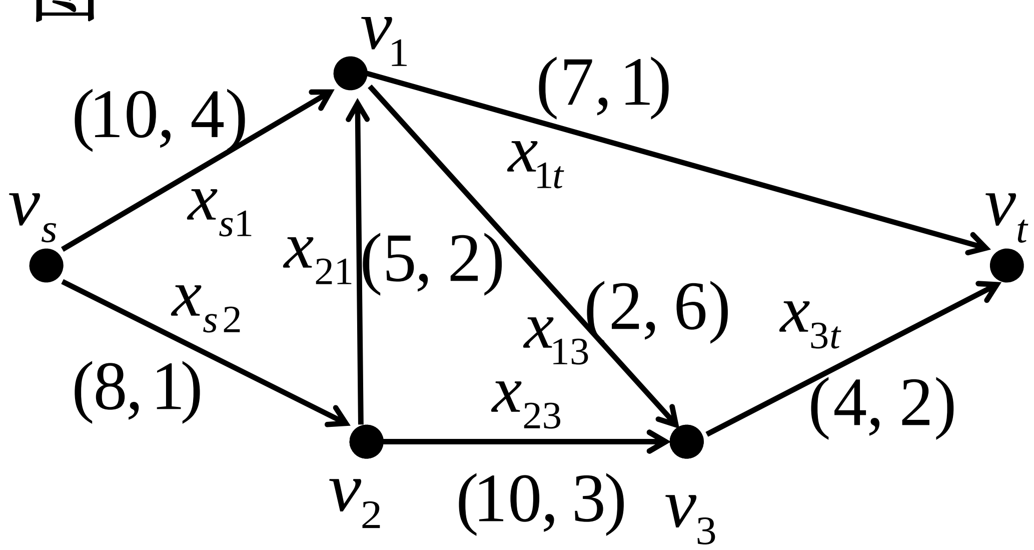
$$\text{s.t.} \quad \sum_{(v_i,v_j)\in E} P_{ij}x_{ij} = \vec{w}$$

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij}, \ \forall (v_i,v_j)\in E$$

其中 P_{ij} 的第 v_i 行等于1，第v_j行等于-1，其余都等于零

$\vec{w}$ 的第 **1** 行等于 w，最后一行等于 $-w$，其余都等于零

例、$G=(V,E,C,D)$ 如下图



数学规划模型

$$\min \quad D^T X$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & \\ -1 & & 1 & 1 & -1 & & \\ & -1 & & & 1 & 1 & \\ & & -1 & & & -1 & 1 \\ & & & -1 & & & -1 \end{pmatrix} X = \vec{w}$$

$$0 \le X \le C$$

其中 $X=(x_{s1},x_{s2},x_{13},x_{1t},x_{21},x_{23},x_{3t})^T$，$D$ 和 C 为相应系数向量

最小费用最大流问题的启发式算法

网络流量 $W < w$，如何满足流量要求？

已知条件：X 是最大流问题的一个可行流

（满足所有中间节点的流量平衡条件和容量约束）

例如：$x_{ij} = 0, \forall (v_i, v_j) \in E$

X 是最大流的充要条件（增广链定理）：

不存在关于 X 的可增广链

可以采用的方法：

寻找关于 X 的可增广链，如果找不到，X 已经是最大流，原问题不可行；否则增加流量

假设 μ 是从 v_s 到 v_t 关于 X 的可增广链，用 μ^+ 表示其前向边的集合， μ^- 表示后向边的集合，用 W 表示当前的总流量。

如果沿该增广链增加流量 σ ， 由容量约束知

$$\sigma = \min\left\{ \min_{(v_i,v_j)\in\mu^+} c_{ij} - x_{ij}, \min_{(v_i,v_j)\in\mu^-} x_{ij} \right\}$$

由于增加后的总流量为 $W+\sigma$，应满足 $W+\sigma \le w$

所以最终选用的流量增加值应该为

$$\delta = \min\{w - W, \sigma\} = \min\left\{ w - W, \min_{(v_i,v_j)\in\mu^+} c_{ij} - x_{ij}, \min_{(v_i,v_j)\in\mu^-} x_{ij} \right\}$$

沿 μ 对 X 进行调整获得新的流量 $\overline{X}=\{\overline{x}_{ij}\}$，则

$$\overline{x}_{ij}=x_{ij}+\delta, \quad \forall(v_i,v_j)\in\mu^+$$

$$\overline{x}_{ij}=x_{ij}-\delta, \quad \forall(v_i,v_j)\in\mu^-$$

$$\overline{x}_{ij}=x_{ij}, \qquad \forall(v_i,v_j)\in E-\mu^+\cup\mu^-$$

流量调整前后原目标函数的改变为

$$\sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}\overline{x}_{ij}-\sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij}=\left(\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+} d_{ij}-\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-} d_{ij}\right)\delta$$

记 $d(\mu)=\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+} d_{ij}-\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-} d_{ij}$

$d(\mu)$是沿 μ 增加单位流量的费用，称为 μ 的费用

直观想法：选择费用最小的可增广链增加总流量

根据前面的讨论可形成下面的最小费用流算法：

1）令 $X=\{x_{ij}\}, x_{ij}=0, \forall(v_i,v_j)\in E,\ W=0$

2）如果 $W=w$，停止，否则求出费用 $d(\mu)$ 最小的可增广链 μ（如果没有可增广链，停止）

3）令 $\delta=\min\left\{w-W,\ \min\limits_{(v_i,v_j)\in\mu^+} c_{ij}-x_{ij},\ \min\limits_{(v_i,v_j)\in\mu^-} x_{ij}\right\}$

$$\bar{x}_{ij}=x_{ij}+\delta,\quad \forall(v_i,v_j)\in\mu^+$$

$$\bar{x}_{ij}=x_{ij}-\delta,\quad \forall(v_i,v_j)\in\mu^-$$

$$\bar{x}_{ij}=x_{ij},\qquad \forall(v_i,v_j)\in E-\mu^+\cup\mu^-$$

4）用 $\bar{X}$ 替换 X，$W+\delta$ 替换 W，回到 2）

对前面的最小费用流算法要解决的问题

1）理论问题

算法停止于 $W = w$ 时所产生的 X 是否是最小费用流问题的解？

2）实现问题

如何方便地求出费用 $d(\mu)$ 最小的可增广链？

最小费用最大流问题的对偶算法

利用KKT定理得到最小费用流问题最优解的充要条件

原问题 $\min \sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij}$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(v_i,v_j)\in E} P_{ij}x_{ij} = \vec{w}, \quad -x_{ij} \le 0, \; x_{ij} - c_{ij} \le 0, \forall (v_i, v_j) \in E$$

拉格朗日函数 $L(X, \vec{z}, \vec{\lambda}, \vec{\mu})$

$$= \sum_{(v_i,v_j)\in E} \left(d_{ij} + \vec{z}^T P_{ij} - \lambda_{ij} + \mu_{ij}\right) x_{ij} - \vec{z}^T \vec{w} - \sum_{(v_i,v_j)\in E} \mu_{ij} c_{ij}$$

梯度条件 $d_{ij} + \vec{z}^T P_{ij} - \lambda_{ij} + \mu_{ij} = 0, \; \forall (v_i, v_j) \in E$

互补松弛条件 $\lambda_{ij} x_{ij} = 0, \; \mu_{ij}(c_{ij} - x_{ij}) = 0, \; \forall (v_i, v_j) \in E$

结论：可行流 $X=\{x_{ij}\}$ 是最小费用流问题最优解的充要条件是，存在 $\vec{z}$，$\vec{\lambda}\geq 0$ 和 $\vec{\mu}\geq 0$ 一起满足

$$d_{ij}+\vec{z}^{T}P_{ij}-\lambda_{ij}+\mu_{ij}=0,\ \forall\left(v_i,v_j\right)\in E$$

$$\lambda_{ij}x_{ij}=0,\ \mu_{ij}\left(c_{ij}-x_{ij}\right)=0,\ \forall\left(v_i,v_j\right)\in E$$

等价条件：存在 $\vec{z}$ 和 $\vec{\mu}\geq 0$ 一起满足

消去 λ_{ij}

$$d_{ij}+z_i-z_j+\mu_{ij}\geq 0,\ \forall\left(v_i,v_j\right)\in E$$

$$x_{ij}\left(d_{ij}+z_i-z_j+\mu_{ij}\right)=0,\ \mu_{ij}\left(c_{ij}-x_{ij}\right)=0,\ \forall\left(v_i,v_j\right)\in E$$

利用线性规划对偶理论得到最优解的充要条件

原问题 $\min \sum_{(v_i,v_j)\in E} d_{ij}x_{ij}$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(v_i,v_j)\in E} P_{ij}x_{ij} = \vec{w}, \quad x_{ij} \ge 0,\ c_{ij} - x_{ij} \ge 0, \forall (v_i,v_j) \in E$$

对偶问题 $\max\ (z_t - z_s)w - \sum_{(v_i,v_j)\in E} c_{ij}\mu_{ij}$

$$\text{s.t.} \quad d_{ij} + z_i - z_j + \mu_{ij} \ge 0,\ \mu_{ij} \ge 0,\ \forall (v_i,v_j) \in E$$

其中 z_s, z_i, z_t 分别是 v_s, v_i, v_t 的等式约束的对偶变量

原对偶可行解互补松弛条件（<u>最优解充要条件</u>）

$$x_{ij}\left(d_{ij} + z_i - z_j + \mu_{ij}\right) = 0,\ \mu_{ij}\left(c_{ij} - x_{ij}\right) = 0,\ \forall (v_i,v_j) \in E$$

互补松弛定理：可行流 $X=\{x_{ij}\}$ 是原问题最优解的充要条件是，存在等式约束的对偶变量 $\vec{z}=\{z_i\}$ 满足

$$\begin{cases} x_{ij}=0 & \forall\ d_{ij}+z_i-z_j>0 \\ x_{ij}=c_{ij} & \forall\ d_{ij}+z_i-z_j<0 \end{cases}$$

充分性：取 $\mu_{ij}=\max\{0,-(d_{ij}+z_i-z_j)\}$ 满足互补松弛条件

必要性：$d_{ij}+z_i-z_j>0 \Rightarrow d_{ij}+z_i-z_j+\mu_{ij}>0 \Rightarrow x_{ij}=0$

$d_{ij}+z_i-z_j<0 \Rightarrow \mu_{ij}>0 \Rightarrow x_{ij}=c_{ij}$

术语：记 $\sigma_{ij}(\vec{z})=d_{ij}+z_i-z_j$，称其为边 (v_i,v_j) 的简化成本

利用互补松弛定理求解最小费用流问题的一种途径

首先确定一对 $(X, \vec{z})$ 满足以下条件：

1）容量约束 $0 \le x_{ij} \le c_{ij}, \forall (v_i, v_j) \in E$

2）中间结点等式约束 $\sum_{(v_i,v_j)\in E} x_{ij} - \sum_{(v_j,v_i)\in E} x_{ji} = 0, \quad \forall i \notin \{s,t\}$

3）总流量不超过给定流量 $\sum_{(v_s,v_j)\in E} x_{sj} = \hat{w} \le w$

4）互补松弛条件 $x_{ij} = 0, \forall \sigma_{ij}(\vec{z}) > 0$；$x_{ij} = c_{ij}, \forall \sigma_{ij}(\vec{z}) < 0$

例如 $x_{ij} = 0, \forall (v_i, v_j) \in E$，$z_i = 0, \forall v_i \in V$ 满足以上条件

然后找可增广链，<u>在满足上述条件的前提下</u>增加总流量

设 $(v_i,v_j)\in E$ 为增广边，增广前后的流量为 x_{ij} 和 x'_{ij}，满足

增广前 $\begin{cases} x_{ij}=0 & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z})>0 \\ x_{ij}=c_{ij} & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z})<0 \end{cases}$ 增广后 $\begin{cases} x'_{ij}=0 & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z})>0 \\ x'_{ij}=c_{ij} & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z})<0 \end{cases}$

