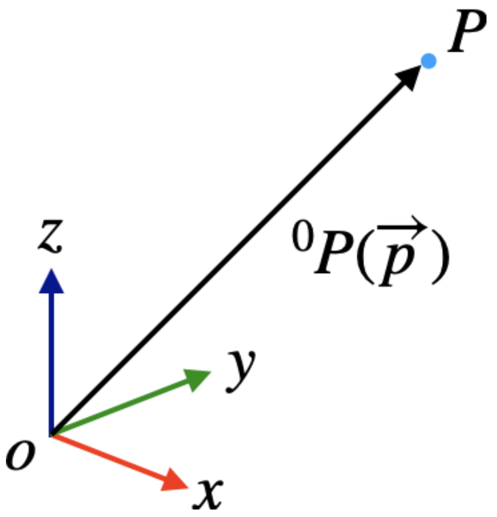
清華大學 自动化系
Department of Automation, Tsinghua University

数学基础：齐次坐标变换

自动化系：张涛

位置的表示

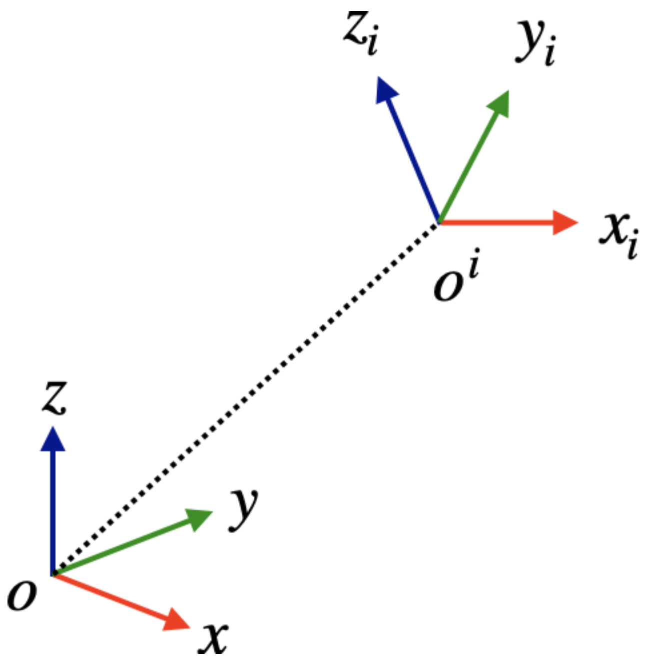


① 基坐标系{0}的三个坐标轴的单位矢量分别为：$\vec{x}$，$\vec{y}$和$\vec{z}$。

② 空间中的一点P可以用矢量$\vec{p} = P_x\vec{x} + P_y\vec{y} + P_z\vec{z}$来表示。

③ $\vec{p}$也可以用其在{0}中坐标构成的向量${}^{0}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$表示，其左上角标0表示该向量所在的坐标系为{0}。

位置的表示



① 用$\{i\}$表示与刚体i固联的坐标系，其三个坐标轴的单位矢量分别为：$\vec{x}_i$，$\vec{y}_i$和$\vec{z}_i$。

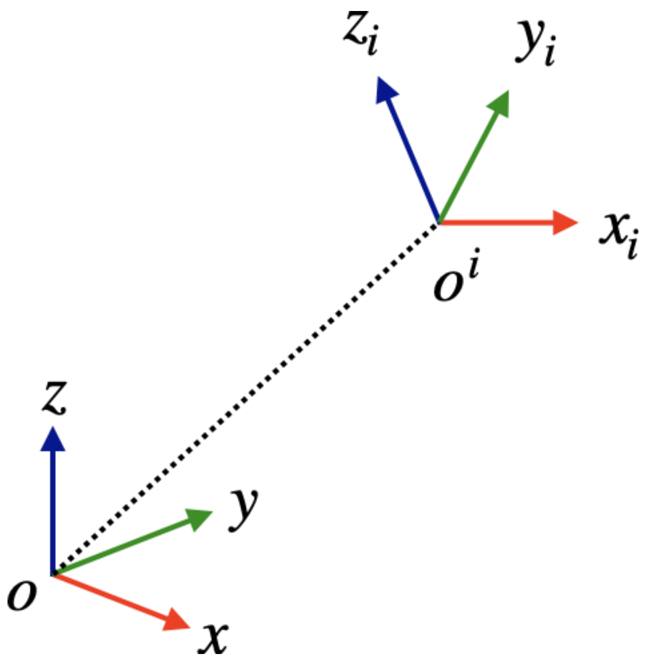
② $\vec{x}_i$，$\vec{y}_i$和$\vec{z}_i$在Σ_0中可表示为：

