本章教学内容

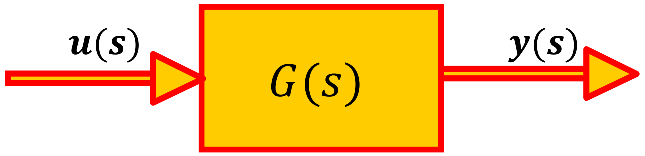
基本内容

- 状态变量的能控性与能观测性
- 能控性及其判据
- 能观性及其判据
- 对偶性原理
- 状态空间的结构分解
- 能控能观标准型
- 传递函数矩阵的最小实现

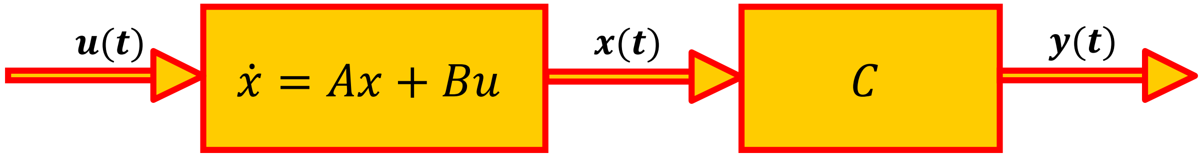
状态变量的能控性与能观测性

状态变量的能控性与能观测性

在现代控制理论中，**能控性**和**能观测性**是两个重要的概念。它是最优控制和最优估计的理论基础。能控性及能观测性概念是R•E•Kalman首先提出的。简单地说，能控性是控制作$u(t)$支配系统的状态向量$x(t)$的能力；而能观测性是系统的输出$y(t)$反映系统状态向量$x(t)$的能力。前者回答$u(t)$能否使$x(t)$作任意转移的问题，后者则回答能否通过$y(t)$的量测确定状态$x(t)$的问题。

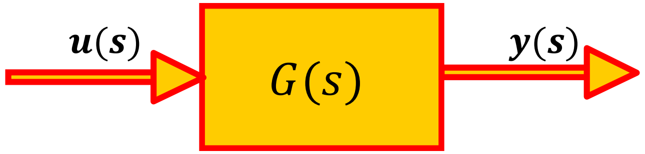


系统经典控制理论中的描述

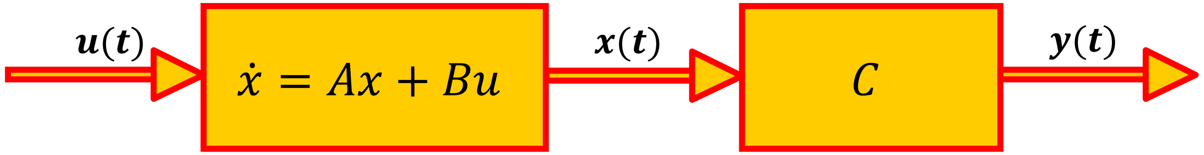


系统的状态空间的描述

状态变量的能控性与能观测性



系统经典控制理论中的描述



系统的状态空间的描述

为什么在经典控制理论中不涉及状态的能控能观性?

这是由于在经典控制理论中，只限于讨论控制作用（输入）对输出的控制。输入与输出这两个量的关系，唯一地由系统的传递函数所确定，只要系统是稳定的，系统就是能控的。另一方面，系统的输出量本身就是被控量，对于一个实际的物理系统来说，它当然是可以观测到的，所以在经典控制理论中没有必要涉及能控性和能观性。

状态变量的能控性与能观测性

然而在现代控制理论中，是把反映系统内部运动状态的状态向量作为被控量，而且它们不一定是实际上可观测到的物理量，至于输出量则是状态向量的线性组合，这就产生了从输入量$u(t)$到状态量$x(t)$的能控性问题和从输出量$y(t)$到状态量$x(t)$的能观测性问题。

所谓最优控制，目的在于根据$x(t)$的值确定$u(t)$，使$x(t)$达到预期的轨线，如果$x(t)$不受控于$u(t)$，当然就无从实现最优控制；又由于$x(t)$的值难以测取，往往需要从测到的$y(t)$来估计出$x(t)$，这就不难理解能控性和能观测性，是最优控制器和最优估计器的设计基础。

能控性概念

能控性

能控性的概念

能控制的问题涉及到一个线性系统的**输入对状态影响的程度**。

一、几个例子

例1 已知系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

将此状态方程展开得：

$$\begin{cases}\dot{x_1}=-3x_1\\ \dot{x_2}=-2x_2+u\end{cases}$$

显然x_2可控，而x_1不可控

输入和状态有联系就一定可控吗?

例2 图1（a）所示为一电容电阻构成的电路，设$RC=\frac{1}{3}$，则得系统的状态方程

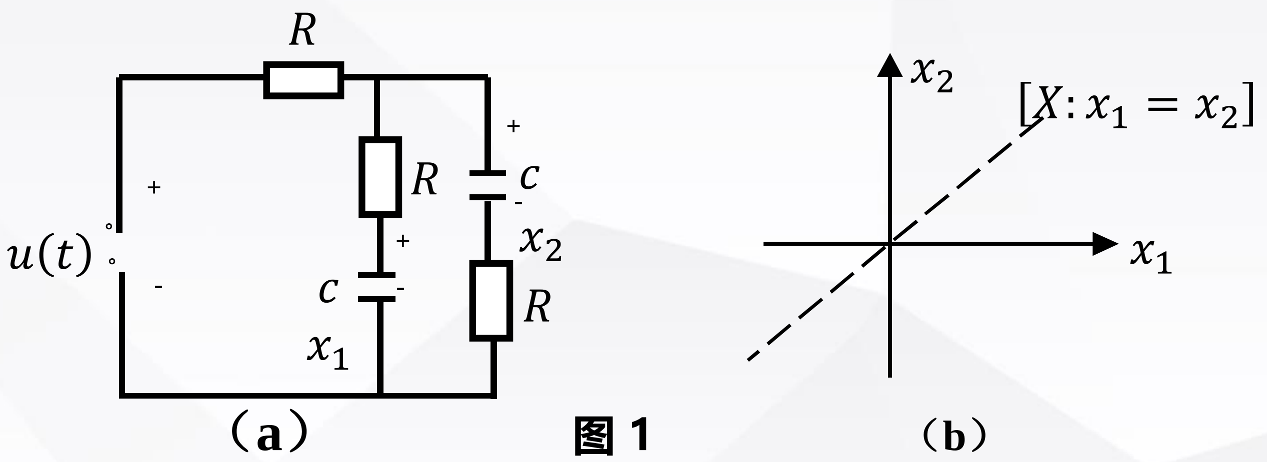


图 1

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u$$

将此系统展开，可得:$\begin{cases}\dot{x}_1=-2x_1+x_2+u\\ \dot{x}_2=x_1-2x_2+u\end{cases}$

可以看出：状态x_1和x_2都和u有联系，能否说此系统一定是完全能控呢?

上述方程的状态转移矩阵为：

$$e^{At}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t} \\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t} \end{bmatrix}$$

在此讨论u对状态向量的控制能力。 $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

（1）状态方程解中强制分量的两个状态变量相等,即$x_1(t)_{强}=x_2(t)_{强}$

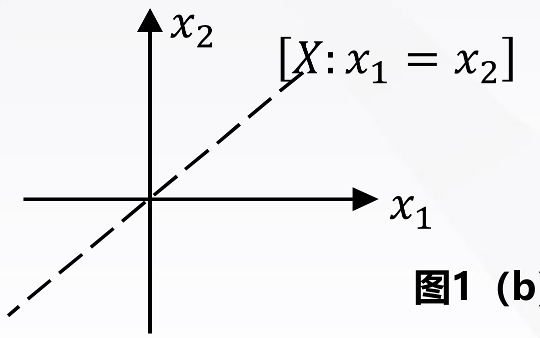


图1（b)

$$x(t)_{强}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{强}=\int_0^t e^{A(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}+e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-\tau)} \\ e^{-(t-\tau)} \end{bmatrix}u(\tau)d\tau=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\int_0^t e^{-(t-\tau)}u(\tau)d\tau$$

由上式明显地看出，不论如何选择$u(t)$，强制分量总是正比于向量$[1 \quad 1]^T$，如图1（b），强制分量始终落在直线 $x_1=x_2$上。

（2）由直线$x_1 = x_2$上出发的自由运动也始终在直线$x_1 = x_2$上。

设在直线$x_1 = x_2$上的初态为：$x_0 = \alpha\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，其中$\alpha$是任意常数，则方程的自由分量是：

$$e^{At}x_0 = e^{At}\cdot\alpha\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{-t}+e^{-3t} & e^{-t}-e^{-3t}\\ e^{-t}-e^{-3t} & e^{-t}+e^{-3t}\end{bmatrix}\alpha\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \alpha e^{-t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

α是任意常数，可以找到一个t，使得自由变量和强制变量相加可以等于零，即系统运动到零点

（3）由直线$x_1=-x_2$上出发的自由运动始终在直线$x_1=-x_2$。

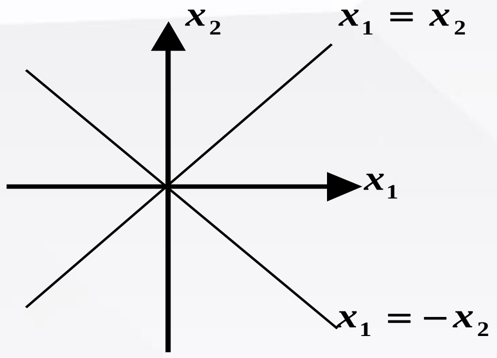


图1（c）

在图1（c）中,直线$x_1=-x_2$是直线 $x_1=x_2$的垂线。直线 $x_1=-x_2$的动态点可表为 $x_0=\beta\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$。其中$\beta$是任意常数，则方程的自由分量为:

$$e^{At}\cdot x_0=e^{At}\beta\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\beta e^{-3t}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

强制运动分量使得运动点垂直方向离开该直线，所以无法到达零点

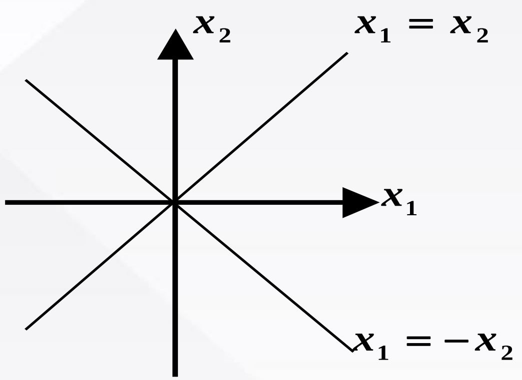


图1（c）

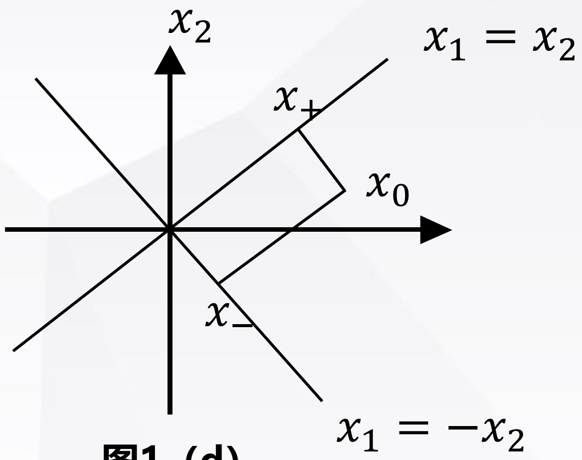
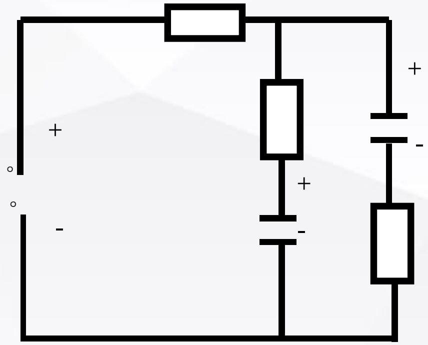