增广前后只能出现两种情况：**1**）$x_{ij}<x'_{ij}$ ；**2**）$x_{ij}>x'_{ij}$

第1种情况必有 $x_{ij}<c_{ij}$ ，$x'_{ij}>0$ ，只有 $\sigma_{ij}(\vec{z})=0$ 满足条件

第2种情况必有 $x_{ij}>0$ ，$x'_{ij}<c_{ij}$ ，只有 $\sigma_{ij}(\vec{z})=0$ 满足条件

结论：<u>当且仅当 $\sigma_{ij}(\vec{z})=0$ 时，其边可用做增广边</u>

术语约定：以后把简化成本为零的可增广边称为<u>可用边</u>

实现前述途径要解决的关键问题：

对于任意给定的可行流 $\{x_{ij}\}$，如何调整对偶向量 $\vec{z}$，确定一条由可用边组成的可增广链

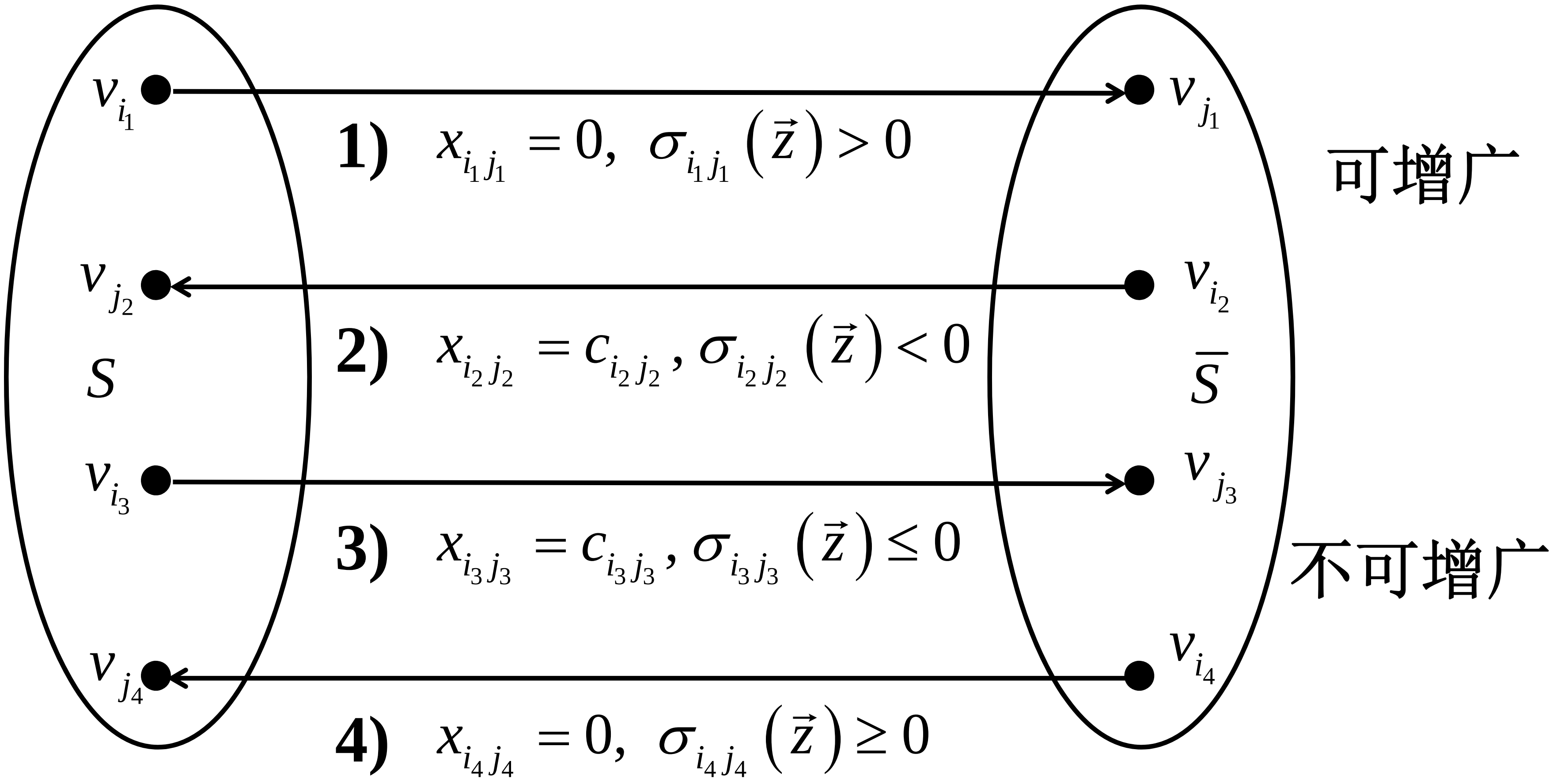
解决问题的基本想法：

首先令 $S=\{v_s\}$，用 $\bar{S}$ 表示其补集

如果割集 $\{S,\bar{S}\}$ 不含可增广边（前向可增，后向可减）当前流已是最大流，原问题无解

如果割集 $\{S,\bar{S}\}$ 中有可增广边，调整 $\vec{z}$ 获得可用边（若有这样的边无须调整），然后增加 S

没有可用边的割集$\{S,\overline{S}\}$中所有边的情况



注意：不会有$0 < x_{ij} < c_{ij}$的边，否则有可用边

保持属于S 的对偶变量不变，将属于$\bar{S}$ 的对偶变量加 1
即令 $z_i' = z_i, \forall v_i \in S$，$z_i' = z_i + 1, \forall v_i \in \bar{S}$ ，割集$\{S, \bar{S}\}$中所有边的简化成本 $\sigma_{ij}(\vec{z}') = d_{ij} + z_i' - z_j'$ 的改变情况如下：

1) $x_{i_1 j_1} = 0,\ \sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}') = \sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}) - 1 \ge 0$

2) $x_{i_2 j_2} = c_{i_2 j_2}, \sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}') = \sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}) + 1 \le 0$

3) $x_{i_3 j_3} = c_{i_3 j_3}, \sigma_{i_3 j_3}(\vec{z}) \le 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{i_3 j_3}(\vec{z}') = \sigma_{i_3 j_3}(\vec{z}) - 1 < 0$

4) $x_{i_4 j_4} = 0,\ \sigma_{i_4 j_4}(\vec{z}) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{i_4 j_4}(\vec{z}') = \sigma_{i_4 j_4}(\vec{z}) + 1 > 0$

不在割集中的所有边的简化成本显然不变

结论：以上操作可以保持互补松弛条件不变！

$x_{ij} = 0, \forall \sigma_{ij}(\vec{z}) > 0$;

$x_{ij} = c_{ij}, \forall \sigma_{ij}(\vec{z}) < 0$

注意可增广边的简化成本改变情况

1) $x_{i_1 j_1} = 0,\ \sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}') = \sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}) - 1 \geq 0$

2) $x_{i_2 j_2} = c_{i_2 j_2}, \sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}) < 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}') = \sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}) + 1 \leq 0$

如果有 $\sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}) = 1$， 则有 $\sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}') = 0$

如果有 $\sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}) = -1$， 则有 $\sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}') = 0$

出现上述任何一种情况都可得到可用边，如果上述情况都没有出现，则继续保持

1) $x_{i_1 j_1} = 0,\ \sigma_{i_1 j_1}(\vec{z}') > 0$ **2)** $x_{i_2 j_2} = c_{i_2 j_2}, \sigma_{i_2 j_2}(\vec{z}') < 0$

此时可以继续上述操作，将属于 $\bar{S}$ 的对偶变量加 **1**

上述操作的次数有个上限，这就是

$$\eta = \left|\sigma_{\hat{i}\hat{j}}(\vec{z})\right| = \min\left\{\left|\sigma_{ij}(\vec{z})\right| \text{ s.t. } (v_i, v_j) \in \hat{E}\right\}$$

其中 $\hat{E}$ 表示割集 $\{S, \bar{S}\}$ 中所有可增广边的集合，当操作进行了 η 次以后，一定得到 $\sigma_{\hat{i}\hat{j}}(\vec{z}) = 0$ 的可增广边 $(v_{\hat{i}}, v_{\hat{j}})$

基于以上分析，可以一次完成上述 η 次操作，即令

$$\begin{aligned} z_i' &= z_i & \forall v_i \in S \\ z_i' &= z_i + \eta & \forall v_i \in \bar{S} \end{aligned}$$

结论：按以上公式得到的 $\vec{z}$ 不仅能够保持互补松弛条件不变，且能得到 $\sigma_{\hat{i}\hat{j}}(\vec{z}) = 0$ 的可增广边 $(v_{\hat{i}}, v_{\hat{j}})$

保持互补松弛条件的增广方法总结

1）令 $S=\{v_s\}$，用 $\bar{S}$ 表示其补集

2）如果割集 $\{S,\bar{S}\}$ 中没有可增广边，停止（原问题没有可行解），否则用 $\hat{E}$ 表示其所有可增广边的集合

3）由下式决定 η 和 $\left(v_{\hat{i}},v_{\hat{j}}\right)$

$$\eta=\left|\sigma_{\hat{i}\hat{j}}\left(\vec{z}\right)\right|=\min\left\{\left|\sigma_{ij}\left(\vec{z}\right)\right|\ \text{s.t.}\ \left(v_i,v_j\right)\in\hat{E}\right\}$$

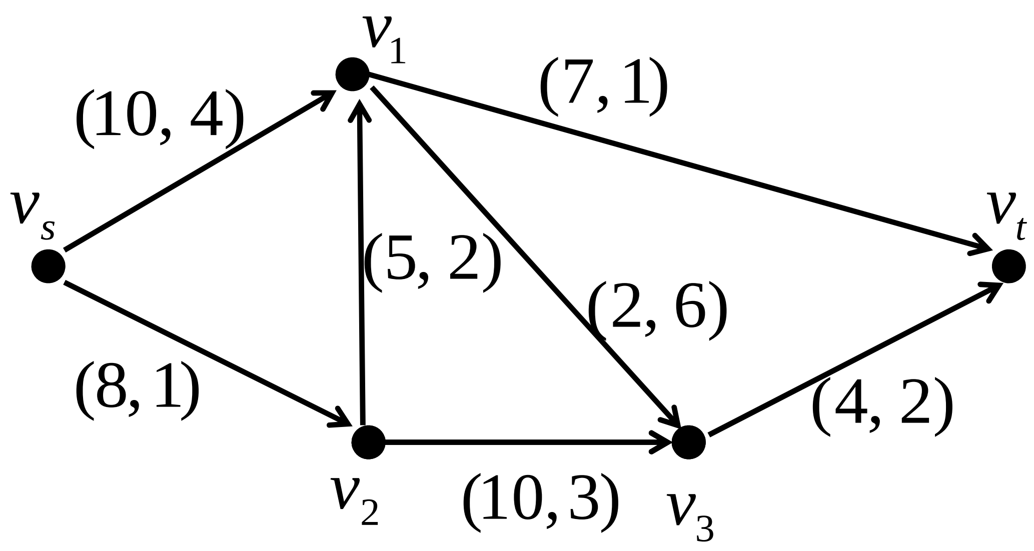
4）对所有 $v_i\in\bar{S}$ 用 $z_i+\eta$ 替换

5）令 $v=\bar{S}\cap\left\{v_{\hat{i}},v_{\hat{j}}\right\}$，用 $S\cup\{v\}$ 和 $\bar{S}\setminus\{v\}$ 分别替换 S 和 $\bar{S}$

Z_i

6）如果 $\bar{S}$ 是空集（已产生可用边组成的可增广链），停止，否则回到 2）继续迭代

例、求解右下图所示 $w=11$ 的最小费用流问题

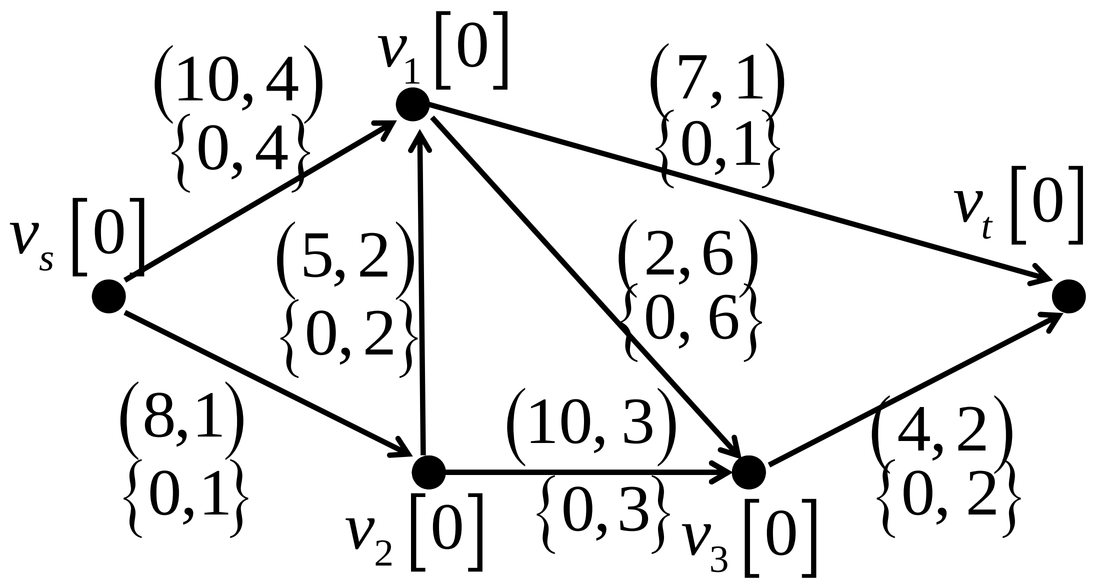


初值:

$z_i = 0, \forall v_i \in V$

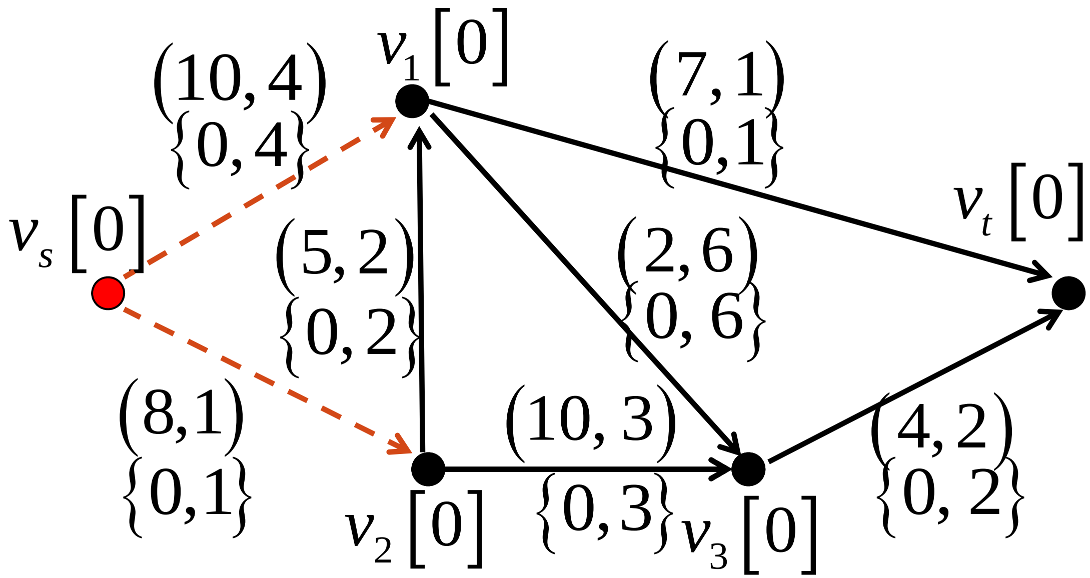
$\sigma_{ij}\left(\vec{z}\right) = d_{ij}$

