运筹学

7. 混合整数线性规划

李 力
清华大学

Email: li-li@tsinghua.edu.cn

2023.10.

数学模型

割平面法

分枝定界法

0-1变量的作用

数学模型

整数线性规划问题

目标函数和约束条件依然是线性的

$$\max\left(\text{or}\ \min\right)\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \left(\text{or}\ =\ \text{or}\ \ge\right) b_i,\quad i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j \ge 0,\quad j=1,2,\cdots,n$$

部分或所有变量是整数变量

纯整数线性规划：所有变量是整数变量

混合整数线性规划：同时包含整数和非整数变量

0-1型整数线性规划：所有变量只能等于0或1

例、 有资金 B，可以投资 n 个项目，投资额和收益分别为 a_j 和 c_j，要考虑三个条件：

1）若选择项目1就必须选择项目2；

2）项目3和项目4至少选一个；

3）项目5、6、7中选两个，

如何投资使总效益最大？

变量：$x_j = 1$，投资项目 j，$x_j = 0$，不投项目 j

条件1） $x_2 \geq x_1$

条件2） $x_3 + x_4 \geq 1$

条件3） $x_5 + x_6 + x_7 = 2$

0-1型整数规划模型

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$ 总投资效益

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le B$$ 投资总额约束

$$x_2 \ge x_1$$ 条件1）

$$x_3 + x_4 \ge 1$$ 条件2）

$$x_5 + x_6 + x_7 = 2$$ 条件3）

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad \forall 1 \le j \le n$$

背包问题

- 实例：一个背包，容量为 W。n 件物品，物品 i 容量（重量）为 w_i，价值 v_i。
- 目标：选择一些物品装入背包，使其总容量 $\le W$，总价值最大。

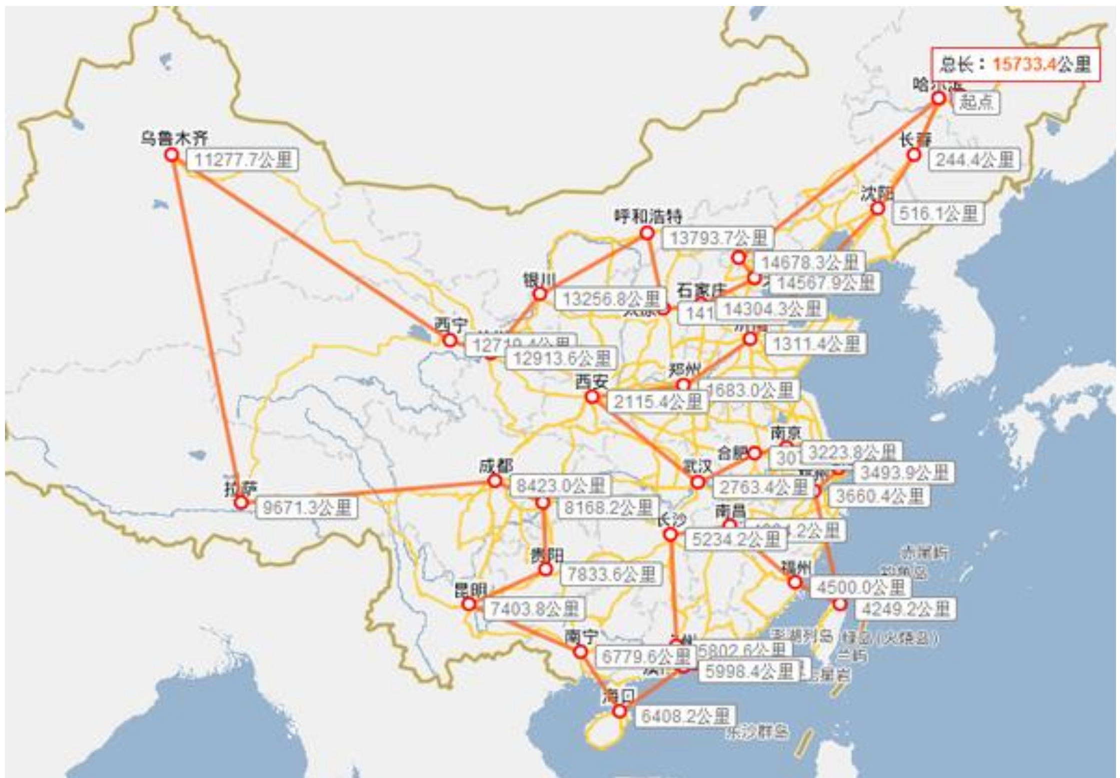
物品	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
体积	200	350	500	430	320	120	700	420	250	100
价格	15	45	100	70	50	75	200	90	20	30

背包问题

- 变量 x_i – 是否选择物品 i。
- 整数规划（0-1 规划）：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \textstyle\sum_i v_i x_i \\
\text{s.t.} \quad & \textstyle\sum_i w_i x_i \le W \\
& x_i \in \{0, 1\}
\end{aligned}
$$

旅行商问题（Travelling salesman problem, TSP）：给定一系列城市和每对城市之间的距离，求解访问每一座城市一次并回到起始城市的最短回路。旅行商问题是一个NP完全问题，在运筹学和理论计算机科学中有着重要的地位。



旅行商问题建模1：

minimize: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

subject to: $\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 2 \quad 1 \le i \le n$ (path enters and leaves)

$x_{ji} = x_{ij}$, binary

$c_{ij} = c_{ji}$ = distance from city i to city j
(assuming **symmetric version**)

x_{ij} if tour goes from i to j or j to i, and 0 otherwise

是否有什么问题？

旅行商问题建模2：Miller-Tucker-Zemlin formulation

minimize:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

subject to:

$$\sum_{j=0}^{n} x_{ij} = 1 \qquad 1 \le i \le n \qquad \text{(out degrees = 1)}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x_{ij} = 1 \qquad 1 \le j \le n \qquad \text{(in degrees = 1)}$$

$$t_i - t_j + n x_{ij} \le n - 1 \qquad 2 \le i, j \le n \qquad \text{(??)}$$

c_{ij} = distance from city i to city j

x_{ij} = 1 if tour visits i then j, and 0 otherwise (binary)

t_i = arbitrary real numbers we need to solve for

The last set of constraints prevents subtours 分离多回路

Consider a cycle that goes from node 3 to 4 we have

$$t_3 - t_4 + n x_{3,4} \le n - 1 \Rightarrow t_3 + 1 \le t_4$$

Similarly t has to increase by 1 along each edge of the cycle that does not include node 1 For a tour of length m that does not go through node 1, we have $t_m + m \le t_m$, a contradiction.

So, every cycle must go through vertex 1.

Together with other constraints, we must get one cycle finally.

整数线性规划的松弛问题

去除整数规划的整数约束后的问题称为其松弛问题

如前面的一般性整数规划问题的松弛问题为

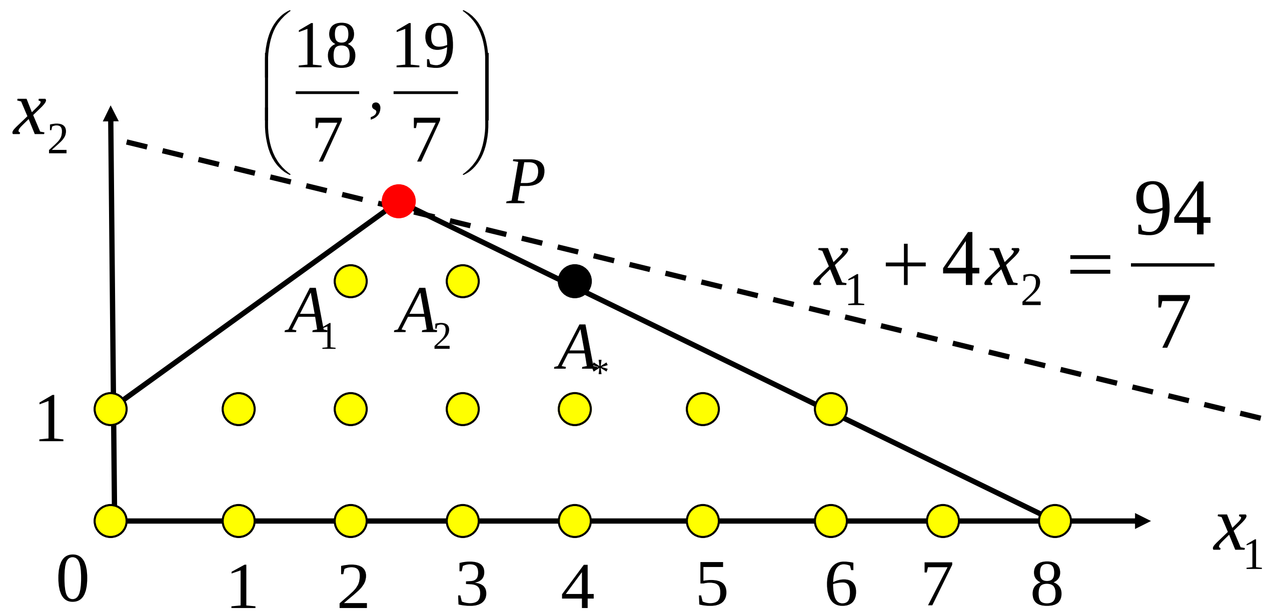
$$\max\ (\text{or}\ \min)\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (\ \text{or}\ =\ \text{or}\ \geq) b_i,\quad i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0,\quad j=1,2,\cdots,n$$

一般情况，原问题的解并不一定是其松弛问题的最优解附近的整数解

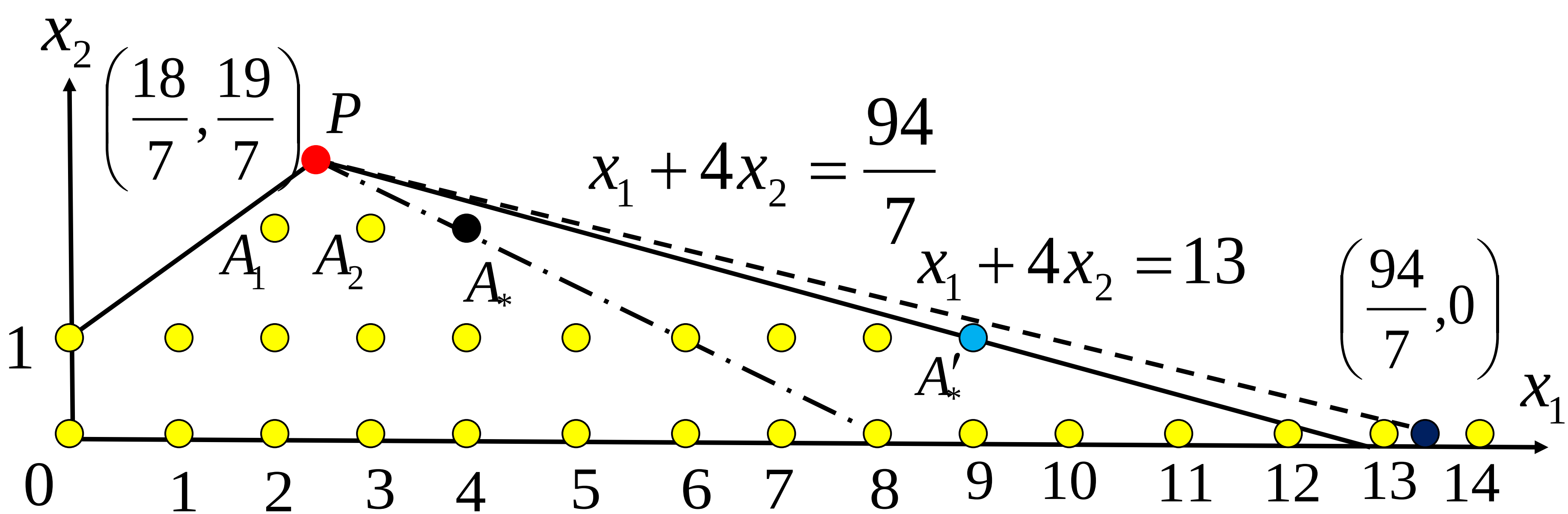
例:
$$\max \quad x_1 + 4x_2$$
$$\text{s.t.} \quad -2x_1 + 3x_2 \le 3$$
$$x_1 + 2x_2 \le 8$$
x_1, x_2 非负且取整数值



P 是松弛问题最优解，附近可行解是 A_1, A_2，最优解是 A_*

如果改变第二个不等式约束:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ & 4x_1 + 15x_2 \le 51 \\ & x_1, x_2 \ \ \text{非负且取整数值} \end{aligned}$$