$$\begin{cases} \vec{x}_i = x_{ix}\vec{x} + x_{iy}\vec{y} + x_{iz}\vec{z} \\ \vec{y}_i = y_{ix}\vec{x} + y_{iy}\vec{y} + y_{iz}\vec{z}, \\ \vec{z}_i = z_{ix}\vec{x} + z_{iy}\vec{y} + z_{iz}\vec{z} \end{cases}$$

即$^0x_i = \begin{bmatrix} x_{ix} \\ x_{iy} \\ x_{iz} \end{bmatrix}$，$^0y_i = \begin{bmatrix} y_{ix} \\ y_{iy} \\ y_{iz} \end{bmatrix}$，$^0z_i = \begin{bmatrix} z_{ix} \\ z_{iy} \\ z_{iz} \end{bmatrix}$。

③ 这三个向量分别是$\vec{x}_i$，$\vec{y}_i$和$\vec{z}_i$在$\{0\}$中的投影，称作方向余弦（$x_{ix} = \vec{x}_i \cdot \vec{x}$，其余类推）。

姿态的表示

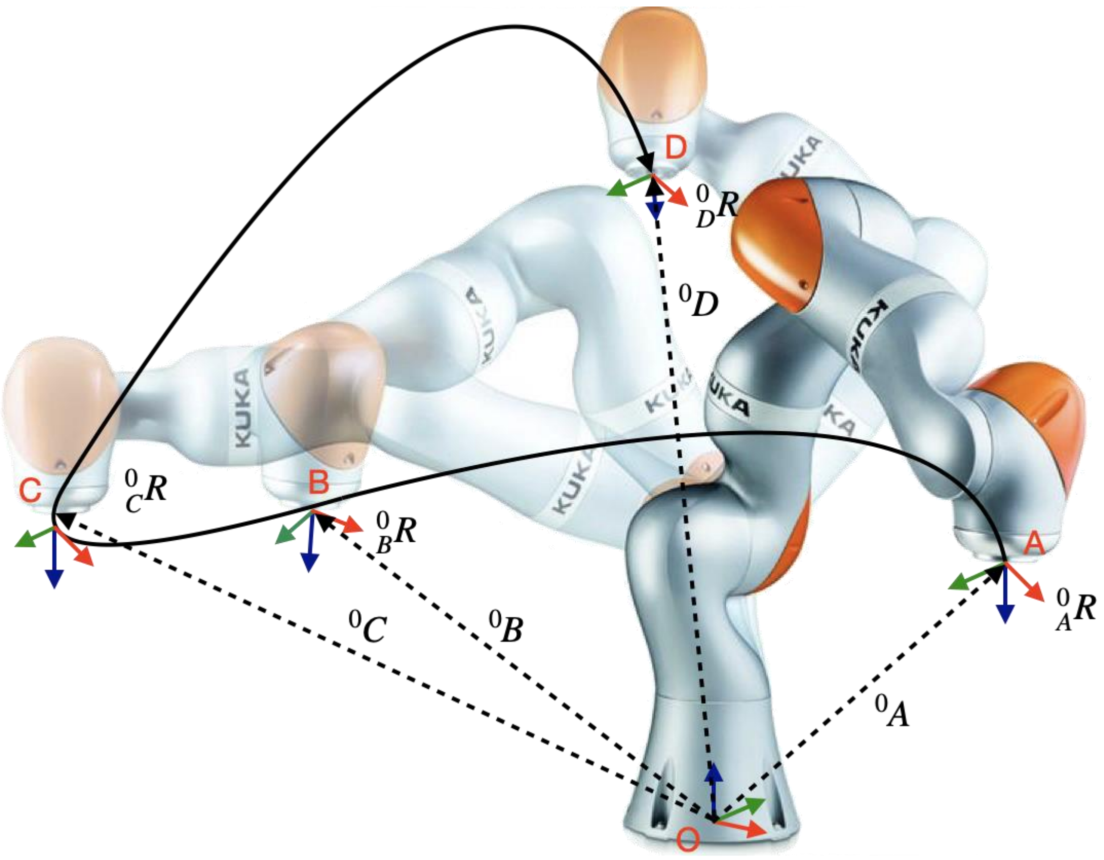


④ $\{i\}$的姿态可以用描述它的三个单位向量在$\{0\}$中的方向余弦表示，即用这三个向量构成一个3×3的矩阵R:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} {}^0x_i & {}^0y_i & {}^0z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{ix} & y_{ix} & z_{ix} \\ x_{iy} & y_{iy} & z_{iy} \\ x_{iz} & y_{iz} & z_{iz} \end{bmatrix}。$$

⑤ 从$\boldsymbol{R}$的定义可以看出，它是由正交的三个列向量构成，因此是一个正交矩阵，即$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = I_3(\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}^{-1})$。

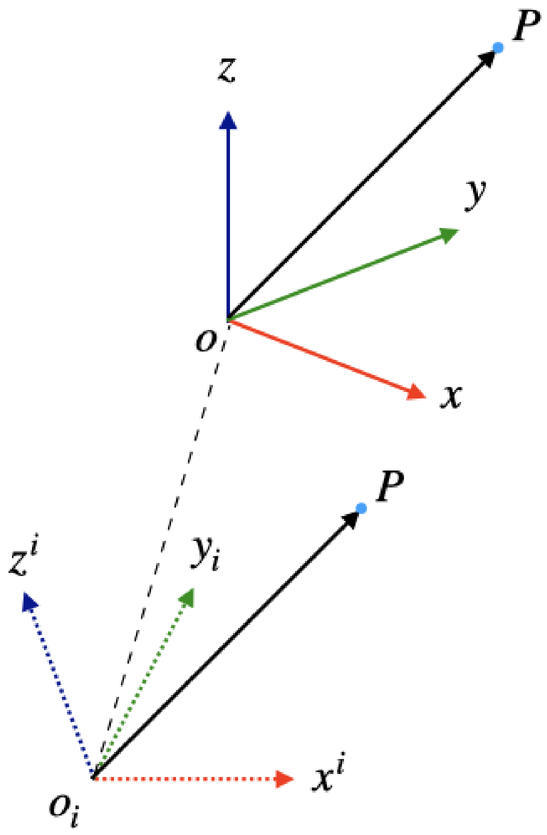
位置和姿态的表示



图中A、B等点在基坐标的位置和姿态分别表示为：

$$ {}^0A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}, \quad {}^0_A R $$

$$ {}^0B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}, \quad {}^0_B R $$



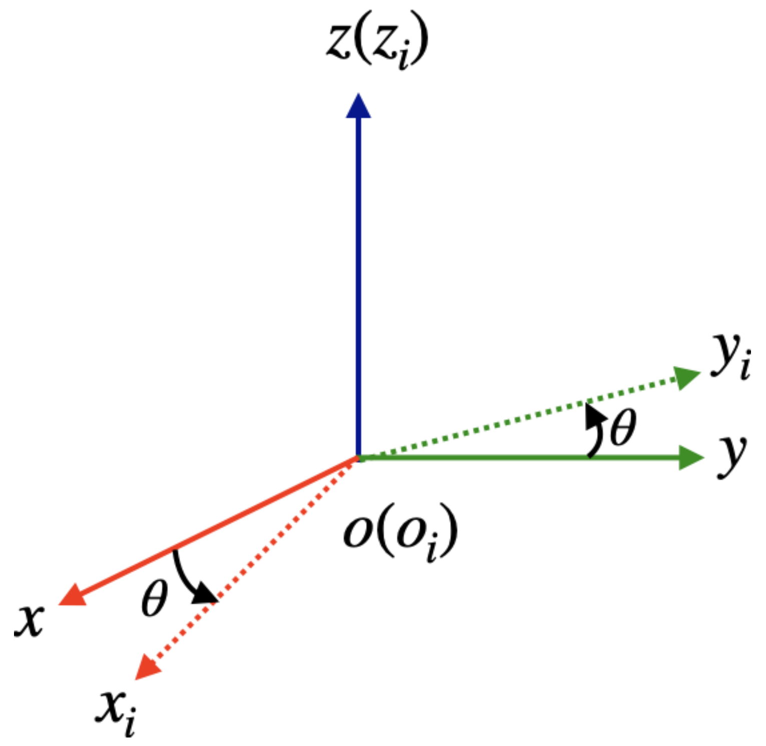
⑥ 刚体上的一点P在两个坐标系$\{i\}$和$\{0\}$中的坐标不同，两个向量之间的**坐标变换矩阵**为$\boldsymbol{R}$。我们用${}_i^0\boldsymbol{R}$更明确地表示由坐标系$\{i\}$到坐标系$\{0\}$的坐标变换。

