第二章　抗外扰控制

控制系统中总是存在各种不确定性，而对抗不确定性对性能的影响是控制系统设计的核心目标。不确定性可以按照内部不确定性和外部不确定性划分，内部不确定性指系统模型参数的不准确或模型近似带来的不确定，而外部不确定性指除了控制输入以外，其他不受设计者调节的输入信号，例如环境的噪声、突然发生的干扰等，后面我们会看到，在轨迹跟踪问题中被跟踪的参考输入轨迹也可以等价地看做外部扰动信号。

针对内部不确定性，设计的基本思路是通过反馈改造系统结构，以降低系统对模型不确定性的敏感性，这类方法称为鲁棒控制（robust control）；或者通过辨识系统模型，实时调整控制器以适应模型的变化，这类方法称为自适应控制（adaptive control）。

本章主要讨论针对外扰的控制系统设计方法。希望设计控制律，使得控制系统接受参考输入指令并引导系统输出跟随运动，并能够抑制未知外扰对受控系统的状态或输出的影响。这里我们对未知外扰有进一步的限定，即假设外扰可以测量并且类型已知，这样可以根据外扰的特性和测量引入前馈控制实现抑制。当外扰为随机信号（不可测量、无法预测）时，需要从随机系统的角度进行分析，本章不做讨论。

§1 基本概念

1.1 外扰模型和参考输入模型

对一些常见的确定性外扰$d(t)$，可以建立如下模型：

$$\dot{d}(t) = \Psi d(t) \tag{1-1}$$

例如：阶跃函数：$\Psi = 0 \quad d(t) = d(0)$

斜坡函数：$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} d_1(t) = d_1(0) + d_2(0)t \\ d_2(t) = d_2(0) \end{cases}$

正余弦： $\Psi=\begin{bmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{bmatrix}$ $\begin{cases}d_1(t)=d_1(0)\cos\omega t+d_2(0)\sin\omega t\\ d_2(t)=d_2(0)\cos\omega t-d_1(0)\sin\omega t\end{cases}$

注意外扰模型仅仅描述的信号的特征，但是由于初值一般未知，所以信号是不确定的。

在输出跟踪问题中，假设参考输入（或称指令信号、设定值）$v(t)$由如下模型产生

$$\dot{v}(t)=Tv(t) \tag{1-2}$$

选取不同的矩阵T，该模型能产生不同类型的参考输入。

后面将看到，可测量外扰和参考输入信号在数学上可以统一处理，因此将外扰$d(t)$和参考输入$v(t)$合称为外部信号，用$w(t)$表示，则如下系统称为外模型：

$$\dot{w}(t)=Mw(t) \tag{1-3}$$

其中

$$w=\begin{bmatrix}d\\ v\end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix}\Psi & 0\\ 0 & T\end{bmatrix} \tag{1-4}$$

在下面的讨论中，外模型中的矩阵M可不局限于对角块矩阵。

1.2 对外扰的不变性

本章讨论如下系统的抗外扰控制问题：

$$\Sigma_O:\ \begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu+Nw\\ \dot{w}=Mw\\ y=Cx+Dw\end{cases} \tag{1-5}$$

这里，x,u,w,y分别是n,l,p,m维向量；x是状态，u是控制输入，w是外扰，y是输出，矩阵有适当的维数。系统对外扰$w(t)$的不变性可分为：

静态不变性：状态（或输出）稳态不受扰动影响，即

$$\lim_{t\to\infty}x(t)=0 \text{ 或 } \lim_{t\to\infty}y(t)=0$$

完全不变性：状态（或输出）动态和稳态均不受扰动影响，即除满足上述静态不变性条件以外，还满足动态不变性条件，即当$x(0)=0$时，$x(t)\equiv 0$或 $y(t)\equiv 0$。

对于变量和矩阵赋予不同的含义，可以描述（单纯的）抗外扰控制问题、（无外扰情况下的）调节器问题和存在外扰情况下的调节器问题。

抗外扰控制问题：

对于单纯的抗干扰问题，$N=[N_1 \quad 0], D=[D_1 \quad 0]$，$Nw=N_1d$，$y=Cx+D_1d$，即问题描述为

$$\Sigma_O:\ \begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu+N_1d\\ \dot{d}=\Psi d\\ y=Cx+D_1d\end{cases}$$

此时干扰信号由外模型$\dot{d}=\Psi d$产生，输出y是实际系统输出。

调节器问题(无外扰情况)：

对于不存在外扰的调节器问题，$N=0, C=-\tilde{C}, D=[0 \quad I]$， $Nw=0$，$y=v-\tilde{C}x$，即问题描述为

$$\Sigma_O:\ \begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ \dot{v}=Tv\\ y=v-\tilde{C}x\end{cases}$$

