

## ❖ 基本内容

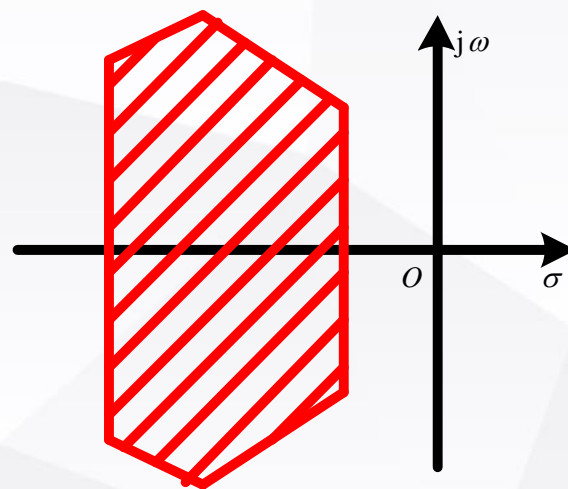
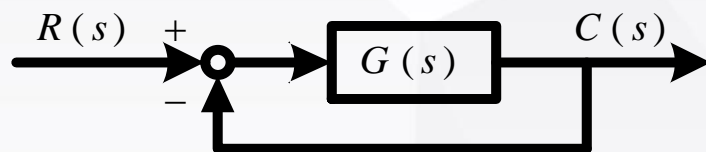
- 根轨迹及其性质
- 根轨迹的绘制
- 根轨迹校正

# 根轨迹及其性质

# 根轨迹方法简介

好的控制系统分析方法应具备如下特点：

- 准确反映实际系统性能
- 方法简便易用
- 能指出闭环极点是否位于给定区域
- 便于预测闭环系统性能
- 能指出如何变化参数以改善性能



# 根轨迹方法简介

## 各种分析方法的比较

	直接方法 -解微分方程	间接方法 -代数稳定判据	间接方法 -频率响应法
优点	<ul style="list-style-type: none"><li>◆ 概念直观，直接反映系统动、静态性能</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>◆ 便于分析绝对稳定性</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>◆ 易于预测闭环性能</li><li>◆ 可以测量相对稳定性</li><li>◆ 易于通过调整开环频率响应提高闭环性能</li></ul>
缺点	<ul style="list-style-type: none"><li>◆ 计算复杂</li><li>◆ 难以判断性能随参数的变化</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>◆ 无法分析相对稳定性</li><li>◆ 难以分析闭环极点是否位于给定区域</li><li>◆ 无法为参数选取提供线索</li></ul>	<ul style="list-style-type: none"><li>◆ 无法通过开环参数直接预测闭环极点的位置</li></ul>

# 根轨迹方法简介

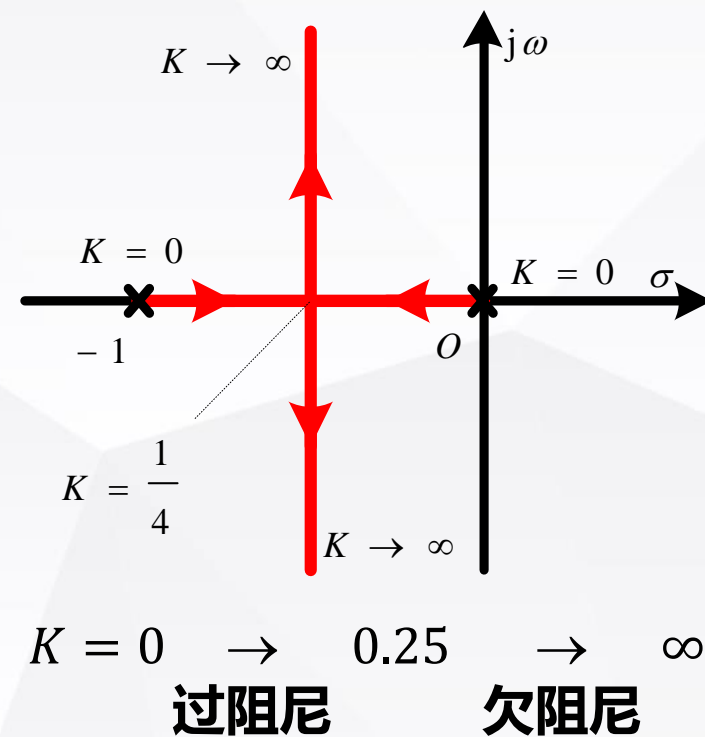
根轨迹：**闭环特征值**作为**开环增益**的函数所画出的曲线

例 画出闭环传递函数的根轨迹

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

解:

- 闭环传函  $G_{CL}(s) = \frac{K}{s^2 + s + K}$
- 闭环特征方程:  $s^2 + s + K = 0$
- K 变化  $\rightarrow$  闭环极点变化
- 闭环极点:  $s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4K}$



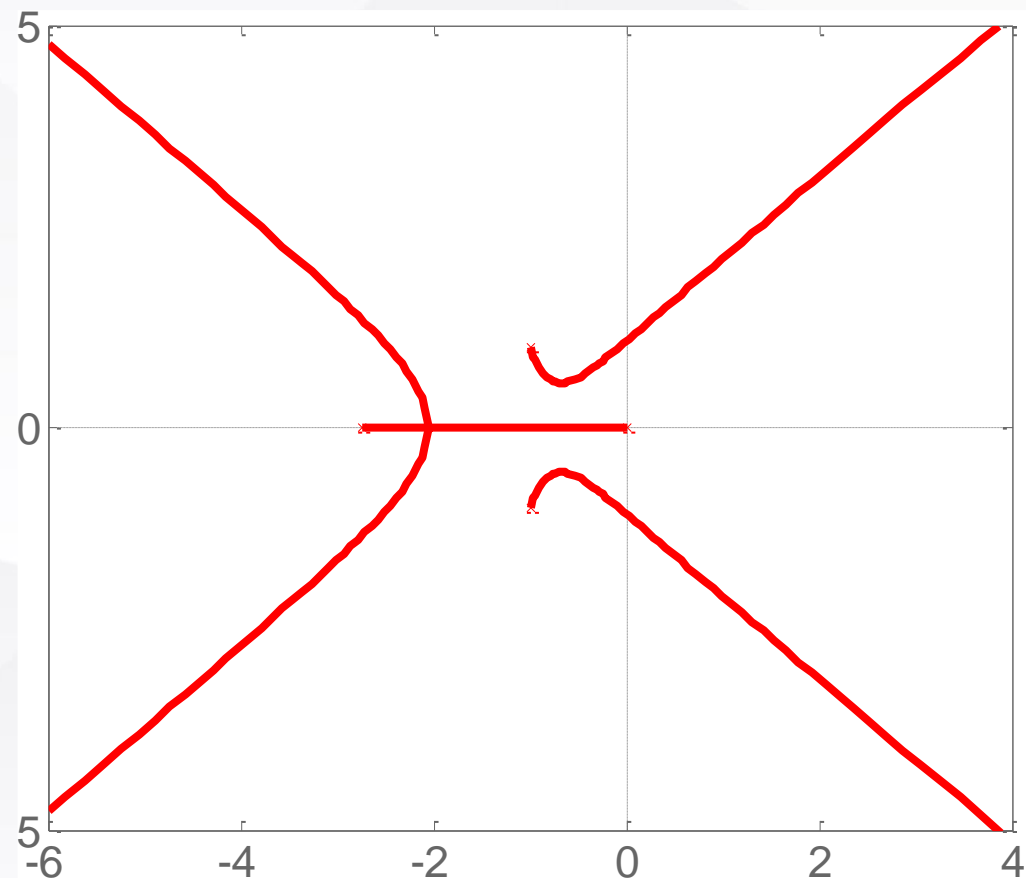
# 根轨迹方法简介

例：用MATLAB软件绘制根轨迹

$$G(s)F(s) = \frac{K}{s(s + 2.73)(s^2 + 2s + 2)}$$
$$= K \frac{1}{s^4 + 4.73s^3 + 7.56s^2 + 5.46s}$$

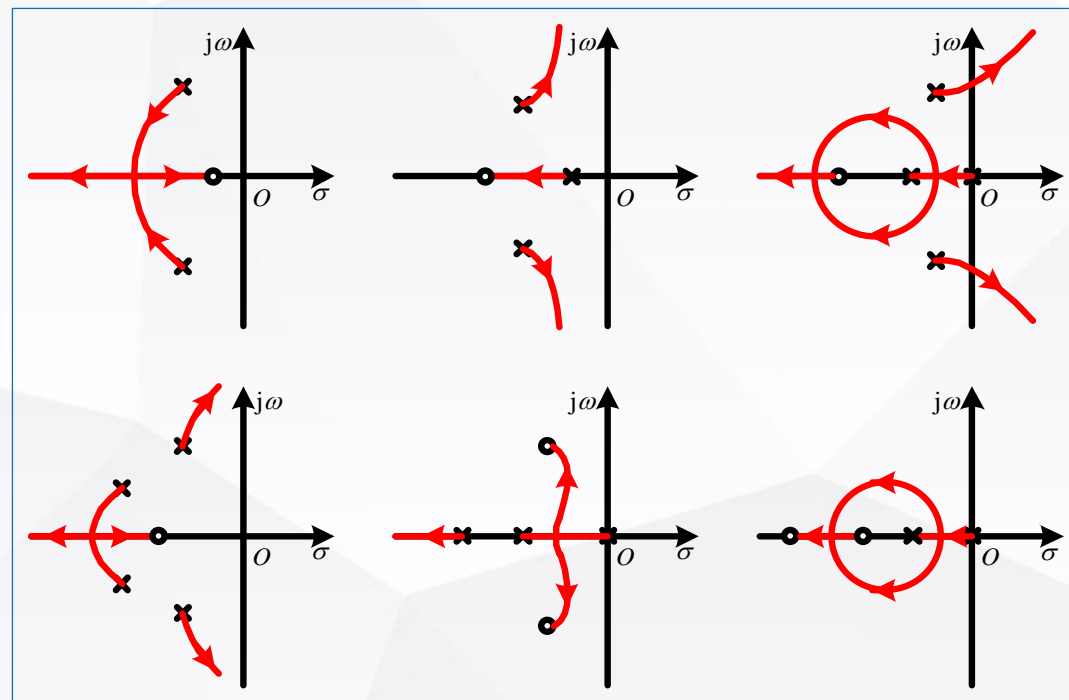
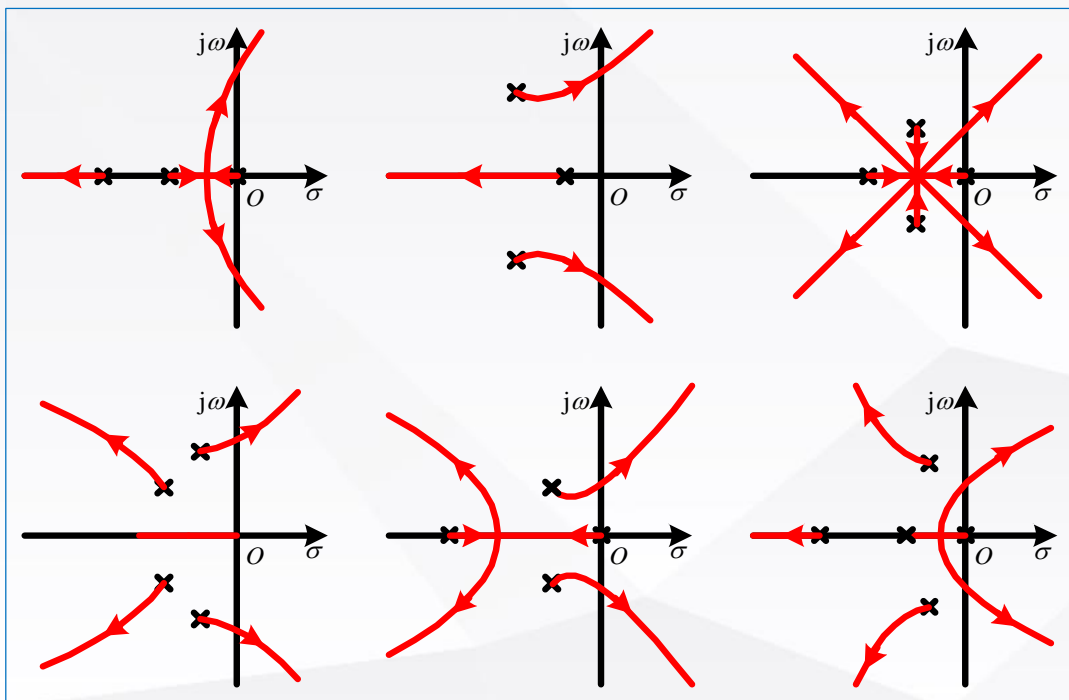
用如下命令

```
num=[1];  
den=[1 4.73 7.56 5.46 0];  
rlocus(num,den)
```



# 根轨迹方法简介

## ◆ 一些典型的根轨迹模式



# 根轨迹方法简介

---

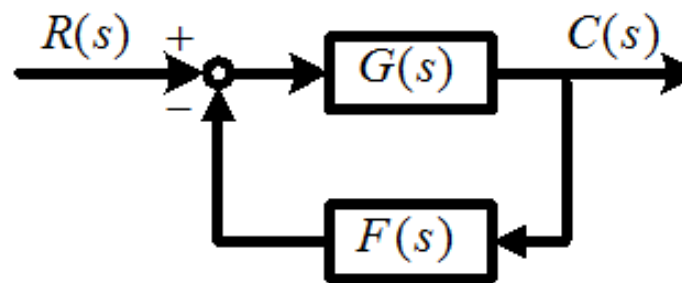
- ◆ 为何要研究根轨迹？ 易于预测闭环性能
  - ◆ 如何研究根轨迹？
    - 利用相角和幅值条件分析根轨迹的性质
    - 利用根轨迹的性质绘制草图
    - 基于根轨迹分析控制系统
- 
1. W. Evans, "**Graphical Analysis** of Control Systems",  
Trans. AIEE, 67 (1): 547–551, 1948.
  2. W. Evans, "**Control Systems Synthesis** by Root Locus Method",  
Trans. AIEE, 69 (1): 66–69, 1950.



# 根轨迹条件

## 相角和幅值条件

- ◆ 如图对于给定的反馈控制系统, 考察闭环极点随开环增益的变化:



- 由闭环传递函数

$$G_{CL}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

可知所有闭环极点均满足

$$G(s)F(s) = -1$$

由此得出根轨迹条件:

- 相角条件 (决定根轨迹的形状)

$$\arg[G(s)F(s)] = \pm(2k + 1)\pi, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

- 幅值条件 (决定闭环极点在根轨迹上的位置)

$$|G(s)F(s)| = 1$$

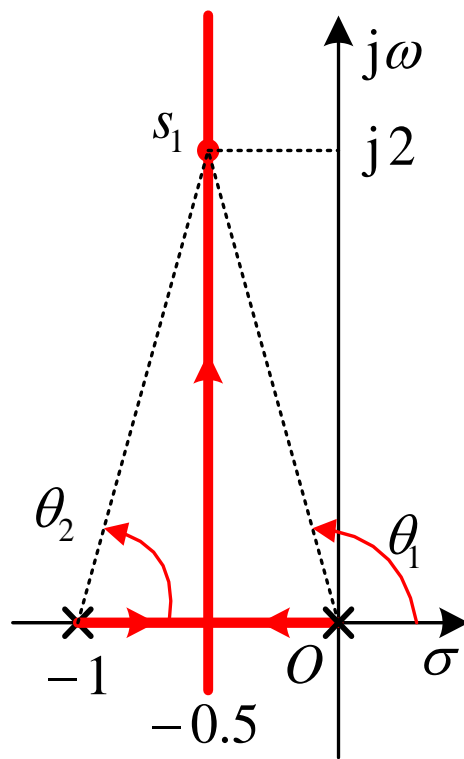
# 根轨迹条件

例1 验证下面例子是否满足幅值和相角条件

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad \text{选 } s_1 = -0.5 + j2$$

(i) 检验相角条件

$$\begin{aligned} \arg G(s_1) &= \arg \frac{1}{s_1(s_1 + 1)} \\ &= -\arg(s_1) - \arg(s_1 + 1) \\ &= -(\theta_1 + \theta_2) \\ &= -180^\circ \end{aligned}$$



(2) 检验幅值条件

$$\begin{aligned} &|G(-0.5 + j2)| \\ &= \frac{K}{| -0.5 + j2 | | -0.5 + j2 + 1 |} \\ &= \frac{4K}{17} = 1 \end{aligned}$$

可知该闭环极点对应  $K = \frac{17}{4}$

# 根轨迹条件

## ◆ 利用幅值条件可以确定:

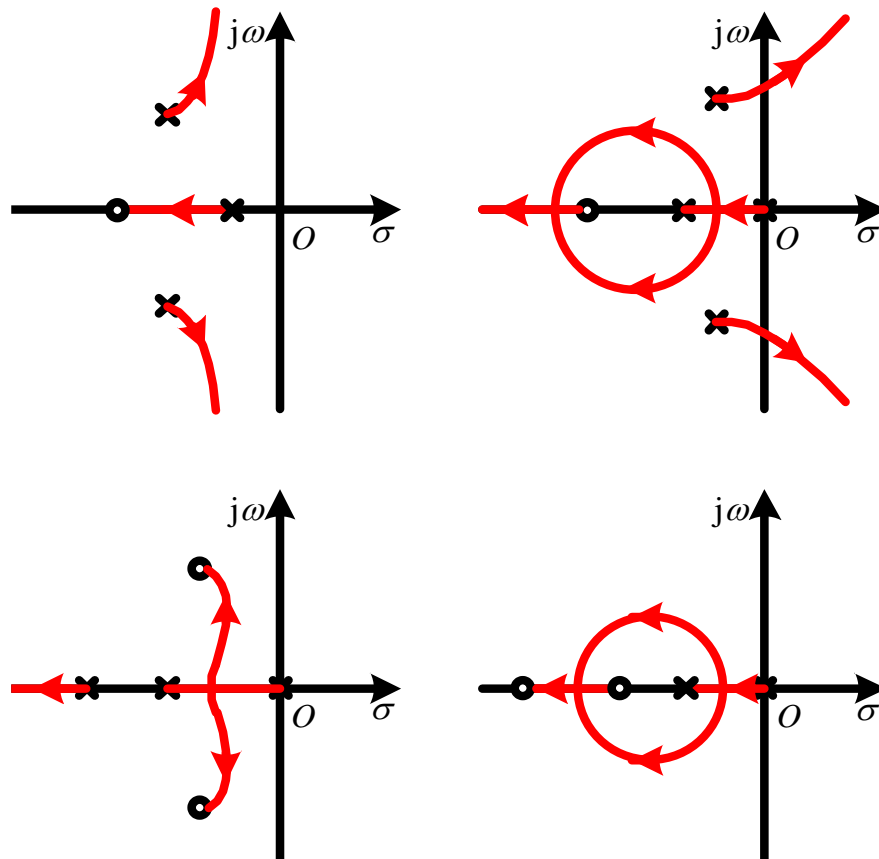
- 根轨迹的分支数
- 根轨迹的起点和终点

## ◆ 利用相角条件可以确定:

- 根轨迹在实轴上的分布
- 根轨迹趋于无穷时的渐近线
- 根轨迹的入射和出射方向

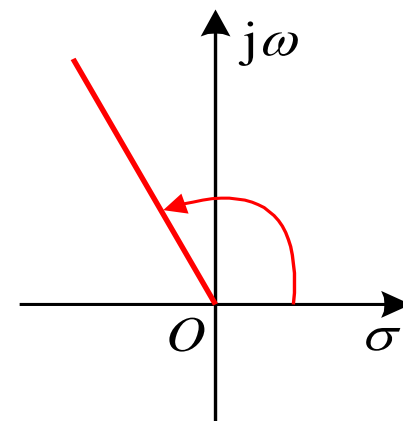
## ◆ 利用幅值和相角条件共同确定:

- 根轨迹的会合/分离点



约定1: 正实轴的相角为  $0^\circ$ , 正方向为逆时针方向

约定2: 系统为负反馈连接方式, 只考虑  $K \geq 0$



# 根轨迹的性质

将闭环传递函数写成如下标准形式：

$$1 + G(s)F(s) = 1 + K \frac{B(s)}{A(s)} = 1 + \frac{K(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = 0$$

其中  $A(s), B(s)$  是首一多项式，开环传递函数 ( $n > m$ ) 包含  $n$  个极点  $p_1, \cdots, p_n$  和  $m$  个零点  $z_1, \cdots, z_m$

- 显然，若  $1 + G(s)F(s) = 0$ ，则必有  $1 + G(s^*)F(s^*) = 0$

故复闭环极点共轭成对出现，根轨迹关于实轴对称，只需考虑s上半平面部分

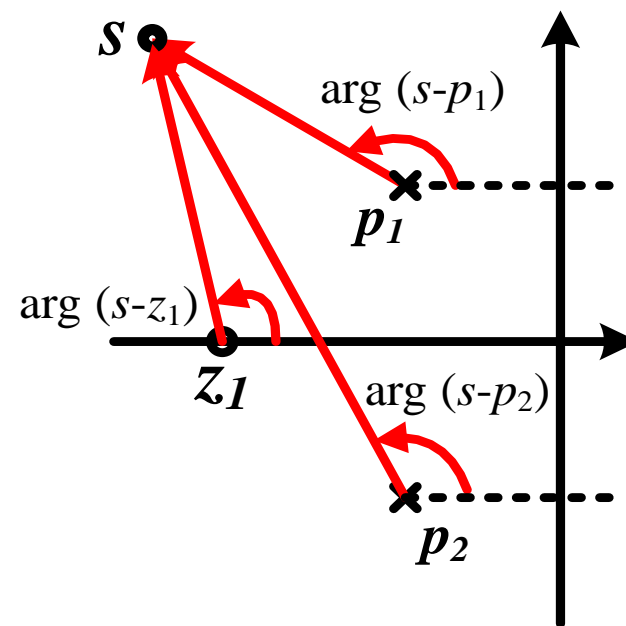
# 根轨迹的性质

- 根轨迹条件可变形为

$$1 + \frac{K(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = 0 \Rightarrow \frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = -\frac{1}{K}$$

