本章教学内容

基本内容

- 线性定常系统的微分方程描述
- 控制系统的状态空间描述
- 传递函数：Laplace变换和框图变换
- 系统框图转为状态空间表达
- 系统的等价变化与状态空间描述的不变量

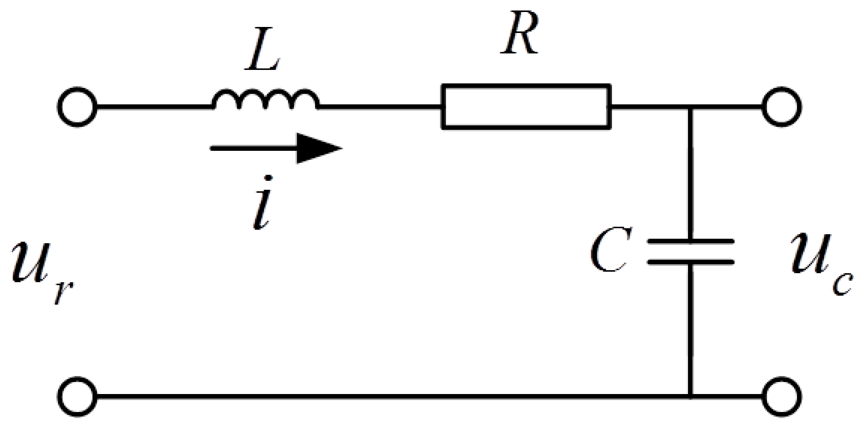
控制系统的微分方程描述

控制系统的微分方程描述

1. RLC电路

根据电路基本原理有:

$$\begin{cases} Ri + L\dfrac{di}{dt} + u_C = u_r \\ i = C\dfrac{du_C}{dt} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_r$$

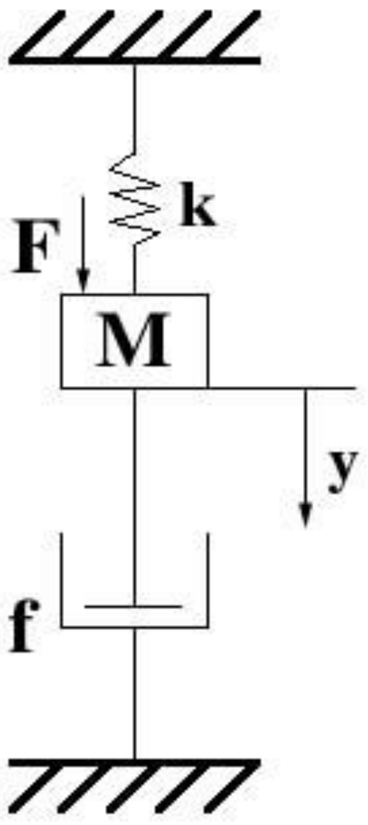
控制系统的微分方程描述

2. 质量 - 弹簧 - 阻尼系统

$$\sum F(i) = Ma$$

$$F - ky - f\frac{dy}{dt} = M\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \quad M\frac{d^2y}{dt^2} + f\frac{dy}{dt} + ky = F$$



控制系统的微分方程描述

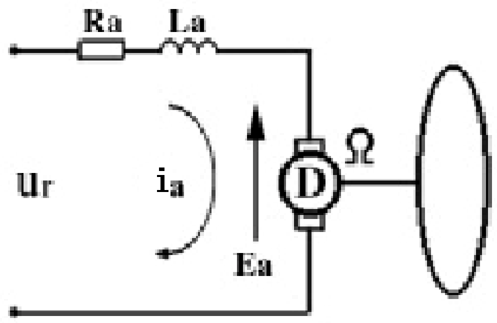
3. 电动机方程

电路方程: $$u_r - E_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a \quad (1)$$

动力学方程: $$M - M_L = J \frac{d\Omega}{dt} \quad (2)$$

$$E_a = k_d \Omega \quad (3)$$

$$M = k_d i_a \quad (4)$$



Ur ： 电枢控制输入

Ω ： 被控量

控制系统的微分方程描述

- (4) → (2) 得：

$$i_a = \frac{J}{k_d}\frac{d\Omega}{dt} + \frac{M_L}{k_d}$$

- (3) (5) → (1) 得：

$$\frac{L_a J}{k_d}\frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{R_a J}{k_d}\frac{d\Omega}{dt} + k_d\Omega = u_r - (\frac{L_a}{R_a}\frac{dM_L}{dt} - \frac{R_a}{k_d}M_L)$$

- **整理并定义两个时间常数**

$\frac{JR_a}{k_d^2} = T_m$ 机电时间常数 $\frac{L_a}{R_a} = T_a$ 电磁时间常数

- **电机方程**

$$T_a T_m \frac{d^2\Omega}{dt^2} + T_m\frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{k_d}u_r - (\dots\dots)$$

控制系统的微分方程描述

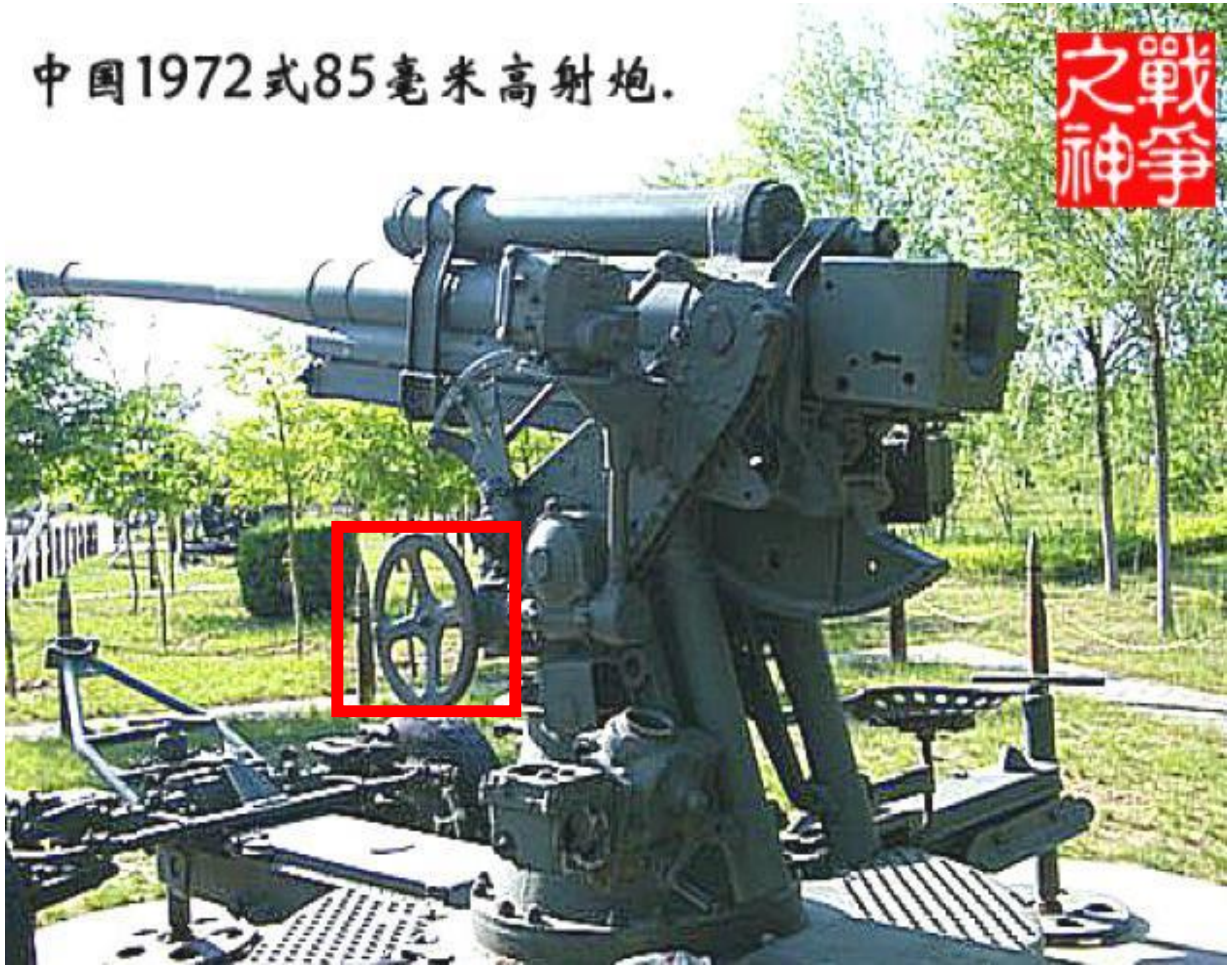
如果忽略阻力矩，即 $M_L = 0$

方程右边只有电枢回路的控制量 u_r，则电机方程是典型二阶微分方程 。

如果忽略 $T_a(T_a = 0)$，电机方程就是一阶的。

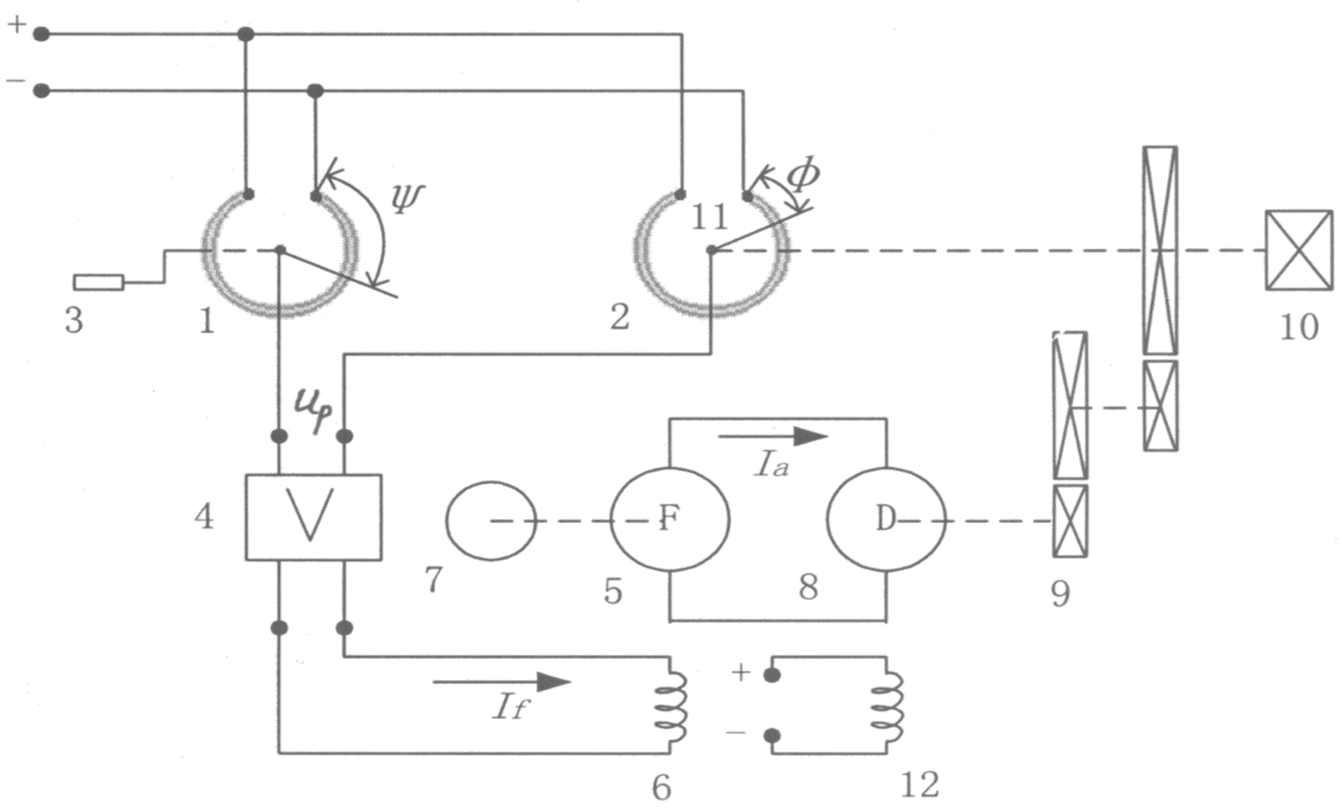
$$T_m \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{k_d} u_r$$

控制系统的微分方程描述



控制系统的微分方程描述

闭环随动系统的例子：（图见教科书, 图2.2.8)



控制系统的微分方程描述

1. 电位器组

$$u_p = k_p(\psi - \phi)$$

2. 放大器-发电机励磁

$$R_f I_f + L_f \frac{dI_f}{dt} = k_a u_p \Rightarrow \quad T_f \frac{dI_f}{dt} + I_f = \frac{k_a}{R_f} u_p$$

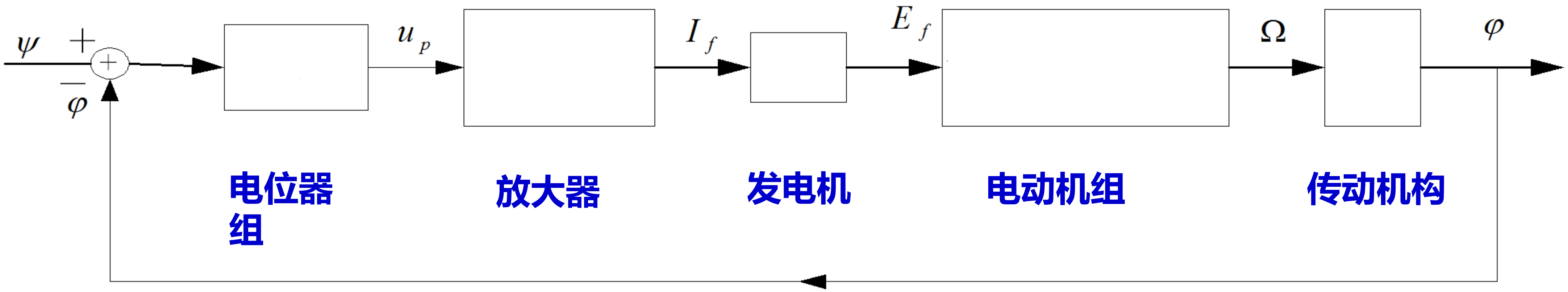
3. 发电机-电动机组(忽略阻力矩)

$$E_f = k_g I_f \qquad T_a T_m \frac{d^2\Omega}{dt^2} + T_m \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{k_d} E_f$$

4. 传动机构

$$\Omega \to \phi \qquad \frac{d\phi}{dt} = k_t \Omega$$

控制系统的结构图



$$u_p = k_p(\psi - \varphi)$$

$$T_f\frac{dI_f}{dt} + I_f = \frac{k_a}{R_f}u_p$$

$$E_f = k_g I_f$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = k_t\Omega$$

$$T_a T_m\frac{d^2\Omega}{dt^2} + T_m\frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{k_d}E_f$$

控制系统的微分方程描述

整理得：

$$\frac{T_f T_a T_m}{k}\frac{\mathrm{d}^4\varphi}{\mathrm{d}t^4}+\frac{(T_f+T_a)T_m}{k}\frac{\mathrm{d}^3\varphi}{\mathrm{d}t^3}+\frac{T_f+T_m}{k}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+\varphi=\psi$$

$$k=\frac{k_p k_a k_g k_t}{R_f k_d}$$ **开环比例系数**

得到输出关于输入的关系

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{e}^{\alpha t}+\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{e}^{\beta t}+\boldsymbol{C}_3\boldsymbol{e}^{\mu t}\mathbf{sin}\nu t+\boldsymbol{C}_4\boldsymbol{e}^{\mu t}\mathbf{cos}\nu t+\boldsymbol{\varphi}^*(\boldsymbol{t})$$

特解

可以发现：特征方程的根满足一定条件下，输出最终跟随输入

以上建模叫机理建模
微分方程描述的缺点：不直观、难以分析

控制系统的微分方程描述

传递函数

控制系统的微分方程求解

线性定常系统由下面的n阶微分方程描述：

$$a_0\frac{d^n}{dt^n}y(t)+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t)+\cdots+a_{n-1}\frac{d}{dt}y(t)+a_ny(t)=$$
$$b_0\frac{d^m}{dt^m}x(t)+b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}x(t)+\cdots+b_{m-1}\frac{d}{dt}x(t)+b_mx(t)$$

如何求解此微分方程呢?

◆ **拉普拉斯变换**

- **是工程数学中常用的一种积分变换。**
- **对于求解线性微分方程尤为有效，它可把微分方程化为容易求解的代数方程来处理，从而使计算和分析简化。**

Laplace变换

$L[f(t)]=F(s)$ **从时域→复域**

定义 $$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

举例 $$f(t)=1(t)$$

$$F(s)=\int_{0^-}^{\infty} e^{-st}dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

常见函数的Laplace变换

$$\delta(t) \to 1(s)$$

$$\sin \alpha t \to \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$$

$$1(t) \to \frac{1}{s}$$

$$\cos \alpha t \to \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$$

$$t \to \frac{1}{s^2}$$

$$e^{-\alpha t} \to \frac{1}{s + \alpha}$$

Laplace变换基本定理

初值定理

$$f(0^+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

终值定理

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

微分定理

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$$

$$L\left[\frac{d^2y}{dt^2}\right] = s^2y(s) - sy(0^-) - \dot{y}\,(0^-)$$

延迟定理

$$L[f(t-\alpha)] = e^{-\alpha s}F(s)$$

Laplace变换基本定理

积分定理 $f(t)=\int g(t)dt \qquad F(s)=\frac{G(s)}{s}+\frac{f(0^-)}{s}$

线性性质 $L[a_1f_1(t)+a_2f_2(t)]=a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$

时间尺度定理 $L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right]=aF(as)$

卷积定理 $f_1(t)*f_2(t)\rightarrow F_1(s)F_2(s)$

衰减定理 $L[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$

Laplace反变换

Laplace反变换定义： $f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{ts}ds$

常见Laplace反变换：

$$1(s)\ \rightarrow\ \delta(t)$$

$$\frac{1}{s}\rightarrow 1(t)$$

$$\frac{1}{s^n}\rightarrow\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\frac{1}{Ts+1}\rightarrow e^{-t/T}/T$$

$$\frac{1}{s^2+w^2}\rightarrow\frac{\sin wt}{w}$$

$$\frac{s}{s^2+w^2}\rightarrow\cos wt$$

用Laplace变换解微分方程的过程

1. 对微分方程的两端同求Laplace变换；
2. 对变换后的代数方程进行整理化简，展开成部分分式；
3. 运用Laplace反变换求出一个通解，根据初始值确定最终结果。

$$a_4\frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}t^4}+a_3\frac{d^3 y}{\mathrm{d}t^3}+a_2\frac{d^2 y}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_0 y=r$$

$$a_4 s^4\bar{y}(s)+a_3 s^3\bar{y}(s)+a_2 s^2\bar{y}(s)+a_1 s\bar{y}(s)\ +a_0\bar{y}(s)=\bar{r}(s)$$

$$\bar{y}(s)=\frac{\bar{r}(s)}{a_4 s^4+a_3 s^3+a_2 s^2+a_1 s\ +a_0}=\frac{K_1}{s+p_1}+\frac{K_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s+p_n}$$

$$y(t)=K_1 e^{-p_1 t}+K_2 e^{-p_2 t}+\cdots+K_n e^{-p_n t}$$

用Laplace变换解微分方程

$$\begin{cases} T\dfrac{dy}{dt}+y=r \qquad r(t)=1(t) \\ y(0)=0 \end{cases}$$

方程两边进行Laplace变换（零初始条件）

$$Tsy(s)+y(s)=r(s)$$

$$y(s)=\frac{r(s)}{Ts+1}=\frac{1}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