最优解变成 A'_*，离松弛问题最优解更远！

整数规划的特征：变量整数性要求，需要从问题本身的要求和引入逻辑变量的需要两方面仔细考虑

整数规划的性质：可行域是离散点的集合

适当的线性规划松弛可能导致：

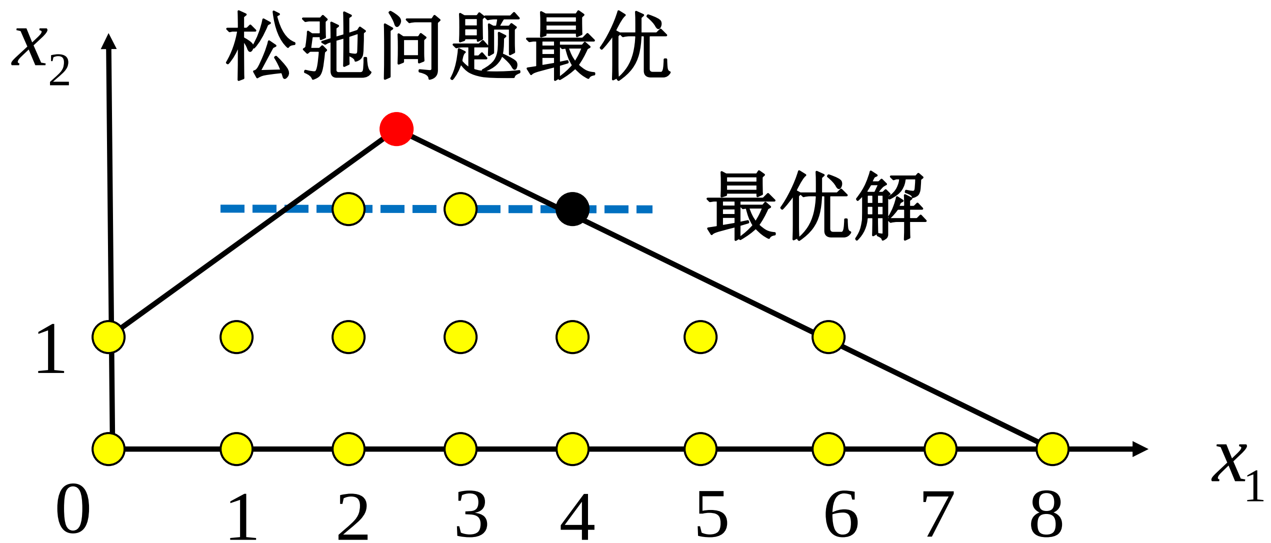
- 整数规划的可行解是松弛线性规划问题的可行解
- 松弛线性规划的最优值 $<$ 整数规划的最优值（假设是求最小的问题）
- 松弛线性规划问题的最优解进行简单的舍入不能得到整数规划的最优解，甚至得不到可行解
- 整数可行解的数目可呈爆炸性增长，枚举法不行

割平面法

割平面法 通过增加半平面约束来逐步缩小定义域

例：

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ & x_1 + 2x_2 \le 8 \\ & x_1, x_2 \text{ 非负且取整数值} \end{aligned}$$

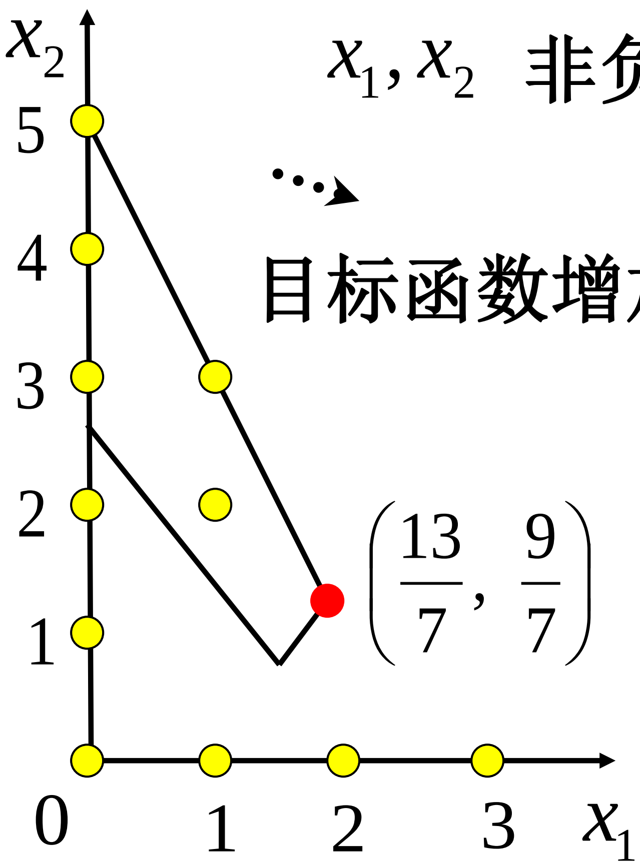


可用一个约束割去松弛问题最优解，<u>不改变原整数线性规划问题可行域</u>

例: $\max\ 3x_1 - x_2$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\le 3 \\ 5x_1 + 4x_2 &\ge 10 \\ 2x_1 + x_2 &\le 5 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 5x_1 + 4x_2 - x_4 &= 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 &= 5 \end{aligned}$$

x_1, x_2 非负且取整数值



松弛问题可行集及

最优解如左图所示

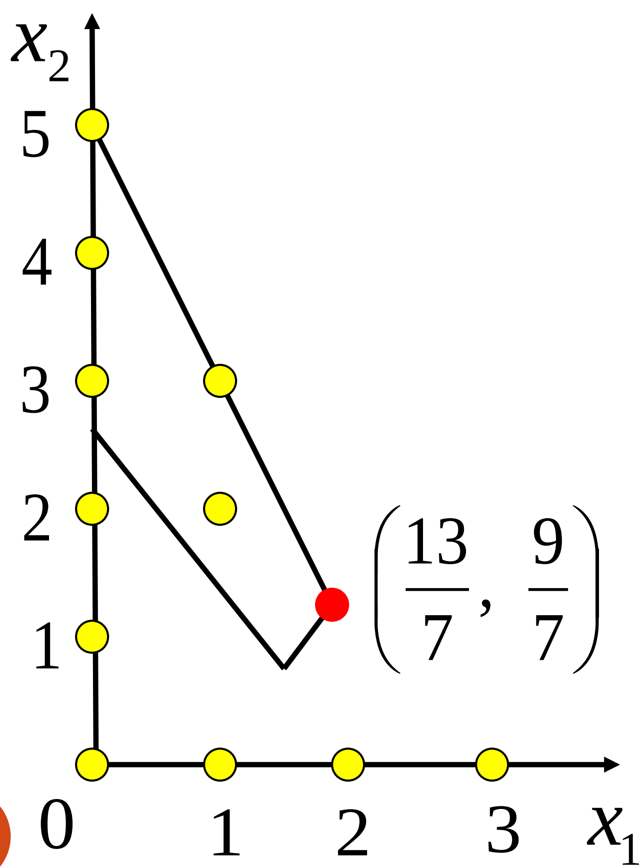
不满足整数约束

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$
$$5x_1 + 4x_2 - x_4 = 10$$
$$2x_1 + x_2 + x_5 = 5$$

$$\Rightarrow$$

最优解的表示式

$$x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 = \frac{13}{7}$$
$$x_2 - \frac{2}{7}x_3 + \frac{3}{7}x_5 = \frac{9}{7}$$
$$x_4 - \frac{3}{7}x_3 + \frac{22}{7}x_5 = \frac{31}{7}$$



如果右边常数都是整数

已经得到原问题最优解

否则一定可以用直线分

割红点和所有可行黄点

取第一个等式约束（右边常数不是整数）

$$x_1 + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5 = \frac{13}{7}$$

将所有系数变成一个<u>整数</u>和一个<u>非负小数</u>之和：

$$\frac{1}{7} = 0 + \frac{1}{7},\ \frac{2}{7} = 0 + \frac{2}{7},\ \frac{13}{7} = 1 + \frac{6}{7}$$

上述等式可以写成

$$x_1 + 0x_3 + 0x_5 - 1 = \frac{6}{7} - \left(\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5\right)$$

记 $\Delta(X) = \frac{6}{7} - \left(\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5\right)$ 等价于 $\Delta(X) = x_1 - 1$

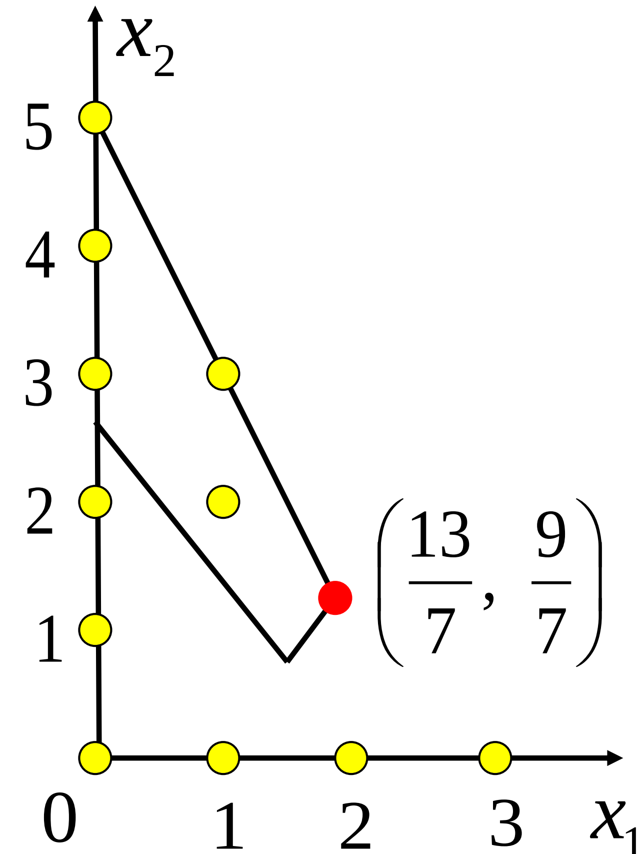
将最优解 $X^* = \left(\frac{13}{7}, \frac{9}{7}, 0, \frac{31}{7}, 0\right)^T$ 代入

$$\Delta(X) = \frac{6}{7} - \left(\frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_5\right) = x_1 - 1$$

$$\Rightarrow \quad \Delta(X^*) = \frac{6}{7} > 0$$

将任何可行解（整数）代入 $\Delta(X)$

$$\Rightarrow \quad \Delta(X) = x_1 - 1 \le 0$$



<u>约束 $\Delta(X) \le 0$ 可割去当前最优解，保留所有可行解</u>

新的优化问题为 $\max \ 3x_1 - x_2$

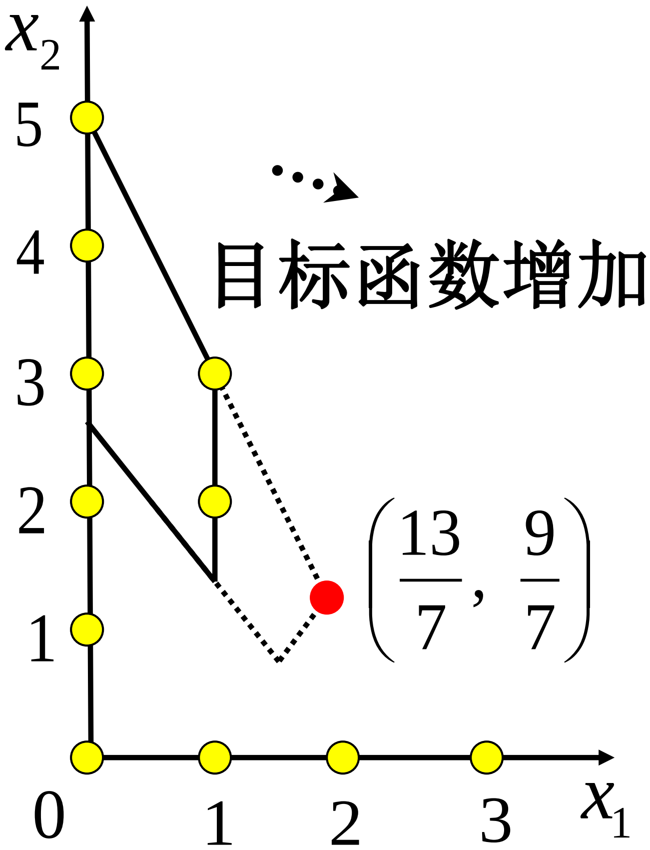
$$\text{s.t.} \quad 3x_1 - 2x_2 \le 3$$

$$5x_1 + 4x_2 \ge 10$$

$$2x_1 + x_2 \le 5$$

$$\Delta(X) \le 0 \qquad (\ x_1 - 1 \le 0\ )$$

x_1, x_2 非负且取整数值



新的松弛问题可行集及原松弛可行集被切割部分见左图

1）原最优解被切割掉

2）所有可行解被保留

$$\max \quad 3x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 3x_1 - 2x_2 \le 3$$

