本章教学内容

基本内容

- 线性连续定常系统状态方程的解
- 状态转移矩阵及其性质和算法

线性连续定常系统状态方程的解（一）

齐次方程

线性定常系统的状态方程为：

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \quad (t \geq t_0) \tag{1}$$

其中 x, u 分别为 n, r 维向量，系数矩阵 A, B 分别为 $n \times n$ 和 $n \times r$ 常数矩阵。对于上述方程，现讨论具体求解的方法。

一、齐次方程的解：

在求微分方程式(1)的解之前，首先考虑输入项 u 为零的齐次方程式

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

的解。此时无控制作用，系统处于由初始状态引起的自由运动状态，所以齐次方程式的解也称自由解。

齐次方程

首先，给出如下命题：

若初始时刻t_0时的状态给定为$x(t_0)=x_0$，则式(2)有唯一确定解：

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0 \qquad (t \geq t_0) \tag{3}$$

若初始时刻从$t=0$开始，即$x(0)=x_0$，则式(2)解形式为：

$$x(t)=e^{At}x_0 \qquad (t \geq 0) \tag{4}$$

其中e^{At}或$e^{A(t-t_0)}$称为矩阵指数，为$n \times n$方阵。

齐次方程

1. 用直接法证明：

首先用直接法来证明上述基本结论。和通常的标量微分方程类似，先假定(2)式的解为时间 t 的向量幂级数形式，即

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \quad (t \geq 0) \qquad (5)$$

将(5)式代入方程(2)式得：

$$b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \cdots + k b_k t^{k-1} + \cdots$$

$$= A\left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots + b_k t^k + \cdots\right) \quad (t \geq 0) \qquad (6)$$

齐次方程

因为上式对$t \geq 0$均成立，故等式两边 t 的同次幂项的系数应相等，可得如下一组关系式：

$$
\begin{aligned}
&b_1 = Ab_0 \\
&b_2 = \frac{1}{2}Ab_1 = \frac{1}{2!}A^2 b_0 \\
&b_3 = \frac{1}{3}Ab_2 = \frac{1}{3!}A^3 b_0 \\
&\cdots \\
&b_k = \frac{1}{k}Ab_{k-1} = \frac{1}{k!}A^k b_0
\end{aligned}
$$

由此，上述命题得证。在式(5)中，令$\mathrm{t} = 0$，可得：$b_0 = \mathrm{x}(0) = b_0$

将以上结果代入(5)中，即有：

齐次方程

$$x(t)=(I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots)x_0 \tag{7}$$

或写成：

$$x(t)=(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k)x_0 \tag{8}$$

仿照标量指数的定义

$$e^{at}\triangleq 1+at+\frac{1}{2!}a^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}a^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}a^kt^k$$

我们可定义矩阵指数为：

$$e^{At}\triangleq I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k \tag{9}$$

故(7)或(8)式可表示为：

$$x(t)=e^{At}x_0$$

齐次方程

若用$(t-t_0)$代替t，即初始时刻为t_0，同样可证明：

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0$$

的正确性。

2．用*Laplace*变换法证明

$$x(t)=e^{At}x_0$$

上式也可以采用拉氏变换法来证明。对(2)式两边取Laplace变换，可得

$$s\cdot x(s)-x_0=A\cdot x(s)$$

其中$x(s)=L[x(t)]$为状态向量x(t)的拉氏变换，经整理有：

$$(sI-A)x(s)=x_0$$

将上式两边左乘$(s\mathrm{I}-\mathrm{A})^{-1}$，从而有

$$x(s)=(sI-A)^{-1}x_0$$

齐次方程

将上式作反变换得齐次方程的解，即：

$$x(t) = L^{-1}[(sI - A)^{-1}]x_0 \tag{10}$$

因为：

$$(sI - A)\left(\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \cdots + \frac{A^k}{s^{k+1}} + \cdots\right) = \left(\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \cdots + \frac{A^k}{s^{k+1}} + \cdots\right)(sI - A) = I$$

所以：$(sI - A)^{-1} = \frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \cdots + \frac{A^k}{s^{k+1}} + \cdots$

将上式代入(10)式，即得：

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{I}{s} + \frac{A}{s^2} + \frac{A^2}{s^3} + \cdots + \frac{A^k}{s^{k+1}} + \cdots\right]x_0 = \left(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^kt^k + \cdots\right)x_0 = e^{At}x_0$$

从而(4)式得到证明。

齐次方程

线性定常系统的渐近稳定性及判据：

线性定常系统的状态方程为：

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0 \qquad (t \geq t_0) \qquad (1)$$