用Laplace变换解微分方程

反变换 $y(t) = 1(t) - e^{-\frac{t}{T}}$

用终值定理求 $y(\infty)$

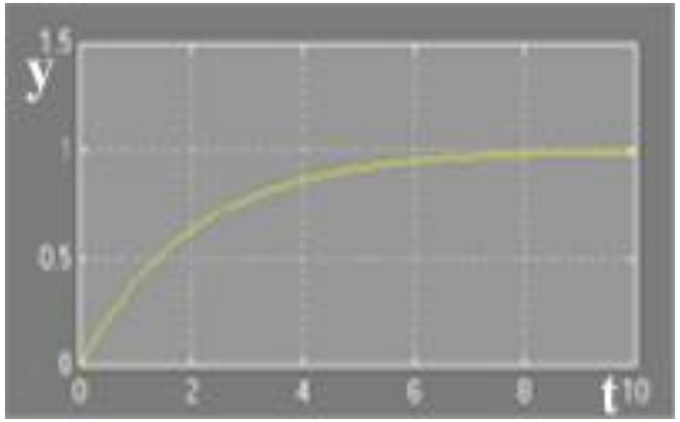
当 $r(t) = \delta(t)$

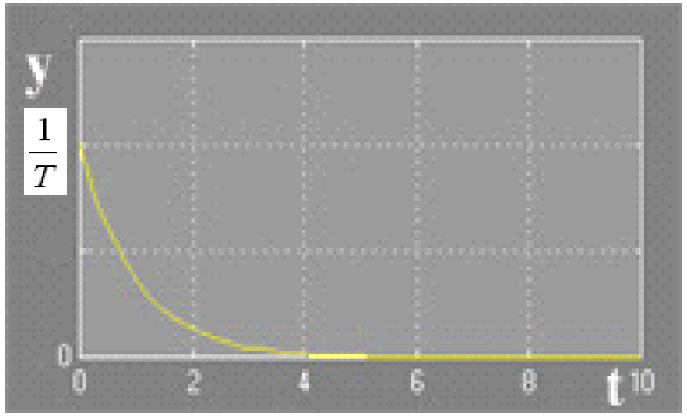
$$y(s) = \frac{1}{Ts+1} = \frac{1}{T}\frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

反变换 $y(t) = \frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}$

$$y(0^-) = 0，\ y(0^+) = \frac{1}{T}$$

初值跳变！　用初值定理求 $y(0^+)$





传递函数

系统微分方程在用Laplace变换后表示为

$$y(s) = G(s)r(s)$$

定义传递函数（单输入输出线性定常系统，且零初值条件下）

$$G(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\text{输出的Laplace变换}}{\text{输入的Laplace变换}}$$

传递函数描述的系统本身与输入无关

变量 s 为复数，称为复频率

传递函数的零点和极点

- 传递函数分子多项式与分母多项式经因式分解可写为如下形式：

$$G(s)=\frac{b_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_0(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

- 传递函数分子多项式的根z_i称为传递函数的**零点**
- 分母多项式的根p_j称为传递函数的**极点**
- K^*称为**传递系数**或根轨迹增益
- 分母多项式被称为传递函数的特征多项式或**特征方程**

由传递函数确定系统的输出响应

- 已知$G(s),r(t)$
- 求$R(s) = L[r(t)]$
- 求$Y(s) = G(s)R(s)$
- 求拉普拉斯反变换$y(t) = L^{-1}\,[G(s)R(s)]$

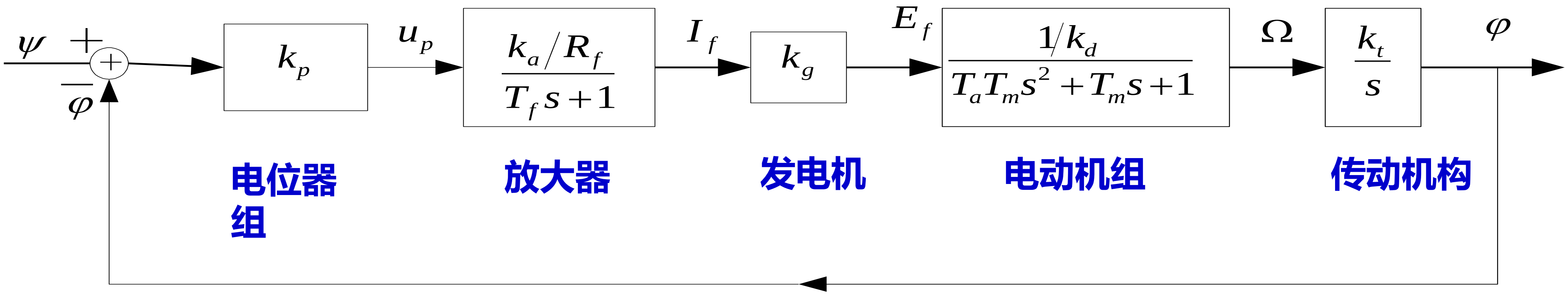
性质

- 传递函数$G(s)$的拉氏反变换g(t)称为脉冲响应，
  是系统在单位脉冲输入时的输出响应

$$R(s) = L[\delta(t)] = 1 \qquad g(t) = L^{-1}\,[G(s)]$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)R(s)] = \int_0^t r(t)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t r(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

控制系统的传递函数表示



$$u_p = k_p(\psi - \varphi)$$

$$T_f \frac{dI_f}{dt} + I_f = \frac{k_a}{R_f} u_p$$

$$E_f = k_g I_f$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = k_t \Omega$$

$$T_a T_m \frac{d^2\Omega}{dt^2} + T_m \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{1}{k_d} E_f$$

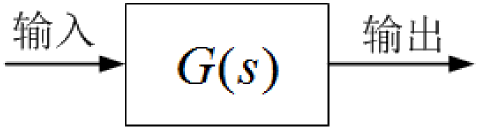
方框中的公式就是对应模块的传递函数，优点：直观、清晰、简单

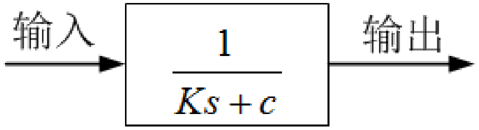
传递函数框图与框图变换

传递函数框图

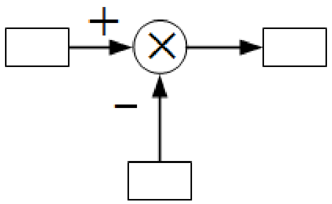
1. 框图的定义

- **系统框图是传递函数的一种图形描述方式，简明直观，运算方便。**

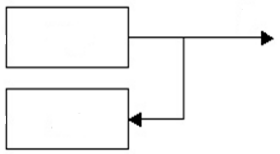




- **求和单元**



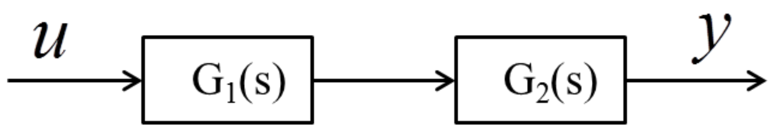
- **分支单元**



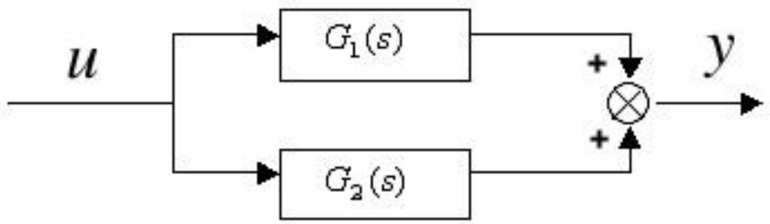
传递函数框图

2. 框图的连接方式

- **串联　传递函数相乘** $\frac{y(s)}{u(s)} = G_2(s)G_1(s)$



- **并联　传递函数相加** $\frac{y(s)}{u(s)} = G_1(s) + G_2(s)$



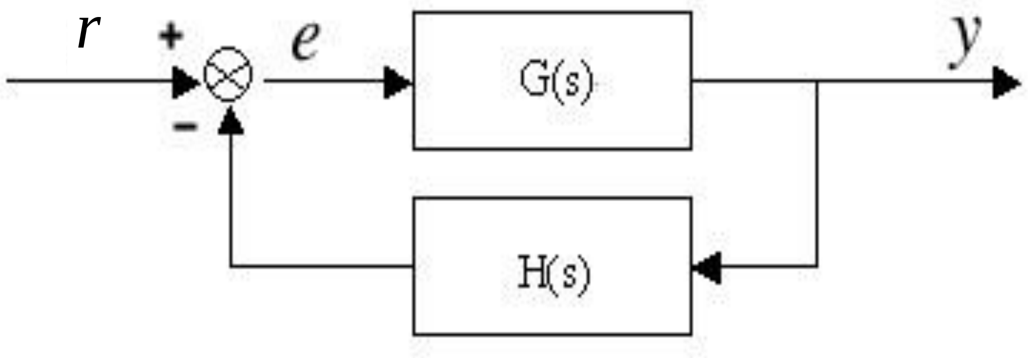
传递函数框图

- **反馈**

G(s): 主通道的传递函数

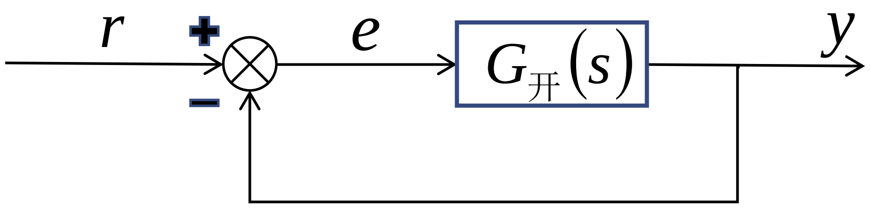
H(s): 负反馈通道的传递函数

G(s)H(s): 开环传递函数



$$G(r-Hy)=y$$

$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{G_{主}}{1+G_{开}}$$



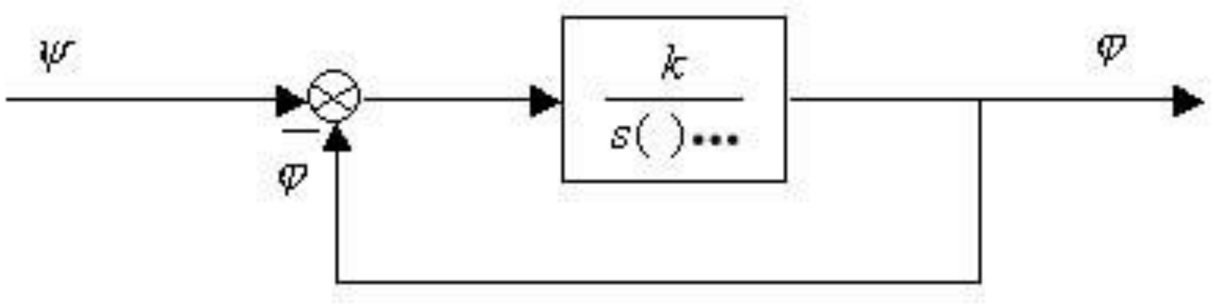
同理可得正反馈如下:

$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$$

$$\frac{G_{开}}{1+G_{开}}=\frac{y}{r}=G_{闭}$$

传递函数框图

前面随动系统的例子化成如下形式：



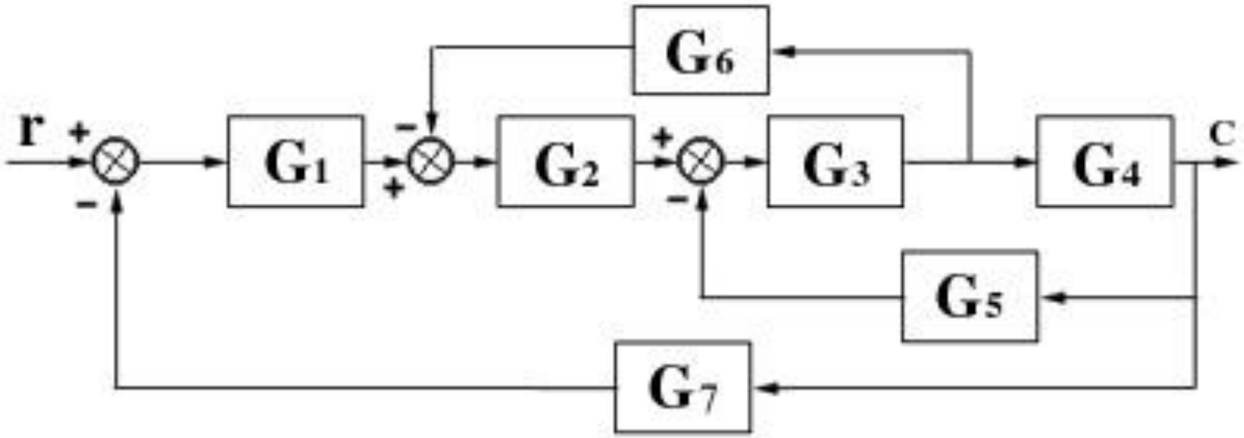
自己推导出 φ 与 ψ 之间的关系

（1）传递函数

（2）微分方程

传递函数框图

复杂框图的例子（来自于机理建模）



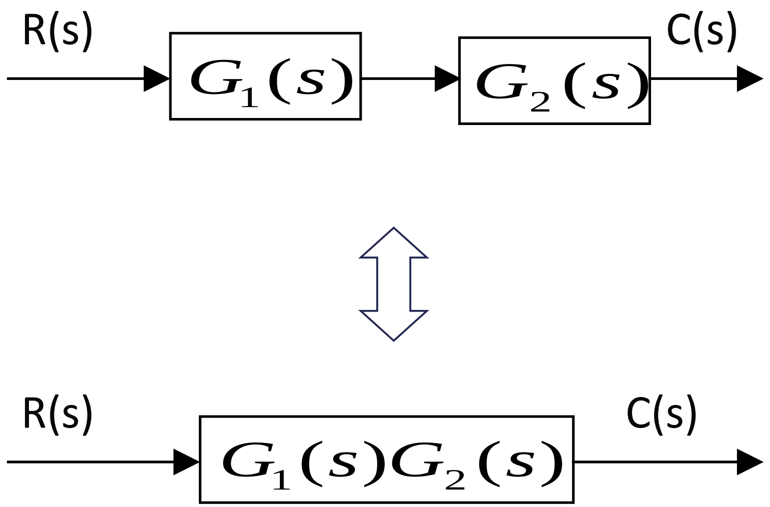
系统整体传递函数可以通过列变量方程组并化简求得，但费时费力

框图变换

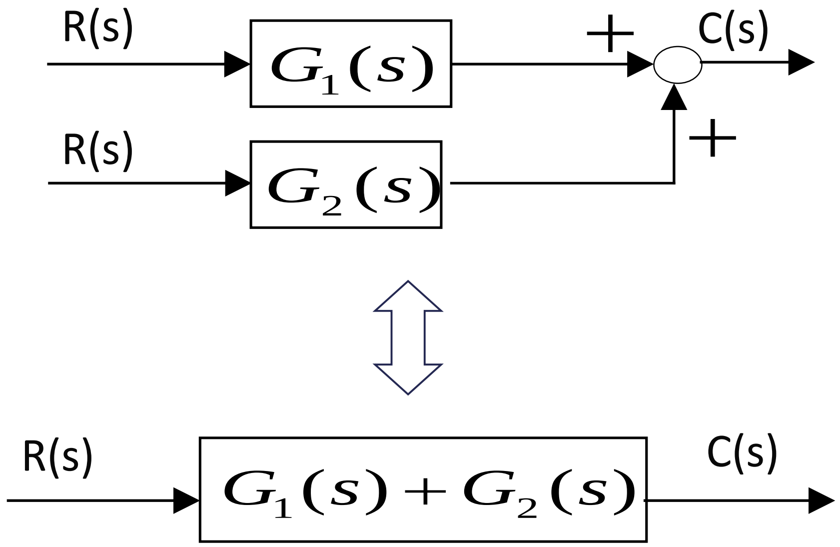
框图变换的目的是通过局部变换逐步实现整体传递函数的简化计算

基本原则：变换前后变量关系保持等效

（1）串联

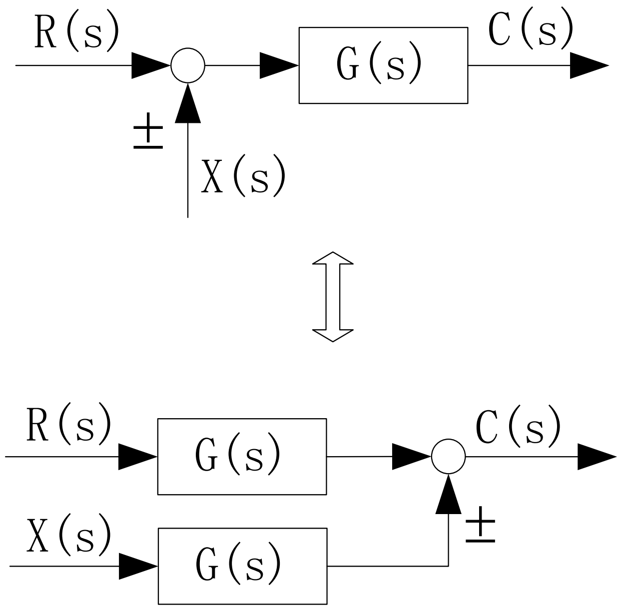


（2）并联

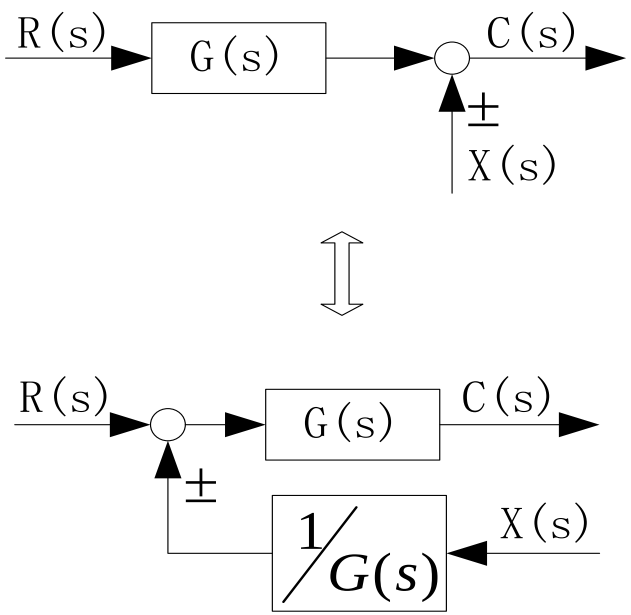


框图变换

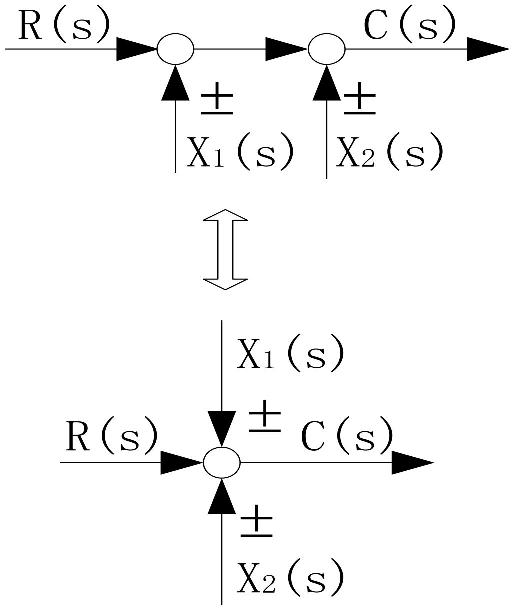
(3) 比较点后移



(4) 比较点前移

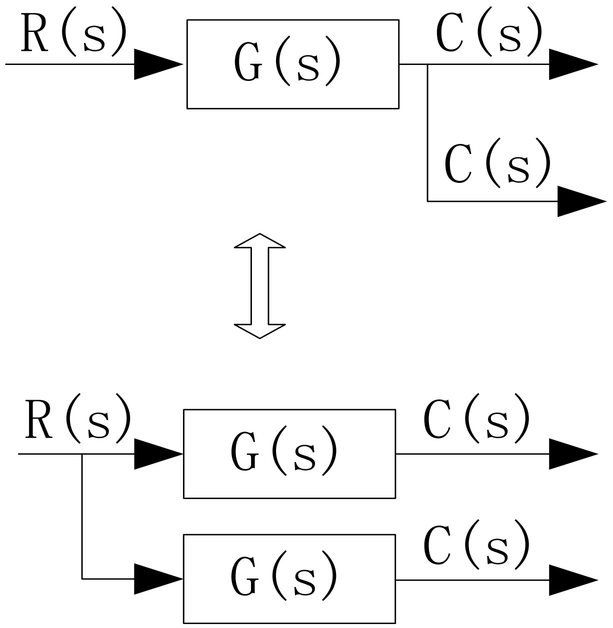


(5) 比较点合并

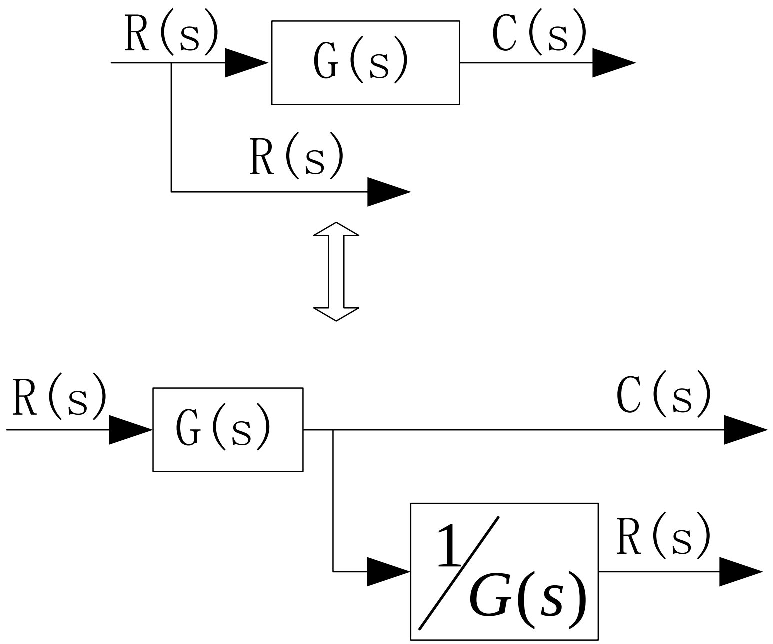


框图变换

(6) 引出点前移

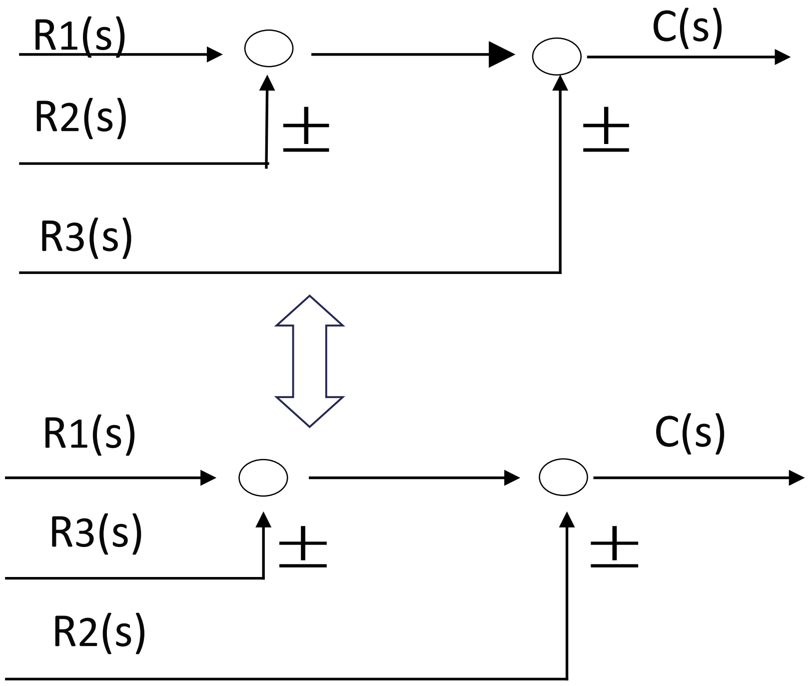


(7) 引出点后移

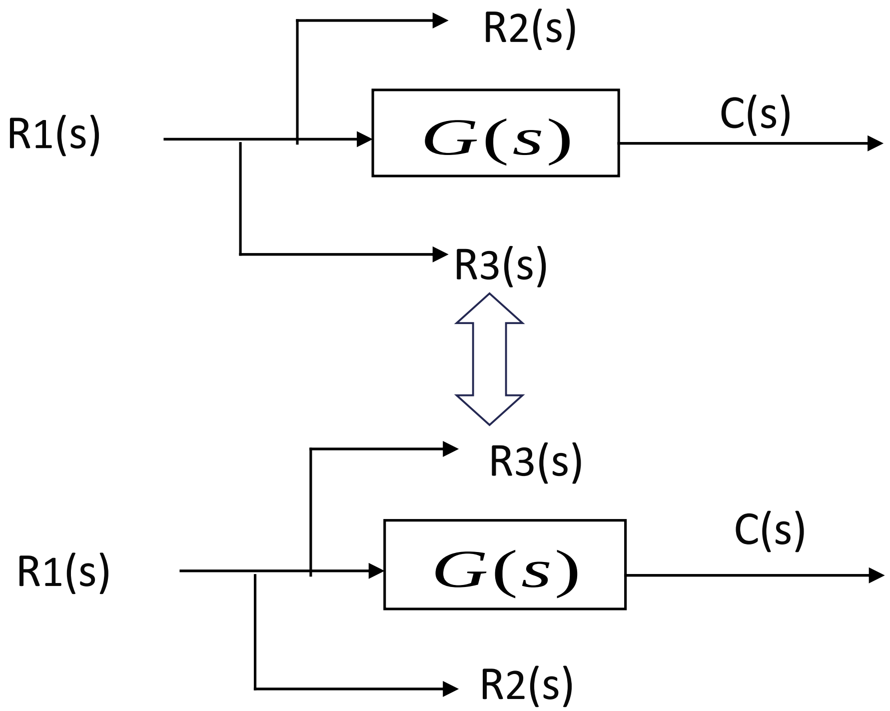


框图变换

（8）比较点交换

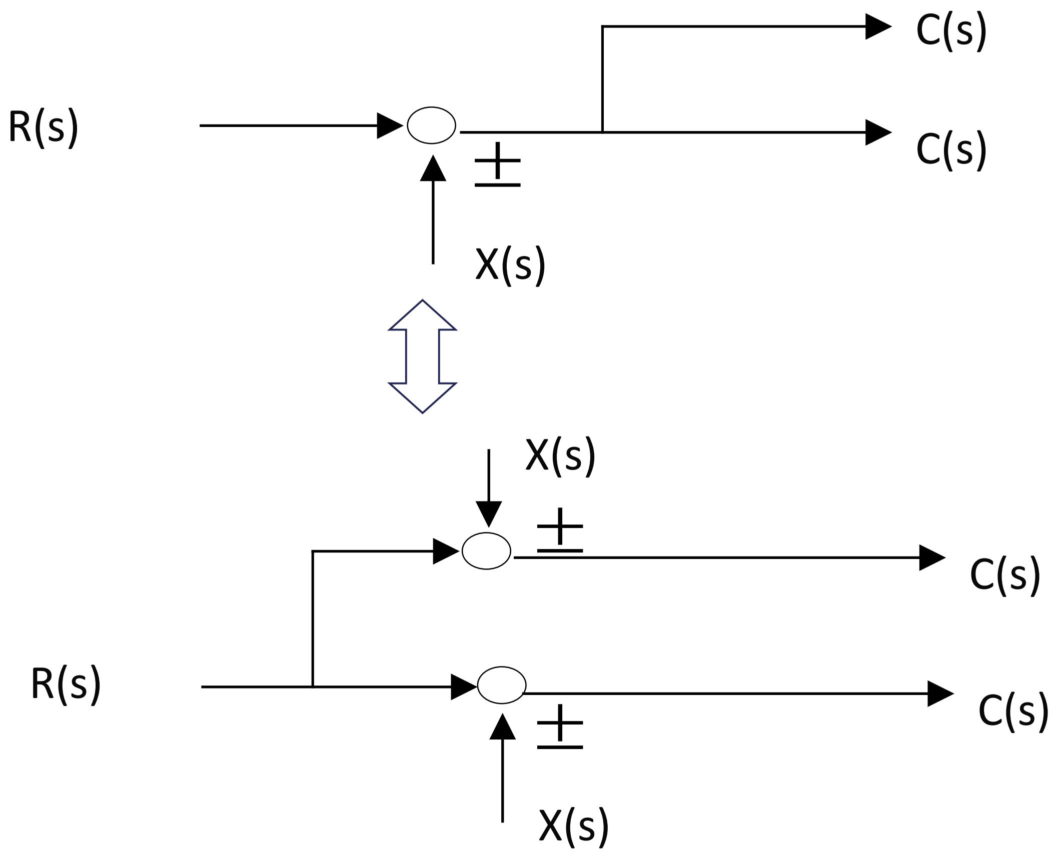


（9）引出点交换



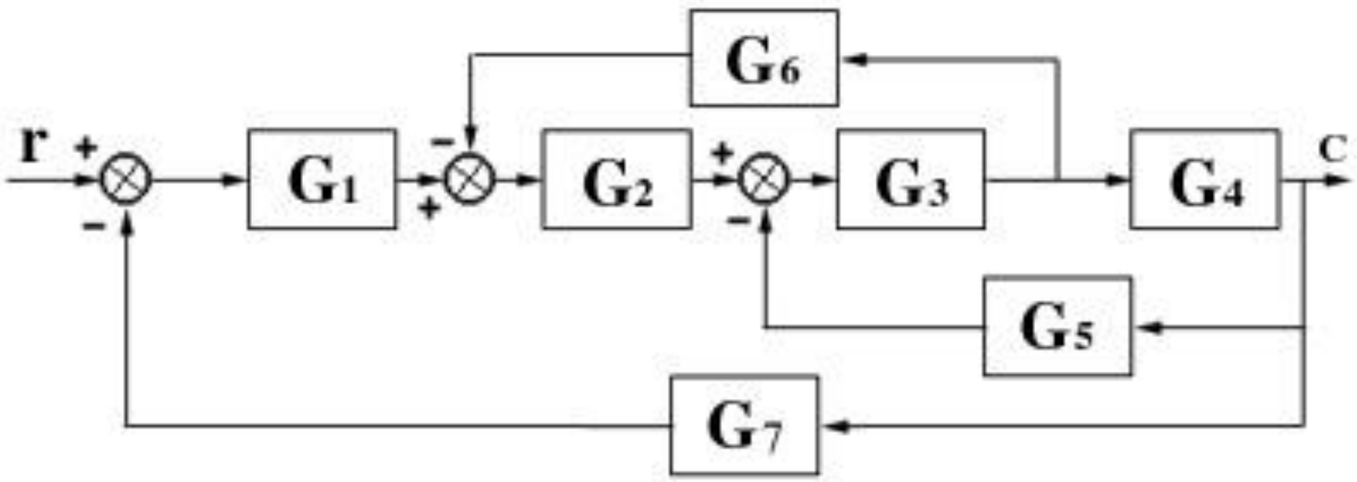
框图变换

(10) 引出点和比较点交换



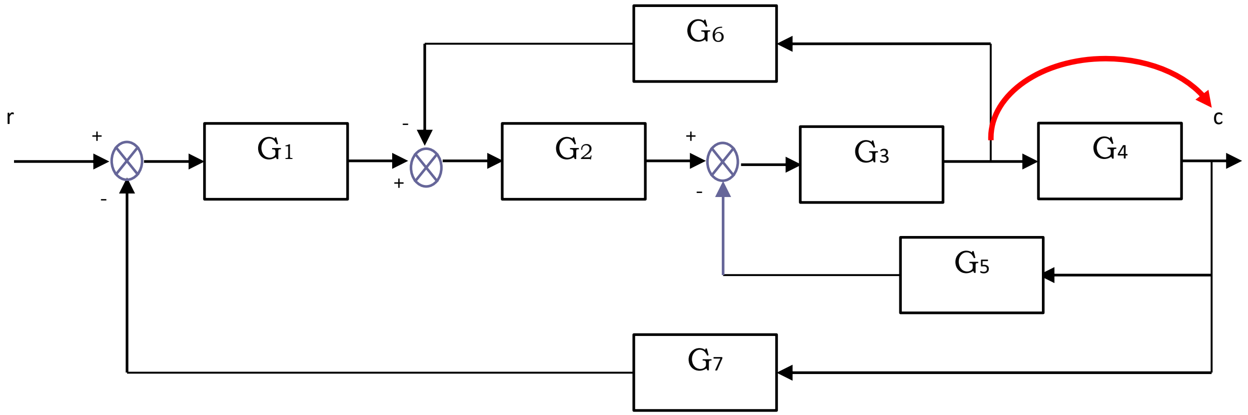
框图变换的例子

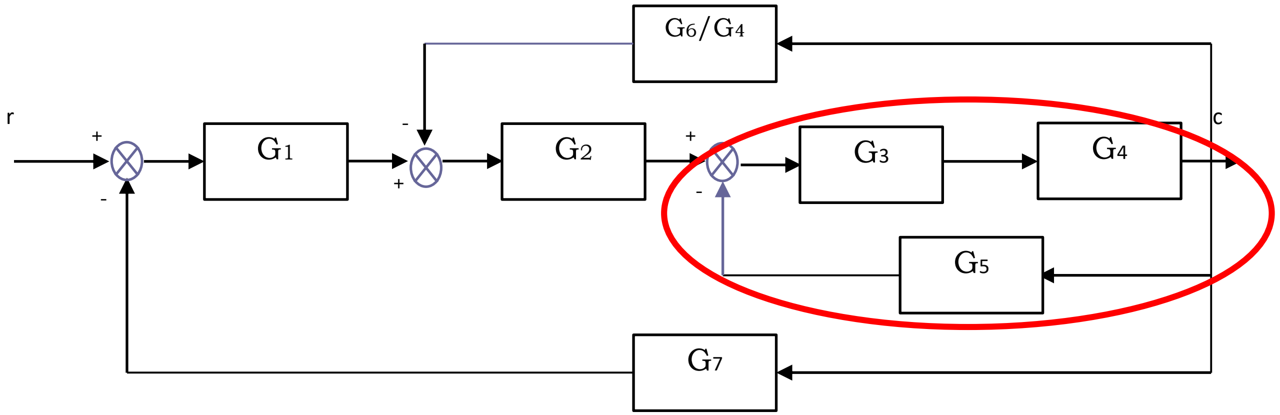
（1）交叉反馈



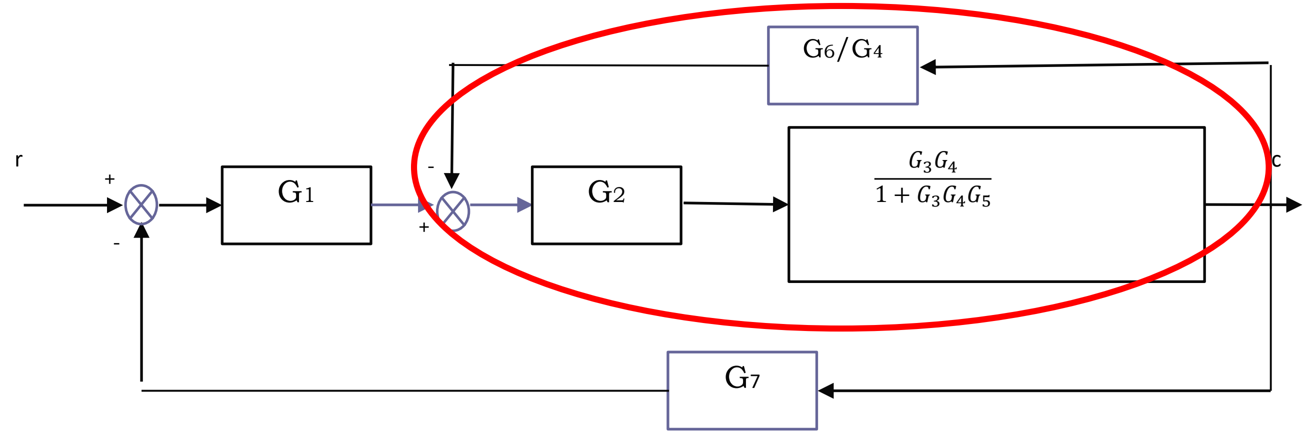
框图变换的例子

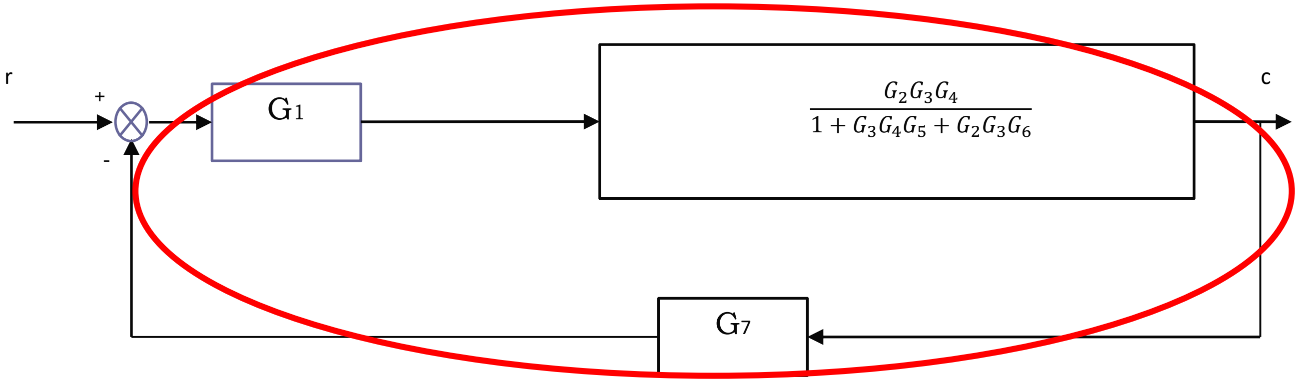
解法一

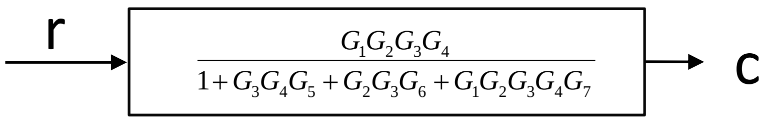




框图变换的例子

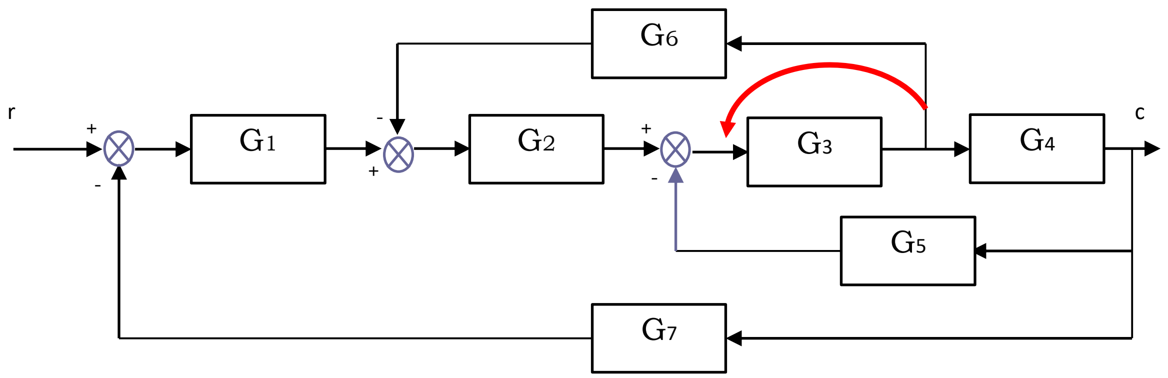

G6/G4
r
+
-
G1
-
+
G2
$\frac{G_3G_4}{1+G_3G_4G_5}$
c
G7

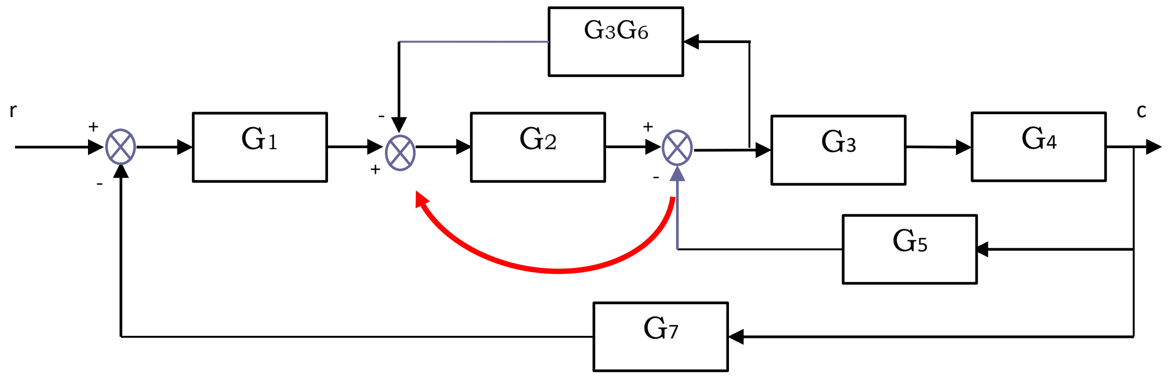

r
+
-
G1
$\frac{G_2G_3G_4}{1+G_3G_4G_5+G_2G_3G_6}$
c
G7


r
$\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_3G_4G_5+G_2G_3G_6+G_1G_2G_3G_4G_7}$
c