$$5x_1 + 4x_2 \ge 10$$

$$2x_1 + x_2 \le 5$$

$$x_1 \le 1$$

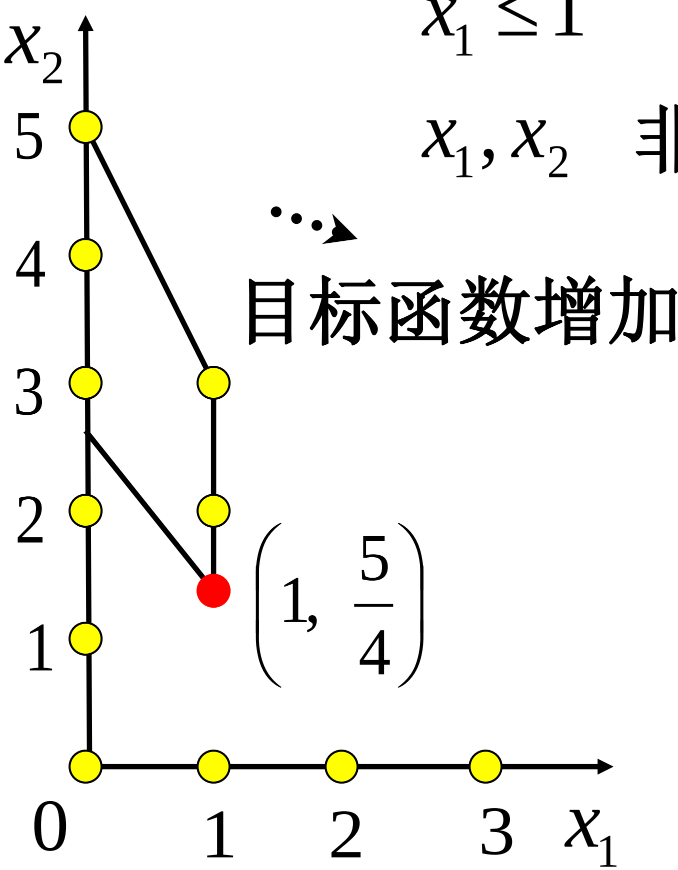
$$x_1, x_2 \quad \text{非负且取整数值}$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$

$$5x_1 + 4x_2 - x_4 = 10$$

$$2x_1 + x_2 + x_5 = 5$$

$$x_1 + x_6 = 1$$

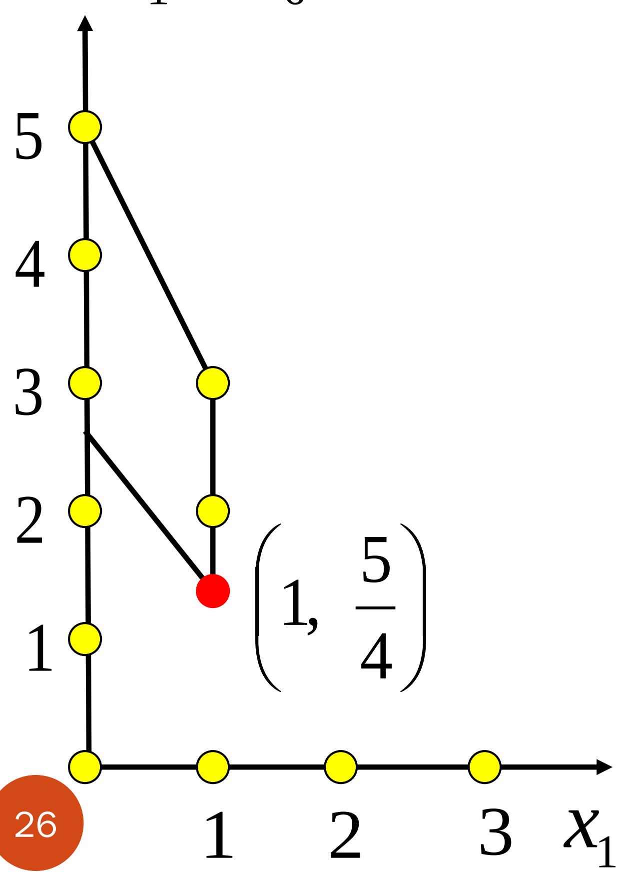


松弛问题可行集及

最优解如左图所示

仍不满足整数约束

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$
$$5x_1 + 4x_2 - x_4 = 10$$
$$2x_1 + x_2 + x_5 = 5$$
$$x_1 + x_6 = 1$$



$$\Rightarrow$$

最优解的表示式

$$x_2 - \frac{1}{4}x_4 - \frac{5}{4}x_6 = \frac{5}{4}$$
$$x_3 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{11}{2}x_6 = \frac{5}{2}$$
$$x_5 + \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_6 = \frac{7}{4}$$
$$x_1 + x_6 = 1$$

如果右边常数都是整数

已经得到原问题最优解

取第三个等式约束（右边常数不是整数）

$$x_5+\frac{1}{4}x_4-\frac{3}{4}x_6=\frac{7}{4}$$

将所有系数变成一个整数和一个非负小数之和：

$$\frac{1}{4}=0+\frac{1}{4},\ -\frac{3}{4}=-1+\frac{1}{4},\ \frac{7}{4}=1+\frac{3}{4}$$

上述等式可以写成 $x_5+0x_4-x_6-1=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{4}x_4+\frac{1}{4}x_6\right)$

利用 $2x_1+x_2+x_5=5,\ x_1+x_6=1$ 可得

回到基本变量约束

$$\Delta(X)=x_5-x_6-1=-x_1-x_2+3$$

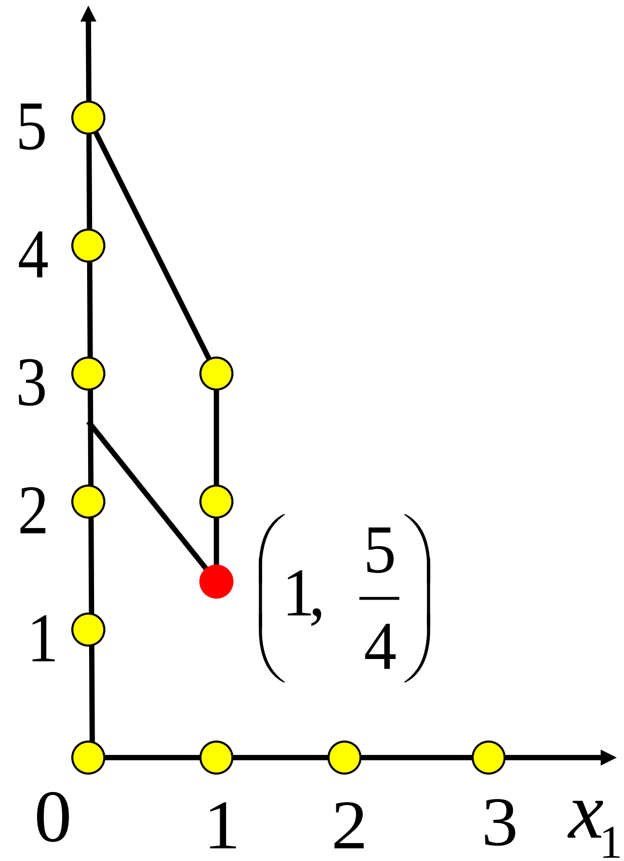
将当前最优解 $X^*=\left(1,\ \frac{5}{4},\frac{5}{2},0,\frac{7}{4},0\right)^T$ 代入

$$\Delta(X)=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{4}x_4+\frac{1}{4}x_6\right)=-x_1-x_2+3$$

$$\Rightarrow \quad \Delta(X^*)>0$$

将任何可行解（整数）代入 $\Delta(X)$

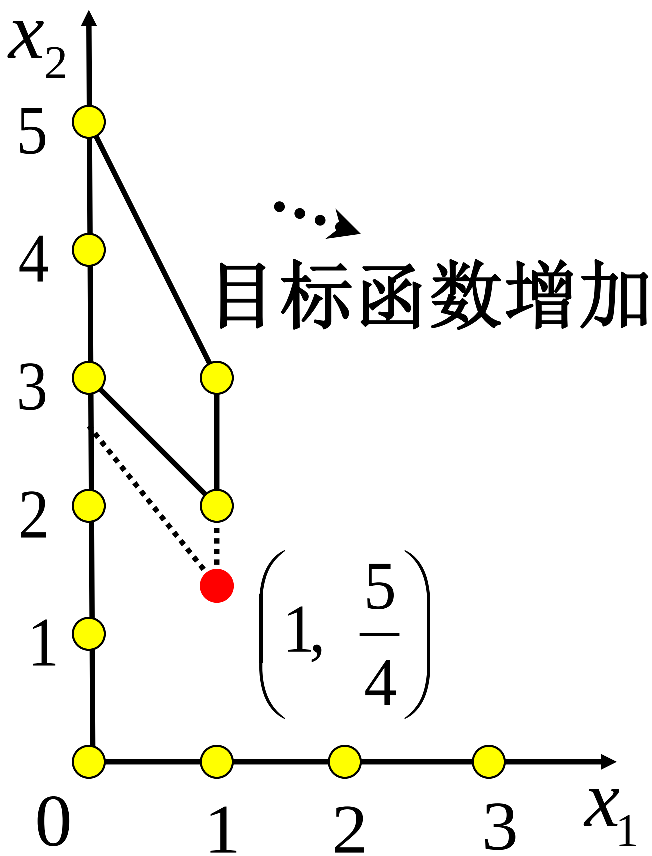
$$\Rightarrow \quad \Delta(X)=-x_1-x_2+3\leq 0$$



约束 $\Delta(X)\leq 0$ 可割去当前最优解，保留所有原可行解

新的优化问题为 $\max \ 3x_1 - x_2$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & 3x_1 - 2x_2 \le 3 \\
& 5x_1 + 4x_2 \ge 10 \\
& 2x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 \le 1,\ x_1 + x_2 \ge 3 \\
& x_1, x_2 \quad \text{非负且取整数值}
\end{aligned}
$$



新的松弛问题可行集及原可行集被切割部分见左图

1）原最优解被切割掉

2）所有整数解被保存

对于松弛问题

$$\max \quad 3x_1 - x_2$$

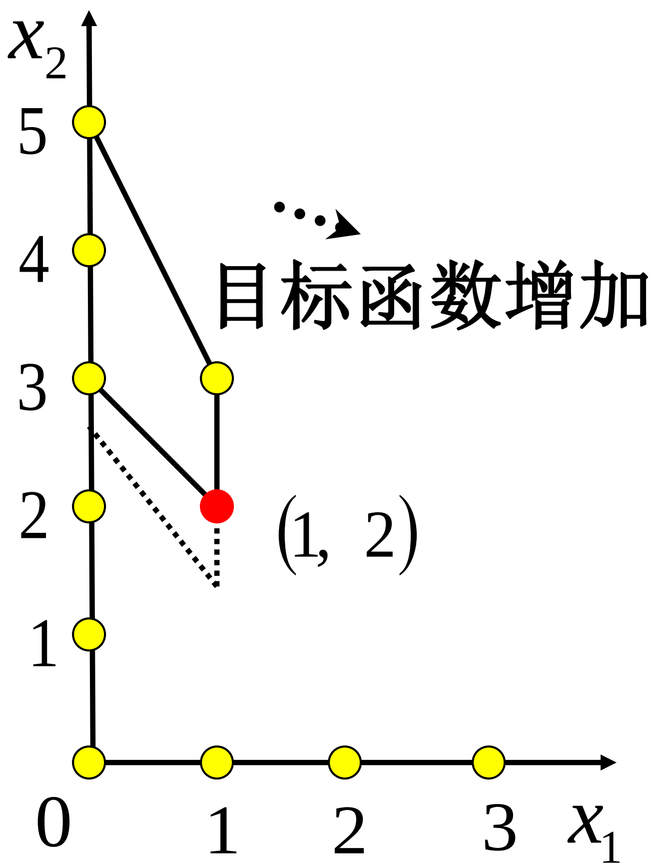
$$\text{s.t.} \quad 3x_1 - 2x_2 \le 3$$

$$5x_1 + 4x_2 \ge 10$$

$$2x_1 + x_2 \le 5$$

$$x_1 \le 1,\ x_1 + x_2 \ge 3$$

$$x_1, x_2 \quad \text{非负}$$



该松弛问题的最优解显然是左图红点，由于其满足整数约束，所以它就是原整数规划问题的最优解

一般情况，考虑纯整数规划问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

所有变量取整数值

考虑对应的松弛问题

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

用 Q, K 分别代表最优的基变量和非基变量下标集

等式约束可写成

$$x_i + \sum_{j \in K} \bar{a}_{ij} x_j = \bar{b}_i, \quad i \in Q$$

对应的最优解为 $x_i^* = \bar{b}_i, \forall i \in Q, x_j^* = 0, \forall j \in K$

如果所有 $\bar{b}_i, i \in Q$ 都是整数，已得原问题最优解

（因为松弛问题的可行集包含原问题的可行集）

否则，取非整数 $\bar{b}_k, k \in Q$ ，令

$$\bar{a}_{kj} = N_{kj} + \alpha_{kj},\ \forall j \in K,\ \bar{b}_k = M_k + \beta_k$$