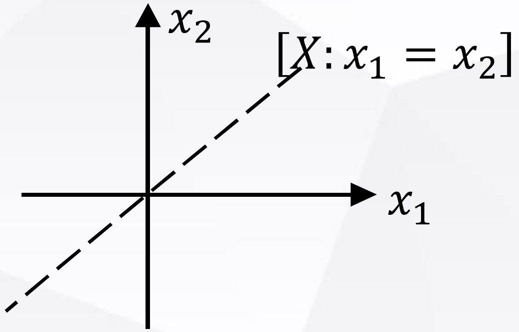
图1（d）

综上所述，二维状态空间中，在直线 $x_1 = x_2$上的状态，总可以找到一个控制 $u(t)$，使系统状态运动有限时间内所达到的状态（即末态）为状态空间的原点：而在直线$x_1 = -x_2$上的状态，就不可能找到控制$u(t)$，使运动的末态是原点。

二维状态空间的任意动态x_0，总可以分解为上述两条直线上的投影之和，即：$x_0 = x_+ + x_-$，见图1（d）。

其中x_+是x_0在$x_1 = x_2$上的投影，是可以控制的;x_-是x_0在直线$x_1 = -x_2$上的投影。这样，总可以找到控制$u(t)$，使状态x_0的x_+部分在有限时间内回到零，而x_-部分不可能在有限时间内回到零。从物理意义上很好理解，因为加入任何输入电压$u(t)$，必然同样地影响到两个支路，所以如果$x_1(0) = x_2(0)$，那么对一切t 必有$x_1(t) = x_2(t)$。





如果将例2 的状态方程作线性变换，可以看得更清楚。系统特征值为$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$，若变换矩阵取为：

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

则有$\dot{\tilde{x}} = T^{-1}AT\tilde{x} + T^{-1}Bu = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\tilde{x} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}u$

即$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$　　将上式展开得：$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = -\tilde{x}_1 + u \\ \dot{\tilde{x}}_2 = -3\tilde{x}_2 \end{cases}$

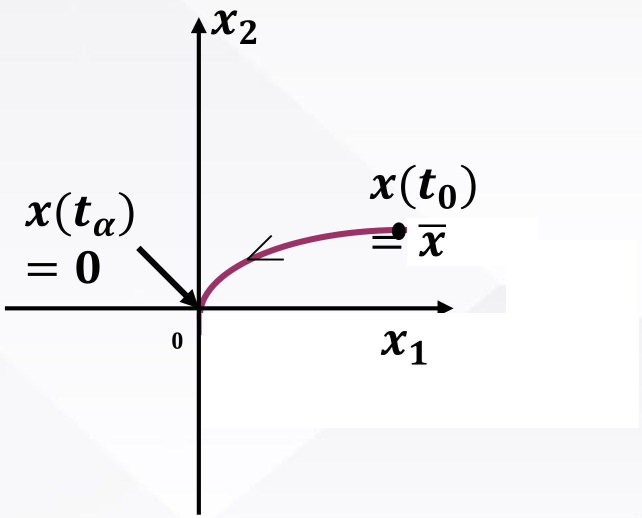
显然，状态变量$\tilde{x}_1$可以被控制，而分量$\tilde{x}_2$不可能被u所控制，有的文献上称e^{-t}, e^{-3t}为模态，模态e^{-t}可控，而模态e^{-3t}不可控。

如果将系统变换成对角标准型，变量的耦合关系消除了，状态的能控性很清楚

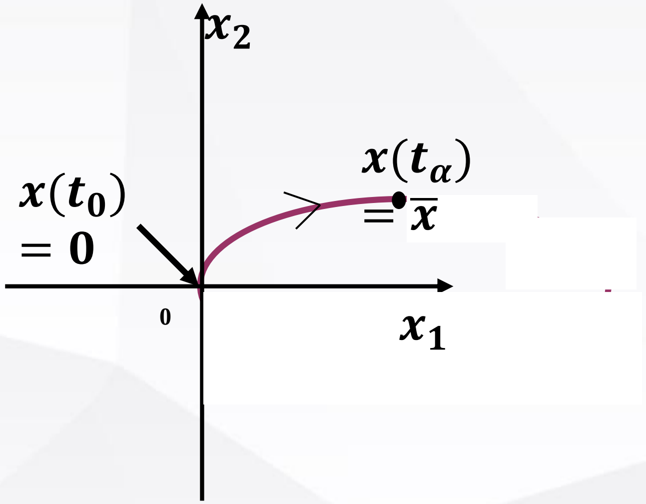
能控性与能达性的定义

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (*)$$

对初始时刻t_0，在系统的时间定义域内存在着另一时刻$t_\alpha > t_0$，可找到无约束的控制向量$u(t)$，使得系统从初始状态$x(t_0) = \bar{x}$推向状态$x(t_\alpha) = 0$，则称系统（*）式的这一特定状态$\bar{x}$是**能（可）控**的，若$\bar{x}$为状态空间的任意一点，那么就称此系统是**状态完全能（可）控**的，简称系统是能控的或能控系统。若系统存在某个状态不满足上述条件，那么是不能控系统。如果存在将系统（*）式从零态$x(t_0) = 0$推向末态$x(t_\alpha) = \bar{x}$的控制作用$u(t)$，则$\bar{x}$是能达到的, 若$\bar{x}$可为状态空间的任一点，则称系统（*）式是在$[t_0, t_\alpha]$上**状态完全能（可）达的**。



x_2
$x(t_0)$
$= \bar{x}$
$x(t_\alpha)$
$= 0$
0
x_1



x_2
$x(t_\alpha)$
$= \bar{x}$
$x(t_0)$
$= 0$
0
x_1

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (*)$$

式$(*)$所示系统的解为

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (**)$$

依上面能控性定义，如果系统在$[t_0 \quad t_\alpha]$上是完全能控的，那么就有

$$0 = e^{A(t_\alpha-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t_\alpha} e^{A(t_\alpha-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

可导出：

$$x_0 = -e^{-A(t_\alpha-t_0)}\int_{t_0}^{t_\alpha} e^{A(t_\alpha-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$= -\int_{t_0}^{t_\alpha} e^{A(t_0-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (***)$$

(***)式表明，所谓完全能控的，就是对任意非零x_0，满足(***)式的$u(\tau)$总是存在的。或者，也可以这样说，对于任意无约束控制u，满足式(***)的相应的状态空间中的点x_0必是系统的能控状态。

$$\dot{x} = Ax + Bu \qquad (*)$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (**)$$

反之，根据定义，如果状态空间中某个非零状态$\overline{x}$是能达状态，那么它必满足下式：

$$\overline{x}(t) = \int_{t_0}^{t_\alpha} e^{A(t_\alpha-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad (****)$$

（**）式表明，若 $\overline{x}$ 为可达态，则必存在满足式（***）的无约束的控制$u(t)$，或者也可以这样说，对完全可达的系统，对任一无约束控制$u(t)$，由（****）式导出的 $\overline{x}$ 必是系统的能达态。**

由于$e^{A(t_\alpha-t_0)}$为非奇异常阵，这表明能控状态和能达态之间为线性非奇异变换的关系。对状态空间中任一能控状态必有相应的一个能达状态存在于状态空间：反之，对状态空间中任一能达状态必有相应的一个能控状态存在于状态空间，所以可以说**能控性和能达性二者对线性系统来说是等价的**，我们将着重讨论能控性，而较少提及能达性。

能控性概念的几点说明

（1）状态空间中某点$x(t_0)=\bar{x}$，不包括无穷远点和原点在内。$\bar{x}$是非零有限点，无穷远点不讨论，原点特殊对待，即可控又不可控。

（2）由可控性定义，$\bar{x}$是非零有限点，末态是状态空间的原点。从控制工程角度看，视 $\bar{x}$为误差，$\bar{x}\to 0$可控性，这相当于讨论调节问题的可实现性问题。反之，可达性规定状态空间原点是初始状态，目标状态取为 $\bar{x}$。这相当于跟踪问题的可实现问题。

（3）能控状态和能达态之间为线性非奇异变换的关系。对线性离散时间系统，由于状态转移矩阵不一定是非奇异的，而造成离散系统的状态可控性与可达性是不一致的。

（4）线性非奇异变换不改变系统的能控性。

（5）外扰不影响系统的状态可控性。

(6) 可控（或可达）时间区间$[t_0, t_\alpha]$，是系统状态由规定的初态到规定的目标状态所需要的时间间隔。对于时变系统，可控的时间区间的大小和初始时刻t_0选择有关的。

对于定常系统，可控的时间区间的大小和t_0选择无关，即状态一致可控。所以对定常系统的状态可控性或可达性都可以不必在定义中特别强调“在$[t_0, t_\alpha]$上”，定常系统在某一个有限时间区间上是完全可控的，则任何一个有限时间空间上都是完全可控的，可达性亦然。

(7) 我们把全体可控状态的集合记作$X_c^+[t_0, t_\alpha]$。可以证明$X_c^+[t_0, t_\alpha]$是状态空间X的线性子空间。称$X_c^+[t_0, t_\alpha]$为系统的可控子空间。若$X_c^+[t_0, t_\alpha]$充满整个状态空间，则系统是完全能控的系统。

(8）可控子空间及其正交补空间。上面已定义了状态空间X的可控子空间$X_c^+[t_0,t_\alpha]$，还可以找出可控子空间$X_c^+[t_0,t_\alpha]$的正交补空间，并记作$X_c^-[t_0,t_\alpha]$。则状态空间可以分解为二者的直和，即：

$$X = X_c^+[t_0,t_\alpha] \oplus X_c^-[t_0,t_\alpha] \tag{1}$$

设状态空间X是三维的，则x_1和x_3轴组成的两维平面是可控子空间$X_c^+[t_0,t_\alpha]$，则与之正交的x_2轴是其正交补空间$X_c^-[t_0,t_\alpha]$。

