运筹学

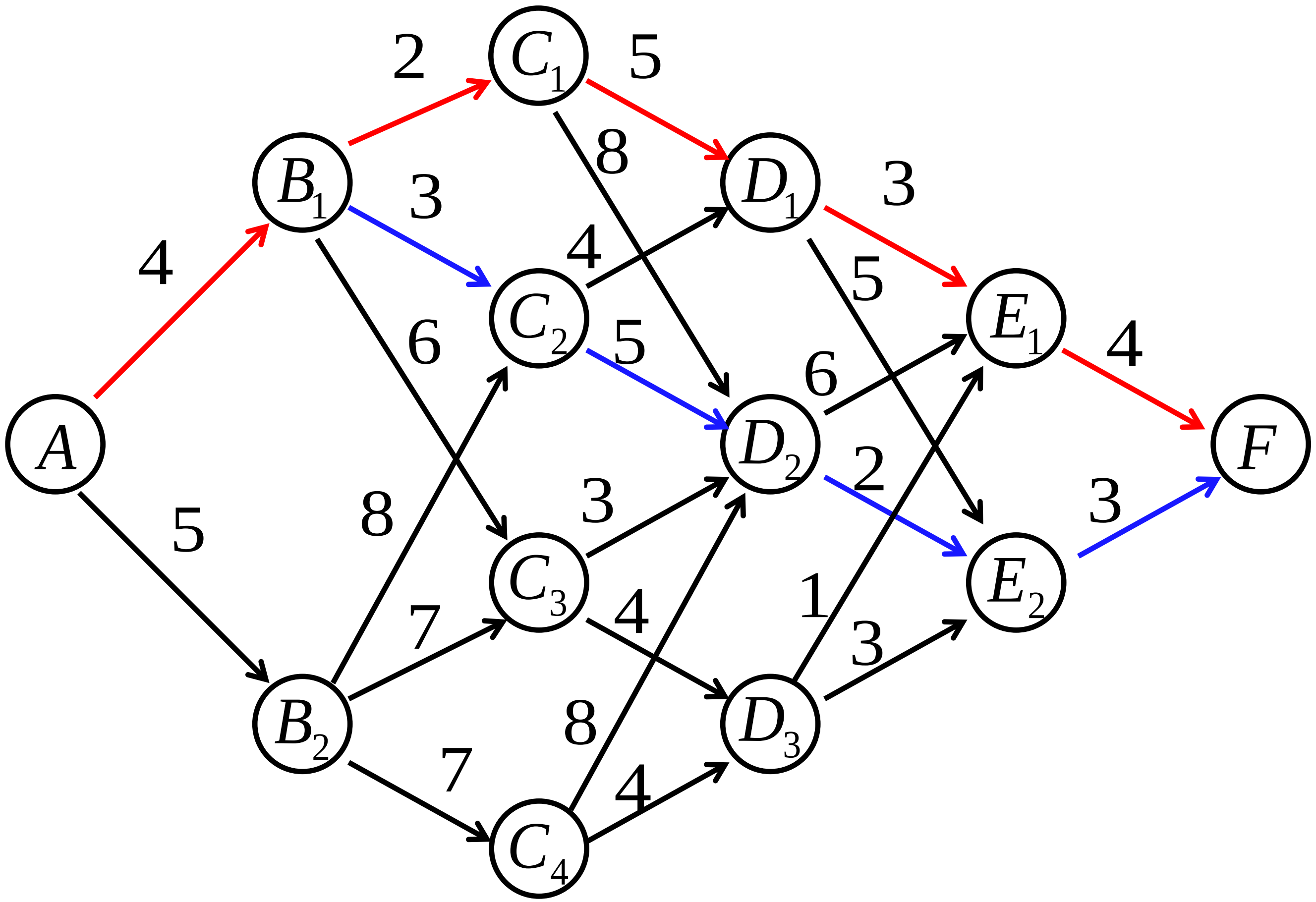
（动态规划）

王焕钢
清华大学自动化系

1. 动态规划基本概念
2. 最优性原理
3. 建模与求解
4. 典型应用问题
5. 不定期动态规划问题

要点：动态规划基本概念

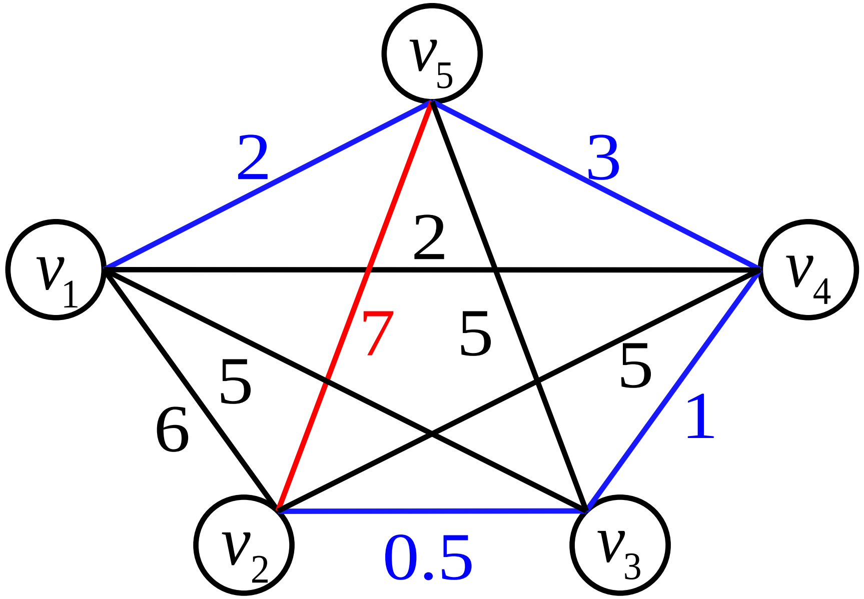
例1: 最短路问题



选择从 A 至 F 的最短路铺设输油管道

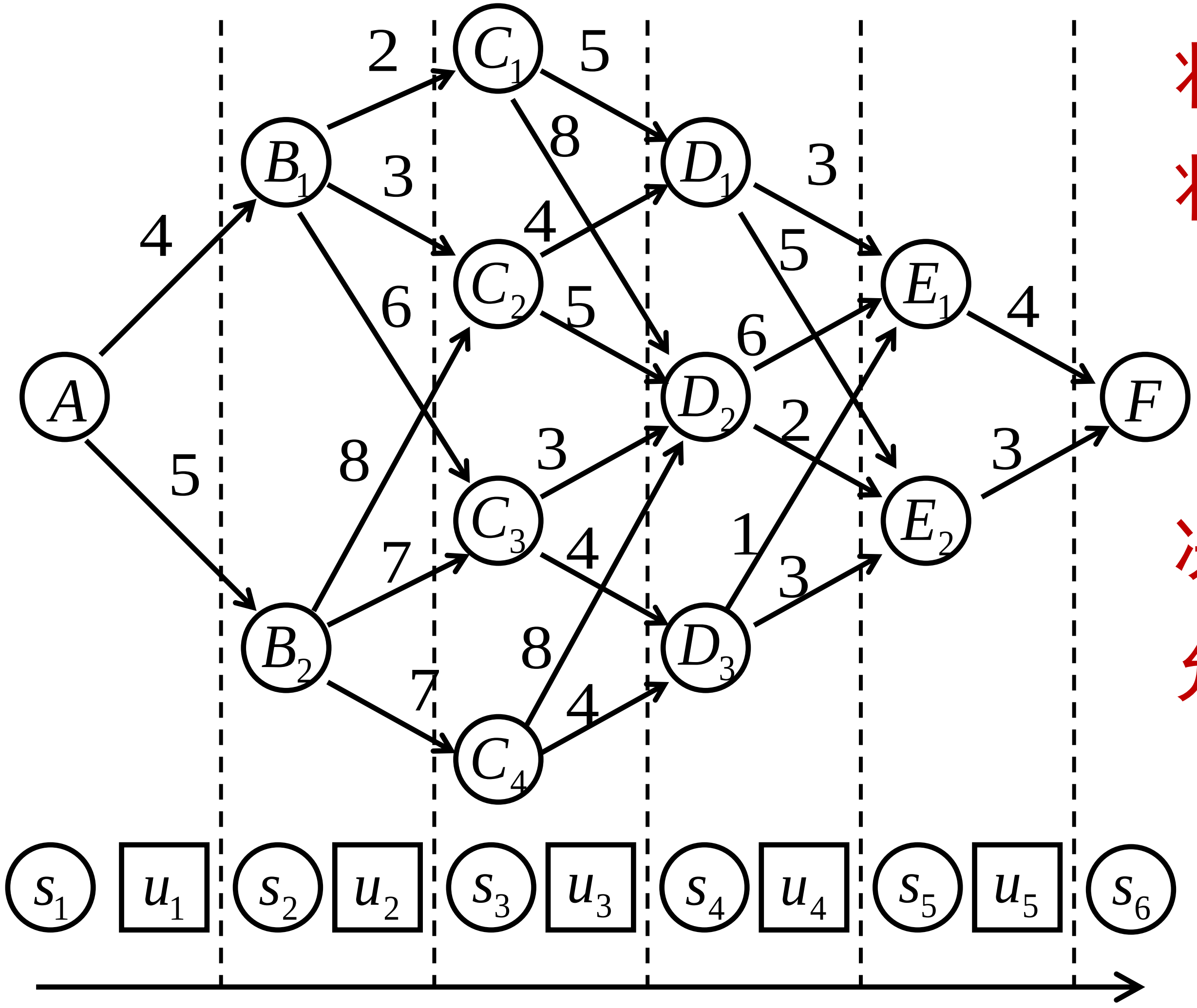
例2: 最短路问题

下图五个城市，任何两个城市间均有道路相连，往返路程一样，由图中数字所示。求每个城市到第五个城的最短路线和最短路程



特点：直接以城市为状态不存在明显的阶段

多阶段决策（序贯决策）问题



阶段 $s_k, u_k(s_k)$

状态 s_k

状态集 S_k

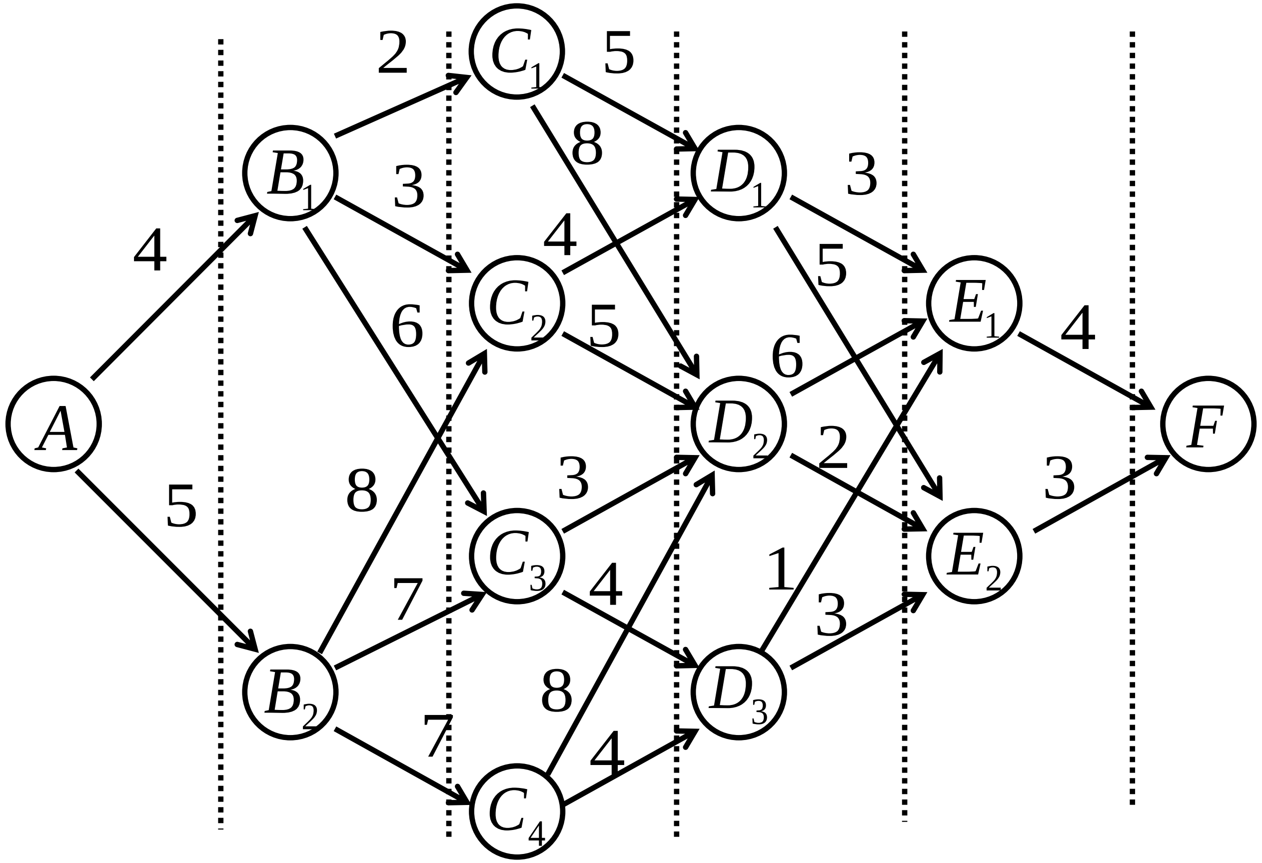
$$S_2=\{B_1,B_2\}$$

决策 $u_k(s_k)$

允许决策集 $U_k(s_k)$

$$U_4(D_2)=\{E_1,E_2\}$$

策略 $p_{k,5}=\{u_k,\cdots,u_5\}$ **允许策略集** $P_{k,5}=\{U_k(s_k),\cdots,U_5(s_5)\}$



状态转移方程 $s_{k+1}=T_k(s_k,u_k)$ 本问题 $T_k(s_k,u_k)=u_k(s_k)$

阶段指标函数 $d_k(s_k,u_k)$ **如** $d_4(D_2,u_4)=d_4(D_2,E_1)=6$

过程指标函数 $V_{k,5}(s_k,p_{k,5})=\sum_{i=k}^{5}d_i(s_i,u_i)$

用多阶段决策的术语描述最短路问题：

已知 状态集 $S_k, k=1,2,\cdots,6$

允许决策集 $U_k(s_k), \forall s_k \in S_k, k=1,2,\cdots,5$

状态转移方程

$$s_{k+1}=T_k(s_k,u_k), \forall s_k \in S_k, u_k(s_k)\in U_k(s_k), k=1,2,\cdots,5$$