其中x, u分别为n, r维向量，系数矩阵A, B分别为$n \times n$和$n \times r$常数矩阵。当输入信号u为零时，如果系统对于任意初始状态x_0的自由解

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 \qquad (t \geq t_0)$$

总满足$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$，那么我们称(1)式是渐近稳定的。

判据：(1)式是渐近稳定的，当且仅当A的特征值均具有负实部。

分析：可以根据矩阵指数的性质证明。

线性连续定常系统状态方程的解（二）

非齐次方程

线性定常系统的状态方程为： 现在来讨论线性定常系统在控制作用$u(t)$下的强制运动。此时状态方程为一般的非齐次方程

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (*)$$

在初始时刻t_0时，初始状态为$x(t_0)$，则其解为：

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (**)$$

初始时刻$t_0 = 0$时初始状态$x(t_0) = x(0)$，其解为：

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_{0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (**')$$

很明显，线性系统(*)式的解由两部分组成。(**)式和(**')式的第一项表示由初始状态引起的自由运动，第二项表示由控制作用引起的强制运动。

非齐次方程

证明　将式(*)写成：$\dot{x} - Ax = Bu(t)$

上式两边同左乘e^{-At}得：$e^{-At}(\dot{x} - Ax) = e^{-At}Bu(t)$

即：
$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right] = e^{-At}Bu(t) \qquad (***)$$

对上式在 $t \sim t_0$ 之间积分，有:

$$e^{-At}x(t)\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

即：
$$e^{-At}x(t) = e^{-At_0}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

上式两边同左乘e^{At}，得：

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

(**)式得证。

非齐次方程

重写(***)式： $$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right] = e^{-At}Bu(t)$$

若对(***)式在 $0 \sim t$ 间积分，即可证明(**')式：

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

式(**)和(**')可分别写成如下形式：

$$x(t) = \phi(t-t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \phi(t-\tau)\, Bu(\tau)d\tau$$

以及 $$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)\, Bu(\tau)d\tau$$

非齐次方程

在特殊的控制作用下，例如在脉冲函数，阶跃函数或斜坡函数的作用下，系统解(**’)可简化为如下公式：

（1） $u(t)$为脉冲函数时，即$u(t)=k\delta(t), x(0^-)=x(0)$时，有：

$$x(t)=e^{At}x(0)+e^{At}Bk$$

其中k与$u(t)$是同维常数向量。

（2） $u(t)$为阶跃函数时，即$u(t)=k\cdot 1(t), x(0^-)=x(0)$时，有：

$$x(t)=e^{At}x(0)+A^{-1}(e^{At}-I)Bk$$

（3） $u(t)$为斜坡函数时，即$u(t)=k\cdot t\cdot 1(t), x(0^-)=x(0)$时，有：

$$x(t)=e^{At}x(0)+[A^{-2}\left(e^{At}-I\right)-A^{-1}t]Bk$$

非齐次方程

非齐次方程也可以用拉氏变换方法求解。

对非齐次方程式 $\dot{x} = Ax + Bu$ 两边进行拉氏变换：

$$sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s)$$

化简为： $$(sI - A)x(s) = x(0) + Bu(s)$$

所以有： $$x(s) = (sI - A)^{-1}[x(0) + Bu(s)]$$

对上式进行反拉氏变换，得：

$$x(t) = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}[x(0) + Bu(s)]\}$$

非齐次方程

例 已知系统的状态方程为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-12 & \frac{2}{3}\\ -36 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$，$u(t)=1(t)$为单位阶跃函数，

初始条件：$x_1(0)=2$，$x_2(0)=1$，求此状态方程的解。

解 由下式得：

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+12 & -\frac{2}{3}\\ 36 & s+1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{(s+4)(s+9)} & \frac{2/3}{(s+4)(s+9)}\\ \frac{-36}{(s+4)(s+9)} & \frac{s+12}{(s+4)(s+9)}\end{bmatrix}$$

非齐次方程

又$\boldsymbol{x}(0)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{u}(s)=\frac{1}{s}$，$\boldsymbol{bu}(s)=\begin{bmatrix}1/3\\1\end{bmatrix}\frac{1}{s}=\begin{bmatrix}1/3s\\1/s\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{bu}(s)=\begin{bmatrix}\frac{6s+1}{3s}\\\frac{s+1}{s}\end{bmatrix}$

从而有：

$$\boldsymbol{x}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}[\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{Bu}(s)]$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{(s+4)(s+9)} & \frac{2/3}{(s+4)(s+9)}\\\frac{-36}{(s+4)(s+9)} & \frac{s+12}{(s+4)(s+9)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{6s+1}{3s}\\\frac{s+1}{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2s^2+3s+1}{s(s+4)(s+9)}\\\frac{s-59}{(s+4)(s+9)}\end{bmatrix}$$