显然可控子空间的维数与其正交补空间的维数之和就是状态空间的维数。

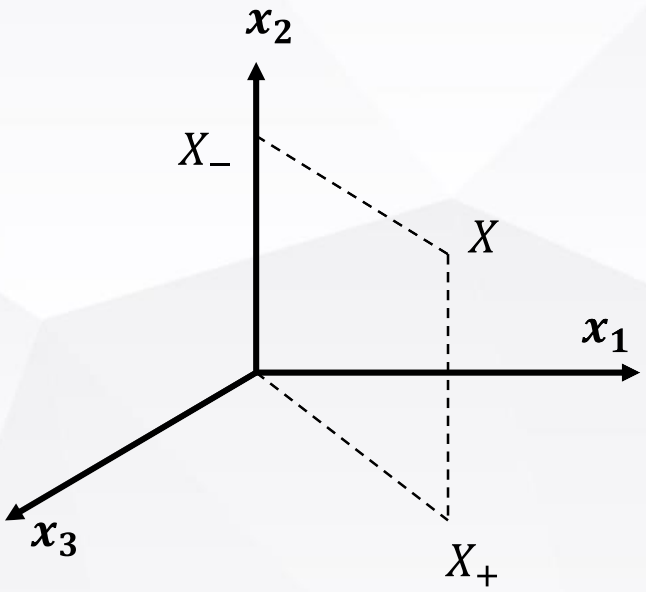


图 A

可控性分解： $X = X_+ + X_-$ (2)

状态空间中任意一点X都可以分解为上述两个子空间的投影之和。其中X_+是X在可控子控间上的投影，并称为X的可控分量,X_-是X在可控子空间的正交补空间上的投影，并称为X的不可控分量。

当系统状态X不是完全可控时，任意状态X的可控分量X_+可以找到$u(t)$ 使其在有限时间内转移到原点，而不可控分量X_-不可能找到控制使其在有限时间内转移到原点。

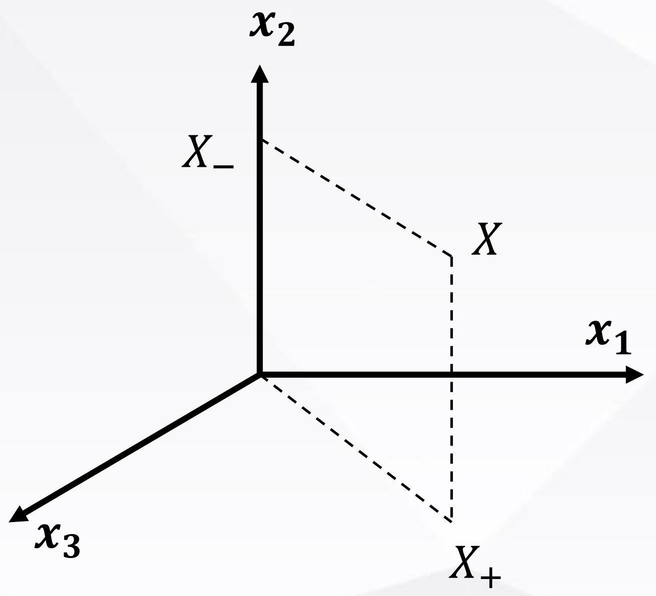


图 A

可控子空间和其正交补空间 只存在唯一的交点，就是状态空间原点。原点兼有X_+和X_-的双重性质，这就是在状态可控性定义中扣除原点的原因。

能观性概念

能观性

一、能观性例子

例 图1(a)电路的状态方程为：

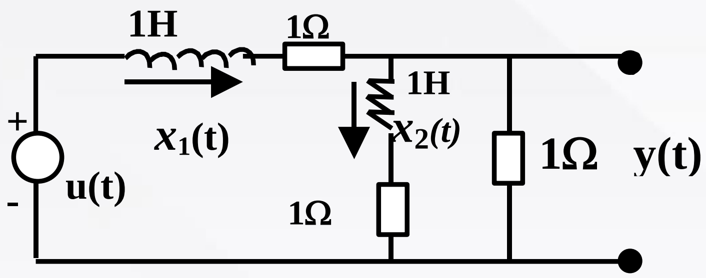


图 1(a)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

此系统的矩阵指数是：

$$e^{At} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix}$$

设$u(t) = 0$，那么输出电压仅取决于初始状态$x(0)$，且为

$$y(t) = c^T e^{At} x(0) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-t} + e^{-3t} & e^{-t} - e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} & e^{-t} + e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-3t} & -e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \big(x_1(0) - x_2(0)\big)e^{-3t}$$

能观性

$$y(t) = \big(x_1(0) - x_2(0)\big)e^{-3t}$$

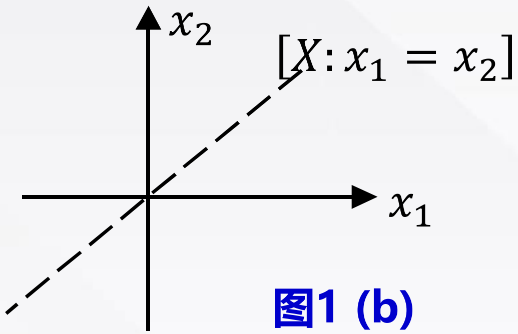
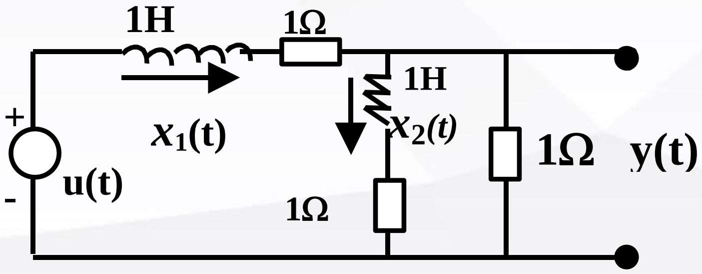


图1 (b)

不论初始状态$x(0)$等于什么数值，输出$y(t)$仅仅取决于差值$x_1(0) - x_2(0)$，而且$x_1(t) = x_2(t)$，则输出恒为零，无法计算出初值，称$x_1(0) = x_2(0)$不能观状态，$\{x: x_1 = x_2\}$为不能观状态子空间。



从电路拓扑来看。两个感性支路具有相同的时间常数，如果$u(t) = 0, x_1(0) = x_2(0)$，那么对所有时间$t$都有$x_1(t) = x_2(t)$。因为输出$y(t)$是这两个电感电流的差值，所以它恒等于零。

能观性和能重构性的定义

给定一般的系统：

$$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases} \qquad (*)$$

式中u, x, y分别为$n \times 1, r \times 1, m \times 1$维向量

如果线性系统（*）式对t_0时刻存在时刻$t_\alpha > t_0$，根据在有限时间区间$[t_0, t_\alpha]$量测到的输出$y(t)$，能够唯一确定系统在时刻的初始状态x_0，则称该状态x_0在$[t_0, t_\alpha]$上是能（可）观的。若系统在t_0时刻的所有初始状态都是能观的。则称状态是完全能（可）观的，简称系统是能观的。和能达性对应于能控性一样，这里也有对应于能观测性的能（可）重构性概念。上述定义中，如果根据$[t_0, t_\alpha]$上的观测值，能够唯一地确定系统在t_α时刻的任意末态x_α，则称系统在$[t_0, t_\alpha]$上是状态完全能（可）重构的。

对（*）式求状态方程的解，得

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

令$t=t_\alpha$,则得

$$x(t_\alpha)=e^{A(t_\alpha-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t_\alpha}e^{A(t_\alpha-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

其中，$u(\tau)$是已知的绝对可积函数，上式中$e^{A(t_\alpha-t_0)}$为非奇异，所以若x_0可由$[t_0,t_\alpha]$上的量测唯一定出，则也必能唯一定出$x(t_\alpha)$，反之，若$x(t_\alpha)$可由$[t_0,t_\alpha]$上的量测唯一定出，则同样必能唯一定出x_0，这表明：连续时间线性系统，其能观性和能重构性是完全等价的。

能控性判据（一）

连续线性定常系统的能控性判据

连续线性定常系统的状态空间表达式为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Dx \end{cases}$$

若一个系统是对角标准型形式，则系统的能控性就很清楚地表现出来，所以常常将一个系统化为对角标准型。然后再判别其能控性。

一、状态能控性判据形式之一（模态判据）

（1）如果系统$\sum = (A, B)$具有两两相异的特征值，那么其状态完全能控的充分必要条件是其对角标准形式

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \qquad (*)$$

中，输入矩阵$\widetilde{B}$中不存在全零的行。如果存在全零的行，那么和该行相对应的状态变量就是不能控的。或者说该行对应的特征值形式的模态$e^{\lambda_i t}$是不可控模态。

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

证明：

1）首先证明系统在非奇异变换后能控性不变。因为$\sum=(A,B)$和$\widetilde{\sum}=(\widetilde{A},\ \widetilde{B})$之间为非奇异变换，所以有$x_0=T\widetilde{x}_0$和$\widetilde{x}_0=T^{-1}x_0$。表明任意的$x_0\in x$为能控状态，则相应的$\widetilde{x}_0$也必为能控状态，反之也成立，从而说明两者之间能控等价性。

2）证明$\tilde{B}$不包含元素全为零的行是$\Sigma=(A,B)$状态完全能控的充分必要条件。将（*）式写成展开形式

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_1=\lambda_1\tilde{x}_1+(\tilde{b}_{11}u_1+\tilde{b}_{12}u_2+\cdots+\tilde{b}_{1r}u_r)\\ \dot{\tilde{x}}_2=\lambda_2\tilde{x}_2+(\tilde{b}_{21}u_1+\tilde{b}_{22}u_2+\cdots+\tilde{b}_{2r}u_r)\\ \qquad\cdots\\ \dot{\tilde{x}}_n=\lambda_n\tilde{x}_n+(\tilde{b}_{n1}u_1+\tilde{b}_{n2}u_2+\cdots+\tilde{b}_{nr}u_r)\end{cases}$$

上述方程组中，没有状态变量之间的耦合，因此$\tilde{x}_i(i=1,2,\cdots,n)$能控的充要条件是不能同时有$b_{i1}=0,b_{i2}=0,\cdots,b_{ir}=0$。

例 试判断如下系统是否能控

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-4 & 5\\ 1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-5\\ 1\end{bmatrix}u$$

解：首先将其化为对角标准型

特征方程为： $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda+4 & -5 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 5 = (\lambda+5)(\lambda-1) = 0$

得特征值为： $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 1$

则变换阵： $T = [P_1 \quad P_2] = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$

故得： $T^{-1}b = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

变换后的对角标准形式为： $\dot{\tilde{x}} = T^{-1}AT\tilde{x} + T^{-1}bu = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$

显然有一行元素为零，故系统是不完全能控的，其不能控的模态为 e^t 。

例 **有如下各系统**

1) $$\dot{x}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

2) $$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

3) $$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

显然，1）和2）是状态完全能控的，而3）是状态不完全能控的。

(2)当系统$\Sigma=(A,B)$具有重特征值$\lambda_1(m_1$重$),\lambda_2(m_2$重$),\cdots,\lambda_k(m_k$

$$\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_k \end{bmatrix}\tilde{x}+\tilde{B}u$$