- 根轨迹满足的相角条件可以表示为:

$$\begin{aligned} \arg[G(s)F(s)] &= \sum_{i=1}^m \arg(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \arg(s - p_j) \\ &= \pm(2k + 1) \times 180^\circ \end{aligned}$$



# 根轨迹的性质

## 性质1. 起止点和分支数

根轨迹条件: 
$$\frac{(s - z_1) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} = -\frac{1}{K}$$

◆ 起点: 对应于  $K = 0$ , 等式右边趋于无穷

因此所有开环极点  $p_1, \cdots, p_n$  都是根轨迹的起始点

◆ 终点: 对应于  $K = \infty$ , 等式右边趋于零

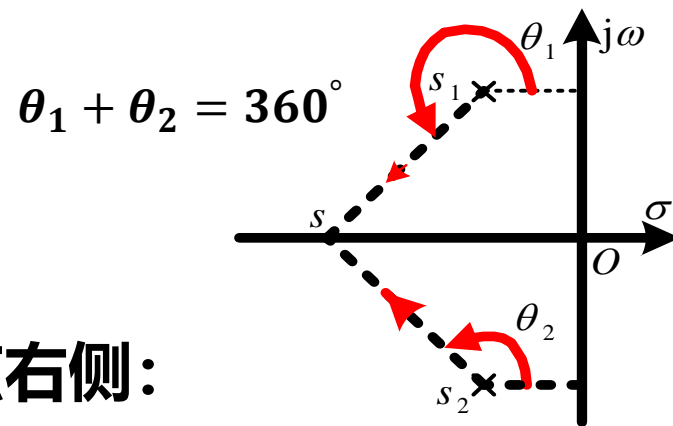
因此所有开环零点  $z_1, \cdots, z_m$  都是根轨迹的 (有限) 终点,  
此外, 由于  $m < n$ ,  $s = \infty$  也是终点

◆ 分支数: 由于根轨迹有  $n$  个起点, 必然有  $n$  个分支,  
其中  $m$  个分支趋于零点,  $n - m$  个分支趋于无穷

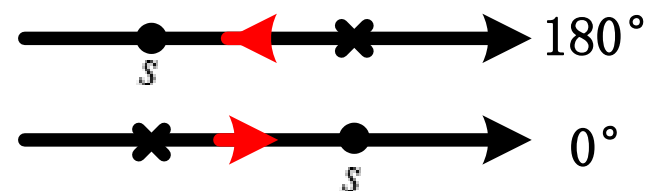
# 根轨迹的性质

## 性质2. 实轴上的根轨迹

- 共轭零极点对相角条件无贡献
- 假设有 $N$ 个零极点位于实轴,  $\ell$ 个零极点在测试点右侧:



$$\begin{aligned} & \arg[G(s)F(s)] \\ &= \sum_{i=1}^m \arg(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \arg(s - p_j) \end{aligned}$$



$$= \ell \times 180^\circ + (N - \ell) \times 0^\circ = \pm(2k + 1) \times 180^\circ \Rightarrow \ell \text{ 必为奇数}$$

### ◆ 画出实轴上的根轨迹



# 根轨迹的性质

## 性质3. 当 $s \rightarrow \infty$ 时的渐近线

### ◆ 渐近线的相角

- 当  $s \rightarrow \infty$  时,  $s$  与所有开环零极点连线相角趋于相同, 设为  $\gamma$
- 根据相角条件

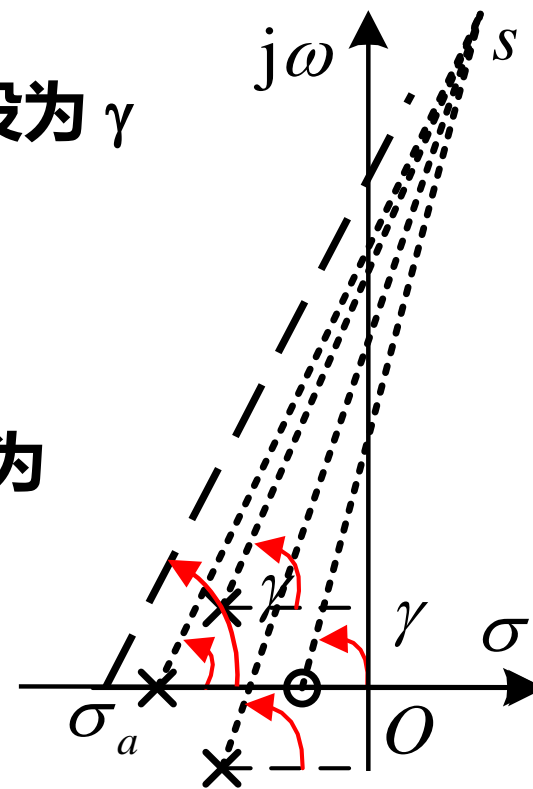
$$\arg[G(s)F(s)]|_{s \rightarrow \infty} = (m - n)\gamma = \pm(2k + 1)\pi$$

可知, 共有  $n - m$  条不同的渐近线, 它们与实轴的夹角为

$$\gamma = \frac{-(2k + 1)\pi}{n - m} \quad k = 0, 1, \dots, n - m - 1$$

### ◆ 渐近线与实轴的交点

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

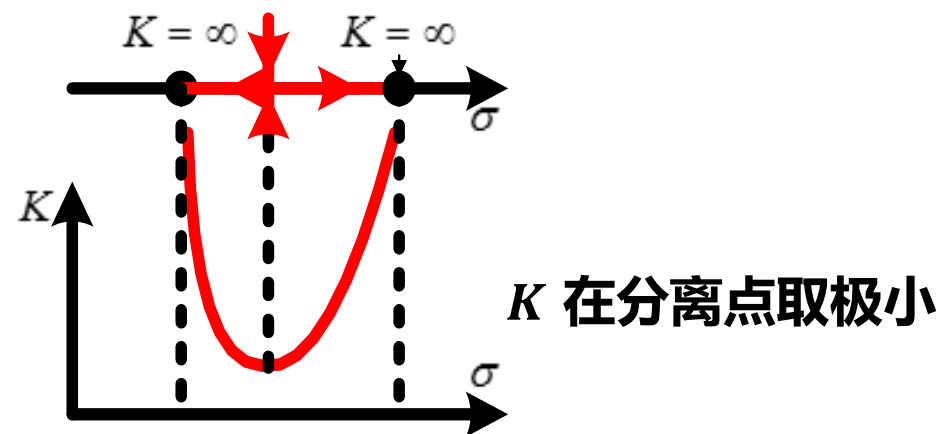
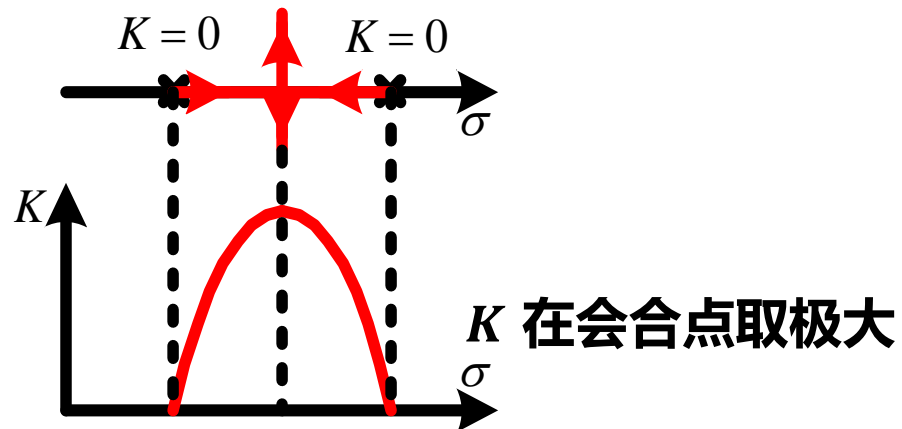




# 根轨迹的性质

## 性质4. 分离点和会合点

### ◆ 实轴上的分离点和会合点



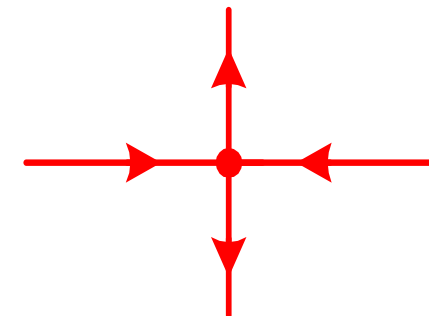
- 根据闭环系统特征多项式:  $A(s) + KB(s) = 0 \Rightarrow K = -A(s)/B(s)$

得到必要条件: 
$$\frac{dK}{ds} = \frac{d}{ds} \left[ -\frac{A(s)}{B(s)} \right] = \frac{A(s)B'(s) - A'(s)B(s)}{B^2(s)} = 0$$

# 根轨迹的性质

## 性质4. 分离点和会合点

等价证明： 分离点和会合点对应于闭环系统特征多项式有重根



- 根据闭环系统特征多项式:  $f(s) = A(s) + KB(s) = 0$  (1)

- 重根满足  $f'(s) = A'(s) + KB'(s) = 0 \Rightarrow K = -\frac{A'(s)}{B'(s)}$  (2)

- 式(2)代入式(1) 给出  $A(s)B'(s) - A'(s)B(s) = 0$  (3)

- 等价于:  $\frac{dK}{ds} = \frac{d}{ds} \left[ -\frac{A(s)}{B(s)} \right] = \frac{A(s)B'(s) - A'(s)B(s)}{B^2(s)} = 0$  (4)

充分性： 还需要验证对应的  $K > 0$

**补充公式：**  $\sum_{j=1}^n \frac{1}{d-p_j} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{d-z_i}$

# 根轨迹的性质

例：求分离点和会合点，其中开环传函为  $G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$

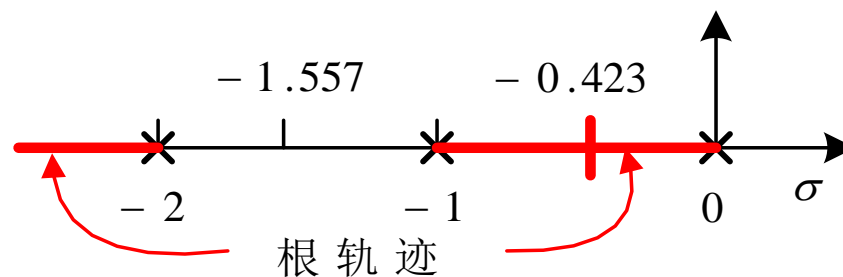
解：• 闭环特征方程为  $K = -s(s+1)(s+2) = -s^3 - 3s^2 - 2s$

•  $\frac{dK}{ds} = -3s^2 - 6s - 2 = 0 \Rightarrow s = -0.423, -1.577$

• 对于  $s = -0.423$   $K = -s(s+1)(s+2)|_{s=-0.423} = 0.385 > 0$

• 对于  $s = -1.577$   $K = -s(s+1)(s+2)|_{s=-1.577} = -0.385 < 0$

• 于是  $s = -0.423$  是会合点, 且容易验证  $-1.557$  不在根轨迹上



• 思考：三重根情况？

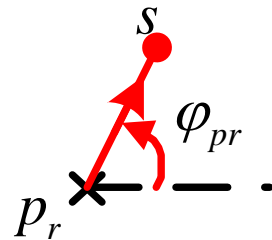
# 根轨迹的性质

## 性质5. 复极点的出射角和复零点的入射角

• 思考：重根情况？

### ◆ 复极点 $p_r$ 的出射角

- 在其附近取测试点 $s$ ，应当满足

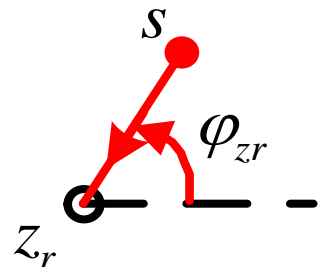


$$\arg G(s)F(s) = \sum_{i=1}^m \arg(p_r - z_i) - \varphi_{pr} - \sum_{j \neq r} \arg(p_r - p_j) = \pm(2k + 1)\pi$$

得到计算公式：  $\varphi_{pr} = \pm(2k + 1)\pi - \sum_{j \neq r} \arg(p_r - p_j) + \sum_{i=1}^m \arg(p_r - z_i)$

### ◆ 复零点 $z_r$ 的入射角

- 在其附近取测试点 $s$ ，应当满足



$$\arg G(s)F(s) = \sum_{i \neq r} \arg(z_r - z_i) + \varphi_{zr} - \sum_{j=1}^n \arg(z_r - p_j) = \pm(2k + 1)\pi$$

得到计算公式：  $\varphi_{zr} = \pm(2k + 1)\pi + \sum_{j=1}^n \arg(z_r - p_j) - \sum_{i \neq r} \arg(z_r - z_i)$

# 根轨迹的性质

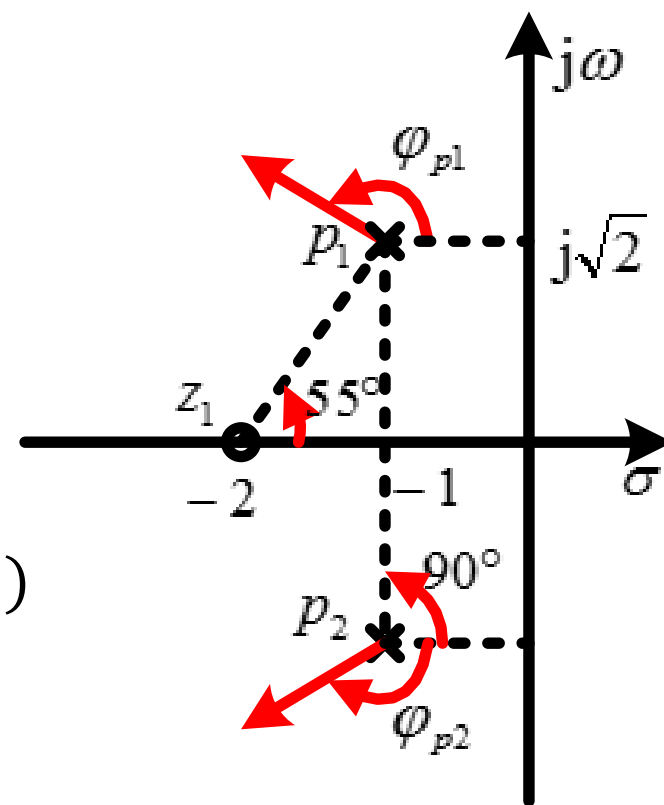
例： 求出射角  $G(s)F(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+3}$

解： 开环极点为  $p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}$ ,  
开环零点为  $z_1 = -2$

- 根据复极点出射角公式

$$\begin{aligned}\varphi_{p1} &= \pm 180^\circ (2k+1) - \arg(p_1 - p_2) + \arg(p_1 - z_1) \\ &= \pm 180^\circ (2k+1) - 90^\circ + 55^\circ \\ &= 145^\circ\end{aligned}$$

$$\varphi_{p2} = -145^\circ \text{ (由对称性)}$$



# 根轨迹的性质

## 性质6. 根轨迹穿越虚轴的交点

- 重要性：标志着闭环系统稳定状态的改变
- 该交点会指示出临界增益 $K$ 和相应的振荡频率 $\omega$
- 求解方法

(i) 劳斯稳定判据

(ii) 令 $s = j\omega$ . 求解满足如下方程的 $K$ 和 $\omega$ .

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[1 + G(j\omega)F(j\omega)] = 0 \\ \operatorname{Im}[1 + G(j\omega)F(j\omega)] = 0 \end{cases}$$

# 根轨迹的绘制

# 根轨迹草图绘制

例1: 绘制传递函数为  $G(s)F(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+3}$  根轨迹草图

解: (i) 开环极点:  $p_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{2}$

开环零点:  $z_1 = -2$

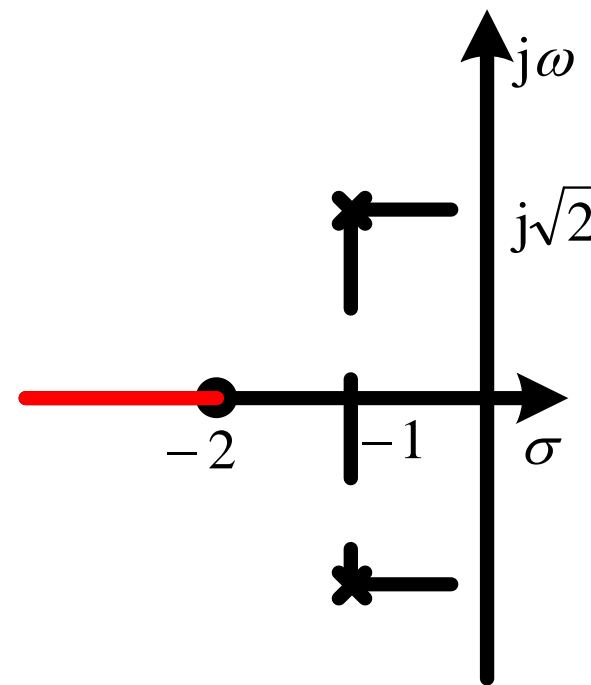
因此根轨迹共有2个分支,

起点为  $-1 \pm j\sqrt{2}$ , 终点为  $-2$  和无穷远

(ii) 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, -2)$

(iii) 渐近线 ( $n - m = 1, k = 0$ )

$$\gamma = \frac{\pm 180^\circ (2k + 1)}{n - m} = \frac{\pm 180^\circ (2k + 1)}{1} = -180^\circ$$





# 根轨迹草图绘制

(iv) 分离点:

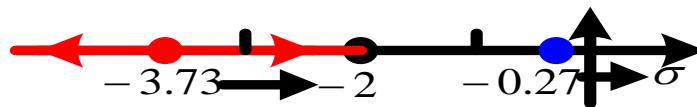
$$f(s) = s^2 + 2s + 3 + K(s + 2)$$

$$K = -\frac{A(s)}{B(s)} = -\frac{s^2 + 2s + 3}{s + 2}$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{s^2 + 4s + 1}{(s + 2)^2} = 0 \rightarrow s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3} = -3.732, -0.268$$

• 检查增益的符号  $K = -\frac{s^2 + 2s + 3}{s + 2} \Big|_{s=-3.732} = 5.4641 > 0$

•  $-3.732$ 在根轨迹上, 是分离点



# 根轨迹草图绘制

## (v) 极点出射角

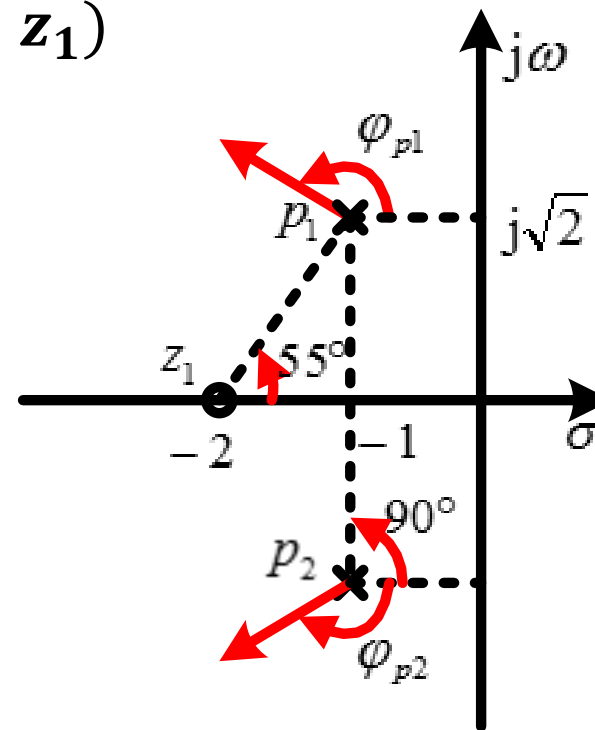
$$\begin{aligned}\varphi_{p1} &= \pm 180^\circ - \arg(p_1 - p_2) + \arg(p_1 - z_1) \\ &= 145^\circ \text{ 或 } -215^\circ\end{aligned}$$

$$\varphi_{p2} = -145^\circ$$

## (vi) 没有与虚轴的交点

- \* 可以从出射角判断
- \* 也可以根据闭环特征方程判断

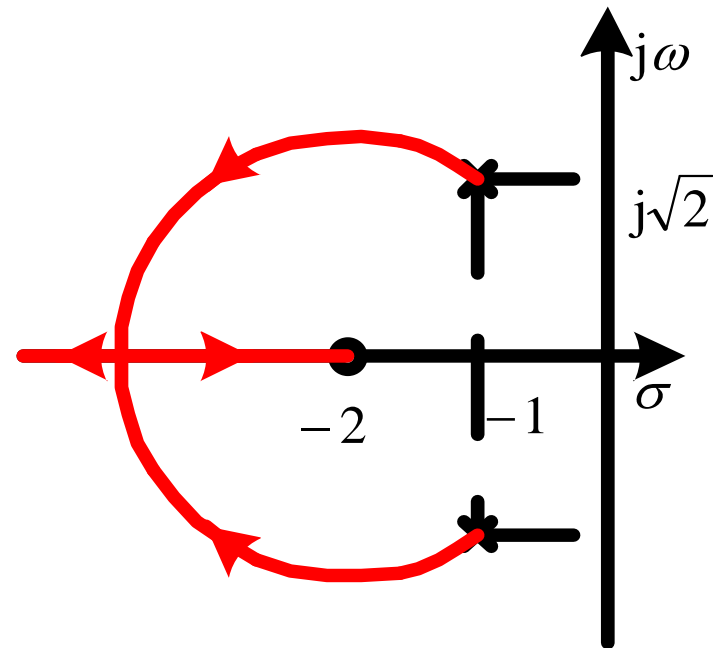
$$s^2 + (2 + K)s + (3 + 2K) = 0$$



# 根轨迹草图绘制

综合如上分析绘制根轨迹草图

- 共有2个分支
- 起点为  $-1 \pm j\sqrt{2}$ ，出射角为  $\pm 145^\circ$
- 终点为  $-2$  和无穷远
- 实轴上的根轨迹:  $(-\infty, -2)$
- 渐近线夹角  $180^\circ$
- 分离点  $s = -3.732$