非齐次方程

将上式进行部份分式展开：

$$x(s)=\begin{bmatrix}\frac{1/36}{s}-\frac{21/20}{s+4}+\frac{136/45}{s+9}\\ -\frac{63/5}{s+4}+\frac{68/5}{s+9}\end{bmatrix}$$

对上式作拉氏反变换，得：

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{36}-\frac{21}{20}e^{-4t}+\frac{136}{45}e^{-9t}\\ -\frac{63}{5}e^{-4t}+\frac{68}{5}e^{-9t}\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵

状态转移矩阵的定义

状态转移矩阵 $\dot{x} = Ax \qquad (1)$

前面已经得齐次方程(1)的自由解为：

$$x(t) = e^{At}x_0 \ \text{或}\ x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0$$

上式的物理意义是系统在 $t \geq 0$ 或 $t \geq t_0$ 的任一瞬时的状态$x(t)$，只是初始时刻状态向量x_0的一种变换关系。变换矩阵为e^{At} 或 $e^{A(t-t_0)}$。指数矩阵 e^{At} 或 $e^{A(t-t_0)}$ 是一个$n \times n$的时间 t 的函数矩阵。这意味着它使状态向量随着时间的推移在不断地作坐标变换，即不断在状态空间中作转移。因此指数矩阵 e^{At} 或 $e^{A(t-t_0)}$也称状态转移矩阵。通常表示为：

$$\phi(t) = e^{At} \ \text{或}\ \phi(t-t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

其中$\phi(t)$表示为$x(0)$到$x(t)$的状态转移矩阵，$\phi(t-t_0)$表示为$x(t_0)$到$x(t)$的状态转移矩阵。

状态转移矩阵的定义

因此齐次状态方程（1）式的解也可表示为：

$$x(t) = \phi(t)x_0 \text{ 或 } x(t) = \phi(t - t_0)x_0$$

可以看出，系统作自由运动时，它的运动形态将是唯一地由状态转移矩阵所决定，它包含了系统自由运动的全部信息。它的几何意义，以二维状态向量为例，表示在图1中。

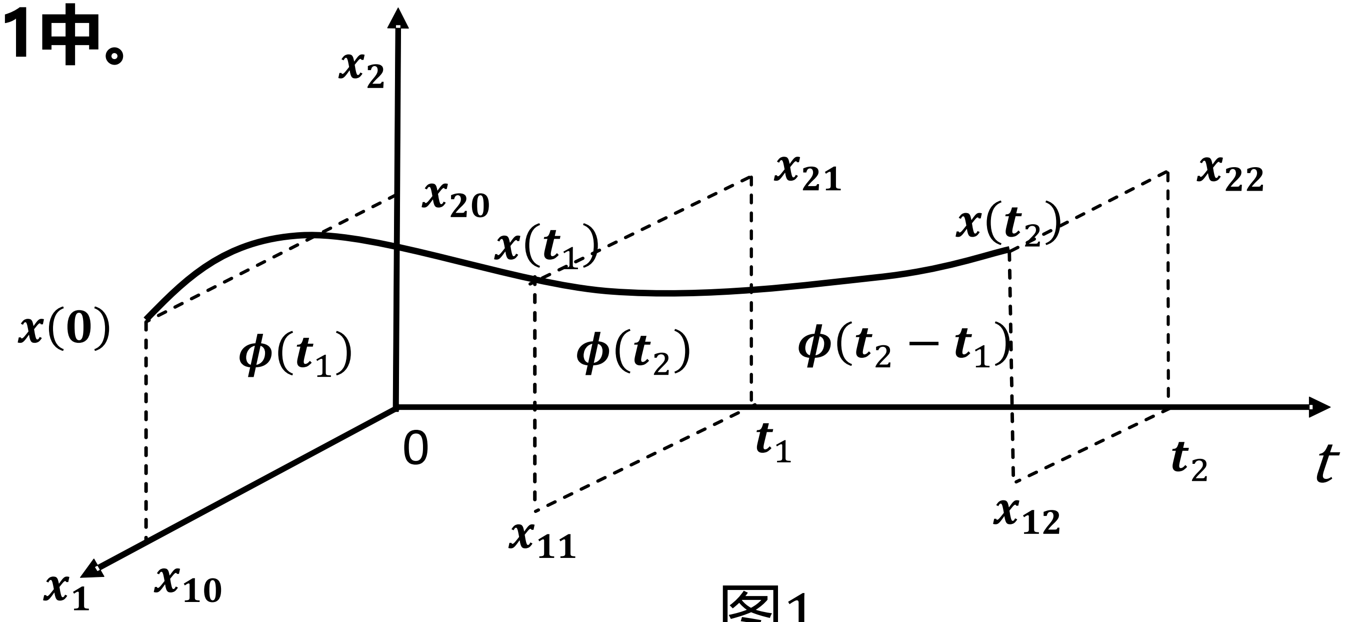

图1

状态转移矩阵的定义

图中设$t=0$时，状态的初态为$x(0)=[x_{10}(0)\quad x_{20}(0)]^T$，若已知状态转移矩阵$\phi(t_1)$，则$t=t_1$的状态为：