阶段指标函数

$$d_k(s_k,u_k), \forall s_k \in S_k, u_k(s_k)\in U_k(s_k), k=1,2,\cdots,5$$

问题 求 $p_{1,5}\in P_{1,5}$ 使下述过程指标函数达到最小

$$V_{1,5}(s_1,p_{1,5})=\sum_{k=1}^{5} d_k(s_k,u_k)$$

要点：动态规划的无后效性

最短路问题的动态规划模型

$$\min \quad V_{1,5}(s_1, p_{1,5}) = \sum_{k=1}^{5} d_k(s_k, u_k)$$

$$\text{s.t.} \quad s_{k+1} = T_k(s_k, u_k), \quad 1 \le k \le 5$$

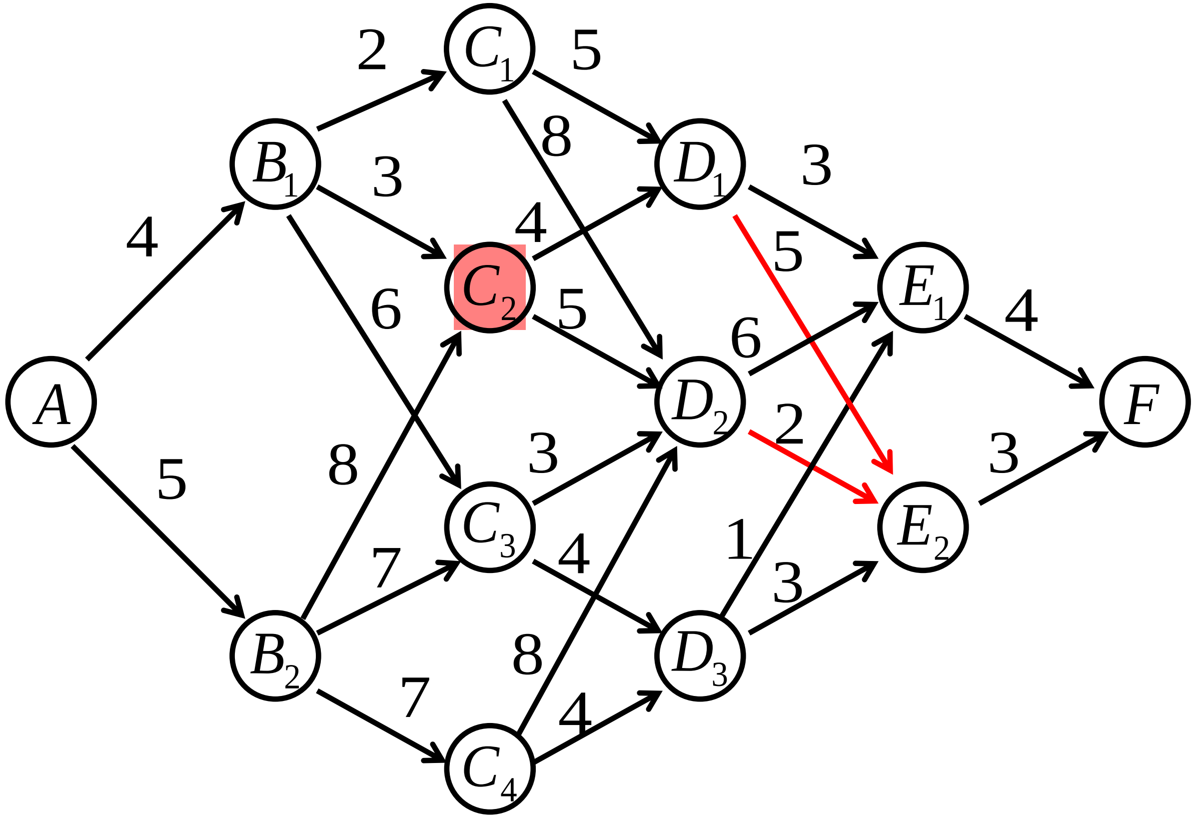
$$s_k \in S_k, \ u_k(s_k) \in U_k(s_k), \ k = 1, 2, \cdots, 5$$

给定 s_k ，系统以后的状态就完全由 k 及其以后各阶段的决策所决定，和系统经由什么路径到达 s_k 无关，即和 $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$ 的取值无关

该特点称为马尔可夫（Markov）性，或无后效性

用动态规划求解的多阶段模型必须具有无后效性！

不满足马尔可夫性的情况



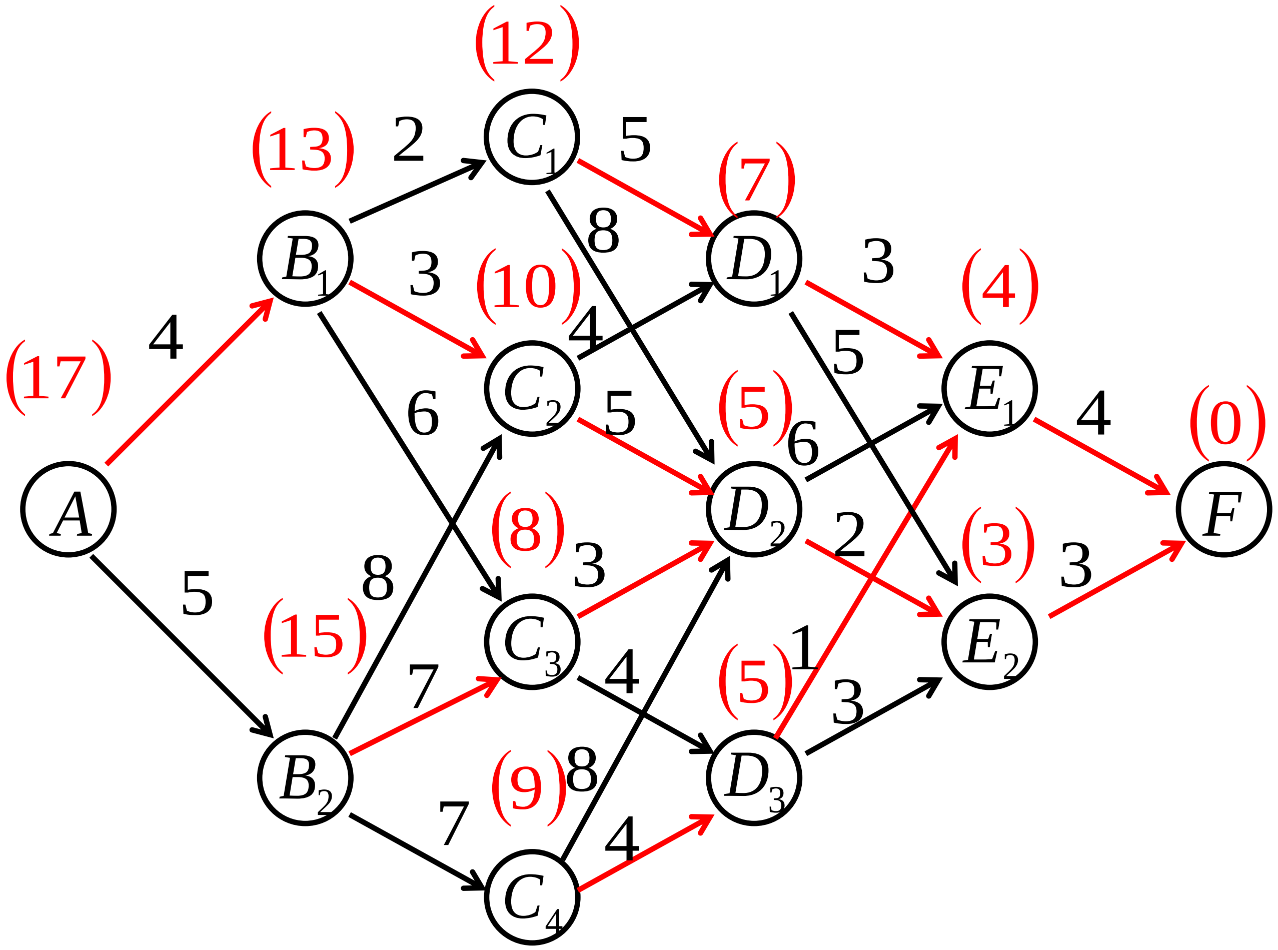
假定附加约束：如果管道经过 C_2，就必须经过 E_1

$$U_4(D_1, s_2 = C_2) = \{E_1\},\ U_4(D_1, s_2 \neq C_2) = \{E_1, E_2\},$$

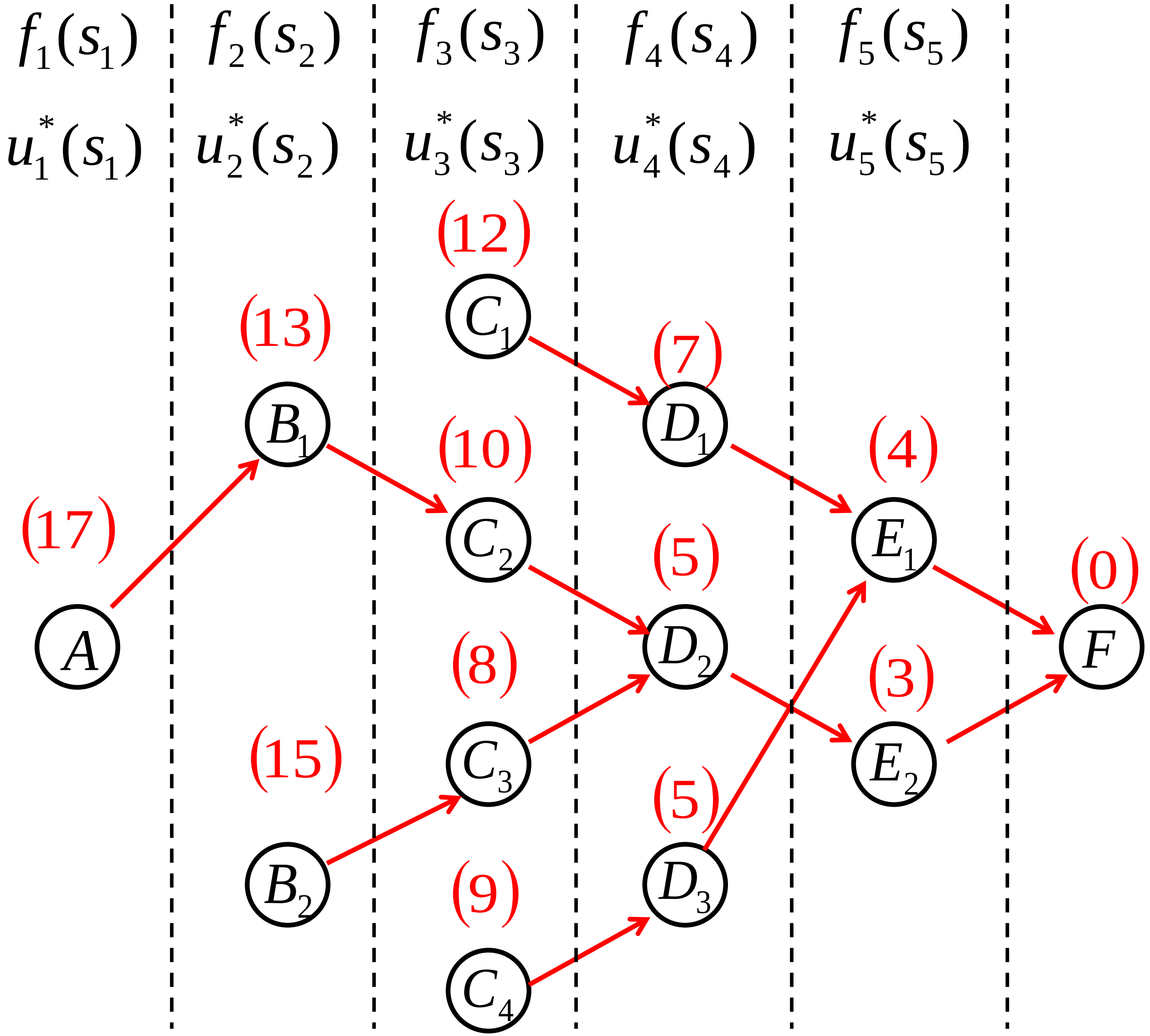
$$U_4(D_2, s_2 = C_2) = \{E_1\},\ U_4(D_2, s_2 \neq C_2) = \{E_1, E_2\},$$