其中 N_{kj}, M_k 为整数，α_{kj} 为非负小数，β_k 为正小数，例如 $5.2 = 5 + 0.2,\ -5.2 = -6 + 0.8$

代入等式约束 $x_k + \sum_{j \in K} \bar{a}_{kj} x_j = \bar{b}_k$ 可得

$$x_k + \sum_{j \in K} N_{kj} x_j - M_k = \beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j$$

考虑差值 $\Delta_k(X)=\beta_k-\sum_{j\in K}\alpha_{kj}x_j\quad\left(=x_k+\sum_{j\in K}N_{kj}x_j-M_k\right)$

1）对于松弛问题的最优解 $X^*=\left(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\right)^T$

$$x_j^*=0,\forall j\in K\quad\Rightarrow\quad\Delta_k\left(X^*\right)=\beta_k>0$$

2）对原问题的任意的可行解 $\overline{X}$（整数解）

如果不是纯整数，不能得到这个关系

$$\beta_k<1$$

$$\alpha_{kj}\ge 0\quad\Rightarrow\quad\Delta_k\left(\overline{X}\right)=\beta_k-\sum_{j\in K}\alpha_{kj}\overline{x}_j<1$$

$$\overline{x}_j\ge 0\qquad\Rightarrow\quad\Delta_k\left(\overline{X}\right)\le 0$$

$$\Delta_k\left(\overline{X}\right)=\overline{x}_k+\sum_{j\in K}N_{kj}\overline{x}_j-M_k$$

总结前面的讨论可知

对于差值 $\Delta_k(X)=\beta_k-\sum_{j\in K}\alpha_{kj}x_j$

当前松弛问题最优的基本可行解 X^* 满足 $\Delta_k(X^*)>0$

原问题的任意的可行解 $\overline{X}$ 满足 $\Delta_k(\overline{X})\le 0$

本质是超平面分割定理

说明当前非基变量构成的平面方程 $\beta_k-\sum_{j\in K}\alpha_{kj}x_j=0$

将当前最优的基本可行解和原问题的所有可行解分割在 $\beta_k-\sum_{j\in K}\alpha_{kj}x_j>0$ 和 $\beta_k-\sum_{j\in K}\alpha_{kj}x_j\le 0$ 两个区域

若增加约束 $\beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j \le 0$ 形成新的松弛问题

$$
\begin{aligned}
\max\ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,2,\cdots,m \\
& -\sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j \le -\beta_k \\
& x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

那么当前不满足整数约束的最优解将被切割掉，而原问题的所有的可行解都仍然包含在新的可行集中

问题1、前面介绍的方法能否用于混合整数规划

问题2、既然 $$x_k + \sum_{j \in K} N_{kj} x_j - M_k = \beta_k - \sum_{j \in K} \alpha_{kj} x_j$$

为何不用约束 $$x_k + \sum_{j \in K} N_{kj} x_j - M_k \le 0$$

考虑前面例子第一个松弛问题最后的模型

$$
\begin{aligned}
\max\ & \frac{30}{7}-\frac{5}{7}x_3-\frac{3}{7}x_5 \\
\text{s.t.}\ & x_1+\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}x_5=\frac{13}{7} \\
& x_2-\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_5=\frac{9}{7} \\
& x_4-\frac{3}{7}x_3+\frac{22}{7}x_5=\frac{31}{7} \\
& x_i\ge 0,\ \forall 1\le i\le 5
\end{aligned}
$$

加入割平面约束 $\Delta(X)\le 0$ 并引入松弛变量模型如下

$$
\begin{aligned}
\max\ & \frac{30}{7}-\frac{5}{7}x_3-\frac{3}{7}x_5 \\
\text{s.t.}\ & x_1+\frac{1}{7}x_3+\frac{2}{7}x_5=\frac{13}{7} \\
& x_2-\frac{2}{7}x_3+\frac{3}{7}x_5=\frac{9}{7} \\
& x_4-\frac{3}{7}x_3+\frac{22}{7}x_5=\frac{31}{7} \\
& x_6-\frac{1}{7}x_3-\frac{2}{7}x_5=-\frac{6}{7} \\
& x_i\ge 0,\ \forall 1\le i\le 6
\end{aligned}
$$

适合对偶单纯型法

每次增加一个不等式约束后，可以用新的不等式约束的松弛变量做新增加的基变量，从而上一个松弛问题的非基变量都没有改变，因此其检验数也不改变，所以，<u>可以利用上一个松弛问题的最后的单纯型表用对偶单纯型法求解新的松弛问题</u>

求解如下线性规划问题

$$
\begin{aligned}
&\max x_1 + x_2 \\
&\text{s.t. } 5x_2 \le 15 \\
&\quad 6x_1 + 2x_2 \le 24 \\
&\quad x_1 + x_2 \le 5 \\
&\quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \ \text{为整数}
\end{aligned}
$$

化为标准型：

$$
\begin{aligned}
&\max x_1 + x_2 \\
&\text{s.t. } 5x_2 + x_3 = 15 \\
&\quad 6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24 \\
&\quad x_1 + x_2 + x_5 = 5 \\
&\quad x_i \ge 0,\ i = 1, \cdots, 5 \quad x_1,\ x_2 \ \text{为整数}
\end{aligned}
$$

最终表

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
x_3	0	0	1	$5/4$	$-15/2$	$15/2$
x_1	1	0	0	$1/4$	$-1/2$	$7/2$
x_2	0	1	0	$-1/4$	$3/2$	$3/2$
	0	0	0	0	-1	$Z-5$

利用等式约束 $x_1+\frac{1}{4}x_4-\frac{1}{2}x_5=\frac{7}{2}$ 构造割平面

$$-\frac{1}{4}x_4-\frac{1}{2}x_5\le-\frac{1}{2}$$

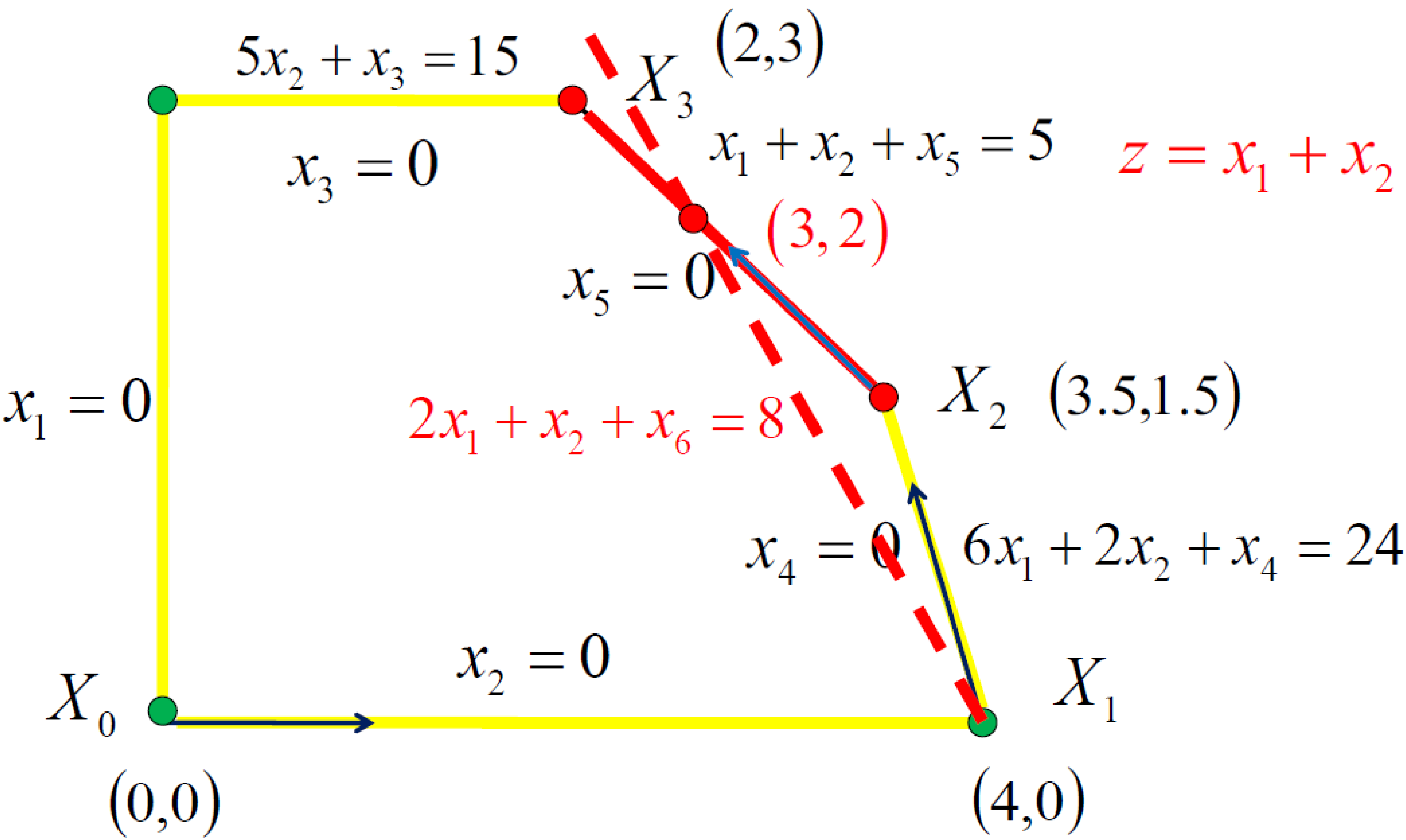
利用 $6x_1+2x_2+x_4=24$

$x_1+x_2+x_5=5$

可得原变量表示的割平面约束为 $2x_1+x_2\le 8$

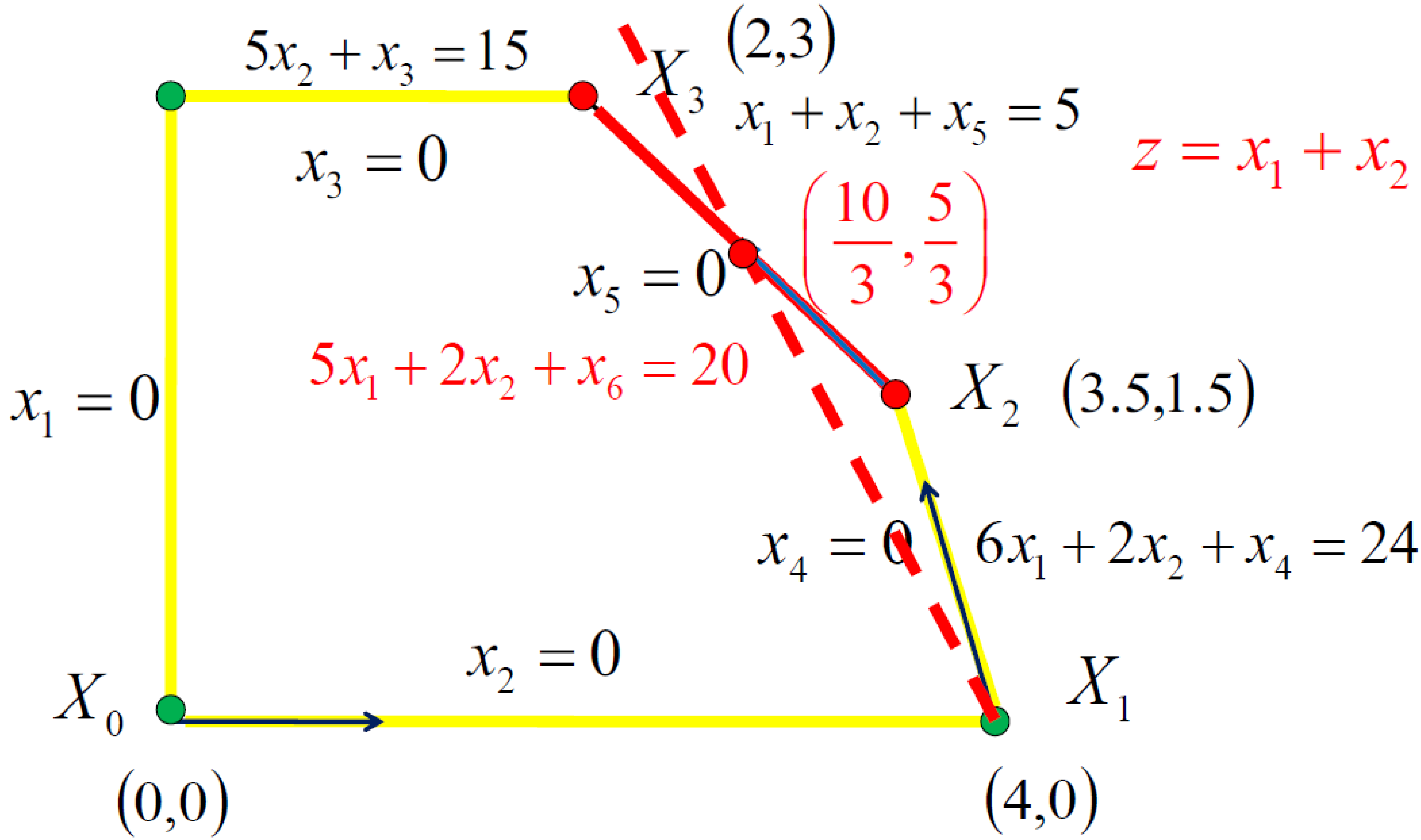
BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_3	0	0	1	$5/4$	$-15/2$	0	$15/2$
x_1	1	0	0	$1/4$	$-1/2$	0	$7/2$
x_2	0	1	0	$-1/4$	$3/2$	0	$3/2$
x_6	0	0	0	$-1/4$	$-1/2$	1	$-1/2$
	0	0	0	0	-1	0	$Z-5$

BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
x_3	0	0	1	0	5	5	5
x_1	1	0	0	0	-1	1	3
x_2	0	1	0	0	2	-1	2
x_4	0	0	0	1	2	-4	2
	0	0	0	0	-1	0	$Z-5$



$5x_2 + x_3 = 15$
X_3
$(2,3)$
$x_3 = 0$
$x_1 + x_2 + x_5 = 5$
$z = x_1 + x_2$
$(3,2)$
$x_5 = 0$
$x_1 = 0$
$2x_1 + x_2 + x_6 = 8$
X_2
$(3.5,1.5)$
$x_4 = 0$
$6x_1 + 2x_2 + x_4 = 24$
$x_2 = 0$
X_0
X_1
$(0,0)$
$(4,0)$

利用约束 $x_2 - \frac{1}{4}x_4 + \frac{3}{2}x_5 = \frac{3}{2}$ 构造割平面 $5x_1 + 2x_2 \le 20$



分枝定界法

可解混合整数规划

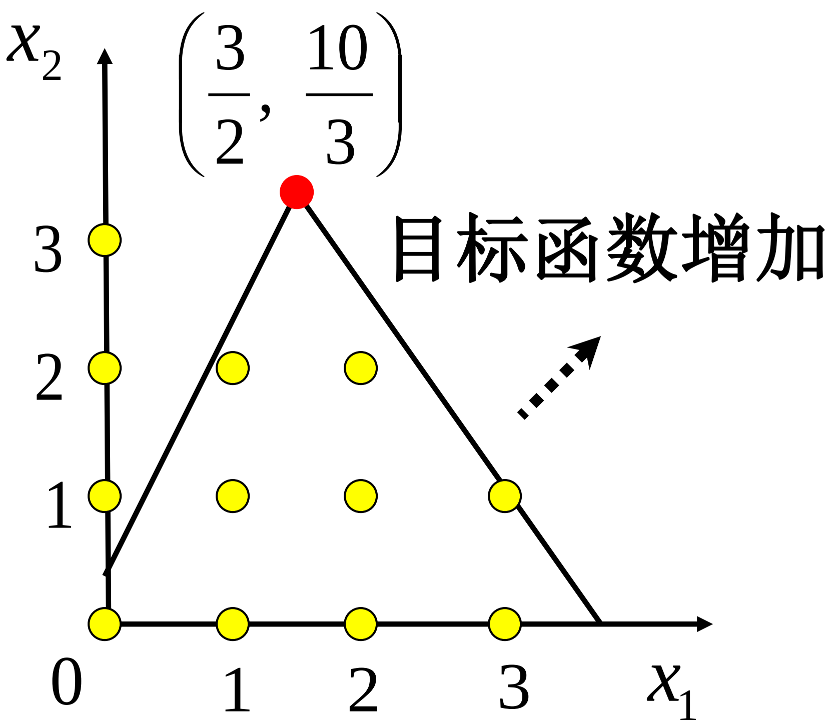
例

$$\max \quad x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 14x_1 + 9x_2 \le 51$$

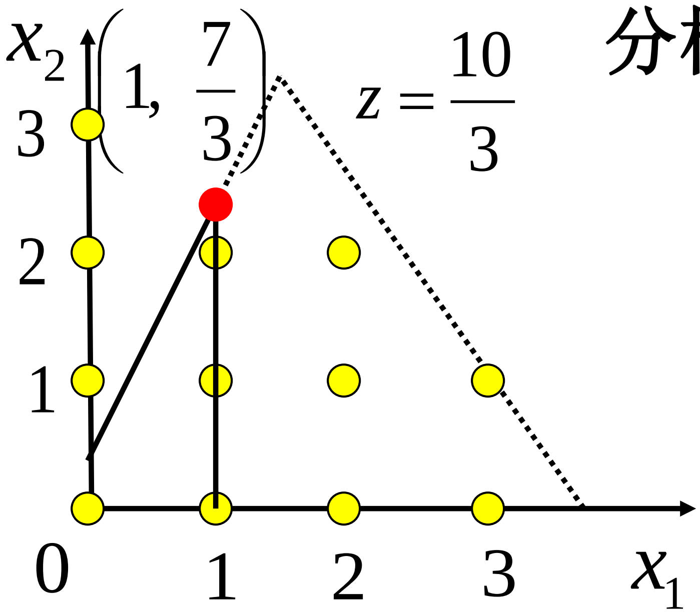
$$-6x_1 + 3x_2 \le 1$$

x_1, x_2 非负且取整数值

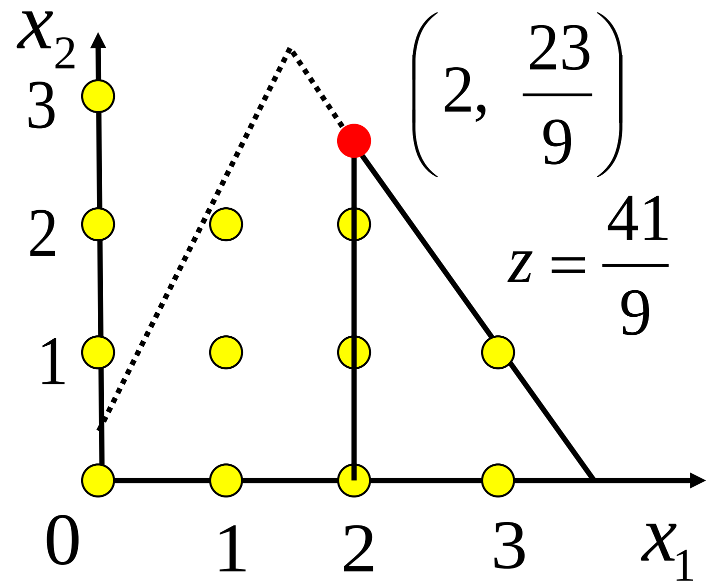


松弛问题可行集及最优解如左图所示不满足整数约束

分枝



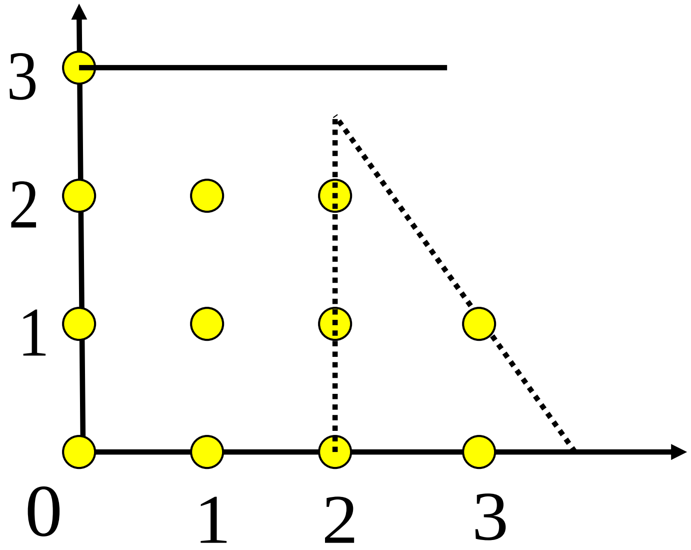
$$\begin{aligned}
\max\quad & x_1+x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 14x_1+9x_2\le 51 \\
& -6x_1+3x_2\le 1 \\
& x_1\le 1 \\
& x_1,x_2\ \text{非负取整}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\max\quad & x_1+x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 14x_1+9x_2\le 51 \\
& -6x_1+3x_2\le 1 \\
& x_1\ge 2 \\
& x_1,x_2\ \text{非负取整}
\end{aligned}$$

任何可行解都属于某枝问题的可行集

启发式搜索：选目标函数值大的优先分枝



$$\max \quad x_1 + x_2$$

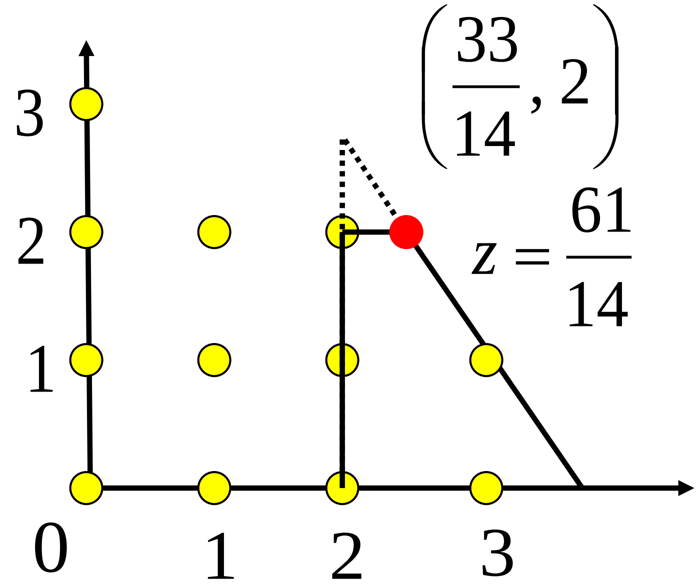
$$\text{s.t.} \quad 14x_1 + 9x_2 \le 51$$

$$-6x_1 + 3x_2 \le 1$$

$$x_1 \ge 2,\ x_2 \ge 3$$

x_1, x_2 非负取整

<u>无可行解，不再考虑</u>



$$\max \quad x_1 + x_2$$

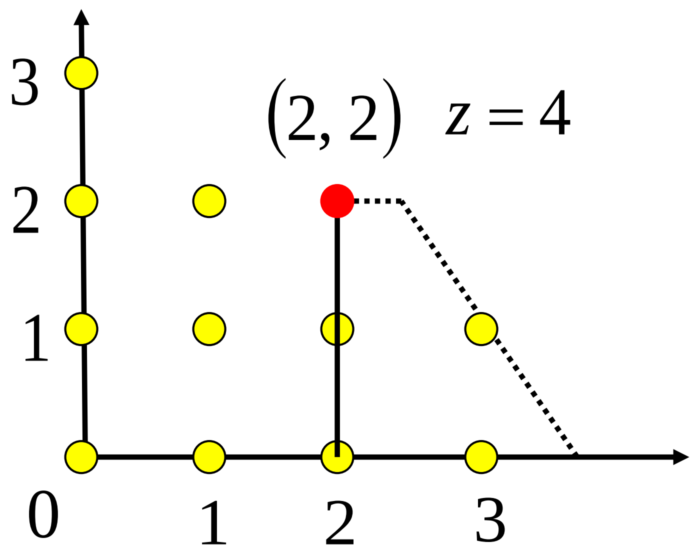
$$\text{s.t.} \quad 14x_1 + 9x_2 \le 51$$

$$-6x_1 + 3x_2 \le 1$$

$$x_1 \ge 2,\ x_2 \le 2$$

x_1, x_2 非负取整

继续选目标函数值大的优先分枝



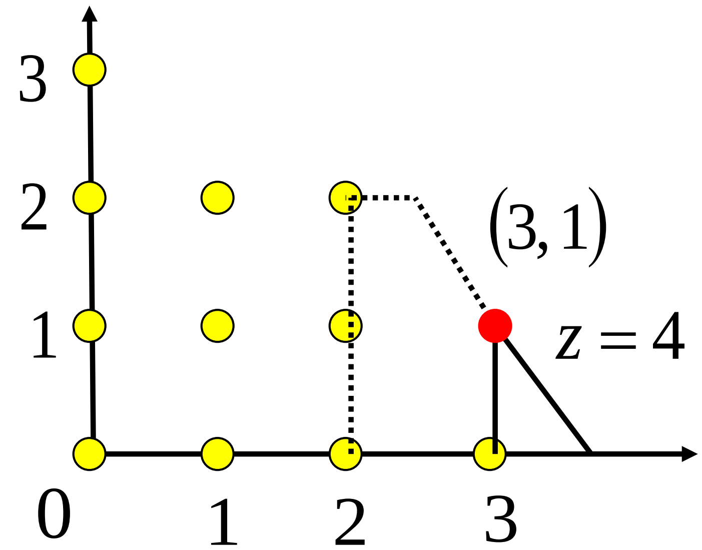
$$\max \quad x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 14x_1 + 9x_2 \le 51$$

$$-6x_1 + 3x_2 \le 1$$

$$x_1 = 2,\ x_2 \le 2$$

x_1, x_2 非负取整



$$\max \quad x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad 14x_1 + 9x_2 \le 51$$