此时参考输入v由外模型$\dot{v}=Tv$产生，输出y是参考输入v与实际系统输出$\tilde{C}x$的差。

调节器问题(有外扰情况)：

对于存在外扰的调节器问题，$N=[N_1 \quad 0]$，$C=-\tilde{C}$，$D=[-D_1 \quad I]$，即$Nw=N_1d, y=v-\tilde{C}x-D_1d$，问题描述为

$$\Sigma_O:\ \begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu+N_1d\\ \dot{w}=Mw\\ y=v-\tilde{C}x-D_1d\end{cases}$$

其中w, M如式(1-4)所定义。

因此对于外扰$d(t)$的不变性问题和对于参考输入$v(t)$的调节器问题可统一地归结为对于外部信号$w(t)$的不变性问题，抗外扰控制器和调节器设计问题可以在系统（1-5）描述的抗外扰控制器设计问题这个统一的框架下处理。

§2 对外扰的完全不变性问题

2.1 状态对外扰的完全不变性问题

讨论状态对外扰的不变性问题，只需涉及系统的状态方程：

$$\dot{x} = Ax + Bu + Nw \tag{2-1}$$

当$u = 0$且$x(0)$=0时，外扰对状态的影响可以由下式描述

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}Nw(s)]$$

可知，状态x完全不受扰动w影响的充要条件为：A稳定，且

$$(sI - A)^{-1}N = 0\text{，即 } N = 0 \tag{2-2}$$

这个条件容易理解，即外扰影响状态演化的通道被阻断，但通常情况下这个条件是不成立的。当$N \neq 0$时，如果外扰可以测量，可通过前馈将扰动馈送到输入端，并结合状态反馈以抵消它在扰动端的作用，即采用控制律

$$u = -F_x x - F_w w \tag{2-3}$$

此时闭环系统描述为

$$\Sigma_L: \quad \dot{x} = A_L x + N_L w \tag{2-4}$$

其中 $A_L = A - BF_x$，$N_L = N - BF_w$

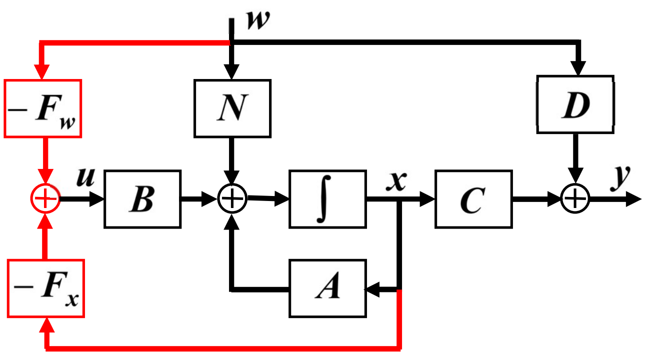

图 2-1 外扰前馈补偿

- 状态反馈$-F_x x$将A改造成$A_L = A - BF_x$，以保证闭环稳定。
- 扰动前馈$-F_w w$将N改造成$N_L = N - BF_w$，期望$N_L = 0$。

[定理 2-1] 对于式（2-1）描述的系统，采用控制律（2-3）实现状态对外扰完全不变性的充要条件是：$(A,\ B)$可镇定，且

$$\operatorname{rank} B = \operatorname{rank}\,[B\ \ N] \qquad \text{（匹配条件）} \tag{2-5}$$

注：匹配条件(2-5)意味着N的列可以用B的列的线性组合来表示。

2.2 输出对外扰的完全不变性问题

通常，我们更关心输出是否受外扰影响。考虑如下系统

$$\Sigma_O: \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Nw \\ y = Cx + Dw \end{cases} \tag{2-6}$$

当$u = 0$且$x(0)$=0时

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[(C(sI - A)^{-1}N + D)w(s)]$$

可见，输出y完全不受扰动w影响的充要条件为：A稳定，且

$$C(sI - A)^{-1}N + D = 0$$

即

$$C[N \quad AN \quad \cdots \quad A^{n-1}N] = 0, \quad D = 0 \tag{2-7}$$

这意味着：由扰动w可控的状态子空间是由输出y不可观测的。(注：可利用解耦控制中介绍的 Fedeeva 算法中的结果证明式(2-7)中的后一等式)