要点：动态规划的最优性原理

最短路问题的图解法：从最后阶段开始逆过程行进方向依次导出到终点的最短距离（最优过程指标函数）及相应路径（最优决策）



最终得到各阶段到终点的最优函数和最优决策



例如

$f_3(C_1)=12$

$f_3(C_2)=10$

$f_3(C_3)=8$

$f_3(C_4)=9$

$u_3^*(C_1)=D_1$

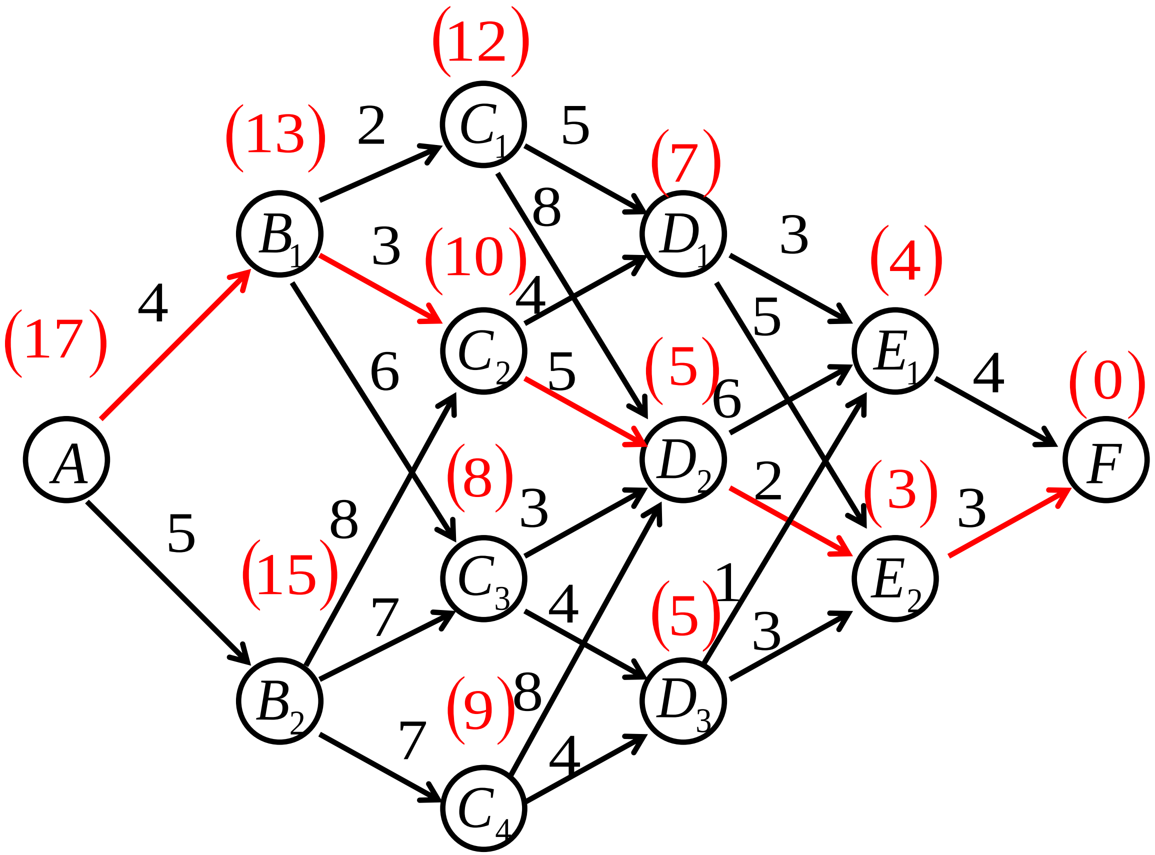
$u_3^*(C_2)=D_2$

$u_3^*(C_3)=D_2$

$u_3^*(C_4)=D_3$

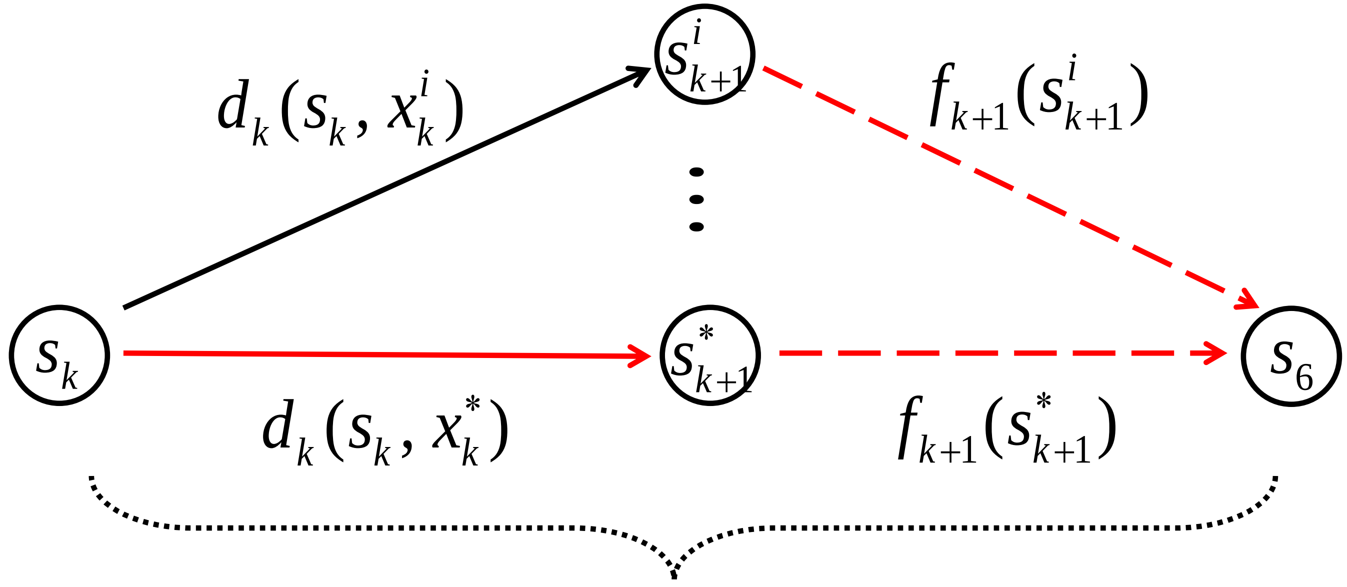
最优性原理

最优策略：对于先前决策所形成的状态而言，**其以后的所有决策应能构成最优策略**



该原理适用任何满足马尔可夫性的序贯决策问题，且过程指标可以是阶段指标其它形式的综合

求最短路实际上是根据最优性原理进行以下运算：



$$f_k(s_k) = \min_{x_k \in U_k(s_k)} \left\{ d_k\left(s_k, x_k\right) + f_{k+1}\left(T_k\left(s_k, x_k\right)\right) \right\}$$

最优性原理：若 s_{k+1}^{*} 在 s_k 到 s_6 的最优路径上，那么该路径上自 s_{k+1}^{*} 以后的部分一定是自 s_{k+1}^{*} 到 s_6 最优路径

根据最优性原理建立最优函数递推（逆推）方程：

$$f_6(s_6)=0$$

$$f_k(s_k)=\min_{x_k\in U_k(s_k)}\left\{d_k\left(s_k,x_k\right)+f_{k+1}\left(T_k\left(s_k,x_k\right)\right)\right\},$$

$$\forall s_k\in S_k, k=5,4,3,2,1$$

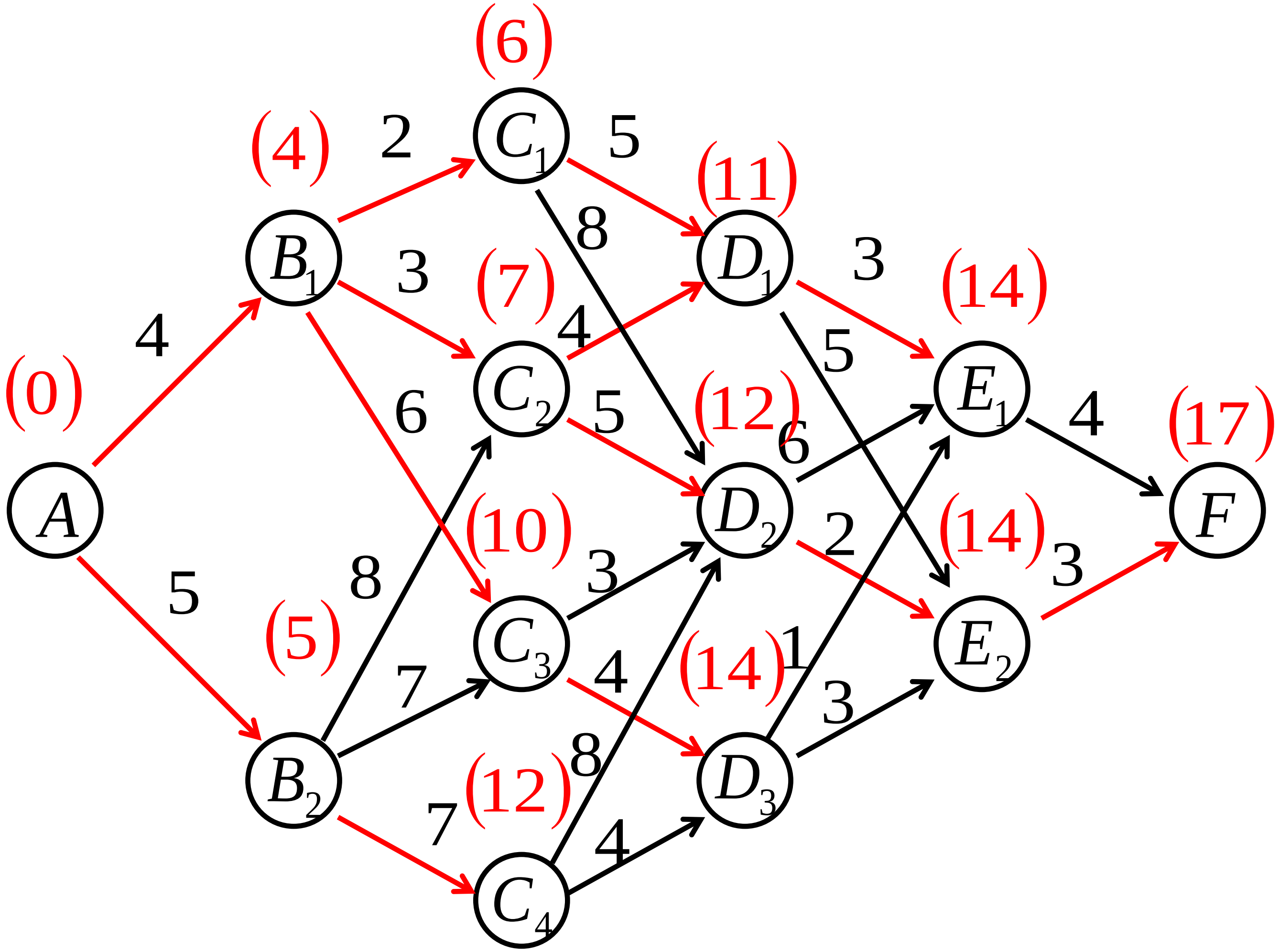
用 x_k^* 表示第 k 次递推时的最优解，即

$$f_k\left(s_k\right)=d_k\left(s_k,x_k^*\right)+f_{k+1}\left(T_k\left(s_k,x_k^*\right)\right)$$

则应取 x_k^* 为最优决策在状态 s_k 的决策值，即

$$u_k^*(s_k)=x_k^*,\ \forall s_k\in S_k$$

例题的顺序求解过程



(0)
A
4
5
(4)
B1
(5)
B2
2
3
6
8
7
7
(6)
C1
(7)
C2
(10)
C3
(12)
C4
5
8
4
5
3
4
8
4
(11)
D1
(12)
D2
(14)
D3
3
5
6
2
1
3
(14)
E1
(14)
E2
4
3
(17)
F

多阶段最短路问题的顺推求解

定义最优值函数 $\bar{f}(s)$ 为从起点到 s 的最短路程，并根据多阶段结构将其表示为

$$\bar{f}(s) = \bar{f}_k(s),\ \forall s \in S_k,\ k = 1, \cdots, 6$$

初始条件：$\bar{f}(s) = \bar{f}_1(s) = 0,\ \forall s \in S_1$

由于对任意 k 成立 $S_{k+1} = T_k(s_k, U_k(S_k))$，所以

$$\bar{f}(s) = \min_{\substack{T(\bar{s},u)=s \\ \bar{s}\in S, u\in U(\bar{s})}} \left\{ d(\bar{s}, u) + \bar{f}(\bar{s}) \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{f}_{k+1}(s) = \min_{\substack{T_k(\bar{s},u)=s \\ \bar{s}\in S_k, u\in U_k(\bar{s})}} \left\{ d_k(\bar{s}, u) + f_k(\bar{s}) \right\},\ \forall s \in S_{k+1}$$

一般性动态规划模型（其中⊙为某种运算，如加法）

$$\min\ (\text{or}\ \max)\quad d_1(s_1,u_1)\odot d_2(s_2,u_2)\odot\cdots\odot d_n(s_n,u_n)$$

$$\text{s.t.}\quad s_{k+1}=T_k(s_k,u_k),\ s_k\in S_k,\ u_k\in U_k(s_k),1\le k\le n$$

逆推求解

$f_{n+1}(s)=0,\ \forall s\in S_{n+1}$（0 的含义根据具体问题确定）

$$f_k(s)=\min_{u\in U_k(s)}\ (\text{or}\ \max)\ d_k\left(s,u\right)\odot f_{k+1}\left(T_k\left(s,u\right)\right),\ \forall s_k\in S_k,\ k=n,\cdots,1$$