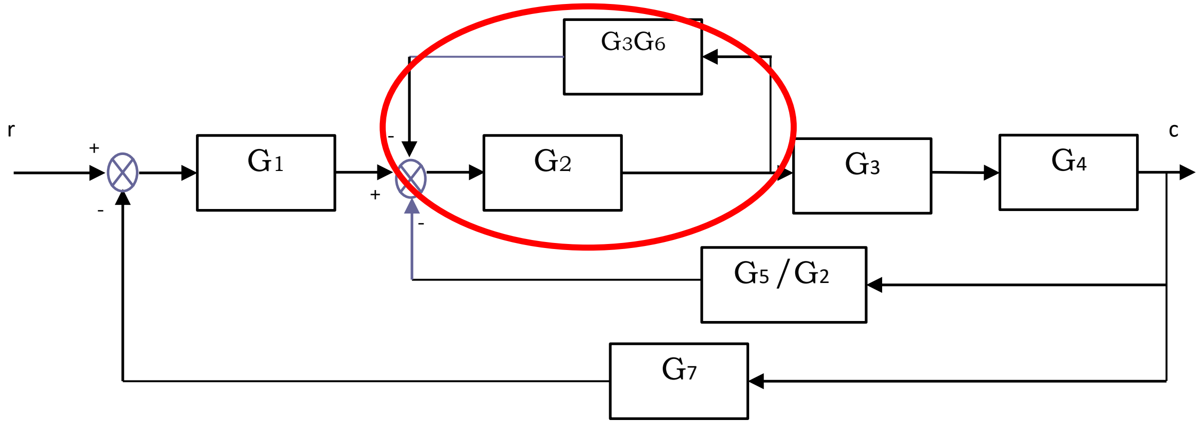
框图变换的例子

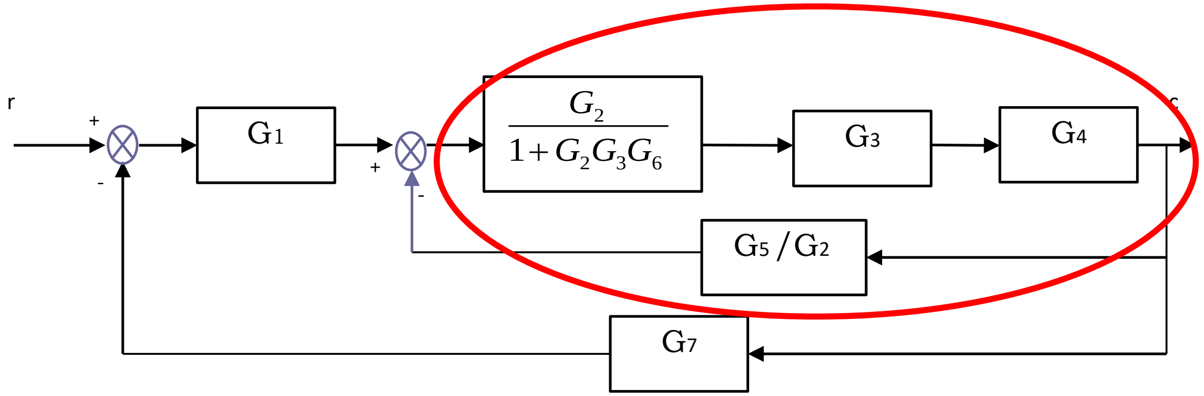
解法二



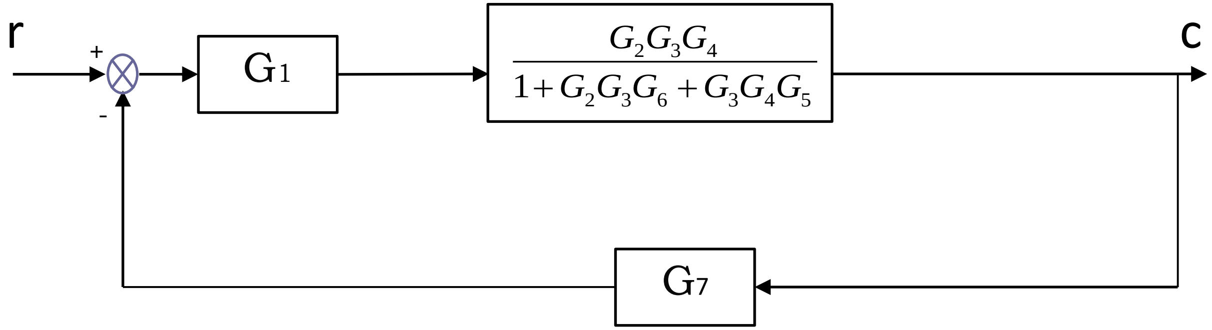


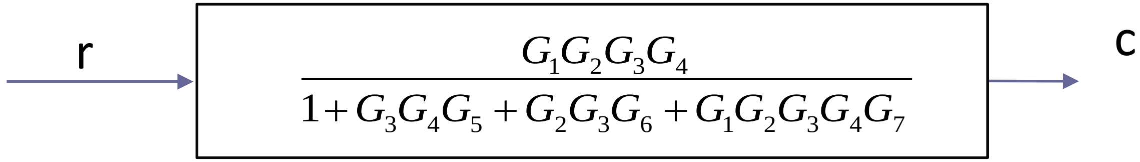
框图变换的例子





框图变换的例子


r
+
-
G_1
$\frac{G_2G_3G_4}{1+G_2G_3G_6+G_3G_4G_5}$
c
G_7

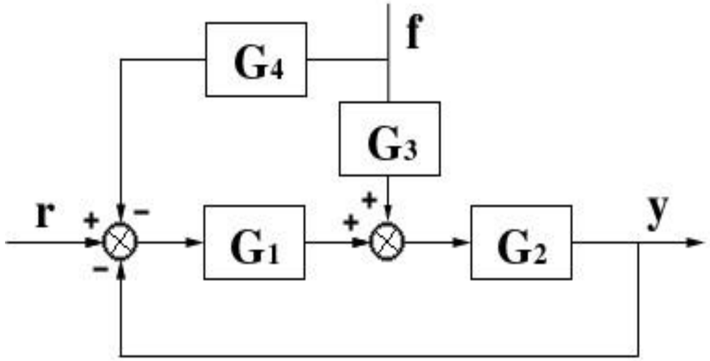

r
$\frac{G_1G_2G_3G_4}{1+G_3G_4G_5+G_2G_3G_6+G_1G_2G_3G_4G_7}$
c

框图变换的例子

(2）扰动输入的情况

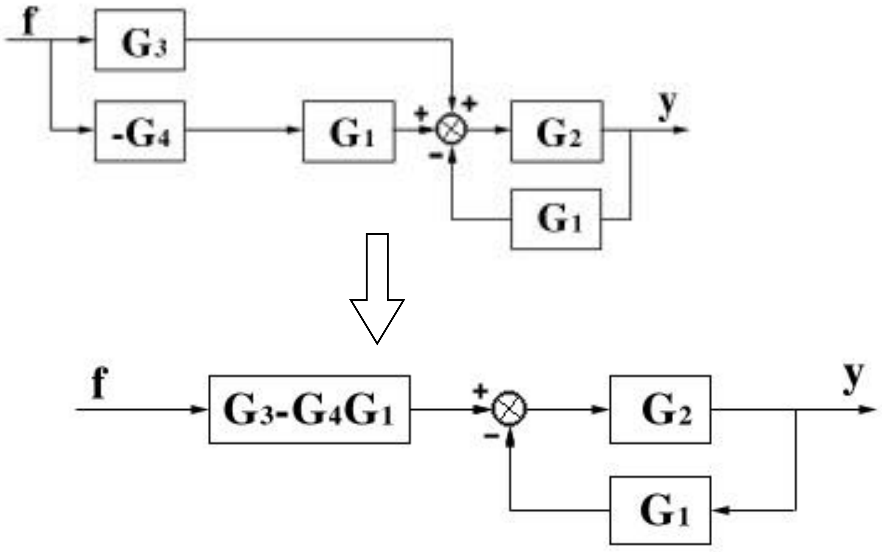
(a) 求 $\frac{y(s)}{r(s)}(f=0)$

$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2}$$



(b) 求 $\frac{y(s)}{f(s)}\ (r=0)$

$$\frac{y(s)}{f(s)}=\frac{(G_3-G_4G_1)G_2}{1+G_1G_2}$$

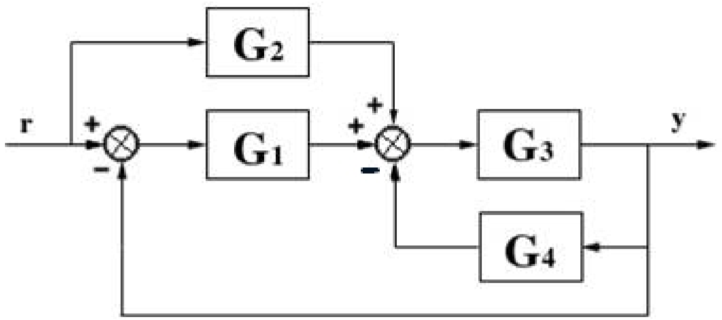


(c) 为使 y 不受扰动 f 的影响应如何选G_4?

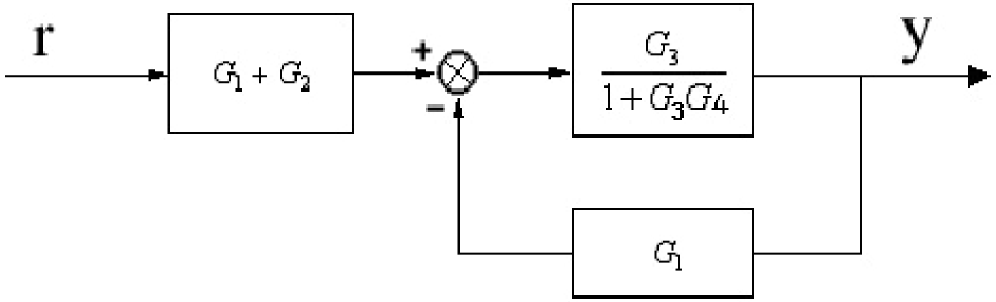
当 $\frac{y(s)}{f(s)}=0$，即 $G_4=\frac{G_3}{G_1}$，y 不受 f 的影响

框图变换的例子

(3）顺馈的例子



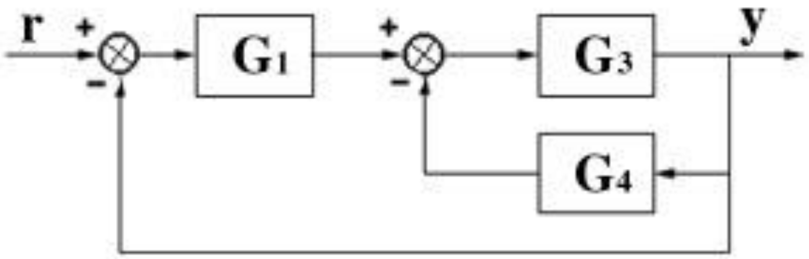
变换框图

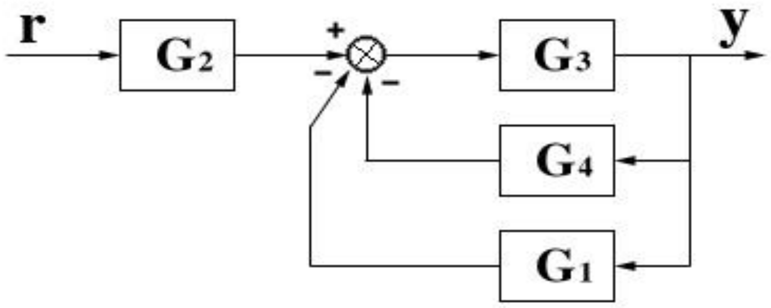


$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{(G_1+G_2)\dfrac{G_3}{1+G_3G_4}}{1+\dfrac{G_1G_3}{1+G_3G_4}}=\frac{(G_1+G_2)G_3}{1+G_3G_4+G_1G_3}$$

框图变换的例子

也可把它看成是双输入系统

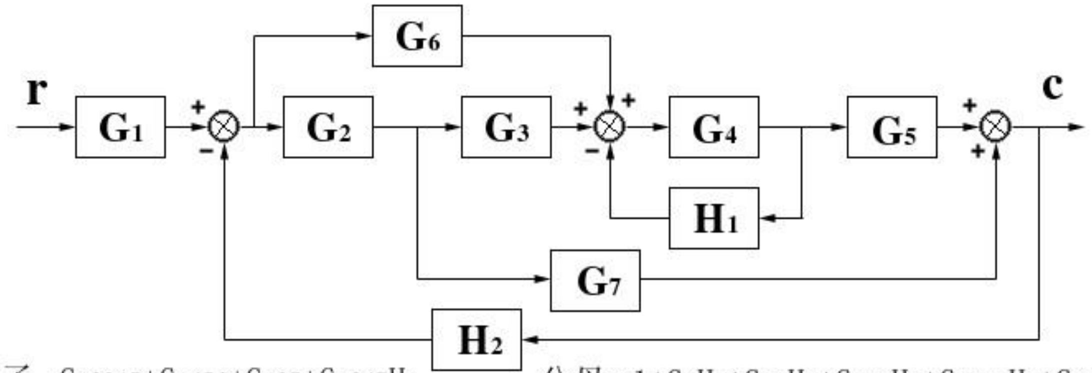




框图变换的例子

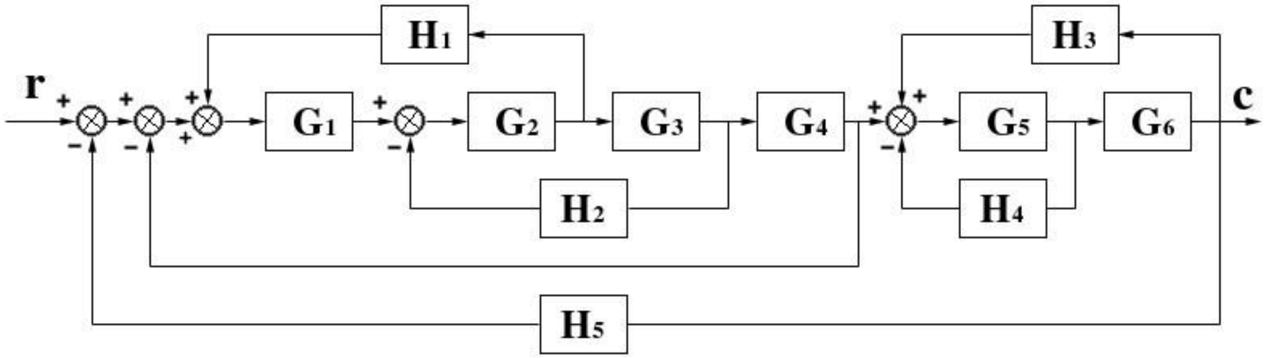
补充题

题一



分子 :$G_{12345}+G_{1456}+G_{127}+G_{1247}H_1$ 分母 :$1+G_4H_1+G_{27}H_2+G_{456}H_2+G_{2345}H_2+G_{247}H_{12}$

题二



控制系统的基本单元

控制系统的基本单元

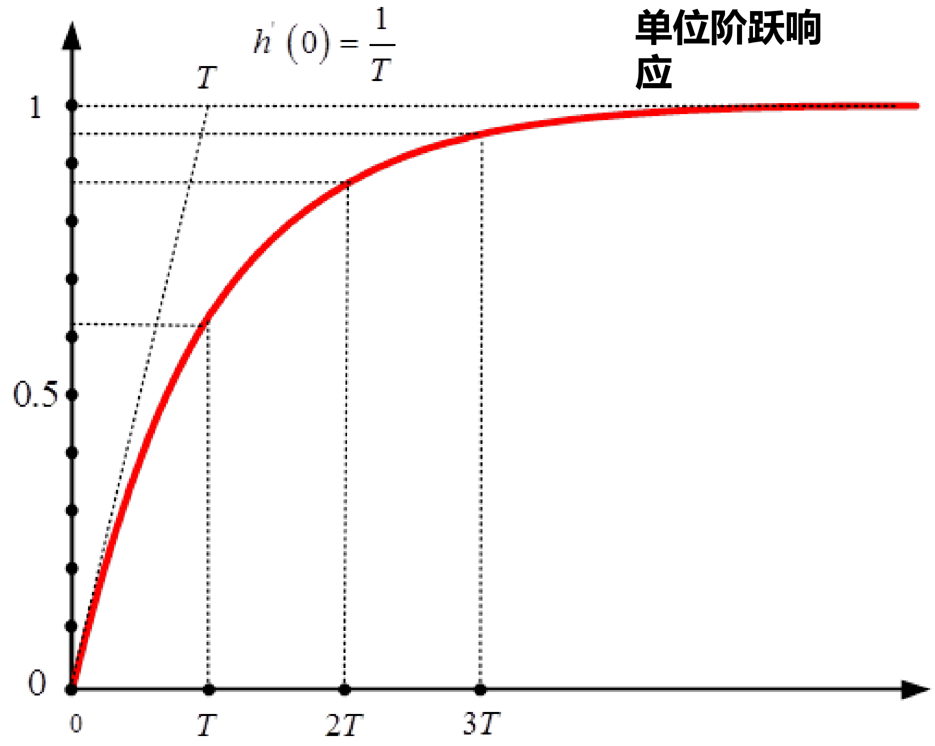
1. 比例 $G(s) = k$

2. 惰性（惯性） $G(s) = \dfrac{1}{Ts+1}$ T **时间常数**

阶跃响应特征——指数曲线

$$G(s) = \frac{1}{Ts+1}$$

$$h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}(t \geq 0)$$



控制系统的基本单元

3. 二阶振荡环节 $G(s) = \dfrac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1}$

T 时间常数

ζ 阻尼系数

特征方程的根

$$s_{1,2} = \frac{-2\zeta T \pm \sqrt{4\zeta^2 T^2 - 4T^2}}{2T^2} = -\frac{\zeta}{T} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{T}$$

$0 < \zeta < 1$，一对共轭复根（实部为负） 衰减振荡

$\zeta = 0$ ，一对共轭虚根 等幅振荡

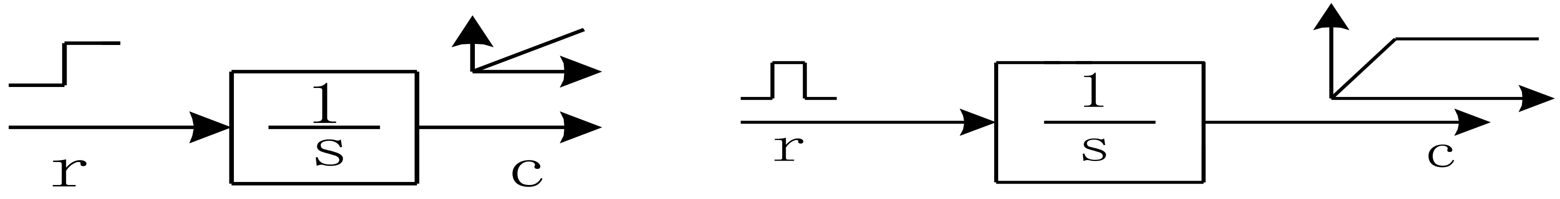
$\zeta = 1$ ，两个相等的负实根 单调衰减

$\zeta > 1$ ，两个不相等的负实根，可分解为两个惰性单元串联 单调衰减

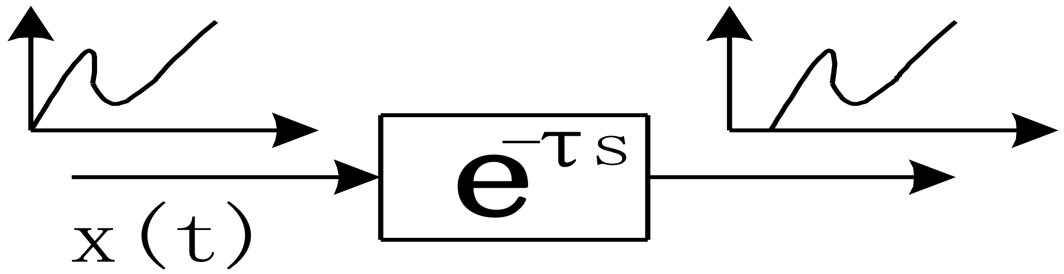
系统动态响应的性质取决于其特征根的性质

控制系统的基本单元

4. 积分 $G(s) = \dfrac{1}{s}$



5. 延迟环节 $G(s) = e^{-\tau s}$



控制系统的基本单元

6．微分环节

纯微分 $G(s) = s$

一阶微分 $G(s) = Ts + 1$

二阶微分 $G(s) = T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1$

实际应用中这些微分环节不能单独存在，只能与其它环节配合使用

状态、状态空间、状态空间描述

状态、状态空间、状态空间描述

一、状态：

动态系统的状态粗略地说就是指系统的过去、现在和将来的运动状况。精确地说，状态需要一组必要而充分的数据来说明。

如图1中所示的小车的运动，这个系统的状态就是车子每一时刻的位置（位移）和速度。

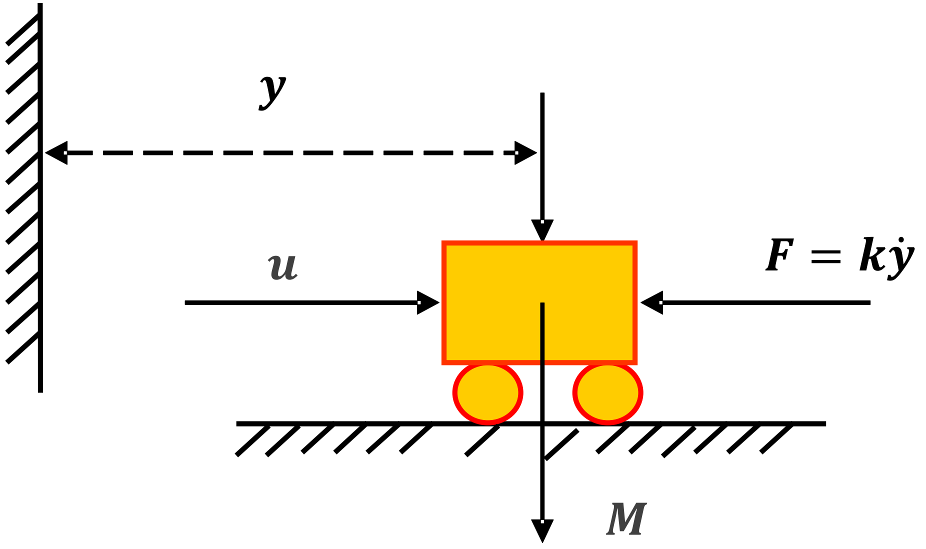


图1

状态、状态空间、状态空间描述

二、状态变量：

系统的状态变量，就是指足以完全确定系统运动状态的最小一组变量。一个用n阶微分方程描述的系统，就有n个独立变量，求得这n个独立变量的时间响应，系统的运动状态也就被揭示无遗了。因此，可以说系统的状态变量就是n阶系统的n个独立变量。