当上述条件不成立时，可利用状态反馈加扰动前馈，“改造”系统的A和N，即采用控制律

$$u = -F_x x - F_w w \tag{2-8}$$

则闭环系统描述为

$$\Sigma_L: \quad \begin{cases} \dot{x} = A_L x + N_L w \\ y = Cx + Dw \end{cases} \tag{2-9}$$

其中 $A_L = A - BF_x$，$N_L = N - BF_w$。

[定理 2-2] 对于系统 Σ_O，采用控制律（2-8）可实现输出对外扰完全不变性的充要条件是：存在F_x和F_w使得$A_L = A - BF_x$为 Hurwitz 矩阵，且

$$C[N_L \quad A_L N_L \quad \cdots \quad A_L^{n-1} N_L] = 0, \quad \mathrm{D} = 0 \tag{2-10}$$

其中$N_L = N - BF_w$.

两种特殊情形：

- $F_x = 0$，$F_w \neq 0$。意味着$C[N_L \quad AN_L \quad \cdots \quad A^{n-1}N_L] = 0$和$D = 0$，此时仅靠扰动前馈实现了输出对外扰的完全不变性；特别地，若$N_L = 0$，则实现了状态对外扰的完全不变性。
- $F_x \neq 0$，$F_w = 0$。意味着$C[N \quad A_L N \quad \cdots \quad A_L^{n-1} N] = 0$和$D = 0$，此时仅靠状态反馈就实现了输出对外扰的完全不变性，这是很理想的，但必要条件是原系统满足$CN = 0$。

[例 2-1] 有外扰作用的受控系统如下，欲寻找适当的控制律，实现输出对外扰的完全不变性。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix} w \\ y = [2 \quad 1]\ x \end{cases}$$

解：（1）检验能否实现状态对外扰的完全不变性。参见[定理 2-1]

$$\mathrm{rank}\, B \neq \mathrm{rank}[B \quad N]，BF_w = N\text{无解。}$$

（2）检验能否实现输出对外扰的完全不变性。参见[定理 2-2]

$CN = 0$，而 $CAN \neq 0$，有希望仅靠状态反馈将A改造成A_L，使得A_L为稳定阵，且 $CA_L N = 0$。设状态反馈矩阵$F_x = [f_1 \quad f_2]$，则需成立：

$$C(A - BF_x)N = 150 + 5f_1 - 10f_2 = 0 \tag{a}$$

为保证闭环稳定，由闭环特征多项式

$$det(sI - A + BF_x) = s^2 + (3 + f_2)s + (20 + 5f_1 + 3f_2)$$

需满足：

$$3+f_2>0，及\ 20+5f_1+3f_2>0 \tag{b}$$

由式（a）（b）选：$f_1=0$，$f_2=15$，即 $F_x=[0\quad 15]$。

结论：通过 $u=-F_x x$可实现输出对外扰的完全不变性。

§3 输出对外扰的静态不变性问题

3.1 问题描述

上述状态和输出对外扰完全不变性问题中，均采用了状态反馈和扰动前馈相结合的解决方案，要求扰动和/或状态能直接测量，通过前馈与反馈结合完全阻断外扰对系统状态或输出的影响，因此不需要知道外扰模型。但在下面要讨论的输出对外扰的静态不变性问题中，需要外扰模型的信息。

输出对外扰的静态不变性指输出的稳态值大小不受外扰信号影响，但其暂态过程仍然可能会依赖于外扰信号。设受控系统描述如下

$$\Sigma_O:\quad \begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu+Nw \\ \dot{w}=Mw \\ y=Cx+Dw \end{cases} \tag{3-1}$$

分析：外扰w有两个作用点，一是作用于状态方程，间接影响输出；二是作用于输出方程，直接影响输出。如果能在稳态时将二者影响抵消，则在稳态时输出不受外扰w的影响。

3.2 外扰引起的强制解

[定理 3-1]当输入$u=0$时，系统（3-1）由外扰w引起的稳态强制解为外扰信号的线性组合，即存在矩阵 P 使得

$$\tilde{x}(t)=\lim_{t\to\infty}x(t)=-Pw(t), \tag{3-2}$$

当且仅当是A为稳定矩阵，且如下矩阵方程有解P:

$$AP-PM=N. \tag{3-3}$$

证明：(充分性)当$u=0$且式（3-3）成立时，有

$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Nw(\tau)d\tau$$

$$=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}(AP-PM)w(\tau)d\tau$$

$$=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}APw(\tau)d\tau-\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}PMw(\tau)d\tau$$

因$Mw(t)=\dot{w}(t)$，所以有

$$x(t)=-Pw(t)+e^{A(t-t_0)}x(t_0)+e^{A(t-t_0)}Pw(t_0) \tag{3-4}$$

因A渐近稳定，故 $\lim_{t\to\infty}x(t)=-Pw(t)$，即状态的稳态强制解为 $\tilde{x}(t)=-Pw(t)$.