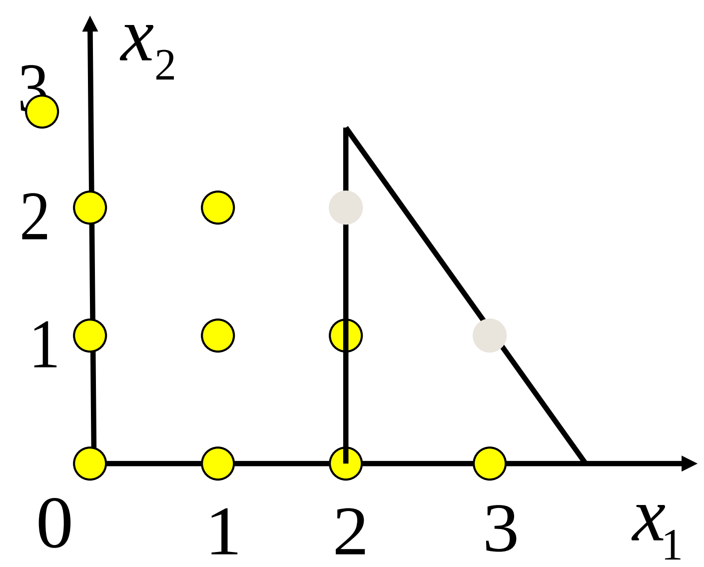
$$-6x_1 + 3x_2 \le 1$$

$$x_1 \ge 3,\ x_2 \le 2$$

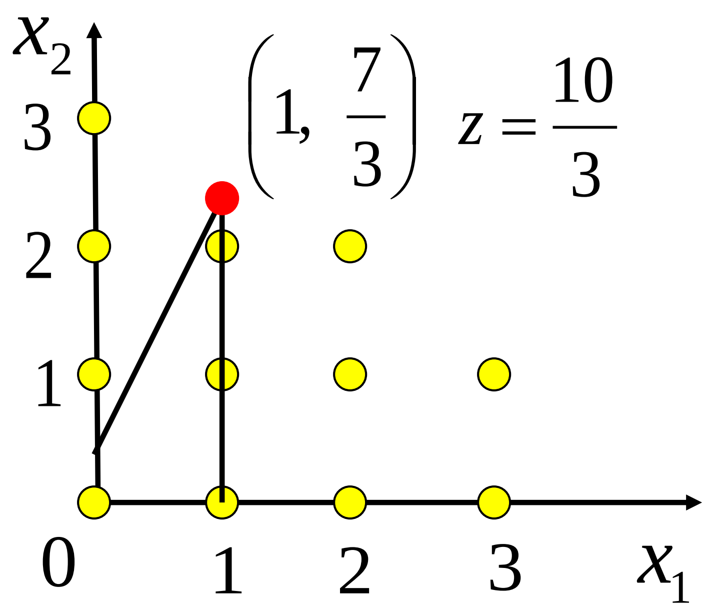
x_1, x_2 非负取整

定界

对于下图所示可行集，已经找到最优解，最优目标函数值等于 **4**，由此确定了该问题最优目标函数的一个下界，<u>如果某个分枝的松弛问题的最优值小于这个界，由于整数最优目标值更小，所以可断定该枝不含最优解</u>，不用再分枝



回到尚未确定最优解的一枝，如下图所示，由于其松弛问题的最优值小于前面确定的下界 **4**，因此可断定该枝不含最优解，因此不用再分枝，从而确定了该整数规划问题的最优解



上述求解过程的框图及一般步骤见教材**97**页

分支定界算法的基本思想

- 将状态空间 U 一分为二——分枝

状态空间可以取 IP 的可行域，或者比其更大。

- 进入一个状态空间 U'。若判定在U' 内不可能找到比当前已知解更好的解，则摒弃该搜索空间——剪枝

- 若在状态空间U' 内能够找到更好的解，则用新的解代替当前的已知解——定界

- 若在状态空间U' 内已经找到了最好的解，则结束对U' 的搜索；否则对状态空间U' 继续分枝。

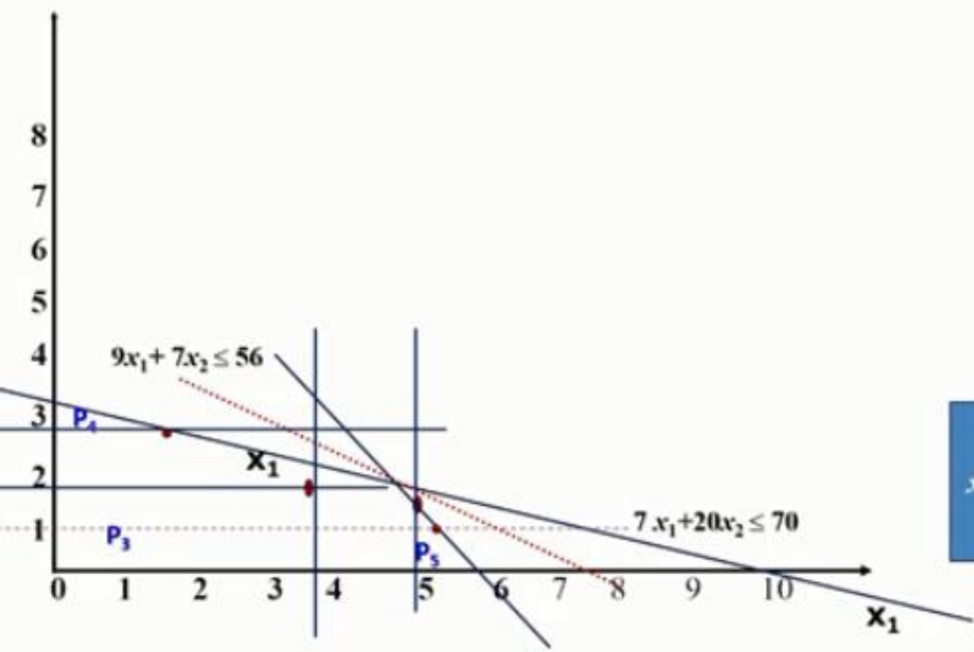
$$\max z=40x_1+90x_2 \quad ①$$

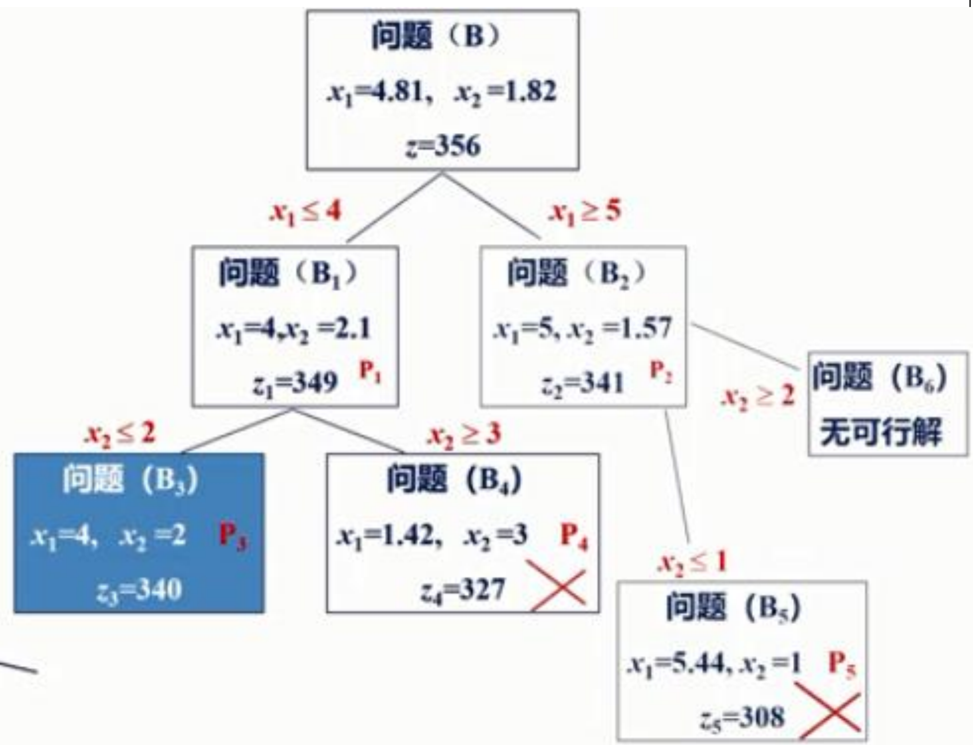
$$9x_1+7x_2\le 56 \quad ②$$

$$7x_1+20x_2\le 70 \quad ③$$

$$x_1,\ x_2\ge 0 \quad ④$$

$$x_1,\ x_2\text{整数} \quad ⑤$$





0-1变量的作用

例、用0-1变量统一“二选一”的约束条件

某工序有两种加工方式，一种方法周工时约束为

$$0.3x_1 + 0.5x_2 \le 150$$

另一种方式周工时约束为

$$0.2x_1 + 0.4x_2 \le 120$$

规划时可选用两种方式中的任意一种

如何将这两个可以任意选取的约束条件统一在一个数学规划模型中？

定义0-1变量 y_1, y_2 如下

$$y_1 = \begin{cases} 0 & \text{若采用第一种加工方式} \\ 1 & \text{若不采用第一种加工方式} \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 0 & \text{若采用第二种加工方式} \\ 1 & \text{若不采用第二种加工方式} \end{cases}$$

统一的约束条件为

$$0.3x_1 + 0.5x_2 \le 150 + M_1 y_1$$

$$0.2x_1 + 0.4x_2 \le 120 + M_2 y_2$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

请问还有其它做法吗?

其中 M_1, M_2 为充分大的正数（使约束不起作用）

一般情况，若要在下面 p 个约束条件中选用 q 个

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i=1,2,\cdots,p$$

定义0-1变量 $y_i, i=1,2,\cdots,p$ 如下

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{若选用第 } i \text{ 种加工方式} \\ 1 & \text{若不选用第 } i \text{ 种加工方式} \end{cases}$$

统一的约束条件为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i + y_i M_i,\ i=1,2,\cdots,p$$

$$\sum_{i=1}^{p} y_i = p-q$$

用0-1变量处理固定费用

单耗量 \ 产品 / 资源	I	II	III	资源量
A	2	4	8	500
B	2	3	4	300
C	1	2	3	100
单件可变费用	4	5	6	
固定费用	100	150	200	
单件售价	8	10	12	

若产量0，固定费用0，否则为定值，事先不能确定

用 $x_j,\ j=1,2,3$ 分别代表三种产品的产量

定义**0-1**变量 $y_j,\ j=1,2,3$ 如下

$$y_j=\begin{cases}1 & 若\ x_j>0\\ 0 & 若\ x_j=0\end{cases}$$

则生产利润为

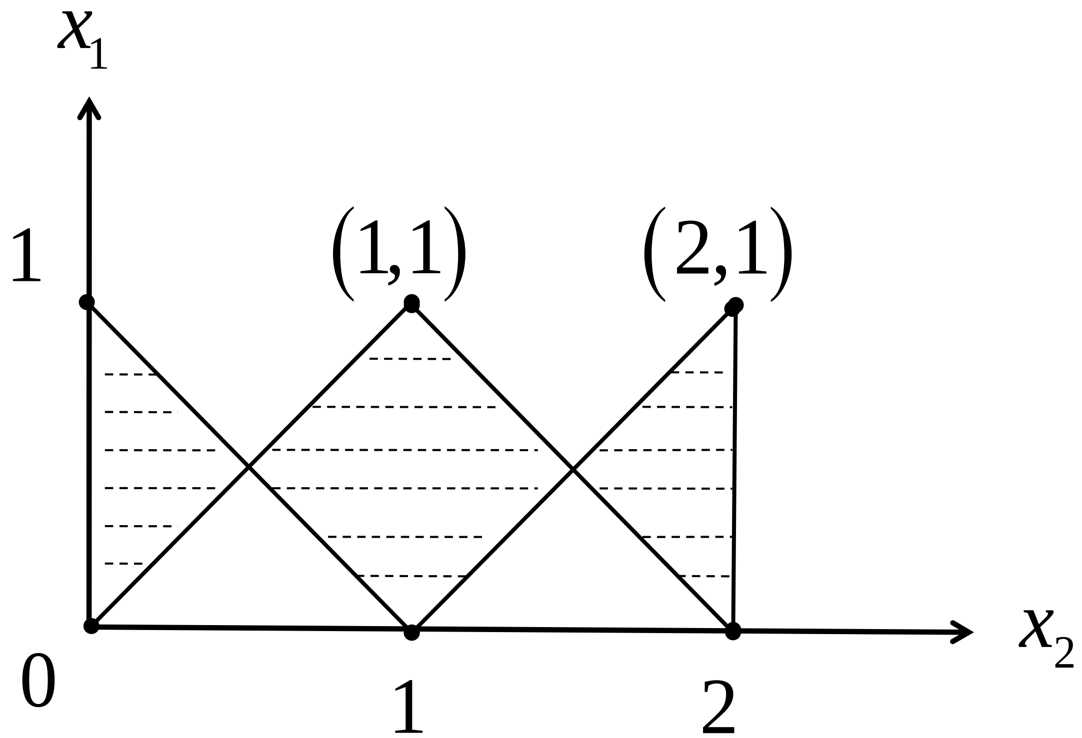
$$(8-4)x_1+(10-5)x_2+(12-6)x_3-100y_1-150y_2-200y_3$$