设 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为系统的一组状态变量，则它应该满足下列两个条件：

1、在任何时刻 $t = t_0$，这组变量的值 $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_n(t_0)$ 都表示系统在该时刻的状态；

2、当系统在 $t \geq t_0$ 的输入和上述初始状态确定以后，状态变量便能完全确定系统在任何 $t \geq t_0$ 时刻的行为。

状态、状态空间、状态空间描述

二、状态变量：

图1中，只要已知 $t = t_0$ 时刻小车的位置 y_0 和速度 v_0 ，并且知道在 $t \geq t_0$ 时函数 u 开始起作用，那么，小车在任何时刻的状态就确定了。

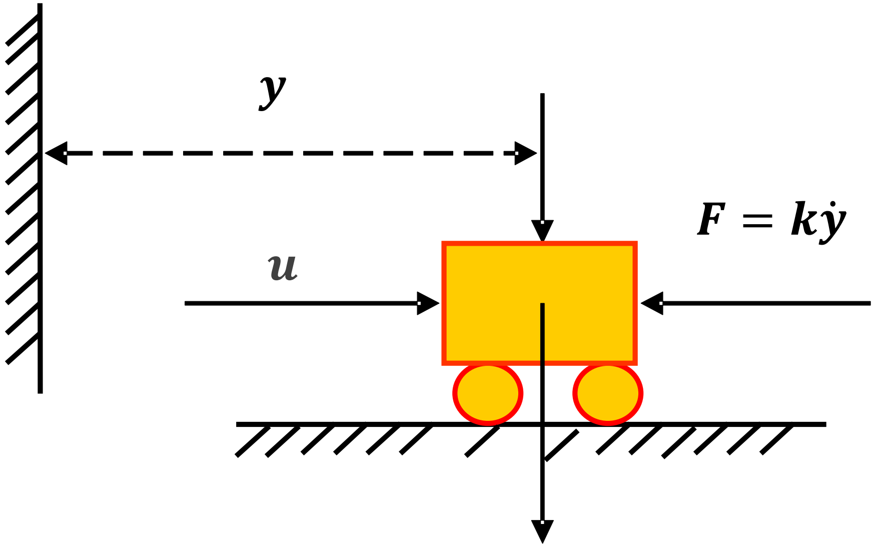


图1

很显然，n 阶动态系统在 t 时刻的状态 $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ $(t_0 \leq t \leq \infty)$ 是由其在 t_0 时刻的初始状态 $x_1(t_0), x_2(t_0), \ldots, x_n(t_0)$ 和 $t \geq t_0$时的输入函数 $u(t)$ 所唯一确定的，而与 t_0 前时刻的状态和输入无关。

状态、状态空间、状态空间描述

二、状态变量：

同一个系统，究竟选取那些变量作为状态变量，这不是唯一的，要紧的是这些状态变量是相互独立的，且其个数应等于微分方程的阶数。因为微分方程的阶数是唯一地取决于系统中独立储能元件的个数，因此，状态变量的个数应等于系统独立储能元件的个数。

还应该指出，状态变量不一定是物理上可测量或可观测的量，但通常总是选择易于测量或观测的量作为状态变量，因为当系统实现最佳控制规律时，需要反馈所有的状态变量。

状态、状态空间、状态空间描述

三、状态向量：

如果完全描述一个系统的动态行为需要 n 个状态变量，那么这 n 个状态变量 $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ 作分量所构成的向量就叫做该系统的状态向量，记作

$$x = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ 或} x = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \end{bmatrix}^T$$

状态、状态空间、状态空间描述

四、状态空间：

以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ 为坐标所构成的 n 维空间，称为状态空间。

系统的任何状态，都可以用状态空间中的一个点来表示。即在特定时刻t状态向量$x(t)$ 在状态空间中是一个点。已知初始时刻 t_0 的$x(t_0)$，就得到状态空间中的一个初始点。随着时间的推移，$x(t)$将在状态空间中描绘出一条轨迹，称为状态轨线。

显然，这一轨线的形状，完全由系统在 t_0 时刻的初始状态和 $t \geq t_0$ 的输入以及系统的动态特性唯一决定的。状态向量的状态空间表示则将向量的代数结构和几何概念联系了起来。

状态、状态空间、状态空间描述

五、状态方程：

描述系统状态变量与系统输入之间关系的一阶微分方程组称为状态方程。

图1中，若令 $x_1 = y$， $x_2 = \frac{dy}{dt}$ 即取 x_1、 x_2 为此系统的一组状态变量，

则由牛顿第二定律 $M\frac{d^2y}{dt^2} = u - k\frac{dy}{dt}$ 得一阶微分方程组：

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{M}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{M}u = -\frac{k}{M}x_2 + \frac{1}{M}u \end{cases}$$

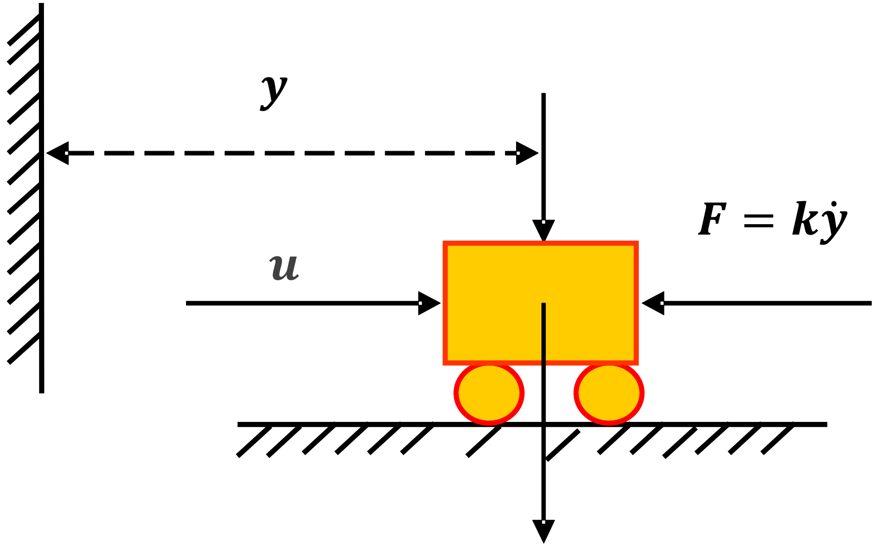


图1

状态、状态空间、状态空间描述

五、状态方程：

将得到的方程组转化：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \qquad (1)$$

式(1)即为该系统的状态方程。

也可简写成：

$$\dot{x} = Ax + bu$$

其中： $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k}{M} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

状态、状态空间、状态空间描述

六、输出方程：

描述系统的状态变量与输出变量关系的一组代数方程称为输出方程。图1中，指定位移为系统的输出，则有：对于一般单输入——单输出系统，状态方程和输出方程为$\mathrm{y} = x_1$或

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

式(2)即为该系统的输出方程。简写成：

$$y = c^T x，\text{其中 } c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}，\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

状态、状态空间、状态空间描述

七、状态空间描述：

状态方程和输出方程一同构成一个系统动态的完整描述，称为系统的

状态空间表达式，也称为状态空间描述。如式(1)和式(2)就是图1系统的状态空间表达式。

对于一般单输入——单输出系统，状态方程和输出方程为：

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 u \\
\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2 u \\
\qquad \vdots \\
\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n u
\end{cases}
$$

$$
y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n
$$

状态、状态空间、状态空间描述

用向量矩阵表示的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = c^T x \end{cases}$$

式中：

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, c^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

状态向量　　状态矩阵(系统矩阵)　　输入向量　　输出向量

状态、状态空间、状态空间描述

七、状态空间描述：

对于一个复杂系统，它有r个输入， m个输出，此时状态方程为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1r}u_r \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2r}u_r \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nr}u_r \end{cases}$$

而输出方程，不仅是状态变量的组合，而且在特殊情况下，可以有输入向量的直接传送，因而有以下一般形式：

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + \cdots + d_{1r}u_r \\ y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + \cdots + d_{2r}u_r \\ \vdots \\ y_m = c_{21}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mn}x_n + d_{m1}u_1 + \cdots + d_{mr}u_r \end{cases}$$

状态、状态空间、状态空间描述

因而多输入–多输出系统状态空间表达式的向量矩阵形式为：

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du\end{cases}$$

x和A与单输入单输出系统一样，为n维状态向量和$n \times n$状态矩阵，其中：

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

r维输入向量　　m维输出向量　　$n \times r$维输入（控制）矩阵

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}$$

$m \times n$输出矩阵　　输入量的$m \times r$直接传递矩阵

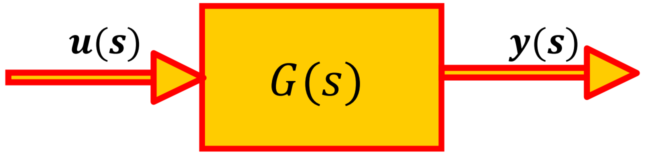
状态、状态空间、状态空间描述

七、状态空间描述：

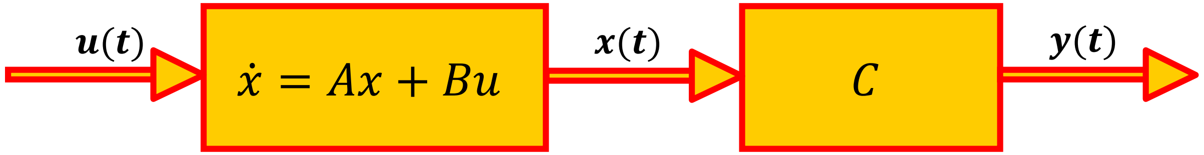
综合上述分析，可以清楚地看出：状态空间的描述和经典控制理论中的描述不同。

① 状态空间描述了系统内部状态和输入、输出关系，而在经典控制理论中描述的是输入输出之间的关系。因而状态空间描述揭示了系统的内部联系，输入引起状态的变化，而状态的变化决定输出的变化。

② 输入引起状态的变化是一个运动过程，用微方程组来表示，即状态方程。状态决定输出的变化则是一个变换过程，数学上表现为一个变换方程，即代数方程。



系统经典控制理论中的描述



系统的状态空间的描述

状态、状态空间、状态空间描述

七、状态空间描述:

综合上述分析，可以清楚地看出：状态空间的描述和经典控制理论中的描述不同。

③ 系统状态变量的个数等于系统所包含的独立贮能元件的个数。因此，一个n 阶系统有且仅有n个状态变量可以选择。对于简单的电路和力学回路，选择独立的贮能元件的贮能变量，如电容端电压 v_c ，电感中（或电枢中）电流i_l，惯性元件的速度v，弹性元件的位移x，电动机转子的角速度w，以及水槽的水位h等作为状态变量是方便的。同时需要说明状态变量的选择不是唯一的。

状态、状态空间、状态空间描述

七、状态空间描述：

综合上述分析，可以清楚地看出：状态空间的描述和经典控制理论中的描述不同。

④ 状态空间表达式的突出优点是当状态变量个数，输入和输出个数增加时并不增加方程在表达和分析上的复杂性。同时，系统的状态空间分析法是在时域内进行的一种矩阵运算的方法，因此特别适用于计算机来运算。

多输入多输出系统的
传递函数阵

多输入多输出系统的空间表达式及传递函数阵

已知系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad (1)$$

其中：

u —$r \times 1$输入列向量

y —$m \times 1$输出列向量

A —$n \times n$ 系统矩阵

B—$n \times r$ 控制矩阵

C—$m \times n$ 输出矩阵

D —$m \times r$ 直接传递矩阵

x —$n \times 1$ 状态向量

在初始条件为零的前提下，对式（1）作拉氏变换，得：

$$\begin{cases} x(s) = (sI - A)^{-1}Bu(s) \\ y(s) = Cx(s) + Du(s) \end{cases}$$

得到系统的传递函数阵： $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

多输入多输出系统的空间表达式及传递函数阵

系统的传递函数阵 $G(s)$ 是一个$m \times r$的矩阵函数，设：$g_{ij}(s)$为 $G(s)$ 的元，则系统的传递函数阵 G(s) 可表示为以下的形式：

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1r}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(s) & \cdots & g_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

并且容易看出，其元 $g_{ij}(s)$都是标量函数，它在物理上表示为第j个输入对第i个输出的传递关系，当$i \neq j$时，意味着不同标号的输入与输出有相互关联。称为耦合关系，这正是多变量系统的特点。

多输入多输出系统的空间表达式及传递函数阵

例： **考虑这样一个系统，它的状态方程、输出方程分别为：**

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

求系统的传递函数矩阵。

解： **由已知：** $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

且 $(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)}\\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$

所以，系统的传递矩阵为：

多输入多输出系统的空间表达式及传递函数阵

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$$

$$=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+1)(s+2)}&\frac{1}{(s+1)(s+2)}\\\frac{-2}{(s+1)(s+2)}&\frac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{s+4}{(s+1)(s+2)}&\frac{1}{(s+1)(s+2)}\\\frac{s+4}{s+2}&\frac{1}{s+2}\\\frac{s(s-2)}{(s+1)(s+2)}&\frac{s^2+5s+3}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

此传递函数矩阵有六个元素，每个都是一个传递函数。

组合系统的状态空间表达式及传递函数阵

组合系统的空间表达式及传递函数阵

实际的控制系统，往往由多个子系统组合而成，或并联，或串联，或形成反馈连接，这种系统称组合系统。这里仅限于讨论线性定常组合系统的状态空间表达式及其传递函数阵。

设子系统 Σ_1为：$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 u_1 \\ y_1 = C_1 x_1 + D_1 u_1 \end{cases}$，简记为：$\sum_1(A_1, B_1, C_1, D_1)$

子系统Σ_2为：$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_2 x_2 + B_2 u_2 \\ y_2 = C_2 x_2 + D_2 u_2 \end{cases}$，简记为：$\sum_2(A_2, B_2, C_2, D_2)$

组合系统的空间表达式及传递函数阵

1、并联组合系统

所谓并联组合系统，是指各子系统有相同的输入，组合系统的输出是各子系统的代数和，其结构简图如图1所示。

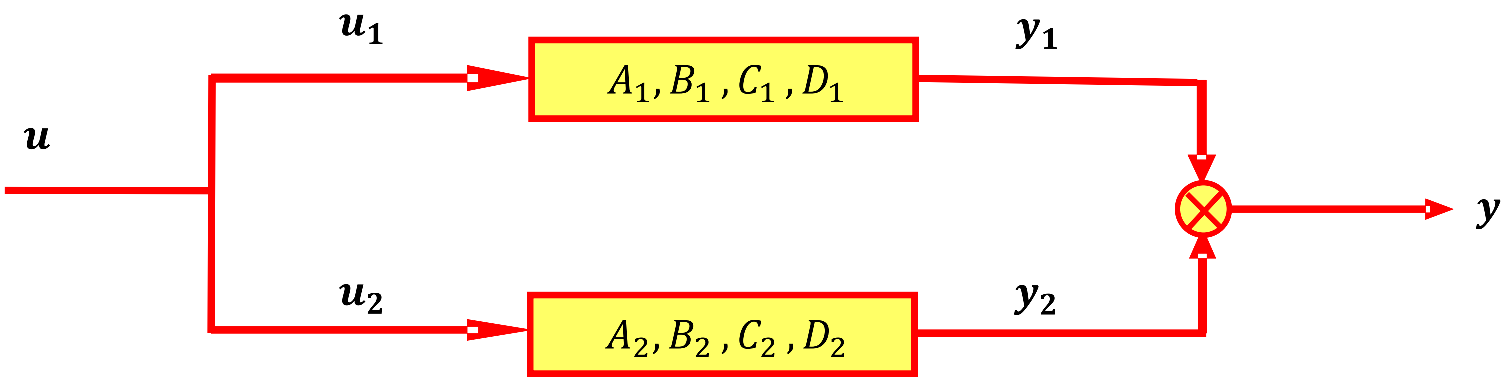


图1　并联组合系统

由图可知：$u_1 = u_2 = u$，$y = y_1 + y_2$

组合系统的空间表达式及传递函数阵

并联子系统的状态方程得状态空间表达式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[D_1+D_2]u$$

从而组合系统的传递函数阵为：

$$G(s)=\begin{bmatrix}C_1 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(sI-A_1)^{-1} & 0\\ 0 & (sI-A_2)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}+[D_1+D_2]$$

$$=\left[C_1(sI-A_1)^{-1}B_1+D_1\right]+\left[C_2(sI-A_2)^{-1}B_2+D_2\right]$$

$$=G_1(s)+G_2(s)$$

故系统并联时，系统传递函数阵等于子系统的传递函数阵之和。

组合系统的空间表达式及传递函数阵

2、串联组合系统

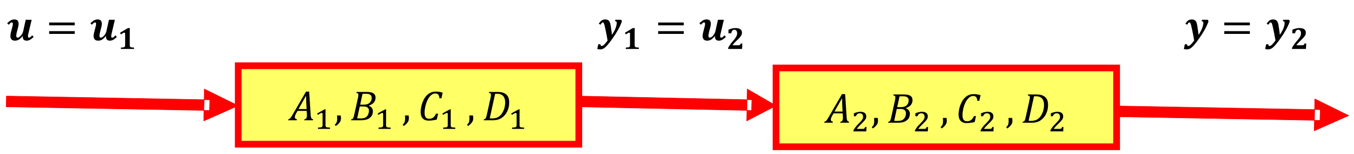


图2 串联组合系统

串联组合系统如图2所示，从图可知： $u=u_1$， $y_1=u_2$， $y=y_2$

由子系统的状态方程得：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u \\ \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2C_1x_1 + B_2D_1u \\ y = C_2x_2 + D_2C_1x_1 + D_2D_1u \end{cases}$$

组合系统的空间表达式及传递函数阵

即为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_1 & 0\\ B_1C_1 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2D_1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}D_2C_1 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[D_2D_1]u$$

传递函数矩阵：

$$G(s)=\begin{bmatrix}D_2C_1 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-A_1 & 0\\ -B_2C_1 & sI-A_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2D_1\end{bmatrix}+[D_2D_1]$$

由于$\begin{bmatrix}sI-A_1 & 0\\ -B_2C_1 & sI-A_2\end{bmatrix}$是下三角矩阵，所以：

$$\begin{bmatrix}sI-A_1 & 0\\ -B_2C_1 & sI-A_2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}(sI-A_1)^{-1} & 0\\ (sI-A_2)^{-1}B_2C_1(sI-A_1)^{-1} & (sI-A_2)^{-1}\end{bmatrix}$$