其中,$\tilde{B}$和每个约当块$J_i(i=1,2,\cdots,k)$最后一行相对应的那些行其元素不全为零。

证明:对应于J_i块写成展开形式，有

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_{i1} = \lambda_i \tilde{x}_{i1} + \tilde{x}_{i2} + (\tilde{b}^i_{11} u_1 + \tilde{b}^i_{12} u_2 + \cdots + \tilde{b}^i_{1r} u_r) \\ \cdots \\ \dot{\tilde{x}}_{i,m_i-1} = \lambda_i \tilde{x}_{i,m_i-1} + \tilde{x}_{i,m_i} + (\tilde{b}^i_{(m_i-1),1} u_1 + \tilde{b}^i_{(m_i-1),2} u_2 + \cdots + \tilde{b}^i_{(m_i-1),r} u_r) \\ \dot{\tilde{x}}_{i,m_i} = \lambda_i \tilde{x}_{i,m_i} + \left(\tilde{b}^i_{(m_i),1} u_1 + \tilde{b}^i_{(m_i),2} u_2 + \cdots + \tilde{b}^i_{(m_i),r} u_r\right) \ (i = 1, 2, \cdots, k) \end{cases}$$

上式表明，当且仅当相应于J_i的最后一行的的行的元素$\tilde{b}^i_{m_i,1}, \tilde{b}^i_{m_i,2}, \cdots \tilde{b}^i_{m_i,r}$不全为零时, $\tilde{x}_{i1}, \tilde{x}_{i2}, \cdots, \tilde{x}_{i,m_i}$全都和$u_1, u_2, \cdots u_r$中的至少一个有直接或间接的关联，即能控的。

例 已知如下系统，判断其能控性。

$$1)\ \dot{x} = \left[\begin{array}{cc|c} \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right] x + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u \quad (b_2 \neq 0, b_3 \neq 0)$$

$$2)\quad \dot{x} = \left[\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & -3 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & -4 & 0 \\ & & 0 & -5 \end{array}\right] x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$3)\quad \dot{x} = \left[\begin{array}{cc|cc} -3 & 1 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & -3 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & -4 & 0 \\ & & 0 & -5 \end{array}\right] x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

显然1），2）是状态完全能控的，而3）状态不完全能控。

(3)当系统的约当型存在多个约当块对应同一个特征值时，$\widetilde{\Sigma}=(\widetilde{A},\ \widetilde{B})$状态完全能控的充分必要条件是，系数矩阵$\widetilde{B}$中对应$\widetilde{A}$矩阵中相等特征值的全部约当块末行的那些行之间是线性无关的。

如下例题 1）是能控的，而 2）是不能控的。

1) $$\dot{x}=\left[\begin{array}{cc:cc} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]x+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boxed{3 \quad 0} \\ 0 & 1 \\ \boxed{0 \quad 1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

2) $$\dot{x}=\left[\begin{array}{cc:cc} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]x+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boxed{3 \quad 0} \\ 0 & 1 \\ \boxed{1 \quad 0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

能控性判据（二）

连续线性定常系统的能控性判据

二、状态能控判据形式之二（代数判据）

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Dx \end{cases} \qquad (*)$$

(1)系统$\sum\ (A,B)$是状态完全能控的充分必要条件是其能控性矩阵

$$Q_k = [B, AB, \cdots, A^{n-1}B]\text{，满秩即} RankQ_k = n$$

证明：根据系统（*）式的表达式

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_t^\tau \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

能控性定义和Cayley-Hamilton 定理 可以证明，下为简要思路：

基本判据：系统能控，则格拉姆矩阵 $\int_0^{t_1} e^{-At}BB^Te^{-A^Tt}dt$非奇异

充分性：反证，设系统不能控，则格拉姆矩阵奇异，即存在$\alpha^T e^{-At}B=0$

对其求导（n-1）次，得$\alpha^T B=0,\alpha^T AB=0,\alpha^T A^2B=0,\cdots,\alpha^T A^{n-1}B=0$，

表明，$\alpha^T[B,AB,\cdots,A^{n-1}B]=0$，且$\alpha^T\neq 0$，$rankQ_k<n$，与题设矛盾

必要性：已知系统能控，反证设 $rankQ_k<n$，则至少存在一个$\alpha^T\neq 0$，使

$$\alpha^T[B,AB,\cdots,A^{n-1}B]=0$$

可导出$\alpha^T A^i B=0,i=0,\cdots,n-1$。由Cayley-Hamilton 定理，可以扩展至

$i\to\infty$，故可得，$0=\alpha^T\left[I-At+\frac{1}{2!}A^2t^2-\frac{1}{3!}A^3t^3+\cdots\right]B=\alpha^T e^{-At}B$

可导出$0=\alpha^T\int_0^{t_1}e^{-At}BB^Te^{-A^Tt}dt$，格拉姆矩阵奇异，即不完全能控，矛盾

例 已知下面系统，试判别该系统的能控性。

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

解 $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad A^2B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$Q_k = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

从Q_k的前三列可知，$RankQ_k = 3$，所以系统完全能控。

例 **试判断下面系统的能控性：**

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&4&6\\2&1&7\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1&9\\0&0\\2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

解：

$$Q_k=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&9&7&*&*&*\\0&0&13&*&*&*\\2&0&16&*&*&*\end{bmatrix}$$

只要计算到第三列就足以判断到$RankQ_k=3=n$，故往下各列不必再计算了，该系统是完全能控的。

由于在多输入系统中，Q_k是$n \times nr$矩阵，不象在单输入系统中是$n \times n$方阵，其秩的确定一般地要复杂些。由于矩阵Q_k与Q_k^T的积$Q_k Q_k^T$是方阵，而它的非奇异性等价于 Q_k 的非奇异性，所以在计算行比列少的矩阵的秩时，有时可利用$Rank Q_k = Rank Q_k Q_k^T$的关系，通过计算$Q_k Q_k^T$的秩来确定$Q_k$的秩，如上题可以这样计算：

$$Q_k Q_k^T = \begin{bmatrix} 26 & 6 & 17 \\ 6 & 3 & 2 \\ 17 & 2 & 21 \end{bmatrix}$$

易知$Q_k Q_k^T$非奇异，故Q_k满秩，系统是完全能控的。

例 **图1桥式电路中，若取电感L的电流i_L及电容C的电压v_c为状态变量，取i_L为输出变量，则系统方程为：**

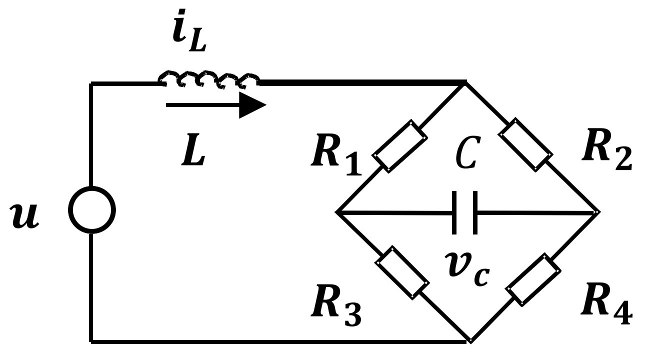


图1 桥式电路

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right) & \frac{1}{L}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}-\frac{R_3}{R_3+R_4}\right) \\ \frac{1}{C}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}\right) & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3+R_4}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix}$$

试判断其能控条件。

解：

$$Q_K = [b \quad Ab] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L^2}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right) \\ 0 & -\frac{1}{LC}\left(\frac{R_4}{R_3+R_4}-\frac{R_2}{R_1+R_2}\right) \end{bmatrix}$$

可以看出，当 $\frac{R_4}{R_3+R_4} \neq \frac{R_2}{R_1+R_2}$

即$R_1R_4 \neq R_2R_3$时$RankQ_k = 2$，系统完全能控，当系统$R_1R_4 = R_2R_3$时$RankQ_k = 1$，系统为不完全能控。这是阻抗电桥的平衡条件，不论怎样加外部输入u，使电容电压v_c变化都是不可能的。

代数等价系统的能控性

前面已经讲到，用线性非奇异变换$x(t)=T\tilde{x}$可以把系统（*）式变换成用下式表示的等价系统

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}=\tilde{A}\tilde{x}+\tilde{B}u\\ y=C\tilde{x}+\tilde{D}x\end{cases}$$

其中

$$\tilde{A}=T^{-1}AT,\tilde{B}=T^{-1}B,\tilde{C}=CT,\tilde{D}=D$$

对此等价系统，可求出能控矩阵为：

$$\widetilde{Q_k}=[\tilde{B}\quad \tilde{A}\tilde{B}\quad \cdots\quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]=[T^{-1}B\quad T^{-1}AB\quad \cdots\quad T^{-1}A^{n-1}B]=T^{-1}Q_k$$

由于T^{-1}是非奇异矩阵，所以$Rank\tilde{Q}_k=RankQ_k$。由此可得如下结论：

对于非奇异变换，系统的能控性保持不变。

能观性判据（一）

连续线性定常系统的能观性判据

（1）状态能观性判据形式之一（模态判据）

1）设系统$\Sigma = (A, C)$具有两两相异的特征值，则其状态完全能观的充分必要条件是系统的对角标准形式

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tilde{x}$$

$$y = \tilde{C}\tilde{x} \qquad (*)$$

$\tilde{C}$中，不包含元素全为零的列。

证明：将（*）式展开。有

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_1 = \lambda_1 \tilde{x}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \lambda_2 \tilde{x}_2 \\ \quad\cdots \\ \dot{\tilde{x}}_n = \lambda_n \tilde{x}_n\end{cases} \qquad \tilde{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{10} \\ e^{\lambda_2 t}\tilde{x}_{20} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}\tilde{x}_{n0} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 = \tilde{c}_{11}\tilde{x}_1 + \tilde{c}_{12}\tilde{x}_2 + \cdots \tilde{c}_{1n}\tilde{x}_n \\ y_2 = \tilde{c}_{21}\tilde{x}_1 + \tilde{c}_{22}\tilde{x}_2 + \cdots \tilde{c}_{2n}\tilde{x}_n \\ \quad\cdots \\ y_m = \tilde{c}_{m1}\tilde{x}_1 + \tilde{c}_{m2}\tilde{x}_2 + \cdots \tilde{c}_{mn}\tilde{x}_n \end{cases}$$

整理并写成矩阵向量形式

$$y(t) = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \cdots & \tilde{c}_{1n} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \cdots & \tilde{c}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{c}_{m1} & \tilde{c}_{m2} & \cdots & \tilde{c}_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{10} \\ e^{\lambda_2 t}\tilde{x}_{20} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}\tilde{x}_{n0} \end{bmatrix}$$

上述方程中，由于没有状态变量之间的耦合，因此$\tilde{x}_i(i=1,2\cdots n)$，能观的充要条件是不同时有$\tilde{c}_{1i}=0,\tilde{c}_{2i}=0,\cdots\tilde{c}_{mi}=0(i=1,2\cdots n)$。

例 给定系统

$$\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}0&4&5\end{bmatrix}x\end{cases}\qquad\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&0\\0&0&-3\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}3&2&0\\0&3&1\end{bmatrix}x\end{cases}$$

显然，a）是状态不完全能观的。b）是状态完全能观的。

例 已知系统 $\dot{x}=\begin{bmatrix}-4&5\\1&0\end{bmatrix}x\qquad y=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}x$

试判断其能观性。

解： 首先将其化为对角规范型。

可知$\lambda_1=-5,\lambda_2=1$，变换矩阵为： $T=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

故原系统的对角标准型为： $CT=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\end{bmatrix}$

所以 $\begin{cases}\dot{x}=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x\\ y=\begin{bmatrix}3 & 0\end{bmatrix}x\end{cases}$

