自控：

1、

$$\frac{8}{50}\frac{d^2\rho}{dt^2}+\frac{2}{5}\frac{d\rho}{dt}+\rho=u(t)$$

(1) 求 $\rho(t)$

$$\rho_{1,2}=1-\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\frac{\zeta}{T}t}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T}t+\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}e^{-\frac{5}{4}t}\sin\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{5}}t+\mathrm{arctg}\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$=1-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,e^{-\frac{5}{4}t}\sin\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}t+\frac{\pi}{3}\right)$$

(2) $T,\ \omega_n,\ \xi$

对比 $T^2\frac{d^2\rho}{dt^2}+2\xi T\frac{d\rho}{dt}+\rho=u(t)$ 与题目系统得

$$T^2=\frac{8}{50}\qquad 2\xi T=\frac{2}{5}\qquad \omega_n=\frac{1}{T}=\frac{5}{2}$$

$$T=\frac{2}{5}\qquad \xi=\frac{1}{2}$$

(3) $t_s(5\%),\ \sigma,\ t_r,\ t_d,\ t_p$

$$t_s(5\%)=\frac{3T}{\xi}=\frac{3\cdot\frac{2}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{12}{5}$$

在阶跃响应下

$$\sigma=\frac{\rho_{max}-\rho(\infty)}{\rho(\infty)}=e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}=e^{-\frac{\frac{1}{2}\pi}{\frac{\sqrt{3}}{2}}}=e^{-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi}$$

$$y(t_r)=1\Rightarrow t_r=\frac{\pi-\theta}{\omega_d}=\frac{\pi-\frac{\pi}{3}}{\frac{5}{4}\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{4}{5\sqrt{3}}=\frac{8\sqrt{3}}{45}\pi$$

$$f(t_d)=\frac{1}{2} \Rightarrow 1-\frac{2}{3}\sqrt{3}\, e^{-\frac{5}{4}t_d}\sin\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}t_d+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

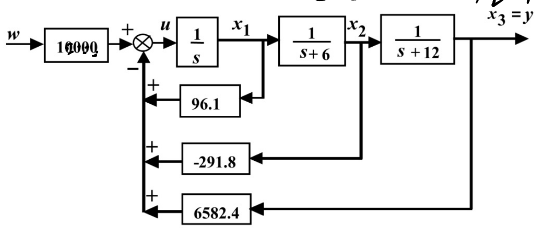
$$\frac{2}{3}\sqrt{3}\, e^{-\frac{5}{4}t_d}\sin\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}t_d+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$e^{-\frac{5}{4}t_d}\sin\left(\frac{5}{4}\sqrt{3}\,t_d+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

令 $\frac{df}{dt}=0$ 得 $t_p=\frac{\pi}{\omega_d}=\frac{4}{5\sqrt{3}}\pi$

(2) 2. 给定状态反馈系统如下图。

$x_1=\dot{x}_2+6x_2$ $\quad$ $x_2=\dot{x}_3+12x_3$



(a) 试给出闭环系统从w到y的传递函数。

(b) 试求出系统的主导极点。

(c) 试给出近似表征系统动态性能的近似二阶系统传递函数。

(a)
$$\begin{matrix}\dot{x}_1 = \\ \dot{x}_2 = \\ \dot{x}_3 = \end{matrix}\begin{bmatrix}-96.1 & +291.8 & -6582.4\\ 1 & -6 & 0\\ 0 & 1 & -12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}10^4\\ 0\\ 0\end{bmatrix}w$$

$$y=[0\ 0\ 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}w$$

$$\frac{y}{w}=C(sI-A)^{-1}B=\frac{10^5}{10^3+1141s^2+15100s+10^5}=\frac{10^4}{(s+100)(s^2+14.1s+100)}$$

(b) 主导极点

$$A_1 = \frac{10^4}{10000 - 1410 + 100} = 1.15$$

$$A_2 = \frac{10^4}{\frac{-14.1 \pm \sqrt{(14.1)^2 - 400}}{2} + 100} = \frac{10^4}{-7.05 \pm 7.09j + 100}$$

$A_2 > A_2$ 故 $\underline{-7.05 \pm 7.09j}$ 左半平面的共轭复极点

⇓

可以构成二阶系统

或者可以由 $p_i = -100$ 远离原点判得 $-7.05 \pm 7.09j$ 为主导

(c)

$$\frac{Y}{W} = \frac{10^4}{s^2 + 14.1s + 100}$$