组合系统的空间表达式及传递函数阵

得：

$$G(s)=[D_2C_1 \quad C_2]\begin{bmatrix}(sI-A_1)^{-1} & 0\\ (sI-A_2)^{-1}B_2C_1(sI-A_1)^{-1} & (sI-A_2)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2D_1\end{bmatrix}+[D_2D_1]$$

$$=D_2C_1(sI-A_1)^{-1}B_1+C_2(sI-A_2)^{-1}B_2C_1(sI-A_1)^{-1}B_1$$

$$+C_2(sI-A_2)^{-1}B_2D_1+D_2D_1$$

$$=\left[C_2(sI-A_2)^{-1}B_2+D_2\right]\left[C_1(sI-A_1)^{-1}B_1+D_1\right]$$

故：$G(s)=G_2(s)\cdot G_1(s)$

即：**串联组合系统的传递函数阵等于子系统传递函数阵之积。**

（应注意，**子系统的先后次序不能颠倒。**）

组合系统的空间表达式及传递函数阵

3、具有输出反馈的系统

如图3所示为的常数反馈的情况：

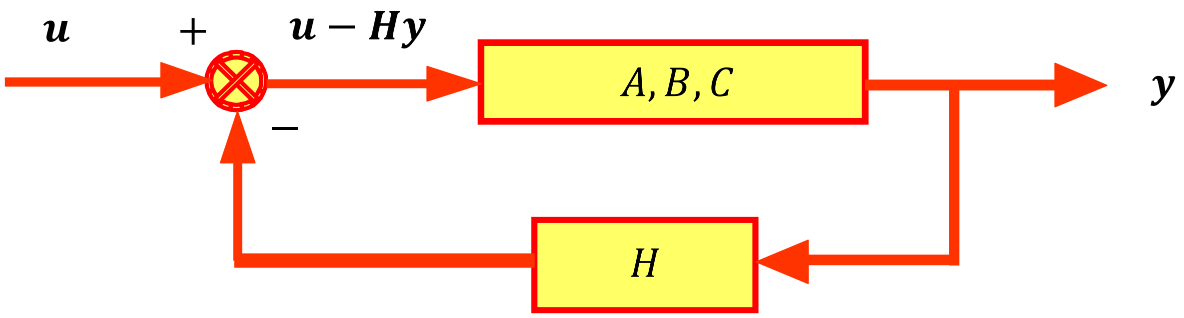


图3　常数反馈系统

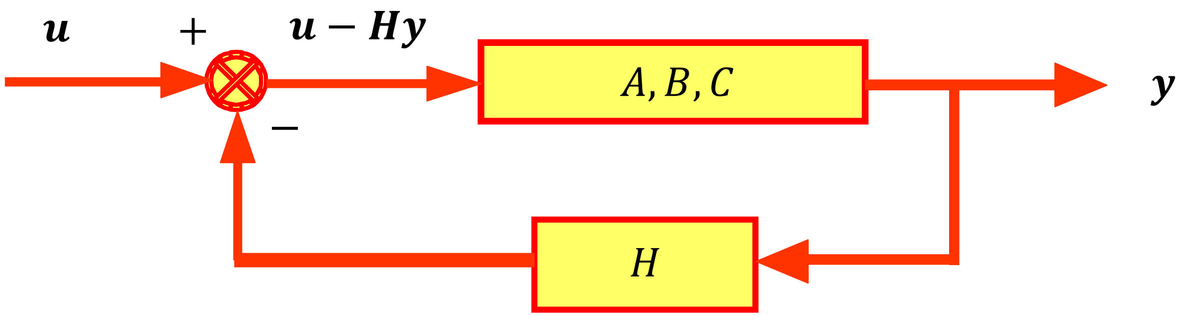
从图3可知，系统在没有反馈时，系统前向通道的传递函数矩阵为：

$$G_0(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

闭环系统状态空间表达式：
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u - Hy) = (A - BHC)x + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

故常数反馈系统传递函数阵为：$G(s) = C(sI - A + BHC)^{-1}B$

组合系统的空间表达式及传递函数阵



下面我们进一步推导

$G(s)$和$G_0(s)$的关系：

由图3得： $y(s)=G_0(s)[u(s)-Hy(s)]=G_0(s)u(s)-G_0(s)Hy(s)$

所以有： $[I+G_0(s)H]y(s)=G_0(s)u(s)$

假设$\det[I+G_0(s)h]\neq 0$，**则**$[I+G_0(s)H]$**为非奇异矩阵，则有：**

$$y(s)=[I+G_0(s)H]^{-1}G_0(s)u(s)$$

得到： $$G(s)=[I+G_0(s)H]^{-1}G_0(s)$$

同理可证明： $$G(s)=G_0(s)[I+HG_0(s)]^{-1}$$

组合系统的空间表达式及传递函数阵

考察如图4的动态反馈系统

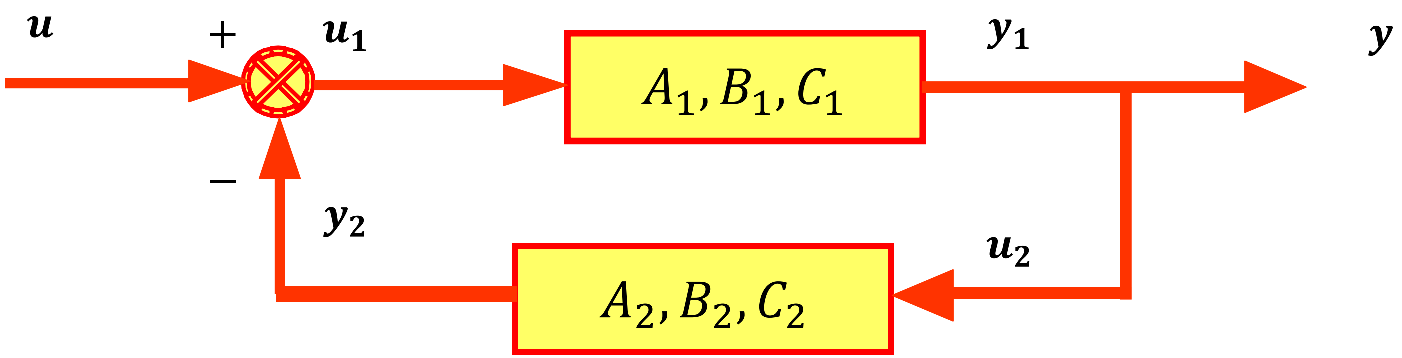


图4　动态反馈系统

从图4可知， $u_1 = u - y_2$， $y = y_1 = u_2$

组合系统的空间表达式及传递函数阵

重写子系统状态方程：

$$\Sigma_1:\begin{cases}\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1\\ y_1 = C_1x_1\end{cases},\quad \Sigma_2:\begin{cases}\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2\\ y_2 = C_2x_2\end{cases}$$

$$u_1 = u - y_2,\quad y = y_1 = u_2$$

由此可得动态反馈系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u - B_1C_2x_2\\ \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2C_1x_1\\ \quad y = C_1x_1\end{cases}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1 & -B_1C_2\\ B_2C_1 & A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}u,\quad y = \begin{bmatrix}C_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

组合系统的空间表达式及传递函数阵

再推导动态反馈系统的传递函数矩阵，设Σ_1、Σ_2的传递函数矩阵分别为$G_1(s)$、 $G_2(s)$，有：

$$y(s) = G_1(s)[u(s) - G_2(s)y(s)]$$
$$= G_1(s)u(s) - G_1(s)G_2(s)y(s)$$

将上式化简，得：

$$[I + G_1(s)G_2(s)]y(s) = G_1(s)u(s)$$

假设$det[I + G_1(s)G_2(s)] \neq 0$，则$I + G_1(s)G_2(s)$为非奇异矩阵，有：

$$y(s) = [I + G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s)u(s)$$

可以得到： $G(s) = [I + G_1(s)G_2(s)]^{-1}G_1(s)$

同理可证明： $G(s) = G_1(s)[I + G_2(s)G_1(s)]^{-1}$

状态空间实现和模拟结构图

状态空间实现

对于一个单变量线性定常系统，在经典控制理论中它的运动方程通常是一个n阶线性常系数微分方程：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y$$

$$= b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \cdots + b_{m-1}\dot{u} + b_m u \quad (m \le n) \quad (1)$$

单变量线性定常系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = c^T x + du \end{cases} \qquad (2)$$

因此，化系统一般时域描述为状态空间描述的关键在于选择合适的状态变量，根据（1）式的系数（i=1,2,...， n)，（j=0,1,2,...， m)来定出相应的（2）式的系数A, b, c, d。由高阶微分方程（或传递函数）出发来建立与之等效的状态空间表达式的问题实际上是动态系统的实现问题。

状态空间实现

高阶微分方程中不含作用函数导数项

首先我们讨论最简单的情况，即在高阶微分方程中不含作用函数的各阶导数的情况。显然高阶微分方程可表示为如下形式:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u$$

可以看出，对于此系统，若已知初始条件$y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$及$t \geq 0$时的输入$u(t)$，则该系统在任何$t \geq 0$时刻的行为便可以确定。

状态空间实现

因此我们可以选取$y(t),\dot{y}(t),\ldots,y^{(n-1)}(t)$这$n$个变量为系统的一组状态变量：

$$\boxed{y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}\dot{y}+a_ny=u}$$

$$\begin{cases} x_1=y \\ x_2=\dot{y} \\ x_3=\ddot{y} \\ \vdots \\ x_{n-1}=y^{(n-2)} \\ x_n=y^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1=\dot{y}=x_2 \\ \dot{x}_2=\ddot{y}=x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}=y^{(n-1)}=x_n \\ \dot{x}_n=y^{(n)}=-a_1y^{(n-1)}-\cdots-a_ny+u \\ \quad =-a_1x_n-a_2x_{n-1}-\cdots-a_nx_1+u \end{cases}$$

状态空间实现

由上式所示方程组中第一式可得系统的输出关系式为：$y=x_1$，化为向量矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ & & & \cdots & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

状态空间实现

上式可以简化为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = c^T x \end{cases}$$

其中：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

状态空间实现

例： 设系统的微分方程为：$\dddot{y}+7\ddot{y}+14\dot{y}+10y=u$

求系统的状态方程和输出方程。

解： 选取状态变量为：

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} \end{cases} \quad \text{得到状态方程为：} \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \dot{x}_3 = \dddot{y} = -10x_1 - 14x_2 - 7x_3 + u \end{cases}$$

写成向量矩阵：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -14 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

或简写为：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -14 & -7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

模拟结构图和状态空间实现

状态空间实现：根据传递函数导出状态空间描述，并常常伴随不同形式的模拟结构图。

在状态空间分析中，利用模拟计算机的模拟结构图能充分反映状态变量间的相互关系，对建立状态空间表达式很有帮助。由模拟结构图写出状态方程的方法往往使我们得到几种有用的特殊的状态方程的实现形式，称标准型。

基本思路：

（1）基于串并联分解

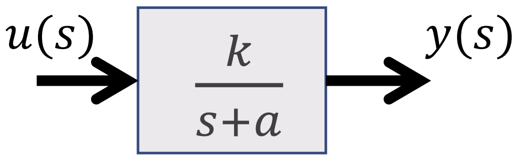
（2）基于部分分式分解

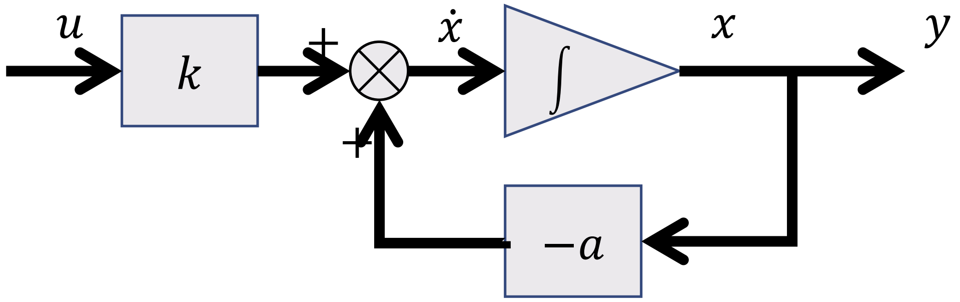
（3）基于积分器串+常值反馈

基于串并联分解

模拟结构图的基本单元的实现：

例如：$G(s) = \frac{k}{s+a}$



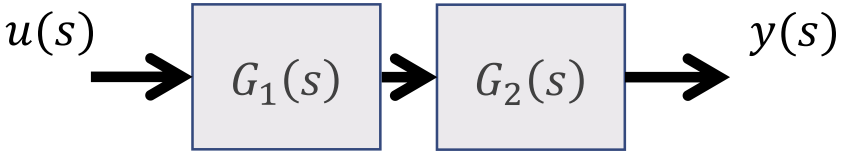


$$y(s) = [ku(s) - ay(s)]s^{-1}$$

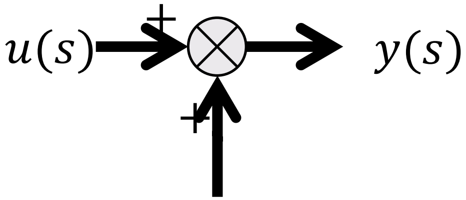
$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ku \\ y = x \end{cases}$$

基于串并联分解

模拟结构图的基本操作：



$$\boldsymbol{y(s) = G_2(s)G_1(s)u(s)}$$



基于串并联分解

(1) 当系统的描述是以方块图给出时，基于各模块的串并联分解可直接导出相应的状态空间表达式。下面，我们举例说明此方法。设给出系统如图1(a)所示，其中z_1、p_1、p_2、p_3、k均为常值，y 为输出，u 是输入。导出相应的状态空间表达式。

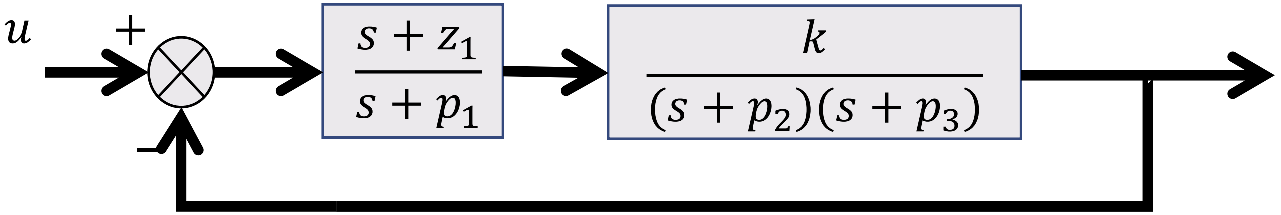


图1(a)

第一步是把各环节的传递函数化为最简形式($\frac{k_i}{s+p_i}$)的组合，于是图1(a)可化为图1(b)。

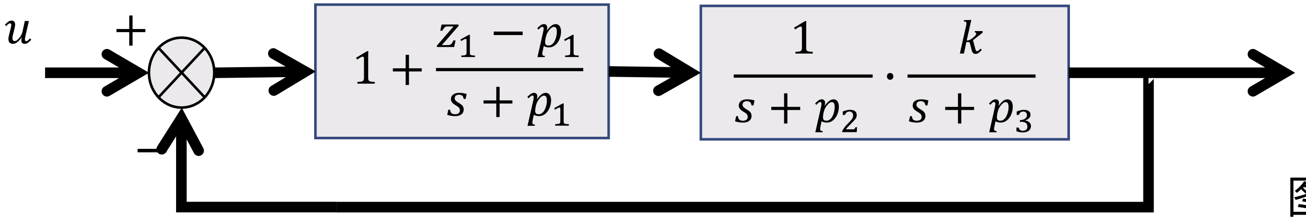


图1(b)

基于串并联分解

第二步是把具有简单函数相加的环节化为单元方块的并联，把具有简单函数相乘的环节化为单元方块的串联，从而将图1(b)转化为图1(c)。

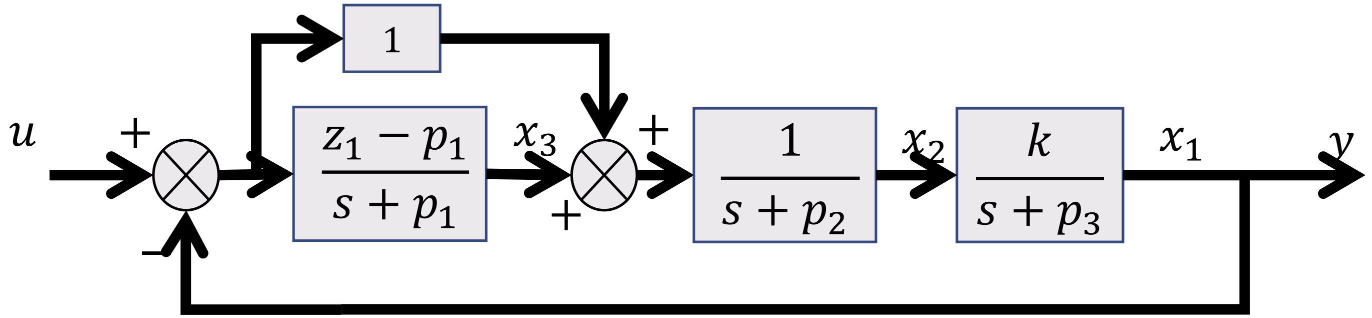


图1(c)

第三步，在图（c）上设置状态变量并列出状态方程和输出方程。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -p_3x_1 + kx_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - p_2x_2 + x_3 + u \\ \dot{x}_3 = (p_1 - z_2)x_1 - p_1x_3 + (z_1 - p_1)u \end{cases}$$

$$y = x_1$$

基于串并联分解

写成矩阵向量的形式即为：

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-p_3 & k & 0\\ -1 & -p_2 & 1\\ p_1-z_1 & 0 & -p_1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\z_1-p_1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

例　　写出图2(a)所示系统的状态方程和输出方程。首先把前向通路的二阶传递函数表示为两个一阶传递函数的串联，如图2(b)所示，然后在图2(b)上设置态变量，并根据图2(b)写出状态空间表达式。

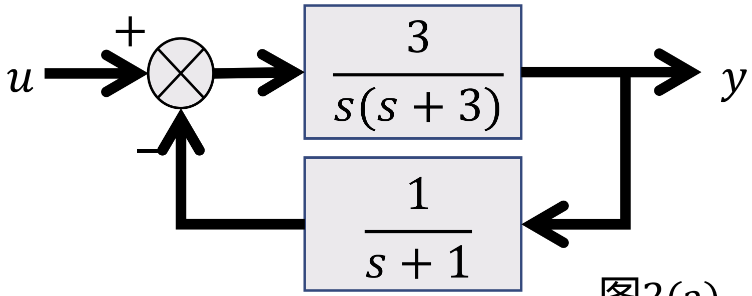


图2(a)

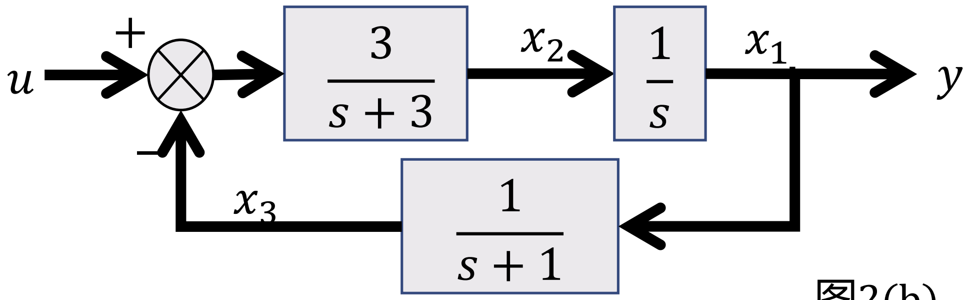


图2(b)

基于串并联分解

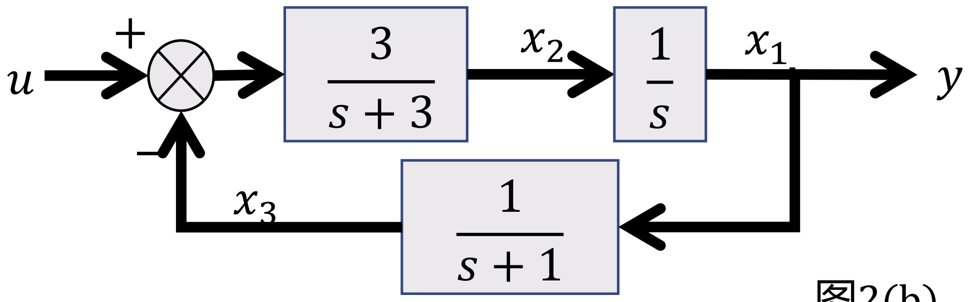


图2(b)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + 3(-x_3 + u) \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