可见，此系统不能完全能观。

2)设系统$\sum=(A,C)$具有重特征值:

$$\lambda_1(m_1\text{重}),\lambda_2(m_2\text{重}),\cdots,\lambda_k(m_k\text{重}),\sum_{i=1}^{k}m_i=n,\lambda_i\neq\lambda_j,(i\neq j),$$

则系统状态完全能观的充分必要条件，是其经非奇异变换后的约当标准型

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} J_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & J_K \end{bmatrix} \tilde{x}$$

$$y = \tilde{C}\tilde{x}$$

中$\tilde{C}$的和每个约当块$J_i(i = 1, 2 \cdots k)$首行相对应的所有那些列，其元不全为零。

证明方法和能控性判据形式之一中的（2）判据证明方法相类同，仅以三阶系统为例说明。设某三阶系统经非奇异变换后的*Jordan*标准型如下：

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \tilde{x} \qquad y = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{31} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{32} \\ \tilde{c}_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33} \end{bmatrix} \tilde{x}$$

此时状态方程的解为：

$$\tilde{x}(t)=\begin{bmatrix}\tilde{x}_1(t)\\ \tilde{x}_2(t)\\ \tilde{x}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{10}+te^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{20}+t^2e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{30}\\ e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{20}+te^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{30}\\ e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{30}\end{bmatrix}$$

从而

$$y=\begin{bmatrix}\tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{31}\\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{32}\\ \tilde{c}_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{10}+te^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{20}+t^2e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{30}\\ e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{20}+te^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{30}\\ e^{\lambda_1 t}\tilde{x}_{30}\end{bmatrix}$$

由上式可知，当且仅当输出矩阵$\tilde{C}$中第一列元素不全为零时,$y(t)$中总包含着系统的全部自由分量而为完全能观。

例 **已知系统如下：**

$$
\begin{cases}
\dot{x} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & & \\ 0 & 2 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & & \\ \hline & & & -2 & 1 \\ & 0 & & 0 & -2 \end{array}\right] x \\
y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dot{x} = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & & 0 \\ 0 & 4 & & \\ \hline & & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] x \\
y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x
\end{cases}
$$

显然，a）是状态完全能观的； b）是状态不完全能观的。

3) 当等特征值有多个约当块时, 系统状态完全能观的充分必要条件是与系数矩阵 A 中所有相等特征值的约当块首行相对应的 C 中那些列彼此线性无关。

能观性判据（二）

定常系统能观性判据

（2）状态能观性判据形式之二（代数判据）

系统$\Sigma = (A, C)$状态完全能观测的充分必要条件是其能观性矩阵

$$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \left[C^T, A^T C^T, \cdots \left(A^T\right)^{n-1} C^T\right]$$

满秩，即$RankQ_g = n$

证明：略

定常系统能观性判据

例 图1桥式电路中，若取电感L的电流i_L及电容C的电压v_c为状态变量，取i_L为输出变量，则系统方程为：

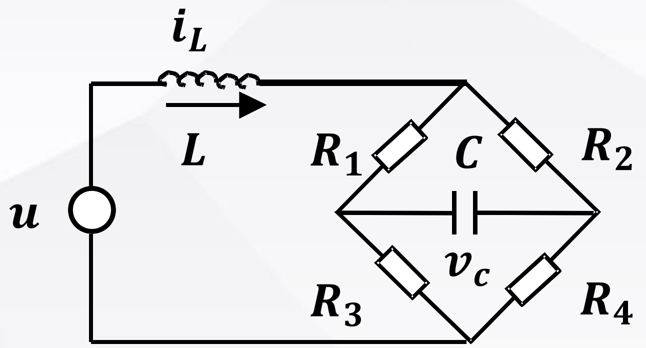


图1 桥式电路

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right) & \frac{1}{L}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}-\frac{R_3}{R_3+R_4}\right) \\ \frac{1}{C}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}\right) & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3+R_4}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y = [1 \quad 0]\begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix}$$

试判断其能观性条件。

定常系统能观性判据

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right) & \frac{1}{L}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}-\frac{R_3}{R_3+R_4}\right) \\ \frac{1}{C}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}-\frac{R_4}{R_3+R_4}\right) & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1+R_2}+\frac{1}{R_3+R_4}\right) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}u$$

解： $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_c \end{bmatrix}$

能观测矩阵为： $Q_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}+\frac{R_3R_4}{R_3+R_4}\right) & \frac{1}{L}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}-\frac{R_3}{R_3+R_4}\right) \end{bmatrix}$

显然，即$R_1R_4 \neq R_2R_3$时，系统完全能观。当系统$R_1R_4 = R_2R_3$时 $RankQ_g = 1$，系统为不完全能观。

定常系统能观性判据

例 已知系统

a) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$ 试判别 a)、 b)两个系统的能观性。

解： 对上述两个系统分别计算如下：

a) $CA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \end{bmatrix}$ $Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$

$RankQ_g = 1 < n = 2$ 所以此系统不完全能观。

b) $CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ $Q_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ $RankQ_g = 2 = n$

所以此系统完全能观。

代数等价系统的能观性

设系统为： $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$

对上式x线性非奇异变换,$x(t) = T\tilde{x}$，则有： $\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} \\ y = \tilde{C}\tilde{x} \end{cases}$

其中 $\tilde{A} = T^{-1}AT, \tilde{C} = CT$

对此等价系统，可求出其能观性矩阵为：

$$\tilde{Q}_g = \begin{bmatrix} \tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \tilde{C}\tilde{A}^2 \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT \\ CAT \\ CA^2T \\ \vdots \\ CA^{n-1}T \end{bmatrix} = Q_gT$$

由于T为非奇异矩阵，所以$Rank\tilde{Q}_g = RankQ_g$，由此可得如下结论：

对于非奇异变换，系统的能观性保持不变。

对偶性原理

对偶性原理

对偶性原理

从能控性和能观性讨论中可以看到,无论是在概念上还是在判据的形式上它们都是很相似的。这种内在的联系，即对偶性原理，是由Kalman提出的。对偶性原理不但揭示了控制系统的这两个基本特性即能控制和能观性之间的对偶关系，而且指明了控制理论的两大基本问题——控制问题和估计问题之间的内在联系。

一、能控制性和能观性间的对偶现象

比较能控性和能观性判据条件, 容易发现一个有趣的现象, 就是它们在数学形式上的对偶性。以连续时间系统为例，列表如下：

对偶性原理

表1

完全能控条件	完全能观条件
$W_k(t_0,t_\alpha) = \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi(t_0,\tau)B(\tau)B^T(\tau)\Phi^{\mathrm{T}}(t_0,\tau)\mathrm{d}\tau$ 满秩	$W_g(t_0,t_\alpha) = \int_{t_0}^{t_\alpha} \Phi^{\mathrm{T}}(\tau,t_0)C^T(\tau)C(\tau)\Phi(\tau,t_0)\mathrm{d}\tau$ 满秩
$\Phi(t_0,t)B(t)$ 行线性独立	$C(t)\Phi(t,t_0)$ 列线性独立
$Q_k = \left[B, AB, \cdots A^{n-1}B\right]$ 满秩	$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ 满秩

对偶性原理

表1（续）

<table>
<tr><th>完全能控条件</th><th>完全能观条件</th></tr>
<tr><td>当 $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$ 时
B无全零的行</td><td>当 $A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$ 时
C无全零的列</td></tr>
<tr><td>当 $A=\begin{bmatrix}J_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & J_n\end{bmatrix}$ 时
（J_i均为约当块） B和每个约当块J_i的最后一行相应的所有那些行的元素不全为零。</td><td>当 $A=\begin{bmatrix}J_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & J_n\end{bmatrix}$ 时
（J_i均为约当块）C和每个约当块 J_i 首行相对应的所有那些列，其元素不全为零。</td></tr>
</table>

对偶性原理

二、对偶性原理

对偶性原理是这样的，有两个系统，一个系统 Σ_1 为 $\begin{cases}\dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1u_1 \\ y_1 = C_1x_1\end{cases}$

另一个系统Σ_2 为 $\begin{cases}\dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u_2 \\ y_2 = C_2x_2\end{cases}$

若满足条件： $A_2 = A_1^T, B_2 = C_1^T, C_2 = B_1^T$ $(*)$

就称Σ_1 和Σ_2 是互为对偶的，式中

x_1, x_2—— n维状态量　　u_1, u_2—— 各为控制向量

y_1, y_2—— 各为输出向量　　A, A_2—— 系统矩阵

B_1, B_2—— 各为控制矩阵　　C_1, C_2—— 各为输出矩阵

对偶性原理

如此，则 $\sum_1$ 的能控性等价于 $\sum_2$ 的能观性，而 $\sum_1$ 的能观性等价于 $\sum_2$ 的能控性，换言之，若 $\sum_1$ 是状态完能控的（完全能观的）则 $\sum_2$ 就是状态完全能观的（状态完全能控）。

证明：对 $\sum_2$ 而言，若$n \times mn$能控性矩阵

$$Q_{k2} = \left[B_2, A_2B_2, \cdots A_2^{n-1}B_2\right]$$

的秩为n，而为状态完全能控的，将（*）式代入上式，有

$$Q_{k2} = \left[C_1^T, A_1^TC_1^T, \cdots \left(A_1^T\right)^{n-1}C_1^T\right] = Q_{g1}^T$$

这说明 $\sum_1$ 的能观性矩阵Q_{g1}的秩也为n，所以为完全能观的。

同理有 $Q_{g2}^T = \left[C_2^T, A_2^TC_2^T, \cdots \left(A_2^T\right)^{n-1}C_2^T\right] = \left[B_1, A_1B_1, \cdots A_1^{n-1}B_1\right] = Q_{k1}$

