运筹学第四次作业参考答案（20231018）

1. 给定线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
\min\ & 5x_1 + 21x_3 \\
\text{s.t.}\ & x_1 - x_2 + 6x_3 \geq b_1 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 1 \\
& x_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

其中b_1是某一个正数，已知这个问题的一个最优解为$(0.5,\ 0,\ 0.25)^{\mathrm{T}}$。

(1) 写出对偶问题；

(2) 求对偶问题的最优解.

解：

(1) 对偶问题为

$$
\begin{cases}
\max \quad b_1y_1 + y_2 \\
\text{s.t.} \quad y_1 + y_2 \leq 5 \\
\quad -y_1 + y_2 \leq 0 \\
\quad 6y_1 + 2y_2 \leq 21 \\
\quad y_1, y_2 \geq 0
\end{cases}
$$

(2) 原问题最优解中$x_1, x_3 \neq 0$，根据互补松紧性条件有

$$
\begin{cases}
y_1 + y_2 = 5 \\
6y_1 + 2y_2 = 21
\end{cases}
$$

解得$y_1 = \frac{11}{4}, y_2 = \frac{9}{4}$，再根据最优目标值相同有

$$
5 \times \frac{1}{2} + 21 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{4} b_1 + \frac{9}{4}
$$

得$b_1 = 2$，因此对偶问题的最优解及最优值为

$$
\boldsymbol{y}^* = \left(\frac{11}{4}, \frac{9}{4}\right)^{\mathrm{T}}, z^* = \frac{31}{4}
$$

2. 求解以下带参数的线性规划问题，并给出$z(\lambda)$与λ的变化关系：

(1)

$$
\begin{aligned}
\min\ & z = (6-\lambda)x_1 + (5-\lambda)x_2 + (-3+\lambda)x_3 + (-4+\lambda)x_4 \\
\text{s.t.}\ & x_1 - x_2 - x_3 \leq 1 \\
& -x_1 + x_2 - x_4 \leq 1 \\
& -x_2 + x_3 \leq 1 \\
& x_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\min\ & z = 2x_1 + 6x_2 + 15x_3 \\
\text{s.t.}\ & -2x_1 - 3x_2 - 5x_3 \leq 6 - \lambda \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq -2 + \lambda
\end{aligned}
$$

$$x_2 + 2x_3 \leq -3 + 2\lambda$$
$$x_j \geq 0,\ \ j = 1, 2, 3$$

解：

(1) 添加松弛变量，得到单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_5	1	-1	-1	0	1	0	0	1
x_6	-1	1	0	-1	0	1	0	1
x_7	0	-1	1	0	0	0	1	1
	6-λ	5-λ	-3+λ	-4+λ	0	0	0	

现对λ分类讨论：

① 若$\lambda \leq 3$，则 $6 - \lambda > 0$，$5 - \lambda > 0$，$-3 + \lambda \leq 0$，$-4 + \lambda < 0$，且$-4 + \lambda < -3 + \lambda$，于是$x_4$进基， 可知原问题无界， $z = -\infty$.

② 若 $3 < \lambda < 4$，则 $6 - \lambda > 0$，$5 - \lambda > 0$，$-3 + \lambda > 0$，$-4 + \lambda < 0$，于是x_4进基，可知原问题无界， $z = -\infty$.

③ 若 $4 \leq \lambda \leq 5$，则 $6 - \lambda > 0$，$5 - \lambda \geq 0$，$-3 + \lambda > 0$，$-4 + \lambda \geq 0$，原问题达到最优解$\boldsymbol{x}^* = (0, 0,0,0)^{\mathrm{T}}$， $z = 0$。

④ 若 $5 < \lambda \leq 6$，则 $6 - \lambda \geq 0$，$5 - \lambda < 0$，$-3 + \lambda > 0$，$-4 + \lambda > 0$，于是x_2进基，x_6出基，单纯形表变为

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
x_5	0	0	-1	-1	1	1	0	2
x_2	-1	1	0	-1	0	1	0	1
x_7	-1	0	1	-1	0	1	1	2
	11-2λ		-3+λ	1	0	-5+λ	0	

此时$-3 + \lambda > 0$，$-5 + \lambda > 0$，由于 $11 - 2\lambda$ 的符号在 $\lambda = 5.5$ 处发生变化。进一步讨论有：

4.1： 若 $5 < \lambda \leq 5.5$，有 $11 - 2\lambda \geq 0$。此时所有检验数非负，达到最优值$z = 5 - \lambda$；