整理并写成向量矩阵形式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

基于部分分式分解

将传递函数展开成部分分式，根据此部分分式画出其模拟结构图，然后由此模拟结构图写出的状态空间表达式是具有一定特点的约当标准型。

设单输入一单输出系统的传递函数如下：

$$g(s)=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

由于系统的特征值有两种情况，一是所有的特征值都是两两相异的；一是有些特征值是相同的。

以下分两种情况分别讨论。

基于部分分式分解

(1) 设传递函数具有两两相异的特征值$\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$，则$g(s)$可展开成如下部分分式：

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{\alpha_1}{s-\lambda_1} + \frac{\alpha_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{s-\lambda_n} + \delta$$

其中：

$$\alpha_i = \lim_{s \to \lambda_i}(s-\lambda_i) \cdot g(s) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

而：

$$y(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{s-\lambda_i} u(s) + \delta u(s) \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

基于部分分式分解

容易看到，其模拟结构图如 图1 所示。

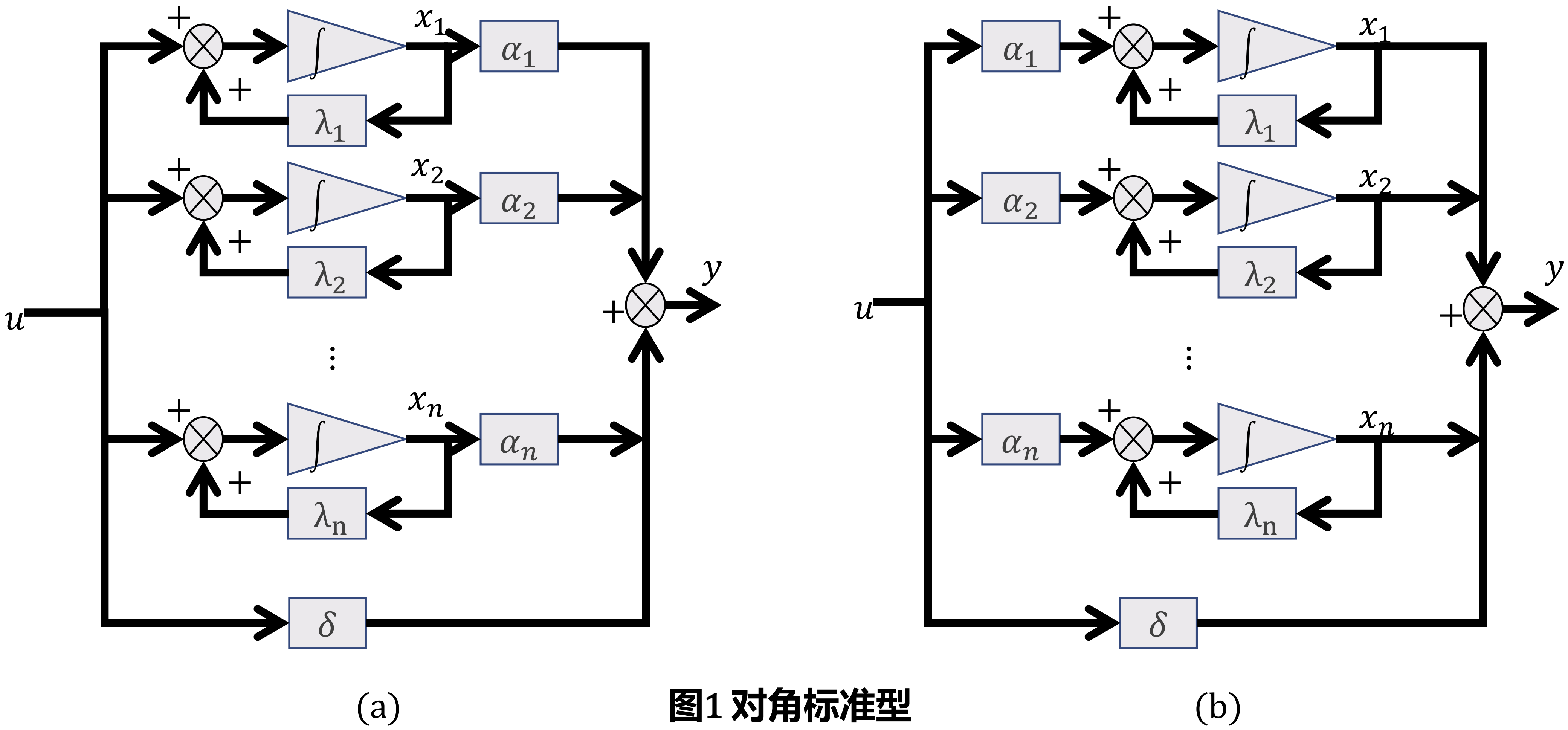


图1 对角标准型

基于部分分式分解

这种结构的显著特点是积分器不再是前后串联形式而是并联形式。

取状态变量如图1所示，则状态方程和输出方程可表示为：

$$(a)\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}x+\delta u\end{cases}$$

$$(b)\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}x+\delta u\end{cases}$$

基于部分分式分解

两式是互为对偶的，两式的系数矩阵A均为对角矩阵，对角线上各元素是互异的 n 个特征值，故称为对角线标准型或解耦标准型，即变量之间不存在耦合关系。广义地说，它是属于下面介绍的约当标准型：

$$g(s)=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

(2) 考虑特征方程式具有重根的情况。此时，也可以象下面那样用部分分式展开。为了简单起见，设 λ_1 为三重根， $\lambda_4 \sim \lambda_n$为互异的根，于是得到：

$$g(s)=\frac{\alpha_{11}}{s-\lambda_1}+\frac{\alpha_{12}}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{\alpha_{13}}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{\alpha_4}{s-\lambda_4}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-\lambda_n}+\delta$$

基于部分分式分解

$$g(s)=\frac{\alpha_{11}}{s-\lambda_1}+\frac{\alpha_{12}}{(s-\lambda_1)^2}+\frac{\alpha_{13}}{(s-\lambda_1)^3}+\frac{\alpha_4}{s-\lambda_4}+\cdots+\frac{\alpha_n}{s-\lambda_n}+\delta$$

其中：
$$\begin{cases}\alpha_{13}=\lim\limits_{s\to\lambda_1}[(s-\lambda_1)^3 g(s)] \\ \alpha_{12}=\lim\limits_{s\to\lambda_1}[\frac{d\left((s-\lambda_1)^3 g(s)\right)}{ds}] \\ \alpha_{11}=\frac{1}{2!}\lim\limits_{s\to\lambda_1}[\frac{d^2\left((s-\lambda_1)^3 g(s)\right)}{ds^2}] \\ \alpha_i=\lim\limits_{s\to\lambda_i}(s-\lambda_i)\cdot g(s) \quad i=4,5,\ldots,n\end{cases}$$

可以画出系统的模拟结构图，如图2所示。在这种结构中，重根分式采取积分器的串联形式，其余的采用积分器并联形式。

基于部分分式分解

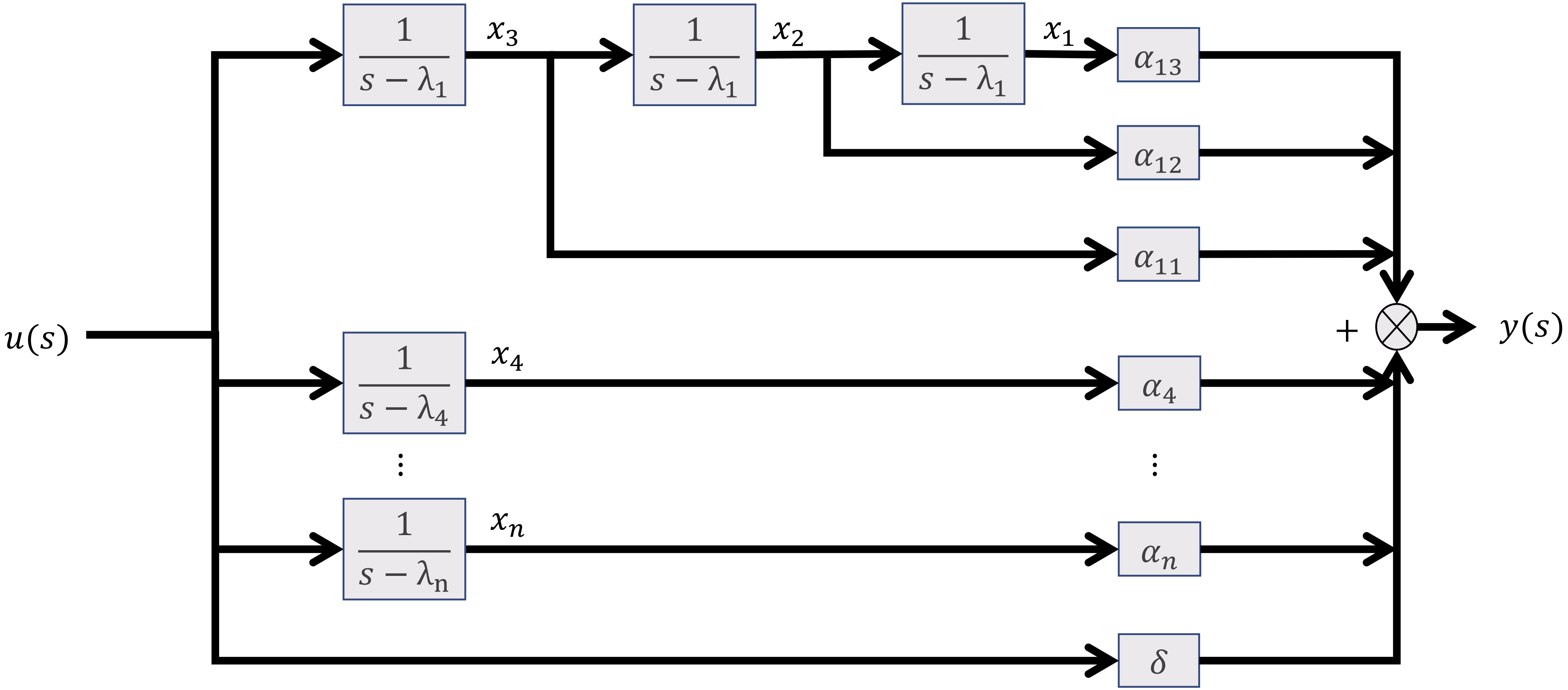


图2　　约当标准型

基于部分分式分解

设置状态变量如上页图2所示，则相应的状态空间表达式为：

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + x_2 \\
\dot{x}_2 = \lambda_1 x_2 + x_3 \\
\dot{x}_3 = \lambda_1 x_3 + u \\
\dot{x}_4 = \lambda_4 x_4 + u \\
\qquad\quad \vdots \\
\dot{x}_n = \lambda_n x_n + u
\end{cases}
$$

$$
y = \alpha_{13} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{11} x_3 + \alpha_4 x_4 + \cdots + \alpha_n x_n + \delta u
$$

基于部分分式分解

写成向量矩阵的形式:

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

$$
y = \begin{bmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_4 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} x + \delta u
$$

上式称为约当标准型。

式中对应于重特征根 λ_1 的虚线框块称为约当块。约当块的特点是主对角元素是特征值，主对角线左下方的元素都为零，主对角线右上面，紧靠重根的元素全为1，其余元素均为零。

基于部分分式分解

一个系统有n个多重根，就有n个约当块。

例如一系统含有三重λ_1，二重2以及单重根λ_3和λ_4，则其状态矩阵A为：

$$A=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & 1 & & \\ & & & 0 & \lambda_2 & & \\ & & & & & \lambda_3 & \\ & & & & & & \lambda_4 \end{bmatrix}$$

其中有两个约当块，每个从属于一个特征值。

基于部分分式分解

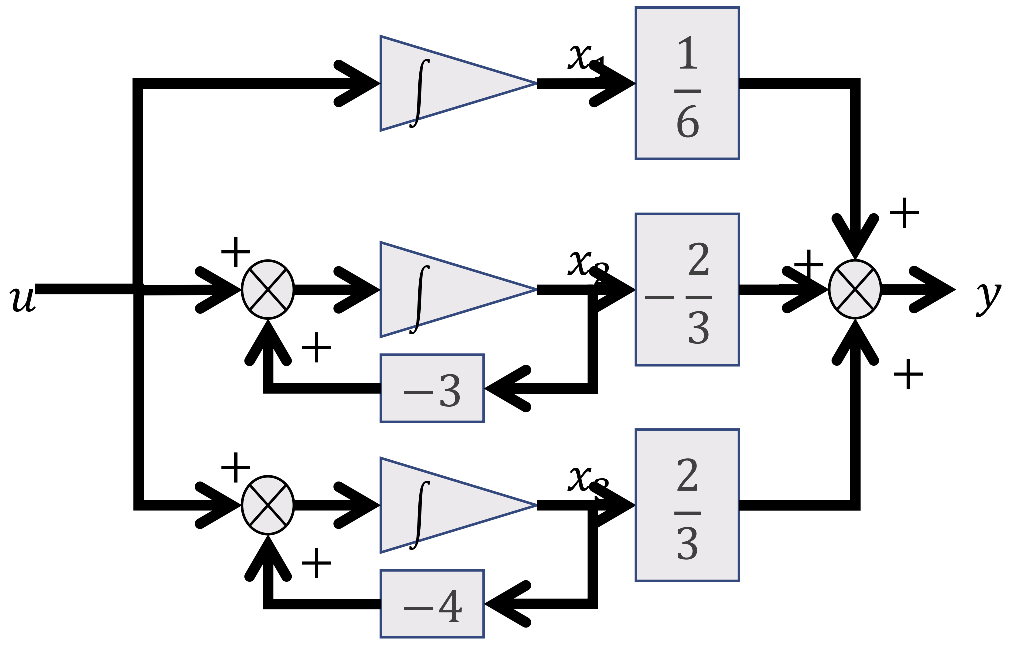
例　设系统的传递函数为：$g(s)=\dfrac{s^2+3s+2}{s(s^2+7s+12)}=\dfrac{1}{6s}-\dfrac{2}{3(s+3)}+\dfrac{3}{2(s+4)}$

可画出如下图所示的模拟结构图，并在图上设置状态变量。

状态方程及输出方程为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=u\\ \dot{x}_2=-3x_2+u\\ \dot{x}_3=-4x_3+u\end{cases}$$

$$y=\frac{1}{6}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{3}{2}x_3$$



写成向量矩阵形式即为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{2}{3}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}x$$

基于积分器串+常值反馈

基于串并联分解或部分分式分解的实现方法，都要求先得到系统的零极点，当系统阶次较高时，有时难以计算。

此时如何建立对应于传递函数的状态空间描述?

基于积分器串+常值反馈

1、能控标准 I 型

为了方便起见，先来看一个三阶微分方程：

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = b_0\dddot{u} + b_1\ddot{u} + b_2\dot{u} + b_3 u$$

其传递函数为：$g(s) = \frac{b_0 s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$

上式可变换为：

$$g(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0)s^2 + (b_2 - a_2 b_0)s + b_3 - a_3 b_0}{s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3}$$

$$= b_0 + \frac{(b_1 - a_1 b_0)s^{-1} + (b_2 - a_2 b_0)s^{-2} + (b_3 - a_3 b_0)s^{-3}}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_3 s^{-3}}$$

令：$e(s) = \frac{1}{1 + a_1 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_3 s^{-3}} u(s)$

则有：$e(s) = u(s) - a_1 e(s) s^{-1} - a_2 e(s) s^{-2} - a_3 e(s) s^{-3}$

基于积分器串+常值反馈

可画出如 图1 所示的模拟结构图：

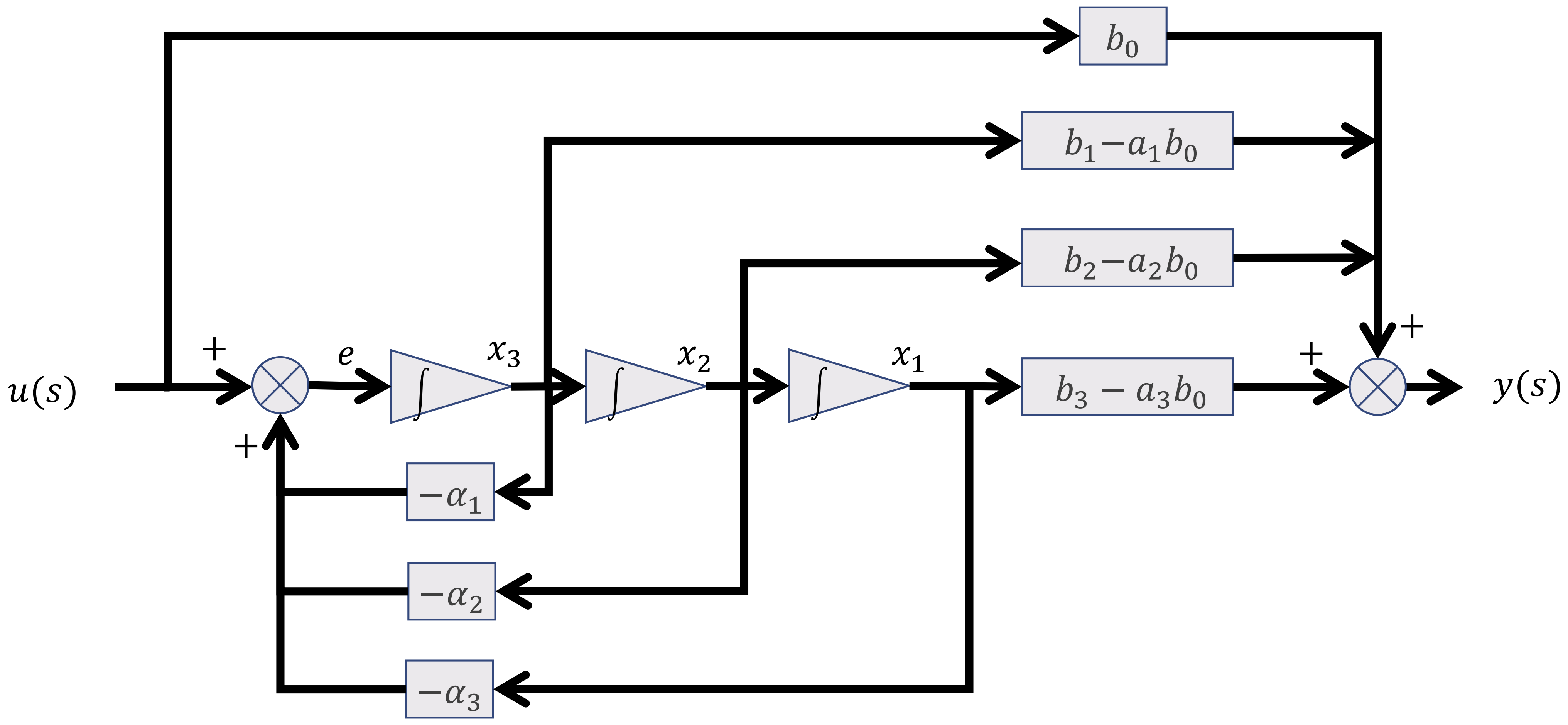


图1 能控标准 I 型

基于积分器串+常值反馈

在图1上设置状态变量，则得状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -a_3x_1 - a_2x_2 - a_1x_3 + u \\ y = (b_3 - a_3b_0)x_1 + (b_2 - a_2b_0)x_1 + (b_1 - a_1b_0)x_1 + b_0u \end{cases}$$

写成矩阵形式：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\boldsymbol{a}_3 & -\boldsymbol{a}_2 & -\boldsymbol{a}_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{b}_0 \quad \boldsymbol{b}_2 - \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}_0 \quad \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}_0]\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}_0\boldsymbol{u} \end{cases}$$

基于积分器串+常值反馈

上述这种方法也称为直接程序法。扩大到n阶系统，有：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & 0\\ & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & & 1\\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=[b_n-a_nb_0 \quad b_{n-1}-a_{n-1}b_0 \quad b_{n-2}-a_{n-2}b_0 \quad \ldots \quad b_1-a_1b_0]x+b_0u$$

具有图1结构或以上结果所示的形式称为能控标准Ⅰ型，也称控制器规范型（第二可控规范型）。

基于积分器串+常值反馈

2、能观标准II型

$$\dddot{y}+a_1\ddot{y}+a_2\dot{y}+a_3y=b_0\dddot{u}+b_1\ddot{u}+b_2\dot{u}+b_3u$$

同样以三阶系统为例，将传递函数重写如下：

$$g(s)=\frac{b_0s^3+b_1s^2+b_2s+b_3}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}=\frac{b_0+b_1s^{-1}+b_2s^{-2}+b_3s^{-3}}{1+a_1s^{-1}+a_2s^{-2}+a_3s^{-3}}$$