- 可以证明弧线部分位于圆心在  $(-2, 0)$  的半径为3的圆上

# 根轨迹草图绘制

例2：绘制传递函数为  $G(s)F(s) = \frac{K}{s(s+2.73)(s^2+2s+2)}$  的根轨迹草图

解：(i) 起点：开环极点  $0, -2.73, -1 \pm j1$

分支数：4， 终点皆为无穷远

(ii) 实轴上的根轨迹：  $(-2.73, 0)$

(iii) 渐近线

$$\gamma = \frac{\pm 180^\circ (2k + 1)}{n - m} = \frac{\pm 180^\circ (2k + 1)}{4} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = \frac{0 - 2.73 - 1 + j1 - 1 - j1}{4} = -1.183$$

# 根轨迹草图绘制

## (iv) 会合点

由闭环系统特征方程

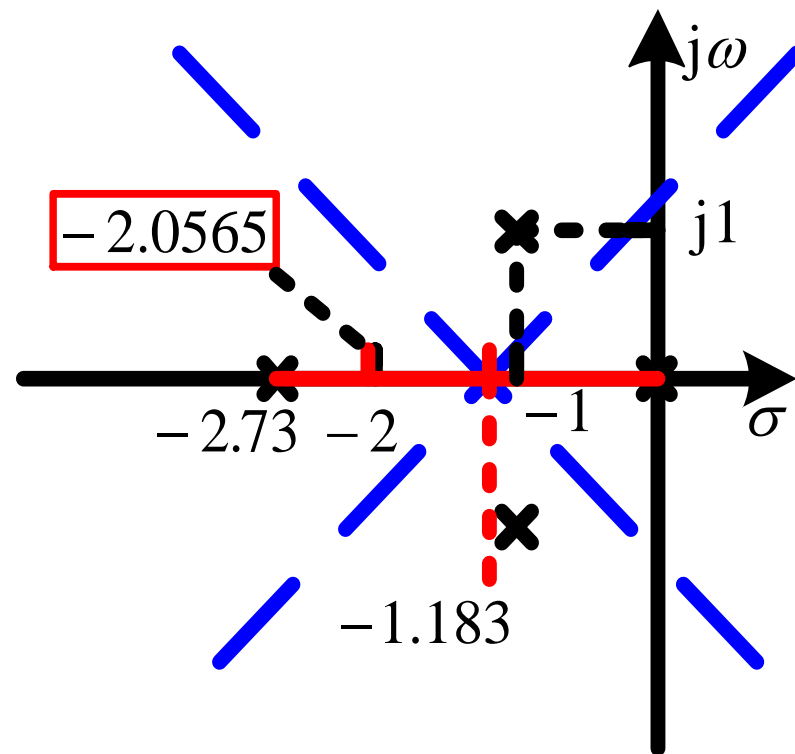
$$\begin{aligned} K &= -s(s + 2.73)(s^2 + 2s + 2) \\ &= -(s^4 + 4.73s^3 + 7.46s^2 + 5.46s) \end{aligned}$$

得到会合点满足的方程

$$\frac{dK}{ds} = -4s^3 - 14.19s^2 - 14.92s - 5.46 = 0$$

其实数根为  $s = -2.0565$

对应增益  $K = -A(s)|_{s=-2.0565} = 2.931 > 0$



# 根轨迹草图绘制

## (v) 复数极点处的出射角

$$\begin{aligned}\varphi_{p3} &= 180^\circ - \arg(p_3 - p_1) - \arg(p_3 - p_2) - \arg(p_3 - p_4) \\ &= 180^\circ - 135^\circ - 30^\circ - 90^\circ = -75^\circ \quad (\varphi_{p4} = 75^\circ)\end{aligned}$$

## (vii) 与虚轴的交点

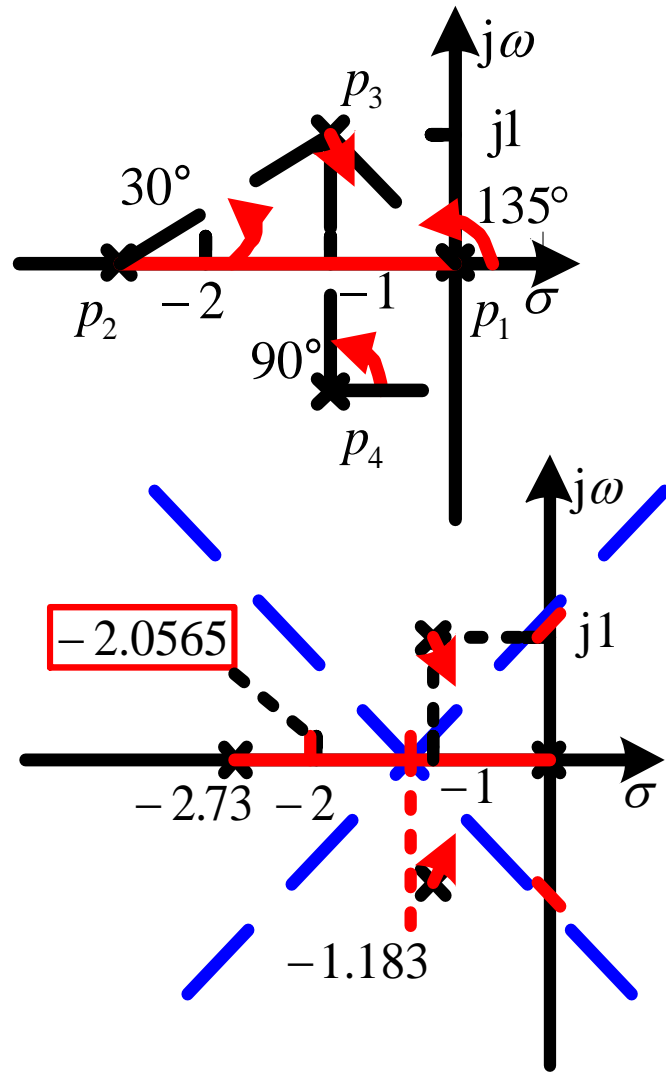
将  $s = j\omega$  代入闭环系统特征方程，得

$$\omega^4 - j4.73\omega^3 - 7.46\omega^2 + j5.46\omega + K = 0$$

整理实部和虚部得：

$$\begin{cases} K + \omega^4 - 7.46\omega^2 = 0 \\ 5.46\omega - 4.73\omega^3 = 0 \end{cases}$$

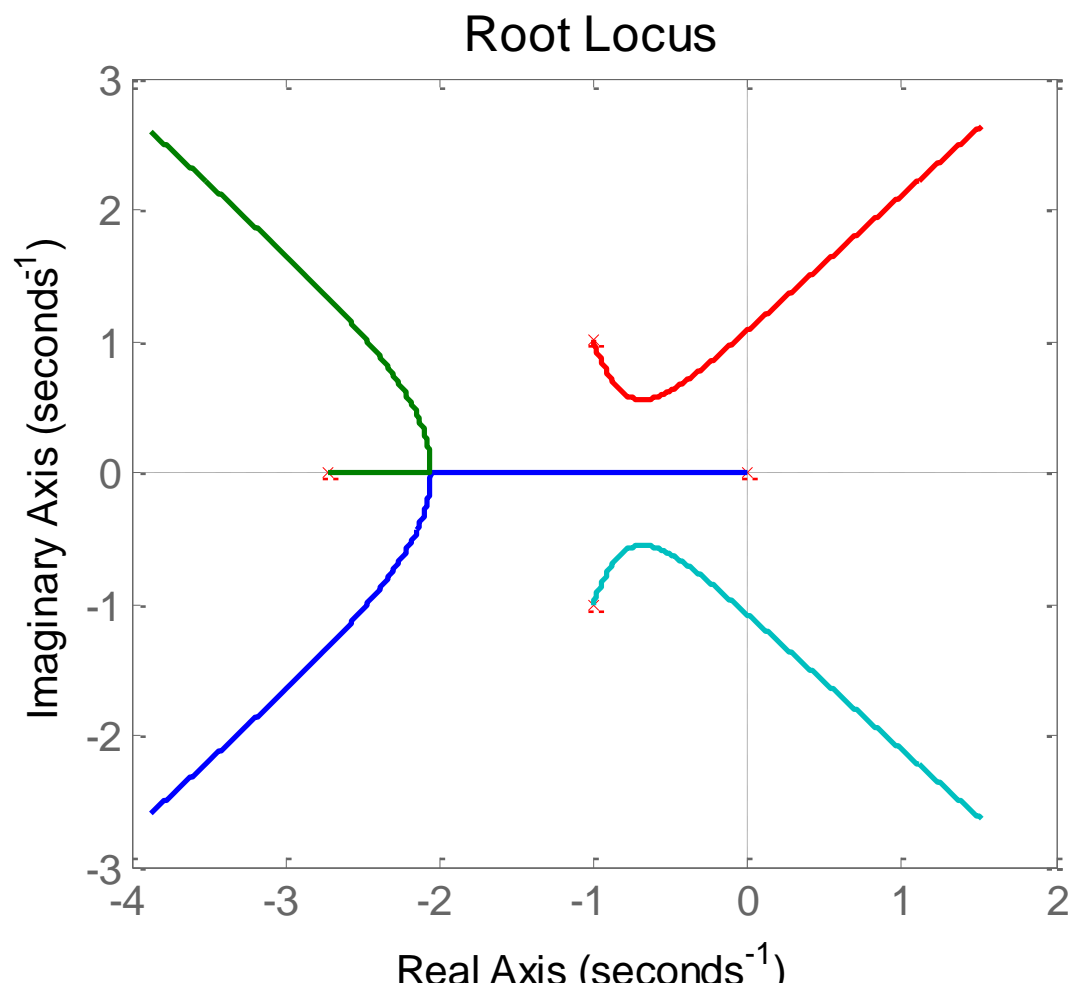
最后解得  $\omega = \pm 1.0744$       $K = 7.28$



# 根轨迹草图绘制

## 综合如上分析绘制根轨迹草图

- 共有4个分支
- 起点为 $0, -2.73, -1 \pm j1$
- $-1 \pm j1$  出射角 $\pm 75^\circ$
- 终点为无穷远
- 实轴上的根轨迹:  $[-2.73, 0]$
- 渐近线夹角 $\pm 45^\circ, \pm 135^\circ$
- 分离点  $s = -2.0565$



# 条件稳定系统

对于开环零极点比较多的系统，闭环系统的稳定性可能会随参数变化而交替变化，比较复杂，这类系统称为条件稳定系统

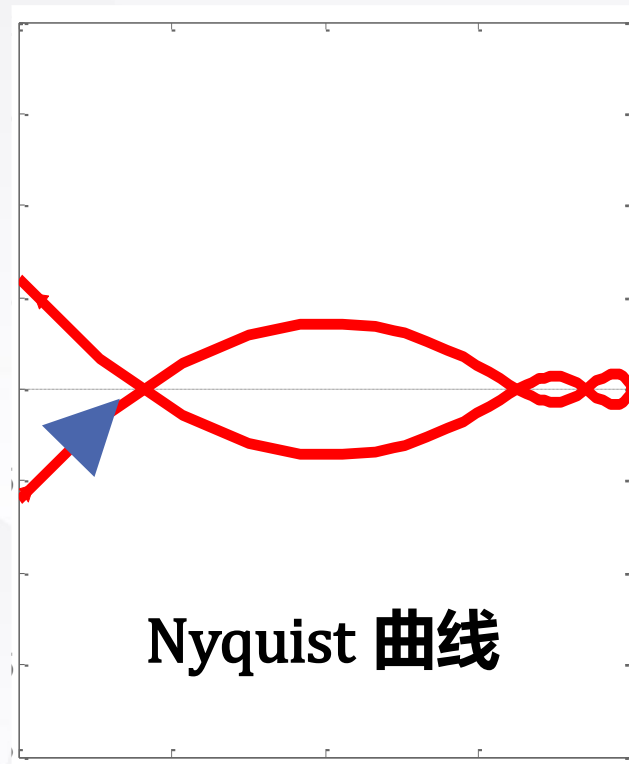
例如，设开环传递函数

$$G(s)F(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 4)}{s(s + 4)(s + 6)(s^2 + 1.4s + 1)}$$

找出使闭环稳定的 $K$  的取值范围

开环极点 ( $n = 5$ ) :  $0, -4, -6, -0.7 \pm j0.714$

开环零点 ( $m = 2$ ) :  $-1 \pm j1.7321$

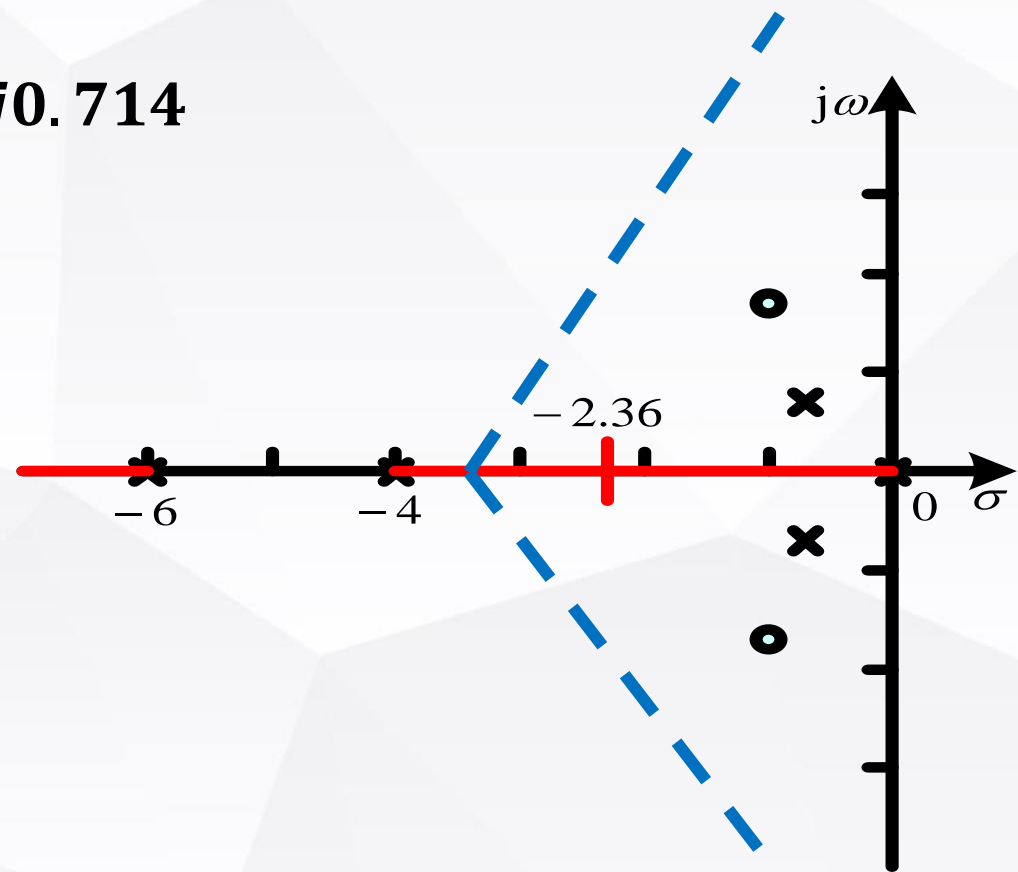




# 条件稳定系统

开环传递函数  $G(s)F(s) = \frac{K(s^2+2s+4)}{s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)}$

- 开环极点 ( $n = 5$ ) :  $0, -4, -6, -0.7 \pm j0.714$
- 开环零点 ( $m = 2$ ) :  $-1 \pm j1.7321$
- 渐近线 (3支)
  - 夹角  $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$
  - 与实轴交点  $-3.13$
- 实轴上根轨迹  $[-\infty, -6] \cup [-4, 0]$
- 会合点:  $-2.36$



# 条件稳定系统

- 与虚轴的交点: 将 $s = j\omega$  代入闭环特征多项式

$$s^5 + 11.4s^4 + 39s^3 + (43.6 + k)s^2 + (24 + 2K)s + 4K = 0$$

解得:

$$\omega_1 = 1.2115, K_1 = 15.54$$

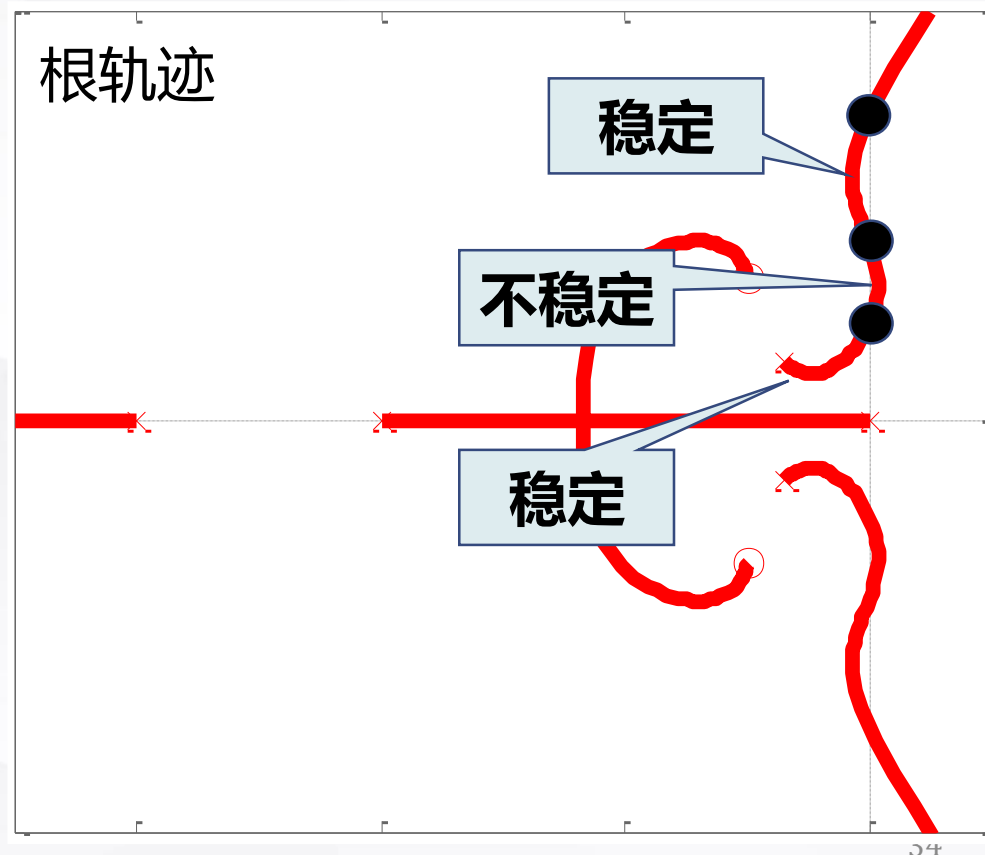
$$\omega_2 = 2.1545, K_2 = 64.74$$

$$\omega_3 = 3.7538, K_3 = 163.51$$

稳定范围:

$$K < 15.54$$

$$64.74 < K < 163.51$$

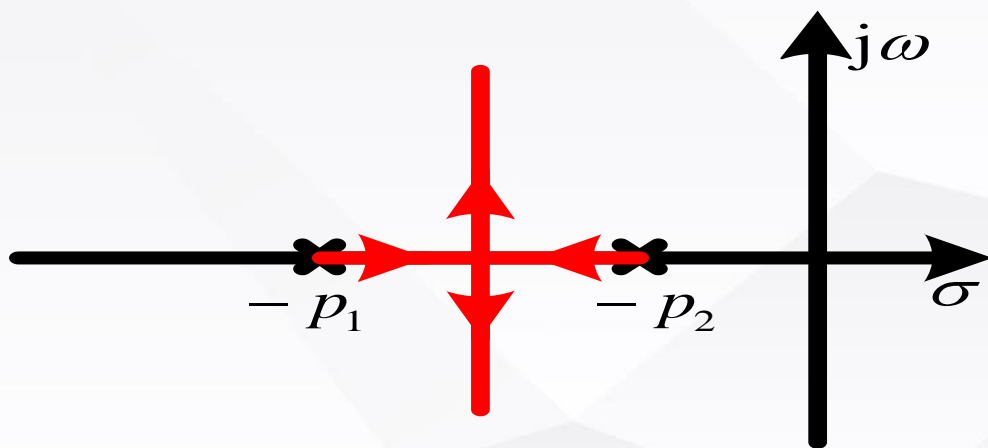


# 零极点对根轨迹的影响

## 增加零点对根轨迹的影响

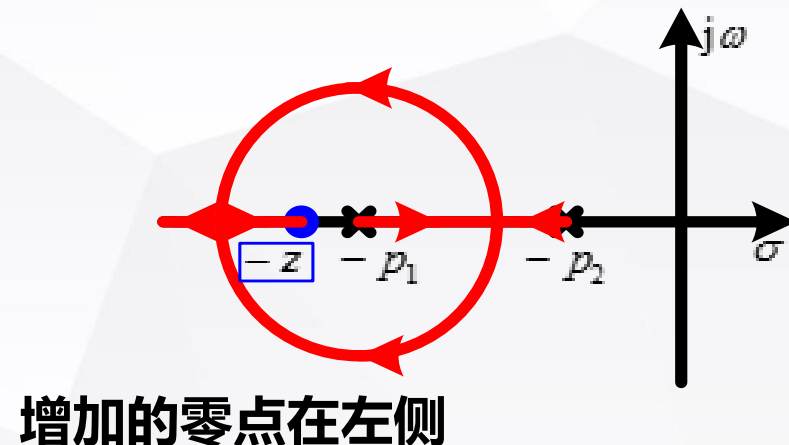
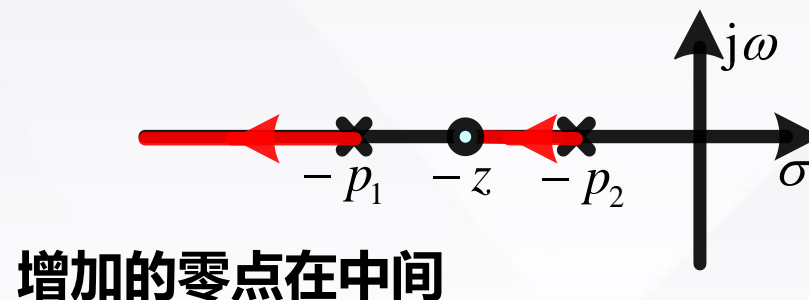
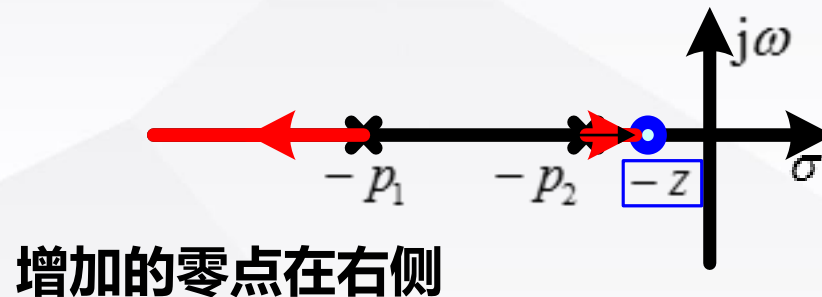
- 原来的开环传递函数和根轨迹:

$$G(s)F(s) = \frac{K}{(s + p_1)(s + p_2)}, \quad p_1 > p_2 > 0$$



- 增加一个零点:  $G(s)F(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)}$

可以将根轨迹向左移动



# 零极点对根轨迹的影响

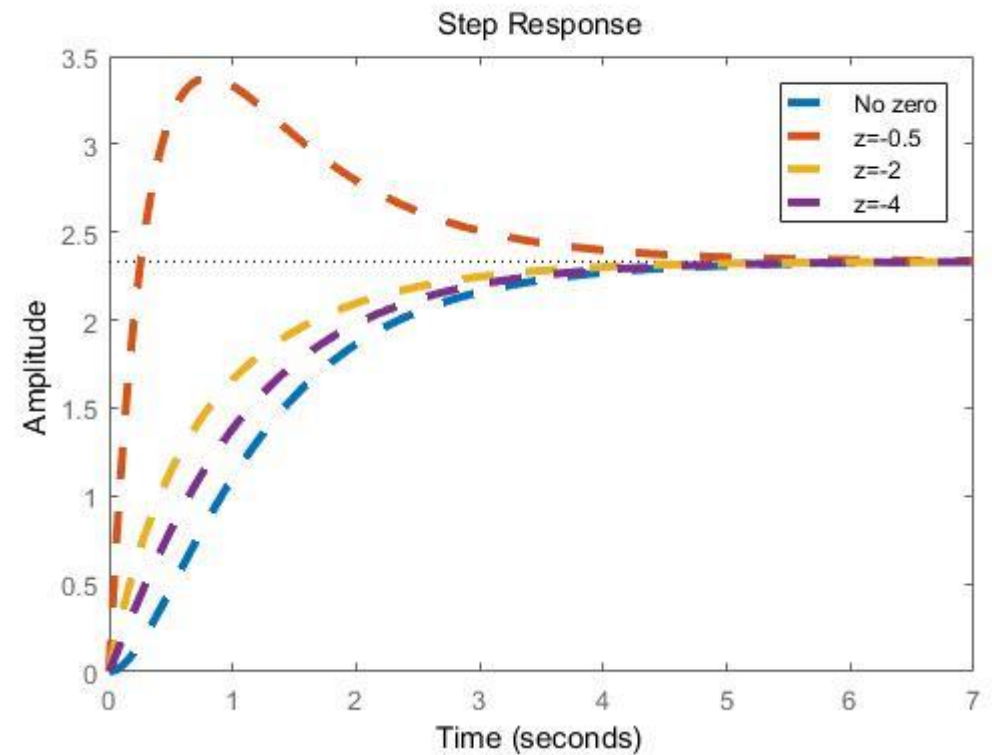
## 零点对系统阶跃响应的影响

原系统:  $G(s) = \frac{7}{(s+1)(s+3)}$

附加零点  $s = -0.5$ :  $G(s) = \frac{7(2s+1)}{(s+1)(s+3)}$

附加零点  $s = -2$ :  $G(s) = \frac{7(0.5s+1)}{(s+1)(s+3)}$

附加零点  $s = -4$ :  $G(s) = \frac{7(0.25s+1)}{(s+1)(s+3)}$

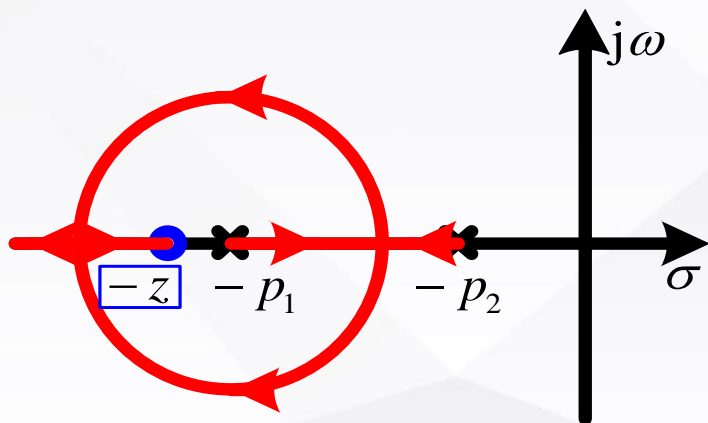


# 零极点对根轨迹的影响

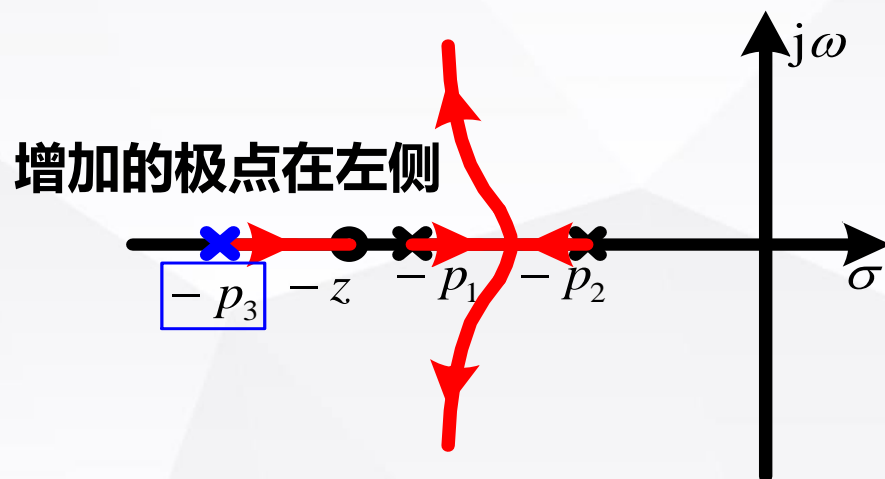
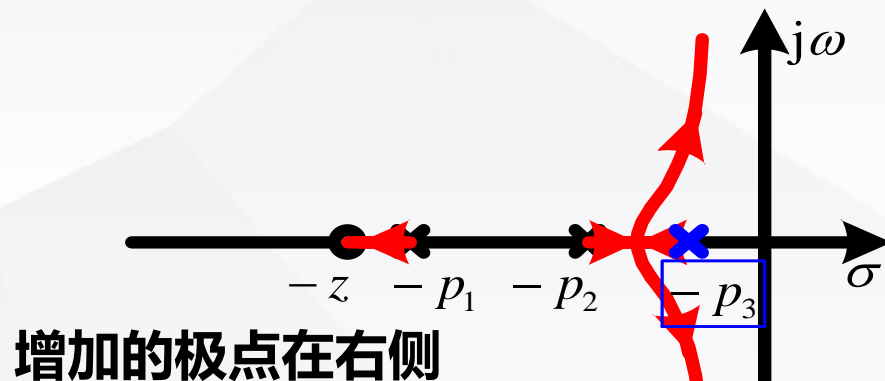
## 增加极点对根轨迹的影响

- 原来的开环传递函数和根轨迹:

$$G(s)F(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)}, z > p_1 > p_2 > 0$$



- 增加一个极点:  $G(s)F(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)(s+p_3)}$

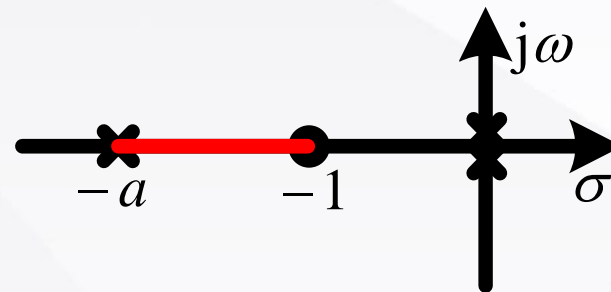


根轨迹向右方移动

# 零极点对根轨迹的影响

例：考察参数 $a > 0$ 不同取值时，系统  $G(s)F(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+a)}$  根轨迹

- 实轴上的根轨迹: 区间  $(-a, -1)$
- 检查区间 $(-a, -1)$ 内是否有分离点/会合点



从条件  $\frac{dK}{ds} = 0$  计算，其中  $K = -\frac{A(s)}{B(s)} = -\frac{s^2(s+a)}{s+1}$

$$\Rightarrow A(s)B'(s) = A'(s)B(s) \Rightarrow s^2(s+a) = (3s^2 + 2as)(s+1)$$

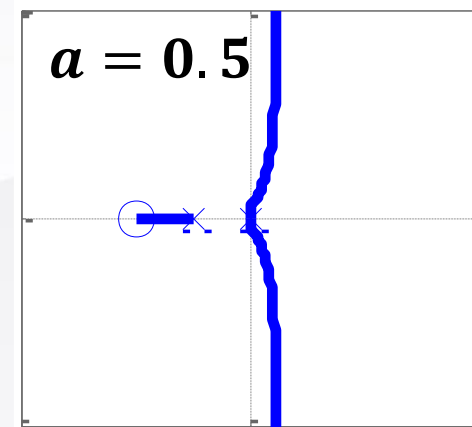
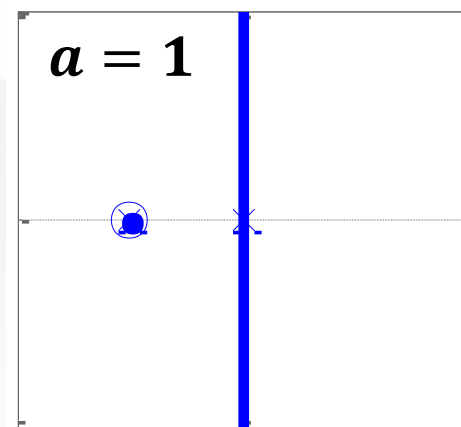
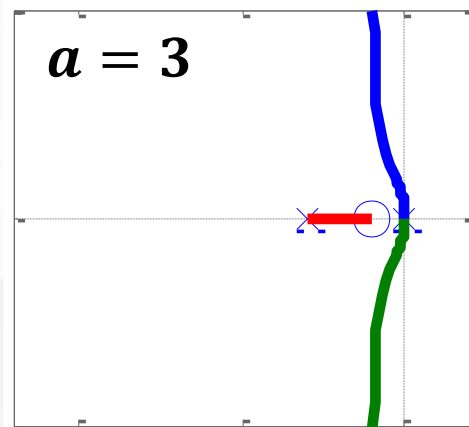
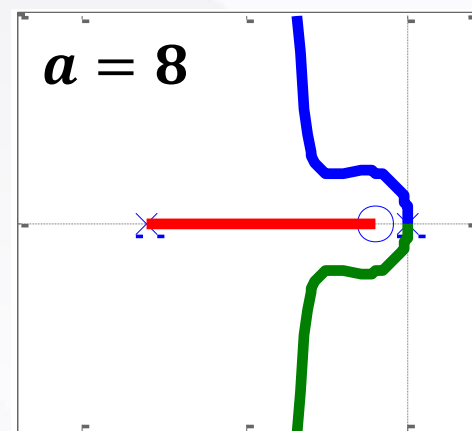
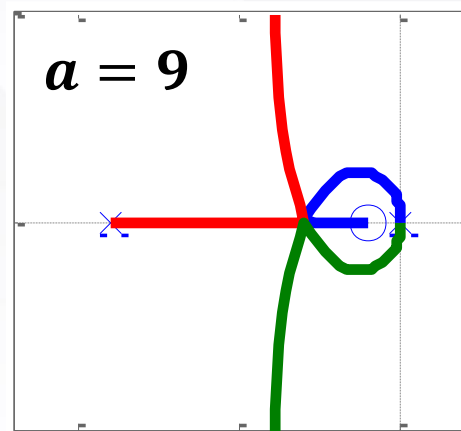
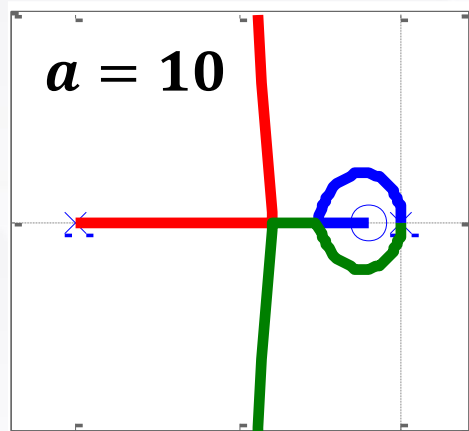
$$\text{解方程可得: } s = \frac{-(a+3) \pm \sqrt{a^2 - 10a + 9}}{4} \Rightarrow a^2 - 10a + 9 \geq 0$$

结论：当  $a \leq 1$  或者  $a \geq 9$  时，区间 $(-a, -1)$ 内存在分离点/会合点

# 零极点对根轨迹的影响

## 参数 $a$ 取不同值时的根轨迹

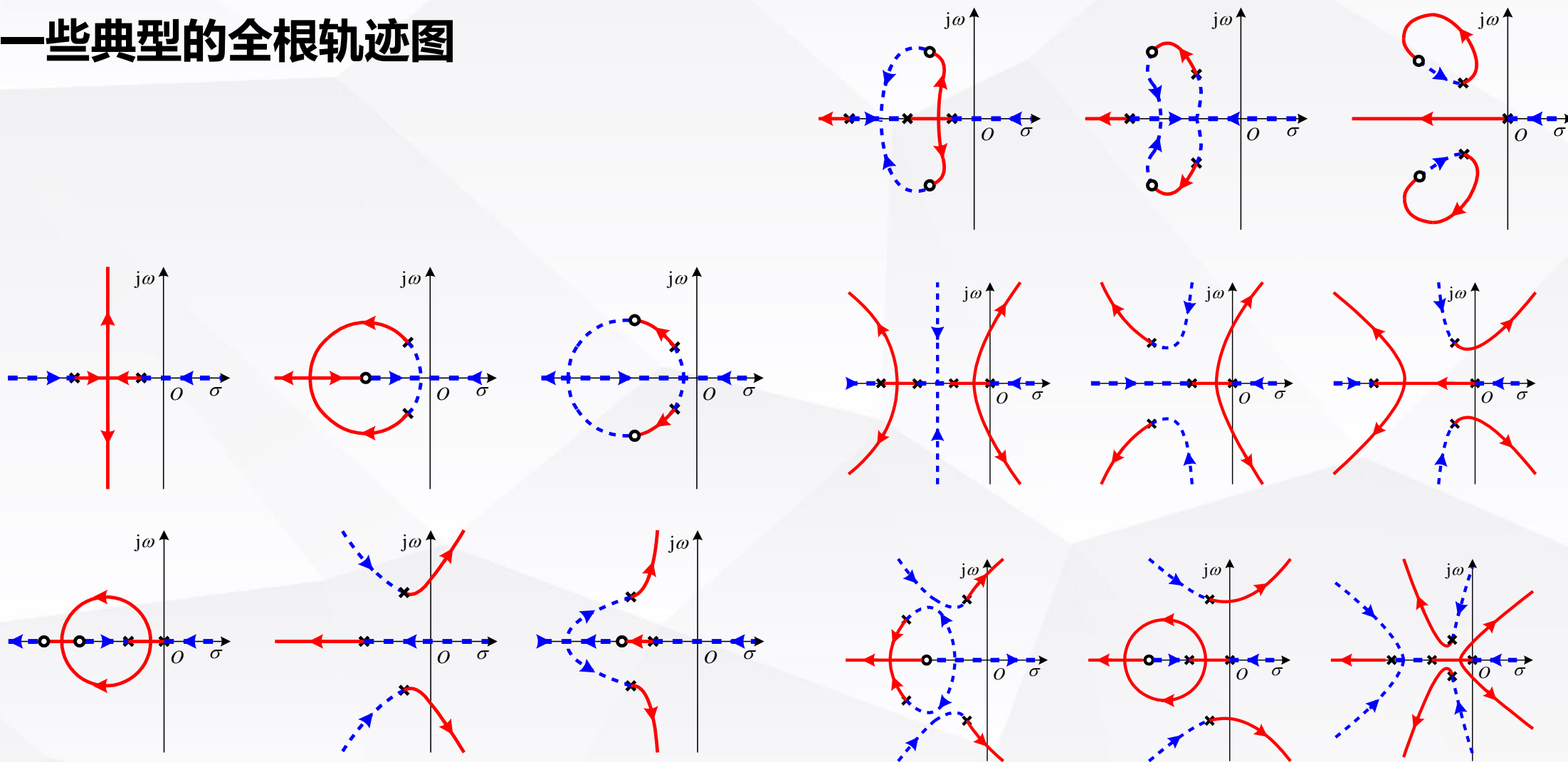
参数 $a$	分离/会合点
10	$-4, -2.5$
9	$-3, -3$
8	无
3	无
1	无
0.5	无



结论：开环极点很小的变化会导致闭环根轨迹的很大的变化

# 补根轨迹和全根轨迹

## 一些典型的全根轨迹图





# 根轨迹法校正

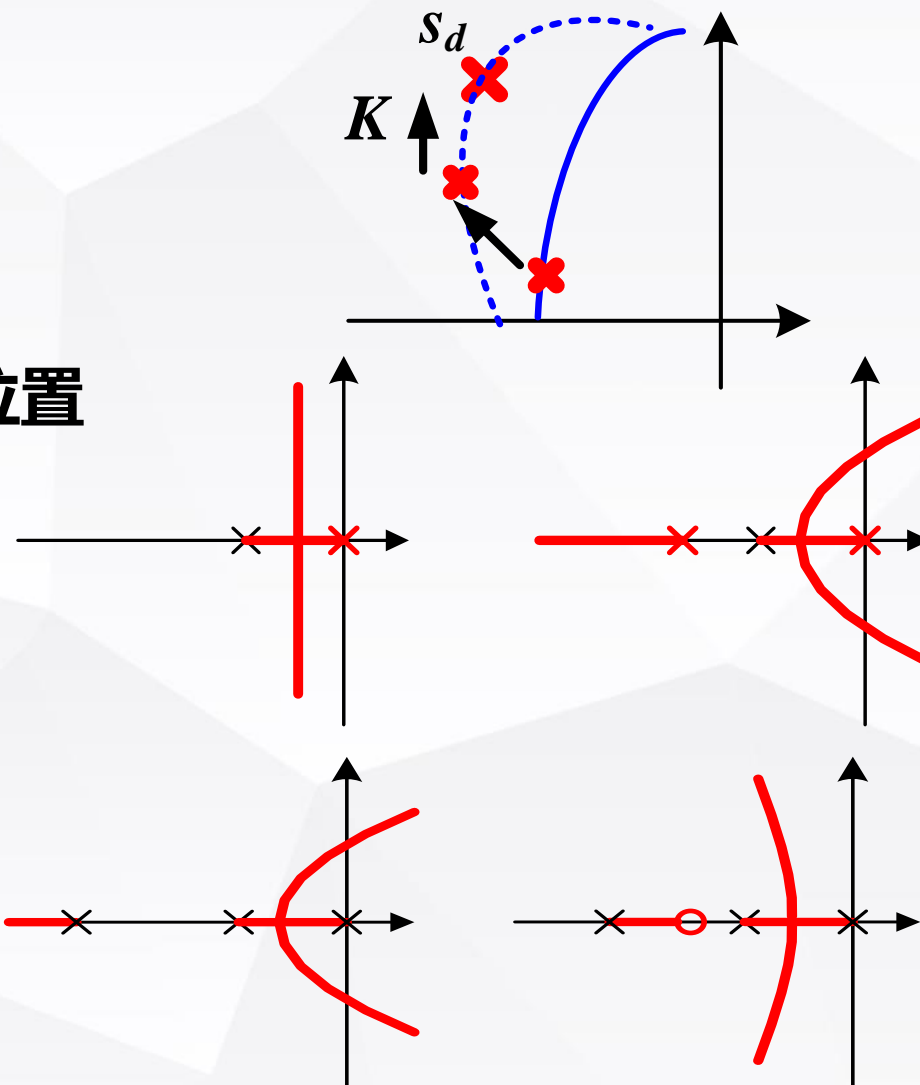
# 校正装置的设计方法：根轨迹法

## 根轨迹法

- 改变形状使之穿过**期望闭环主导极点**
- 性能指标（近似二阶系统）： $\zeta, \omega_n, K_v$
- 变化 $K$ （足够大）将闭环极点移至期望位置