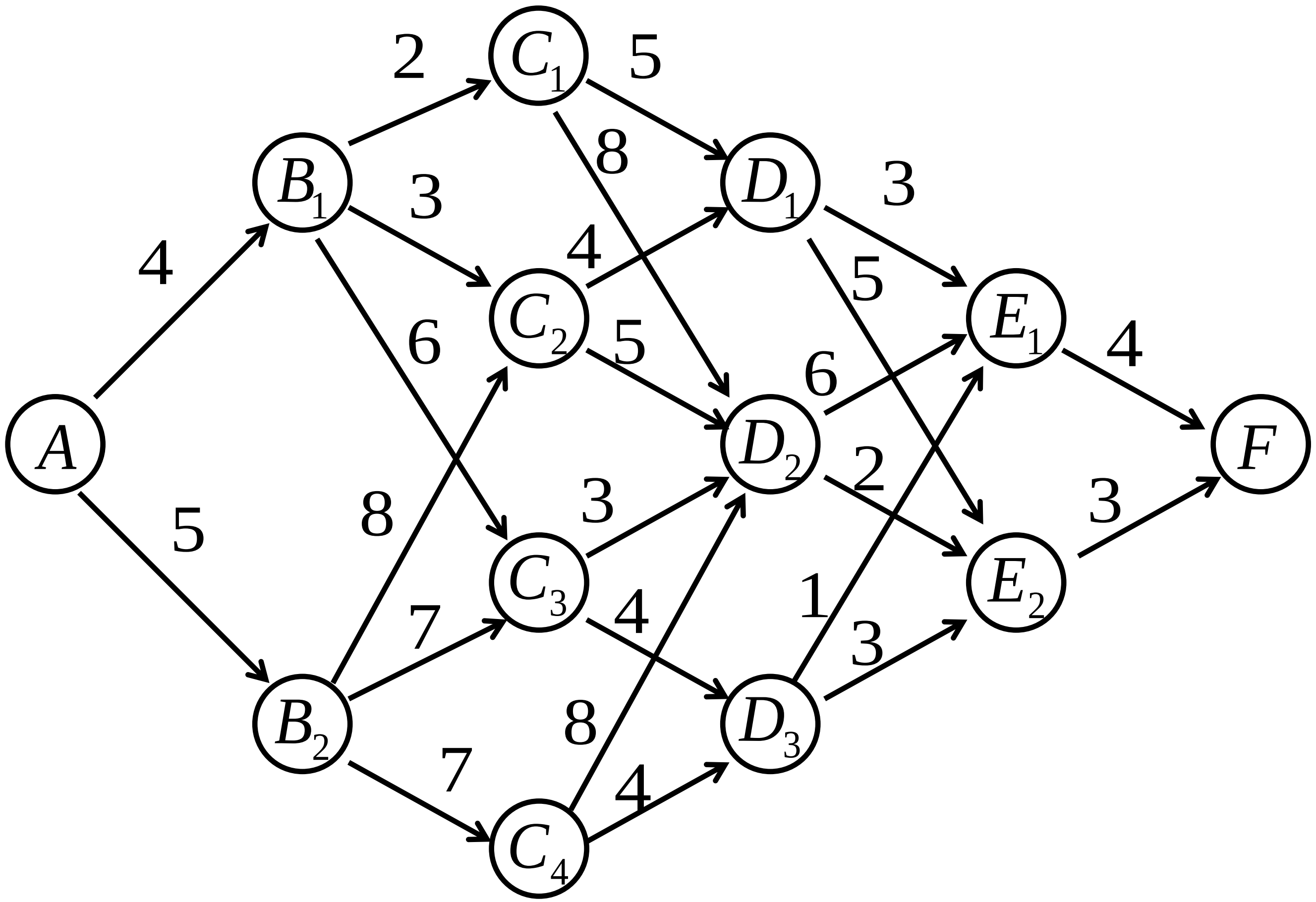
顺推求解

$$\bar{f}_1(s)=0,\ \forall s\in S_1$$

$$\bar{f}_{k+1}(s)=\min_{\substack{T_k(\bar{s},u)=s\\ \bar{s}\in S_k,u\in U_k(\bar{s})}}\ (\text{or}\ \max)\ d_k\left(\bar{s},u\right)\odot f_k\left(\bar{s}\right),\ \forall s\in S_{k+1},\ k=1,\cdots,n$$

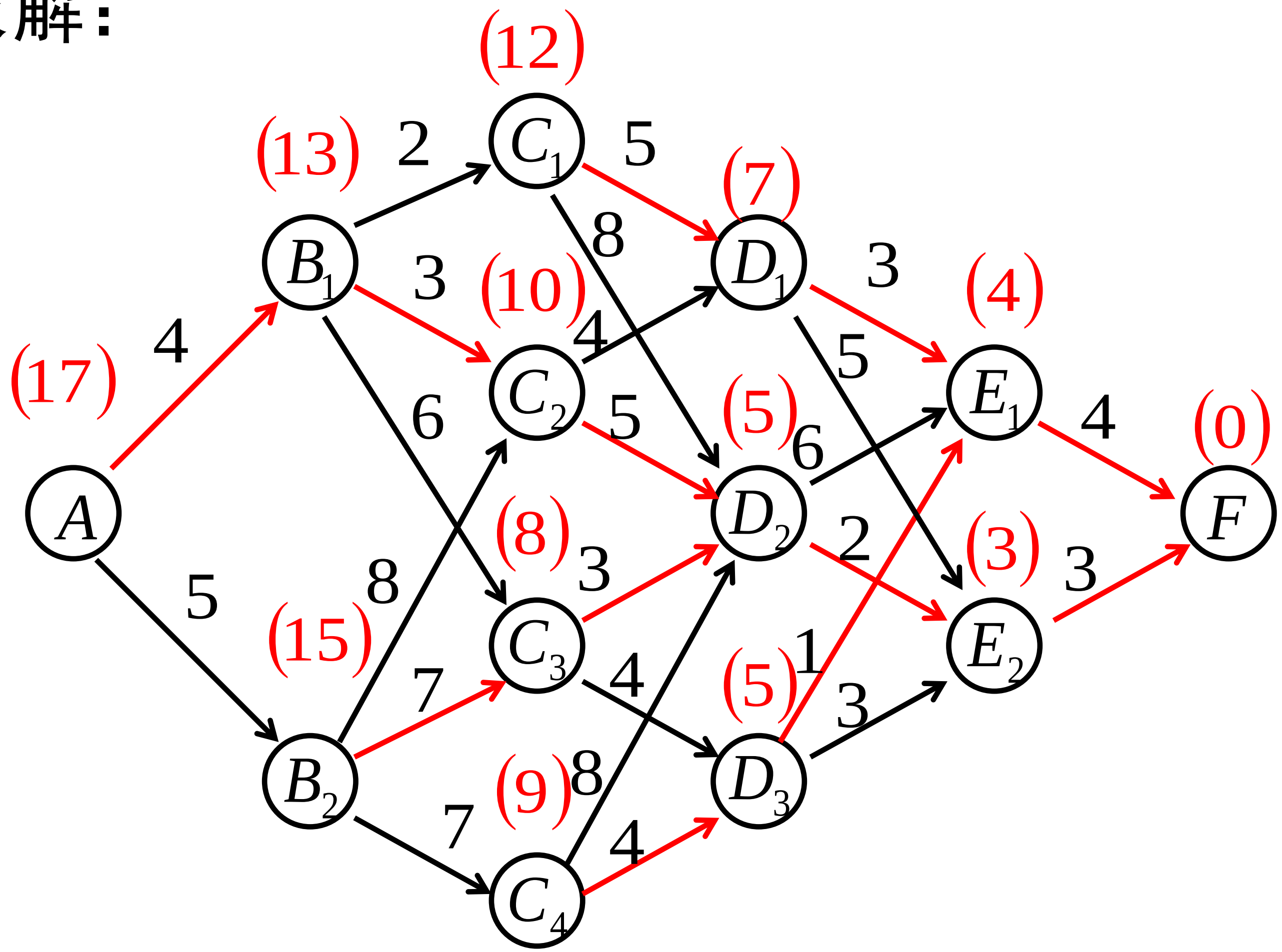
要点：动态规划与穷举法计算量对比

通过穷举求最短路问题



路径总数：$2\times3\times2\times2=24$，加法次数：$5\times24=120$

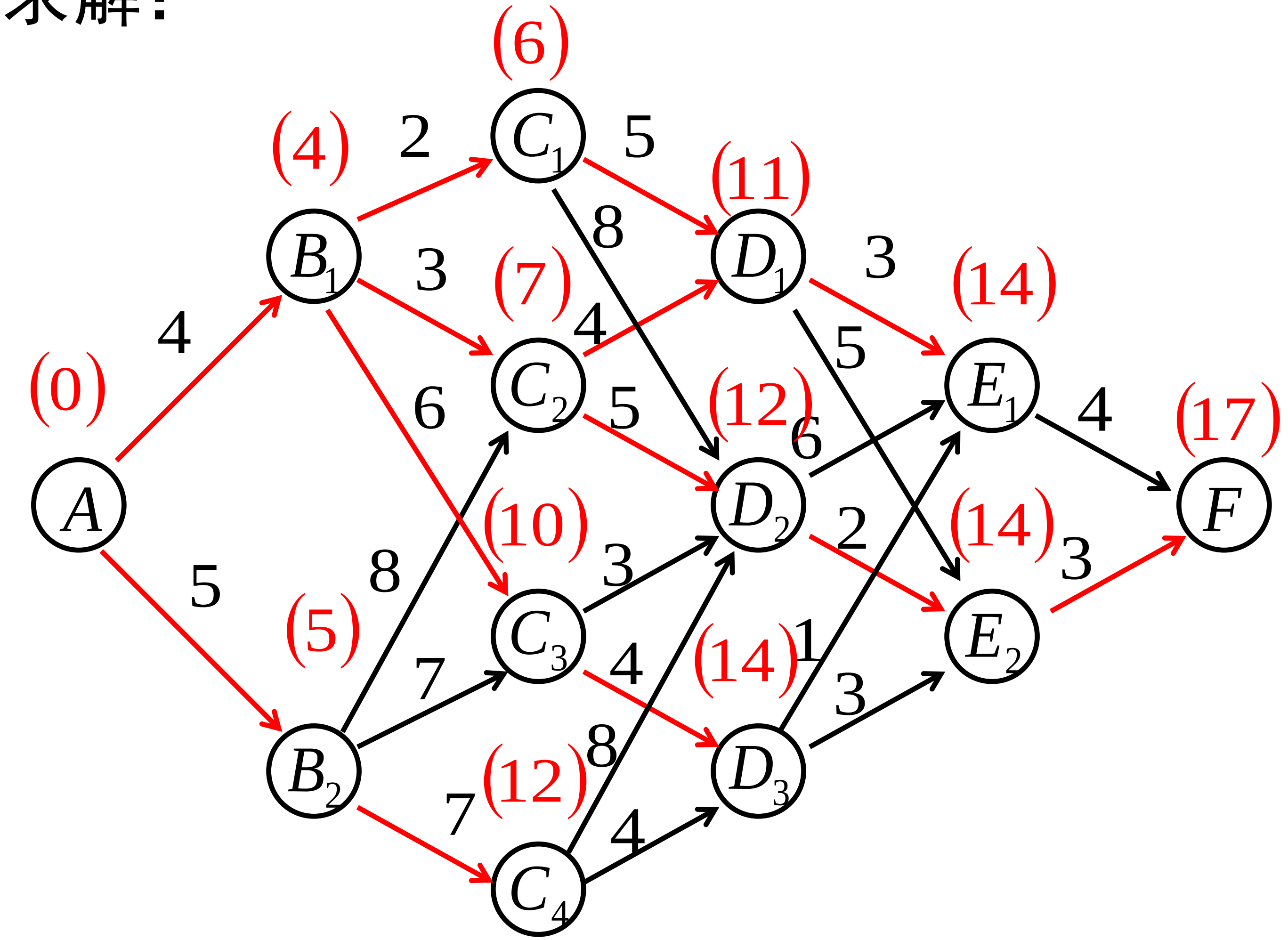
逆推求解：



加法次数：$2\times3+2\times4+3\times2+2=22$，

最优性等价于穷举，但没有重复计算！

顺推求解：



加法次数：$\left(2+2\times2\right)+\left(2\times2+4\right)+3\times2+2=22$

要点：动态规划解非线性规划问题

投资分配问题

10 万元资金，投资三个项目，收益分别为

$$g_1(x_1)=4x_1,\ g_2(x_2)=9x_2,\ g_3(x_3)=2x_3^2$$

如何分配投资额？

静态优化模型

$$\begin{aligned}\max\ & 4x_1+9x_2+2x_3^2\\ \text{s.t.}\ & x_1+x_2+x_3=10\\ & x_i\ge 0,\ i=1,2,3\end{aligned}$$

这是一个非线性优化问题

用动态规划方法解，首先要建立序贯决策模型

阶段　　三个决策阶段，顺序决策三个项目投资额

状态　　k 阶段开始可用投资额 s_k ，$s_1=10$

决策　　k 阶段实际投资额 $x_k=u_k(s_k)$

允许决策集　　$0\le x_k\le s_k$

阶段指标　　$4x_1$，　$9x_2$，　$2x_3^2$

状态转移方程　$s_{k+1}=s_k-x_k$

一般性动态规划模型（其中⊙为某种运算，如加法）

$$\min\ (\text{or}\ \max)\quad d_1(s_1,u_1)\odot d_2(s_2,u_2)\odot\cdots\odot d_n(s_n,u_n)$$

$$\text{s.t.}\quad s_{k+1}=T_k(s_k,u_k),\ s_k\in S_k,\ u_k\in U_k(s_k),1\le k\le n$$

逆推求解

$f_{n+1}(s)=0,\ \forall s\in S_{n+1}$（0 的含义根据具体问题确定）

$$f_k(s)=\min_{u\in U_k(s)}\ (\text{or}\ \max)\ d_k\left(s,u\right)\odot f_{k+1}\left(T_k\left(s,u\right)\right),\ \forall s_k\in S_k,\ k=n,\cdots,1$$

顺推求解

$$\overline{f}_1(s)=0,\ \forall s\in S_1$$

$$\overline{f}_{k+1}(s)=\min_{\substack{T_k(\overline{s},u)=s\\ \overline{s}\in S_k,u\in U_k(\overline{s})}}\ (\text{or}\ \max)\ d_k\left(\overline{s},u\right)\odot f_k\left(\overline{s}\right),\ \forall s\in S_{k+1},\ k=1,\cdots,n$$

逆序求解

$f_4(s_4)=0$ 阶段指标： $4x_1$， $9x_2$， $2x_3^2$

$$f_3(s_3)=\max_{0\le x_3\le s_3} 2x_3^2 \quad\Rightarrow\quad u_3^*(s_3)=s_3,\ \ f_3(s_3)=2s_3^2$$

$$f_2(s_2)=\max_{0\le x_2\le s_2} 9x_2+2\left(s_2-x_2\right)^2$$

由于目标是凸函数，最大值在边界达到，所以

$$f_2(s_2)=\max\left\{2s_2^2,9s_2\right\}$$

由此可得

$$\text{If}\ \ s_2\ge 9/2\ \ \text{then}\quad u_2^*(s_2)=0,\ \ f_2(s_2)=2s_2^2$$

$$\text{If}\ \ s_2< 9/2\ \ \text{then}\quad u_2^*(s_2)=s_2,\ \ f_2(s_2)=9s_2$$

$$f_1(10)=\max_{0\le x_1\le 10} 4x_1+f_2\left(10-x_1\right)$$

其中 $f_2(10-x_1)=\begin{cases}2(10-x_1)^2 & \text{if} \quad x_1\le 11/2\\ 9(10-x_1) & \text{if} \quad x_1>11/2\end{cases}$

