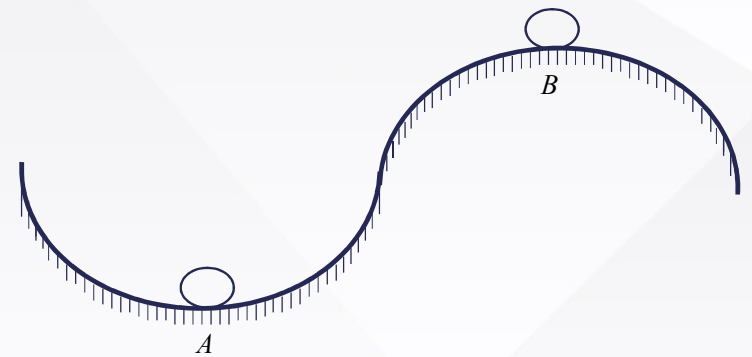
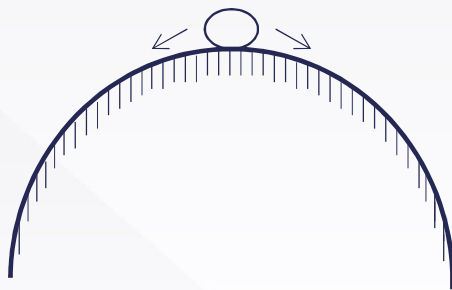
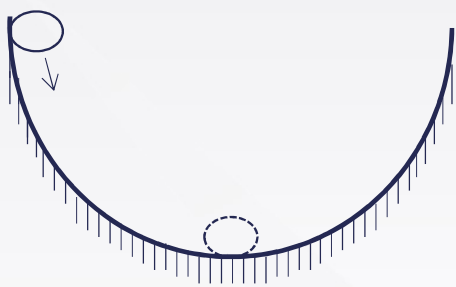


## ❖ 基本内容

- 稳定性定义
- 线性定常系统稳定性的代数判据——Routh判据
- 李雅普诺夫方法

# 稳定性



稳定与不稳定运动示意图

# 现实生活中的各种稳定性



## 线性定常系统稳定性

前面讲的随动系统是一个四阶微分方程，代入参数得

$$0.025\varphi^{(4)} + 0.55\varphi^{(3)} + 1.5\varphi'' + \varphi' + \varphi = \psi$$

特征方程  $0.025s^4 + 0.55s^3 + 1.5s^2 + s + 1 = 0$

特征根  $s_1 = -18.94, s_2 = -2.61, s_{3,4} = -0.228 \pm j0.871$

$\varphi(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + Ce^{-0.228t} \sin(0.871t + \theta) + \varphi^*(t)$  ( $\varphi^*(t)$ 为特解)

A、B、C、 $\theta$  由初始条件求出

当 $t \rightarrow \infty$ , 前三项 $\rightarrow 0$ ,  $\varphi(t) \rightarrow \varphi^*(t)$

现将 $k$  ( $k$ 为开环比例系数) 增大10倍, 再解特征方程得

$$s_1 = -18.87, s_2 = -4.13, s_{3,4} = 0.501 \pm j2.21$$

## 线性定常系统稳定性

于是得  $\varphi(t) = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} + Ce^{0.501t} \sin(2.21t + \theta) + \varphi^*(t)$

$\therefore$  只要  $C \neq 0$ , 当  $t \rightarrow \infty$ ,  $\varphi(t) \rightarrow \infty$ , 达不到  $\varphi^*(t)$

可见  $\varphi(t)$  取决于特征根, 组成  $\varphi(t)$  的分量诸如  $e^{\lambda_i t}$ , 叫运动模态。

由这个例子我们可以得到下面的结论:

线性系统稳定的充分必要条件是**特征方程的根必须具有负的实部, 或说特征根都在  $s$  平面的左半平面**

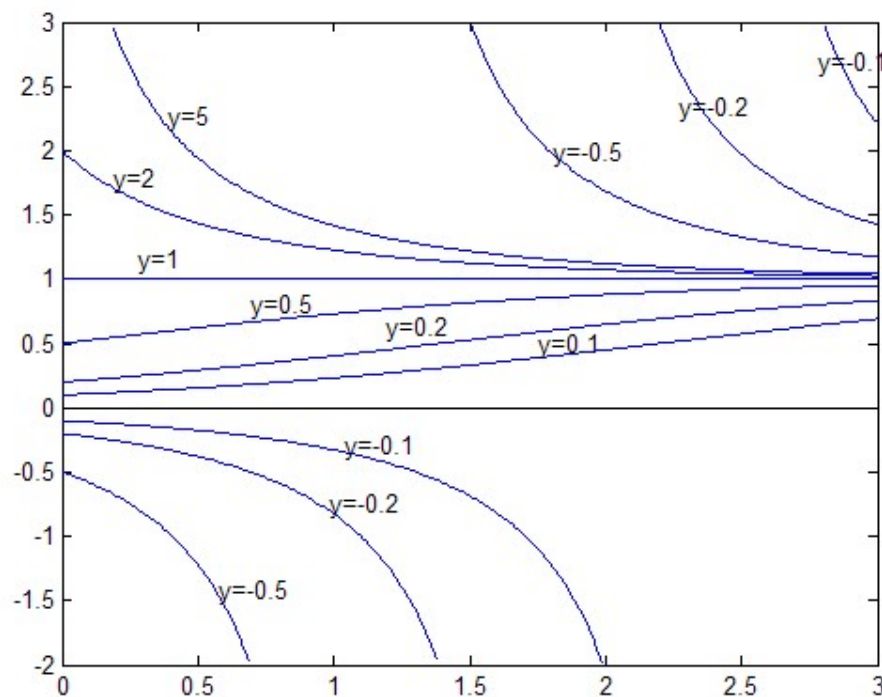
但是, 对于非线性方程, 在有些初始条件下, 解能达到一种确定的状态, 称为稳定的运动, 而在另一些初始条件下的解表现为不稳定的运动。所以, 对一个非线性系统, 不能笼统地称系统稳定与否, 而只能说哪些解是稳定的, 哪些是不稳定的。

见教科书p184图3.2.1例

# 非线性系统稳定性

$$\frac{dy}{dt} + y(y - 1) = 0, \quad y(0) = y_0 \quad \text{解析解为: } y(t) = \frac{1}{1 - (1 - \frac{1}{y_0})e^{-t}}$$