即 $\sum_2$ 若的Q_{g2}满秩而为完全能观时，$\sum_1$ 的Q_{k1}亦满秩而状态完全能控的。

对偶性原理

三、对偶系统的方块图

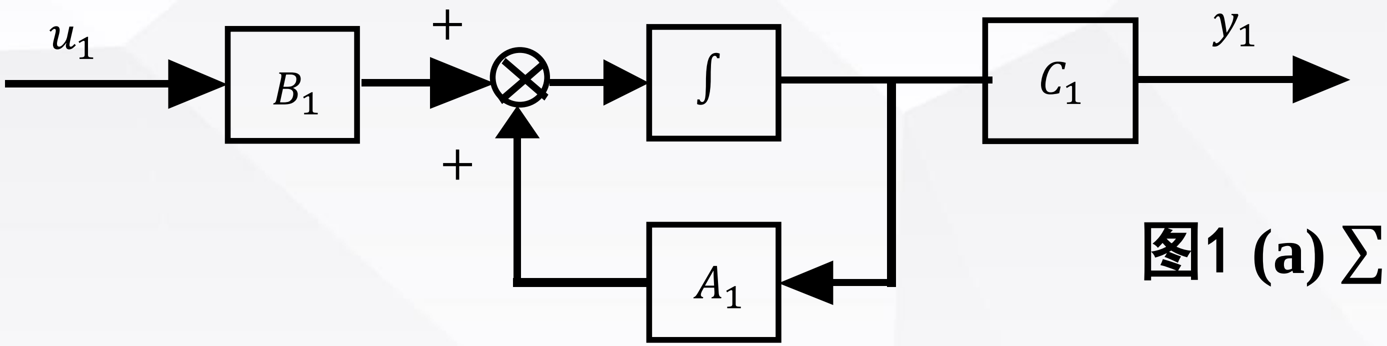


图1 (a) $\sum_1$ 方块图

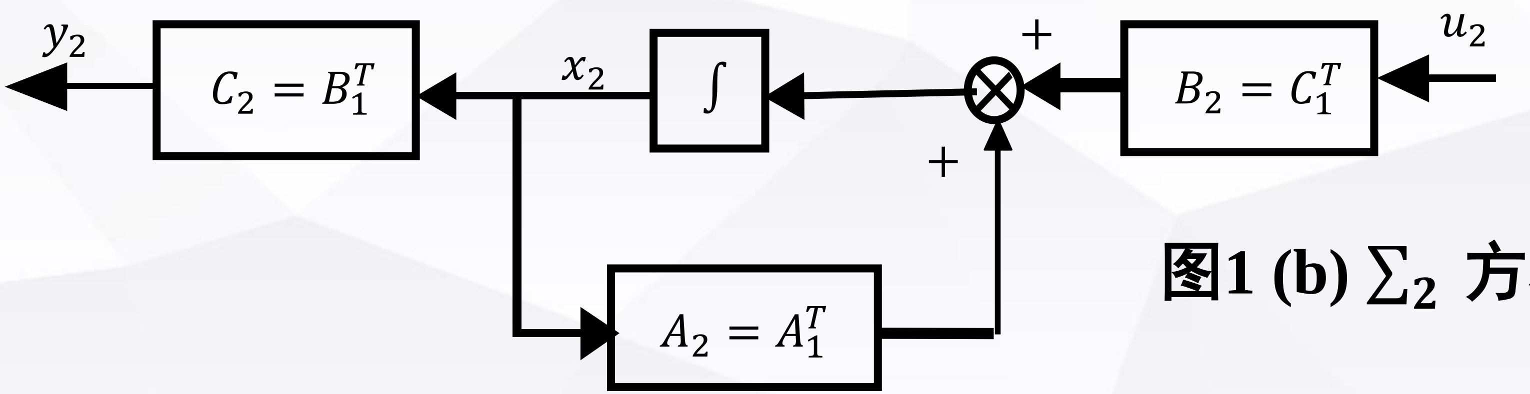


图1 (b) $\sum_2$ 方块图

对偶系统：输入端与输出端的互换，信号传递的反向

对偶性原理

四、对偶系统的传递函数阵

下面再从传递函数矩阵来看对偶系统的关系。

$$G_1(s) = C_1(SI - A_1)^{-1}B_1$$

$$G_2(s) = C_2(SI - A_2)^{-1}B_2 = B_1^T\left(SI - A_1^T\right)^{-1}C_1^T$$

$$= \left[C_1(SI - A_1)^{-1}B_1\right]^T = G_1^T(S)$$

可见对偶系统的传递函数矩阵是互为转置。

五、对偶系统的特征方程及特征值

互为对偶的系统具有相同的特征方程和相同的特征值，

因为 $|SI - A_1| = |SI - A_2|$

$$|SI - A_2| = \left|SI - A_1^T\right| = |SI - A_1|$$

对偶性原理

从以上分析可以清楚地看到，一个系统的能观性问题和其对偶系统的能控性问题等价；系统的能控性问题和对偶系统的能观性问题等价。所以系统的能观性问题可以通过能控性问题的解决而解决，系统的能控性问题，因能观性问题的解决而解决。这在控制理论的研究上具有重要意义。它找到了控制问题和观测问题间的内在联系。这使得系统状态的观测、估计等问题和系统的控制问题可以相互转化，例如，最优控制问题和最优估计问题就有内在的联系，它们可以相互借鉴。

结构分解（一）

状态空间的能控和能观子空间

为了说明这一概念，先看一个例子。

例 已知系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad x(0) = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ x_{30} \end{bmatrix} \\ y = [0 \quad 1 \quad 1] x \end{cases}$$

列出方程并解出：

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-\tau)} u(\tau) d\tau \\ x_2 = x_{20} e^{-2t} \\ x_3 = x_{30} e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} u(\tau) d\tau \end{cases}$$

而 $$y = x_{20} e^{-2t} + x_{30} e^{-3t} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

很容易发现，x_2不受$u(t)$的影响，y 不受x_{10}的影响，也就是说任选$u(t)$不能使x_2达到要求的状态，而无论测得多少个y值也不能定出x_{10}来。

所以在这一系统中的状态有些是能控的，有些是不能控的；有些是能观的，有些是不能观的。它们的传递函数是：

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{1}{S+3}$$

可见，中间出现了零极点对消。换言之，在单输入单输出系统中，若传递函数有零极点相消，则原系统一定不完全能观，能控。

很明显，本例中，由x_1, x_3构成的空间是能控状态构成的子空间，简称能控子空间，由x_2构成的空间是不能控子空间；由x_2, x_3 构成的空间是能观子空间，由x_1构成的空间是不能观子空间。能否分解出来呢?

状态空间按能控性的分解

设定常系数的状态空间表达式如下：$\begin{cases}\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx\end{cases} \qquad (*)$

根据状态的能控性和能观性能够导出某个标准的结构形式。

系统（*）是不完全能控时，即

$$RankQ_K = Rank\left[B, AB, \cdots, A^{n-1}B\right] = r < n$$

总可以找到一个适当的变换阵 T 使得

u和y满足状态方程和输出方程的系数矩阵为：$\tilde{x} = T^{-1}x = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} r \\ n-r \end{array}$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \end{array}\begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \qquad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} r \\ n-r \end{array} \qquad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 \end{bmatrix}$$

任何具有上述形式的实现都有下述两条重要性质：

1) $r\times r$子系统$\sum(\tilde{A}_{11},\tilde{B}_1,\tilde{C}_1)$是能控的;

2) $\tilde{C}(sI-\tilde{A})^{-1}\tilde{B}=\tilde{C}_1(sI-\tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1$,即子系统的传递函数阵与原系统的传递函数阵相等。

状态变量$\tilde{x}_1$代表的空间称为能控子空间，状态变量$\tilde{x}_2$构成的空间称为不能控子空间。系统的能控状态分解可用图1来表示。

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_1=\tilde{A}_{11}\tilde{x}_1+\tilde{A}_{12}\tilde{x}_2+\tilde{B}_1u\\ y_1=\tilde{C}_1\tilde{x}_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}_2=\tilde{A}_{22}\tilde{x}_2\\ y_2=\tilde{C}_2\tilde{x}_2\end{cases}$$

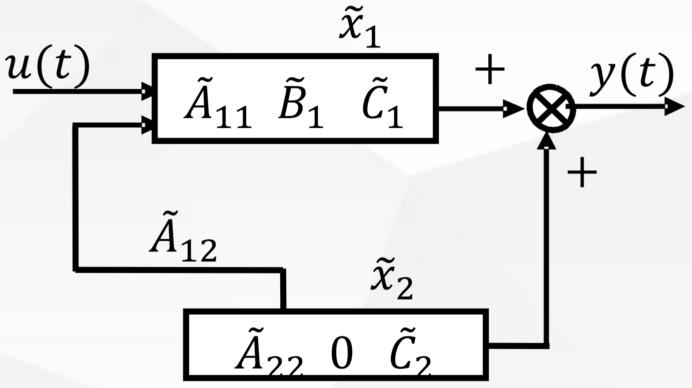


图1 能控状态分解

首先证明第二条性质：

$$\widetilde{C}\left(sI-\widetilde{A}\right)^{-1}\widetilde{B}=\left[\widetilde{C}_1\quad \widetilde{C}_2\right]\begin{bmatrix} sI-\widetilde{A}_{11} & -\widetilde{A}_{12} \\ 0 & sI-\widetilde{A}_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\widetilde{B}_1 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\left[\widetilde{C}_1\quad \widetilde{C}_2\right]\begin{bmatrix} \left(sI-\widetilde{A}_{11}\right)^{-1} & *\ * \\ 0 & \left(sI-\widetilde{A}_{22}\right)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{B}_1 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\widetilde{C}_1\left(sI-\widetilde{A}_{11}\right)^{-1}\widetilde{B}_1$$

于是性质二得证。注意上式中符号“”表示矩阵元素，这里“**”的精确值并不重要，易于证明，** $** = -\left(sI-\widetilde{A}_{11}\right)^{-1}A_{12}\left(sI-\widetilde{A}_{22}\right)^{-1}$

其次证明第一条性质，应注意：

$$\tilde{Q}_K = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 & \tilde{A}_{11}\tilde{B}_1 & \cdots & \tilde{A}_{11}^{n-1}\tilde{B}_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \qquad (**)$$

因为$\tilde{Q}_k = T^{-1}Q_k$所以$\tilde{Q}_k$的秩等于r，所以上半部分的秩必为r。

换一个说法：由于$\tilde{Q}_k$只可能有r个线性无关的行和r个无关的列。将证明，如果从左到右检验列，则前r个列必然是线性无关的。为此假定，$\tilde{A}_{11}^k\tilde{B}_1$线性地依赖于$\{\tilde{A}_{11}^i\tilde{B}_1, i < k\}$，于是$\tilde{A}_{11}^{k+1}\tilde{B}_1 = \tilde{A}_{11}\tilde{A}_{11}^k\tilde{B}_1$显然也依赖于集合$\{\tilde{A}_{11}^i\tilde{B}_1, i < k\}$, 换句话说，从左到右对（**）式进行搜索时，一旦发现相关向量，则所有后续向量也必定是相关向量。既然（**）式的秩为r，所以前r个列且仅仅是这r个列必定是线性无关的。

能控性分解变换矩阵T的构造方法

上述性质的证明过程中实际上提出了求取符合要求的变换矩阵的一种方法。T的构成方法如下：

1) 选择Q_k（能控性矩阵）的 r个线性无关的列构成 T的前 r 列；

2) 任选T 的其它$n-r$列，使得$RankT = n$。

例 试求下面状态方程式所描述的系统的能控子系统。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

证明：选取r个Q_k的线性无关列构造T可使分解后的系统为上三角形

设$T=[T_1,T_2]$，其中T_1是Q_k的r个线性无关列，T_2是补齐的$n-r$个列

记$T^{-1}=[S_1,S_2]^T$。由$T^{-1}T=\begin{bmatrix} S_1^TT_1 & S_1^TT_2 \\ S_2^TT_1 & S_2^TT_2 \end{bmatrix}=I$ 可得，$S_2^TT_1=0$

即组成T的r个线性无关列向量与组成S_2^T的$n-r$个列向量都正交。

而由于$T_1=[t_1,t_2,\cdots,t_r]$是从$Q_k=[B,AB,\cdots,A^{n-1}B]$中取出的，则有：

$AT_1=[At_1,At_2,\cdots,At_r]$仍在$Q_k$张成空间中，或可由矩阵$Q_k$的线性无关列向量表出。

由此可知，S_2^T的$n-r$个向量与AT_1中的列向量正交，即$S_2^TAT_1=0$,

故$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} S_1^TAT_1 & S_1^TAT_2 \\ S_2^TAT_1 & S_2^TAT_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^TAT_1 & S_1^TAT_2 \\ 0 & S_2^TAT_2 \end{bmatrix}$是一个上三角阵。