当 $0\le x_1\le 11/2$ 时，目标函数是凸函数，可得

$$f_1(10)=\max\left\{2\times 10^2,\ 4\times\frac{11}{2}+2\times\left(10-\frac{11}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\max\{200,\ 62.5\}=200 \qquad u_1^*(10)=0$$

当 $11/2<x_1\le 10$ 时，目标函数为 $90-5x_1$ ，显然有

$$u_1^*(10)=\frac{11}{2},\quad f_1(10)=90-5\times\frac{11}{2}=62.5$$

综合两种情况可知 $u_1^*(10)=0,\quad f_1(10)=200$

结果

$$x_1^* = u_1^*(10) = 0, \quad f_1(10) = 200 \quad s_2^* = 10 - x_1^* = 10$$

因为 $s_2^* \geq 9/2$，所以

$$x_2^* = u_2^*(10) = 0, \; f_2(10) = 2\times 10^2 = 200 \quad s_3^* = 10 - x_2^* = 10$$

$$x_3^* = u_3^*(10) = 10, \; f_3(10) = 2\times 10^2 = 200$$

顺序求解（各状态的含义不变, 阶段开始可用投资额）

$\bar{f}_k(s_k)$ k 阶段之前最优投资收益

$$\bar{f}_1(s_1)=0$$

$$\bar{f}_2(s_2)=\max_{0\le x_1\le 10-s_2} 4x_1 \quad\Rightarrow\quad u_1^*(s_2)=10-s_2,\ \ \bar{f}_2(s_2)=4(10-s_2)$$

$$\bar{f}_3(s_3)=\max_{0\le x_2\le 10-s_3} 9x_2+\bar{f}_2(x_2+s_3)=\max_{0\le x_2\le 10-s_3} 5x_2-4s_3+40$$

$$\Rightarrow\quad u_2^*(s_3)=10-s_3,\ \ \bar{f}_3(s_3)=90-9s_3$$

$$\bar{f}_4(0)=\max_{0\le x_3\le 10} 2x_3^2+\bar{f}_3(x_3)=\max_{0\le x_3\le 10} 2x_3^2-9x_3+90$$

$$=\max\left\{\ 90,\ \ 2\times 10^2-9\times 10+90\ \right\}=\max\left\{\ 90,\ \ 200\ \right\}=200$$

$$\Rightarrow\quad x_3^*=u_3^*(0)=10,\ s_3^*=x_3^*+0=10,\ x_2^*=0,\ s_2^*=x_2^*+s_3^*=10,\ x_1^*=0$$

要点：连续变量离散化求解

连续变量离散化求解

连续变量动态规划问题关键是确定下述递推关系

$$f_k(s_k)=\min_{u_k\in U_k(s_k)} d_k(s_k,u_k)+f_{k+1}\left(T_k(s_k,u_k)\right),\ \forall s_k\in S_k$$

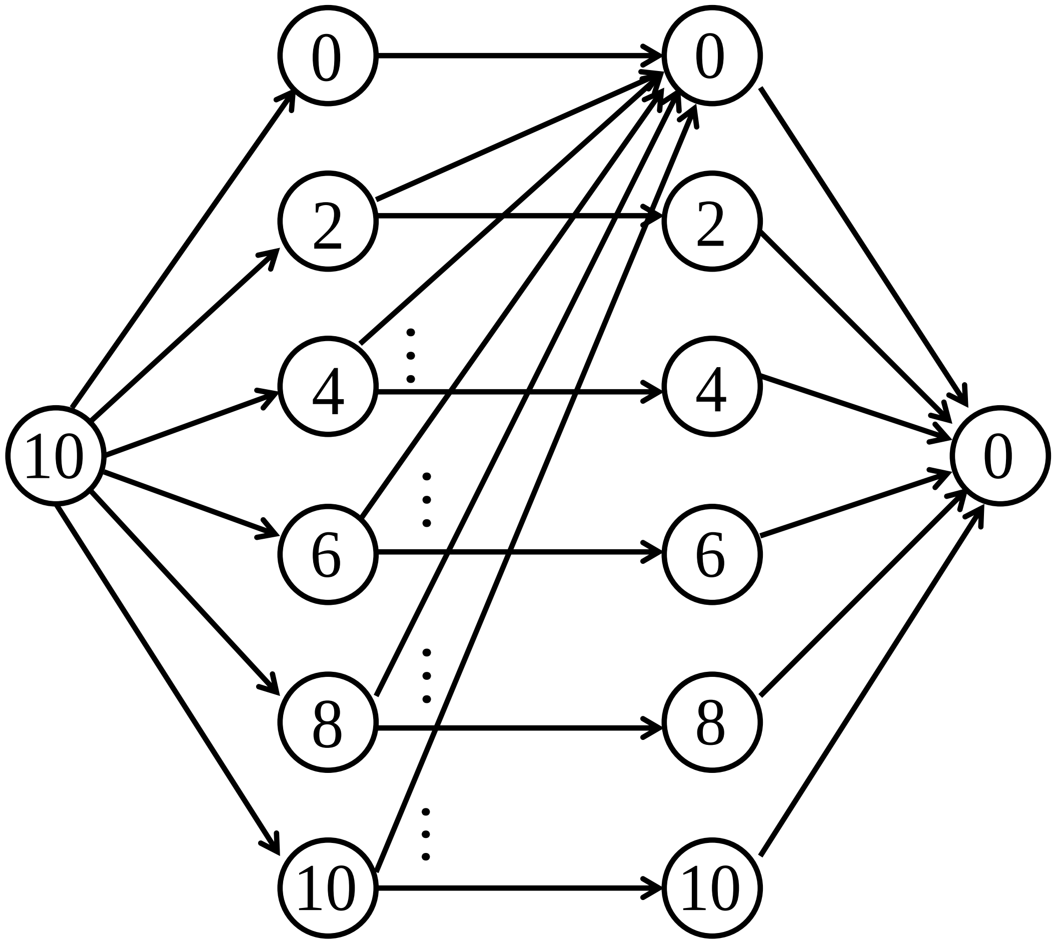
只有在特殊情况下才能用公式表示最优决策 $u_k^*(s_k)$

一般情况可以将连续变量离散化，把 S_k 变成离散点集，用类似求最短路问题的离散变量动态规划方法求解

投资分配问题的离散化求解方法

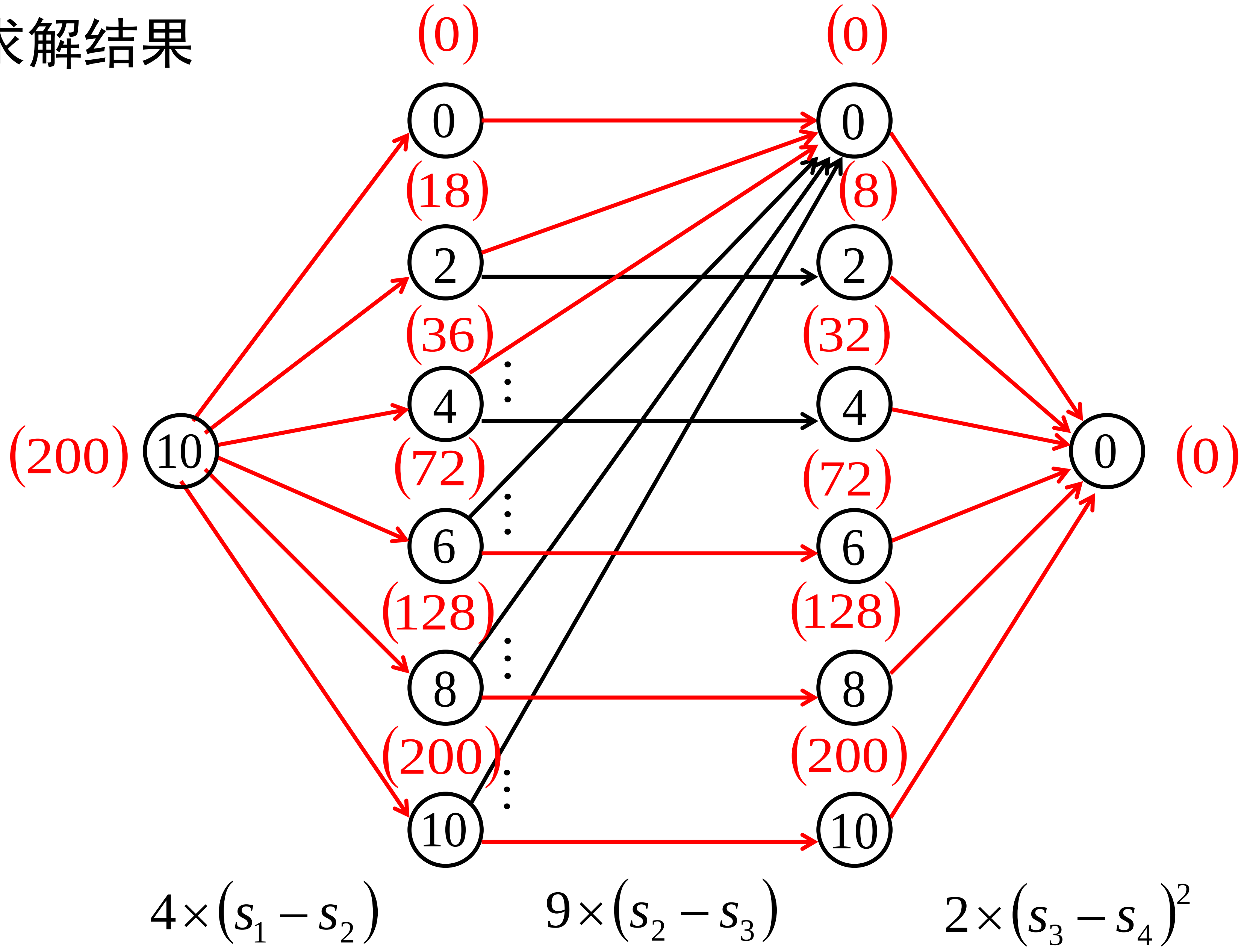
将连续区间 $[0,10]$ 离散化为有限点集 $\{0,2,4,6,8,10\}$

等价于右边的求最长路问题



$4\times(s_1-s_2)$　　$9\times(s_2-s_3)$　　$2\times(s_3-s_4)^2$

求解结果


(200)
10
(0)
0
(18)
2
(36)
4
(72)
6
(128)
8
(200)
10
(0)
0
(8)
2
(32)
4
(72)
6
(128)
8
(200)
10
0
(0)
$4\times(s_1-s_2)$
$9\times(s_2-s_3)$
$2\times(s_3-s_4)^2$

要点：动态规划解整数规划问题

背包问题

10 吨卡车，装三种货物，单位重量和价值如下

货物编号	1	2	3
单位重量（吨）	3	4	5
单位价值	4	5	6

如何装载使总价值最大?