解曲线是:



$$y_0 = 1, \quad y(t) = 1$$

$$y_0 = 2, \quad y(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-t}}$$

$$y_0 = -0.5, \quad y(t) = \frac{1}{1 - 3e^{-t}} \\ t = 1.1$$



# 李雅普诺夫稳定性

数学模型回顾：一个高阶微分方程可以化成一个一阶微分方程组

$$a_3 x^{(3)} + a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = u$$

$$\text{设: } \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ x_3 = x'' \end{cases} \quad \text{有: } \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{a_3}(-a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3) + \frac{1}{a_3} u \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_3} & -\frac{a_1}{a_3} & -\frac{a_2}{a_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{a_3} \end{bmatrix} u \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

系统的变化可以用状态向量在高维空间中的运动轨迹描述

# 李雅普诺夫稳定性

---

**[定义]** 对于系统  $\dot{x} = f(x, t)$ , 满足  $f(x_e, t) = 0$  的状态  $x_e$  称作系统的**平衡状态**或**平衡点**。

**[定义]** 若某一平衡点附近足够小的邻域内没有别的平衡点, 则称它为**孤立平衡点**。



# 李雅普诺夫稳定性

---

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\sin(x_1(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t)x_2(t) \end{cases}$$

# 李雅普诺夫稳定性

**[定义]** 假设  $x_e$  是系统  $\dot{x} = f(x)$  的孤立平衡状态。如果对于任意给定正实数  $\varepsilon > 0$ ，都存在  $\delta(\varepsilon) > 0$ ，使得从满足不等式

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta(\varepsilon)$$

的任意初始状态出发的系统运动  $x(t)$  均成立

$$\|x(t) - x_e\| \leq \varepsilon, t \geq t_0$$

则称平衡状态  $x_e$  是（在李雅普诺夫意义下）**稳定的**。

称平衡状态  $x_e$  **不稳定**：若  $x_e$  不满足上述稳定的条件。

# 李雅普诺夫稳定性

---

**[定义]** 称平衡状态  $x_e$  **渐近稳定**：若  $x_e$  稳定，且存在一个邻域（**吸引域**），其内出发的运动恒有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x - x_e\| = 0$ 。

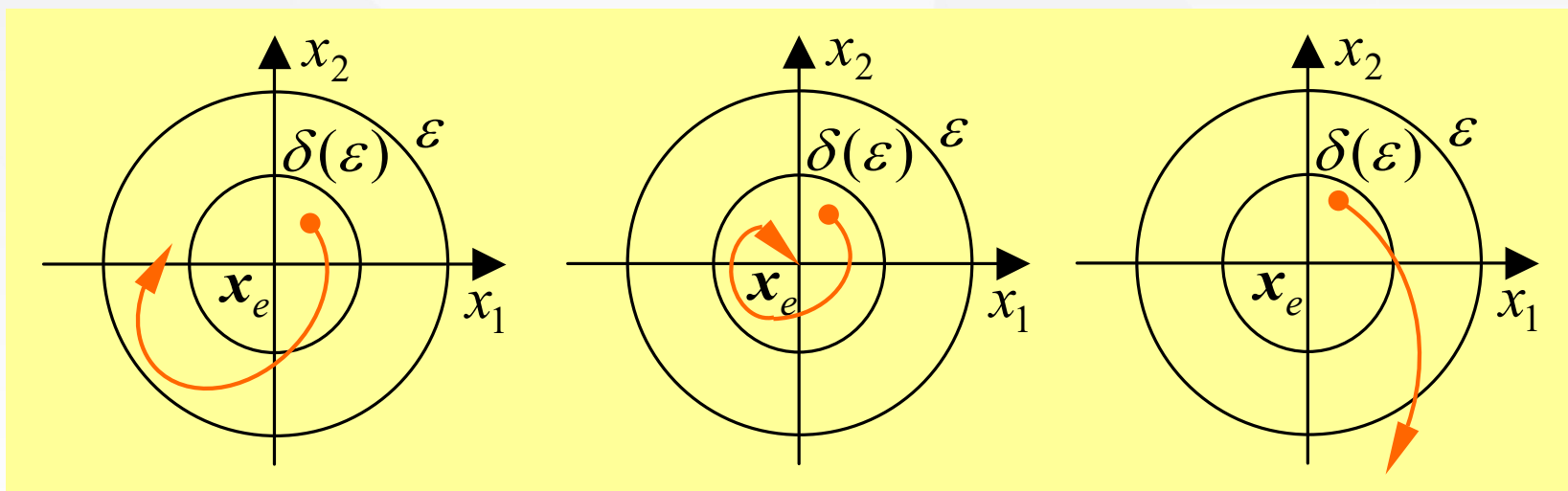
**[定义]** 称平衡状态  $x_e$  **全局渐近稳定**：若  $x_e$  渐近稳定，且吸引域充满整个状态空间。

◆ 平衡状态唯一是全局渐近稳定的必要条件。

工程上总是希望系统是大范围渐近稳定的。

# 李雅普诺夫稳定性

## 李雅普诺夫稳定性的示意性说明



稳定

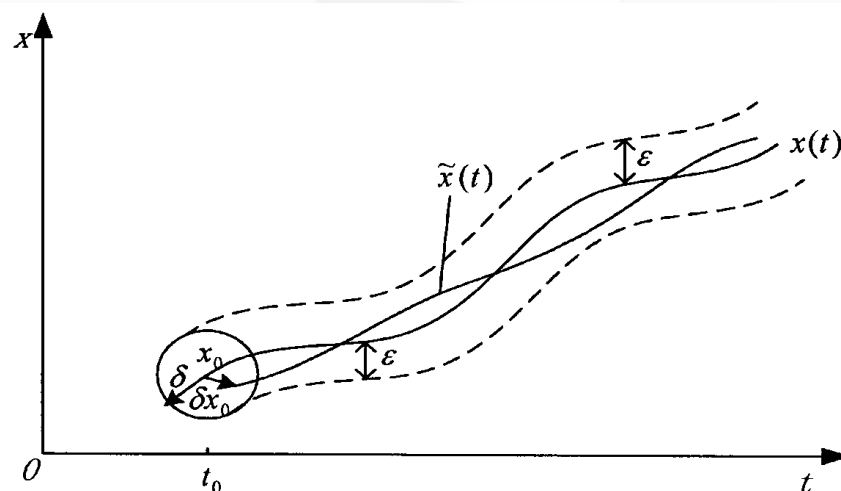
渐近稳定

不稳定

# 李雅普诺夫稳定性

$$\dot{X} = f(X, t, u)$$

如果一个关于 $X$ 的微分方程组，在初始条件 $X(t_0) = X_0$ 下有解 $X(t)$ ，且对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$ ，总存在一个正数 $\delta(\varepsilon)$ ，当初始条件 $X_0$ 变为 $\tilde{X}_0$ 时，只要 $\|\tilde{X}_0 - X_0\| \leq \delta$ ，其相应解 $\tilde{X}(t)$ 在 $t > t_0$ 的任何时刻都满足 $\|\tilde{X}(t) - X(t)\| < \varepsilon$ ，则称解 $X(t)$ 是稳定的。如果不存在这样的正数 $\delta$ ，则称解 $X(t)$ 是不稳定的。