(1) 添加极点使根轨迹右移：

提高稳态精度，导致稳定性降低

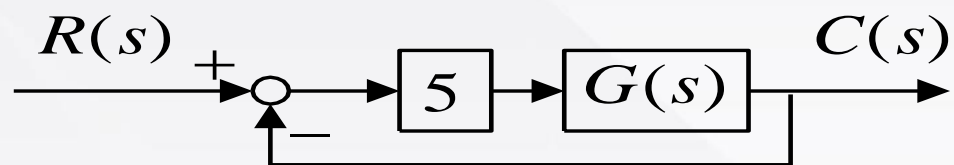


(2) 添加零点使根轨迹左移：

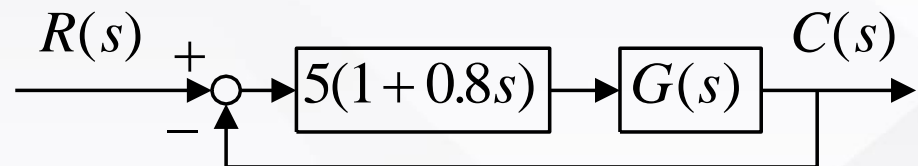
带来稳定性和响应速度的提高

# 零极点对根轨迹的影响

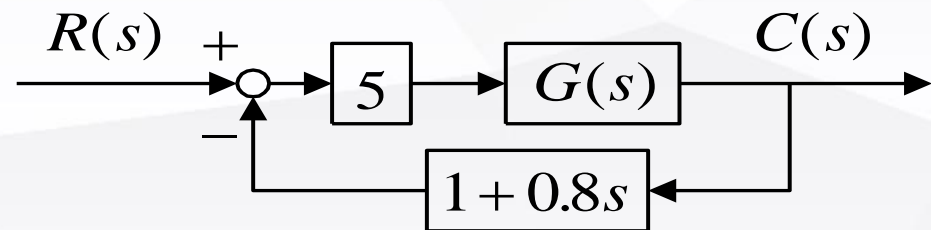
应用：伺服系统中的不同控制方案对比研究 ( $G(s) = \frac{1}{s(5s+1)}$ )



• 比例控制:  $G(s)F(s) = \frac{5}{s(5s+1)} = \frac{1}{s(s+0.2)}$

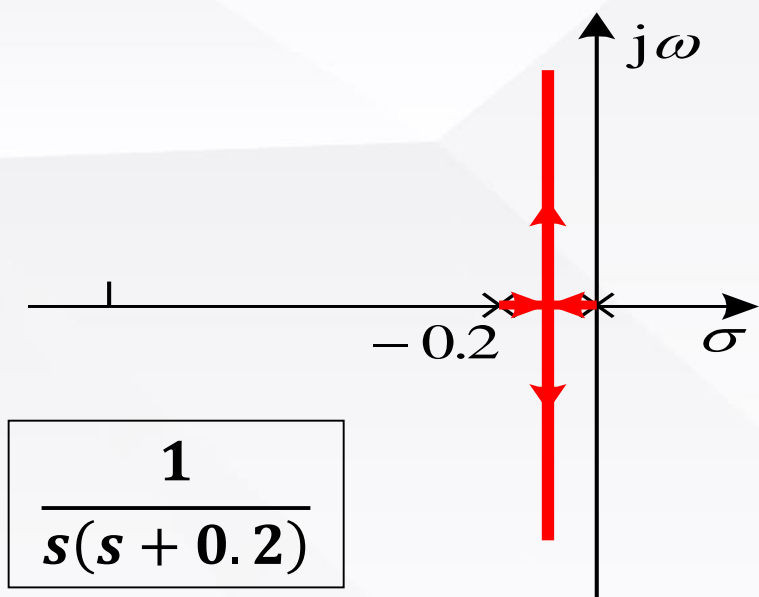


• 比例+微分:  $G(s)F(s) = \frac{5(1+0.8s)}{s(5s+1)} = \frac{0.8(s+1.25)}{s(s+0.2)}$



• 速度反馈:  $G(s)F(s) = \frac{5(1+0.8s)}{s(5s+1)} = \frac{0.8(s+1.25)}{s(s+0.2)}$

# 零极点对根轨迹的影响

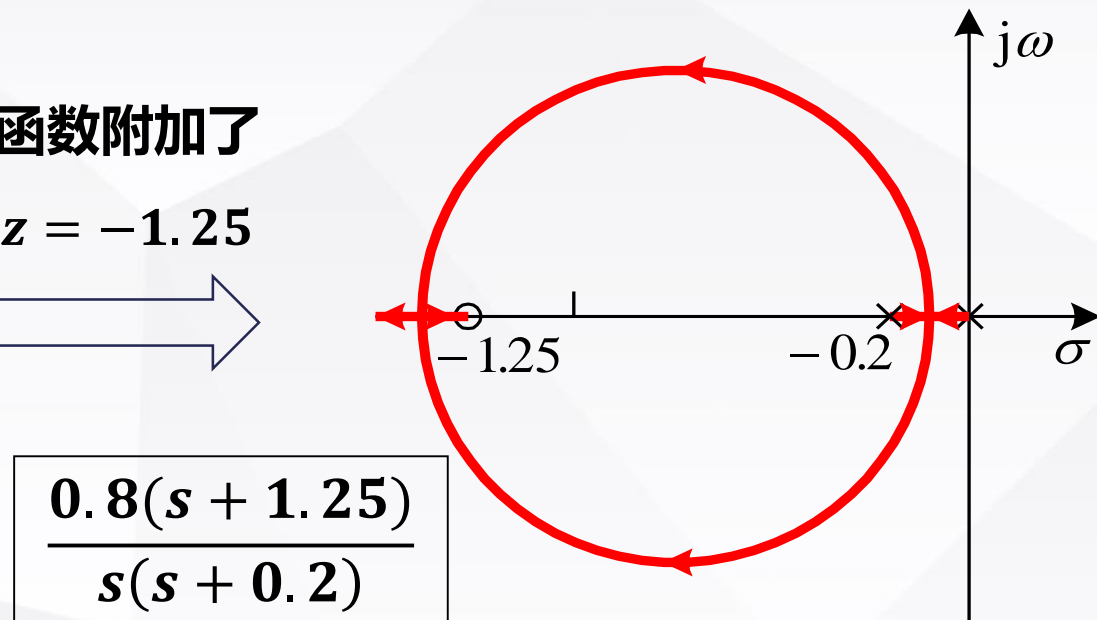


- 比例控制下的根轨迹

$$s_{1,2} = -0.1 \pm j0.995 \quad (\zeta = 0.1)$$

阻尼小，振荡剧烈，衰减率慢

开环传递函数附加了一个零点  $z = -1.25$



- 比例+微分/速度反馈控制下的根轨迹

$$s_{1,2} = -0.51 \pm j0.886 \quad (\zeta = 0.5)$$

阻尼接近0.707，控制性能较好

# 基于根轨迹法设计超前校正装置

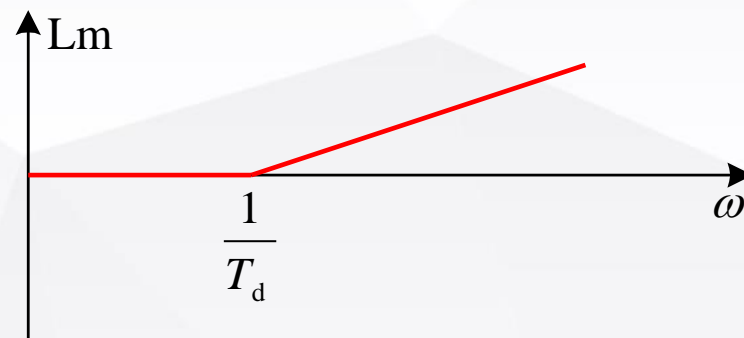
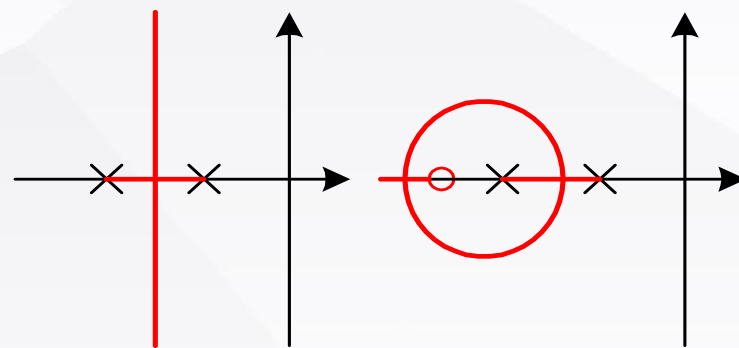
## 理想微分补偿

系统响应速度慢（或**不稳定**）意味着闭环极点过于靠近虚轴（或**在右半平面**）

补救措施：增加一个单零点

$$G_c(s) = 1 + T_d s = T_d \left( s + \frac{1}{T_d} \right)$$

- 优点： 将根轨迹左移以提高稳定性
- 缺点1： 校正环节  $G_c(s) = 1 + T_d s$  难以物理实现
- 缺点2： 噪声特别是高频噪声被放大

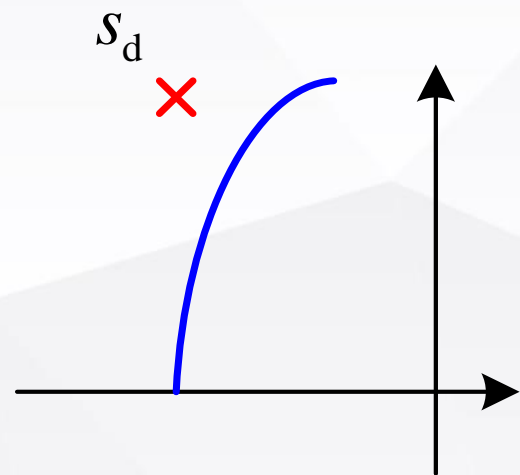
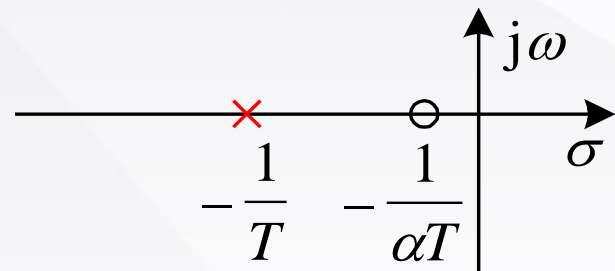


# 基于根轨迹法设计超前校正装置

## 替代方案：超前校正

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{\alpha T}}{s + \frac{1}{T}} = K_c \cdot \frac{s - z_c}{s - p_c} \quad (\alpha > 1)$$

- $K_c$ 用于补偿低频增益
- 希望选取较大的 $1/T$ ，以减少附加极点对根轨迹的影响
- 但 $1/T$ 较大时，需要选取较大的 $\alpha$ ，不易实现
- 根据期望闭环主导极点设计参数



# 超前校正装置的特性

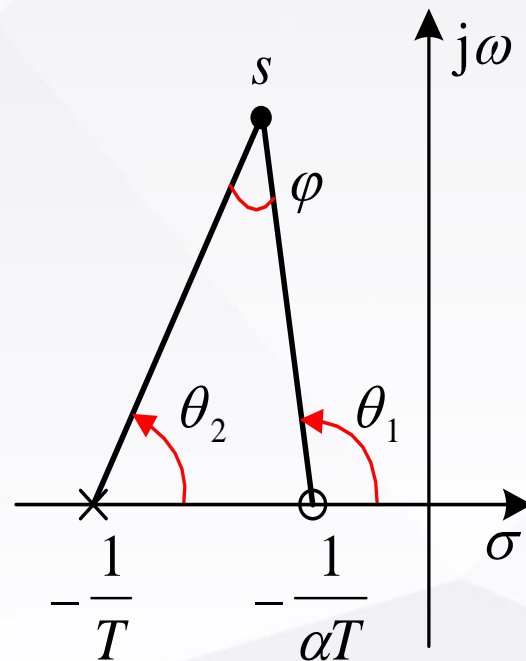
从根轨迹图上看：

对任意测试点：  $s = \sigma + j\omega (\omega > 0)$

$$G_c(s) = \frac{s + \frac{1}{\alpha T}}{s + \frac{1}{T}} \quad (\alpha > 1)$$

$G_c(s)$  提供一个超前角

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 > 0$$



因此根据根轨迹的幅角条件，  $G_c(s)$  会将根轨迹向左移动

# 超前校正装置的特性

## 设计中常用的表达形式

$$G_c(s) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} = \frac{s + \frac{1}{\alpha T}}{s + \frac{1}{T}} \xrightarrow{\text{配合比例环节}} G_c(s) = \frac{K_c}{\alpha} \cdot \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} = K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{\alpha T}}{s + \frac{1}{T}}$$

- 适于用根轨迹设计:  $G_c(s) = K_c \cdot \frac{s - z_c}{s - p_c}$ , 其中  $\frac{p_c}{z_c} = \alpha > 1$



# 基于根轨迹法设计超前校正装置

## 根据主导极点计算应提供的超前相角

假设期望主导极点的位置为（不在原来的根轨迹上）

$$s_d = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

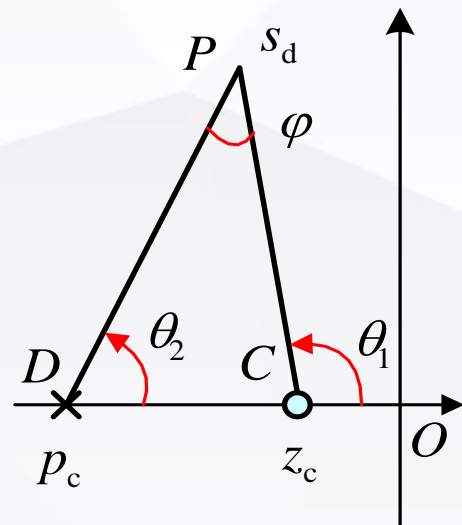
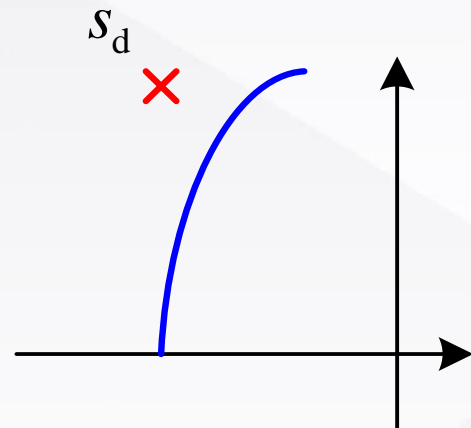
根据校正装置的相角条件

$$\begin{aligned} & \arg [G_c(s_d)G_p(s_d)] \\ &= \arg [G_c(s_d)] + \arg [G_p(s_d)] = \pm(2k+1)\pi \end{aligned}$$

可知校正装置需要提供的相角是

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 = \arg[G_c(s_d)] = \pm(2k+1)\pi - \arg[G_p(s_d)]$$

其中  $\theta_1 = \arg(s_d - z_c)$ ,  $\theta_2 = \arg(s_d - p_c)$ 。



# 基于根轨迹法设计超前校正装置

根据所需超前相角  $\varphi$  选取  $p_c$  和  $z_c$

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{s - z_c}{s - p_c}, \quad \frac{p_c}{z_c} = \alpha > 1$$

有无数种  $(z_c, p_c)$  组合可以提供给定超前相角：

- 不同组合对应于不同的  $\alpha$ ，希望  $\alpha$  越小越好

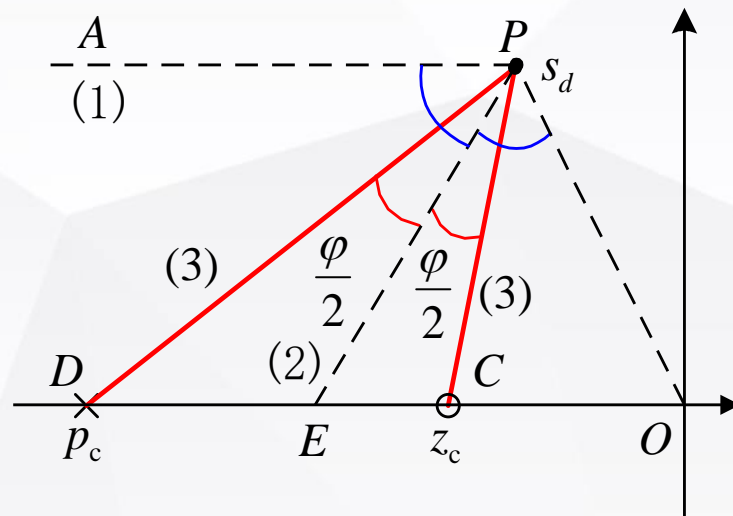
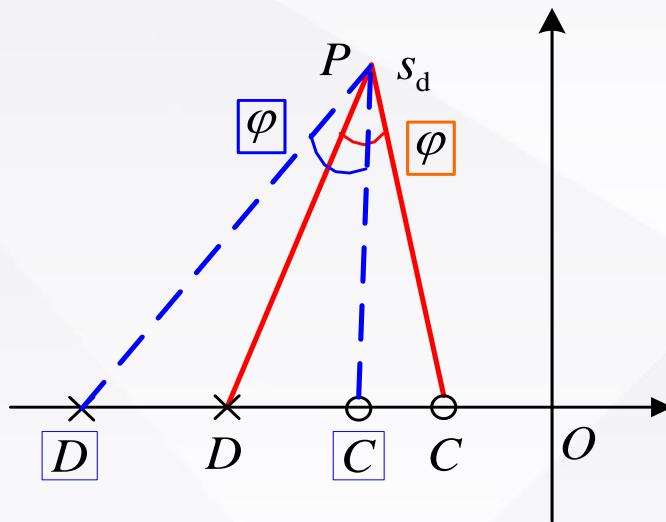
- 利用角平分线方法确定最小  $\alpha$  值

1. 做AP平行于实轴

2. 做PE平分  $\angle APO$

3. 通过让PE平分  $\varphi$  角确定  $p_c$  和  $z_c$

4. 计算  $\alpha = \left| \frac{\overline{OD}}{\overline{OC}} \right|$



# 采用根轨迹法设计超前校正装置

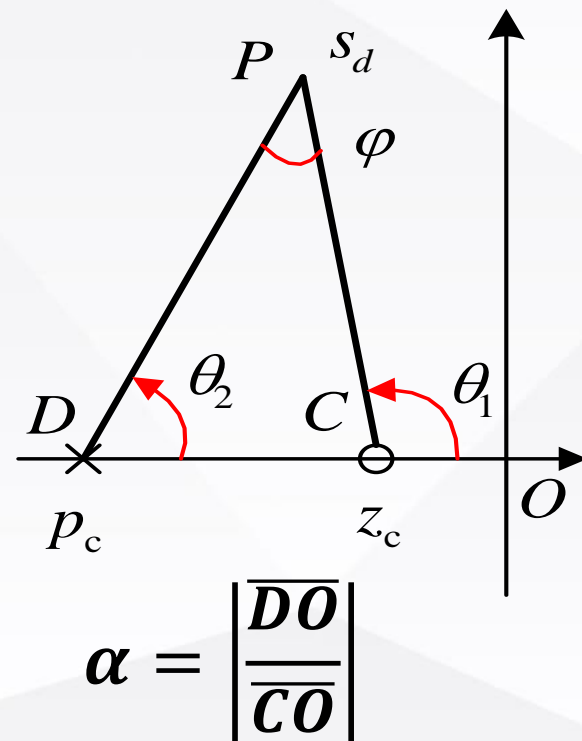
根据选好的 $z_c$ 和 $p_c$  确定系数 $K_c$

- 根据幅值条件

$$|G_p(s_d)G_c(s_d)| = |G_p(s_d)|K_c \left| \frac{s_d - z_c}{s_d - p_c} \right| = 1$$

可知增益补偿应为:

$$K_c = \left| \frac{1}{G_p(s_d)} \right| \cdot \left| \frac{s_d - z_c}{s_d - p_c} \right| = \left| \frac{1}{G_p(s_d)} \right| \cdot \left| \frac{\overline{DP}}{\overline{CP}} \right|$$



- 校正前:  $\lim_{s \rightarrow 0} sG_p(s) = K'_V$
- 校正后:  $K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG_p(s)G_c(s) = K'_V K_c \frac{z_c}{p_c}$
- $(z_c, p_c)$  越向左越好, 可提高误差系数, 减小稳态误差

# 基于根轨迹法设计超前校正装置

例：给定  $G_p(s) = \frac{4}{s(s+2)}$  设计串联校正装置，使闭环系统的主导极点满足

$$\omega_n = 4\text{rad/s 和 } \zeta = 0.5$$

解：校正前系统的性能分析

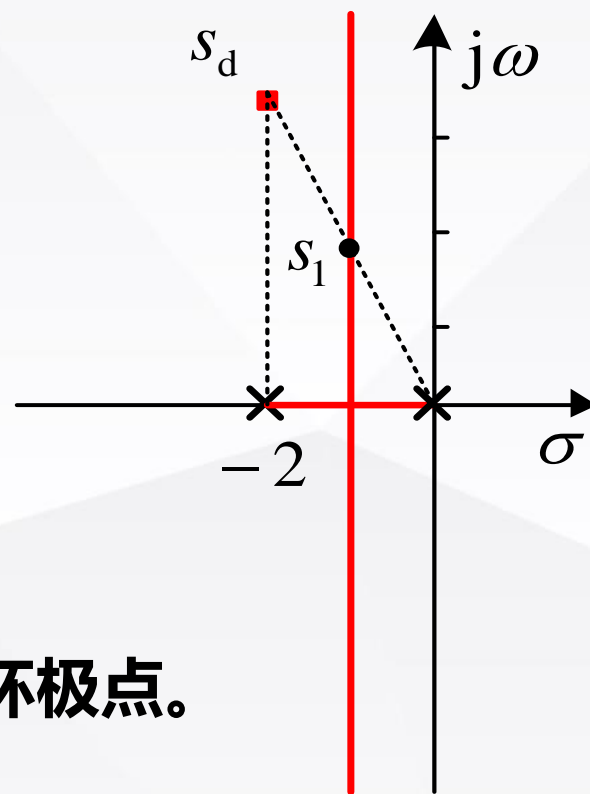
$$G_{CL}(s) = \frac{G_p(s)}{1 + G_p(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 4}$$

闭环极点位于：  $s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3} \Rightarrow \omega_n = 2, \zeta = 0.5$ .