$x_{ij} = 0, \forall (v_i, v_j) \in E$



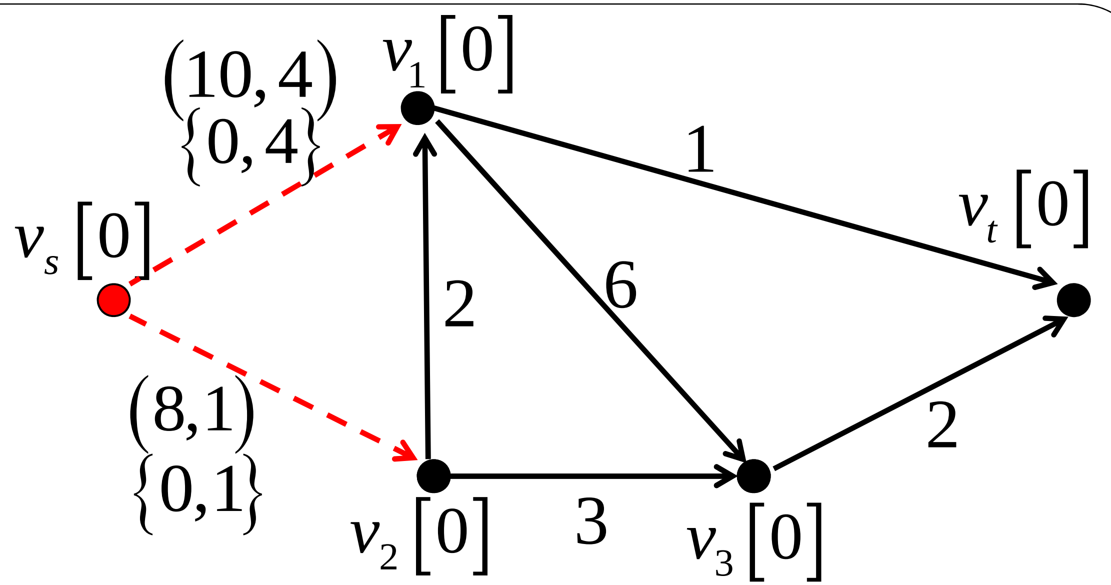
右图的中括号数字为 z_i，大括号的数字依次为 $x_{ij}, \sigma_{ij}\left(\vec{z}\right)$

令 $S=\{v_s\}$ ，用红点表示属于 S 的点，黑点为 $\bar{S}$ 的点，用红虚线表示割集 $\{S,\bar{S}\}$ 的可增广边，如下图所示

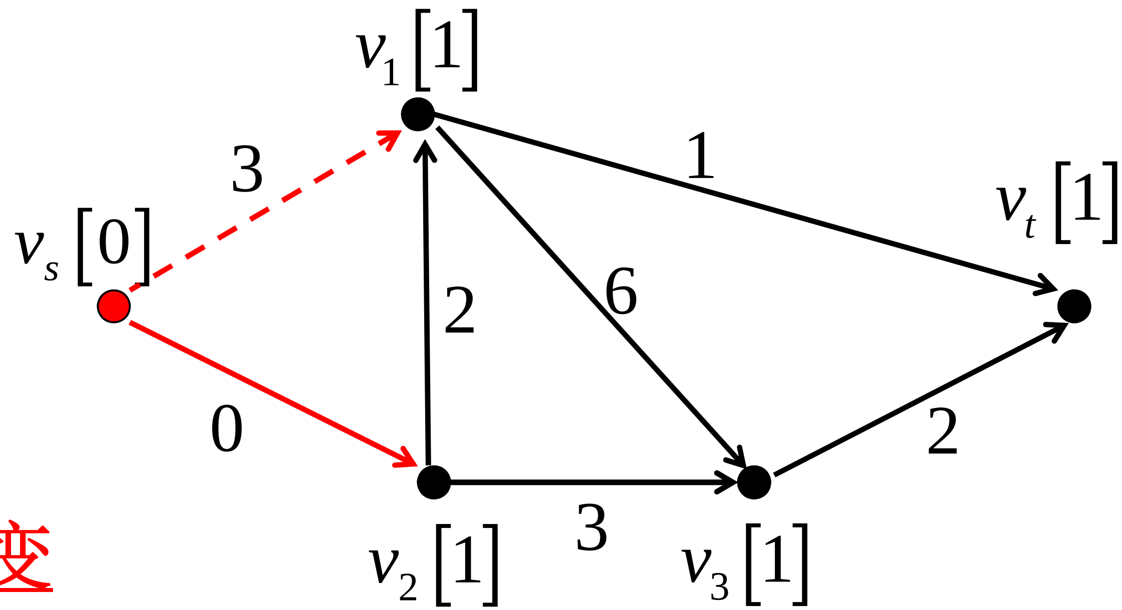


可以看出，此时没有可用边

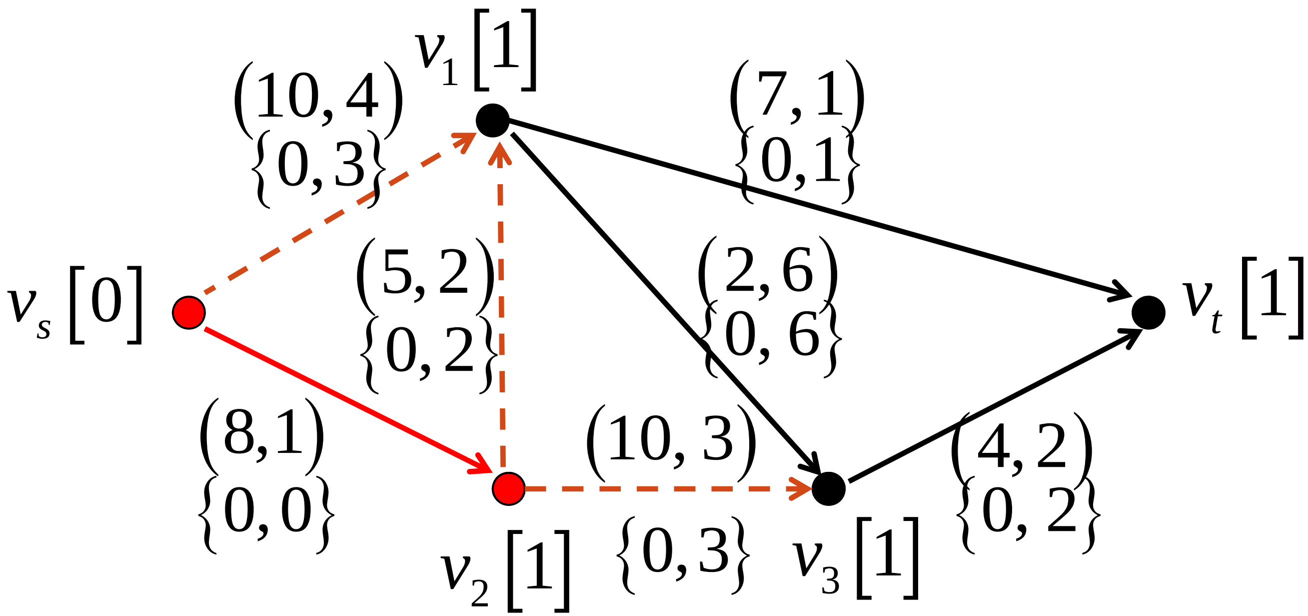
右图仅保留了对偶变量和部分边简化成本（边旁数字）



对所有 $v_j \in \bar{S}$，将 z_j 换成 $z_j + \min\{4,1\}$ 可得到右边的对偶变量和简化成本，出现可用边（用红实线表示），注意<u>非割集边简化成本不变</u>

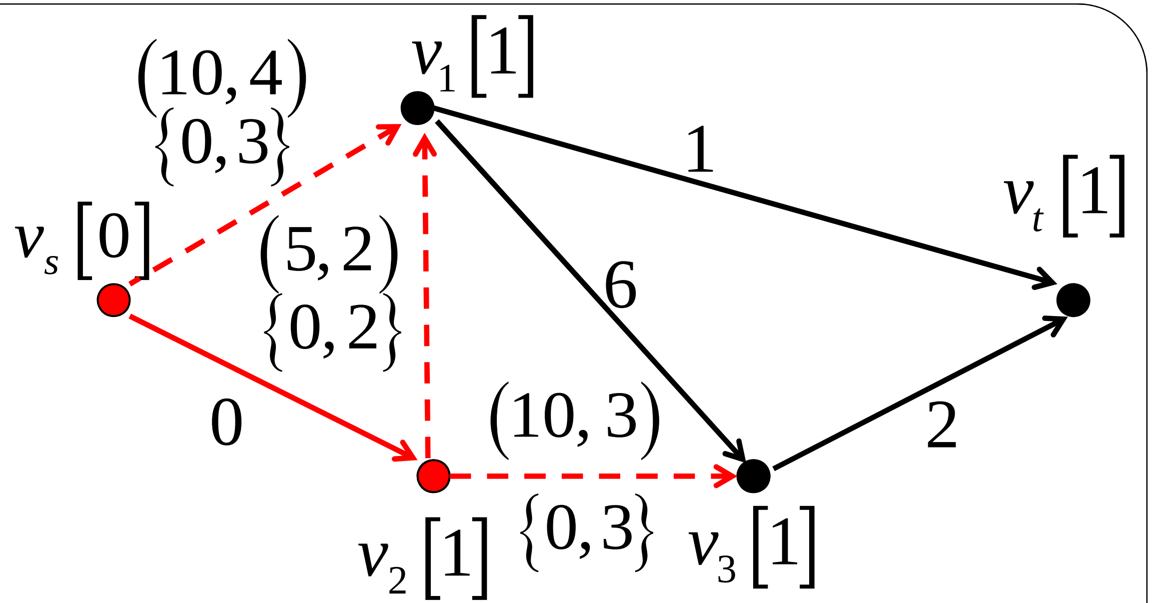


用替换后的 S 、$\vec{z}$ 和 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 得到新图如下