# 李雅普诺夫方法

## 2.1 第一方法 (间接法)

设  $x_e$  是系统

$$\dot{x} = f(x) \quad (2-1)$$

的平衡状态。该系统在  $x_e$  处的线性化模型为：

$$\dot{y} = A y, \quad A = \left. \frac{\partial f}{\partial x^T} \right|_{x = x_e}$$

其中  $y = x - x_e$ 。

$$= \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right]_{x=x_e}$$

# 李雅普诺夫方法

## 2.1 第一方法（间接法）

根据  $A$  的特征值，有如下稳定性判别定理：

**[定理 2-1]** 若  $A$  的特征值均具有**负**实部， $x_e$  是**渐近稳定的**；若存在特征值具有**正**实部， $x_e$  是**不稳定的**；其它情况，则**不能判定**。

- ◆ 线性化方法不能给出全局稳定性的判断。如果系统有多个平衡点，则可直接判断原点不是其全局渐近稳定平衡点。



# 李雅普诺夫稳定性

Liapunov第一方法（见教科书P190）

- 若线性化后系统特征方程的所有根均为负实数或实部为负的复数，则原系统的运动不但是稳定的而且是渐近稳定的。线性化过程中被忽略的高于一阶的项也不会使运动变成不稳定。
- 若线性化后系统特征方程的诸根中，只要有一个为正实数或实部为正的复数，则原系统的运动就是不稳定的。被忽略的高于一阶的项也不会使运动变成稳定。
- 若线性化后系统特征方程的诸根中，有一些是实部为零的，而其余均具有负实部，则实际系统运动的稳定与否与被忽略的高阶项有关。这种情况下不可能按照线性化后的方程来判断原系统的运动稳定性。若要分析原系统的运动稳定性必须分析原系统的非线性数学模型

**严格的说Liapunov第一方法只适用于无穷小范围内**

# 李雅普诺夫方法

## 2.1 第一方法（间接法）

**[例 2-1]** 判断下列系统在原点处的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \cos x_1 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2 \end{cases}$$

**解：** 原点是系统的平衡点（唯一？）。在原点处线性化可得：

$$A = \left[ \begin{array}{cc} -x_2 \sin x_1 & \cos x_1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{array} \right] \bigg|_{x=0} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right]$$

**特征根均在左半开平面内，因此原点是该系统的渐近稳定平衡点。**

# 李雅普诺夫方法

## 2.1 第一方法（间接法）

**[例 2-2]** 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_1x_2 \end{cases}$$

**解：** 原点是系统的平衡点。在原点处线性化可得：

$$A = \left[ \begin{array}{cc} -3x_1^2 & -4 \\ 3 - x_2 & -x_1 \end{array} \right] \bigg|_{x=0} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{array} \right]$$

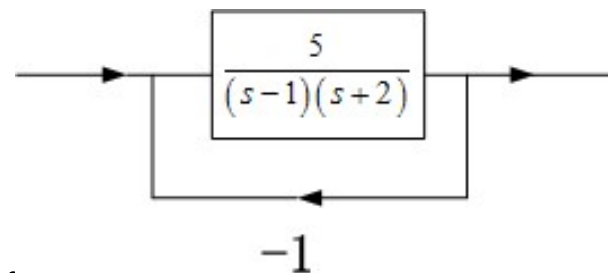
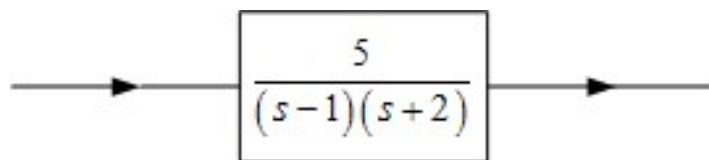
**特征根均在虚轴上，间接法失效。**

# 李雅普诺夫稳定性——传递函数角度

稳定性就看传递函数极点的分布

稳定的充要条件是所有极点实部为负，有一个极点实部为正即不稳定

开环不稳定系统闭环可能稳定



开环极点为1和-2，存在正根，不稳定。加反馈后：

$G(s) = \frac{5}{s^2 + s + 3}$ ，极点为  $\frac{-1 \pm i\sqrt{11}}{2}$ ，实部小于0，稳定。

# 稳定性的代数判据

---

根据微分方程特征方程的系数，不解方程来判断是否有右半平面的根

**Routh和Hurwitz**分别独立提出了稳定性判据，其功能是判断一个代数多项式有几个根位于复数平面的右半面

## 例1 特征方程

$$2s^6 + 5s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 14s + 7 = 0$$

构造 *Routh* 表如下：

# Routh判据

例1 特征方  $2s^6 + 5s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 14s + 7 = 0$

程

$s^6$	$s^6: 2$	$s^4: 3$	$s^2: 6$	$s^0: 7$
$s^5$	$s^5: 5$	$s^3: 4$	$s^1: 14$	
$s^4$	$-\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} = \frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 7$	
$s^3$	$\frac{18}{7}$	-11		
$s^2$	$\frac{115}{18}$	7		
$s^1$	$-\frac{1589}{115}$			
$s^0$	7			

$$\frac{18}{7} = -\frac{5}{7} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 2 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$$

# Routh判据

例1 特征方  $2s^6 + 5s^5 + 3s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 14s + 7 = 0$

程

$s^6$	$s^6: 2$	$s^4: 3$	$s^2: 6$	$s^0: 7$
$s^5$	$s^5: 5$	$s^3: 4$	$s^1: 14$	
$s^4$	$-\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 14 \end{vmatrix} = \frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 7$	
$s^3$	$\frac{18}{7}$	-11		
$s^2$	$\frac{115}{18}$	7		
$s^1$	$-\frac{1589}{115}$			
$s^0$	7			