而期望的闭环主导极点：

$$s_d = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$$

- 不在校正前的根轨迹上，且仅调整  $K$  不能得到期望的闭环极点。
- 由于期望极点在根轨迹左侧，故需要超前校正。



# 基于根轨迹法设计超前校正装置

设超前校正装置的传递函数形式为

$$G_c(s) = K_c \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

- 计算所需要的相角超前量

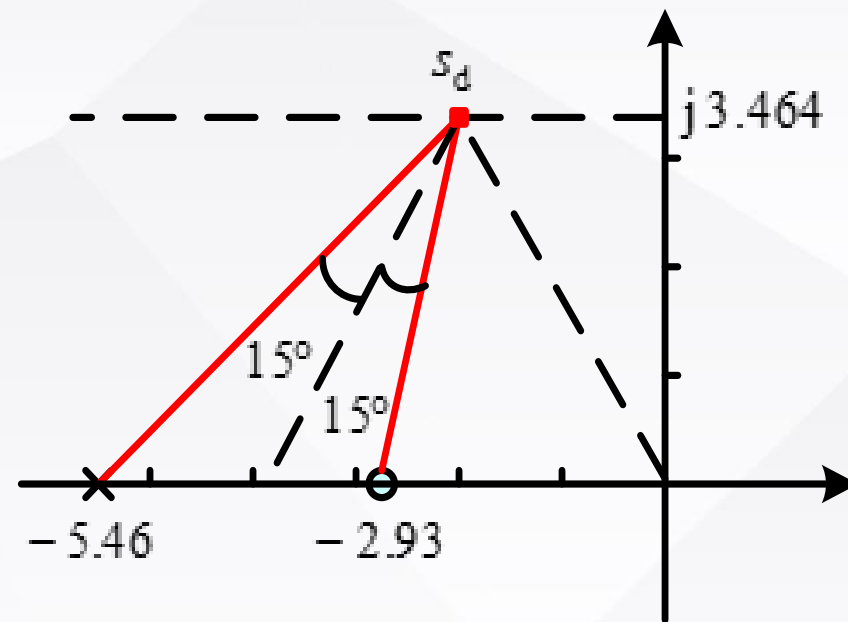
$$\arg[G_p(s_d)] = \arg\left[\frac{4}{(-2+j2\sqrt{3})(j2\sqrt{3})}\right] = -210^\circ$$

$$\Rightarrow \varphi = -180^\circ - (-210^\circ) = 30^\circ$$

- 用角平分线法确定:

$$p_c = -5.46 \quad z_c = -2.93 \quad \alpha = 1.863$$

- 因此  $G_c(s) = K_c \frac{s+2.93}{s+5.46}$ , 还需要确定  $K_c$  的取值



$$G_p(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$
$$s_d = -2 + j2\sqrt{3}$$

# 基于根轨迹法设计超前校正装置

- 根据幅角条件确定校正环节的增益系数

$$\left| G_p(s)G_c(s) \right|_{s_d=-2+j2\sqrt{3}} = \left| \frac{K_c(s+2.93)}{(s+5.46)} \cdot \frac{4}{s(s+2)} \right|_{s_d=-2+j2\sqrt{3}} = \frac{4K_c}{18.91} = 1$$

$$\Rightarrow K_c = \frac{18.91}{4} = 4.728$$

- 检验校正后的系统性能

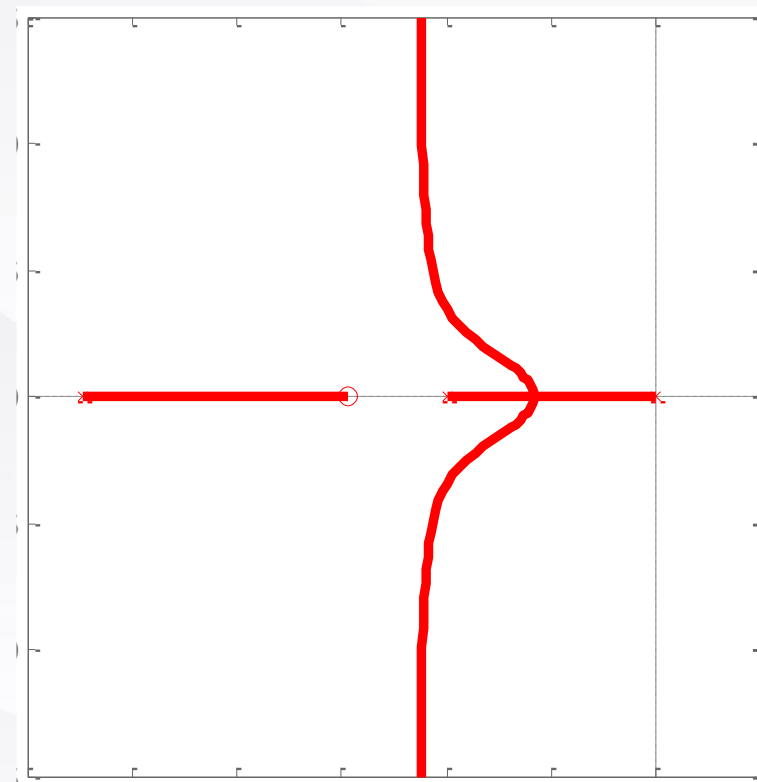
1. 闭环极点  $s_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$

( $s_3 = -3.46$  靠近  $z_c = -2.93$ )

2. 稳态速度误差系数

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG_p(s)G_c(s) = 5.074 \text{ s}^{-1}$$

比校正前  $K'_V = 2 \text{ s}^{-1}$  有所提升。



# 基于根轨迹法设计超前校正装置

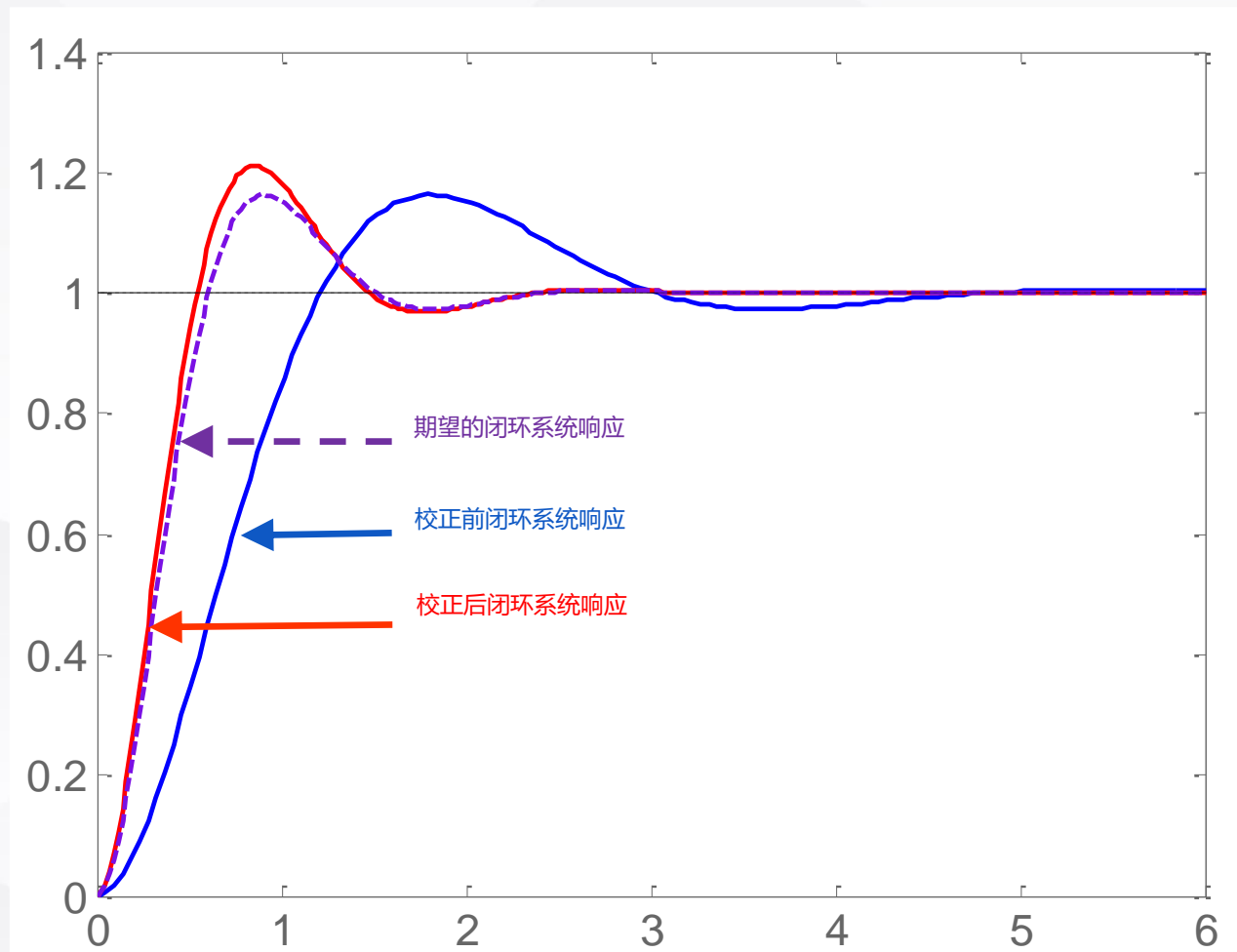
- 进一步验证时域性能的改善

从闭环系统的阶跃响应来看：

1. 响应速度有所提升
2. 超调量略有提高
3. 与具有相同主导极点的二阶系统

统 $G(s) = \frac{16}{s^2+4s+16}$ 相比，阶跃响应差别很小，说明设计极点

$s_{1,2} = -2 \pm j2\sqrt{3}$   
的确起主导作用。



# 基于根轨迹法设计超前校正装置

## 设计步骤总结（供参考）

- (1) 按照  $\zeta$  和  $\omega_n$  的要求选取闭环的期望主导极点对
- (2) 基于主导极点计算需要的超前相角  $\varphi$
- (3) 根据要求的  $\varphi$  和期望的稳态误差，计算校正环节的零极点，也可以根据最小  $\alpha$  方法优化选择
- (4) 根据幅值条件确定超前校正环节的增益
- (5) 系统性能校验



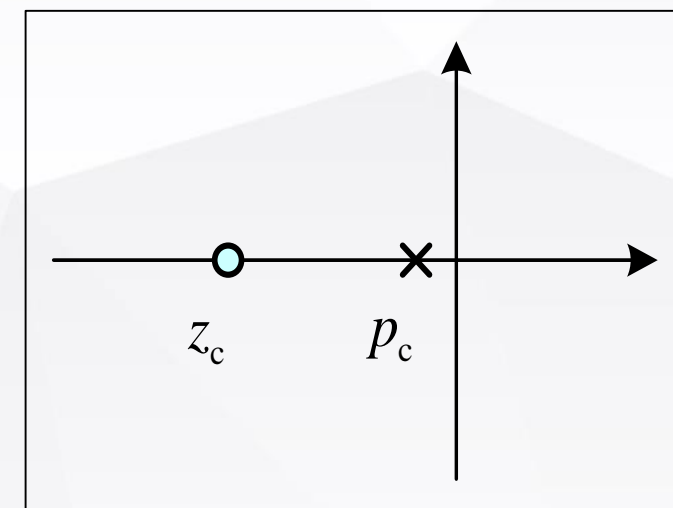
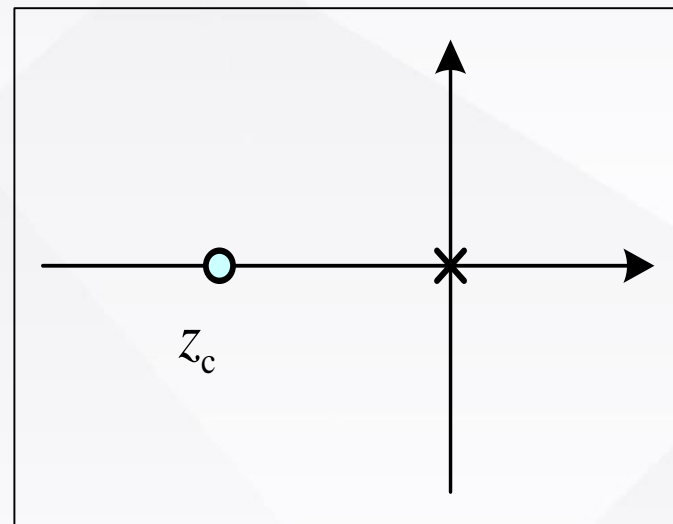
# 基于根轨迹法设计滞后校正装置

## PI 控制器（比例+积分校正）

$$G_c(s) = 1 + K_I \cdot \frac{1}{s} = \frac{s - z_c}{s}$$

优点：PI 控制可提高系统的型次，改善静差

缺点：响应速度降低，且实现纯积分比较困难



替代方案：把极点从原点移开，形成滞后校正装置

$$G_c(s) = \frac{s - z_c}{s - p_c}, \quad p_c \ll 1$$

# 滞后校正装置的特性

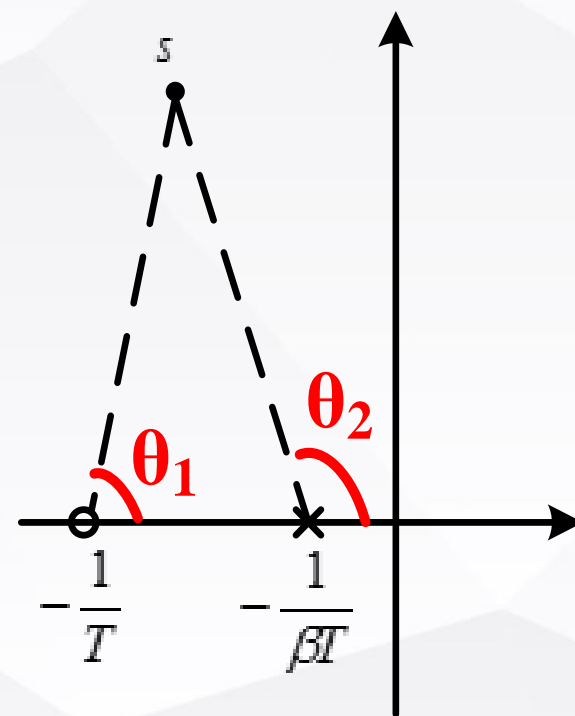
从根轨迹图上看:

对任意测试点:  $s = \sigma + j\omega (\omega > 0)$

$$G_c(s) = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \quad (\beta > 1)$$

$G_c(s)$  提供一个滞后角

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2 < 0$$



与超前校正相比，滞后校正装置的极点比零点更靠近原点

# 滞后校正装置的特性

## 设计中常用的表达形式

$$G_c(s) = \frac{1 + Ts}{1 + \beta Ts} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \xrightarrow{\text{配合比例环节}} G_c(s) = K_c \cdot \frac{1 + Ts}{1 + \beta Ts} = \frac{K_c}{\beta} \cdot \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}$$

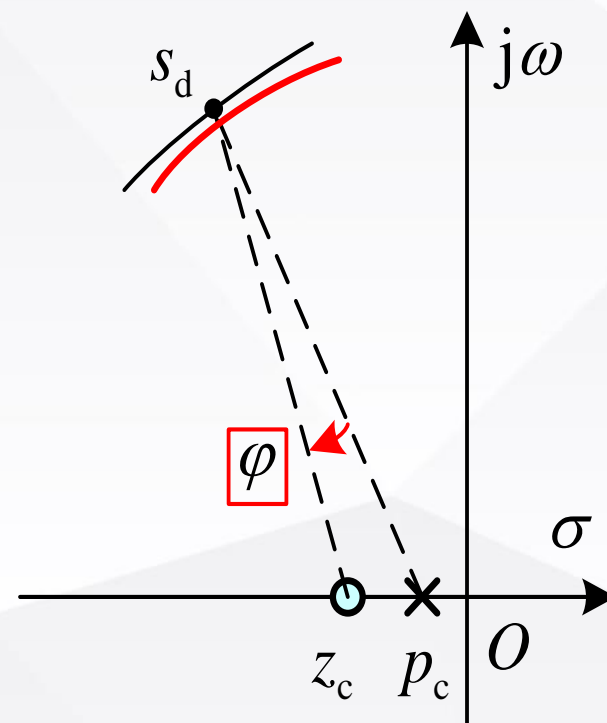
- 适于用根轨迹设计:  $G_c(s) = \frac{s - z_c}{s - p_c}$ , 其中  $\frac{z_c}{p_c} = \beta > 1$

# 基于根轨迹法设计滞后校正装置

基本原则：尽量减少对动态性能的影响，改善稳态性能  
因此希望保持闭环主导极点不动，满足下面的幅值条件：

$$\begin{aligned} 1 &= |G_c(s)G_p(s)| = \\ &= \left| \frac{s-z_c}{s-p_c} \right| \cdot |G_p(s)|, \text{ 而 } |G_p(s)|=1 \\ \Rightarrow \quad &\left| \frac{s_d-z_c}{s_d-p_c} \right| \approx 1 \end{aligned}$$

- $p_c$  和  $z_c$  应彼此非常接近. 可以保证主导极点附近的根轨迹几乎不变



# 基于根轨迹法设计滞后校正装置

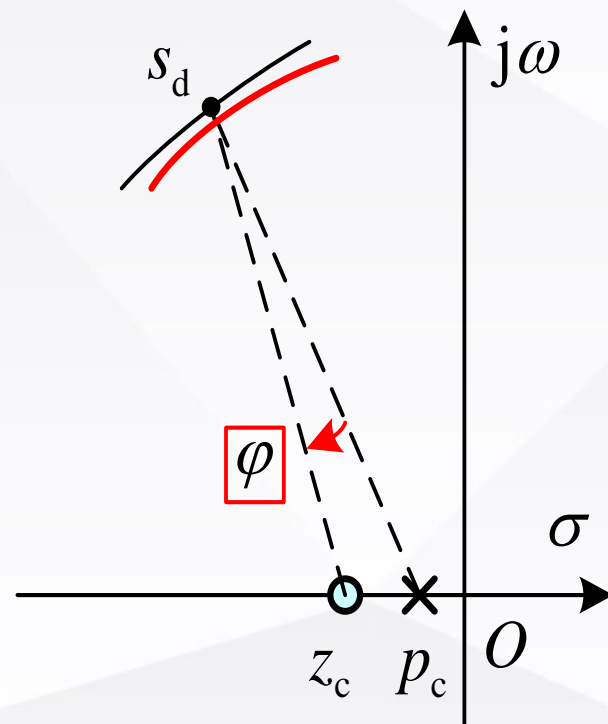
## 滞后校正装置零点、极点和增益的选择

$$G_c(s) = \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

- 为改善系统稳态性能,  $\beta = \frac{z_c}{p_c}$  应取值较大

综合这两个要求,  $p_c$  和  $z_c$  都应该非常接近原点, 即

$$z_c \ll 1, p_c \ll 1, \beta = \frac{z_c}{p_c} \gg 1 \text{ 或者 } T \ll 1, 1 \ll \beta \ll T^{-1}$$

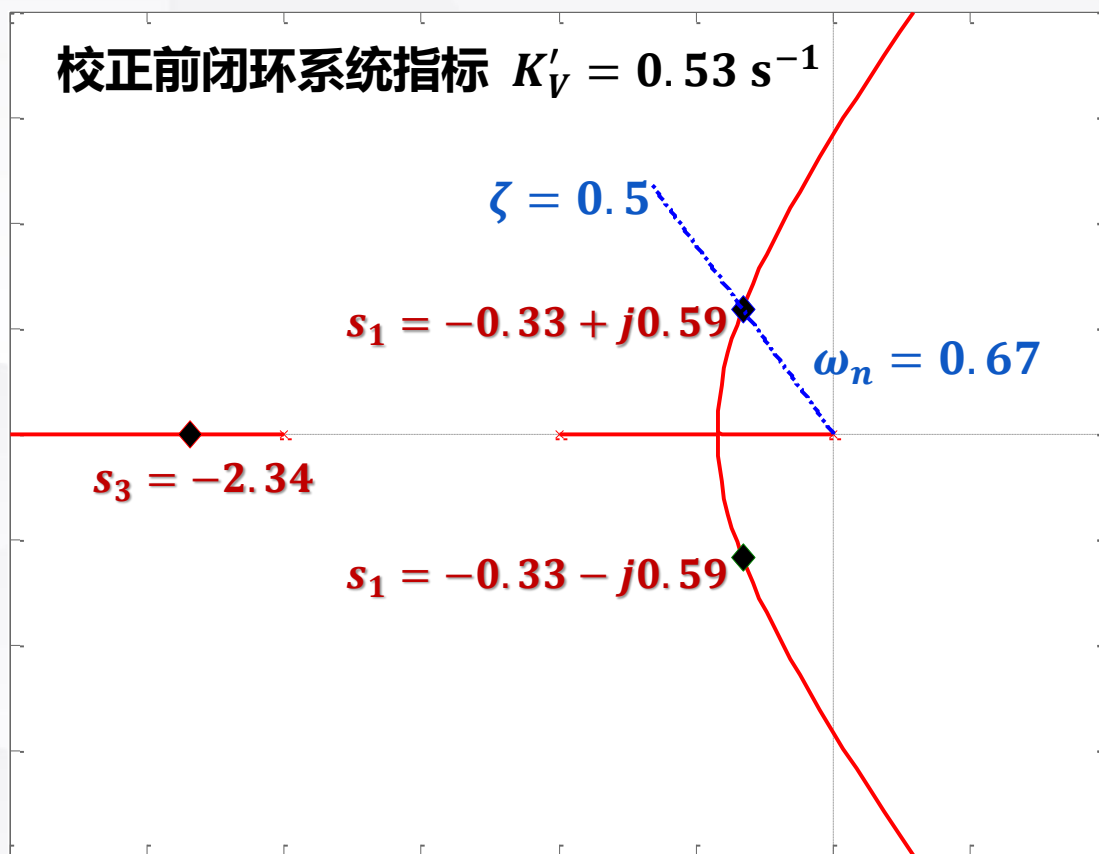


# 基于根轨迹法设计滞后校正装置

例 给定  $G_p(s) = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)}$ , 设计滞后校正装置以使校正后的系统主导极点基本不变, 且速度误差系数不小于  $K_V = 5 \text{ s}^{-1}$ 。

$$G_c(s) = \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

- 需额外增益  $K' = \frac{K_V}{K'_V} = \frac{5}{0.53} \approx 9.43$
- 为保持主导极点位置不变, 取
  - $\beta = 10 \geq K'$
  - $p_c = -0.01, z_c = \beta p_c = -0.1$