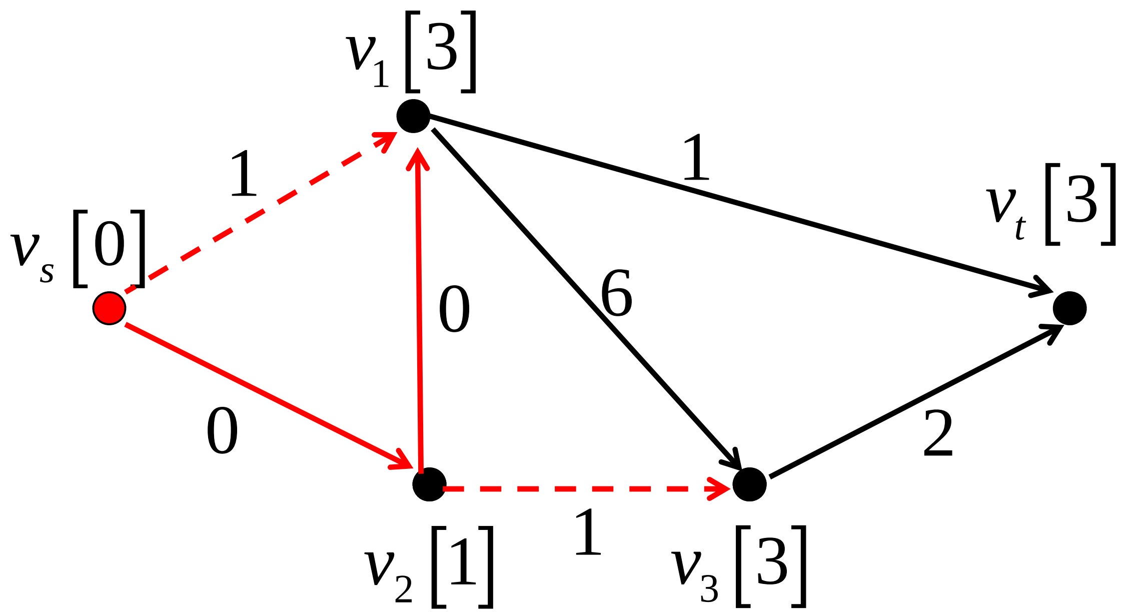


此时仍然有可增广边，但没有可用边

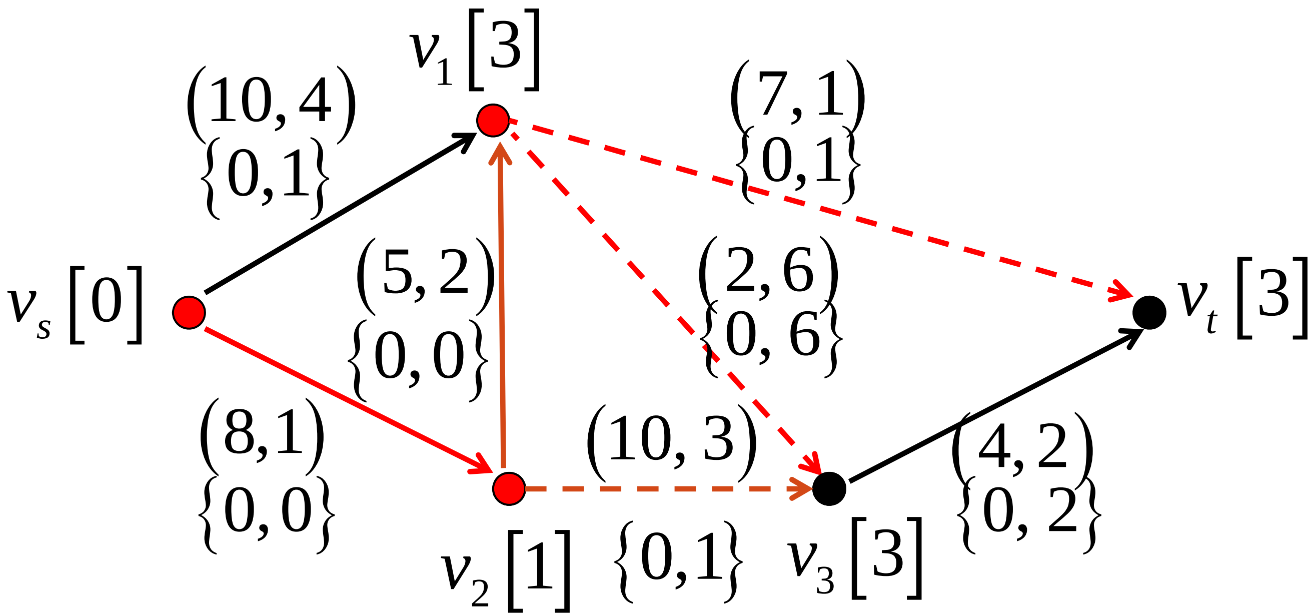
右图为新对偶变量和部分边简化成本



对所有 $v_j \in \bar{S}$，将 z_j 换成 $z_j + \min\{3,2,3\}$ 可得到右边的对偶变量和简化成本，出现新的可用边

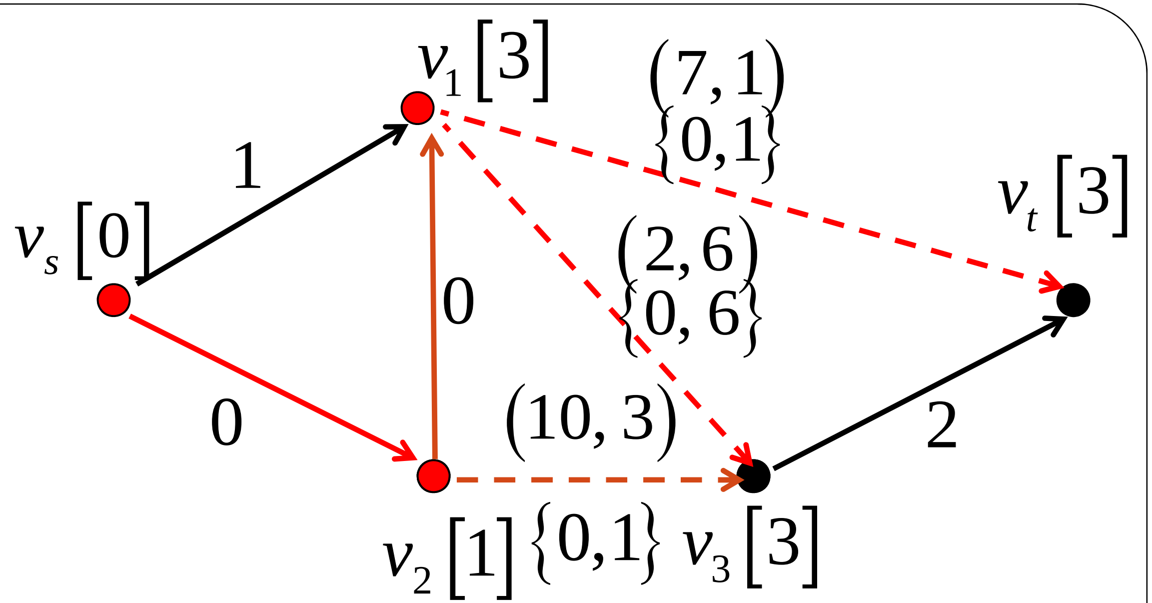


再用替换后的 S 、$\vec{z}$ 和 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 得到新图如下

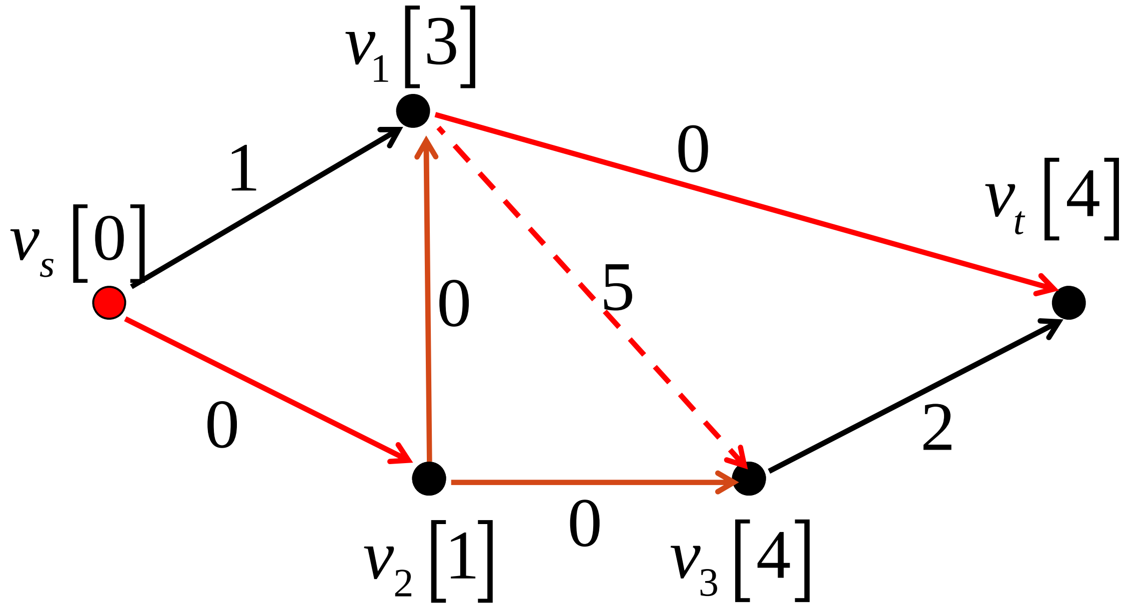


此时仍然有可增广边，但没有可用边

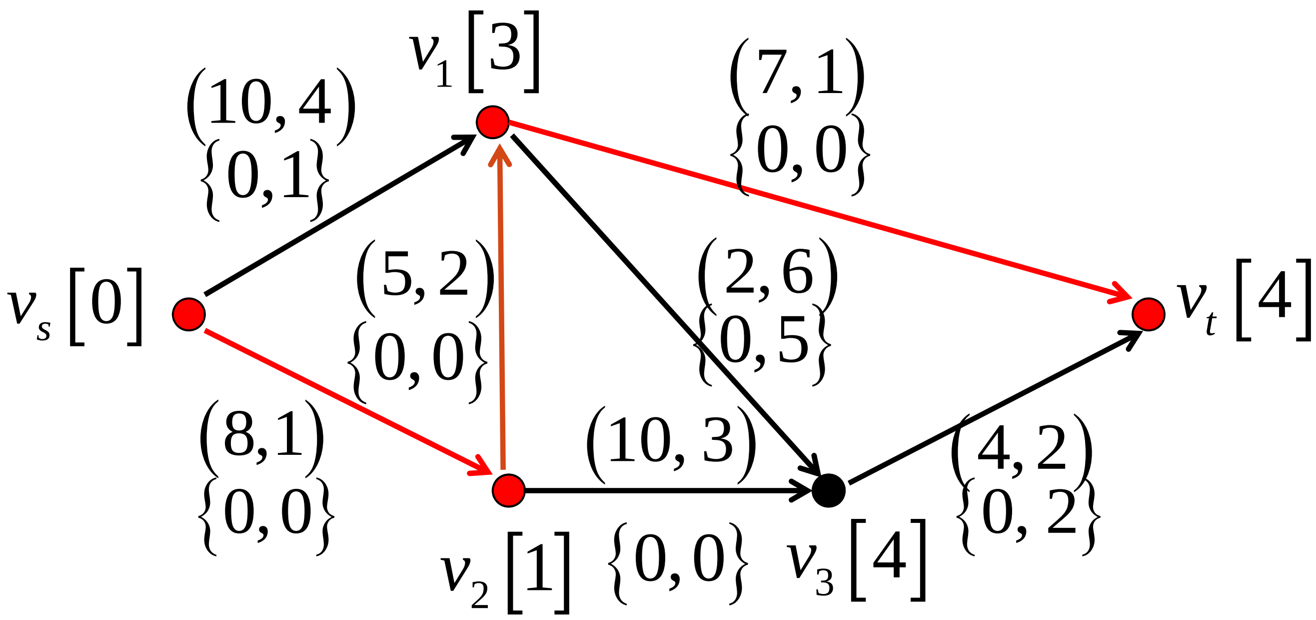
右图为新对偶变量和部分边简化成本



对所有 $v_j \in \bar{S}$，将 z_j 换成 $z_j + \min\{1,6,1\}$ 可得到右边的对偶变量和简化成本，出现新的可用边

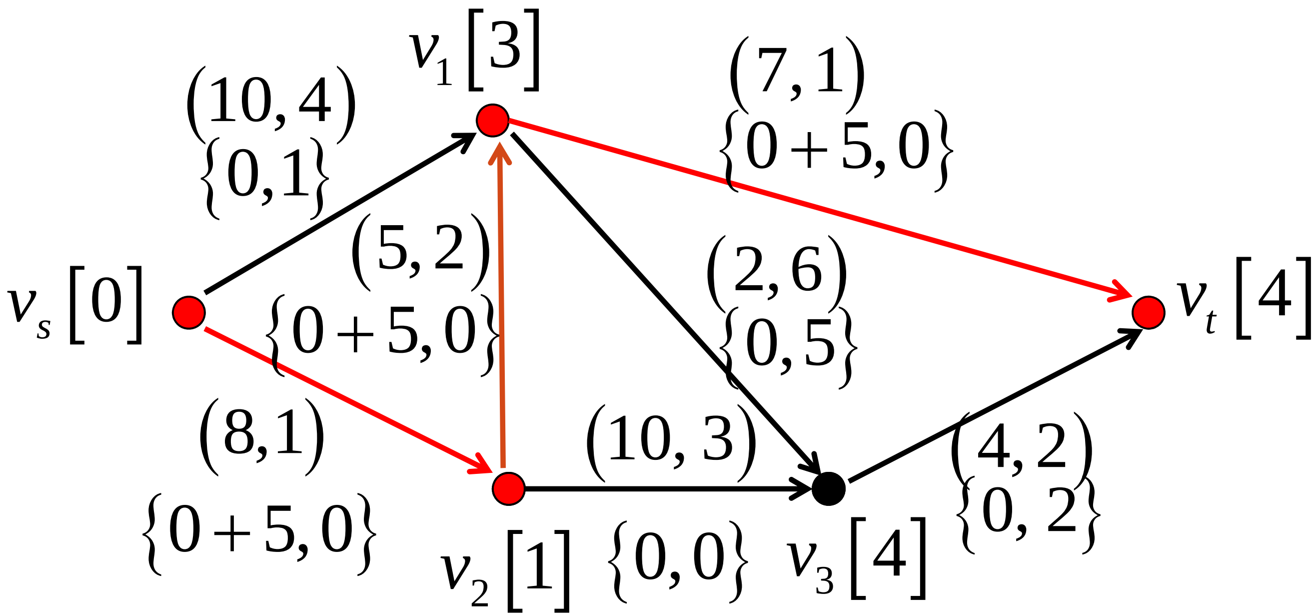


再用替换后的 S 、$\vec{z}$ 和 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 得到新图如下



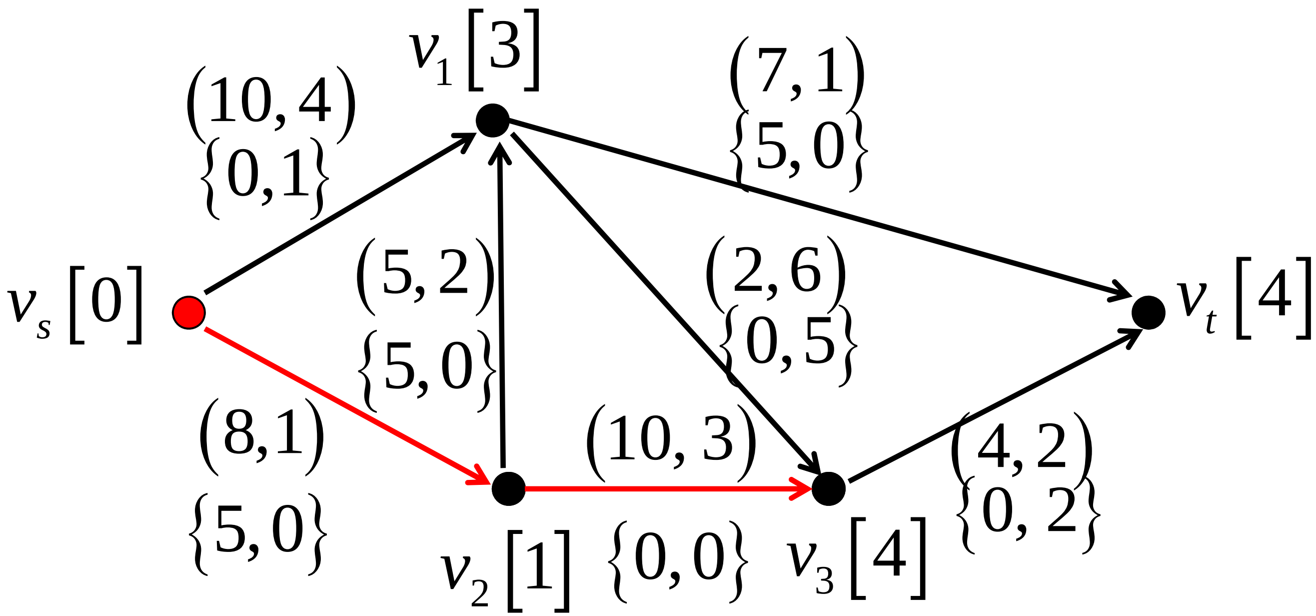
此时已产生从 v_s 到 v_t 的可用边组成的可增广链

沿简化成本等于零的可增广链增加流量，得到下图，其中可增流量为$\min\{11,8,5,7\}=5$，其中11来自总流量约束



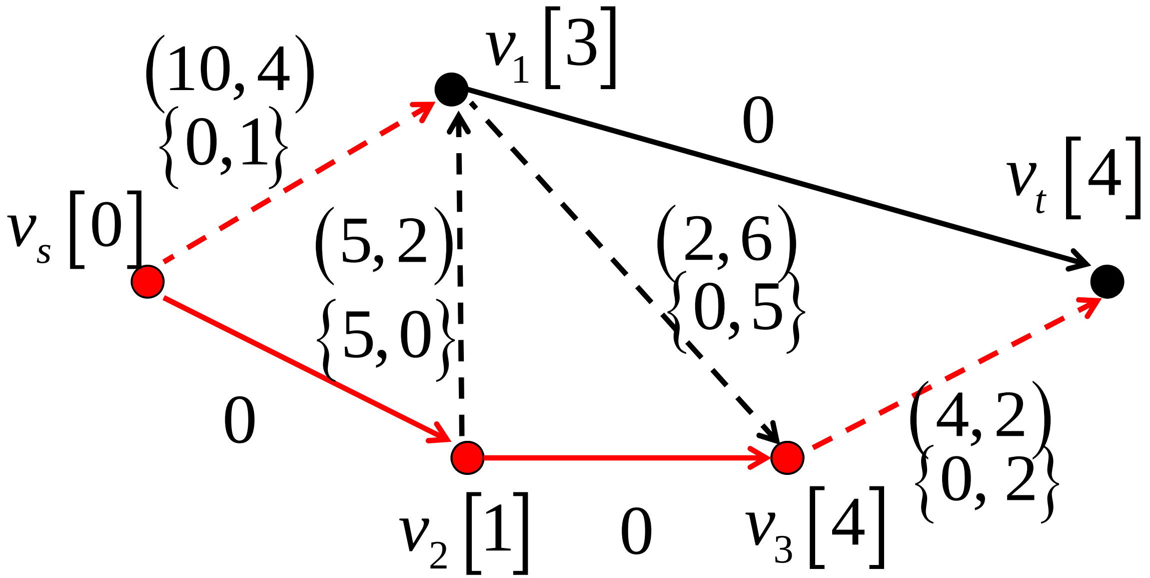
可验证，上述流量和对偶变量满足互补松弛条件

重新从 $S=\{v_s\}$ 和当前 $\vec{z}$ 与 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 开始迭代，得下图