而上述 y_j 和 x_j 的关系可用以下约束描述

$$x_1\le M_1y_1,\ \ x_2\le M_2y_2,\ \ x_3\le M_3y_3$$ （是否有问题？）

其中 M_j 是大于 x_j 的取值上界的数

例、如何用一组线性不等式描述下面的集合？



例、

某航空公司计划在全国选择若干个机场组建基地。设在机场j组建基地所需费用为$c_j, j = 1, \cdots, n$。若该公司在机场i和机场j的基地组建完成，则可开通往返两地的航班并获得票款收益$r_{ij}, 1 \leq i < j \leq n$。该航空公司基地组建费用上限为B，应选择在哪些机场组建基地才能使获得的票数收益最大。试写出该问题的数学规划。

例、

“58到家”是“58同城”旗下高品质、高效率的上门家政服务平台，平台向用户提供家政保洁、保姆、月嫂、搬家、维修等众多生活领域的服务。在家政保洁场景中，用户在平台下单购买服务后，平台会将订单分配给一个保洁阿姨，阿姨接到订单后按照用户指定的服务时间上门，进行保洁服务。平台在将订单分配给一个保洁阿姨时，一方面，为了提高对顾客的服务质量，需要尽量分配服务分较高的阿姨，其中阿姨的服务分是基于阿姨历史订单的评价情况得到，取值为[0,1]，值越大越好；另一方面，为了帮助阿姨提高接单量，需要尽量缩短阿姨相邻单之间的通行时间。

每天通过平台进行分配的订单量是巨大的，当前平台实现了一套订单分配算法，本问题研究的是如何优化系统的分配算法，提高算法的求解能力，实现提升顾客体验、节省阿姨时间。

数据说明：

数据包含一天内、一个区域的所有订单和所有保洁阿姨。

表1：订单数据表字段说明

字段	数据类型	说明
id	int	订单唯一标识
createTime	int	订单下单时间，单位秒
serviceFirstTime	int	服务开始时间的最早时间，单位秒
serviceLastTime	int	服务开始时间的最晚时间，单位秒
serviceUnitTime	int	服务时长，单位分钟
x	int	服务地点横坐标，单位米
y	int	服务地点纵坐标，单位米

例、

表 2：阿姨数据表字段说明

字段	数据类型	说明
id	int	阿姨唯一标识
serviceScore	double	阿姨服务分
x	int	阿姨初始点横坐标，单位米
y	int	阿姨初始点纵坐标，单位米

约束条件及假设：

1. 所有订单都要分配一个且只有一个阿姨；
2. 每个订单需要指定一个服务开始时间，这个时间的取值范围为[最早时间，最晚时间]，且是半点的整数倍；
3. 一个阿姨同时只能服务一个订单；
4. 阿姨需要在每个订单的服务开始时间之前到达客户位置；
5. 阿姨每天开始任务时必须从初始点位置出发；
6. 任意两点的距离为欧式距离；
7. 保洁阿姨的行驶速度为 15 千米/小时。

优化目标：

将每个订单匹配阿姨时，优化的目标是：

1. 所有订单匹配的阿姨的服务分，其平均值 A 尽可能大；
2. 最小化每单的平均通行距离 B。一个订单的通行距离指的是阿姨从上一个地点到本单地点的距离（欧式距离），其中阿姨第一个订单的通行距离等于从初始点到

第一个订单位置的距离，单位是千米；

3. 最小化阿姨服务订单的平均间隔时间 C。一个订单的间隔时间指的是，阿姨从上一个单服务结束时刻到本单服务开始时刻的时间间隔，单位是小时，其中阿姨第一个订单的间隔时间设定为 0.5 小时（阿姨首单需要做基本的准备工作，不考虑阿姨从初始点到第一个订单的通行时间）；

4. 总体目标是各个目标的加权和：$\alpha A-\beta B-\gamma C$，其中$\alpha=0.78$、$\beta=0.025$、$\gamma=0.195$，得分四舍五入取 6 位小数。目标值越大越好。

问题 1： 只考虑离线批量派单模式。附件 1 与附件 2 中分别给出的是一天的所有订单信息与阿姨信息。

(a) 请设计最优的订单与阿姨匹配算法，将所有订单进行分配，并将求解结果填写到 result1.txt 中。（订单必须全部分配、阿姨不需要全部匹配订单）。

(b) 基于(a)的算法，请对附件 1 中的前 50 个订单与附件 2 中前 20 个阿姨，重新运行算法，给出阿姨的执行任务列表，并画出阿姨的行动轨迹图。

问题 2： 线上批量派单模式。在实际业务场景中，通常采用固定的频率派单，每 30 分钟将该段时间内产生的新订单统一分配；分配时允许部分订单暂时不派单，称之为压单，但是压单订单必须满足服务开始时间的最早时间比当前时间晚于 2 个小时（不包括 2 个小时）也即满足：serviceFirstTime-currentTime>2h；请设计这种情况下的每批订单的最优分配算法。

https://www.zhihu.com/question/573364553/answer/2809875492

首先赛题A是一个优化问题，那么我们只需建模出优化问题的三要素即可完成建模：1决策变量；2约束；3目标函数，下面按照这三个方面来展开：

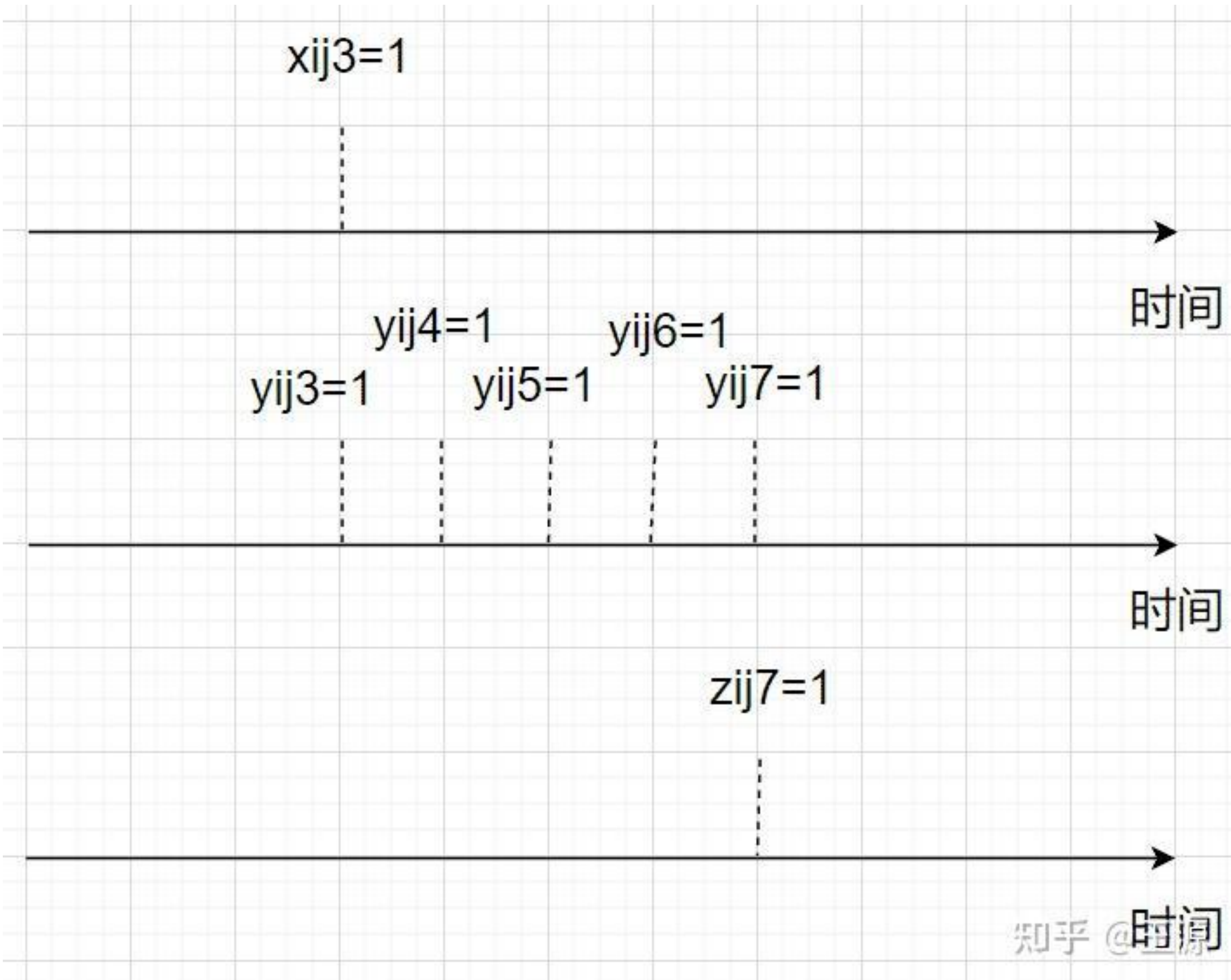
决策变量：

$$x_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{在时刻}k\text{阿姨}j\text{开始服务订单}i\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

$$y_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{在时刻}k\text{阿姨}j\text{正在服务订单}i\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

$$z_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{在时刻}k\text{阿姨}j\text{结束服务订单}i\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

为了清楚的理解这三个决策变量的含义，我们以某一个阿姨服务在时刻$t=3$开始服务某一个订单，并且在时刻$t=7$完成服务的例来看一下上面所示的三个决策变量的取值，如下图所示：


xij3=1
时间
yij4=1
yij6=1
yij3=1
yij5=1
yij7=1
时间
zij7=1
时间
知乎 @

横轴为时间轴，虚线表示该时刻的变量值取值为1，否则取值为0，看图中第一行由于阿姨是在时刻3开始服务的所有变量$x_{ij3}=1$，也就是说只是在开始的那个时刻才会取1，其它时刻都是0；看图中第二行表示只要在服务的时候都取1，所以时刻3-7之间的 $y_{ijk}=1$ 其它的为0，看图中第三行表示结束服务的时刻，因为结束服务时刻在$t=7$ 所以只有 $y_{ij7}=1$ 其它时刻都是0。总结来说就是这三类决策变量中 y 是一个描述过程的变量，而x 和z 是一个阶跃的变量只在开始或者结束的时候跳变为1，后边的建模会反复用到这些性质。

在此之前我们需要定义一个集合： 集合D 表示所有订单的集合； 集合P 表示所有阿姨的集合； 集合T 表示所有时刻的集合（根据题意我们可以把时间离散为时间步，步长为半个小时，所以本质上这里应该是时间步的集合）；

约束条件1，所有订单都要分配有且只有一个阿姨：

$$\sum_{j\in P}\sum_{k\in T} x_{ijk}=1,\ \forall i\in D \quad (1)$$

约束条件2，每个订单的服务开始时间需要满足 time windows 的约束：

我们不难发现当

$$\left(\sum_{j\in P} x_{ijk} - \sum_{j\in P} x_{ijk-1}\right) = 1$$

的成立时候就表示订单i 的开始服务时间为 k ，借助上式我们不难写出 time windows 的约束为

$$l_i \left(\sum_{j\in P} x_{ijk} - \sum_{j\in P} x_{ijk-1}\right) \leq k \left(\sum_{j\in P} x_{ijk} - \sum_{j\in P} x_{ijk-1}\right), \ \forall i \in D, \ \forall k \in T \quad (2)$$

$$k \left(\sum_{j\in P} x_{ijk} - \sum_{j\in P} x_{ijk-1}\right) \leq u_i \left(\sum_{j\in P} x_{ijk} - \sum_{j\in P} x_{ijk-1}\right), \ \forall i \in D, \ \forall k \in T \quad (3)$$