$$x(t_1)=[x_{11}\quad x_{21}]^T=\phi(t_1)x(0) \qquad (2)$$

如果已知状态转移矩阵$\phi(t_2)$，则$t=t_2$的状态为

$$x(t_2)=[x_{12}\quad x_{22}]^T=\phi(t_2)x(0) \qquad (3)$$

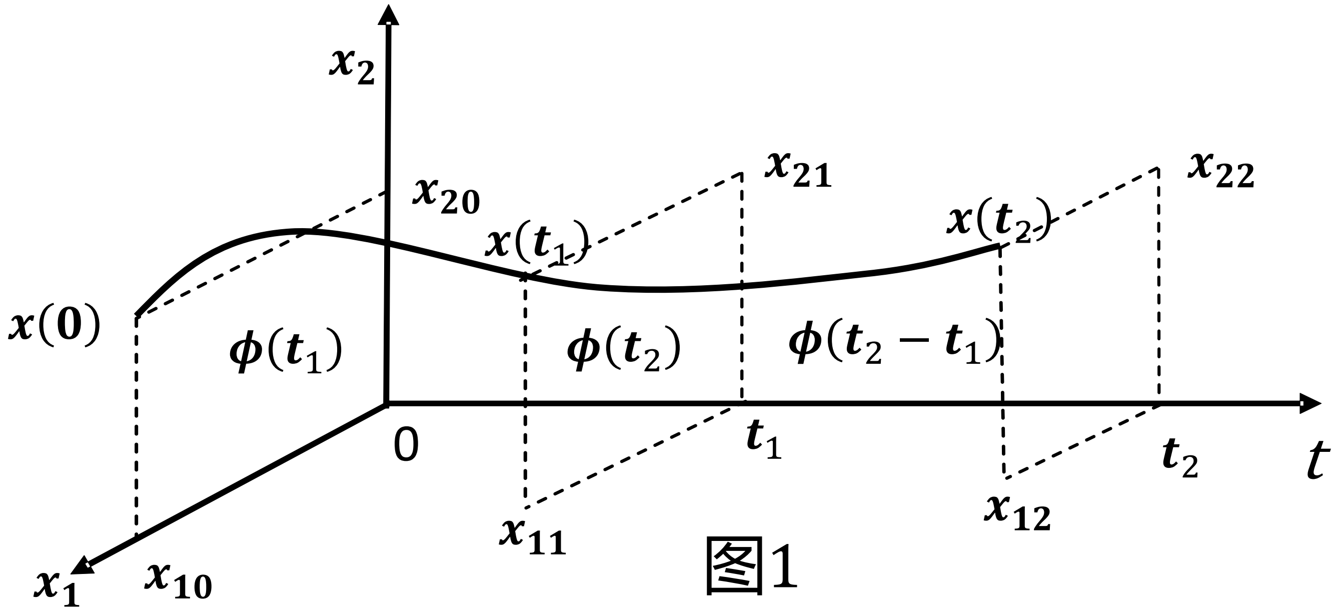

图1

状态转移矩阵的定义

这就清楚地表明状态从$x(0)$开始，随着时间的推移，它将按$\phi(t_1)$或$\phi(t_2)$作自由运动，最后状态转移到$x(t_1)$或$x(t_2)$，相应地在状态空间中描绘出一条如图1所示的运动轨线。若t1为初始时刻，$x(t_1)$为初始状态，则$t = t_2$的状态为:

$$x(t_2) = \phi(t_2 - t_1)x(t_1) \tag{4}$$

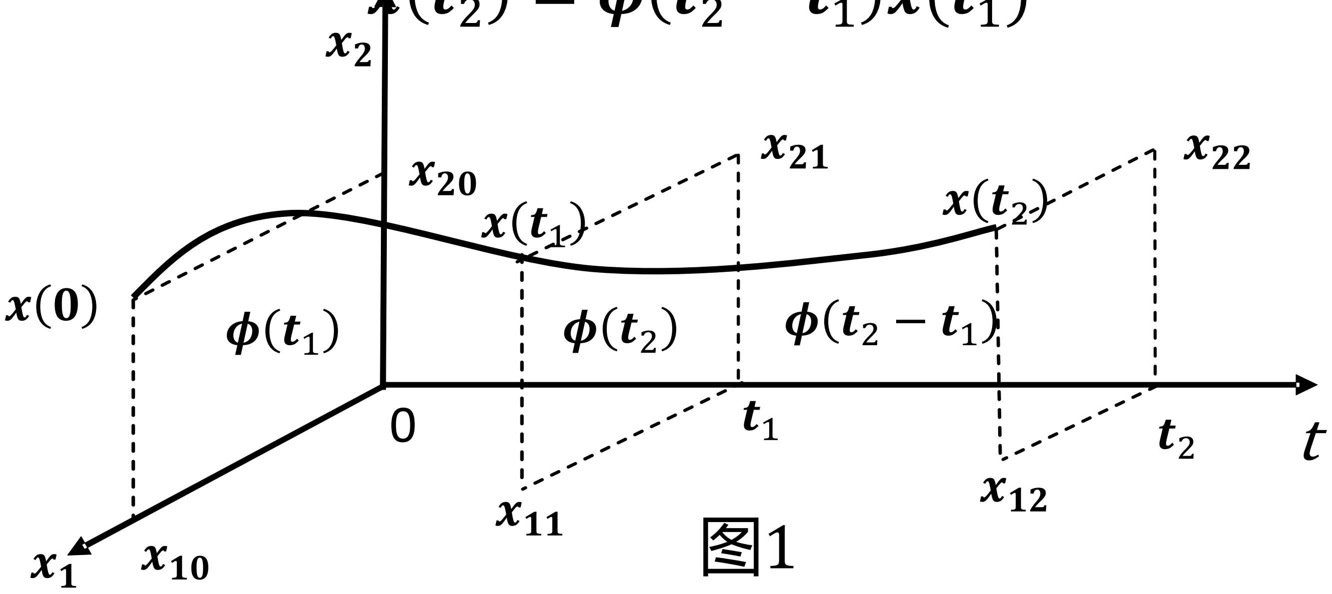

图1

状态转移矩阵的定义

$$x(t_2) = [x_{12} \quad x_{22}]^T = \phi(t_2)x(0) \quad (3)$$

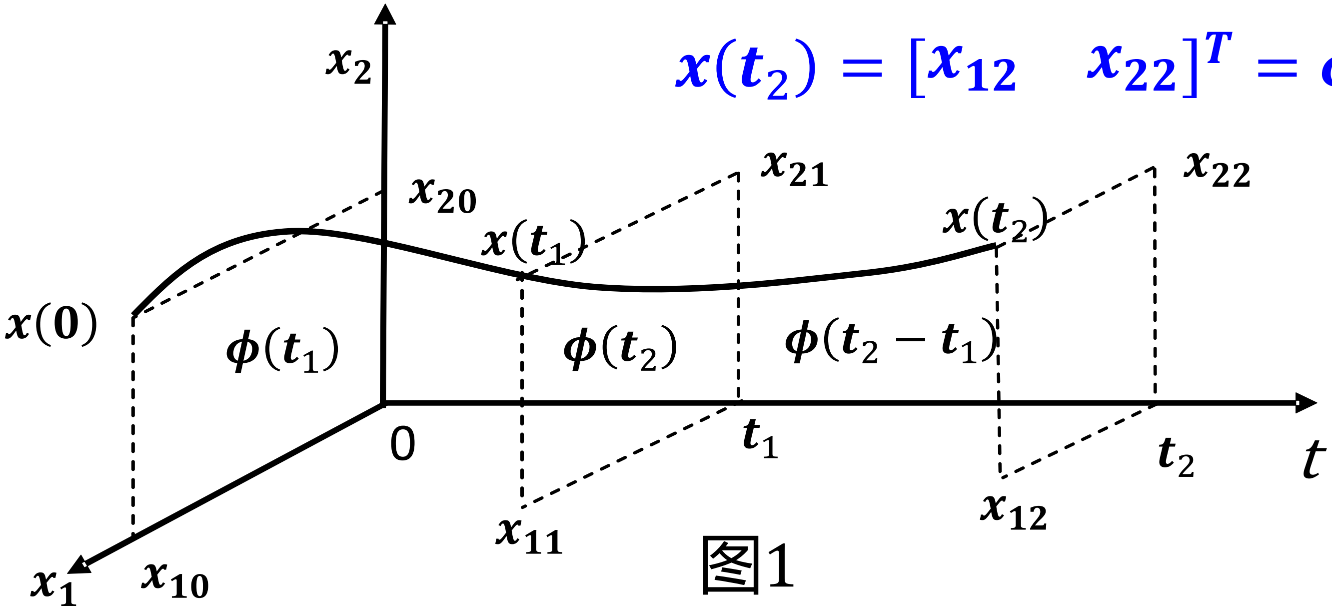

图1

$$x(t_1) = [x_{11} \quad x_{21}]^T = \phi(t_1)x(0) \qquad (2)$$

$$x(t_2) = \phi(t_2 - t_1)x(t_1) \qquad (4)$$

将式（2）的$x(t_1)$代入上式，则得

$$x(t_2) = \phi(t_2 - t_1)\phi(t_1)x(0) \qquad (5)$$

比较（3）式和（5）式，得：

状态转移矩阵的定义

$$\phi(t_2-t_1)\phi(t_1)=\phi(t_2) \text{ 或 } e^{A(t_2-t_1)}e^{At_1}=e^{At_2} \qquad (6)$$

这种关系称为**组合性质**。

我们知道在经典控制理论中，求解高阶微分方程时，对初始条件的处理是相当困难的，通常都是假定初始时刻 $t=0, x(0)=0$，即从零初始条件出发去计算系统的输出响应，而从上面分析中可以看出，在现代控制理论中，利用状态转移矩阵，对任意时刻的状态量$x(t)$，可以由任意指定的初始时刻 t_0 的初始向量$x(t_0)$求得。就是说，**矩阵微分方程的解，在时间上可以任意分段求取。这是系统用状态方程描述的又一优点。**

状态转移矩阵的性质

状态转移矩阵的性质

现在我们来简单地阐明状态转移矩阵的几个重要性质。

(1)性质一

$$\left.\begin{aligned}&\phi(t-t)=\phi(0)=I\\ \text{或}\quad &e^{A(t-t)}=e^{A0}=I\end{aligned}\right\}$$

$$e^{At}\triangleq I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{k!}A^kt^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k \qquad (*)$$

本性质直接根据定义式(*)证得。意味着状态向量从 t时刻 又转移到 t 时刻，显然状态向量是不变的。

(2)性质二

$$\left.\begin{aligned}&\phi(t)\cdot\phi(\tau)=\phi(t+\tau)\\ \text{或}\quad &e^{At}\cdot e^{A\tau}=e^{A(t+\tau)}\end{aligned}\right\}$$

这是组合性质，意味着从$t=-\tau$ 转移到 $t=0$，再从$t=0$ 转移到$t=t$ 的组合，即 $\phi(t-0)\cdot\phi(0-(-\tau))=\phi(t-(-\tau))=\phi(t+\tau)$

本性质也可由定义（*）式直接证明。

状态转移矩阵的性质

(3)性质三