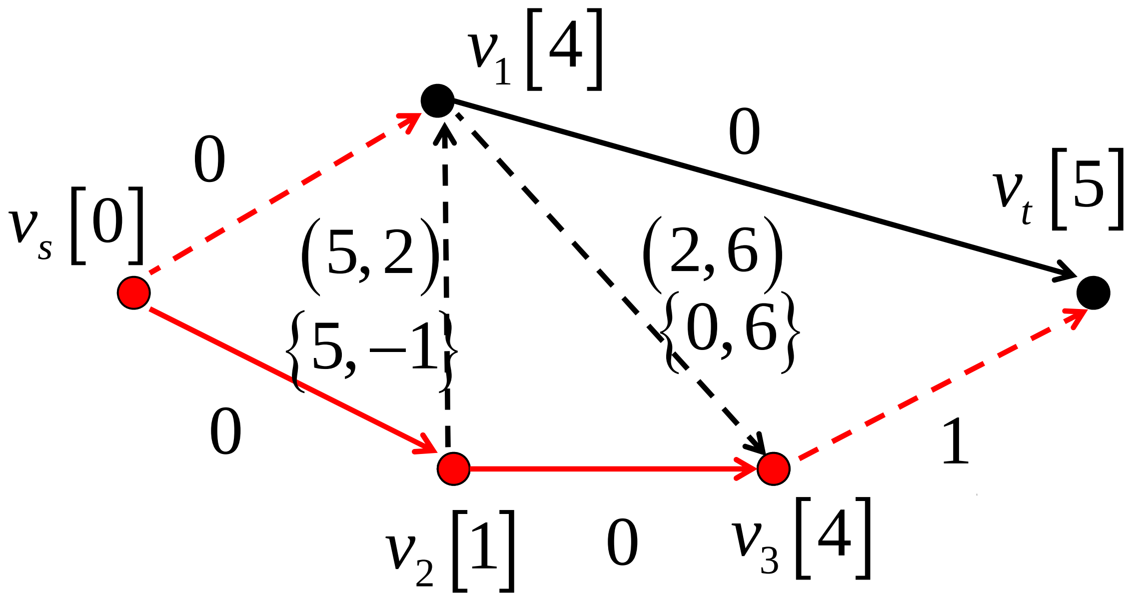


利用可用边可得 $S=\{v_s,v_2,v_3\}$

右图红虚线为可增广边，黑虚线不是

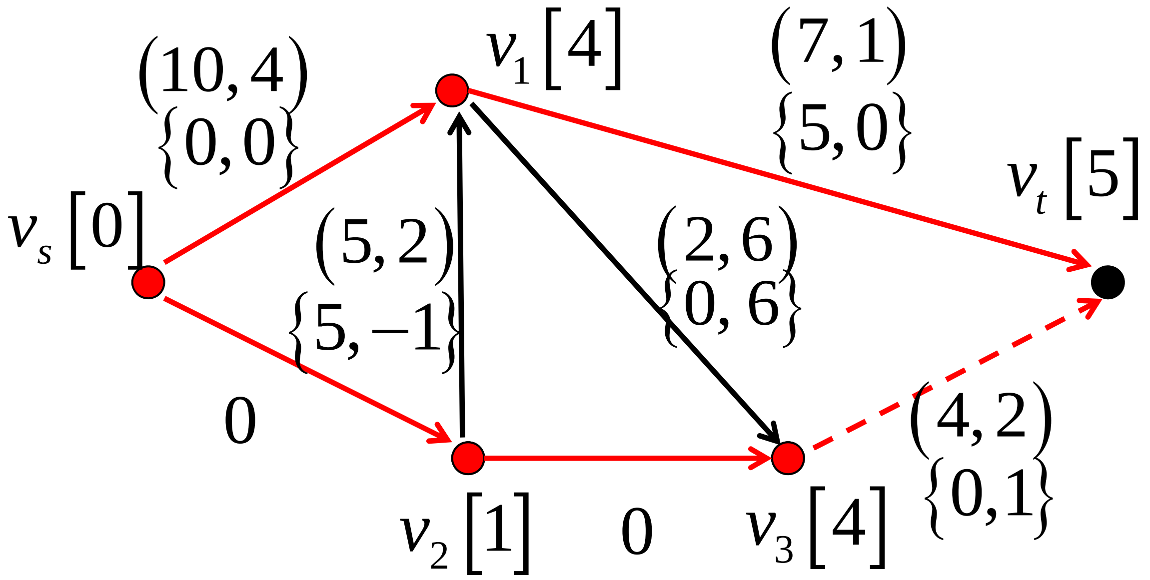


对所有 $v_j \in \bar{S}$，将 z_j 换成 $z_j + \min\{1,2\}$ 可得到右边的对偶变量和简化成本



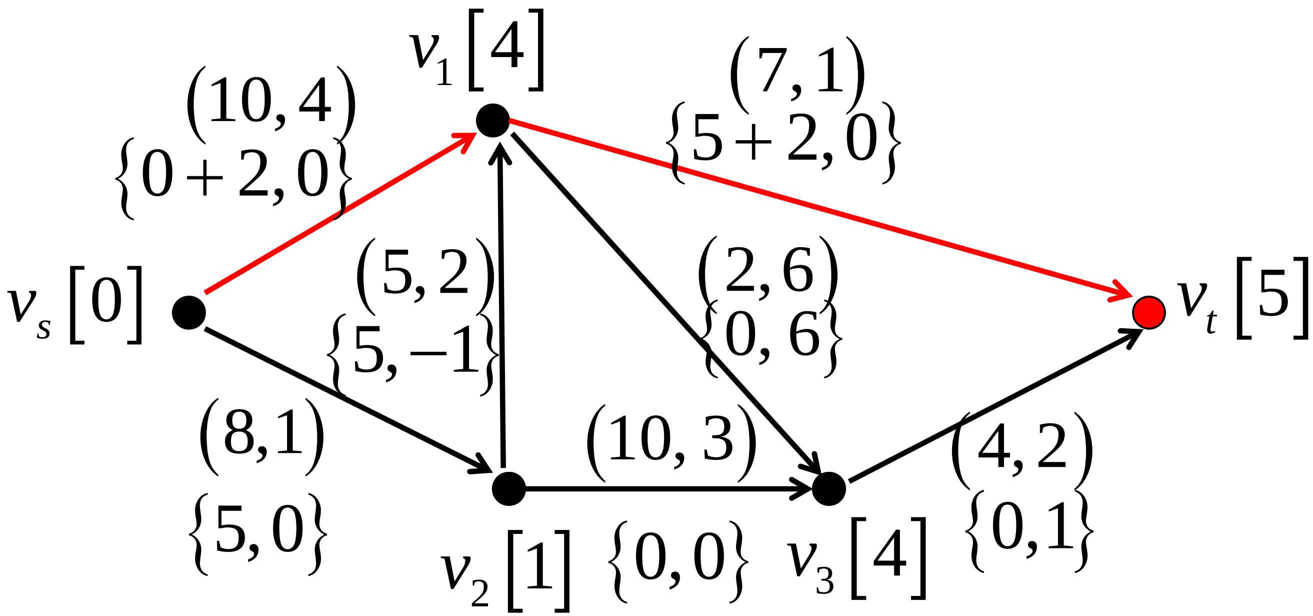
注意：所有虚线上互补松弛条件保持成立！

再用替换后的 S 、$\vec{z}$ 和 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 得到新图如下



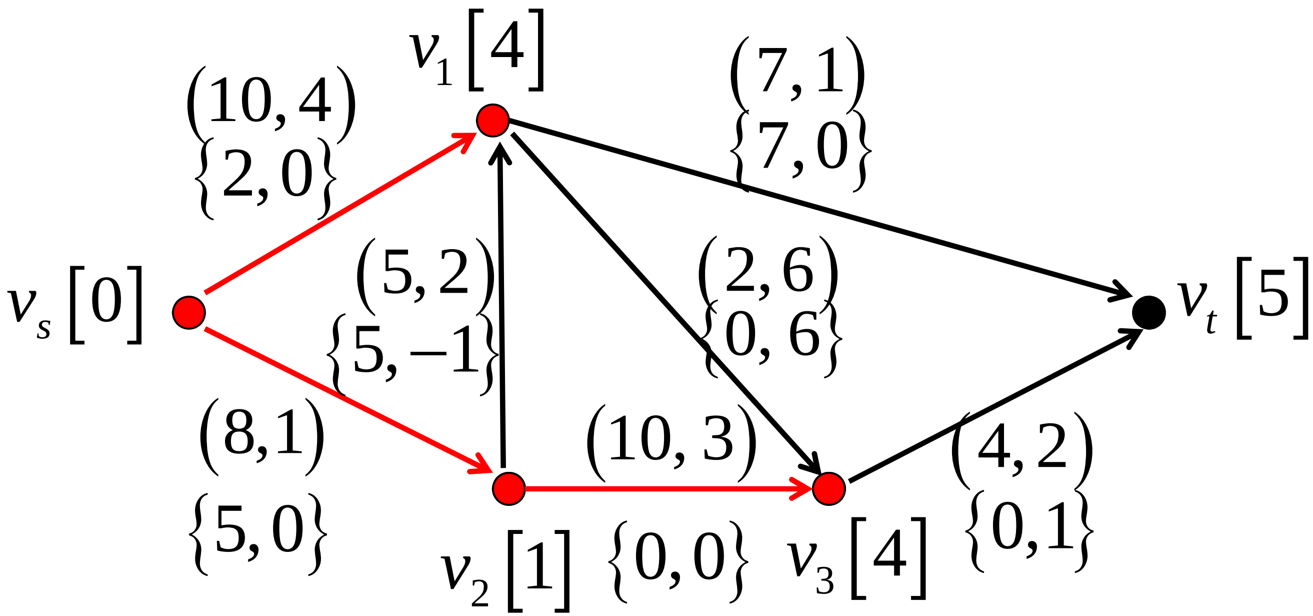
此时已产生一条从 v_s 到 v_t 的简化成本等于零的可增广链

沿简化成本等于零的可增广链增加流量，得到下图，其中可增流量为 $\min\{11-5, 10, 7-5\} = 2$



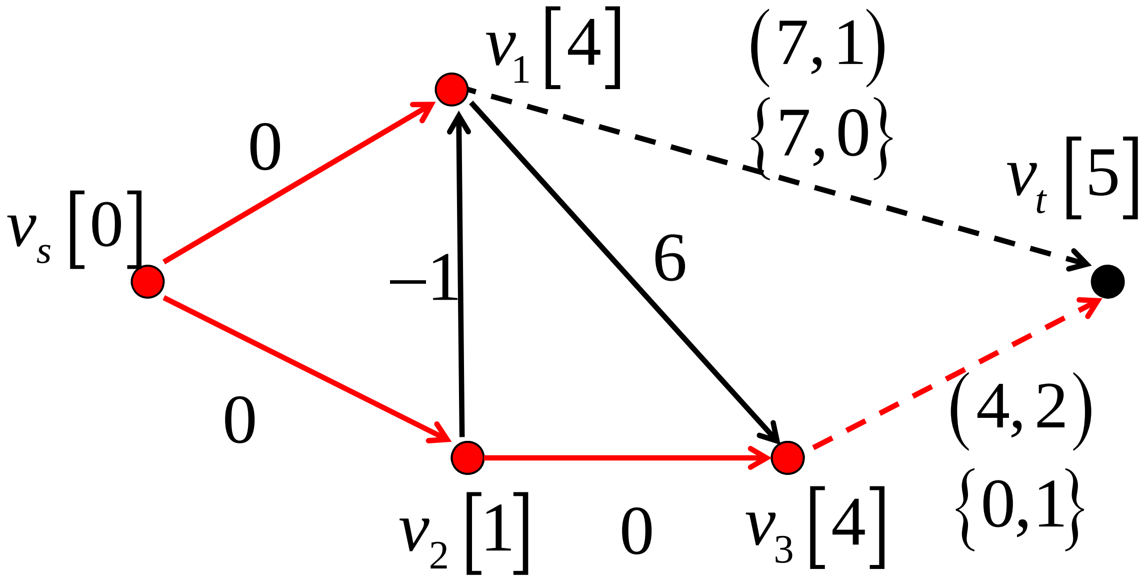
可验证，上述流量和对偶变量满足互补松弛条件

重新从 $S=\{v_s\}$ 和当前 $\vec{z}$ 与 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 开始迭代，得下图