⑦ P在$\{0\}$、$\{i\}$中的坐标分别表示为${}^0P$和${}^iP$，则有：

$$ {}^0P = {}_i^0\boldsymbol{R}\,{}^iP, $$

$$ {}^iP = {}_i^0\boldsymbol{R}^{-1} \cdot {}^0P = {}_0^i\boldsymbol{R} \cdot {}^0P。 $$

坐标变换矩阵



1. 坐标系$\{i\}$是由坐标系$\{0\}$绕$z(z_i)$轴旋转θ后得到：

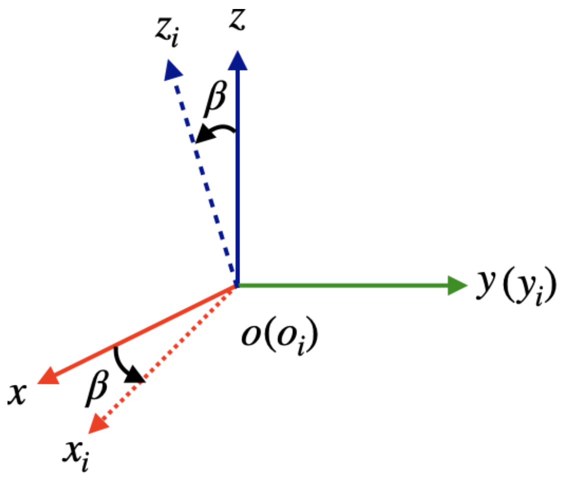
$$^0x_i = \begin{bmatrix} x_{ix} \\ x_{iy} \\ x_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

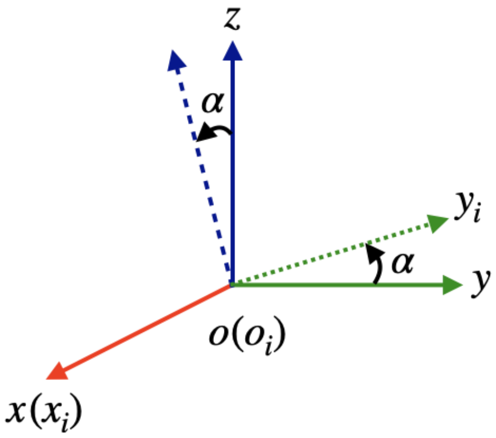
$$^0y_i = \begin{bmatrix} y_{ix} \\ y_{iy} \\ y_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sin(\theta) \\ cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^0z_i = \begin{bmatrix} z_{ix} \\ z_{iy} \\ z_{iz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

从而，由$\{1\}$到$\{0\}$的坐标变化矩阵$^0_i\boldsymbol{R}$为： $R_z(\theta) = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) & 0 \\ sin(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