4.2： 若 $5.5 < \lambda \leq 6$，有 $11 - 2\lambda < 0$。x_1进基，但该列系数非正，原问题无界，$z = -\infty$。

⑤ 若$\lambda > 6$，则 $6 - \lambda < 0$，$5 - \lambda < 0$，$-3 + \lambda > 0$，$-4 + \lambda > 0$，且 $6 - \lambda > 5 - \lambda$，还是$x_2$进基，$x_6$出基，情况与④中的 4.2 一致，故原问题无界， $z = -\infty$。

综上所述

$$z(\lambda) = \begin{cases} -\infty\,, & \lambda < 4 \text{ or } \lambda > 5.5 \\ 0\,, & 4 \leq \lambda \leq 5 \\ 5 - \lambda\,, & 5 < \lambda \leq 5.5 \end{cases}$$

(2) 写出对偶问题

$$\max\ \omega = (\lambda-6)y_1 + (2-\lambda)y_2 + (3-2\lambda)y_3$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\quad & 2y_1 - y_2 \le 2 \\ & 3y_1 - y_2 - y_3 \le 6 \\ & 5y_1 - y_2 - 2y_3 \le 15 \\ & y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

添加松弛变量，得到单纯形表

BV	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	RHS
y_4	2	-1	0	1	0	0	2
y_5	3	-1	-1	0	1	0	6
y_6	5	-1	-2	0	0	1	15
	λ-6	2-λ	3-2λ	0	0	0	

现对λ分类讨论：

① 若$\lambda > 6$，则 $\lambda - 6 > 0$，$2 - \lambda < 0$，$3 - 2\lambda < 0$，y_1进基，y_4出基

BV	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	RHS
y_4	1	-1/2	0	1/2	0	0	1
y_5	0	1/2	-1	-3/2	1	0	3
y_6	0	3/2	-2	-5/2	0	1	10
	0	$-\frac{\lambda}{2}-1$	$3-2\lambda$	$3-\frac{\lambda}{2}$	0	0	$6-\lambda$

此时所有检验数非正，达到最优值 $\omega = \lambda - 6$

② 若$\lambda < 2$，则 $\lambda - 6 < 0$，$2 - \lambda < 0$，但 y_2, y_3 列均非正，**$\boldsymbol{\omega}$ 无界，原问题无可行解**。

③ 若 $2 \le \lambda \le 6$，则 $\lambda - 6 \le 0$，$2 - \lambda \le 0$，$3 - 2\lambda < 0$，所有检验数非正，达到最优值 $\omega = 0$。

综上可得

$$z(\lambda) = \begin{cases} \text{无可行解}, & \lambda < 2 \\ 0, & 2 \le \lambda \le 6 \\ \lambda - 6, & \lambda > 6 \end{cases}$$

3. 已知线性规划问题 A 和 B 如下

问题 A

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad\qquad \text{影子价格}$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j = b_1 && y_1 \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j = b_2 && y_2 \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{3j}x_j = b_3 && y_3 \\
& x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
$$

问题 B

$$
\begin{aligned}
& \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j && \text{影子价格} \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n} k_1 a_{1j}x_j = k_1 b_1 && \hat{y}_1 \\
& \sum_{j=1}^{n} k_2 a_{2j}x_j = k_2 b_2 && \hat{y}_2 \\
& \sum_{j=1}^{n} \left(a_{3j} + k_3 a_{1j}\right)x_j = b_3 + k_3 b_1 && \hat{y}_3 \\
& x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
$$

求y_i与$\hat{y}_i (i = 1,2,3)$的关系

解：

问题 A 的对偶问题为

$$
\begin{gathered}
\min\ b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 \\
\text{s.t. } a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 \geq c_j, j = 1,2,\dots,n
\end{gathered}
$$

问题 B 的对偶问题为

$$
\begin{gathered}
\min\ k_1b_1\hat{y}_1 + k_2b_2\hat{y}_2 + (b_3 + k_3b_1)\hat{y}_3 \\
\text{s.t. } k_1a_{1j}\hat{y}_1 + k_2a_{2j}\hat{y}_2 + (a_{3j} + k_3a_{1j})\hat{y}_3 \geq c_j, j = 1,2,\dots,n
\end{gathered}
$$

整理得

$$
\begin{gathered}
\min\ (k_1\hat{y}_1 + k_3\hat{y}_3)b_1 + k_2\hat{y}_2b_2 + \hat{y}_3b_3 \\
\text{s.t. } (k_1\hat{y}_1 + k_3\hat{y}_3)a_{1j} + k_2\hat{y}_2a_{2j} + \hat{y}_3a_{3j} \geq c_j, j = 1,2,\dots,n
\end{gathered}
$$

