第三章 抗外扰控制

2.2如下带外扰的**受控**系统能否实现状态对外扰的完全不变性？能否实现输出对外扰的完全不变性？若能实现，请给出控制策略。

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$
$$\boldsymbol{y} = [6 \quad 3]\boldsymbol{x}$$

解：

① **状态对外扰的完全不变性的判断：**

（$\mathrm{rank}(B, AB) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 2$），由于系统受控，故$(A, B)$可镇定；

$\mathrm{rank}B \neq \mathrm{rank}(B, N)$，$BF_w = N$无解，故带外扰的受控系统不能实现状态对外扰的完全不变性。

② **输出对外扰的完全不变性的判断：**

$CN = 0$，而$CAN \neq 0$，有希望仅靠状态反馈将A改造成A_L，使得A_L为稳定阵，且$\boldsymbol{CA}_L\boldsymbol{N} = 0$。设状态反馈矩阵$\boldsymbol{F_x} = [f_1 \quad f_2]$，则需成立：

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BF_x})\boldsymbol{N} = -12 - 3f_1 + 6f_2 = 0 \quad \text{(a)}$$

为保证闭环稳定，由闭环特征多项式

$$det\,(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BF_x}) = s^2 + f_2 s + f_1 \quad \text{(b)}$$

需满足： $f_1 > 0$，$f_2 > 0$

由式（a）（b）选：$f_1 = 2$，$f_2 = 3$，即 $\boldsymbol{F_x} = [2 \quad 3]$。

结论：通过 $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F_x x}$可实现输出对外扰的完全不变性。

2.1求下列系统在输入f_1和f_2分别为阶跃函数 $1(t)$和斜坡函数 t时状态$\boldsymbol{x}$的强制解。

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1 \\ \dot{x}_2 = -6x_1 - 5x_2 + f_2 \end{cases}$$

解：

系统：$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Nw \\ \dot{w} = Mw \end{cases}$，$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

因f_1和f_2分别为阶跃函数 $1(t)$和斜坡函数，$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

A对应的特征值为:$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$,所以矩阵A为稳定矩阵；

$AP-PM=N$的解为$P=\begin{bmatrix}-25/36 & -1/6\\ 5/6 & 0\end{bmatrix}$,又$A$的特征值与$M$矩阵的特征值相异，

所以有唯一解，状态的强制解为:
$$\tilde{x}(t)=-Pw(t)=\begin{bmatrix}\frac{25}{36}+\frac{1}{6}t\\ -\frac{5}{6}\end{bmatrix}$$

2.3 有外扰作用的受控系统如下。当外扰 $\boldsymbol{w}$ 为常值时，判断输出$\boldsymbol{y}(t)$的静态值是否为零。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}-1\\ -1\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$
$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\ \boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$

解:

$\boldsymbol{A}$=$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$渐进稳定，外扰 $\boldsymbol{w}$ 为常值，即$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$，方程$\begin{cases}\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{CP}=\boldsymbol{D}\end{cases}$有解$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$，即输出对外扰具有静态不变性。

2.4 有外扰作用的受控系统如下。判断输出$\boldsymbol{y}(t)$的静态值是否为零。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$
$$\dot{\boldsymbol{w}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$
$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}-6 & -5\\ 0 & 6\end{bmatrix}\ \boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$

解:

$\boldsymbol{A}$=$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}$，特征值为-2，-3，即$\boldsymbol{A}$渐进稳定。$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，方程$\begin{cases}\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{CP}=\boldsymbol{D}\end{cases}$应有解。

由$\boldsymbol{CP}=\boldsymbol{D}$，得$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1/6 & -25/36\\ 0 & 5/6\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{N}$. 输出$\boldsymbol{y}(t)$的静态值为零。

2.5 有外扰作用的受控系统如下。设计控制器 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}_w\boldsymbol{w}$ 使得闭环极点为-2 和-3，且使得输出$\boldsymbol{y}(t)$的静态值为零。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$
$$\dot{\boldsymbol{w}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$
$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}6 & 5\\0 & 6\end{bmatrix}\ \boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$

解：参考例 4-1

（1）$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$完全可控，因而可镇定；

（2）设计状态反馈矩阵使闭环极点为 $-2,\ -3$；令$\boldsymbol{F_x}=[f_{x1}\quad f_{x2}]$

由 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF_x}=\begin{bmatrix}0 & -1\\-f_{x1} & -f_{x2}\end{bmatrix}$,

特征值方程$D=s^2+f_{x2}s+f_{x1}=(s+2)(s+3)=s^2+5s+6$,

得到 $\boldsymbol{F_x}=[6\quad 5]$.

（3）由$\begin{cases}\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{PM}+\boldsymbol{BQ}=\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{CP}=\boldsymbol{D}\end{cases}$求解$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$矩阵

由 $\boldsymbol{CP}=\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}6 & 5\\0 & 6\end{bmatrix}$，得到 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1/6 & -25/36\\0 & 5/6\end{bmatrix}$

由 $\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{PM}+\boldsymbol{BQ}=\boldsymbol{N}$，令$\boldsymbol{Q}=[q_1\quad q_2]$

得到：

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & -2\end{bmatrix}\quad\Rightarrow \boldsymbol{Q}=[0\quad -2]$$

（4）求出顺馈补偿阵

$$\boldsymbol{F_w}=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{F_xP}=[0\quad -2]+[6\quad 5]\begin{bmatrix}-1/6 & -25/36\\0 & 5/6\end{bmatrix}=[-1\quad -2]$$

2.6 有外扰作用的受控系统如下。外扰 $\boldsymbol{w}$ 为常值，求该系统的鲁棒抗干扰控制器，使得闭环极点为-1，-1，-2，-2。

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{u}+\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$
$$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\ \boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{w}$$

解：参考例 6-1

（1）根据[定理 6-2]，判断是否存在鲁棒抗干扰控制器

$$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})\text{完全可控},\ rank\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}=4=n+m$$

存在鲁棒抗干扰控制器。

（2）设计鲁棒抗干扰控制器：$\dot{\boldsymbol{q}}=y$，确定控制律$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{F_x}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F_q}\boldsymbol{q}$

$$\boldsymbol{A}_L=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF_x} & -\boldsymbol{BF_q}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}$$

令$\boldsymbol{F_x}=\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{F_q}=\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ q_3 & q_4 \end{bmatrix}$，

$$|s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_L|=\begin{vmatrix} s\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F_x}) & \boldsymbol{B}\boldsymbol{F_q} \\ -\boldsymbol{C} & s\boldsymbol{I} \end{vmatrix}=(s+1)^2(s+2)^2$$

$$\begin{cases} f_2+2f_3+f_1-3=6 \\ q_1-4f_3+q_2+2q_3+2-f_1-f_2-2f_1f_4+2f_2f_3=13 \\ 2f_2q_3-2f_1q_4-q_1-q_2-4q_3+2f_3q_2-2f_4q_1=12 \\ 2q_2q_3-2q_1q_4=4 \end{cases}$$

（解不唯一，至少给出一组）

.

.

.