清華大學自动化系
Department of Automation, Tsinghua University



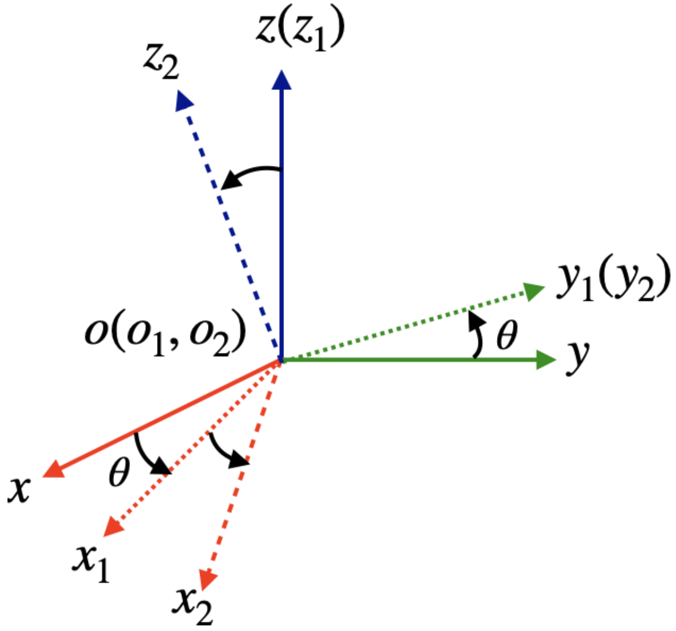


2. 坐标系$\{i\}$是由坐标系$\{0\}$绕y轴、x轴旋转β、α后得到的坐标变换矩阵分别为：

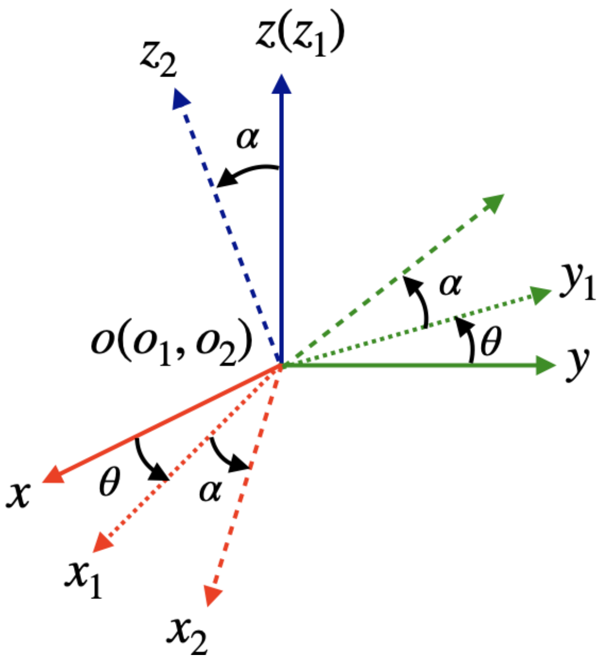
$$R_y(\beta)=\begin{bmatrix}cos(\beta) & 0 & sin(\beta)\\ 0 & 1 & 0\\ -sin(\beta) & 0 & cos(\beta)\end{bmatrix}$$

$$R_x(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha)\\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha)\end{bmatrix}$$

3. $R_x(\alpha)$，$R_y(\beta)$**和**$R_z(\theta)$**是最基本的坐标变换矩阵，通过他们可以复合出多种坐标变换矩阵。**



(1) 绕中间轴旋转的坐标变换
(RotZ+RotY1)



(2) 绕固定轴旋转的坐标变换
(RotZ+RotY)

讨论：理论上最多需要经过几次坐标系的旋转，可以得到末端刚体的姿态?

坐标变换矩阵（绕中间轴）

① 令${}^0P$，${}^1P$，${}^2P$分别代表P点在三个坐标系中的表示。如果${}^1_2\boldsymbol{R}$代表Σ_2关于Σ_1的坐标变换矩阵，则有：${}^1P={}^1_2\boldsymbol{R}\cdot{}^2P$，

类似地有：

$$ {}^0P={}^0_1\boldsymbol{R}\cdot{}^1P $$

$$ {}^0P={}^0_2\boldsymbol{R}\cdot{}^2P $$

容易地得到：${}^0_2\boldsymbol{R}={}^0_1\boldsymbol{R}\cdot{}^1_2\boldsymbol{R}$。

② 上述复合运算的过程可以理解为坐标系$\{0\}$先旋转到$\{1\}$，然后再由$\{1\}$绕中间轴旋转到$\{2\}$。而坐标的计算过程是先根据$\{2\}$中的坐标${}^2P$，计算其在$\{1\}$中的坐标${}^1P$，最后再由${}^1P$计算$\{0\}$中的坐标${}^0P$。

$$
\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \{1\} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & \{2\} \arrow[d, leftrightarrow] \\
{}^0P & {}^1P \arrow[l, "{}^0_1R"'] & {}^2P \arrow[l, "{}^1_2R"'] \arrow[ll, bend left, "{}^0_2R"]
\end{tikzcd}
$$