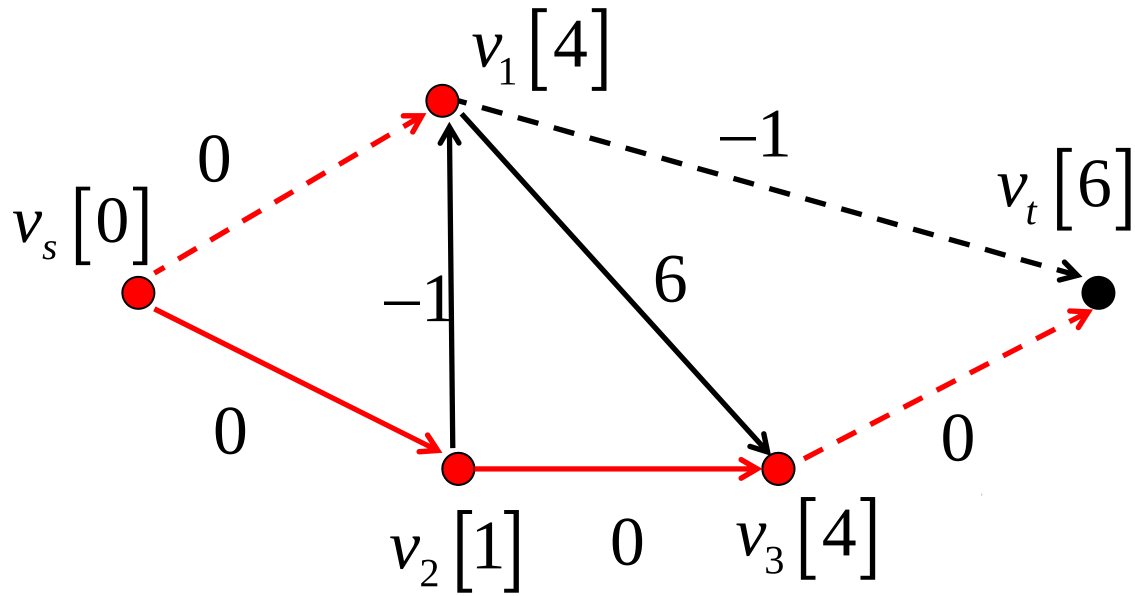


利用可用边可得 $S=\{v_s,v_1,v_2,v_3\}$

右图红虚线为可增广边，黑虚线不是

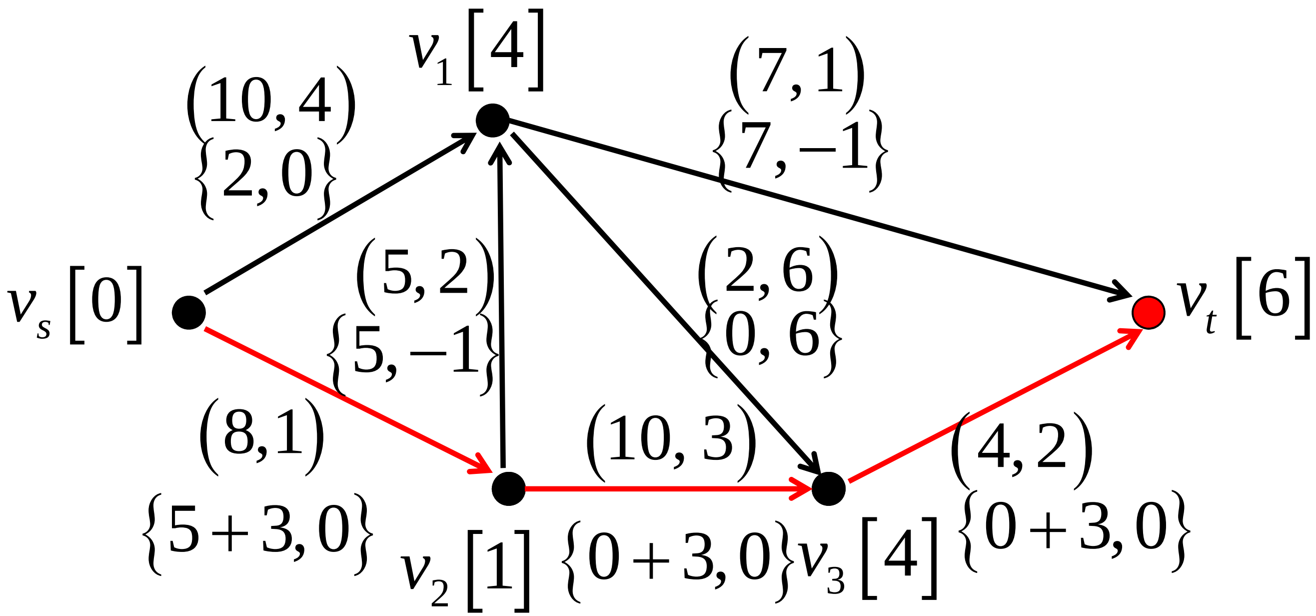


对所有 $v_j \in \bar{S}$，将 z_j 换成 $z_j + \min\{1\}$ 可得到右边的对偶变量和简化成本



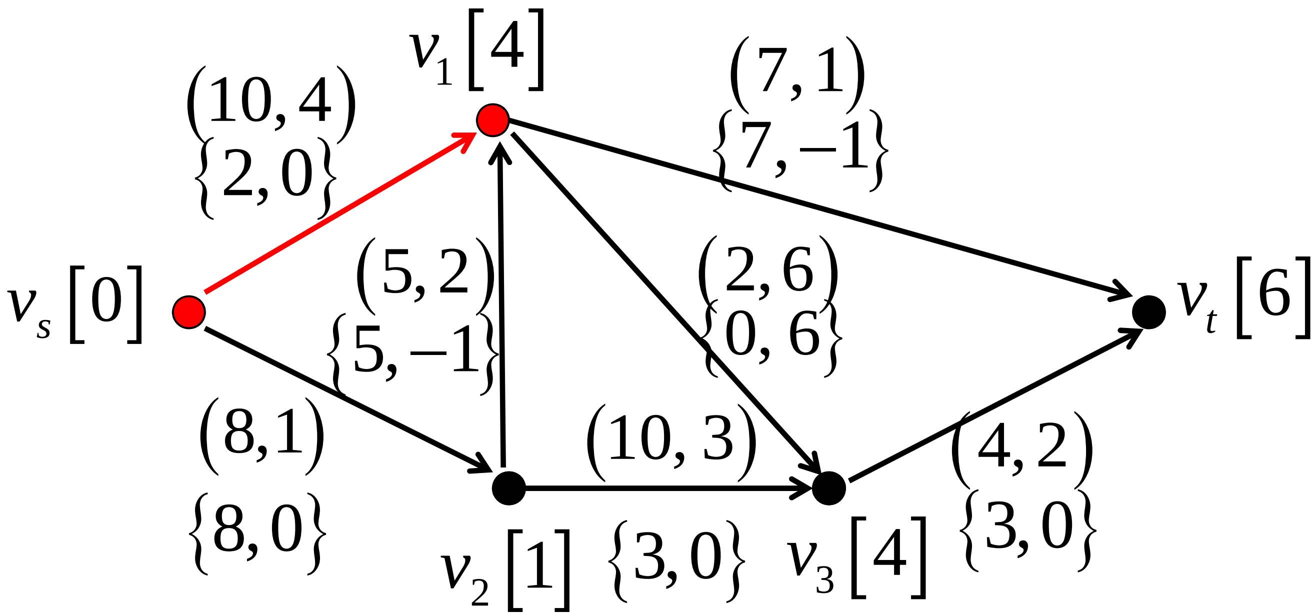
此时已产生一条从v_s到v_t的简化成本等于零的可增广链

沿简化成本等于零的可增广链增加流量，得到下图，其中可增流量为 $\min\{11-7, 8-5, 10, 4\} = 3$



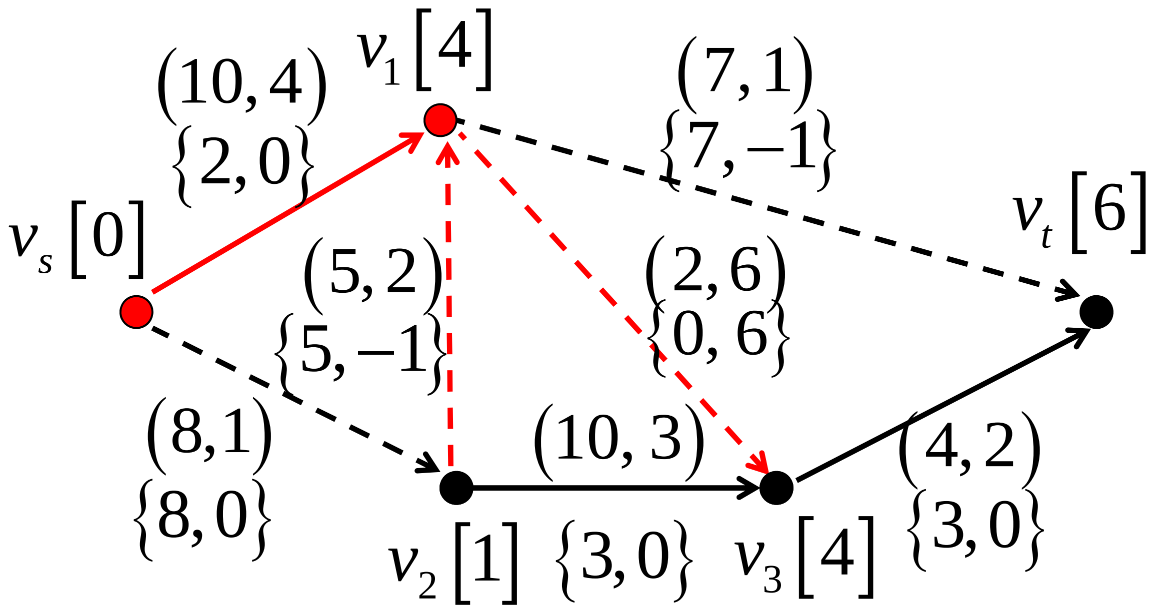
可验证，上述流量和对偶变量满足互补松弛条件

重新从 $S=\{v_s\}$ 和当前 $\vec{z}$ 与 $\sigma_{ij}(\vec{z})$ 开始迭代，得下图

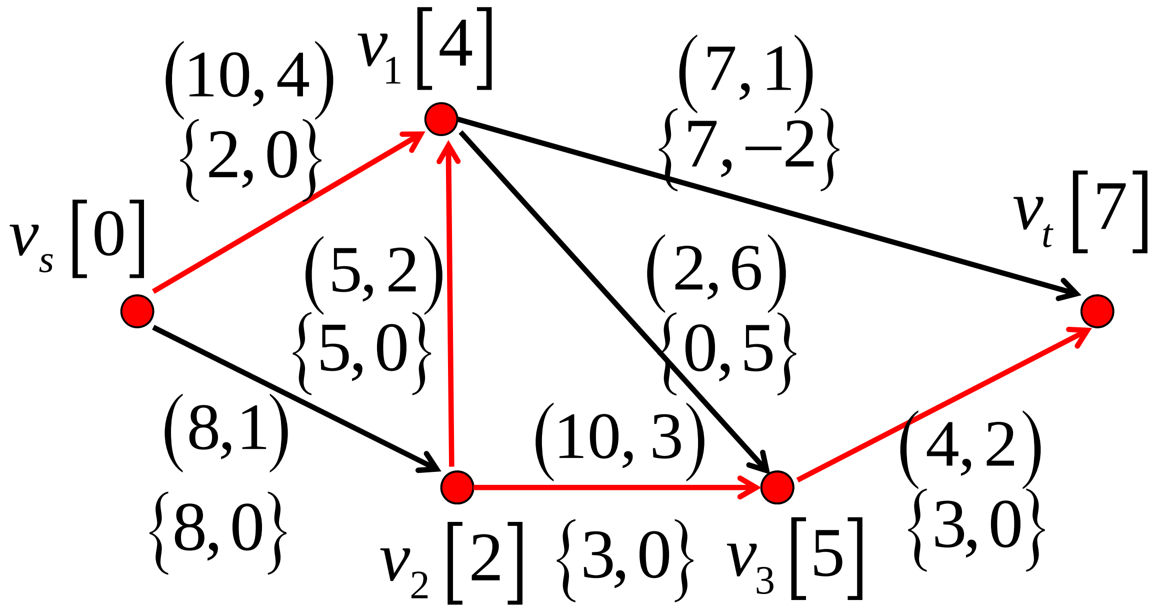


利用可用边可得 $S=\{v_s,v_1\}$

右图红虚线为可增广边，黑虚线不是

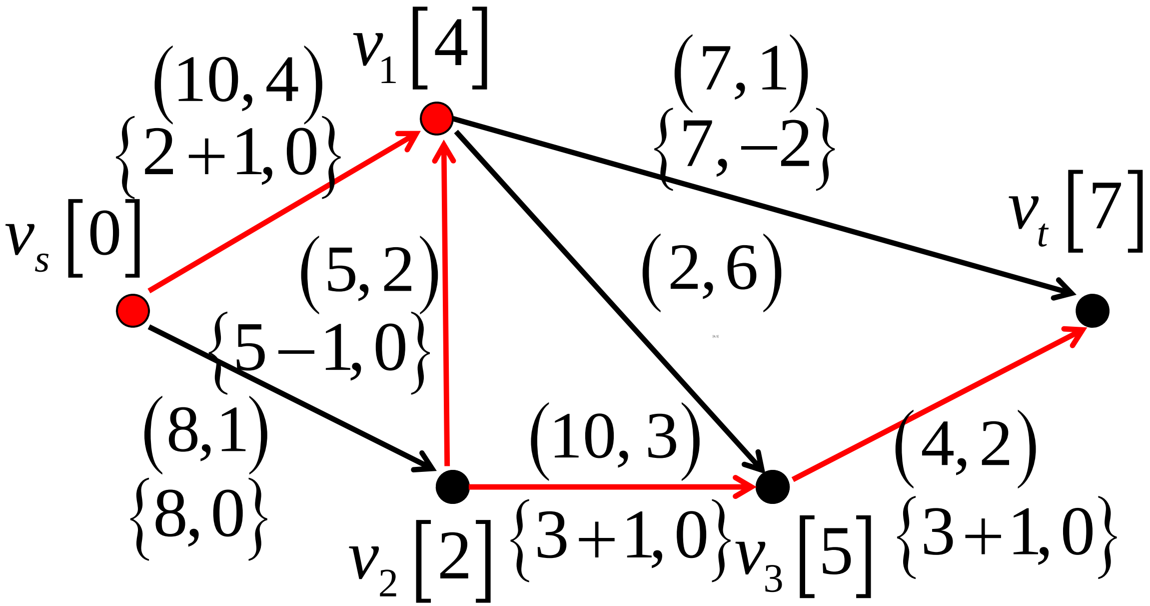


对所有 $v_j \in \bar{S}$，将 z_j 换成 $z_j + \min\{|-1|, 6\}$ 可得到右边的对偶变量和简化成本



此时已得到可增广链

沿简化成本等于零的可增广链增加流量，得到下图，其中可增流量为 $\min\{11-10,10-2,5,10-3,4-3\}$

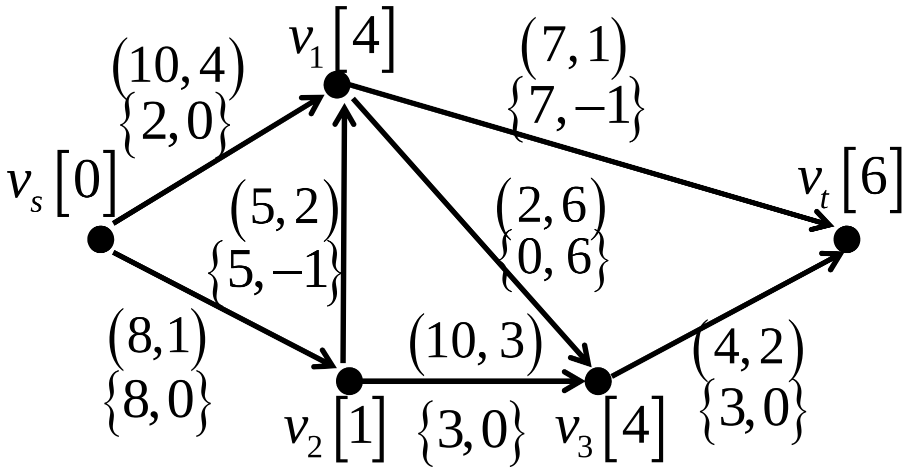


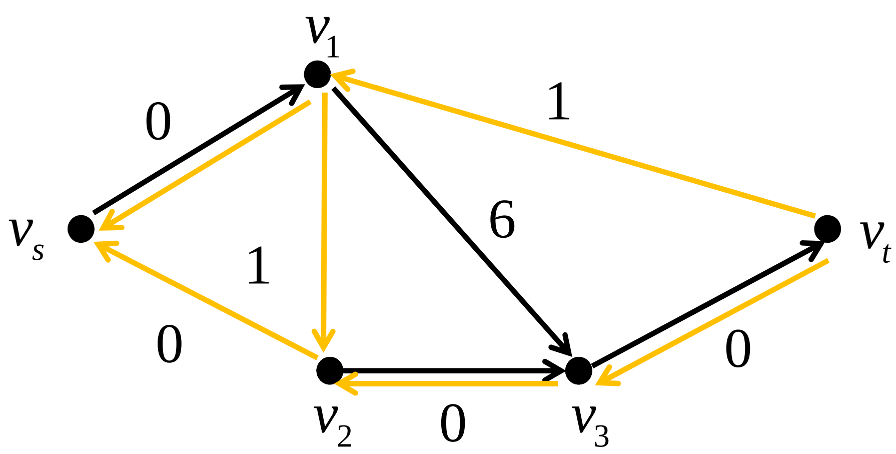
可验证，上述流量和对偶变量满足互补松弛条件

实际流量等于**11**，满足所有流量约束，已得到最优解

最小费用最大流问题的最短路算法