其中 l_i, u_i 分别为订单 i 的 time windows的上下限。

约束条件3，每一个阿姨在任意一个时间只能服务不超过1个订单：我们发现要表示清楚同一时间不能服务超过一个订单就需要把阿姨服务订单的过程表示出来，因此只知道开始和结束服务时间表达起来就不太容易，因此我们采用表示过程变量 y_{ijk} ，这是因为 y_{ijk} 这种性质可以对这类约束容易建模：

$$\sum_{i \in D} y_{ijk} \leq 1,\ \forall k \in T,\ \forall j \in P \quad (4)$$

约束条件1-3 实际上可以归结为一大类约束 主要负责的是订单和阿姨之间的匹配，而基本不考虑订单的顺序的问题，顺序的问题会影响阿姨在两个订单之间物理上的空间距离。因此接下来约束4-7都是为了描述清楚这种空间距离造成的阿姨在完成上一个订单后，正是因为这种空间上的距离限制并不能立马开始下一个订单。为了解决这一个问题，我们需要新定义两个集合：

集合1，前序订单集合：对于任意一个订单i 任意一个阿姨j其有一个前序订单集合 R_{ij} ，该集合表示订单i 的上一个订单必须属于这个前序订单集合R_{ij}

集合2，后序订单集合：对于任意一个订单i 任意一个阿姨j其有一个后序订单集合 S_{ij} ，该集合表示订单i 的下一个订单必须属于这个后序订单集合S_{ij}

约束条件4，每一个阿姨在完成订单i 之后确确实实有足够的时间从订单i 的位置移动到订单i' 位置并且开始服务：

$$k\left(\sum_{j\in P} z_{ijk}-\sum_{j\in P} z_{ijk-1}\right)+t_{ii'}\leq k\left(\sum_{j\in P} x_{i'jk}-\sum_{j\in P} x_{i'jk-1}\right),\ \forall i\in D,\ \forall i'\in S_{ij},\ \forall k\in T \quad (5)$$

其中参数$t_{tt'}$ 表示从订单i 的位置到订单i' 的位置所需的最短通勤时间（这个参数可以通过阿姨的速度和两地之间的欧式距离计算近似计算得到因此视为常数）。

约束条件5，若每一个阿姨被分配到订单i 则必须也被分配到订单i任意一个后序订单，若每一个阿姨没有分配到订单i 则不可能被分配到订单i 任何一个后序订单

$$\sum_{k\in T}\sum_{i'\in R_{ij}} x_{i'jk}=\sum_{k\in T} x_{ijk},\ \forall i\in D,\ \forall j\in P \quad (6)$$

约束条件6，若每一个阿姨被分配到订单i 则必须也被分配到订单i任意一个前序订单，若每一个阿姨没有分配到订单i 则不可能被分配到订单i 任何一个前序订单

$$\sum_{k\in T}\sum_{i'\in S_{ij}} x_{i'jk} = \sum_{k\in T} x_{ijk},\ \forall i\in D \quad (7)$$

到这里我们处理完毕了普通的订单节点，还需要处理阿姨每天开始和结束的节点。我们不妨设每一个阿姨每天的初始点和结束点都是同一个位置o_j ，我们不难发现实际上我们可以把阿姨的出发点 o_j 也视作一个等效的订单，对于任意一个o_j 都有一个前序和一个后序节点 类比于 约束5和约束6，如果觉得麻烦也可以将约束5和6中的 $\forall i \in D$ 改为 $\forall i \in D \cup o_j$ 即可

约束条件7，阿姨初始位置约束，每天的第一个时刻阿姨一定是在服务 o_j 订单

$$x_{o_j j0} = 1,\ \forall j\in P \quad (8)$$

约束条件8和约束条件9 决策变量之间的 linked constraints：

$$\sum_{k\in T} y_{ijk} \le \left(\sum_{k\in T} x_{ijk}\right) M \quad (9)$$

$$\sum_{k\in T} y_{ijk} \le \left(\sum_{k\in T} z_{ijk}\right) M \quad (10)$$

上述两条约束分别表示有开始才能有过程和有结束才能有过程。因为 x_{ijk} 和 z_{ijk} 分别表示服务开始和服务结束，显然只有有了服务开始 $x_{ijk}=1$和服务结束 $y_{ijk}=1$，才会有正在服务这个情况发生$y_{ijk}=1$ ，反之亦然大家自行思考。这里我们采用了大M法来建模，上述约束中的M 就表示一个很大的数字。不熟悉大M建模的同学可以自行搜索资料。

约束条件10：每一个阿姨j 从开始做订单i 到结束订单i 之间有一个最短的完成任务的时间约束：

$$z_{ijk+g_{ij}} \le x_{ijk},\ \forall i\in D,\ \forall j\in P,\ \forall k\in T \quad (11)$$

其中 g_{ij} 表示阿姨j 完成订单i 所需最短时间。

目标函数1：为了表示服务质量我们定义一个 $Score(i,j,k,x_{ijk})$ 函数，可以看到这个函数的有四个输入分别是阿姨，订单，时间和 x_{ijk} ，显然这样服务质量只和这四个因素有关系（也可能和结束服务时间有关？这里暂不考虑）。若 $x_{ijk}=0$ ，则$Score$ 函数必为0，若$x_{ijk}=1$ 此时可以根据历史数据来形成一个对阿姨，订单和开始服务时间的一个打分。由此可得目标函数1的表达式为：

$$f_1=\frac{1}{|D|}\sum_{i\in D}\sum_{j\in P}\sum_{k\in T}Score\left(i,j,k,x_{ijk}\right)\quad(12)$$

目标函数2：最小化每一单从结束开始到下一单的开始时间

$$f_2=\sum_{i\in D}\sum_{i'\in R_{ij}}\sum_{k\in T}\left\{k\left(\sum_{j\in P}x_{i'jk}-\sum_{j\in P}x_{i'jk-1}\right)-k\left(\sum_{j\in P}z_{ijk}-\sum_{j\in P}z_{ijk-1}\right)\right\}$$

$$(13)$$

这里我们只考虑这两个目标函数，可以通过加权的方法转化为单目标的优化问题，由此我们将所有约束合并在一起给出最终的优化问题的形式

$$\min f = w_1 f_1 + w_2 f_2$$

$$\text{s.t.}\text{式}(1-13)\text{约束}$$

其中 $w_1, w_2 \geq 0$ 为常数。

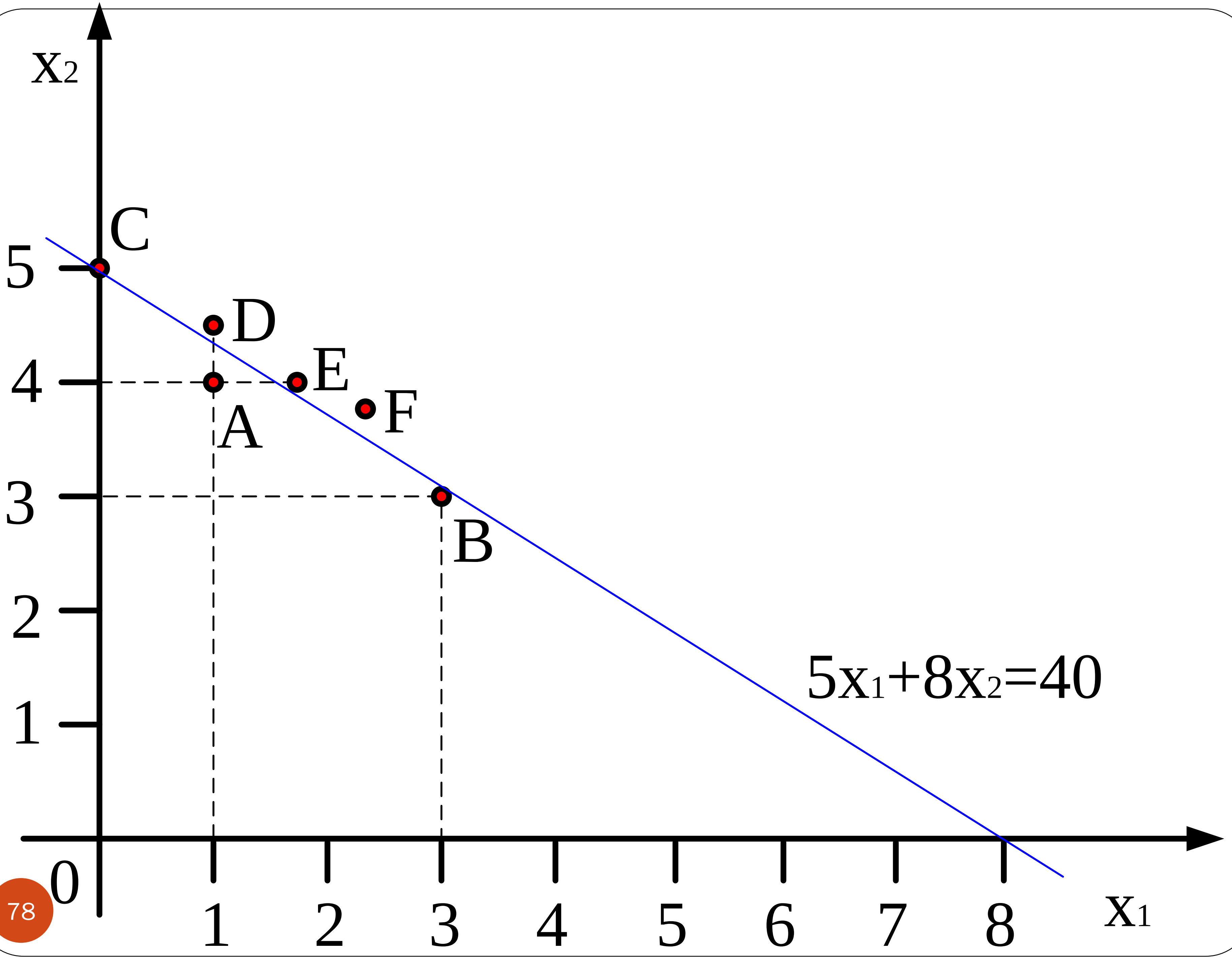
至此已经完成了决策变量，约束条件和目标函数的建模。

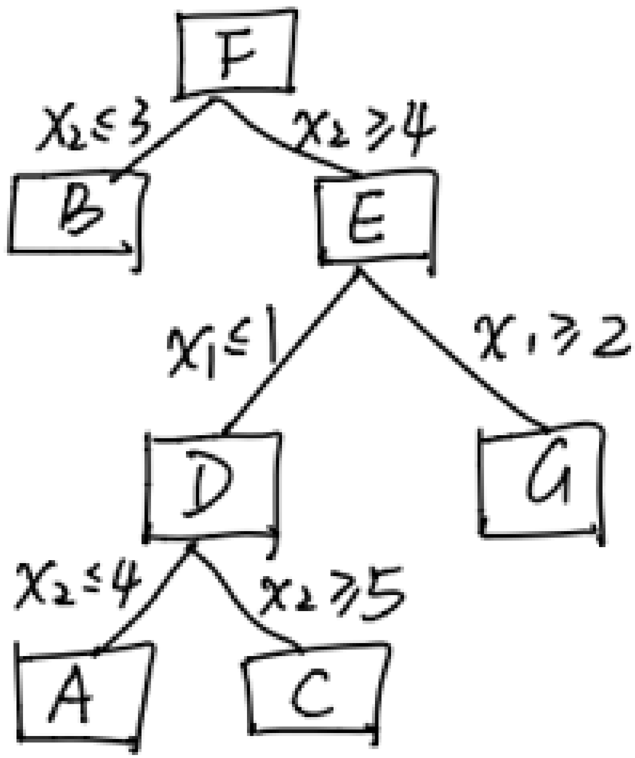
那么最后还要多说一句，这个问题是一个非常实际的问题，阿姨和订单的匹配如果进一步推广一下也可以是 网约车司机和打车用户的匹配，也可以是 相亲网站里边 男生和女生的匹配，也可以是 美团骑手和订单的匹配，当然也可以是 快递员和快递之前的匹配。可以说这类问题广泛的存在于我们的生活中，运筹优化在各个行业都有着很强的发挥潜力，希望大家可以通过这次竞赛多关注这类问题。

已知用分枝定界法求解某整数规划问题时，一共求解了A、B、C、D、E、F、G七个线性规划问题，其最优结果分别如下图所示：

A	B	C	D	E	F	G
$x_1 = 1$ $x_2 = 4$ $z = 37$	$x_1 = 3$ $x_2 = 3$ $z = 39$	$x_1 = 0$ $x_2 = 5$ $z = 40$	$x_1 = 1$ $x_2 = 4\frac{4}{9}$ $z = 40\frac{5}{9}$	$x_1 = 1.8$ $x_2 = 4$ $z = 41$	$x_1 = 2.25$ $x_2 = 3.75$ $z = 41.25$	无可行解

1. 求 max z 还是求 min z？其最优结果是什么?
2. 画出分枝定界法的求解过程, 并在每个分枝上标明新增加的约束条件。
3. 已知初始下界值为0, 初始的上界值? 怎样变化?


x2
C
5
D
4
E
F
A
3
B
2
5x1+8x2=40
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x1



F
$x_2 \leq 3$
$x_2 \geq 4$
B
E
$x_1 \leq 1$
$x_1 \geq 2$
D
G
$x_2 \leq 4$
$x_2 \geq 5$
A
C