坐标变换矩阵（绕固定轴）

① 上述旋转是依次相对于中间坐标系进行的，因此旋转矩阵采用的右乘；

② 如果每次中间旋转都是相对于固定坐标系$\{0\}$，则最终旋转矩阵的合成规则为：

$$ {}^{0}_{2}\boldsymbol{R} = {}^{1}_{2}\boldsymbol{R} \cdot {}^{0}_{1}\boldsymbol{R} $$

本周作业：请同学们自己推导上述公式。

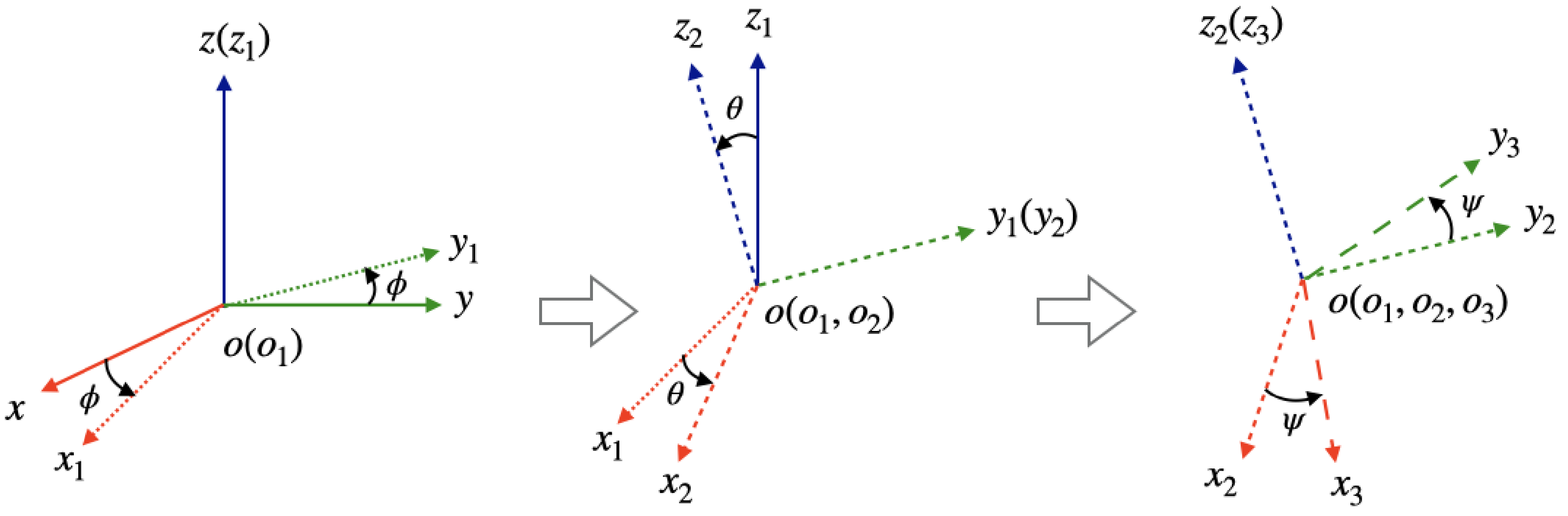
坐标变换矩阵-欧拉角

① 本质上，坐标变换矩阵${}_i^0\boldsymbol{R}$表示的刚体相对于基坐标系的姿态。而${}_i^0\boldsymbol{R}$中包含了9个元素，其单位正交性（$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}=I_3$）引入了6个约束，即这9个元素不是独立的，而是相关的。这就意味着，只要给定3个独立的参数就足以描述一个刚体在空间中的姿态。

② 因此，我们常常采用三个角度来表示刚体的姿态，这就是欧拉角。具体做法就是按照一定的次序，通过3个基本旋转来得到${}_i^0\boldsymbol{R}$。经过计算，绕中间轴有27种可能的组合，但其中有12种是可行的。绕固定轴也有相同的结论。后面我们举例来说明（绕中间轴的ZYZ和绕固定轴的ZYX）。

讨论：请同学们思考为什么会有27种可能?