由于B的列向量都是可控子空间中的点，则有$S_2^TB=0$故$T^{-1}B=\begin{bmatrix} S_1^TB \\ S_2^TB \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^TB \\ 0 \end{bmatrix}$

解 求出此系统的能控矩阵Q_k

$$Q_k = [b \quad Ab \quad A^2b] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

显然$RankQ_k = 2$,此系统不完全能控，能控部分的状态变量数为2。

下面求变换矩阵 T 。首先，从矩阵 Q_k 的列向量中选择两个线性独立的列向量为：

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$，再任选一向量$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，使得$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

为非奇异矩阵，则:$T^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

计算：

$$\tilde{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}3&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&1&0\\1&-4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&3&0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}0&-4&2\\1&4&-2\\\hdashline 0&0&1\end{array}\right]$$

$$\tilde{b}=T^{-1}b=\begin{bmatrix}3&0&1\\-1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c}1\\0\\\hdashline 0\end{array}\right]$$

$$\tilde{C}=CT=\begin{bmatrix}1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\1&3&0\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}1&2&-1\end{array}\right]$$

因此原系统的能控子系统为：

$$\Sigma\left(\begin{bmatrix}0&-4\\1&4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}\right)$$

结构分解（二）

状态空间按能观性的分解

系统$\sum(A,B,C)$不完全能观，即

$$RankQ_g^T = Rank\left[C^T, A^T C^T, \cdots, \left(A^T\right)^{n-1} C^T\right] = r < n$$

时，总可以找到一个变换阵T，使

$$\tilde{x} = T^{-1}x = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix}$$

u , y**满足的状态方程的系数矩阵为：**

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \\ \begin{matrix} r & \quad n-r \end{matrix} \end{array} \qquad \tilde{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}\begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \qquad \tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

任何具有上述形式的实现都有下述两条重要性质：

1)$r \times r$子系统$\sum\left(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1, \tilde{C}_1\right)$能观的;

2)$\tilde{C}\left(sI - \tilde{A}\right)^{-1}\tilde{B} = \tilde{C}_1\left(sI - \tilde{A}_{11}\right)^{-1}\tilde{B}_1$,即子系统的传递函数阵与原系统的传递函数阵相等。

状态变量$\tilde{x}_1$构成的空间为能观子空间，状态变量$\tilde{x}_2$构成的空间为不能观子空间，系统的能观状态分解可用图1表示。

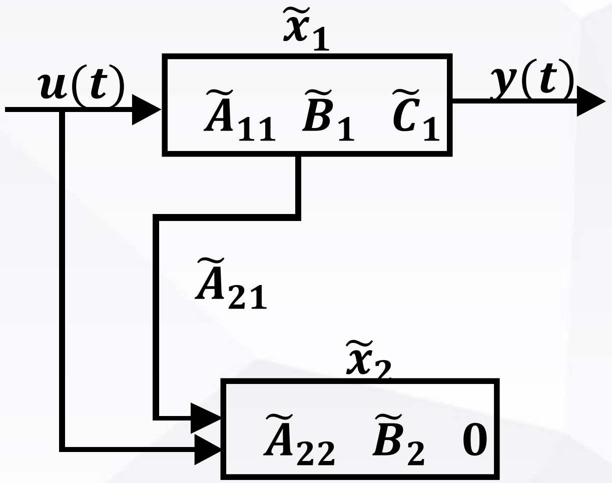


图1 能观状态分解

下面直接给出构造变换矩阵T的方法而不作证明。

a) 选Q_g（能观性矩阵）中 r个线性无关的行作为T^{-1}的前 r行;

b) 任选T^{-1}的其它$n-r$行，使得$RankT^{-1}=n$。

例 求出以下系统的能观子系统。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

解：这个系统的能观测矩阵为：

$$Q_g = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

显然$RankQ_g = 2$，此系统不完全能观，能观状态变量数为2，所以可取非奇异阵：

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则 $\tilde{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 0\\ -2 & 3 & 0\\ \hdashline -5 & 3 & 2\end{array}\right]$

$$\tilde{b}=T^{-1}b=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c}1\\ 2\\ \hdashline 1\end{array}\right]$$

$$\tilde{C}=CT=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

因此原系统的能观子系统为：

$$\Sigma\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\right)$$

系统的典型构造定理（Kalman分解）

同时考虑状态的能控性和能观性，可以导出下面的系统典型构造定理。对系统（*）总可以找到某个相似变换$x = T\tilde{x}$，使它变换为具有如下标准结构的系统。

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 & \tilde{A}_{13} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{43} & \tilde{A}_{44} \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y = [\tilde{C}_1 \quad 0 \quad \tilde{C}_2 \quad 0]\tilde{x} \end{cases}$$

其中 $\tilde{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \tilde{x}_4 \end{bmatrix}$

对应的状态变量$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4$中

$\tilde{x}_1$:能控且能观状态；

$\tilde{x}_2$:能控但不能观状态；

$\tilde{x}_3$:不能控但能观状态；

$\tilde{x}_4$:不能控且不能观状态。

该系统的标准结构可用图2表示，且

$$\tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B} = \tilde{C}_1(sI - \tilde{A}_{11})^{-1}\tilde{B}_1$$

即系统的的传递函数阵由能控且能观的部分来确定。

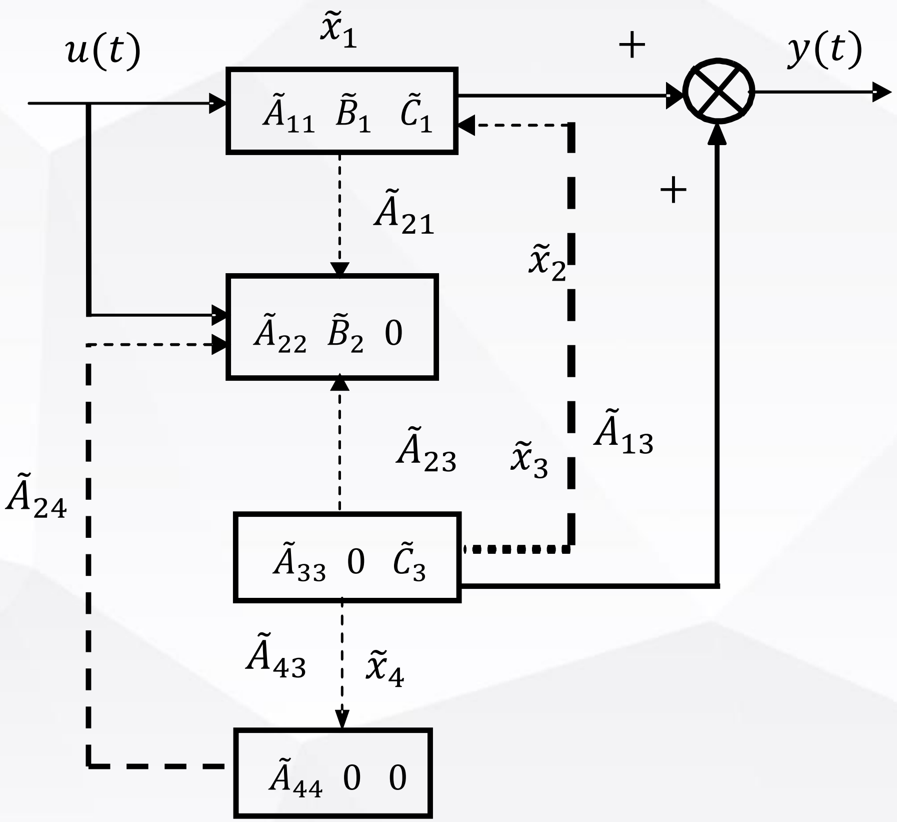


图2 线性系统的典型分解

以上称系统的典型构造定理，也称Kalman分解。

能控和能观标准型

能控标准型和能观标准型

在状态空间模型的内容中，我们已经提到单输入—单输出系统的能控标准型和能观标准型，它们分别都有两种形式。研究能控标准型和能观标准型对系统的分析和综合有十分重要的意义。

下面我们将进一步研究如何从系统的一般状态空间表达式求出标准型。

单输入单输出系统的标准型

（1）化状态方程为能控标准型

设有单输入—单输出系统 $$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}u \\ y = \tilde{c}^T\tilde{x} \end{cases} \qquad (*)$$

为能控标准型（指能控标准I型，以后不加指明），则

单输入单输出系统的标准型

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{c:cccc}0 & & & I_{n-1} & \\ \hdashline -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{array}\right] \qquad \tilde{b}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{c}=[\alpha_n \quad \alpha_{n-1} \quad \cdots \quad \alpha_1]$$

其中$a_i,\alpha_i(i=1,2\cdots,n)$可为任意实数。显然具有（*）式所示形式的系统其能控矩阵为：

$$\tilde{Q}_k=[\tilde{b} \quad \tilde{A}\tilde{b} \quad \cdots \quad \tilde{A}^{n-1}\tilde{b}]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \iddots & -a_1\\ 0 & \iddots & \iddots & X\\ 1 & -a_1 & X & X\end{bmatrix}$$

（x：代表其中元素可为任意实数而不必计算出）

满秩，即$RankQ_k=n$，所以能控标准型一定完全能控。

进一步要给出这样的命题，即：若系统是能控的，那么一定能经过线性变换，将原系统变成能控标准型。

单输入单输出系统的标准型

证明：对于单输入单输出的能控系统 $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = c^T x \end{cases}$

令$x = T\tilde{x}$代入上式，得 $\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = T^{-1}AT\tilde{x} + T^{-1}bu \\ y = c^T T\tilde{x} \end{cases}$

令 $\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & & I_{n-1} & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$ $\tilde{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(**)$

若T存在，就表示能控系统一定能写成能控标准型，设

$T^{-1} = \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \\ \vdots \\ P_n^T \end{bmatrix}$ P_i^T为$1 \times n$的行向量$(i = 1, 2 \cdots, n)$ $(***)$

单输入单输出系统的标准型

显然：

$$T^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & & I_{n-1} & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} T^{-1}$$

将（*）式代入上式，则得：**

$$\begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \\ \vdots \\ P_n^T \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} P_1^T A \\ P_2^T A \\ \vdots \\ P_n^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & I_{n-1} & & \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \\ \vdots \\ P_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_2^T \\ P_3^T \\ \vdots \\ -a_n P_1^T - a_{n-1} P_2^T - a_{n-2} P_3^T \cdots - a_1 P_n^T \end{bmatrix}$$

由上式得：

$$\begin{cases} P_2^T = P_1^T A \\ P_3^T = P_2^T A = P_1^T A^2 \\ \vdots \\ P_n^T = P_{n-1}^T A = P_1^T A^{n-1} \end{cases}$$

单输入单输出系统的标准型

将上式代入(***)式，得：

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_2^T \\ \vdots \\ P_n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_1^T A \\ \vdots \\ P_1^T A^{n-1} \end{bmatrix} \qquad (****)$$

(****)式中P_1是未知的，再由下面关系求出P_1。

$$\tilde{b} = T^{-1} b = \begin{bmatrix} P_1^T \\ P_1^T A \\ \vdots \\ P_1^T A^{n-1} \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} P_1^T b \\ P_1^T A b \\ \vdots \\ P_1^T A^{n-1} b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