$$\left.\begin{aligned}&[\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{t})]^{-1} = \boldsymbol{\phi}(-\boldsymbol{t}) \\ \text{或}\quad &(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{At}})^{-1} = \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{At}}\end{aligned}\right\}$$

这意味着转移矩阵总是非奇异的，必有逆。利用这个性质，可以在已知$x(t)$ 的情况下，求出 t 时刻以前的 $x(t_0)$，$(t_0 < t)$。

证明：根据定义式有

$$\boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{At}}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{At}} = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{At} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{t}^2 + \cdots\right)\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{At} + \frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{t}^2 + \cdots\right) = \boldsymbol{I}$$

状态转移矩阵的性质

(4)性质四　　**对转移矩阵有**

$$\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t) = \phi(t) \cdot A$$

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$$

证明： **根据定义** $e^{At} \triangleq I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots$

由于此无穷级数对有限 t 值是绝对收敛的，所以可将上式两边对 t 求导，有

$$\frac{d}{dt} e^{At} = A + A^2t + \frac{1}{2!}A^3t^2 + \frac{1}{3!}A^4t^3 + \cdots$$

因此
$$\frac{d}{dt} e^{At} = A(I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots) = A \cdot e^{At}$$

或者
$$\frac{d}{dt} e^{At} = (I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \cdots) \cdot A = e^{At} \cdot A$$

即　$\dot{\phi}(t) = A \cdot \phi(t) = \phi(t) \cdot A$　**此性质得证。**

状态转移矩阵的性质

(5)性质五

设有$n \times n$矩阵A和B,当且仅当$AB = BA$时，有$e^{At}e^{Bt} = e^{(A+B)t}$，而当$AB \neq BA$时，则$e^{At}e^{Bt} \neq e^{(A+B)t}$