则有： $y(s)+a_1s^{-1}y(s)+a_2s^{-2}y(s)+a_3s^{-3}y(s)$

$$=b_0u(s)+b_1s^{-1}u(s)+b_2s^{-2}u(s)+b_3s^{-3}u(s)$$

进一步：

$$y(s)=b_0u(s)+[b_1u(s)-a_1y(s)]s^{-1}+[b_2u(s)-a_2y(s)]s^{-2}+[b_3u(s)-a_3y(s)]s^{-3}$$

$$=b_0u(s)+s^{-1}\{b_1u(s)-a_1y(s)+s^{-1}\left[b_2u(s)-a_2y(s)+s^{-1}\left(b_3u(s)-a_3y(s)\right)\right]\}$$

基于积分器串+常值反馈

用模拟结构图来表示，则可画出下面所示图2：

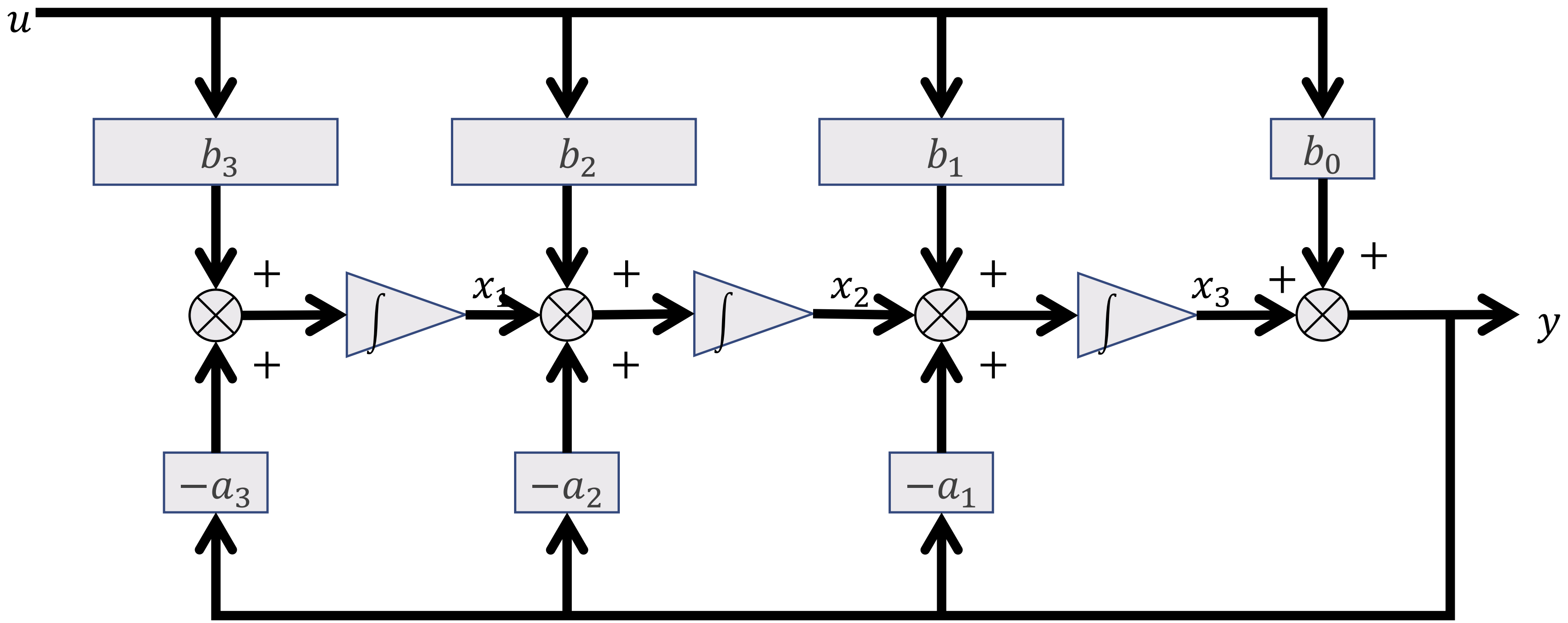
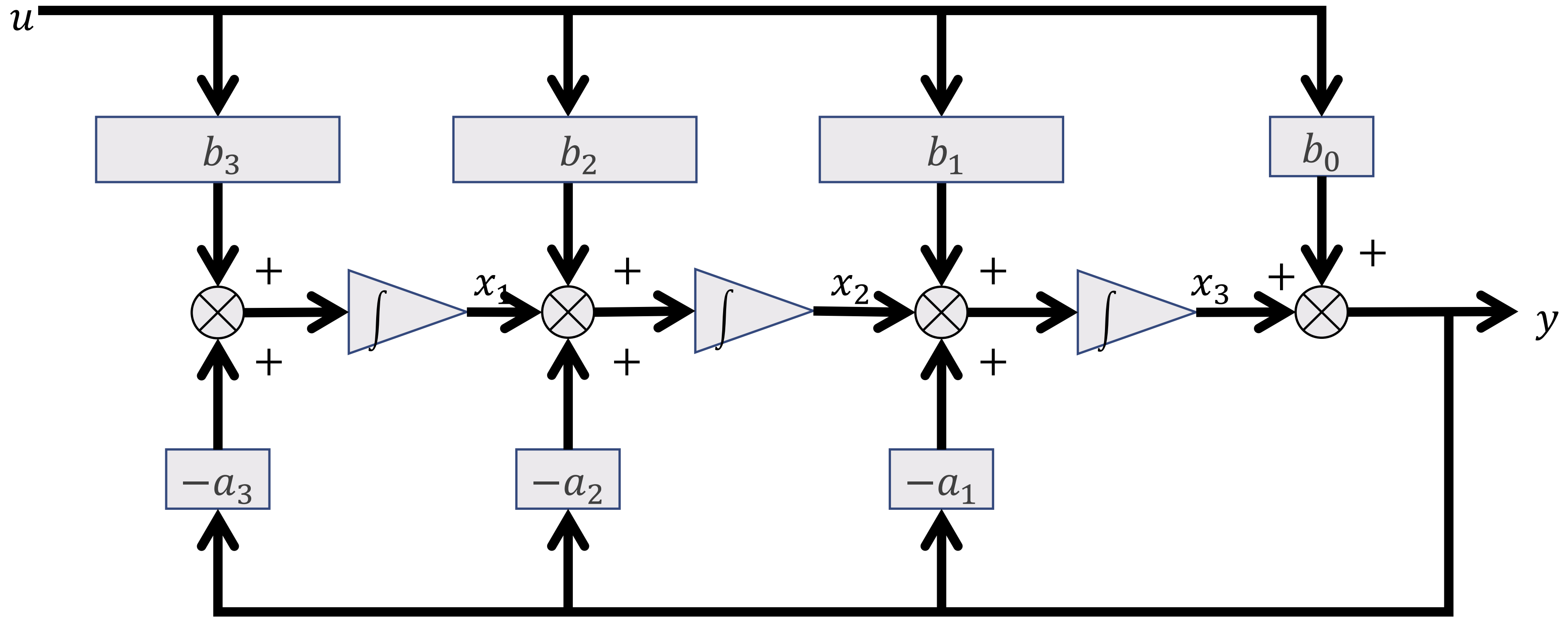


图2 能观标准 II 型

基于积分器串+常值反馈



根据 图2 设置的状态变量，则可以写出状态方程和输出方程：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -a_3(x_3 + b_0 u) + b_3 u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_2(x_3 + b_0 u) + b_2 u \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_1(x_3 + b_0 u) + b_1 u \end{cases}$$

$$y = b_0 u + x_3$$

基于积分器串+常值反馈

将上式重写如下，并加以整理得右下式：

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -a_3(x_3 + b_0u) + b_3u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_2(x_3 + b_0u) + b_2u \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_1(x_3 + b_0u) + b_1u\end{cases}$$
$$y = b_0u + x_3$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -a_3x_3 + (b_3 - a_3b_0)u \\ \dot{x}_2 = x_1 - a_2x_2 + (b_2 - a_2b_0)\,u \\ \dot{x}_3 = x_2 - a_1x_3 + (b_1 - a_1b_0)u\end{cases}$$
$$y = b_0u + x_3$$

将上式写成向量矩阵式得：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_3 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_3 - a_3b_0 \\ b_2 - a_2b_0 \\ b_1 - a_1b_0 \end{bmatrix} u$$
$$y = [0 \quad 0 \quad 1]x + b_0x$$

上述这种方法称多层积分法。将上式扩展到 n 阶系统：

基于积分器串+常值反馈

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_n-a_nb_0\\ b_{n-1}-a_{n-1}b_0\\ b_{n-2}-a_{n-2}b_0\\ \vdots\\ b_1-a_1b_0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}x+b_0u$$

具有如上形式或具有 图2 模拟结构的系统称能观标准 II 型。

通常能控标准I型，能观标准II型用得较多，以后如不加特殊说明，能控标准型就是指其I型，而能观标准型就是指其II型。

基于积分器串+常值反馈

例　　已知系统的传递函数如下,试写出它的状态空间表达式。

$$g(s)=\frac{3(s+1)}{s^3+4s^2+3s+3}$$

解　　可以应用前述方法中任何一种写出它的状态空间表达式。可以不必画出状态变量图，而直接列写方程。上式中:

$$a_1=4,\ a_2=3,\ a_3=3,\ b_0=0,\ b_1=0,\ b_2=3,\ b_3=3$$

能控标准I型（第二可控规范型）为:

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -3 & -3 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$$

而能观标准II型（第二可观规范型）为上式的对偶形式，即为:

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}3\\3\\0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}x\end{cases}$$

系统的等价变换及其应用

系统的等价变换及其应用(一)

一、线性变换：

对于一个给定的动态系统，可以选择不同的状态变量组，从而得到不同结构的状态空间表达式，例如能控标准型，能观标准型或约当标准型。不同的状态变量组之间的关系实质上是一种线性变换的关系，或称坐标变换。设给定系统为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \qquad (*)$$

我们总可以找到任意一个非奇异矩阵 T，将原状态向量 x 作线性变换，得到另一个状态向量 z，即：

$x = Tz$ 或 $z = T^{-1}x$

代入（*）则得新状态空间表达式：

系统的等价变换及其应用(一)

$$\begin{cases} T\dot{z} = ATz + Bu \\ y = CTz + Du \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = T^{-1}ATz + T^{-1}Bu \\ y = CTz + Du \end{cases} \quad (**)$$

令：$\begin{cases} \bar{A} = T^{-1}AT, \quad \bar{B} = T^{-1}B \\ \bar{C} = CT, \quad \bar{D} = D \end{cases}$ (***)

则有：$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}u \\ y = \bar{C}z + \bar{D}u \end{cases}$ 重写成：$\begin{cases} \dot{x} = Az + Bu \\ y = Cz + Du \end{cases}$，其中$x = Tz$

可以看出，用变换而联系起来的两个系统（*）式和（**）式，对于相同的输入，必定给出相同的输出，此时称这两个系统为代数上等价的系统。由于非奇异变换矩阵是任意选择的，所以和某系统代数上等价的系统有无穷多。

系统的等价变换及其应用(一)

反过来说，尽管系统的状态空间表达式不是唯一的，但不同的表达式之间，也仅仅只是（***）关系式所确定的线性非奇异变换的关系。

例 设原系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases}\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & -2\\1 & -3\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}u\\ y = \begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}x\end{cases}$$，取$T = \begin{bmatrix}6 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}$，即$T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}$，令$z = T^{-1}x$

则：$\bar{A} = T^{-1}AT = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2\\1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 2\\2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}$

$\bar{B} = T^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$\bar{C} = CT = \begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 2\\2 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 0\end{bmatrix}$

所以新状态空间表达式：$\begin{cases}\dot{z} = \begin{bmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{bmatrix}z + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u\\ y = \begin{bmatrix}6 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$，显然为**能控标准 I 型**

系统的等价变换及其应用(一)

二、系统特征值不变性及系统的不变量：

状态方程中的系数矩阵 A，也称为状态矩阵，是一个很重要的矩阵。它包含了许多有关系统特征的重要信息，这里讨论 A 的特征值。系统特征值就是状态矩阵 A 的特征值，也即特征方程：

$$|\lambda I - A| = 0$$

的根。方阵A有n个特征值。实际的物理系统， A为实数矩阵，故特征值或为实数，或为共轭复数对。

例　　若系统矩阵为： $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$，求特征值。

解：　　矩阵A的特征方程为： $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

解得$\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$，即为特征方程的根。

系统的等价变换及其应用(一)

状态矩阵A的一个重要性质是其特征值的不变性，即在状态变量的线性变换中，新老状态方程的A阵和$\bar{A}$阵的特征值是相同的。为了证明这一点，只要证明$|\lambda I-A|=|\lambda I-\bar{A}|$即可，证明如下：

$$\begin{aligned}|\lambda I-\bar{A}|&=|\lambda I-T^{-1}AT|=|\lambda T^{-1}T-T^{-1}AT|\\&=|T^{-1}(\lambda I-A)T|=|T^{-1}||\lambda I-A||T|\\&=|T^{-1}T||\lambda I-A|=|\lambda I-A|\end{aligned}$$

从而我们证明了在对状态变量作线性变换的情况下，A阵的特征值是不变的。这还意味着A 阵和$\bar{A}$阵的特征方程是相同的。即如设系统的特征方程为：

$$|\lambda I-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+a_2\lambda^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

则方程的系数是不变的量，故称特征多项式的系数为系统的不变量。

系统的等价变换及其应用(一)

同样可以证明，对于给定的系统，尽管其状态空间表达式不同，但反映输入—输出的特性的传递函数阵却是具有相同的形式。

$$
\begin{aligned}
\overline{G}(s) &= \overline{C}(sI-\overline{A})^{-1}\overline{B}+\overline{D} \\
&= CT(sT^{-1}T-T^{-1}AT)^{-1}T^{-1}B+D \\
&= CT(T^{-1}(sI-A)T)^{-1}T^{-1}B+D \\
&= CTT^{-1}(sI-A)^{-1}TT^{-1}B+D \\
&= C(sI-A)^{-1}B+D \\
&= G(s)
\end{aligned}
$$

可见一切代数上等价的线性系统都有相同的传递函数阵。

系统的等价变换及其应用(二)

三、特征向量：

设P_i为n维向量，λ_i为标量，它是矩阵A的特征值，若下式成立

$$AP_i = \lambda_i P_i$$

则称向量P_i为矩阵A的对应于特征值λ_i的特征向量。从上式可以看出，特征向量P_i经A线性变换后，方向不变，仅长度增加了λ_i倍。

四、化状态空间表达式为约当标准型：

这里介绍化状态空间表达式为约当标准型的方法。显然，约当标准型可由线性变换而获得。分两种情况：若矩阵有两两相异的特征值，则可化为对角标准型；若系统矩阵有重根，则可化为一般的约当标准型。

系统的等价变换及其应用(二)

1、状态矩阵A无重根时：

对线性定常系统：$\dot{x} = Ax + Bu$

如果A有n个两两相异特征值，则存在非奇异矩阵T，通过线性变换$\hat{x} = T^{-1}x$，使之化为对角线规范形式：

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u\text{，其中：}\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\text{，}\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\text{为}A\text{的特征值。}$$

证明　首先令P_i为A的属于λ_i特征值的特征向量，且：

$$P_i = \begin{bmatrix} p_{1i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

系统的等价变换及其应用(二)

因为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$两两相异，故$\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\cdots,\mathrm{P}_n$必线性无关，由这些特征向量

组成矩阵T：$T=[P_1\quad\cdots\quad P_n]=\begin{bmatrix}p_{11}&\cdots&p_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\p_{n1}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}$必然是非奇异的。

进而，根据特征向量的关系式：$AP_i=\lambda_iP_i$，则有：

$$
\begin{aligned}
AT&=A[P_1\quad\cdots\quad P_n]=[AP_1\quad\cdots\quad AP_n]\\
&=[\lambda_1P_1\quad\cdots\quad\lambda_nP_n]\\
&=[P_1\quad\cdots\quad P_n]\begin{bmatrix}\lambda_1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}=T\begin{bmatrix}\lambda_1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\lambda_n\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

系统的等价变换及其应用(二)

因为T是非奇异矩阵，必存在逆矩阵。将上式左乘T^{-1}，即得：

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

重写式：$\dot{x} = Ax + Bu$，令$x = T\hat{x}$，则有：

$$T\dot{\hat{x}} = AT\hat{x} + Bu$$ 在左右两边左乘T^{-1}得：

$$\dot{\hat{x}} = T^{-1}AT\hat{x} + T^{-1}Bu$$ 即：

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$$ 其中：$\hat{A} = T^{-1}AT$，$\hat{B} = T^{-1}B$

由此，上述命题得证。

系统的等价变换及其应用(二)

例　　**已知系统：**

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\0 & -1 & 0\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}7\\2\\3\end{bmatrix}u$$

，将此状态空间表达式化为对角标准型。

解　　A**的特征方程为：** $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & 1\\0 & \lambda+1 & 0\\0 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)$

所以A**的特征值为：** $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=-1$

可见此系统的特征值两两相异。进而可确定线性变换矩阵T**，根据特征向量关系式：**

$$AP_i=\lambda_i P_i$$

定出A**的分别属于**λ_1**、**λ_2**、**λ_3**的特征向量。**

系统的等价变换及其应用(二)

由$AP_i = \lambda_i P_i$，得：$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix}$

得到：$\begin{cases} p_{21} + p_{31} = 0 \\ 3p_{21} = 0 \\ -2p_{21} + p_{31} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_{11} = K(\text{任意常数}) \\ p_{21} = 0 \\ p_{31} = 0 \end{cases}$，可取：$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

同理可定出：$P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

可以得到：$T = [P_1 \quad P_2 \quad P_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

系统的等价变换及其应用(二)

从而可以求得：

$$\widehat{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\widehat{b}=T^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 2\end{bmatrix}$$

这样，给定系统的状态方程的对角标准型为：

$$\dot{\widehat{x}}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\widehat{x}+\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 2\end{bmatrix}u$$

系统的等价变换及其应用(二)

2、状态矩阵A有重根时：

对线性定常系统式$\dot{x}=Ax+Bu$，设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$其中特征值$\lambda_j$为$m_j$重特征值，所以有：

$$\sum_{j=1}^{k} m_j = n \qquad (j=1,2,\ldots,k)$$

对于上述有重根的情况，这时导出的形式叫约当标准型，就是说总可以找到变换矩阵T，使得：

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_K \end{bmatrix}，这里有：J_j=\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \lambda_j & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

称J_j为第 j 个约当块。

系统的等价变换及其应用(二)

现在的问题是怎样得到变换矩阵 T。因为特征值重复，所以得不到n个线性无关的特征向量，即不能用化对角标准型的方法。假设对m_1重特征值λ_1，只能得到一个特征向量P_1，其余向量$P_2, P_3,\ldots, P_{m_1}$尚未求出，但由：

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_K \end{bmatrix}$$

得：$AT = T\hat{A}$，将此式展开

系统的等价变换及其应用(二)

$$A[P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_{m_1} \quad \cdots \quad P_n]$$

$$= [P_1 \quad P_2 \quad \cdots \quad P_{m_1} \quad \cdots \quad P_n]\left[\begin{array}{cccc|cccc} \lambda_1 & 1 & & & & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & & \mathbf{0} & & \\ & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & \\ \hline & & & & J_2 & & & \\ & & & & & J_3 & & \\ & \mathbf{0} & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & J_k \end{array}\right]$$

现在研究上式两边矩阵的第2列到第m_1列，得关系式：$\begin{cases} AP_2 = P_1 + \lambda_1 P_2 \\ AP_3 = P_2 + \lambda_1 P_3 \\ \vdots \\ AP_{m_1} = P_{m_1-1} + \lambda_1 P_{m_1} \end{cases}$

系统的等价变换及其应用(二)

$$\begin{cases} AP_2 = P_1 + \lambda_1 P_2 \\ AP_3 = P_2 + \lambda_1 P_3 \\ \vdots \\ AP_{m_1} = P_{m_1-1} + \lambda_1 P_{m_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (A-\lambda_1 I)P_2 = P_1 \\ (A-\lambda_1 I)P_3 = P_2 \\ \vdots \\ (A-\lambda_1 I)\,P_{m_1} = P_{m_1-1} \end{cases}$$

上式有(m_1-1)个方程和$P_2, P_3,\ldots, P_{m_1}$共(m_1-1)个未知量，由上式可求得$P_2, P_3,\ldots, P_{m_1}$。

同理可求得P_{m_1}以后的特征向量，于是可组成T矩阵。

本章结束