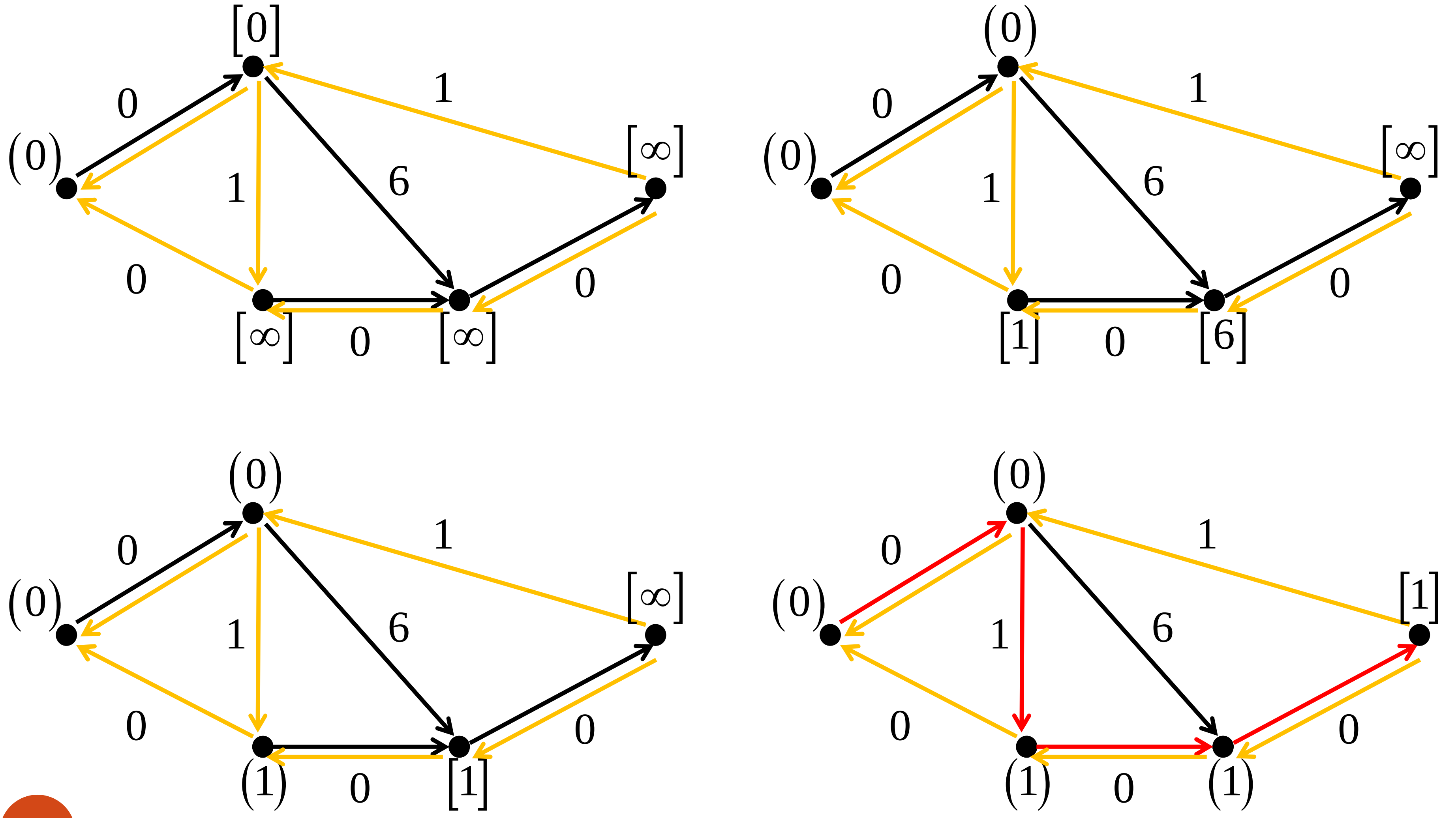
对前面可用增广链确定方法的新认识





上面右边是开始确定第三条增广链时的图，左边是由其导出的<u>长度网络</u>，导出规则如下：**1**）保留所有可增边（图中的黑色边）；**2**）把所有可减边反向（图中的橙色边，可增可减边则增加一条反向边）；**3**）各边长度取简约成本的绝对值

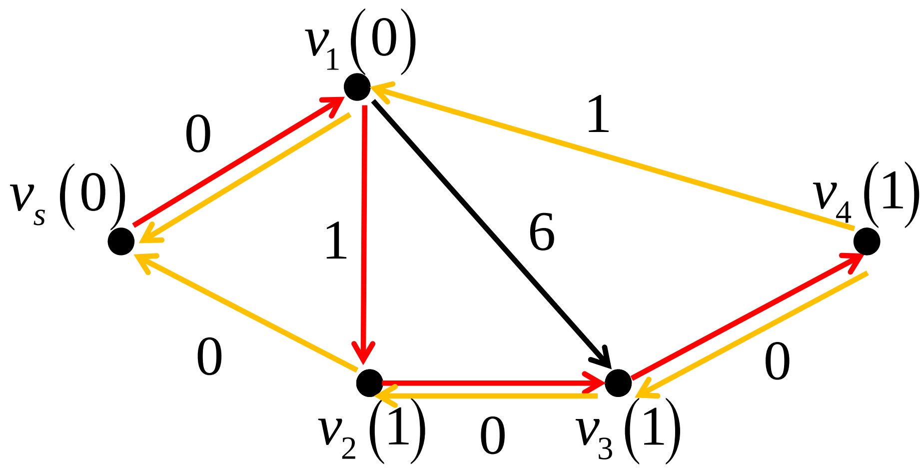
用**Dijkstra**算法求前面的长度网络（下面第一图）到各点的最短路，得到最后的最短路径图（用红色表示）

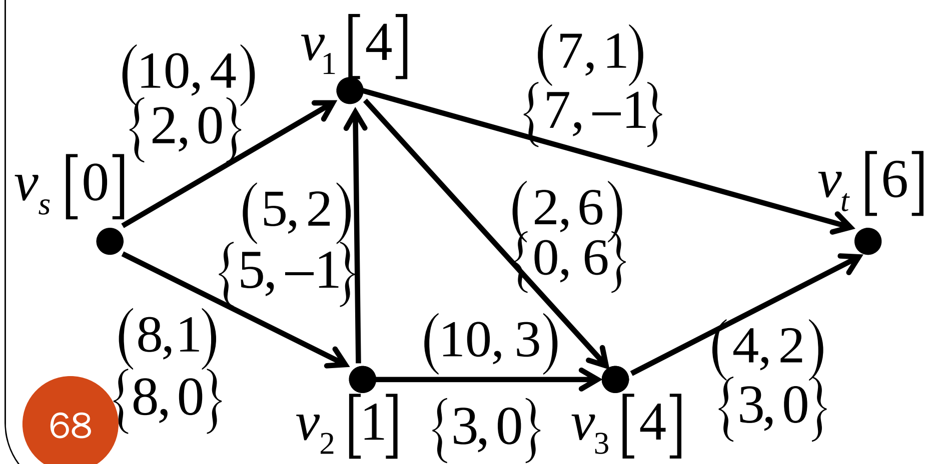


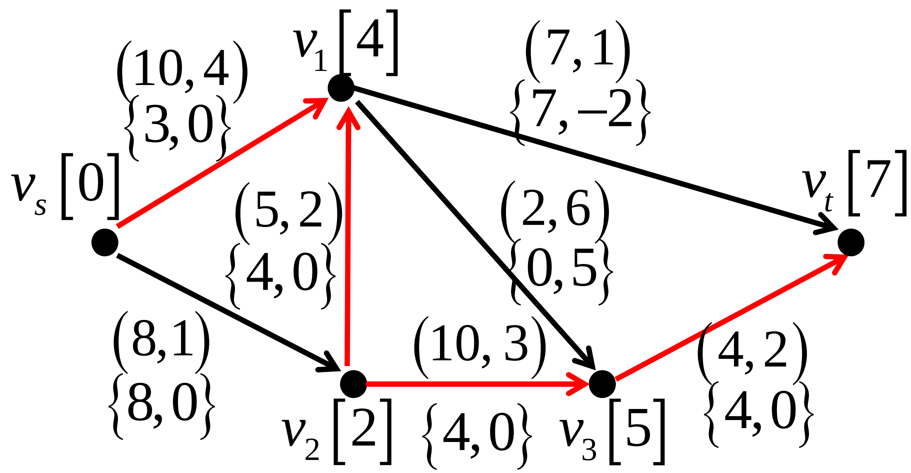
下面左右图分别是确定第三条增广链的开始和结束图，和右上求最短路的结果图对比，可以看出：1）最短路就是所求可增广链；2）对偶变量和最短路径（用 ρ_i 表示）满足以下关系

从前面求最短路的过程可知<u>该结论具有一般性</u>

$$z_i' = z_i + \min\{\rho_i, \rho_t\}, \forall v_i \in V$$







和确定可用增广链方法等价的最小费用流求解算法：

1）令 $x_{ij}=0, \forall(v_i,v_j)\in E$，$z_i=0, \forall v_i\in V$，$\hat{w}=0$

2）如果 $\hat{w}=w$，停止

3）利用当前流量和简化成本构造长度网络

4）求出从 v_s 到每个 v_i 的最短路程 ρ_i，如果到某个 v_i 没有通路，令 $\rho_i=\infty$

5）如果 $\rho_t=\infty$，停止（没有可增广链）

6）利用从 v_s 到 v_t 的最短路和所有的 ρ_i 修改原变量、对偶变量（$z_i'=z_i+\min\{\rho_i,\rho_t\}$）和总流量，再用新数值替换原数值，然后回到 2）