一次变号

二次变号

- 第一列系数全为正是系统稳定的充分必要条件。
- 出现负号说明有右半平面的根，变号的次数对应于右半平面根的个数。



## Routh判据

例2 特征方程  $s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 20s + 24 = 0$

- 第一列系数出现0, 用小正数  $\epsilon$  代替。
- $\epsilon=0$ 时需判断符号
- 若 $\epsilon$ 处上下元素符号相同, 表示有一对纯虚根; 不相同则表示一次变号

$s^4$	1	10	24
$s^3$	5	20	
$s^2$	$-\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 5 & 20 \end{vmatrix} = 6$	$-\frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 24 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 24$	
$s^1$	$-\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 6 & 24 \end{vmatrix} = 0(\epsilon)$		
$s^0$	$-\frac{1}{\epsilon} \begin{vmatrix} 6 & 24 \\ \epsilon & 0 \end{vmatrix} = 24$		

此例解得根为  $\pm 2j, -2, -3$

## Routh判据

例3 特征方程  $s^3 - 3s + 2 = 0$

$s^3$	1	-3
$s^2$	$0(\epsilon)$	2
$s^1$	$-\frac{1}{\epsilon} \left  \frac{1}{\epsilon} \quad \frac{-3}{2} \right  = -3 - \frac{2}{\epsilon}$	
$s^0$	2	

一次变号

二次变号

此例解得根为  
1, 1, -2

两次变号，说明有两个根在右半平面。

## Routh判据

例4 特征方程  $s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$

$s^5$	1	24	-25
$s^4$	2	48	-50
$s^3$	0(8)	0(96)	
$s^2$	24	-50	
$s^1$	112.7		
$s^0$	-50		

出现全零行时构造辅助多项式  $2s^4 + 48s^2 - 50$ ，以求导所得  $8s^3 + 96s$  代替全零行

## Routh判据

例4 特征方程  $s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$

$s^5$	1	24	-25
$s^4$	2	0上下同号说明有一对纯虚根	
$s^3$	0(8)	0(96)	
$s^2$	24	出现全0行说明有一对大小相等原点对称的根(由辅助多项式 $2s^4 + 48s^2 - 50$ 解出	
$s^1$	112.7	)	
$s^0$	-50	一次变号说明有一个正实根	

## 关于稳定的必要条件

设想特征方程的根全部为负实数或实部为负的共轭复数，则特征方程一定可以分解成下面一些因式的乘积

$$(s + \alpha), (s + \beta + j\gamma)(s + \beta - j\gamma) \quad \alpha, \beta, \gamma > 0$$

$$(s + \alpha), (s^2 + 2\beta s + \beta^2 + \gamma^2)$$

可见特征方程全部系数必为正（幂次不缺项）

**结论：特征方程系数全为正是系统稳定的必要条件（但不充分）**

## 一、二、三阶系统稳定的充要条件

---

用Routh判据来分析一、二、三阶系统，得到稳定的充要条件

$$a_1 s + a_0 = 0,$$

$$a_1 > 0, a_0 > 0$$

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0,$$

$$a_2, a_1, a_0 > 0$$

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0,$$

$$a_3, a_2, a_1, a_0 > 0, \text{ 且 } a_2 a_1 > a_3 a_0$$

## 参数稳定性和参数稳定域

系统传递函数一般可表示为如下形式

$$G(s) = \frac{k(\tau_1 s + 1) \cdots (\tau_m s + 1)}{s^\gamma (T_1 s + 1) \cdots (T_n s + 1)}$$

系统的参数集中体现在 $k$ (开环比例系数)和诸 $T$ ，它们是影响系统稳定的主要因素

- 一般情况下， $k$ 过大不利于稳定（有些特殊情况，条件稳定）
- 增大时间常数，不利于稳定
- 增多时间常数，不利于稳定



# 参数稳定性和参数稳定域

## 参数稳定域（单参数稳定域）

设一个单位负反馈系统的开环传递函数

$$G_{\text{开}}(s) = \frac{k(\frac{1}{3}s + 1)}{s(s+1)(2s+1)}$$

试找出k的稳定范围。（指闭环系统）

首先列出特征方程：  $1 + G_{\text{开}}(s) = 0$

$$\text{即 } s(s+1)(2s+1) + k\left(\frac{1}{3}s + 1\right) = 0, \quad 2s^3 + 3s^2 + \left(1 + \frac{1}{3}k\right)s + k = 0$$

根据Routh判据  $\begin{cases} k > 0 \\ 3\left(1 + \frac{1}{3}k\right) > 2k \end{cases} \therefore 0 < k < 3$  是k的稳定范围

# 参数稳定性和参数稳定域

## 双参数稳定域

$$G_{\text{开}}(s) = \frac{k(\tau s + 1)}{s(s + 1)(2s + 1)} \quad k, \tau > 0$$

特征方程:  $2s^3 + 3s^2 + (1 + k\tau)s + k = 0$

$$3(1 + k\tau) > 2k$$

$$\tau > \frac{2}{3} - \frac{1}{k}$$

试画出 $\tau - k$ 的关系曲线

# 李雅普诺夫直接方法（第二方法）

# 李雅普诺夫稳定性

---

- 1 基本概念
- 2 李雅普诺夫直接方法（第二方法）
- 3 构造李雅普诺夫函数的方法

# 基本概念

## 1.1 标量函数的定号性

**[定义 1-1]** 称标量函数  $V(x)$  **正定 (半正定)**: 若  $V(0) = 0$ , 且对任意非零  $x$ ,  $V(x) > 0$  ( $V(x) \geq 0$ )。

**[定义 1-2]** 称标量函数  $V(x)$  **负定 (半负定)**: 若  $-V(x)$  是正定 (半正定) 的。

**[定义 1-3]** 正定和半正定 (负定和半负定) 统称为**非负定 (非正定)**。无任何定号性称为**不定**。

# 基本概念

## 1.1 标量函数的定号性

- ◆ 注意,  $V(0) = 0$  是定号性的**必要**条件。在不引起混淆时, 可直接用  $V(x) > 0$  表示正定, 其余类推。
- ◆ 定号性可以是原点邻域上的**局部**性质, 如: 标量函数  $V(x) = [(x_1^2 + x_2^2) - 1](x_1^2 + x_2^2)$  在域  $\{\Omega \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  上是负定的。