# 基于根轨迹法设计滞后校正装置

- 根据幅值条件准确求取  $K_c$

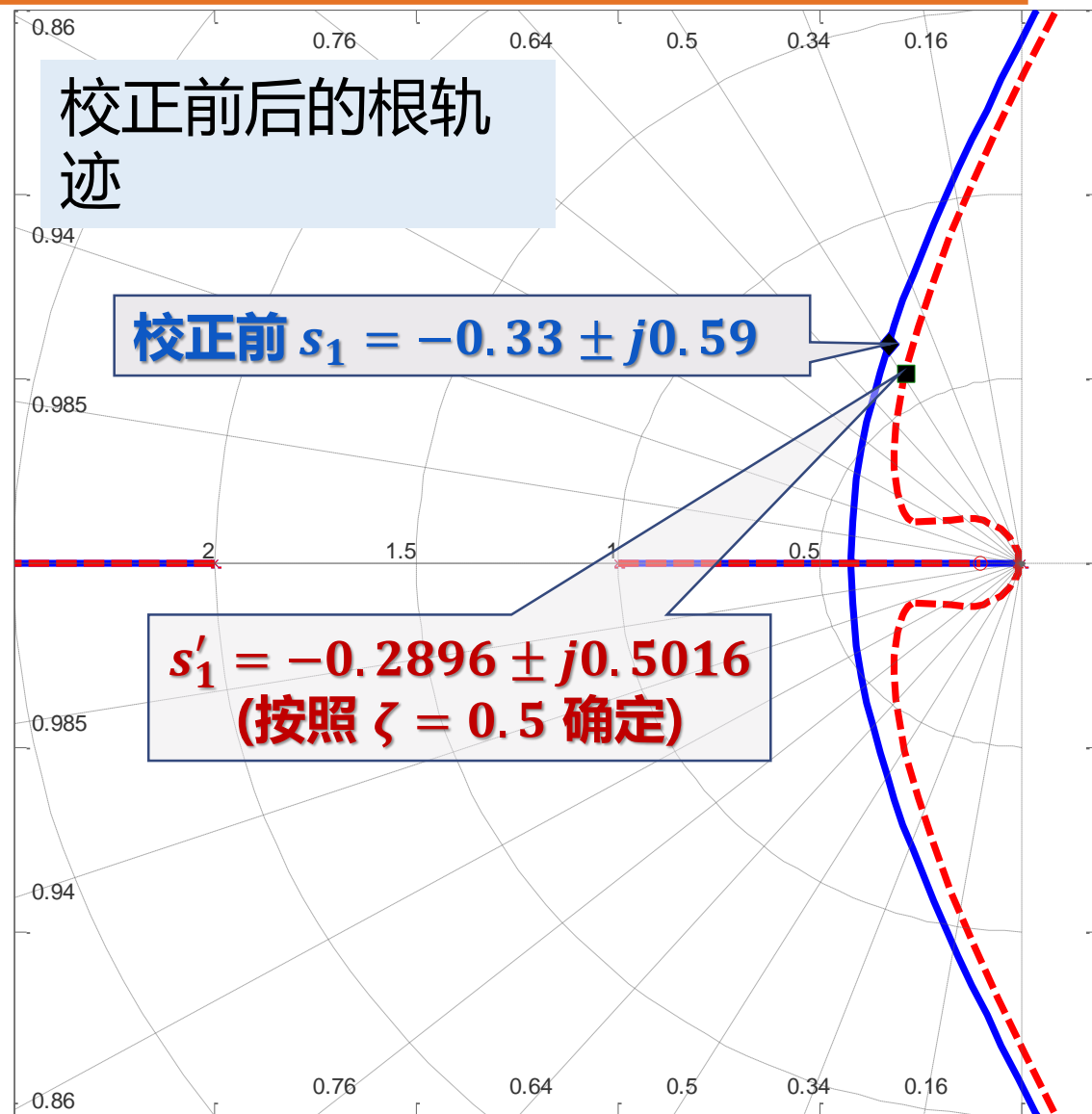
$$|G_p(s'_1)G_c(s'_1)| = 1$$

$$\left| \frac{1.06}{s'_1(s'_1 + 1)(s'_1 + 2)} \cdot K_c \frac{s'_1 + 0.1}{s'_1 + 0.01} \right| = 1$$

- 检查校正后的系统是否满足要求

$$G_c(s) = 0.9071 \cdot \frac{s + 0.1}{s + 0.01}$$

- 主导极点变化不大
- 速度误差系数:  $K'_V = 4.808 < 5 \text{ s}^{-1}$



# 基于根轨迹法设计滞后校正装置

## 进一步改善的措施

- 减小  $|z_c|$  和  $|p_c|$ , 但保持  $\beta = z_c/p_c$  不变, 可降低校正对根轨迹的影响

例如, 取  $G_c(s) = 0.95 \cdot \frac{s+0.05}{s+0.005}$ , 则校正后:

- 主导极点:  $\zeta = 0.5, \omega_n = 0.579 \rightarrow 0.628$
  - 速度误差系数:  $K'_V = 5.04 > 5 \text{ s}^{-1}$
- 提高  $\beta$  但保持  $z_c$  不变, 可以提高稳态误差系数

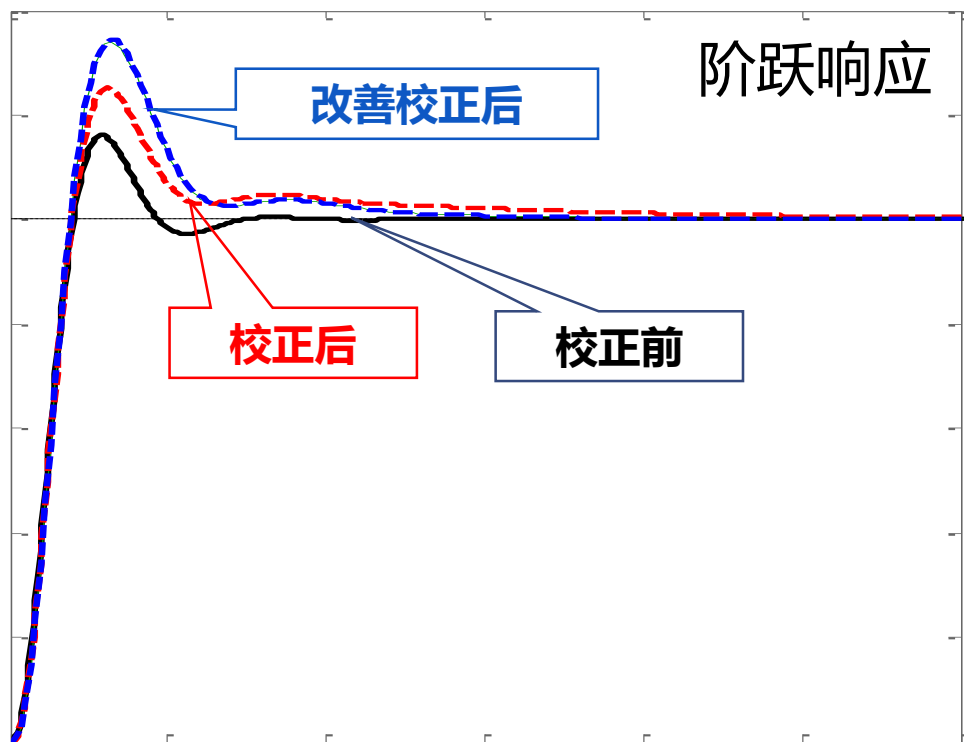
例如, 取  $G_c(s) = 0.905 \cdot \frac{s+0.1}{s+0.008}$ , 则校正后:

- 主导极点:  $\zeta = 0.5, \omega_n = 0.579 \rightarrow 0.577$
- 速度误差系数:  $K'_V = 5.998 > 5 \text{ s}^{-1}$

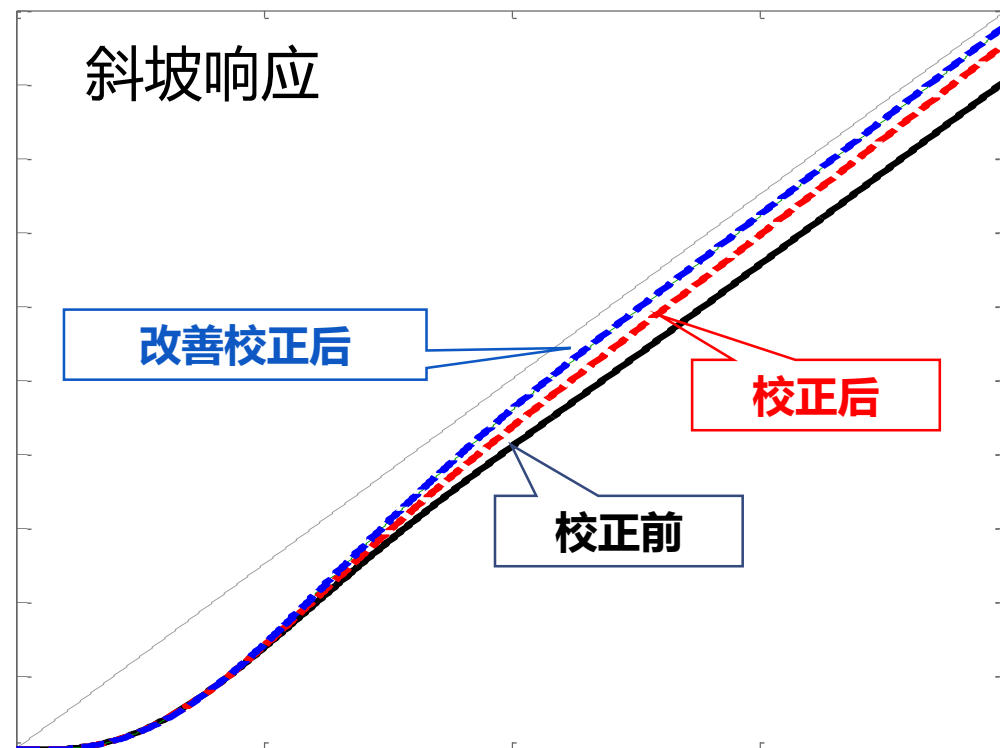


# 基于根轨迹法设计滞后校正装置

## 不同校正措施的对比



校正后系统响应变慢、超调加大



校正后系统跟踪误差减小

# 基于根轨迹法设计滞后校正装置

## 基于根轨迹法设计滞后校正装置的方法总结（供参考）

- (1) 绘制  $G_p(s)$  的根轨迹，并求出主导极点  $s_d$
- (2) 计算所需要的额外增益
- (3) 根据所需额外增益确定  $p_c$ ,  $z_c$  和  $K_c \approx \beta = z_c/p_c$  ,  
得到校正装置传递函数  $G_c(s)$
- (4) 绘制采用  $G_p(s)G_c(s)$  的根轨迹，检查设计是否满足要求

# 超前-滞后校正装置的特性

## 设计中常用的表达形式

常引入附加增益 $K_c$ 和另一个独立的零极点比例系数 $\alpha$ ，得到更一般的形式：

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{1 + \alpha T_1 s}{1 + T_1 s} \cdot \frac{1 + T_2 s}{1 + \beta T_2 s} = \frac{K_c \alpha}{\beta} \cdot \frac{s + \frac{1}{\alpha T_1}}{s + \frac{1}{T_1}} \cdot \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}}$$

其中  $\alpha > 1, \beta > 1$ . 应用中可以  $\alpha = \beta$ , 也可以  $\alpha \neq \beta$ .

- 用根轨迹法设计时，常写作：

$$G_c(s) = K_c \cdot \frac{s - z_1}{s - p_1} \cdot \frac{s - z_2}{s - p_2}, \quad \frac{p_1}{z_1} = \alpha > 1, \quad \frac{z_2}{p_2} = \beta > 1$$

# 基于根轨迹法设计超前-滞后校正

**应用场合：系统稳态误差大，响应速度慢**

- (1)  $T_1$  和  $T_2$  可以分开选，但要满足  $T_2 \gg T_1$**
- (2) 超前部分：用于提高稳定性和响应速度**
  - 设计与单独使用超前校正的方法相同
  - 可以选择校正装置的零点以消去对象最靠近原点的极点，以提高稳定性、加快响应
- (3) 滞后部分：用于提高稳态精度**
  - 与单独使用滞后校正相同，零极点靠近原点并取较大的 $\beta$
- (4) 超前和滞后校正可分别设计，先后顺序皆可**

# 基于根轨迹法设计超前-滞后校正

例: 给定  $G_p(s) = \frac{4}{s(s+2)}$ , 设计校正装置使校正后的闭环系统满足:

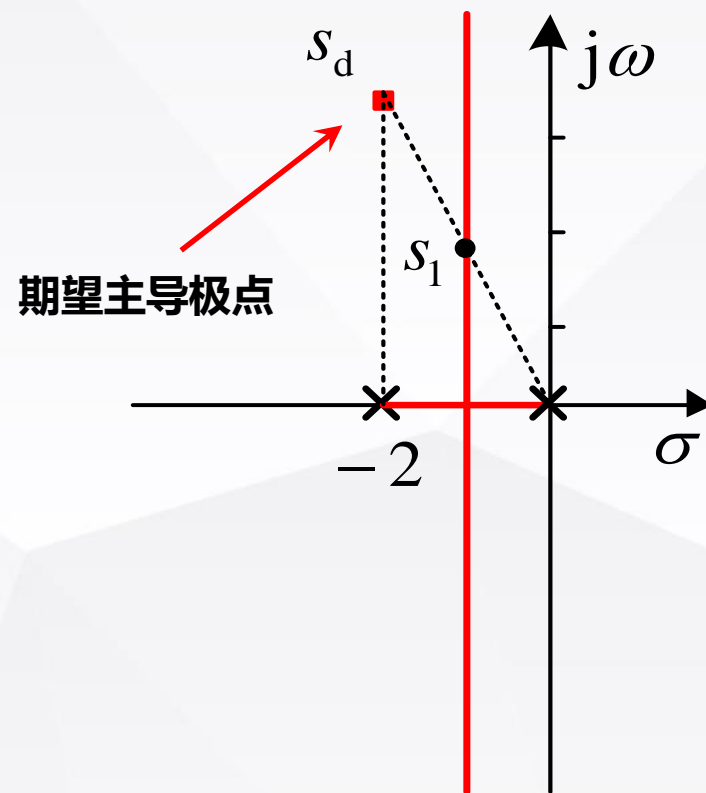
$K_V = 20 \text{ s}^{-1}$ , 闭环主导极点  $\omega_n = 4 \text{ rad/s}$ ,  $\zeta = 0.5$ .

(i) 期望闭环主导极点

$$\begin{aligned} s_d &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -2 \pm j2\sqrt{3} \end{aligned}$$

(ii) 校正前系统:  $K'_V = 2 \text{ s}^{-1}$

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -1 \pm j\sqrt{3} \\ (\omega_n &= 2 \text{ rad/s}, \zeta = 0.5) \end{aligned}$$



静态和动态性能都不理想, 采用超前-滞后校正

# 基于根轨迹法设计超前-滞后校正

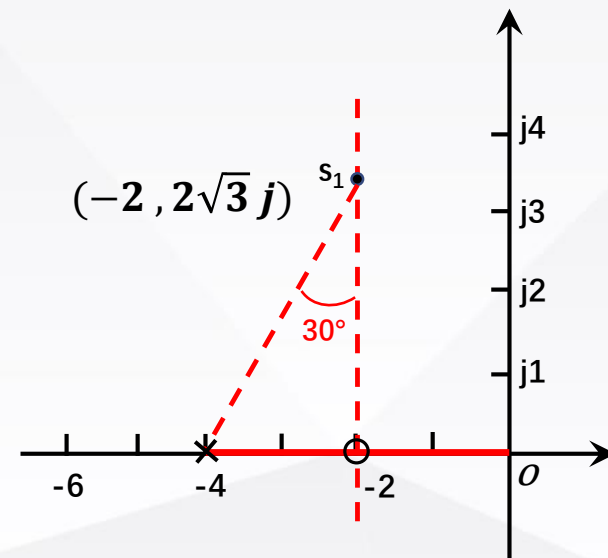
$$G_c(s)G_p(s) = K_c \cdot \frac{s - z_1}{s - p_1} \cdot \frac{s - z_2}{s - p_2} \cdot \frac{4}{s(s+2)}$$

## (iii) 超前校正装置

- 利用未校正的传递函数及闭环主导极点可以算得：

$$\arg[G_p(-2 \pm j 2\sqrt{3})] = -210^\circ$$

- 故可得所需超前角  $\varphi = 30^\circ$
- 选定  $z_1 = -2$ ，由右图可得  $p_1 = -4$



- 根据根轨迹的幅值条件  $|G_p(s_d)G_c(s_d)|_{s_d=-2+j 2\sqrt{3}} = 1$  可得  $K_c = 4$ ,

从而可得超前校正装置的传递函数  $G_{c1}(s) = \frac{4(s+2)}{s+4}$

# 基于根轨迹法设计超前-滞后校正

## (iv) 滞后校正装置

- 经超前校正后, 系统的开环传递函数为  $G_p(s)G_{c1}(s) = \frac{16}{s(s+4)}$
- 此时系统的静态速度误差系数为  $K_V'' = 4 \text{ s}^{-1}$ ,  $\frac{K_V}{K_V''} = 5$
- 因此在选择滞后校正装置传递函数的零极点时应满足  $\beta = \frac{z_2}{p_2} = 5$ ,  
例如可选择  $z_2 = -0.1$ ,  $p_2 = -0.02$
- 可得滞后校正装置的传递函数  $G_{c2}(s) = \frac{s+0.1}{s+0.02}$

# 基于根轨迹法设计超前-滞后校正

## (v) 检验校正后的系统是否满足要求

$$G_c(s)G_p(s) = 4 \cdot \frac{s+2}{s+4} \cdot \frac{s+0.1}{s+0.02} \cdot \frac{4}{s(s+2)} = \frac{16(s+0.1)}{s(s+4)(s+0.02)}$$

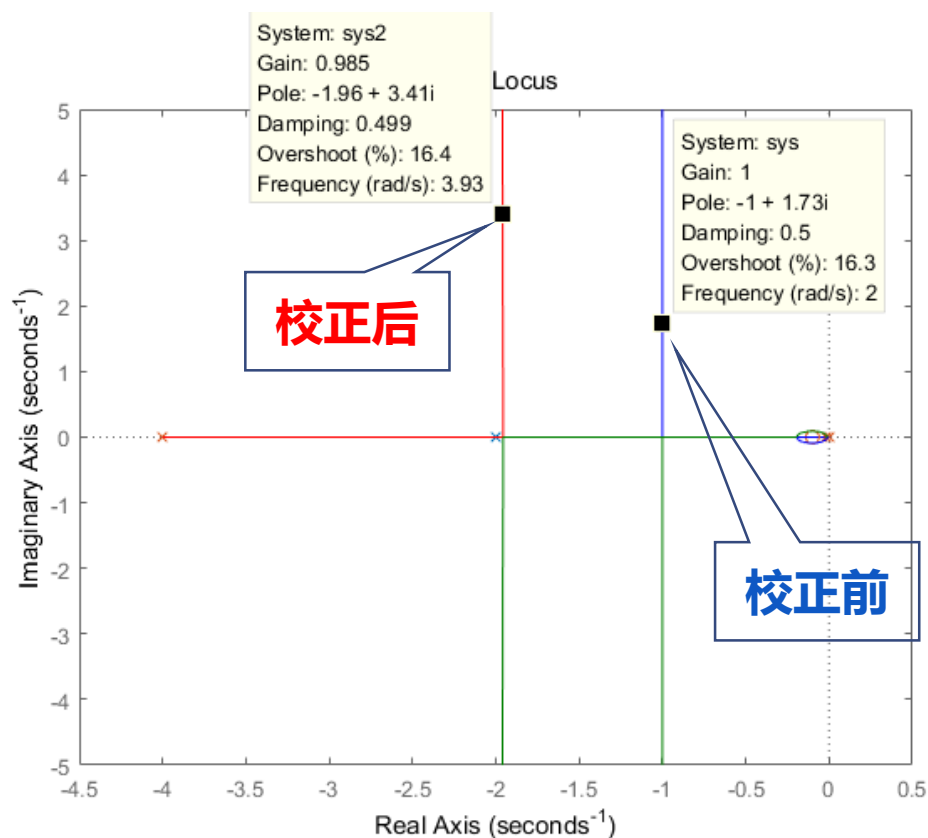
- 闭环极点为  $s_{1,2} = -1.959 \pm j 3.441$ ,  
 $s_3 = -0.102$  (与闭环零点  $z = -0.1$  非常接近)
- 实际主导极点为  $s_d = -1.959 \pm j 3.441$ , 与期望值  $s_d = -2 \pm j 2\sqrt{3}$  非常接近
- 速度误差系数  $K_V = 20 \text{ s}^{-1}$