静态优化模型 $\max\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3$

$\text{s.t.}\ \ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 10$

是一个NP难问题！ x_1, x_2, x_3 非负整数

序贯决策模型（用顺序递推解法）

阶段　三个决策阶段，顺序决策三种货物件数

状态　k 阶段之前已装货物总量 s_k，$s_1 = 0,\ s_i \le 10,\ \forall i$

决策　k 阶段装货件数 $x_k = u_k(s_k)$

允许决策集　$3x_1 \le 10 - s_1,\ 4x_2 \le 10 - s_2,\ 5x_3 \le 10 - s_3$

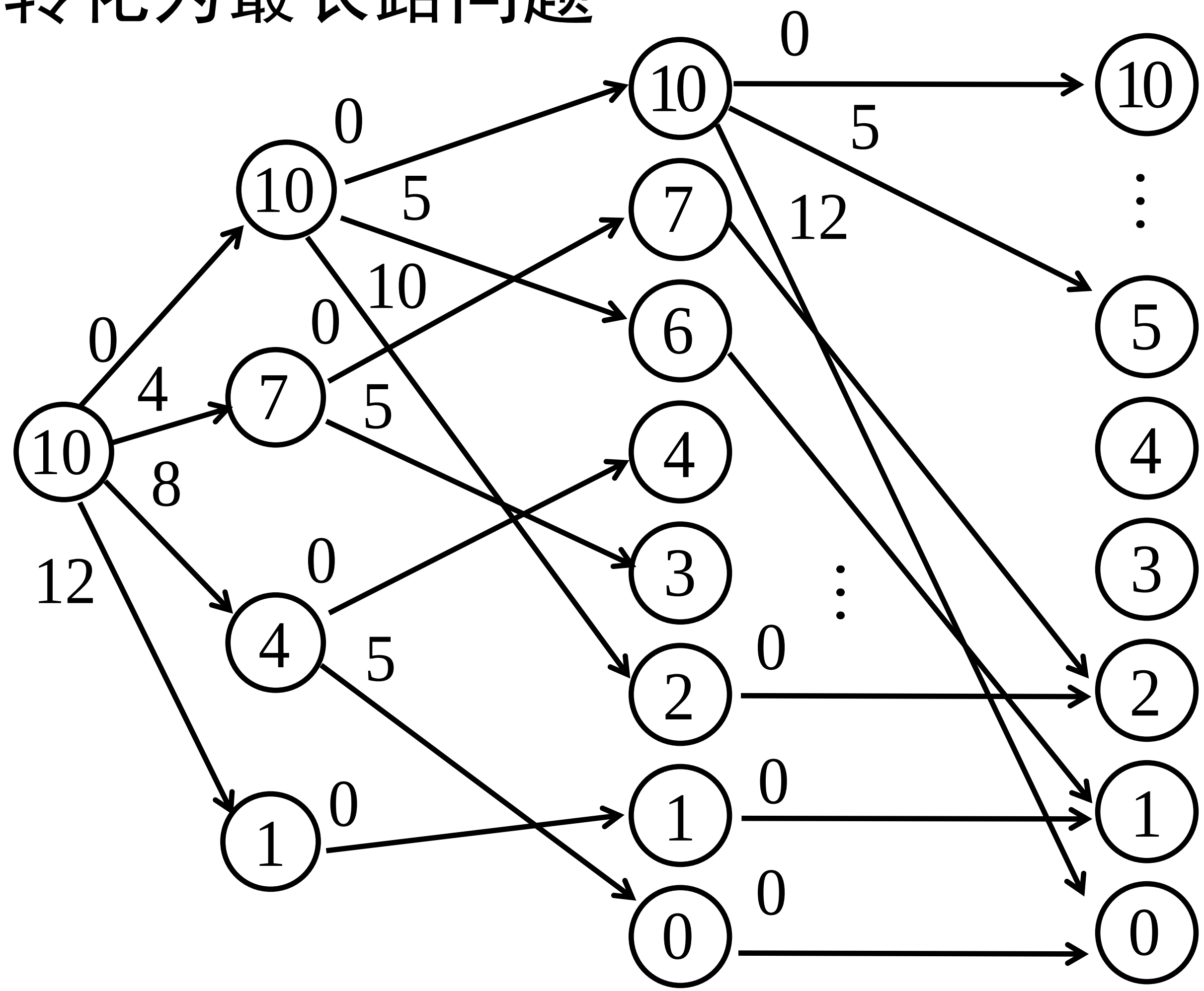
决策变量取非负整数

状态转移方程　$s_2 = s_1 + 3x_1,\ s_3 = s_2 + 4x_2,\ s_4 = s_3 + 5x_3$

阶段指标　$4x_1,\quad 5x_2,\quad 6x_3$

$\bar{f}_{k-1}(s_k)$　k 阶段之前装载物品的最大价值

相当于转化为最长路问题



阶段指标 $4x_1$, $5x_2$, $6x_3$

状态转移方程 $s_2 = s_1 + 3x_1, s_3 = s_2 + 4x_2, s_4 = s_3 + 5x_3$

多维状态

例如：二维背包问题

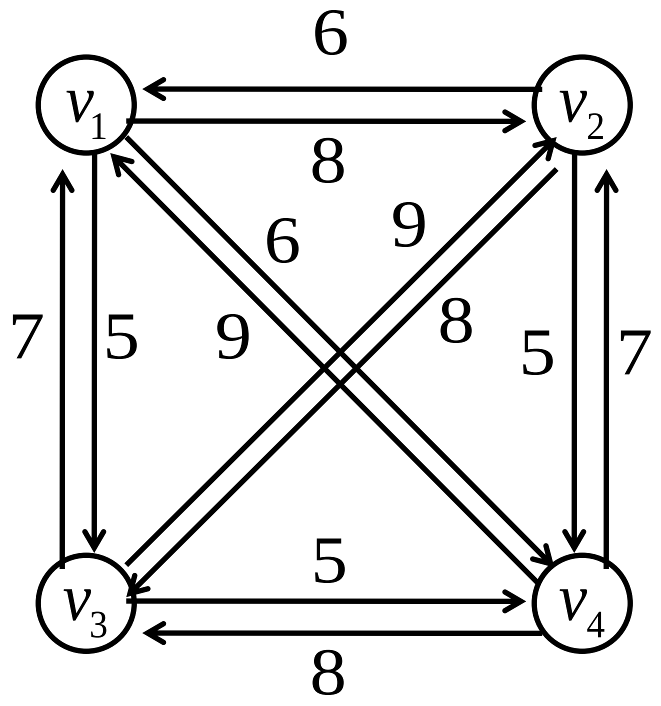
$$\begin{aligned} \max \quad & 4x_1 + 7.5x_2 + 6x_3 \\ \text{s.t.} \quad & 0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.25x_3 \le 5 \\ & 0.3x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 \le 9 \\ & x_1, x_2, x_3 \quad \text{非负整数} \end{aligned}$$

需要注意：每个阶段开始的状态是**二维向量**，分别表示两个不等式的可用资源量

要点：如何满足动态规划的无后效性

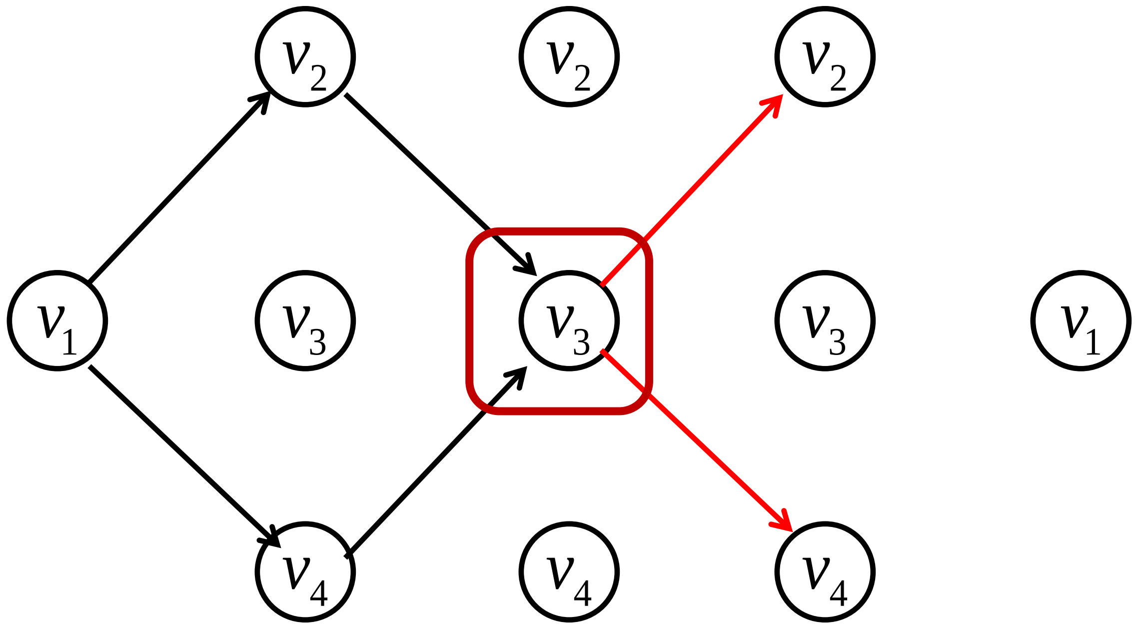
旅行商问题

下图四个城市，任何两个城市间均有道路相连，路程由图中数字所示。从 v_1 出发，找出一条经过其他每个城市最终回到 v_1 的最短路线



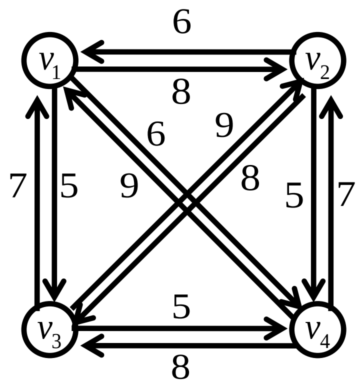
转换成多阶段决策问题

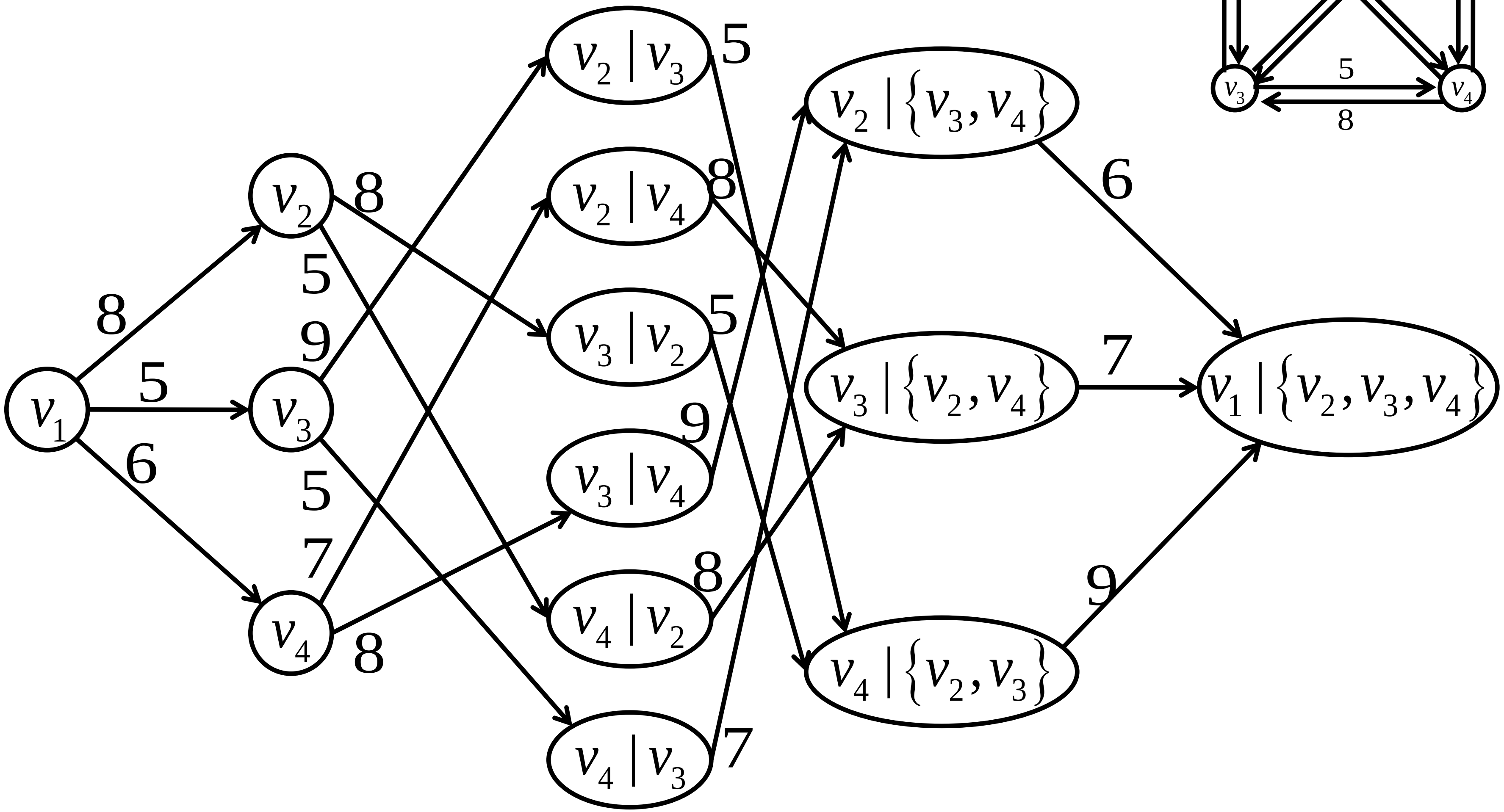
直接以城市为状态会存在后效性问题，如下图，v_3 处的容许决策取决于第二阶段状态值