证明：根据定义式

$$
\begin{aligned}
e^{(A+B)t} &\triangleq I + (A+B)t + \frac{1}{2!}(A+B)^2t^2 + \frac{1}{3!}(A+B)^3t^3 + \cdots \\
&= I + (A+B)t + \left(\frac{A^2t^2}{2!} + \frac{ABt^2}{2!} + \frac{BAt^2}{2!} + \frac{B^2t^2}{2!}\right) \\
&\quad + \left(\frac{A^3t^3}{3!} + \frac{A^2Bt^3}{3!} + \frac{ABAt^3}{3!} + \frac{AB^2t^3}{3!} + \frac{BA^2t^3}{3!} + \frac{BABt^3}{3!} + \frac{B^2At^3}{3!} + \frac{B^3t^3}{3!}\right) + \cdots
\end{aligned}
$$

状态转移矩阵的性质

而 $$e^{At}\cdot e^{Bt}=(I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\cdots)(I+Bt+\frac{B^2t^2}{2!}+\frac{B^3t^3}{3!}+\cdots)$$
$$=I+(A+B)t+(\frac{A^2t^2}{2!}+ABt^2+\frac{B^2t^2}{2!})+(\frac{A^3t^3}{3!}+\frac{A^2Bt^3}{2!}+\frac{AB^2t^3}{2!}+\frac{B^3t^3}{3!})+\cdots$$

将上述两式相减得：

$$e^{(A+B)t}-e^{At}\cdot e^{Bt}$$
$$=I+(A+B)t+(\frac{A^2t^2}{2!}+ABt^2+\frac{B^2t^2}{2!})$$
$$=\frac{BA-AB}{2!}t^2+\frac{BA^2+ABA+B^2A+BAB-2A^2B-2AB^2}{3!}t^3+\cdots$$

上式说明，当A和B是可交换时,等式右边为零,故 $e^{At}e^{Bt}=e^{(A+B)t}$；当A和B是不可交换时，等式右边不为零，故$e^{At}e^{Bt}\neq e^{(A+B)t}$ 。可以看出这与标量指数函数的性质是不同的，此性质得证。

状态转移矩阵的性质

(6)性质六

若A为对角矩阵。即 $A = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

则

$$e^{At} = \phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

证明： 根据定义

状态转移矩阵的性质

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k=\begin{bmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\lambda_1 t & & & 0\\ & \lambda_2 t & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{{\lambda_1}^2t^2}{2!} & & & 0\\ & \frac{{\lambda_2}^2t^2}{2!} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{{\lambda_n}^2t^2}{2!}\end{bmatrix}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{{\lambda_1}^kt^k}{k!} & & & 0\\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{{\lambda_2}^kt^k}{k!} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{{\lambda_n}^kt^k}{k!}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & 0\\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的性质

(7)性质七

若A能通过非奇异变换予以对角线化，即 $T^{-1}\cdot A\cdot T=\Lambda$

则

$$e^{At}=\phi(t)=T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}T^{-1}$$

证明：根据定义式 $e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^kt^k$

因为A能通过非奇异变换予以对角线化，

即

$$T^{-1}\cdot A\cdot T=\Lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

同理有

$$T^{-1}\cdot A^2\cdot T=T^{-1}AT\cdot T^{-1}AT=\begin{bmatrix} {\lambda_1}^2 & & & 0 \\ & {\lambda_2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & {\lambda_n}^2 \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的性质

对于一般项有 $T^{-1}\cdot A^k\cdot T=(T^{-1}AT)\cdots(T^{-1}AT)=\begin{bmatrix}{\lambda_1}^k & & & 0\\ & {\lambda_2}^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & {\lambda_n}^k\end{bmatrix}$

于是得：

$$T^{-1}\cdot e^{At}\cdot T=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^kT^{-1}A^kT$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k{\lambda_1}^k & & & 0\\ & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k{\lambda_2}^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}t^k{\lambda_n}^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & 0\\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的性质

所以 $e^{At}=T\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}T^{-1}$，于是性质七得证。

(8)性质八

若A为约当型矩阵

$$A=J=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的性质

则可得

$$e^{Jt}=\phi(t)=e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \cdots & \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

可仿照性质六式证明。

状态转移矩阵的性质

(9)性质九

若A能通过非奇异变换变成约当标准型，即

$$T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{bmatrix}，则$$

$$e^{At} = \phi(t) = T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1}$$

可仿照性质七方法来证明。

状态转移矩阵的算法

状态转移矩阵的算法

上面我们介绍了状态转移矩阵的性质，在具体分析线性定常系统时，不可避免地要碰到计算 $\phi(t)$ 或 e^{At} 的问题，这里将介绍几种主要计算方法。

1）直接利用 e^{At} 的级数展开法

根据矩阵指数的定义，e^{At} 可以展开成幂级数：

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \cdots + \frac{A^kt^k}{k!} + \cdots \quad (*)$$