# 基本概念

---

## 1.1 标量函数的定号性

例如，在二维空间中：

$$x_1^2 + x_2^2$$

$$(x_1 + x_2)^2$$

$$-(x_1^4 + x_2^2)$$

$$-x_1^2$$

$$x_1^2 - x_2^2$$



# 基本概念

---

## 1.1 标量函数的定号性

考虑二次型函数  $x^T A x$  的定号性,  $A$  是实对称矩阵

**[定理 1-1]** 实对称矩阵  $A$  是正定 (半正定) 的, 当且仅当所有特征值均大于 (大于等于) 零。

**[定理 1-2]** 实对称矩阵  $A$  是正定 (半正定) 的, 当且仅当所有主子式均大于 (大于等于) 零。

# 基本概念

## 1.1 标量函数的定号性

实对称矩阵  $A$  的各阶顺序主子式：

$$\pi_1 = a_{11}, \quad \pi_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$
$$\pi_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \quad \pi_n = |A|$$

# 基本概念

## 1.1 标量函数的定号性

**[定理 1-3 (赛尔维斯特判据)]** 实对称矩阵  $A$  为

- (1) **正定**当且仅当  $\pi_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$
- (2) **负定**当且仅当  $(-1)^k \pi_k > 0, k = 1, \dots, n$
- (3) 半正定的充要条件是所有主子式都大于等于 0

# 基本概念

## 1.1 标量函数的定号性

- 在判断矩阵  $A$  的正定性时, 可以将主子式简化为顺序主子式
- 在判断矩阵  $A$  的半正定性时, 不可以将主子式简化为顺序主子式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

# 李雅普诺夫稳定性

---

- 1 基本概念
- 2 李雅普诺夫直接方法（第二方法）
- 3 构造李雅普诺夫函数的方法

# 李雅普诺夫方法

---

## 2.2 第二方法（直接法）

**思想来源：**

**系统变化可以看成一种运动过程；  
运动过程伴随着某种能量的变化；  
稳定性意味着能量的单调消耗性；  
能量消耗反过来可以描述稳定性。**

**关键是：是否能找到这个能量函数！**

# 李雅普诺夫方法

## 2.2 第二方法（直接法）

设原点是系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2-1)$$

的平衡状态。  $V(\mathbf{x})$  是正定的标量函数（能量函数），它沿系统状态轨线对时间  $t$  的导数为

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2-2)$$

李雅普诺夫**第二方法**是根据  $V(\mathbf{x})$  和  $\dot{V}(\mathbf{x})$  的定号性，判别系统平衡状态的稳定性。

# 李雅普诺夫方法

## 2.2 第二方法（直接法）

**[定理 2-2]**  $V(x)$  正定,  $\dot{V}(x)$  负定, 则原点是渐近稳定的; 进而, 若  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

**[定理 2-3]**  $V(x)$  正定,  $\dot{V}(x)$  半负定, 则原点是稳定的; 此外, 若  $\dot{V}(x)$  除原点外沿状态轨线不恒为零, 则原点是渐近稳定的; 再进一步, 若  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

**[定理 2-4]**  $V(x)$  正定,  $\dot{V}(x)$  也正定, 则原点是不稳定的。



# 李雅普诺夫方法

**[例 2-3]** 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 7x_2 \end{cases}$$

**解：原点是唯一平衡点。 考虑**

$$V(\mathbf{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2 > 0$$

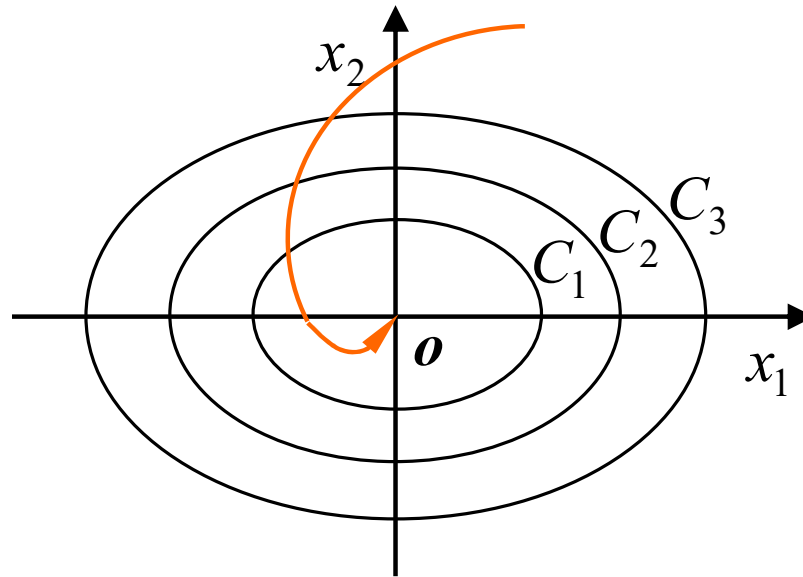
**得**

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -6x_1^4 - 56x_2^2 < 0$$

**当  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , 故原点全局渐近稳定。**

# 李雅普诺夫方法

下图是该例中  $V(x) = C$  ( $C_3 > C_2 > C_1 > 0$ ) 的图形，它是一族包围原点的、闭的、随  $C \rightarrow 0$  向原点退缩的椭圆。



# 李雅普诺夫方法

---

- ◆ 以上均为充分条件。某 $V(x)$ 不满足定理条件时，不能下结论。
- ◆ 若 $V(x)$ 代表广义能量，则 $\dot{V}(x)$ 代表广义功率。 $\dot{V}(x) < 0$ ，说明沿状态轨线运动是消耗能量的。
- ◆ 条件可以在平衡点的邻域内满足，存在收敛域或者吸收域。

# 李雅普诺夫方法

**[例 2-4]** 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{2x_1 + 2x_2}{(1+x_1^2)^2} \end{cases}$$

**解：** 原点是唯一平衡点。由第一方法判定它是渐近稳定的。

# 李雅普诺夫方法

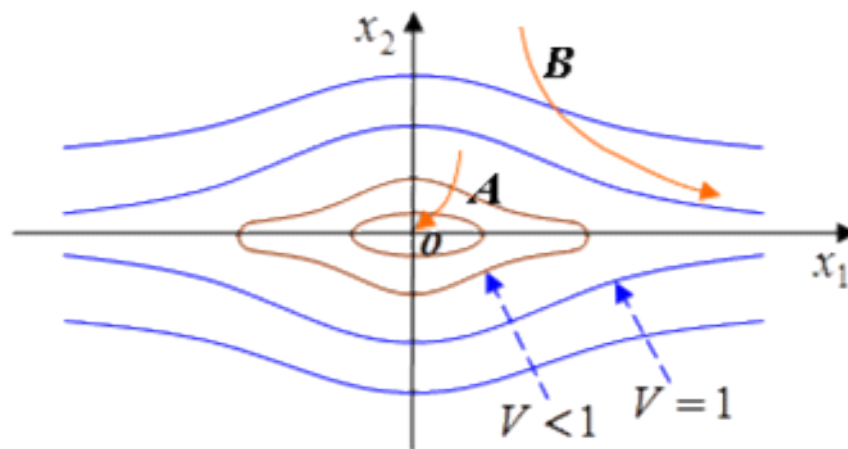
考虑 
$$V(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2 > 0$$