定理：在前述算法中，如果每步迭代开始时的对偶变量Z和流量X一起满足互补松弛条件，那么经过一步迭代后的对偶变量Z'和流量X'仍然一起满足互补松弛条件

推论：只要最小费用流问题有最优解，那么前述算法一定可以经过有限次迭代求得最优解

推论：容量和总流量均为整数的最小费用流问题存在整数最优解

直接证明定理

首先说明，以下两组条件等价

$$\begin{cases} x_{ij} = 0 & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z}) > 0 \\ x_{ij} = c_{ij} & \forall\ \sigma_{ij}(\vec{z}) < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sigma_{ij}(\vec{z}) \le 0 & \forall\ x_{ij} > 0 \\ \sigma_{ij}(\vec{z}) \ge 0 & \forall\ x_{ij} < c_{ij} \end{cases}$$

理由：当左边成立时，若右边上面不成立，则会产生 $x_{ij} > 0$ 和 $x_{ij} = 0$ 需要同时成立的矛盾，若右边下面不成立，则会产生 $x_{ij} < c_{ij}$ 和 $x_{ij} = c_{ij}$ 需要同时成立的矛盾。

同理可说明，右边成立时左边必须成立。

下面先证明 $\sigma_{ij}(\vec{z}') \le 0,\ \forall\, x'_{ij} > 0$。分两种情形讨论：

1） $x_{ij} = 0$

$$\Rightarrow \quad x'_{ij} > x_{ij} \quad \Rightarrow \quad (v_i, v_j) \in \mu^+ \text{（可增广链的前向边）}$$

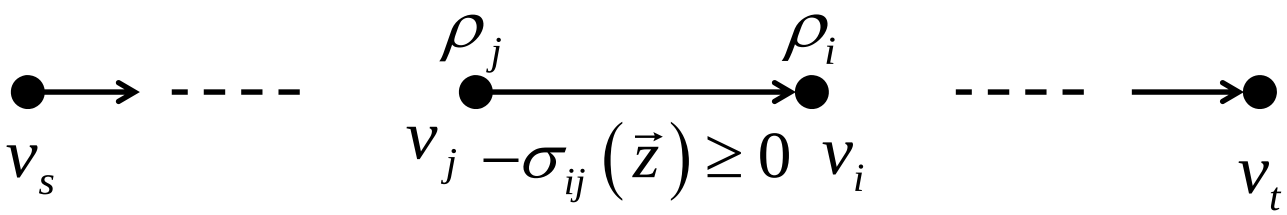
$$\Rightarrow \quad v_s \to \cdots \to \overset{\rho_i}{v_i} \xrightarrow{\sigma_{ij}(\vec{z}) \ge 0} \overset{\rho_j}{v_j} \to \cdots \to v_t$$

$$\Rightarrow \quad \rho_i \le \rho_t, \quad \rho_j \le \rho_t, \quad \rho_j = \rho_i + \sigma_{ij}(\vec{z})$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(\vec{z}') &= d_{ij} + z'_i - z'_j \\
&= d_{ij} + z_i + \min\{\rho_i, \rho_t\} - z_j - \min\{\rho_j, \rho_t\} \\
\Rightarrow \quad &= d_{ij} + z_i - z_j + (\rho_i - \rho_j) \\
&= d_{ij} + z_i - z_j - \sigma_{ij}(\vec{z}) = 0
\end{aligned}$$

2） $x_{ij} > 0$

$\Rightarrow$ 存在



（不一定在增广链上）

$$\Rightarrow \quad \rho_i \leq \rho_j - \sigma_{ij}(\vec{z})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \min\{\rho_i, \rho_t\} &\leq \min\{\rho_j - \sigma_{ij}(\vec{z}), \rho_t\} \\ &\leq \min\{\rho_j, \rho_t\} - \sigma_{ij}(\vec{z}) \end{aligned}$$

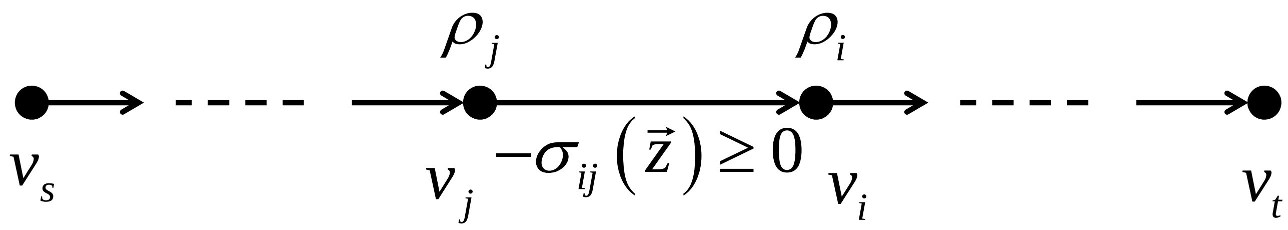
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}(\vec{z}') &= d_{ij} + z_i' - z_j' \\ &= d_{ij} + z_i - z_j + \min\{\rho_i, \rho_t\} - \min\{\rho_j, \rho_t\} \\ &\leq d_{ij} + z_i - z_j - \sigma_{ij}(\vec{z}) = 0 \end{aligned}$$

下面再证明 $\sigma_{ij}\left(\vec{z}'\right)\geq 0,\ \forall\ x'_{ij} < c_{ij}$。同样分两种情形讨论：

1） $x_{ij} = c_{ij}$

$\Rightarrow \quad x'_{ij} < x_{ij} \quad \Rightarrow \quad (v_i, v_j) \in \mu^-$ （可增广链的后向边）

$\Rightarrow$

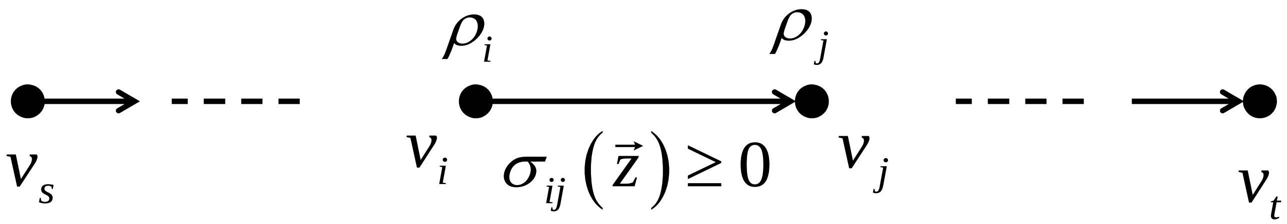


$\Rightarrow \quad \rho_i \leq \rho_t\,, \quad \rho_j \leq \rho_t, \quad \rho_i = \rho_j - \sigma_{ij}\left(\vec{z}\right)$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}\left(\vec{z}'\right) &= d_{ij} + z'_i - z'_j \\
\Rightarrow \quad &= d_{ij} + z_i + \min\left\{\rho_i, \rho_t\right\} - z_j - \min\left\{\rho_j, \rho_t\right\} \\
&= d_{ij} + z_i - z_j + \left(\rho_i - \rho_j\right) \\
&= d_{ij} + z_i - z_j - \sigma_{ij}\left(\vec{z}\right) = 0
\end{aligned}$$

2） $x_{ij} < c_{ij}$

$\Rightarrow$ 存在



（不一定在增广链上）

$$\Rightarrow \quad \rho_j \leq \rho_i + \sigma_{ij}(\vec{z})$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \min\{\rho_j, \rho_t\} &\leq \min\{\rho_i + \sigma_{ij}(\vec{z}), \rho_t\} \\ &\leq \min\{\rho_i, \rho_t\} + \sigma_{ij}(\vec{z}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_{ij}(\vec{z}') &= d_{ij} + z_i' - z_j' \\ &= d_{ij} + z_i - z_j + \min\{\rho_i, \rho_t\} - \min\{\rho_j, \rho_t\} \\ &\geq d_{ij} + z_i - z_j - \sigma_{ij}(\vec{z}) = 0 \end{aligned}$$

证毕

最小费用最大流问题的进一步简化算法

和前面方法等价的简单方法

对长度网络中任意的从 v_s 到 v_t 的可增广链 μ，分别记前向边和后向边为 μ^+ 和 μ^-，其在长度网络的长度为

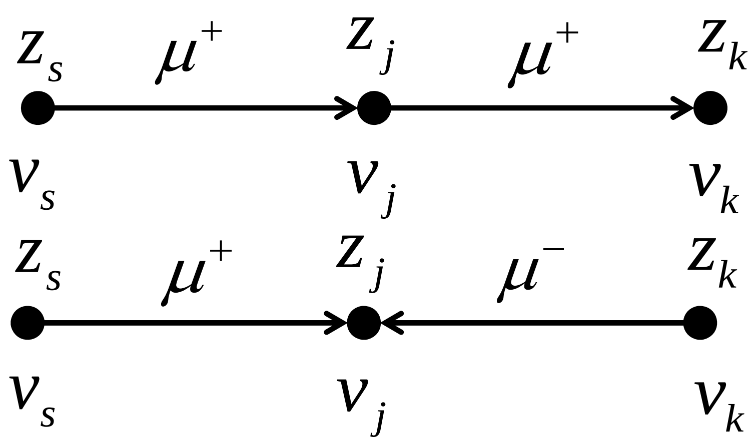
$$
\begin{aligned}
&\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+}\sigma_{ij}(\vec{z}) + \sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-}\left(-\sigma_{ij}(\vec{z})\right)\\
&=\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+}\left(d_{ij}+z_i-z_j\right) - \sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-}\left(d_{ij}+z_i-z_j\right)\\
&=d(\mu)+\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+}\left(z_i-z_j\right)-\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-}\left(z_i-z_j\right)
\end{aligned}
$$

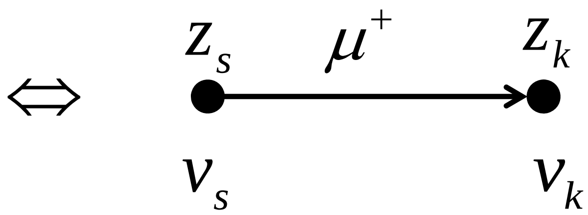
其中 $d(\mu)=\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+}d_{ij}+\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-}\left(-d_{ij}\right)$ 称为增广链 μ 的费用

长度表达式的简化表示

利用

$$(z_s - z_j) + (z_j - z_k) = z_s - z_k$$



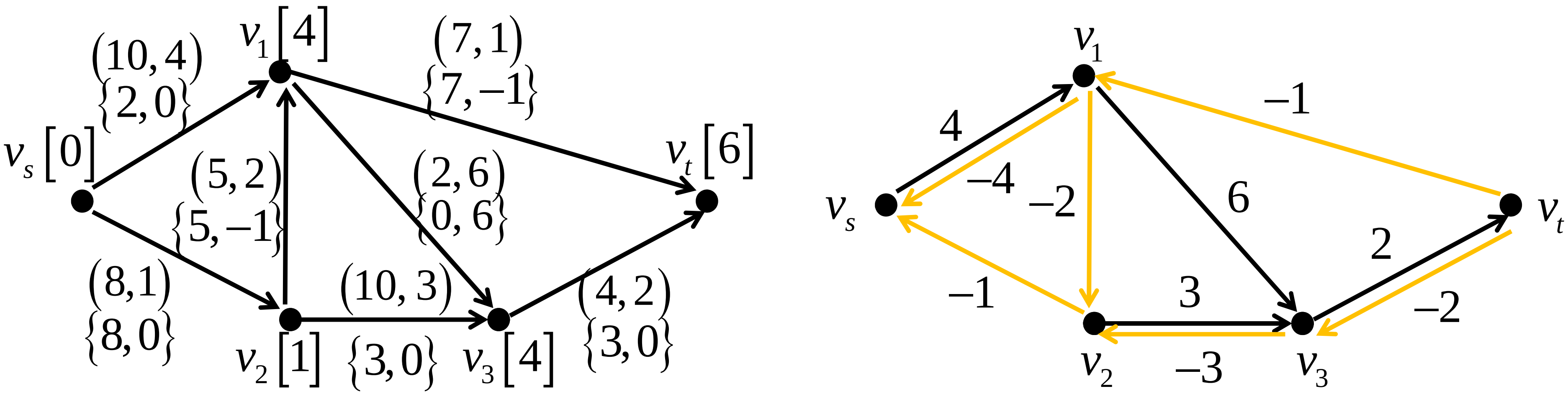


$$(z_s - z_j) - (z_k - z_j) = z_s - z_k$$

可推得 $$\sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+}\left(z_j - z_i\right) - \sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-}\left(z_j - z_i\right) = z_s - z_t$$

因此 $$\min_{\mu} d(\mu) + \sum_{(v_i,v_j)\in\mu^+}\left(z_j - z_i\right) - \sum_{(v_i,v_j)\in\mu^-}\left(z_j - z_i\right) \Leftrightarrow \min_{\mu} d(\mu)$$

结论：在构造长度网络时，用费用作为可增边的长度，用费用的负数作为可减边的长度，由此得到费用网络，如下图所示，再求最短路确定可用的可增广链



注意：**1**）由于不涉及简化成本，所以无需计算对偶变量

2）不能用**Dijkstra**算法求最短路

求解最小费用流的简单算法（不用计算对偶变量）

1）令 $X=\{x_{ij}\},\ x_{ij}=0,\ \forall(v_i,v_j)\in E,\ \hat{w}=0$

2）如果 $\hat{w}=w$，停止，否则求出费用 $d(\mu)$ 最小的可增广链 μ_t（如果没有可增广链，停止）

3）令

$$\delta=\min\left\{w-\hat{w},\ \min_{(v_i,v_j)\in\mu_t^+} c_{ij}-x_{ij},\ \min_{(v_i,v_j)\in\mu_t^-} x_{ij}\right\}$$

$$x'_{ij}=x_{ij}+\delta \qquad \forall(v_i,v_j)\in\mu_t^+$$

$$x'_{ij}=x_{ij}-\delta \qquad \forall(v_i,v_j)\in\mu_t^-$$

$$x'_{ij}=x_{ij} \qquad \forall(v_i,v_j)\in E\setminus\left(\mu_t^+\cup\mu_t^-\right)$$

4）用 X' 替换 X，$\hat{w}+\delta$ 替换 $\hat{w}$，回到 2）

该算法每步得到的流量和前面算法相同，故可得最优解