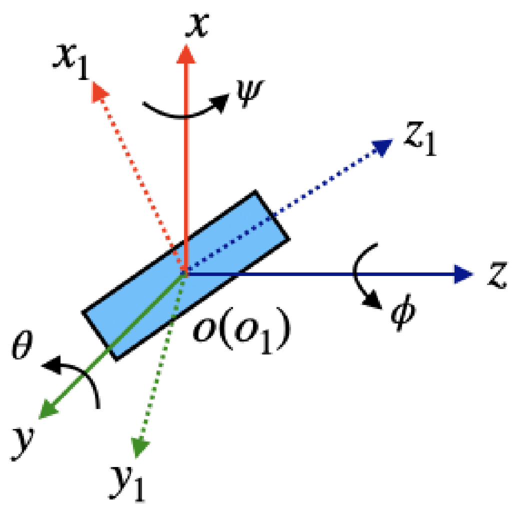
欧拉角-ZYZ（绕移动轴-右乘）



$${}^{0}_{1}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{z}(\phi) \qquad {}^{1}_{2}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{y_1}(\theta) \qquad {}^{2}_{3}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{z_2}(\psi)$$

$$\square\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_{z}(\phi)\boldsymbol{R}_{y_1}(\theta)\boldsymbol{R}_{z_2}(\psi) = \begin{bmatrix} C_\phi C_\theta C_\psi - S_\phi S_\psi & -C_\phi C_\theta S_\psi - S_\phi S_\psi & C_\phi S_\theta \\ S_\phi C_\theta C_\psi + C_\phi S_\psi & -S_\phi C_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & S_\phi S_\theta \\ -S_\theta C_\psi & S_\theta S_\psi & C_\theta \end{bmatrix}$$

欧拉角-RPY（绕固定轴-左乘）



$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_z(\phi)\boldsymbol{R}_y(\theta)\boldsymbol{R}_x(\psi)$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} C_\phi C_\theta & -C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi & C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi \\ S_\phi C_\theta & S_\phi S_\theta S_\psi + C_\phi C_\psi & S_\phi S_\theta C_\psi - C_\phi S_\psi \\ -S_\theta & C_\theta S_\psi & C_\theta C_\psi \end{bmatrix}$$

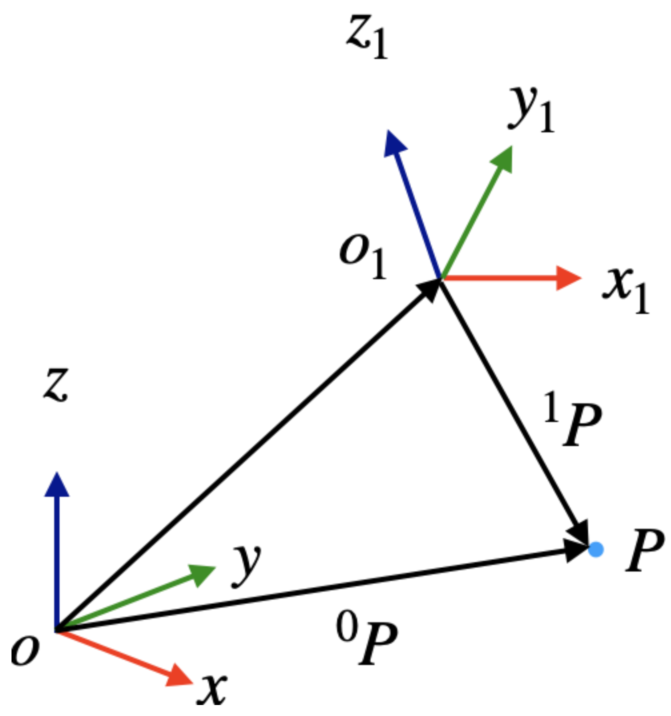
① 将$\{0\}$绕x_0轴旋转ψ（偏航角）到$\{1\}$，所对应的旋转矩阵为$\boldsymbol{R}_x(\psi)$；