则 
$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{4x_1^2}{(1+x_1^2)^4} - \frac{4x_2^2}{(1+x_1^2)^2} < 0$$

**所以原点是渐近稳定的。但当  $x_1 \rightarrow \infty, x_2 \rightarrow 0$  时,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow 1$ ,  
即  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  不成立, 不能保证全局渐近稳定。**

# 李雅普诺夫方法

下图是该例中  $V(x) = C$  的图形。当  $C < 1$  时，它是一族包围原点的、闭的、随  $C \rightarrow 0$  向原点退缩的曲线。但当  $C \geq 1$  时，曲线不再是闭的。从  $A$  ( $C < 1$ ) 出发的轨线趋向原点；而从  $B$  出发 ( $C > 1$ ) 的轨线沿着  $x_1$  轴趋向无穷远，尽管始终有  $V > 0$ ,  $\dot{V} < 0$ 。



# 李雅普诺夫方法

**[例 2-5]** 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

试选第 1 个函数

取  $V(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2 > 0$

得  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 2x_1x_2 - 2x_2^2$       不定，不能判定。

# 李雅普诺夫方法

试选第 2 个函数

取  $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 > 0$

得  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -2x_2^2$  半负定，故原点稳定。

若  $\dot{V}(\mathbf{x}) \equiv 0$ ，则  $x_2 = \dot{x}_2 \equiv 0$ ，代入原方程得  $x_1 \equiv 0$ ，因而

$\dot{V}(\mathbf{x}) \equiv 0$  仅发生在原点处。而当  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时， $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ ，  
所以原点全局渐近稳定。

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2$$



# 李雅普诺夫方法

试选 3 个函数

取  $V(\mathbf{x}) = 1.5x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 = \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} > 0$

得  $\dot{V}(\mathbf{x}) = -x_1^2 - x_2^2 < 0$

且当  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$  时,  $V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , 所以原点全局渐近稳定。

# 李雅普诺夫方法

---

- ◆ 此例说明，选择不同的  $V$  函数，可能得到不同的结果，但得到的结论是不矛盾的。找到“好”的  $V$  函数，需要经验和运气。

# 李雅普诺夫方法

**[例 2-6]** 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2^4 \\ \dot{x}_2 = -x_2^3 + x_1^4 \end{cases}$$

**解：原点是平衡点但不唯一。线性化方法失效。**

**取** 
$$V(\mathbf{x}) = 0.5(x_1^2 + x_2^2) > 0$$

**则** 
$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -x_1^4(1 - x_2) - x_2^4(1 - x_1)$$

**在  $x_2 < 1$  且  $x_1 < 1$  的区域内（原点是该区域的内点）， $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ 。**

**该系统在原点处是渐近稳定的。**

# 李雅普诺夫方法

---

- ◆ 该例中，当  $\|x\| \rightarrow \infty$  时， $V(x) \rightarrow \infty$ ，但不能得出全局渐近稳定的结论，因为  $\dot{V}(x) < 0$  仅在局部区域成立。

# 李雅普诺夫方法

**[例 2-7]** 判断下述系统在原点处的稳定性

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = (x_1^2 + x_2^2)x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

**解：** 原点是平衡点但不唯一。

# 李雅普诺夫方法

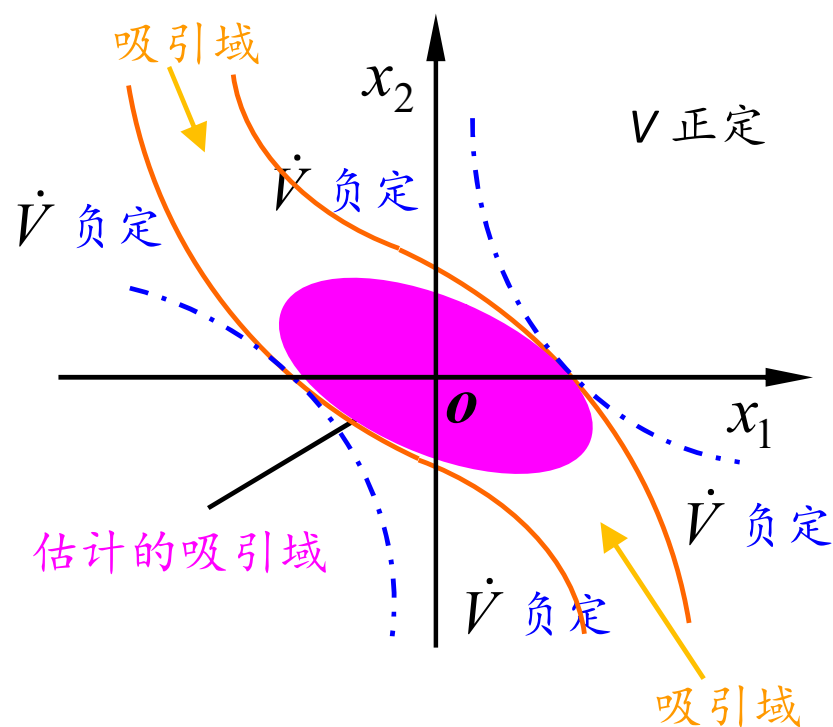
选  $V(\mathbf{x}) = (x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 > 0$

则 
$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= 2(x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 4x_2\dot{x}_2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2)[2x_1(x_1 + 3x_2) - 1]\end{aligned}$$

显然,  $\dot{V}(\mathbf{x})$  在  $2x_1(x_1 + 3x_2) < 1$  的区域内 (原点为该区域的内点) 负定, 所以原点是渐近稳定的。

