(1) 镇定问题;

(a)
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 = 0$$

化成能控標准型; $Q_k = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

取又 $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $T^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\tilde{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

最后一行为0
故整个都是不可控部分

不可控部分极点为 0 不可控子空间不是渐进稳定

(b) $\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x \end{cases}$

$Q_k = \left[\begin{array}{c:c} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{array}\right]$ $P_T = Q_k[1\ 0]$ $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{b} = T^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

模态 e^{-2t} 可控，e^{-t} 不可控，因为 -1 在左半平面
不可控子系统渐进稳定

$\tilde{C} = CT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ 故 e^{-2t} 可观

则 e^{-2t} 既可控又可观，此部分的输出反馈为

$$sI - (\tilde{A}_{11} - \tilde{B}_1 H \tilde{C}_1) = s - (-2 - H) = s + 2 + H$$

只要 $H > -2$ 则可使 s 的根有负实部，能镇定

综上 可以镇定

(2)

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

构造状态观测器，使其极点 -2, -3, -4，画出观测器结构图

$$Q_g = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad Q_g^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad r = Q_g^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \tilde{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{c} = CT = [0 \ 0 \ 1]$$

设观测矩阵 $\tilde{M} = [m_1, m_2, m_3]^T$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -(-4-m_1) \\ 1 & 0 & -(8-m_2) \\ 0 & 1 & -(-5-m_3) \end{bmatrix} \Rightarrow \text{特征方程} = -4-m_1 + s(8-m_2) + s^2(-5-m_3)$$

而题目要求 $f^*(s) = (s+2)(s+3)(s+4) = s^3 + 9s^2 + 26s + 24$

$$\begin{cases} -5-m_3 = 9 \\ 8-m_2 = 26 \\ -4-m_1 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_3 = -14 \\ m_2 = -18 \\ m_1 = -28 \end{cases} \Rightarrow \tilde{M} = \begin{bmatrix} -28 \\ -18 \\ -14 \end{bmatrix}$$

把 $\hat{M}$ 由 A为能观標准型的空间转回A原来的空间

$$M = T\hat{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -28 \\ -18 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -60 \\ 46 \\ -120 \end{bmatrix}$$

观测器方程：

$$\dot{\hat{x}} = (A+MC)\hat{x} + Bu - My$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} -59 & -60 & 0 \\ 46 & 48 & 1 \\ -120 & -120 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} -60 \\ 46 \\ 120 \end{bmatrix} \tilde{y}$$

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu - My$$

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} -60 \\ 46 \\ 120 \end{bmatrix} \tilde{y}$$

$y =$