班级：自11 姓名：孙捷萃 编号：2021013444 科目：自动控制 第 1 页

1. 解：$Q_g=\begin{pmatrix}C\\CA\\CA^2\\CA^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ $\quad rank(Q_g)=4$

∴ 该系统状态完全能观

2. 解：A中某特征值λ对应2个约当块，
则系统状态能观必要的是 a, c 线性无关，而这不可能出现。
故无法适当选择 a, b, c 使系统能观

3. 解：$Q_g=\begin{pmatrix}C\\CA\\CA^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\1&0&-1\\1&2&0\\-2&0&0\\-1&-4&-1\end{pmatrix}$ $\quad rank(Q_g)=3$

∴ 该系统状态完全能观

4. 解：(1) 状态空间表达式如下：

$$\Sigma:\begin{cases}\dot{x}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-3&-4&0\\2&1&-2\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}u_1\\ y_2=(0\ 0\ 1)x\end{cases}$$

(2) $Q_K=\begin{pmatrix}0&1&-4\\1&-4&13\\0&1&-4\end{pmatrix}$ $\quad rank(Q_K)=2$ ∴ 该系统状态不完全能控

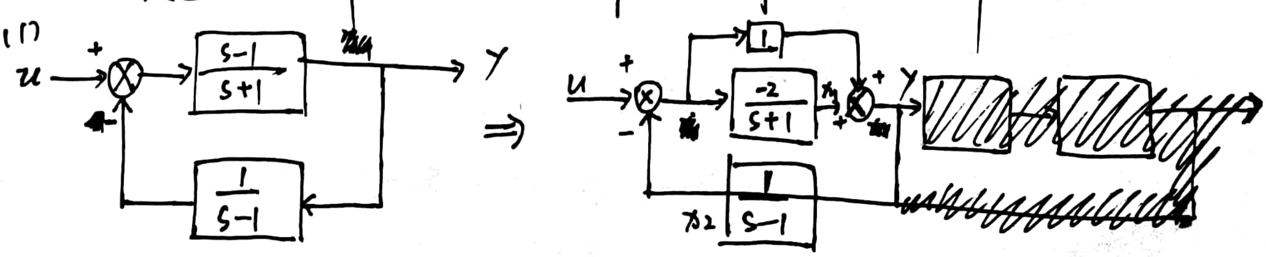
$Q_g=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&-2\\-7&-4&4\end{pmatrix}$ $\quad rank(Q_g)=3$ ∴ 该系统状态完全能观

(3) $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$

$=(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix}s&-1&0\\3&s+4&0\\-2&-1&s+2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{(s+1)(s+3)}$

∴ 传递函数阶数为2，存在零极点相消，验证成功

5. 解：(1)



清华大学 TSINGHUA UNIVERSITY 数学作业纸

班级：自11 姓名：孙捷萃 编号：2021013444 科目：自动控制

$$\therefore \begin{cases} \dot{x}_1 = -2(u-x_2) - x_1 \\ \dot{x}_2 = (u - x_2 + x_1) + x_2 \\ y = u - x_2 + x_1 \end{cases}$$

∴状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \ \ -1)x + u \end{cases}$$

(2) $Q_k = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad rank(Q_k) = 1$ ∴系统不完全能控.

$Q_g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad rank(Q_g) = 1$ ∴系统状态完全能观.

6. 解： $Q_K = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 4 & -4 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \end{pmatrix}$ $\quad rank(Q_K) = 3$ ∴系统状态完全能控

∴系统可以变换为能控标准型

$Q_K^{-1} = $ ∴ $P_1^T = \left(\frac{1}{4} \ \ -\frac{1}{4} \ \ \frac{1}{3}\right)$

$$\therefore T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \qquad \therefore T = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 8 & 12 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \qquad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{pmatrix} \tilde{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

7. 解：$Q_g=\begin{pmatrix}-1&1\\-3&4\end{pmatrix}$　∴ $Q_g^{-1}=\begin{pmatrix}-4&1\\-3&1\end{pmatrix}$　$P_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

∴ $T=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$　∴ $T^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

∴ $\tilde{A}=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}0&-4\\1&5\end{pmatrix}$

$\tilde{B}=T^{-1}B=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\tilde{C}^T=C^TT=\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}$

∴ 能观标准型为 $\begin{cases}\dot{x}=\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}u\\ y=\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}x\end{cases}$

8. 解：(1) $G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=\dfrac{s+3}{s^2+2s-1}$

(2) $Q_K=\begin{pmatrix}0&1&-2\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$　$\mathrm{rank}(Q_K)=2$.　∴系统不完全能控.

∴ $T=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$　∴ $T^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

$\tilde{A}=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}0&1&-4\\1&-2&2\\0&0&-2\end{pmatrix}$　$\tilde{B}=T^{-1}B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$　$\tilde{C}=CT=\begin{pmatrix}1&1&-1\end{pmatrix}$

∴ 能控子系统为：$\Sigma\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}\right)$

(3) $Q_g=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\3&-6&-1\end{pmatrix}$　$\mathrm{rank}(Q_g)=3$　∴系统完全能观.