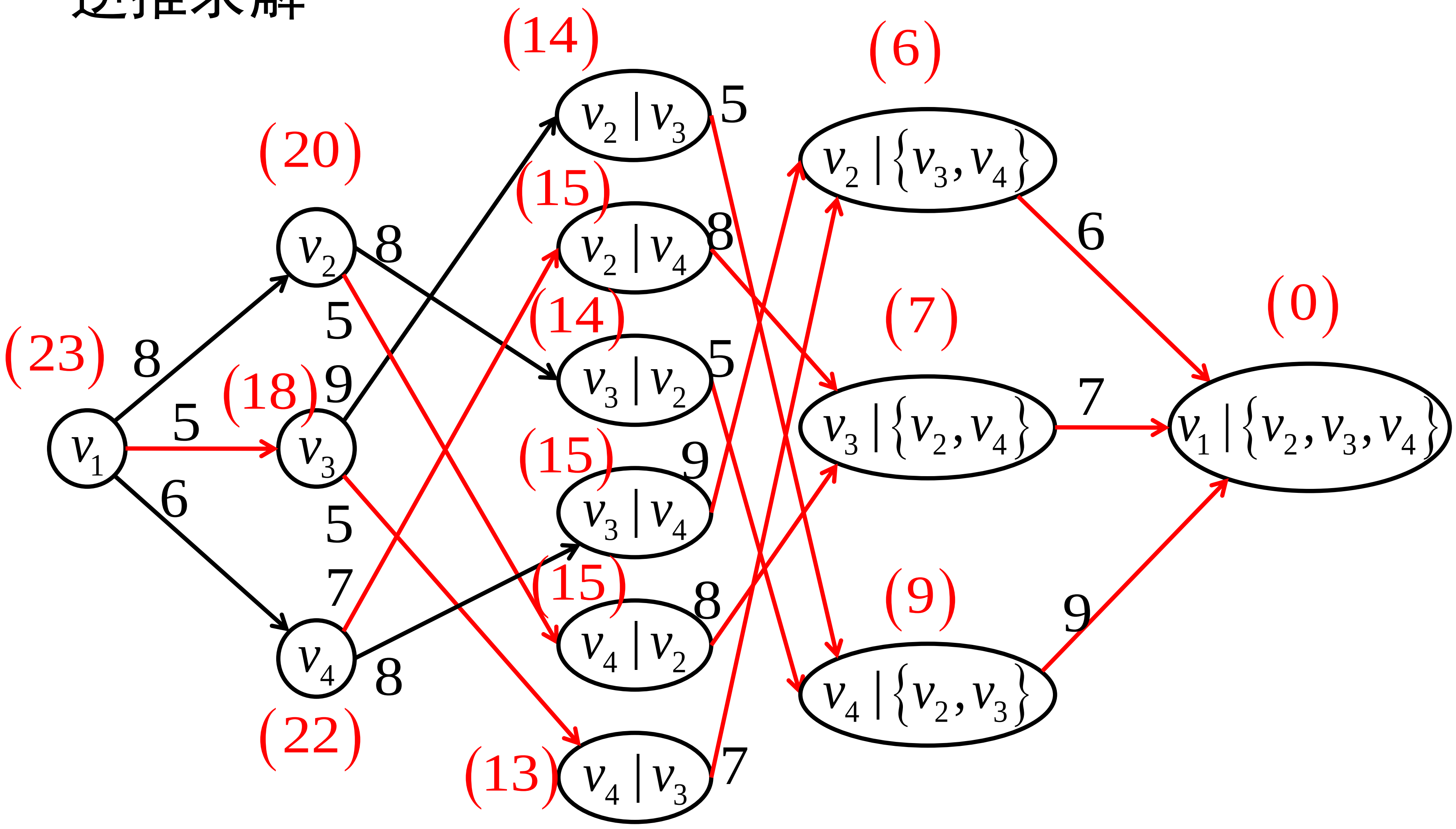
无后效性的状态设置方法

$s_{k,i}$： k 步到达城市 v_i ，$1 \le k \le 3, 2 \le i \le 4$





逆推求解

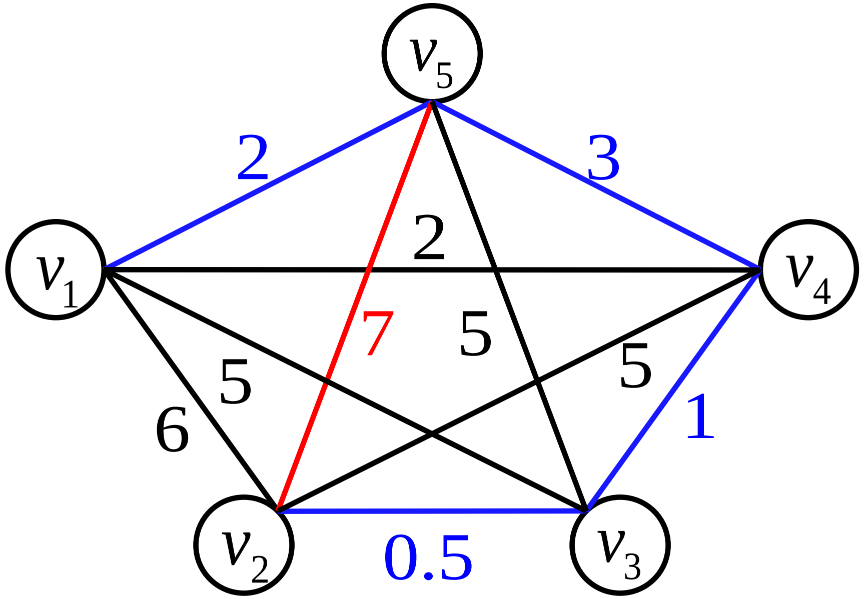


最优路径：$v_1 \to v_3 \to v_4 \to v_2 \to v_1$ 最优路程：23

要点：不定期问题

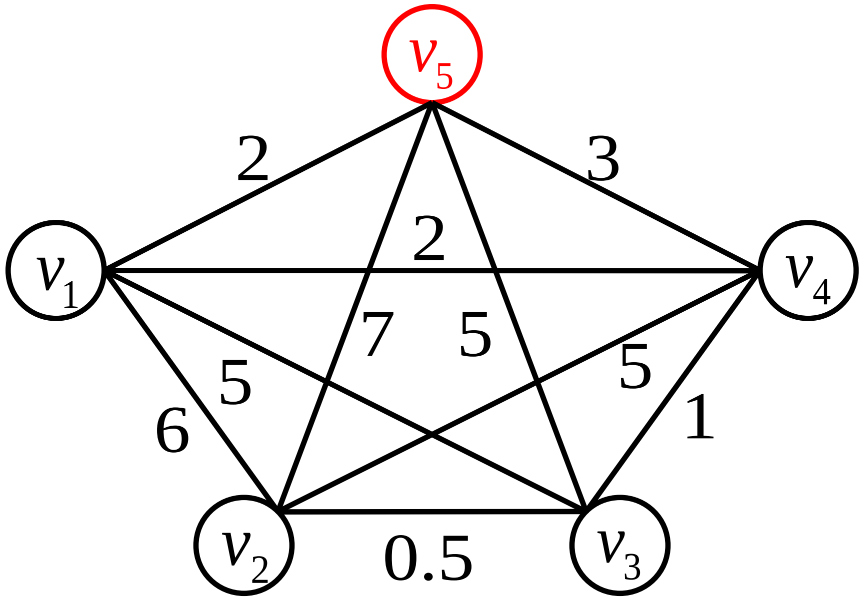
不定期最短路问题

下图五个城市，任何两个城市间均有道路相连，往返路程一样，由图中数字所示。求每个城市到第五个城的最短路线和最短路程



特点：直接以城市为状态不存在明显的阶段

最优值方程



定义各点到目的地的最优路程：$f(v_i), 1 \le i \le 5$

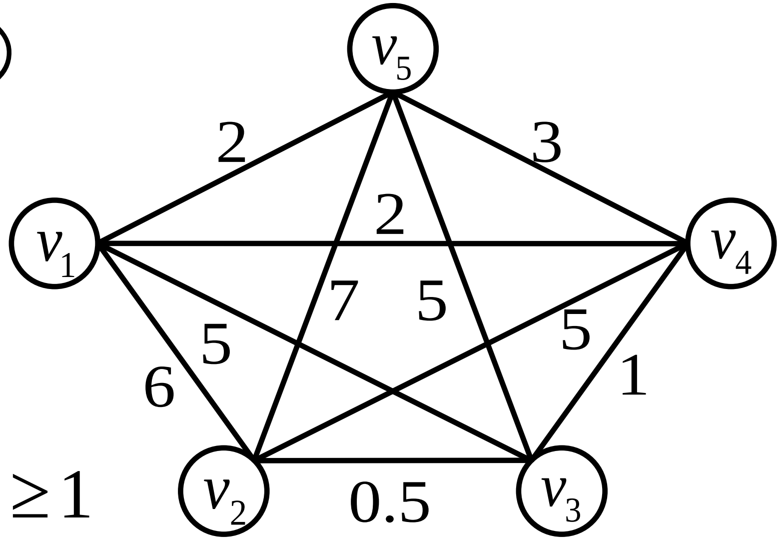
如果存在上述最优路程，它们应该满足下述方程

$$f(v_i) = \min_{1 \le j \le 5} \{c_{ij} + f(v_j)\}, \ \forall 1 \le i \le 5$$

其中 c_{ij} 表示 v_i 和 v_j 之间的直接距离（ $c_{ii} = 0$ ）

要点：值迭代法

函数空间迭代法（值迭代法）



首先取 $f_1(v_i) = c_{i5}, 1 \le i \le 5$

然后按下述公式迭代

$$f_{k+1}(v_i) = \min_{1\le j\le 5}\left\{c_{ij} + f_k(v_j)\right\}, \forall k \ge 1$$

如果到某个 k 满足 $f_{k+1}(v_i) = f_k(v_i), \ \forall 1 \le i \le 5$

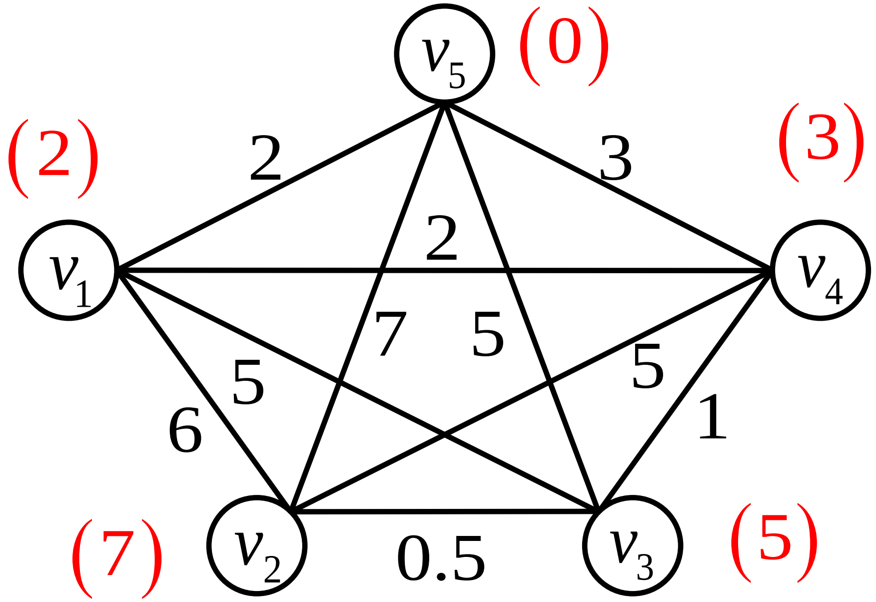
那么就成立 $f_k(v_i) = \min_{1\le j\le 5}\left\{c_{ij} + f_k(v_j)\right\}, \ \forall 1 \le i \le 5$

于是得到 $f(v_i) = f_k(v_i), \ \forall 1 \le i \le 5$

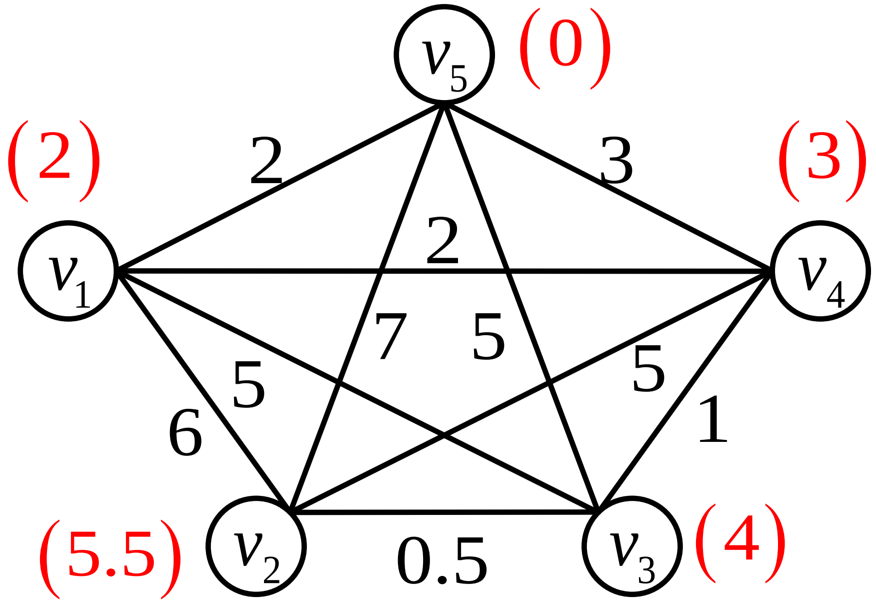
最优路线可以由最优值方程确定

直接在图上进行值迭代法

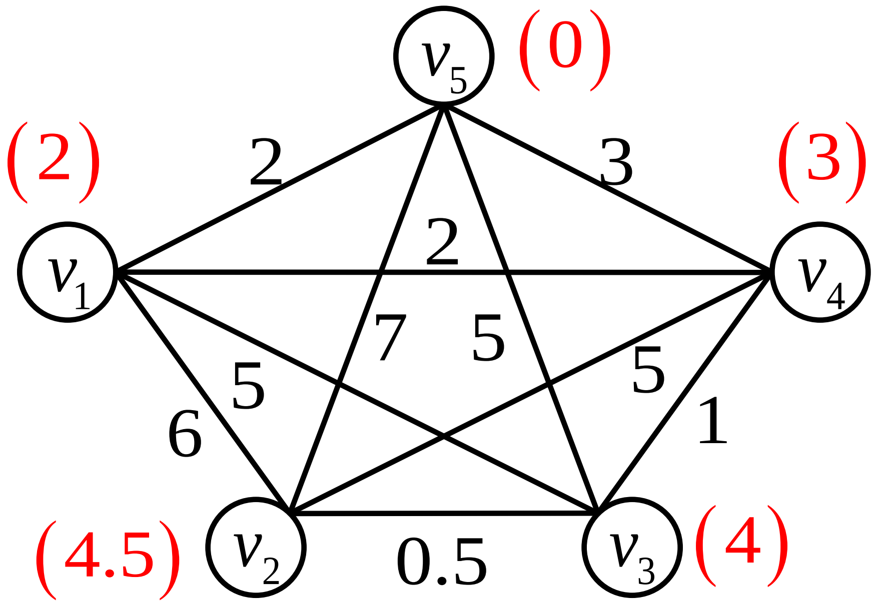
$$f_1(v_i) = c_{i5}$$



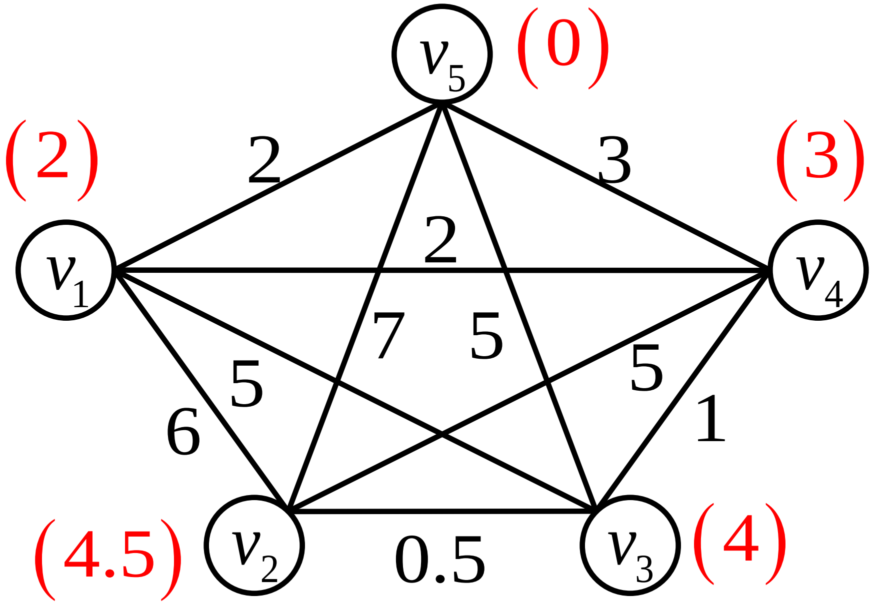
$$f_2(v_i) = \min_{1\le j\le 5}\left\{c_{ij} + f_1(v_j)\right\}$$