即

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{At}{2}\left(\frac{At}{1!}\right) + \frac{At}{3}\left(\frac{A^2t^2}{2!}\right) + \cdots + \frac{At}{k}\left(\frac{A^{(k-1)}t^{(k-1)}}{(k-1)!}\right) + \cdots \quad (**)$$

状态转移矩阵的算法

可以看出，即使A很简单，手算也是不容易的。式（*）不是闭合表达式，只能取有限项作近似计算，高阶项忽略。式（**）中圆括号内每一项完全等于前一项。它给出了一种方便的递推方案，可用计算机实现。显然编程简单，但是由于 e^{At} 的收敛比较慢，与其它方法相比计算时间较长。

例 已知 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$，求 e^{At}

解：将A直接代入（*）式

状态转移矩阵的算法

例 **已知** $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$ **，求** e^{At}

解：将A**直接代入（*）式**

$$e^{At}=I+At+\frac{A^2t^2}{2!}+\frac{A^3t^3}{3!}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}t+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}^2\frac{t^2}{2!}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}^3\frac{t^3}{3!}+\cdots$$

$$=\begin{bmatrix}1-t^2+t^3+\cdots & t-\frac{3}{2}t^2+\frac{7}{6}t^3+\cdots\\ -2t+3t^2-\frac{7}{3}t^3+\cdots & 1-3t+\frac{7}{2}t^2-\frac{5}{2}t^3+\cdots\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的算法

(2) 利用拉普拉斯反变换法求 e^{At}

$$e^{At}=L^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}$$

这种方法归结为计算 $(sI-A)^{-1}$，而 $(sI-A)^{-1}$ 也称预解矩阵。

根据公式

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{|sI-A|}$$

这是一种最常用的计算方法。

状态转移矩阵的算法

(3)变换A为对角标准型或约当标准型来计算 e^{At}

a) A特征值互异

当A有两两相异特征值时，必能找到非奇异矩阵T，使下式成立，

即: $\Lambda = T^{-1} \cdot A \cdot T$

由性质七有 $$e^{At} = \phi(t) = T \cdot e^{\Lambda t} \cdot T^{-1}$$

例 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ，求 e^{At}

解: $f(\lambda) = |sI - A| = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ 得: $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$

由 $AP_1 = \lambda_1 P_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{bmatrix}$ 得: $\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

状态转移矩阵的算法

由 $AP_2 = \lambda_2 P_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix}$ 得： $\begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

于是得： $T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

所以 $e^{At} = T \cdot e^{\Lambda t} \cdot T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - 2e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

b）A的特征值有重根

在特征值有重根的情况下，根据性质九可知

$e^{At} = T \cdot e^{Jt} \cdot T^{-1}$ 其中： $J = T^{-1}AT$

状态转移矩阵的算法

例 已知 $A=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 1\\ -4 & 0 & 0\end{bmatrix}$，求 e^{At}

解： 先求A 的特征值

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+3 & -1 & 0\\ 0 & \lambda+3 & -1\\ 4 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)^2+4=(\lambda+1)^2(\lambda+4)$$

所以 $\lambda_1=\lambda_2=-1 \quad \lambda_3=-4$

则 $J=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix} \qquad e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{-t} & te^{-t} & 0\\ 0 & e^{-t} & 0\\ 0 & 0 & e^{-4t}\end{bmatrix}$ 性质八

状态转移矩阵的算法

$$T=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&-1\\4&8&1\end{bmatrix}\qquad T^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}11&7&-4\\-6&-3&3\\4&-4&1\end{bmatrix}$$

所以 $e^{At}=T\cdot e^{Jt}\cdot T^{-1}$ 性质九

$$=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&3&-1\\4&8&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}&te^{-t}&0\\0&e^{-t}&0\\0&0&e^{-4t}\end{bmatrix}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}11&7&-4\\-6&-3&3\\4&-4&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-t}&te^{-t}+e^{-t}&e^{-4t}\\2e^{-t}&2te^{-t}+3e^{-t}&-e^{-4t}\\4e^{-t}&4te^{-t}+8e^{-t}&e^{-4t}\end{bmatrix}\frac{1}{9}\begin{bmatrix}11&7&-4\\-6&-3&3\\4&-4&1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}5e^{-t}-6te^{-t}+4e^{-4t}&4e^{-t}-3te^{-t}-4e^{-4t}&-e^{-t}+3te^{-t}+e^{-4t}\\4e^{-t}-12te^{-t}-4e^{-4t}&5e^{-t}-6te^{-t}+4e^{-4t}&e^{-t}+6te^{-t}-e^{-4t}\\-4e^{-t}-24te^{-t}+4e^{-4t}&4e^{-t}-12te^{-t}-4e^{-4t}&8e^{-t}+12te^{-t}+e^{-4t}\end{bmatrix}$$