运筹学第五次作业参考答案（20231025）

1. 用单纯形法求解以下线性规划问题，并从单纯形表中判断是否存在多个最优解。若存在，请将所有最优解用参数化形式表示。

$$\begin{aligned} \max\ & 2x_1+3x_2+x_3 \\ \text{s.t.}\ & x_1+x_2+x_3\le 4 \\ & x_1+2x_2\le 7 \\ & x_i\ge 0, i=1,2,3 \end{aligned}$$

解：

加入松弛变量，得到单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_4	1	1	1	1	0	4
x_5	1	2	0	0	1	7
	2	3	1	0	0	z

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	1	1	1	1	0	4
x_5	0	1	-1	-1	1	3
	0	1	-1	-2	0	z-8

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_1	1	0	2	2	-1	1
x_2	0	1	-1	-1	1	3
	0	0	0	-1	-1	z-11

此时所有检验数都为非负数，已经得到一个最优解$\boldsymbol{x}^{(1)}=(1,3,0)^{\mathrm{T}}$，最优值为 11.

但注意到 x_3 检验数为 0，仍然可以继续进基，说明存在其他最优解。

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	1/2	0	1	1	-1/2	1/2
x_2	1/2	1	0	0	1/2	7/2
	0	0	0	-1	-1	z-11

此时得到一个新的最优解$\boldsymbol{x}^{(2)}=(0,7/2\ ,1/2\ )^{\mathrm{T}}$，最优值仍然为 11.

综上，所有最优解可以表示为两个最优顶点之间的连线

$$\boldsymbol{x}^*=\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}=\left(\lambda,\frac{7-\lambda}{2},\frac{1-\lambda}{2}\right)^{\mathrm{T}},\ \lambda\in[0,1]$$

2. 将以下线性规划问题转化为标准形式

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 7 \\ & 0 \leq x_1 \leq 3 \\ & -2 \leq x_2 \leq 6 \end{aligned}$$

解：

形式不唯一，但请尽量将变量全移到左边，常数全移到右边，目标函数不含常数。

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 2(x_2^+ - x_2^-) - (x_3^+ - x_3^-) \\ \text{s.t.}\quad & x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- + 3x_3^+ - 3x_2^- - x_4 = 4 \\ & 2x_1 + 5x_2^+ - 5x_2^- - x_3^+ + x_3^- + x_5 = 7 \\ & x_1 + x_6 = 3 \\ & x_2^+ - x_2^- + x_7 = 6 \\ & -x_2^+ + x_2^- + x_8 = 2 \\ & x_1, x_2^-, x_2^+, x_3^-, x_3^+, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0 \end{aligned}$$

3. 把线性规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & x_1 + x_3 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \qquad \leq 5 \\ & \frac{1}{2}x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

记为 P，

(1) 用单纯形算法解 P；

(2) 写出 P 的对偶 D；

(3) 写出 P 的互补松紧条件，并利用它们解对偶 D。

通过计算 P 和 D 的最优值，检查你的答案。

解：

(1) 先转换为标准形式

$$\begin{aligned} -\max\ & -x_1 - x_3 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 = 5 \\ & \frac{1}{2}x_2 + x_3 \qquad = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

以x_3, x_4为初始可行基，画出单纯形表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_4	1	2	0	1	5
x_3	0	1/2	1	0	3
	-1	1/2	0	0	z+3

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_2	1/2	1	0	1/2	5/2
x_3	-1/4	0	1	-1/4	7/4
	-5/4	0	0	-1/4	z+7/4

得到最优解与最优值为

$$x^* = \left(0, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, 0\right)^\top, z^* = -\left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

(2) 对偶问题为

$$\begin{aligned} \max\ & -5y_1 + 3y_2 \\ \text{s.t.}\ & -y_1 \le 1 \\ & -2y_1 + \frac{1}{2}y_2 \le 0 \\ & y_2 \le 1 \\ & y_1 \ge 0, y_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(3) 问题 P 的最优解$x_2, x_3 \neq 0$，则在 D 中有

$$-2y_1 + \frac{1}{2}y_2 = 0$$

$$y_2 = 1$$

解得$y^* = (1/4, 1)^\top$，此时 D 的最优值为$-5 \times 1/4 + 3 = 7/4$，与 P 的最优值相同。

4. 用单纯形法直接求解如下线性规划问题

$$\begin{aligned} \max\ & z = 5x_1 + x_2 + 2x_3 \\ s.t.\ & x_1 + x_2 + x_3 \le 6 \\ & 6x_1 + x_3 \le 8 \\ & x_2 + x_3 \le 2 \\ & x_j \ge 0, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