因此, 设计满足要求。

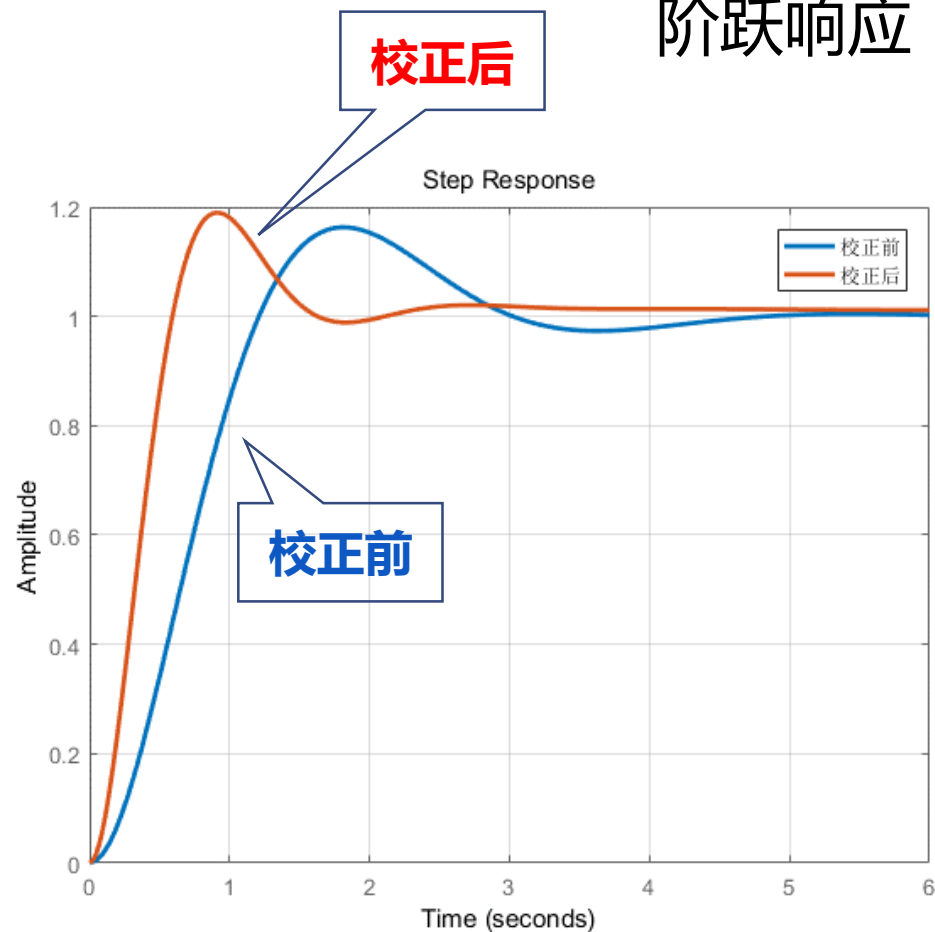


# 基于根轨迹法设计超前-滞后校正

根轨迹



阶跃响应



# 基于根轨迹法设计超前-滞后校正

例: 给定  $G_p(s) = \frac{4}{s(s+0.5)}$ , 设计校正装置使校正后的闭环系统满足:

$K_V = 50 \text{ s}^{-1}$ , 闭环主导极点  $\omega_n = 5 \text{ rad/s}$ ,  $\zeta = 0.5$ .

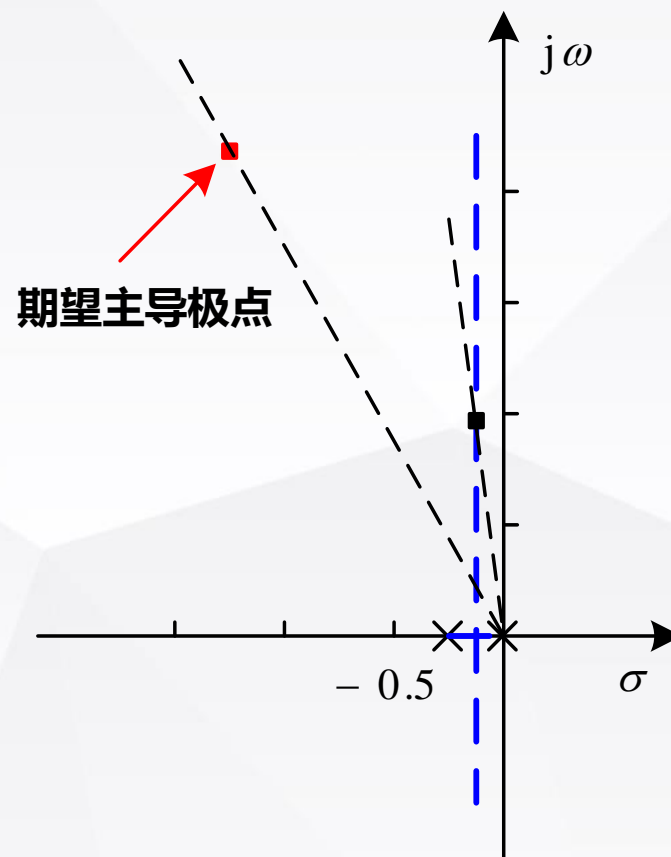
(i) 期望闭环主导极点

$$\begin{aligned} s_d &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -2.5 \pm j4.33 \end{aligned}$$

(ii) 校正前系统:  $K'_V = 8 \text{ s}^{-1}$

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -0.25 \pm j1.98 \\ (\omega_n &= 2 \text{ rad/s}, \zeta = 0.125) \end{aligned}$$

静态和动态性能都不理想, 采用超前-滞后校正



# 基于根轨迹法设计超前-滞后校正

$$G_c(s)G_p(s) = K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \cdot \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \cdot \frac{4}{s(s + 0.5)}$$

(iii) 计算  $K_c$

$$\bullet K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G_p(s) = 8K_c = 50 \Rightarrow K_c = 6.25$$

(iv) 滞后校正装置:

$$\bullet \text{选择 } T_2 = 10 \gg 1, \text{ 使得 } \left| \frac{s_d + 1/T_2}{s_d + 1/(\beta T_2)} \right| \approx 1$$

这样后面设计超前校正时, 滞后校正影响较小

# 基于根轨迹法设计超前-滞后校正

(v) 确定超前校正  $s_d = -2.5 \pm j4.33$  需要满足的条件 ( $K_c = 6.25$ )

$$G_c(s)G_p(s) = \frac{4}{s(s+0.5)} \cdot K_c \cdot \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} \cdot \frac{s + \frac{1}{T_2}}{s + \frac{1}{\beta T_2}} \approx \frac{6.25 \times 4}{s(s+0.5)} \cdot \frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\beta}{T_1}} = -1$$

• 需要提供的幅值

$$|G_p(s_d)G_c(s_d)| = 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{s_d + \frac{1}{T_1}}{s_d + \frac{\beta}{T_1}} \right| \approx \left| \frac{6.25 \times 4}{s_d(s_d + 0.5)} \right|^{-1} \approx 0.954$$

• 需要提供的相角

$$\arg[G_p(s_d)] + \arg[G_c(s_d)] = -180^\circ$$

$$\Rightarrow \arg \left[ \frac{s_d + \frac{1}{T_1}}{s_d + \frac{\beta}{T_1}} \right] \approx 55^\circ$$

# 基于根轨迹法设计超前-滞后校正

(vi) 通过上述根轨迹条件确定超前校正参数  $\beta$  和  $T_1$

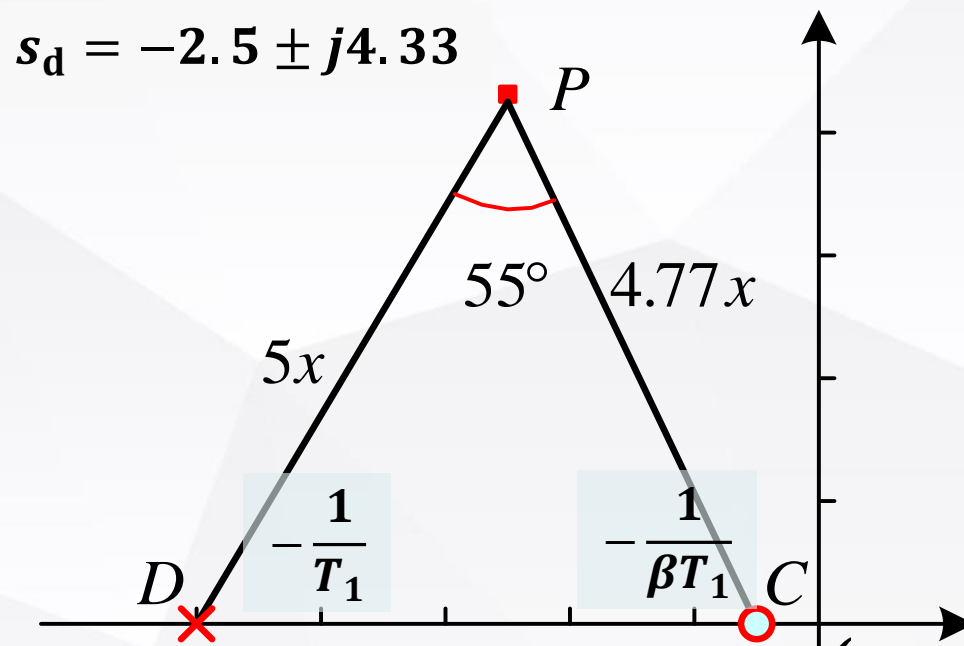
$$\left| \frac{s_d + \frac{1}{T_1}}{s_d + \frac{\beta}{T_1}} \right| \approx 0.954 = \frac{4.77}{5}$$

$$\arg \left[ \frac{s_d + \frac{1}{T_1}}{s_d + \frac{\beta}{T_1}} \right] \approx 55^\circ$$

- 通过三角计算可以确定

$$\frac{1}{T_1} \approx 0.5, \quad \beta \approx 10$$

- 校正装置零点  $-1/T_1$  恰好对消了一个对象极点



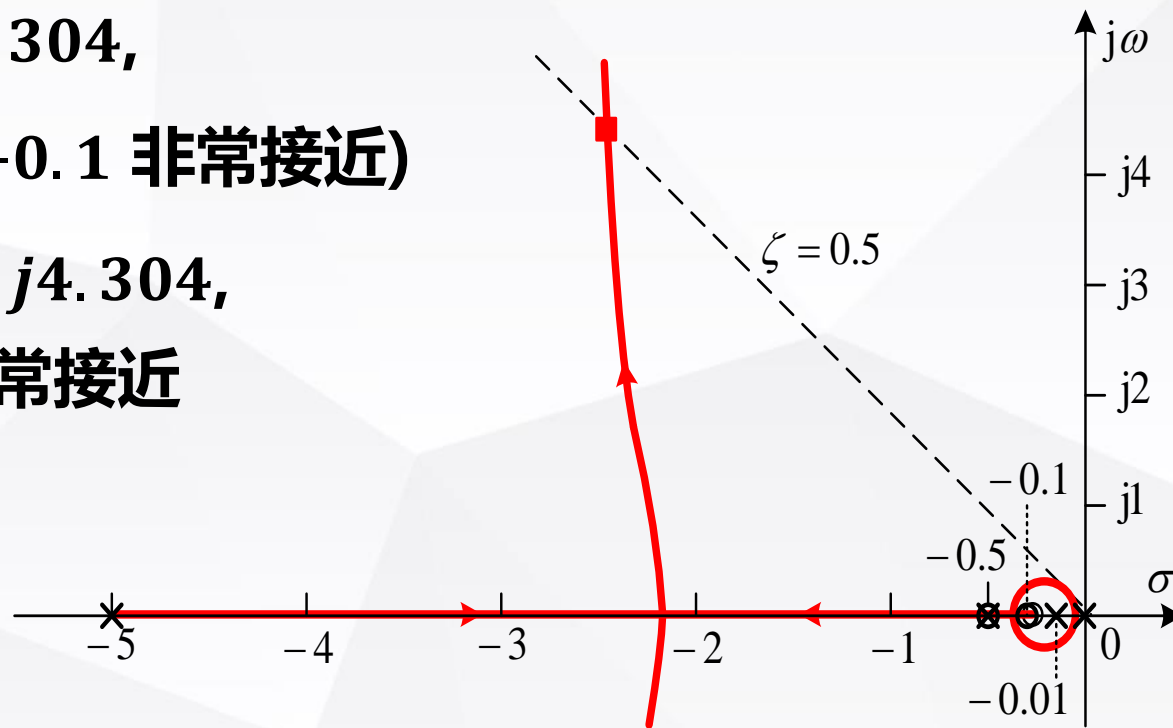
# 基于根轨迹法设计超前-滞后校正

(vii) 检验校正后的系统是否满足要求

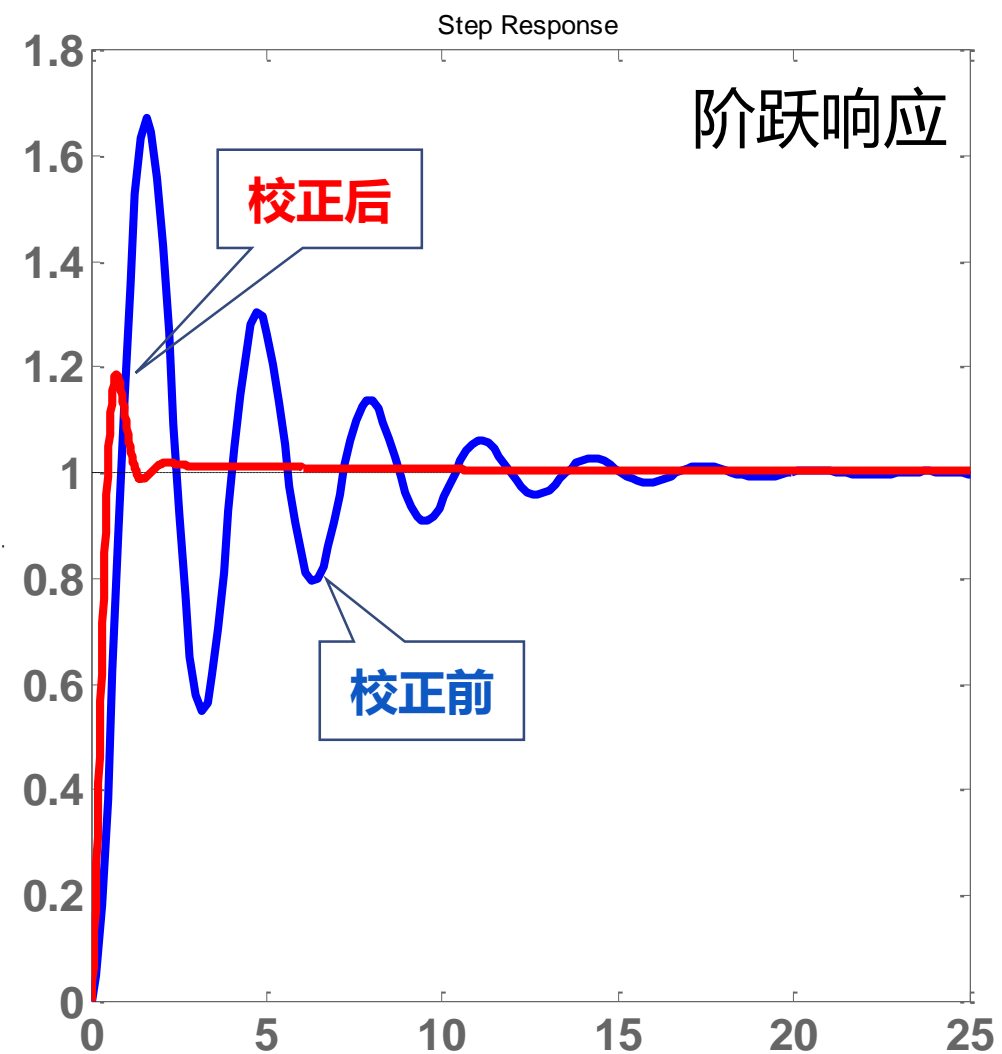
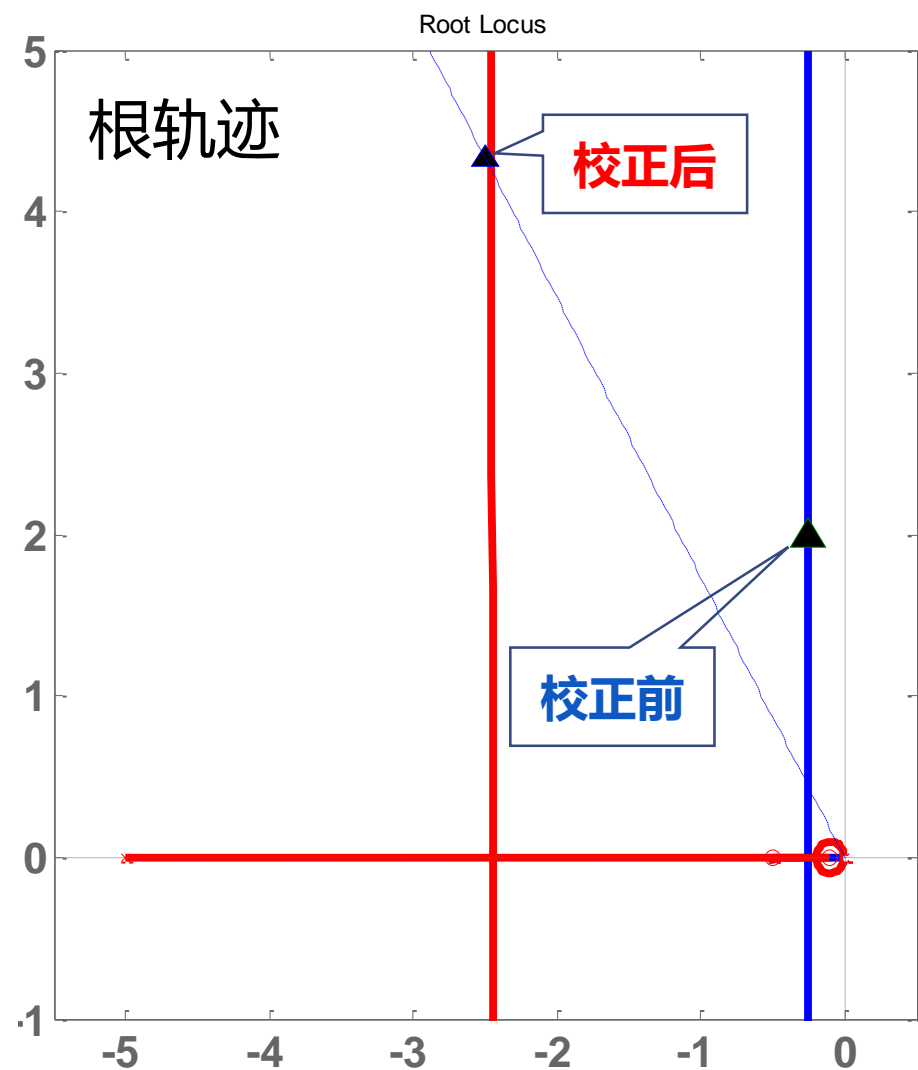
$$G_c(s)G_p(s) = 6.25 \cdot \frac{s + 0.5}{s + 5} \cdot \frac{s + 0.1}{s + 0.01} \cdot \frac{4}{s(s + 0.5)} = \frac{25(s + 0.1)}{s(s + 5)(s + 0.01)}$$

- 闭环极点为  $s_{1,2} = -2.454 \pm j4.304$ ,  
 $s_3 = -0.102$  (与闭环零点  $z = -0.1$  非常接近)
- 实际主导极点为  $s_d = -2.454 \pm j4.304$ ,  
与期望值  $s_d = -2.5 \pm j4.33$  非常接近
- 速度误差系数  $K_V = 50 \text{ s}^{-1}$

因此，设计满足要求。



# 基于根轨迹法设计超前-滞后校正



# 两种校正方法（频率域法，根轨迹法）总结

性能指标	校正方法	输入量	校正所带来的影响	副作用	校正装置形式
静态误差 $\delta$	频率域法	静态误差系数 $K$ , 相位裕度 $\gamma$ , 截止频率 $\omega_c$	超前: 增大 $K$ , 指定 $\omega_c$ , 增大 $\gamma$	增大 $\omega_c$	$K_c \frac{1 + \alpha Ts}{1 + Ts} (\alpha > 1)$
			滞后: 增大 $K$ , 减小 $\omega_c$ , 增大 $\gamma$	减小 $\omega_c$	$K_c \frac{1 + Ts}{1 + \beta Ts} (\beta > 1)$
			超前滞后: 增大 $K$ , 增大 $\gamma$ , 维持 $\omega_c$ 不变		$K_c \frac{1 + \alpha T_1 s}{1 + T_1 s} \cdot \frac{1 + T_2 s}{1 + \beta T_2 s}$
过渡过程时间 $t_s$	根轨迹法	静态误差系数 $K$ , 阻尼系数 $\zeta$ , 无阻尼自振频率 $\omega_n$	超前: 主导极点左移	$K$ 可能减小	$K_c \frac{s - z_c}{s - p_c} (z_c < p_c)$
			滞后: $K$ 增大, 主导极点位置不变		$\frac{s - z_c}{s - p_c} (z_c > p_c)$
			超前滞后: $K$ 增大, 主导极点左移		$K_c \frac{s - z_1}{s - p_1} \cdot \frac{s - z_2}{s - p_2}$