# 李雅普诺夫方法

该例中， $V(x)$  在全空间是正定的， $\dot{V}(x)$  在上图中蓝色点划线（双曲线）区域内是负定的，但该区域并不都是原点的吸引域。通常，确定吸引域是困难的。



# 李雅普诺夫方法

我们可以在  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  的边界上求  $V$  的最小值  $V_{\min}$  , 则  $\{\mathbf{x} \mid V(\mathbf{x}) < V_{\min}\}$  就是一个保守的吸引域 (比实际的小)。

由  $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$  , 即  $2x_1(x_1 + 3x_2) = 1$  , 得  $x_2 = \frac{1}{3}(\frac{1}{2x_1} - x_1)$

$$V(\mathbf{x})|_{\dot{V}(\mathbf{x})=0} = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = \frac{2}{3}\left(x_1 - \frac{1}{2\sqrt{2}x_1}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow V_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

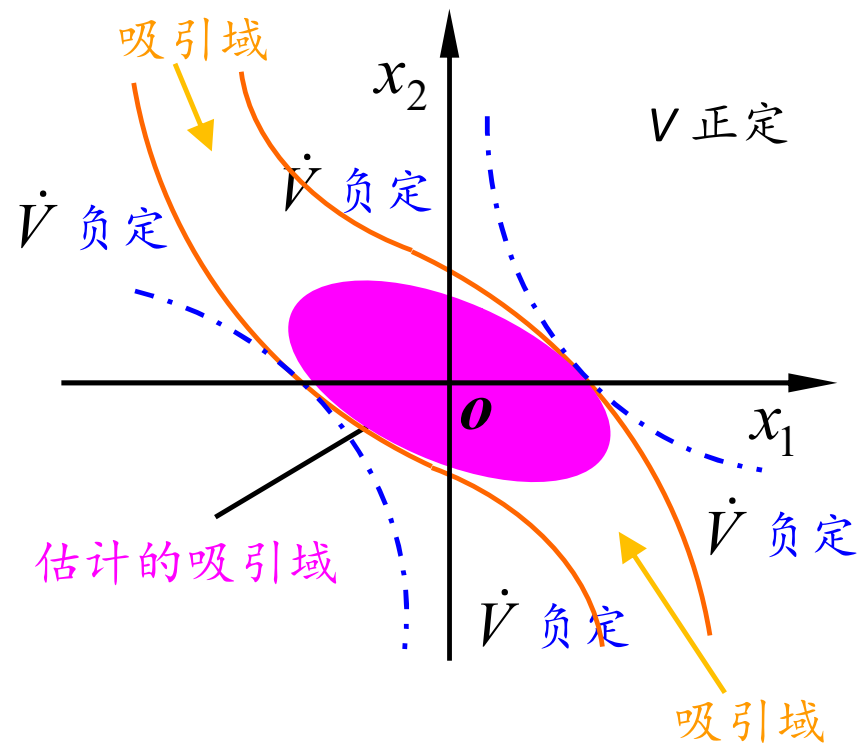


# 李雅普诺夫方法

得到一个保守的吸引域：

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

如图中粉色区域（椭圆）所示，橙色实线所示是仿真所得的实际（最大）吸引域。



# 李雅普诺夫方法

## 本节小结

◆ 李雅普诺夫第一方法(间接法):

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{在 } x_e \text{ 处线性化} \quad \dot{y} = A y$$

$A$  的特征值实部均为**负**, 则  $x_e$  为渐近稳定平衡点。

$A$  有实部为**正**的特征值, 则  $x_e$  为不稳定平衡点

# 李雅普诺夫方法

## 本节小结

◆ 李雅普诺夫第二方法（直接法）：

[1]  $V(x)$  正定,  $\dot{V}(x)$  负定, 则原点是渐近稳定的; 进而, 若  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

[2]  $V(x)$  正定,  $\dot{V}(x)$  半负定, 则原点是稳定的; 此外, 若  $\dot{V}(x)$  除原点外沿状态轨线不恒为零, 则原点是渐近稳定的; 再进一步, 若  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,  $V(x) \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

[3]  $V(x)$  正定,  $\dot{V}(x)$  也正定, 则原点是不稳定的。

# 李雅普诺夫稳定性

- 1 基本概念
- 2 李雅普诺夫方法
- 3 构造李雅普诺夫函数的方法

# 构造李雅普诺夫函数的方法

---

对于非线性系统，**没有**一种构造李雅普诺夫函数的**通用方法**。人们通常凭**经验和技巧**来选取李雅普诺夫函数，最常见的是**二次型函数**，等价于找正定矩阵。

还有些方法适用于一些特定情形，如**克拉索夫斯基方法**、**变量梯度法**和**偶函数法**等方法。

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.1 克拉索夫斯基方法 (Krasovskii)

考虑如下非线性系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (3-1)$$

其中  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  存在连续偏导数。定义雅可比 (Jacobi) 矩阵:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \triangleq \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

# 构造李雅普诺夫函数的方法

---

## 3.1 克拉索夫斯基方法 (Krasovskii)

**[定理 3-1]** 设  $f(0) = 0$ ,  $f(x)$  存在连续偏导数, 且在原点的一个邻域上,  $F^T(x) + F(x)$  负定 (正定), 则在此邻域内除原点外,  $f(x) \neq 0$ 。

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.1 克拉索夫斯基方法 (Krasovskii)

证明：反设 $\tilde{x} \neq 0$ 是此邻域内的点使得 $f(\tilde{x}) = 0$ ，则有

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{x}^T f(\tilde{x}) = \tilde{x}^T \int_{\sigma=0}^{\sigma=1} F(\sigma \tilde{x}) d\sigma \tilde{x} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{x}^T \int_{\sigma=0}^{\sigma=1} [F^T(\sigma \tilde{x}) + F(\sigma \tilde{x})] d\sigma \tilde{x} \neq 0 \end{aligned}$$

矛盾，故反设不成立，证毕。



# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.1 克拉索夫斯基方法 (Krasovskii)

**[定理 3-2]** 设原点是  $\dot{x} = f(x)$  的平衡状态, 且  $f(x)$  存在连续偏导数。若  $F^T(x) + F(x)$  负定, 则原点是渐近稳定的。进一步, 当  $\|x\| \rightarrow \infty$  时, 有  $\|f(x)\| \rightarrow \infty$ , 则原点是全局渐近稳定的。

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.1 克拉索夫斯基方法 (Krasovskii)