② 将$\{1\}$绕y_0轴旋转θ（俯仰角）到$\{2\}$，所对应的旋转矩阵为$\boldsymbol{R}_y(\theta)$；

③ 将$\{2\}$绕z_0轴旋转ϕ（滚动角）到$\{3\}$，所对应的旋转矩阵为$\boldsymbol{R}_z(\theta)$；

注：RPY采用的基本矩阵左乘！

齐次坐标变换



当坐标系$\{1\}$的原点也相对$\{0\}$发生了位移的情况下，

空间中的P点的坐标可以用如下方法表示：

$$^0P = {^0O_1} + {^0_1\boldsymbol{R}} \cdot {^1P}$$

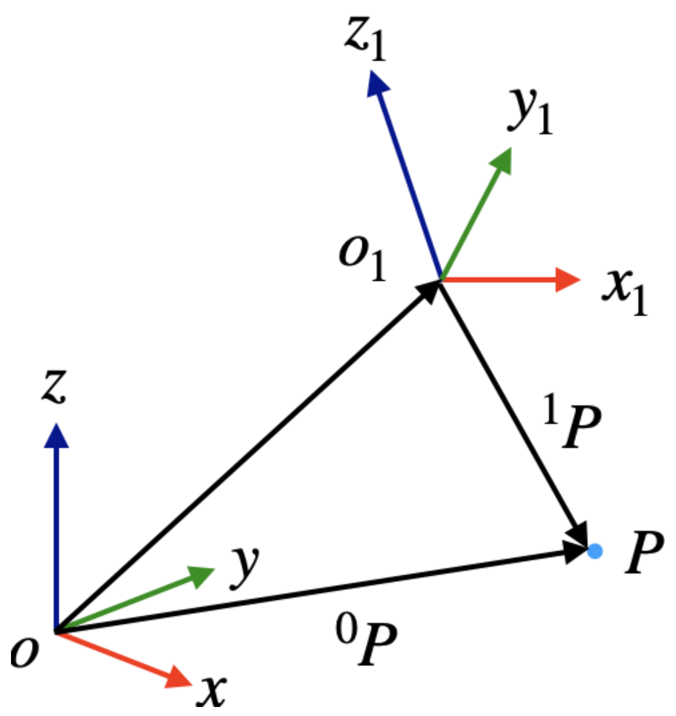
定义如下变量$\tilde{P} = \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$，

则上式可改写成非常简洁的形式：

$$^0\tilde{P} = \begin{bmatrix} {^0_1\boldsymbol{R}} & {^0O_1} \\ 0_{3\times1} & 1 \end{bmatrix} \cdot {^1\tilde{P}}$$

其中的：$^0_1\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} {^0_1\boldsymbol{R}} & {^0O^1} \\ 0_{3\times1} & 1 \end{bmatrix}$称为齐次坐标变化矩阵，上式的这个变换过程称为

坐标的齐次变换。



由于齐次变换阵是可逆的，即$\boldsymbol{T}^{-1}$存在，

$$^1\tilde{P} = \boldsymbol{T}^{-1} \cdot {^0\tilde{P}}$$

从定义可知：

$${}^0_1\boldsymbol{T}^{-1} = {}^1_0\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} {}^0_1\boldsymbol{R}^T & -{}^0_1\boldsymbol{R}^T \cdot {}^0O^1 \\ 0_{3\times1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1_0\boldsymbol{R} & -{}^1_0\boldsymbol{R} \cdot {}^0O^1 \\ 0_{3\times1} & 1 \end{bmatrix}$$

注意：

① 齐次变换给坐标系之间的变换带来了很大的方便，但需要注意的是其不具有正交性，一般地：$\boldsymbol{T}^{-1} \neq \boldsymbol{T}^T$。

② 类似一般的坐标变换矩阵，容易验证齐次变化矩阵具有传递性，即：

$$^0\tilde{P} = {}^0_1\boldsymbol{T} \cdot {}^1_2\boldsymbol{T} \cdot {}^3_4\boldsymbol{T} \cdot \cdots {}^{n-1}_{n}\boldsymbol{T} \cdot {}^n\tilde{P}$$

清華大学自动化系
Department of Automation, Tsinghua University

THANKS

FOR YOUR WATCHING