单输入单输出系统的标准型

将上式改写成：

$$[P_1^T b, P_1^T Ab, \cdots, P_1^T A^{n-1} b] = P_1^T [b, Ab, \cdots, A^{n-1} b] = [0, 0, \cdots, 1]$$

因为原系统能控，所以$[b, Ab, \cdots, A^{n-1} b]$满秩，可见

$$P_1^T = [0, 0, \cdots, 1]\left[b, Ab, \cdots, A^{n-1} b\right]^{-1}$$ **；即**

$$P_1^T = [0, 0, \cdots, 1] Q_k^{-1} \qquad (*****)$$

这样P_1^T可求出，所以T^{-1}一定存在，由此可见，只要原系统能控，则一定能将原系统化为能控标准型。这里也揭示了构成T^{-1}的方法，关键在于求出P_1^T。P_1^T即为能控矩阵Q_k^{-1}的最后一行，求出P_1^T后代入（***）式即可求出T^{-1}。**

单输入单输出系统的标准型

例 已知系统$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}u$,试将系统化为能控标准型。

解： $Q_k=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ $Q_k^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ $P_1^T=[0 \quad 1]Q_k^{-1}=[0 \quad 1]\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

所以 $T^{-1}=\begin{bmatrix}P_1^T\\ P_1^TA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ $T=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$$\widetilde{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

即原系统的能控标准型为：

$$\dot{\tilde{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{bmatrix}\tilde{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad \tilde{b}=T^{-1}b=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

单输入单输出系统的标准型

(2) 化状态方程为能观标准形式

设有单输入单输出系统 $\begin{cases}\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}u \\ y = \tilde{c}^T\tilde{x}\end{cases}$

为能观标准型（指观标准II型，以后不加指明）则

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c:c} 0 & -a_n \\ \hdashline \multirow{4}{*}{I_{n-1}} & -a_{n-1} \\ & \vdots \\ & -a_1 \end{array}\right] \qquad \tilde{b} = \begin{bmatrix}\alpha_n \\ \alpha_{n-1} \\ \vdots \\ \alpha_1\end{bmatrix} \qquad \tilde{c}^T = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

其中$a_i, \alpha_i (i = 1, 2 \cdots, n)$可为任意实数。可以看出上式为（*）式的对偶形式。

显然具有该形式的系统能观性矩阵为满秩，即$Rank\tilde{Q}_g = n$，**一定是完全能观**。

$$\tilde{Q}_g = \begin{bmatrix}\tilde{C} \\ \tilde{C}\tilde{A} \\ \vdots \\ \tilde{C}\tilde{A}^{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \iddots & -a_1 \\ 0 & \iddots & \iddots & X \\ 1 & -a_1 & X & X\end{bmatrix}$$

（X：代表其中元素可为任意实数而不必计算出）

同样若系统是能观的，那么一定能经过线性变换，将原系统变成能观标准型。

单输入单输出系统的标准型

根据对偶原理：

若系统$\sum(A,b,c)$是能观的，可以利用对偶系统构建能观标准型。

其变换过程如下所示：

$$
\begin{tikzcd}
\underset{\text{能观}}{\sum(A,b,c)} \arrow[r, "\text{对偶}"] & \underset{\text{能控}}{\sum{}^{'}(A^T,c^T,b^T)} \arrow[d, "T"] \\
\underset{\text{能观标准型}}{\sum{}^{'''}\left(T^TA\left(T^T\right)^{-1},T^Tb,c\left(T^T\right)^{-1}\right)} \arrow[u, "\left(T^T\right)^{-1}"] & \underset{\text{能控标准型}}{\sum{}^{''}(T^{-1}A^TT,T^{-1}c^T,b^TT)} \arrow[l, "\text{对偶}"]
\end{tikzcd}
$$

单输入单输出系统的标准型

也可以不用对偶原理，直接进行变换

怎样将一般形式的能观系统变成能观标准型呢？下面给出构造的一般方法。

a）求出原系统能观性矩阵Q_g；

b）取出Q_g^{-1}的最后一列，即 $P_1 = Q_g^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$

c）$T = [P_1, AP_1, \cdots, A^{n-1}P_1]$

例 已知系统

$$\begin{cases}\dot{x} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}x + \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\ 2\end{bmatrix}u\\ y = \begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}x\end{cases}$$

试写出此系统的能观标准型。

单输入单输出系统的标准型

解

a）求出原系统能观性矩阵Q_g

$$Q_g=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 0\end{bmatrix},\qquad RankQ_g=2=n,\qquad Q_g^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$$

b) 求P_1 $\quad P_1=Q_g^{-1}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$

c) 求T $\quad T=[P_1\quad AP_1]=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix},\qquad T^{-1}=\begin{bmatrix}2 & \frac{3}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

d) 求相应的系数阵

$$\tilde{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}2 & \frac{3}{2}\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

单输入单输出系统的标准型

$$\tilde{c}^T = c^T T = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = T^{-1} b = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

即原系统的能观标准型为:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

传递函数阵的实现问题

传递函数阵的实现问题

现代控制理论是建立在状态空间分析方法的基础上。因此，如何获得状态方程和输出方程是研究实际系统时首先要解决的问题。在状态空间描述部分，我们已经了解到，通常可以对系统的物理过程进行深入研究，从而直接建立系统的状态空间表达式，但是，在很多实际问题中，系统的物理过程比较复杂，暂时还很不清楚它的数量关系。也就是系统的结构参数基本上是未知的，这时要想通过分析的方法建立它们的运动方程是困难的，甚至是不可能的。

传递函数阵的实现问题

通常对这类系统首先用实验的方法确定其输入输出间的传递函数阵，然后根据传递函数阵来确定系统的状态空间描述，这就是实现问题，所找到的与传递函数相对应的状态空间描述，称为传递函数阵的一个实现。关于实现问题，此前我们已经作了初步的介绍。

单变量系统的能控实现、能观实现

假设对象的传递函数为$g(s)$：

$$g(s)=\frac{b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\cdots+b_{n-1}s+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

现在要求根据$g(s)$找到一个相应的方程 $\begin{cases}\dot{x}=Ax+bu\\ y=c^Tx\end{cases}$

据状态空间描述部分的介绍，它的能控标准实现为：

$$A=\left[\begin{array}{c:cccc} 0 & & & I_{n-1} & \\ \hdashline -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1\end{array}\right] \qquad b=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$c^T=\begin{bmatrix}b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1\end{bmatrix}$$

相应的能观标准实现为：

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -a_n \\ & -a_{n-1} \\ I_{n-1} & \vdots \\ & -a_1 \end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$c^T=[0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]$$

最小实现

最小实现问题

从前面的分析可以看到，当一个传递函数阵给定以后，可以构造其实现 $\Sigma=(A,B,C)$ 使得 $C(sI-A)^{-1}B=G(s)$

这样的实现不是唯一的。有完全能控实现，但它不一定完全能观；有完全能观实现，但不一定完全能控。而且在实现的阶数上有很大差别。例如在多变量的实现中，当 m 与 r不相同时，则能控实现为 $rl\times rl$ 阶，而能观实现为 $ml\times ml$ 阶，它们的阶数是不同的，但它们的传递函数阵是相同的。

一般总希望实现的阶数越小越好，其中阶数最小的实现称最小实现。那么最小实现阶数是多少呢？如何寻找这个最小实现？这是下面要解决的问题。

最小实现的性质

1）首先我们给出这样的命题，系统 $\sum(A,B,C)$为最小实现的充分必要条件是系统 $\sum(A,B,C)$ 完全能控、完全能观。

证明：首先证明**必要性**：采用反证法。设系统$G(s)$的一个最小实现为$\sum(A,B,C)$，其阶数为n，但是不完全能控或不完全能观。再设其完全能控完全能观部分的阶数为 n'，$n' < n$。根据前面的分解定理已经证明，其完全能控能观的 n' 阶子系统，其传递函数阵亦是$G(s)$，但 $n' < n$ 。所以 $\sum(A,B,C)$ 就不是最小实现，与条件矛盾。故系统 $\sum(A,B,C)$ 必定是完全能控且完全能观的。

其次证明**充分性**：同样也采用反证法，设系统 $\sum(A,B,C)$是$G(s)$的一个实现，完全能控且完全能观，但它不是最小实现。又设系统 $\sum' = (A',B',C')$ 也是$G(s)$的一个实现，它的阶次为 n'，且 $n' < n$。

由于 Σ 和 Σ' 都是$G(s)$的一个实现，则

$$y(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t C'e^{A'(t-\tau)}B'u(\tau)d\tau$$

对任意的 $u(t)$ 都成立。由此可得

$$Ce^{A(t-\tau)}B = C'e^{A'(t-\tau)}B'$$

$$Ce^{A(t-\tau)}B = C'e^{A'(t-\tau)}B'$$

对上式两边微分得：

$$CAe^{A(t-\tau)}B = C'A'e^{A'(t-\tau)}B'$$

类推，得：

$$CA^2e^{A(t-\tau)}B = C'(A')^2e^{A'(t-\tau)}B'$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$

$$CA^{n-1}e^{A(t-\tau)}B = C'(A')^{n-1}e^{A'(t-\tau)}B'$$

令 $t-\tau=0$，则得：

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} C' \\ C'A' \\ \vdots \\ C'(A')^{n-1} \end{bmatrix} B'$$

亦可写成：

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = \begin{bmatrix} C' \\ C'A' \\ \vdots \\ C'(A')^{n-1} \end{bmatrix} [B' \quad AB' \quad \cdots \quad (A')^{n-1}B']$$

因系统 Σ 完全能控能观，左边的矩阵秩为 n，右边因矩阵 A' 为 $n' \times n'$ 阶，所以它的秩为 n',$n' < n$ 。一个矩阵不能有两个秩，所以系统 $\sum' = (A', B', C')$ 为$G(s)$ 的实现，且 $n' < n$ 这一假设不成立。系统$\sum(A, B, C)$ 就为最小实现。这也说明最小实现的维数是唯一的。

（2）其次，我们给出这样的结论，对所给定的传递函数阵，其两个最小实现之间必是代数等价的。就是说系统的最小实现不是唯一的，但它们之间是代数等价的。上述结论这里不作证明。

（3）$G(s)$实现的非唯一性说明，仅从未知结构的输入与输出之间的特性，如$G(s)$出发，可以构造出无穷多个在外特性上与$G(s)$一致的假象结构，通常它们之间不存在代数等价关系。从而不能确定地描述出未知的结构，这就是所谓的结构不确定原理。这个原理突出地说明了用外特性描述系统结构的局限性，表明了状态空间描述的优越性。

最小实现的构造方法

由传递函数阵求最小实现的方法通常有两种：一是直接求其最小实现。如 Ho-Kalman 方法；二是先求出满足给定的传递函数阵的实现，然后从它的完全能控或完全能观的系统出发，求其最小实现，例如 Mayne 的方法。

Mayne 方法分两步：**第一步，求出所给定传递函数阵的完全能控（完全能观）的实现，第二步是从这个实现取出完全能观（完全能控）的子系统，即求得最小实现。**