证明：取  $V(x) = \|f(x)\|^2 = f^T(x)f(x)$

则 
$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{f}^T(x)f(x) + f^T(x)\dot{f}(x) \\ &= f^T(x)[F^T(x) + F(x)]f(x)\end{aligned}$$

若  $F^T(x) + F(x)$  负定, 则由[定理 3-1]得

$$V(x) > 0, \quad \dot{V}(x) < 0。$$

证毕。

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.1 克拉索夫斯基方法 (Krasovskii)

- ◆ Krasovskii 方法给出的结论仍然是充分条件，当条件不满足时，也不能下结论。
- ◆ 也可取  $V(x) = f^T(x)P f(x)$  ,  $P > 0$  ; 称为 **Jacobi 方法**。
- ◆ 思考：若  $F^T(x) + F(x)$  正定，能下结论吗？

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.1 克拉索夫斯基方法 (Krasovskii)

**[例 3-1]** 用 Krasovskii 方法判定下述系统原点的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = 0.5x_1^2 - x_2 \end{cases}$$

**解：**原点是平衡点但不唯一，由第一方法可判定它是渐近稳定的。

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.1 克拉索夫斯基方法 (Krasovskii)

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_2 - 1 & x_1 \\ x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

是对称矩阵，其顺序主子式为：

$$\Delta_1 = x_2 - 1, \quad \Delta_2 = 1 - x_2 - x_1^2$$

在  $x_2 < 1 - x_1^2$  的域上（原点是该域的内点），

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0$$

故  $F^T(x) + F(x)$  在该域上负定，所以原点是渐近稳定的。

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.1 克拉索夫斯基方法 (Krasovskii)

**[例 3-2]** 用 Krasovskii 方法判定下述系统原点的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

**解：**原点是唯一平衡点，由第一方法可判定它是渐近稳定的。

$$F(x) = \begin{bmatrix} -5 & 2x_2 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}, \quad F^T(x) + F(x) = \begin{bmatrix} -10 & 2x_2 + 1 \\ 2x_2 + 1 & -2-6x_2^2 \end{bmatrix}$$

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.1 克拉索夫斯基方法 (Krasovskii)

$$F^T(x) + F(x) = \begin{bmatrix} -10 & 2x_2 + 1 \\ 2x_2 + 1 & -2 - 6x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = -10 < 0, \quad \Delta_2 = 20(1 + 3x_2^2) - (2x_2 + 1)^2 = 56x_2^2 - 4x_2 + 19 > 0$$

**故  $F^T(x) + F(x)$  负定, 且当  $\|x\| \rightarrow \infty$  时,**

$$\|f\|^2 = (-5x_1 + x_2^2)^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2 \rightarrow \infty$$

**所以原点是全局渐近稳定的。**

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.2 变量梯度法 (Schultz, Gibson)

思路：先找 $\dot{V}(\mathbf{x})$ ，后求 $V(\mathbf{x})$ 。

(1) 设定 $V(\mathbf{x})$ 的梯度  $\text{grad } V$ ：

$$[\text{grad } V]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix} \triangleq [\nabla_1 \quad \cdots \quad \nabla_n]$$

(2) 由  $\text{grad } V$  确定 $\dot{V}(\mathbf{x})$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = [\text{grad } V]^T \dot{\mathbf{x}} = \nabla_1 f_1(\mathbf{x}) + \cdots + \nabla_n f_n(\mathbf{x})$$



# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.2 变量梯度法 (Schultz, Gibson)

(3) 由  $\dot{V}(\mathbf{x})$  求  $V(\mathbf{x})$

$$V(\mathbf{x}) = \int_{V(0)}^{V(\mathbf{x})} dV(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} [\text{grad} V]^T d\mathbf{x} = \int_0^{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^n \nabla_i dx_i$$

这是一个沿解曲线的曲线积分，当被积函数是某个标量场的梯度时，结果与积分路径无关。

(4) 构成梯度，满足条件  $\frac{\partial \nabla_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \nabla_j}{\partial x_i}, \quad i \neq j$

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.2 变量梯度法 (Schultz, Gibson)

### (5) 选择一条简单的积分路径

上述条件满足时，选择按坐标的逐次积分是最方便的：

$$V(\mathbf{x}) = \int_0^{x_1} \nabla_1 dx_1 + \int_0^{x_2} \nabla_2 dx_2 + \cdots + \int_0^{x_n} \nabla_n dx_n$$

注意， $\int_0^{x_1} \nabla_1 dx_1$  时， $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$

$$\int_0^{x_2} \nabla_2 dx_2 \text{ 时， } x_1 = x_1, x_3 = x_4 = \cdots = x_n = 0$$

余类推。

可以选择合适的  $\nabla_i$  使得该积分为正定函数。

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.2 变量梯度法 (Schultz, Gibson)

**[例 3-3]** 用变量梯度法判定下述系统平衡状态的稳定性。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

**解：** 原点是唯一平衡点，由第一方法可判定它是渐近稳定的。

**(1) 设梯度向量为：**

$$\text{grad} V(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \nabla_1 \\ \nabla_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.2 变量梯度法 (Schultz, Gibson)

(2) 计算导函数:  $\dot{V}(\mathbf{x}) = [\text{grad } V]^T \dot{\mathbf{x}}$

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)(-x_1 + 2x_1^2x_2) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)(-x_2) \\ &= -a_{11}x_1^2(1 - 2x_1x_2) - a_{22}x_2^2 - (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + 2a_{12}x_1^2x_2^2\end{aligned}$$

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.2 变量梯度法 (Schultz, Gibson)

(3) 由  $\frac{\partial \nabla_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla_2}{\partial x_1}$  , 并假定  $a_{ij}$  均为常数, 可得:

$$a_{12} = a_{21}$$

取  $a_{12} = a_{21} = 0$  ,  $a_{11} = a_{22} = 1$  , 得到:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -x_1^2(1 - 2x_1x_2) - x_2^2$$

若  $1 - 2x_1x_2 > 0$  , 则  $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$  。(注意, 原点是  $1 - 2x_1x_2 > 0$  成立的范围的内部点)。

# 构造李雅普诺夫函数的方法

## 3.2 变量梯度法 (Schultz, Gibson)

(4) 按坐标积分求  $V(x)$

$$V(x) = \int_0^{x_1} x_1 \, dx_1 + \int_0^{x_2} x_2 \, dx_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) > 0$$

(5) 综上,  $V(x) > 0$ , 且在原点的一个邻域内有  $\dot{V}(x) < 0$ ; 所以原点是渐近稳定的。