$$f_3(v_i)$$

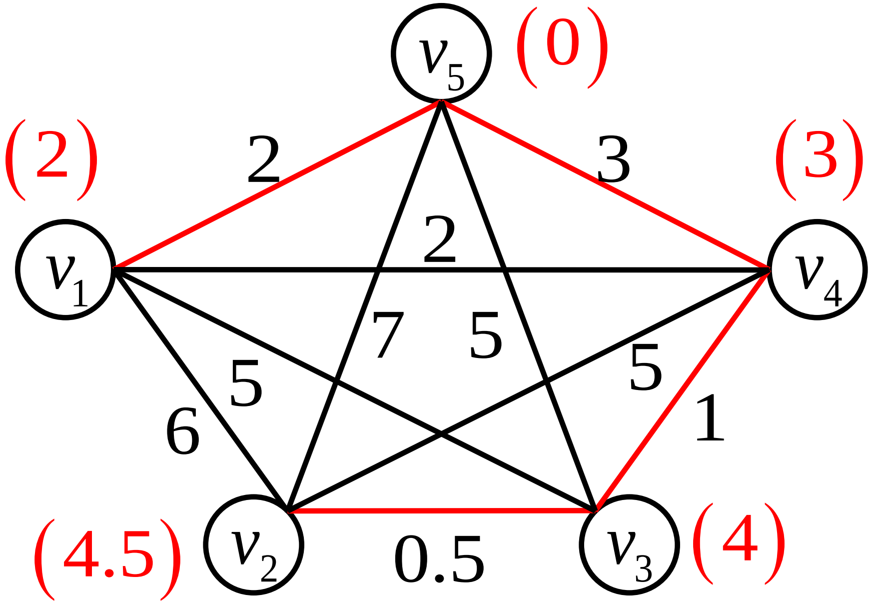


$$f_4(v_i) = \min_{1 \le j \le 5} \left\{ c_{ij} + f_3(v_j) \right\}$$



$$\Rightarrow \qquad f_4(v_i) = f_3(v_i)$$

根据最优路程确定最优路线



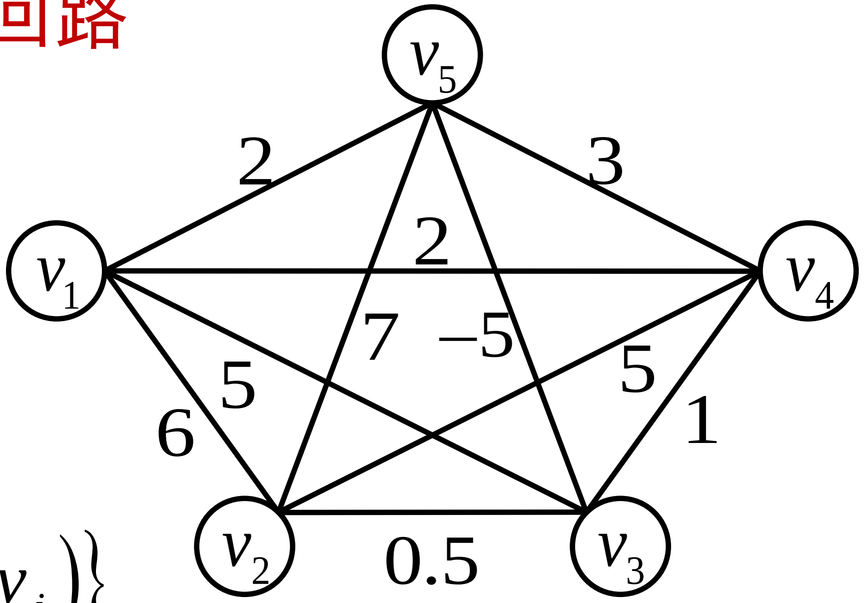
最优路径：	最优路程：
$v_1 \to v_5$	2
$v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5$	4.5
$v_3 \to v_4 \to v_5$	4
$v_4 \to v_5$	3

保证不定期最短路问题的值迭代法收敛的充要条件：

没有总路程之和小于零的回路

例如，右图不满足条件

$v_3 \to v_4 \to v_5 \to v_3 \;\Rightarrow\; -1$



理由：$f_1(v_i) = c_{i5}$

$$f_{k+1}(v_i) = \min_{1 \le j \le 5} \left\{ c_{ij} + f_k(v_j) \right\}$$

$f_{k+1}(v_i)$ 就是 v_i 经过不超过 k 个中转城市到达目的地的最短路，城市数有限，最后必重复，没有负回路的重复不可能减少任何点的总路程

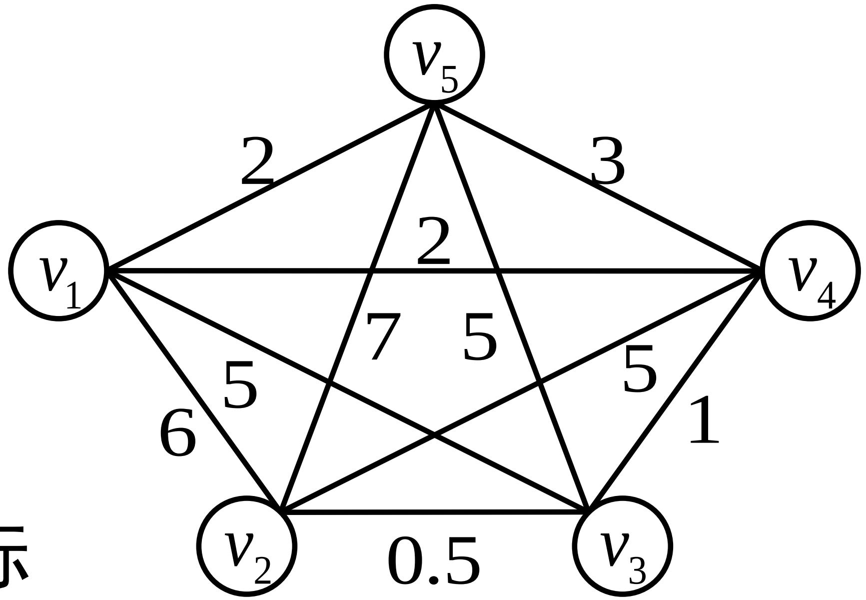
要点：策略迭代法

无回路策略

一个策略就是在每个点的某种决策构成的集合：

$P=\{p(v_i),1\le i\le 5\}$

$p(v_i)$ 表示 v_i 后面城市的下标



所有决策不在一个回路上的策略称为无回路的策略

例如：下面不是无回路的策略

$$p(v_1)=4,\ p(v_2)=1,\ p(v_3)=2,\ p(v_4)=3,\ p(v_5)=5$$

下面是无回路的策略

$$p(v_1)=4,\ p(v_2)=4,\ p(v_3)=4,\ p(v_4)=5,\ p(v_5)=5$$

策略空间迭代法（策略迭代法）

任意选取一个无回路策略 $P_1 = \{ p_1(v_i), 1 \le i \le 5 \}$

求解线性方程组 $f_k(v_i) = c_{i\,p_k(v_i)} + f_k\left(v_{p_k(v_i)}\right),\ \forall 1 \le i \le 4$

$$f_k(v_5) = 0$$

得 $\hat{f}_k(v_i),\ \forall 1 \le i \le 5$（无回路的策略保证方程有唯一解）

利用 $\hat{f}_k(v_i),\ \forall 1 \le i \le 5$ 确定改进的策略

$$P_{k+1} = \{ p_{k+1}(v_i), 1 \le i \le 5 \}$$

改进途经

$$c_{i\,p_{k+1}(v_i)} + \hat{f}_k\left(v_{p_{k+1}(v_i)}\right) = \min_{1 \le j \le 5} \left\{ c_{ij} + \hat{f}_k(v_j) \right\},\ \forall 1 \le i \le 4$$

重复上述过程直到策略不改变

有（无）回路的策略和方程组的关系

有回路策略

$$p(v_1)=4,\ p(v_2)=1$$
$$p(v_3)=2,\ p(v_4)=3$$
$$p(v_5)=5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_k(v_1)=c_{14}+f_k(v_4) \\ f_k(v_2)=c_{21}+f_k(v_1) \\ f_k(v_3)=c_{32}+f_k(v_2) \\ f_k(v_4)=c_{43}+f_k(v_3) \end{cases}$$

无解

无回路策略

$$p(v_1)=4,\ p(v_2)=4$$
$$p(v_3)=4,\ p(v_4)=5$$
$$p(v_5)=5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_k(v_1)=c_{14}+f_k(v_4) \\ f_k(v_2)=c_{24}+f_k(v_4) \\ f_k(v_3)=c_{34}+f_k(v_4) \\ f_k(v_4)=c_{45}+f_k(v_5) \end{cases}$$

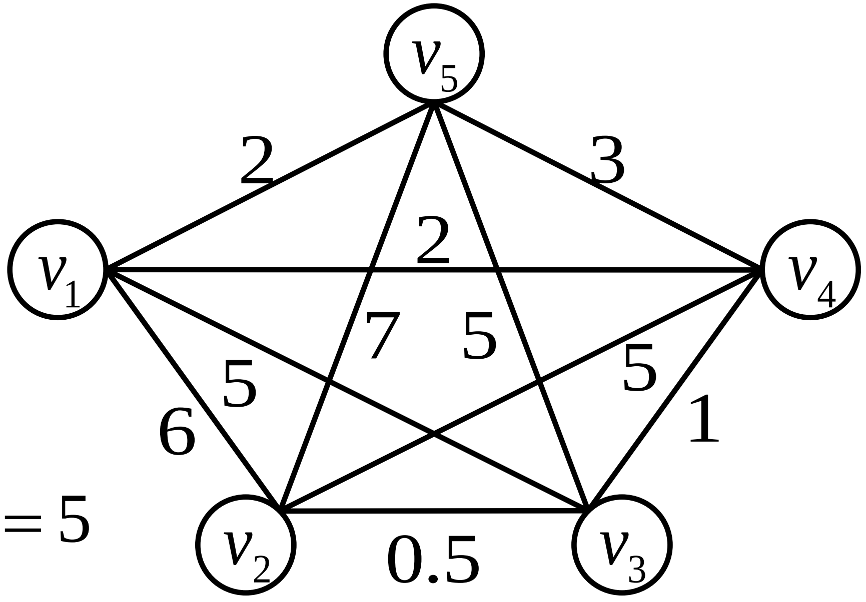
$$f_k(v_5)=0 \Rightarrow \hat{f}_k(v_4) \Rightarrow \hat{f}_k(v_1),\hat{f}_k(v_2),\hat{f}_k(v_3)$$

用策略迭代法解前例

$p_1(v_1)=4,\ p_1(v_2)=4$

$p_1(v_3)=4,\ p_1(v_4)=5$

$p_1(v_5)=5$



$$
\begin{aligned}
f_1(v_1)&=2+f_1(v_4)\\
f_1(v_2)&=5+f_1(v_4)\\
f_1(v_3)&=1+f_1(v_4)\\
f_1(v_4)&=3+f_1(v_5)
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
\hat{f}_1(v_1)&=5\\
\hat{f}_1(v_2)&=8\\
\hat{f}_1(v_3)&=4\\
\hat{f}_1(v_4)&=3
\end{aligned}
\quad \hat{f}_1(v_5)=0
$$

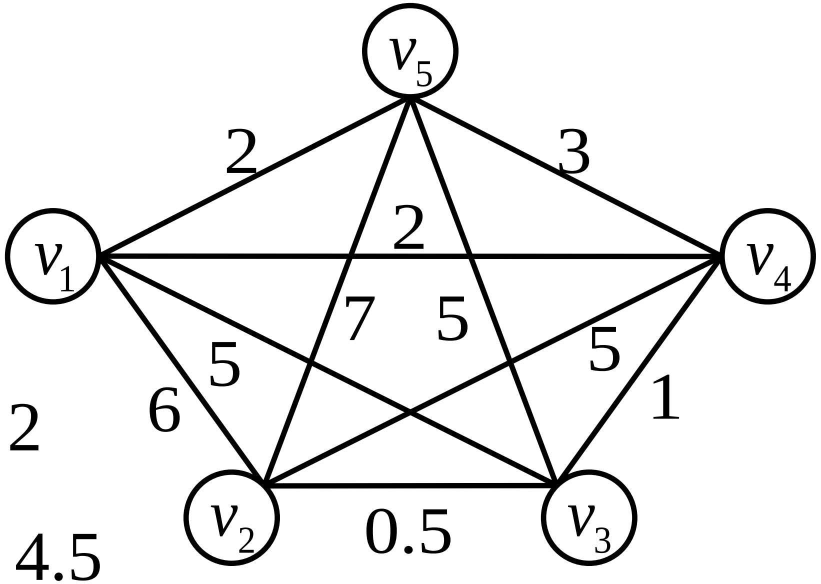
$$c_{i\,p_2(v_i)}+\hat{f}_1\left(v_{p_2(v_i)}\right)=\min_{1\le j\le 5}\left\{c_{ij}+\hat{f}_1\left(v_j\right)\right\},\quad \forall 1\le i\le 4$$

$$\Rightarrow\ p_2(v_1)=5,\ p_2(v_2)=3,\ p_2(v_3)=4,\ p_2(v_4)=5,\ p_2(v_5)=5$$

继续迭代

$p_2(v_1)=5,\ p_2(v_2)=3$

$p_2(v_3)=4,\ p_2(v_4)=5,\ p_2(v_5)=5$



$$\begin{aligned} f_2(v_1)&=2+f_2(v_5) \\ f_2(v_2)&=0.5+f_2(v_3) \\ f_2(v_3)&=1+f_2(v_4) \\ f_2(v_4)&=3+f_2(v_5) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \hat{f}_2(v_1)&=2 \\ \hat{f}_2(v_2)&=4.5 \\ \hat{f}_2(v_3)&=4 \\ \hat{f}_2(v_4)&=3 \end{aligned}\quad \hat{f}_2(v_5)=0$$

$$c_{i\,p_3(v_i)}+\hat{f}_2\left(v_{p_3(v_i)}\right)=\min_{1\le j\le 5}\left\{c_{ij}+\hat{f}_2\left(v_j\right)\right\},\ \forall 1\le i\le 4$$

$$\Rightarrow\quad p_3(v_1)=5,\ p_3(v_2)=3,\ p_3(v_3)=4,\ p_3(v_4)=5,\ p_3(v_5)=5$$

$P_3=P_2$ 停止

最优策略

$$p_3(v_1)=5,\ p_3(v_2)=3,\ p_3(v_3)=4,\ p_3(v_4)=5,\ p_3(v_5)=5$$

最优路径： $v_1 \to v_5$

$v_2 \to v_3 \to v_4 \to v_5$

$v_3 \to v_4 \to v_5$

$v_4 \to v_5$

同值迭代法结果一样