其最优单纯形表如下：

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	1/6	0	1	-1/6	-5/6	3
x_1	1	-1/6	0	0	1/6	-1/6	1
x_3	0	1	1	0	0	1	2
	0	-1/6	0	0	-5/6	-7/6	z-9

1） 从表中直接读出该问题对偶问题的最优解和最优值。

2） 若目标函数中 x_1 的系数变为 c_1，求能够使当前基保持最优的 c_1 的取值范围。

解：

1) 对偶问题的最优值为 9，最优解为$(y_1, y_2, y_3) = \left(0, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right)^{\top}$

2) 设目标函数变为 $\max\ z = C_1x_1 + x_2 + 2x_3$，则单纯形表变为

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	1/6	0	1	-1/6	-5/6	3
x_1	1	-1/6	0	0	1/6	-1/6	1
x_3	0	1	1	0	0	1	2
	C_1	1	2	0	0	0	z-9

将目标函数中基变量的系数消去得到

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_4	0	1/6	0	1	-1/6	-5/6	3
x_1	1	-1/6	0	0	1/6	-1/6	1
x_3	0	1	1	0	0	1	2
	0	-1+C_1/6	0	0	-C_1/6	-2+C_1/6	z-4-C_1

若仍然保持当前基为最优，应有

$$\begin{cases} -1 + \frac{C_1}{6} \le 0 \\ -\frac{C_1}{6} \le 0 \\ -2 + \frac{C_1}{6} \le 0 \end{cases}$$

解得$0 \le C_1 \le 6$

5. 请用切平面方法求解如下整数线性规划问题

$$\begin{aligned} &\max\ 11y_1 + 4y_2 \\ \text{s.t.}\quad & -y_1 + 2y_2 \le 4 \\ & 5y_1 + 2y_2 \le 16 \\ & 2y_1 - y_2 \le 4 \\ & y_1, y_2 \ge 0, y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

解：

原问题引入松弛变量y_3, y_4, y_5，画出单纯形表

BV	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	RHS
y_3	-1	2	1	0	0	4
y_4	5	2	0	1	0	16
y_5	2	-1	0	0	1	4
	11	4	0	0	0	

BV	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	RHS
y_3	0	3/2	1	0	1/2	6
y_4	0	9/2	0	1	-5/2	6
y_1	1	-1/2	0	0	1/2	2
	0	19/2	0	0	-11/2	

BV	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	RHS
y_3	0	0	1	-1/3	4/3	4
y_2	0	1	0	2/9	-5/9	4/3
y_1	1	0	0	1/9	2/9	8/3
	0	0	0	-19/9	-2/9	

取上表中第 3 行的约束，即

$$y_1+\frac{1}{9}y_4+\frac{2}{9}y_5=\frac{8}{3}$$

$$\Delta(y)=\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{9}y_4+\frac{2}{9}y_5\right)$$

添加割平面约束$\Delta(y)\leq 0$，以及松弛变量y_6，用对偶单纯形法，得到

BV	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	RHS
y_3	0	0	1	-1/3	4/3	0	4
y_2	0	1	0	2/9	-5/9	0	4/3
y_1	1	0	0	1/9	2/9	0	8/3
y_6	0	0	0	-1/9	-2/9	1	-2/3
	0	0	0	-19/9	-2/9	0	

BV	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	RHS
y_3	0	0	1	-1	0	6	0
y_2	0	1	0	1/2	0	-5/2	3
y_1	1	0	0	0	0	1	2
y_5	0	0	0	1/2	1	-9/2	3
	0	0	0	-2	0	-1	

此时得到最优解$\boldsymbol{y}^*=(2,3,0,0,3,0)^\top$，最优值$z_{max}=34$