若$(y_1, y_2, y_3)^{\top}$为问题 A 对偶问题的最优解，那么问题 B 对偶问题的最优解应满足

$$
\begin{aligned}
y_1 &= k_1\hat{y}_1 + k_3\hat{y}_3 \\
y_2 &= k_2\hat{y}_2 \\
y_3 &= \hat{y}_3
\end{aligned}
$$

也可以写成

$$\hat{y}_1 = \frac{y_1 - k_3 y_3}{k_1}, \qquad \hat{y}_2 = \frac{1}{k_2} y_2, \qquad \hat{y}_3 = y_3$$

4. 用对偶单纯形算法求解以下线性规划问题

$$\begin{aligned} \min\ z = 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \\ \text{s.t.}\quad 3x_1 + 2x_2 + \ x_3 \geq 2 \\ 4x_1 + \ x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

解：

将其转化为标准型

$$\begin{aligned} -\max\ w = -z = -6x_1 - 4x_2 - 8x_3 \\ \text{s.t.}\quad 3x_1 + 2x_2 + \ x_3 - x_4 = 2 \\ 4x_1 + \ x_2 + 3x_3 - x_5 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_6 = 3 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\dots,6 \end{aligned}$$

由标准形式可以看出$(0,0,0,-2,-4,-3)^{\mathrm{T}}$是对偶问题的可行解，因此可建立对偶单纯形表如下

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	-3	-2	-1	1	0	0	-2
x_5	-4	-1	-3	0	1	0	-4
x_6	-2	-2	-2	0	0	1	-3
	-6	-4	-8	0	0	0	w

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	-5/4	5/4	1	-3/4	0	1
x_1	1	1/4	3/4	0	-1/4	0	1
x_6	0	-3/2	-1/2	0	-1/2	1	-1
	0	-5/2	-7/2	0	-3/2	0	w+6

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	0	5/3	1	-1/3	-5/6	11/6
x_1	1	0	2/3	0	-1/3	1/6	5/6
x_2	0	1	1/3	0	1/3	-2/3	2/3
	0	0	-8/3	0	-2/3	-5/3	w+23/3

此时 RHS 都是正数且检验数都不是正数，迭代停止。得到最优解与最优值为

$$\boldsymbol{x}^* = \left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, 0, \frac{11}{6}, 0, 0\right)^{\mathrm{T}}, z^* = -w^* = \frac{23}{3}$$

5. 用单纯形法求解以下线性规划问题

$$\min\ 24y_1 + 6y_2 + 5y_3 + 3y_4 + 3y_5 + 2y_6 + 6y_7 + y_8 + y_9$$
$$\text{s.t.}\quad 7y_1 + 6y_2 + 2.5y_3 + y_4 + 0.75y_5 + 0.4y_6 + y_7 + y_8 = 6$$
$$7y_1 + y_2 + y_3 + 0.75y_4 + y_5 + y_6 + 6y_7 + y_9 = 7$$
$$y_i \geq 0, i = 1,2, \dots ,9$$

解：

先将目标函数转换为 max 形式，列出单纯形表

BV	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	RHS
	7	6	2.5	1	0.75	0.4	1	1	0	6
	7	1	1	0.75	1	1	6	0	1	7
	-24	-6	-5	-3	-3	-2	-6	-1	-1	w

取 y_8, y_9 为基变量，即令这两列检验数为 0，得到

BV	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	RHS
y_8	7	6	2.5	1	0.75	0.4	1	1	0	6
y_9	7	1	1	0.75	1	1	6	0	1	7
	-10	1	-1.5	-1.25	-1.25	-0.6	1	0	0	w+13

BV	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	RHS
y_2	7/6	1	5/12	1/6	1/8	1/15	1/6	1/6	0	1
y_9	35/6	0	7/12	7/12	7/8	14/15	35/6	-1/6	1	6
	-67/6	0	-23/12	-17/12	-11/8	-2/3	5/6	-1/6	0	w+12

BV	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	RHS
y_2	1	1	2/5	3/20	1/10	1/25	0	6/35	-1/35	29/35
y_7	1	0	1/10	1/10	3/20	4/25	1	-1/35	6/35	36/35
	-12	0	-2	-3	-3/2	-4/5	0	-1/7	-1/7	w+78/7

此时检验数都为非负，得到最优解以及最优值为

$$\boldsymbol{y}^* = \left(0,\frac{29}{35},0,0,0,0,\frac{36}{35},0,0\right)^{\mathrm{T}},\quad z^* = -w^* = \frac{78}{7}$$