(必要性)假设$u=0$，并假设由外扰w引起的状态的稳态强制解为$\tilde{x}(t)=-Pw(t)$，则其代入状态方程（3-1），得：

$$\dot{\tilde{x}}=A\tilde{x}+Nw=-APw+Nw=-P\dot{w}(t)=-PMw$$

即式（3-3）成立。再由（3-4），可知A渐近稳定。

[引理 3-1]　矩阵方程$AP-PM=N$有唯一解矩阵P的充要条件是：矩阵A和M没有相同特征值。

证明提示：

（1）原方程等价于：$(I_p\otimes A-M^{\top}\otimes I_n)c(P)=c(N)$，其中 Kronecker 积$\otimes$和$c(\cdot)$定义为

$$G_{m\times n}\otimes H_{p\times q}\triangleq\begin{bmatrix}g_{11}H & \cdots & g_{1n}H\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ g_{m1}H & \cdots & g_{mn}H\end{bmatrix}_{mp\times nq},\qquad c(N_{n\times p})\triangleq\begin{bmatrix}n_1\\ \vdots\\ n_p\end{bmatrix}_{np\times 1}$$

设λ_i和μ_j分别是$A_{n\times n}$和$M_{p\times p}^{\top}$的特征值，x_i和y_j分别是它们对应的特征向量，则$(I_p\otimes A-M^{\top}\otimes I_n)$ 的特征值是$\lambda_i-\mu_j$，对应的特征向量是$y_j\otimes x_i$。

[例 3-1] 已知系统和外扰模型及初态如下，求外扰的稳态分量$\tilde{x}(t)$。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} w \\ \dot{w} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} w\,; \quad w(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

解：A的特征值（-1，-2）和M^T的特征值（$\pm j$）相异,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} P - P \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

有唯一解：$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，因此

$$\tilde{x}(t) = -Pw(t) = -Pe^{Mt}w(0) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}$$

3.3 实现静态不变性的条件

现在回到系统（3-1），考虑$u = 0$的情形。希望稳态时输出不受外扰w的影响。由于$u = 0$时，$\tilde{x} = -Pw$，从而 $\tilde{y}(t) = C\tilde{x} + Dw = (D - CP)w(t)$。因此若$\tilde{y}(t)$不受外扰影响，则必须 $CP = D$。

[定理 3-2]　当$u = 0$时系统 (3-1) 具有输出对外扰静态不变性的充要条件是：A是渐近稳定的，且下述矩阵方程组联立有解

$$\begin{cases} AP - PM = N \\ CP = D \end{cases} \tag{3-5}$$

- 这里可以认为外模型M没有负实部特征值，因此，如果A是渐近稳定的，则$AP - PM = N$有唯一解。
- 若$AP - PM = N$的解不满足$CP = D$，则需要“改造”A和N，以调整前者的解满足后者。

■ 思考：**讨论静态不变性时，为何可以认为M没有负实部特征值?**

§4 状态和外扰可直接测量时的抗干扰问题

考虑系统（3-1），希望设计控制律使得输出稳态无差，即$t \to \infty$时，$y(t)$趋于0。从上述讨论可知，这个问题等价于输出对外扰静态不变的问题。根据[定理

3-2]，采用前馈和反馈结合的控制律：

$$u = -F_x x - F_w w \tag{4-1}$$

此时闭环系统描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BF_x)x + (N - BF_w)w \\ \dot{w} = Mw \\ y = Cx + Dw \end{cases}$$

因此，实现输出稳态无差的充要条件是：闭环稳定，且存在矩阵P满足方程组：

$$\begin{cases} (A - BF_x)P - PM = N - BF_w \\ CP = D \end{cases} \tag{4-2}$$

[定理 4-1]　对于系统（3-1）采用控制律（4-1）实现闭环输出稳态无差的充要条件是：$(A,\ B)$可镇定，且存在P,Q矩阵满足：

$$\begin{cases} AP - PM + BQ = N \\ CP = D \end{cases} \tag{4-3}$$

当式(4-3)有解P,Q时，如下选取控制律（4-1）中的增益矩阵可实现闭环输出稳态无差：选取F_x使得$A - BF_x$为稳定矩阵，且令

$$F_w = Q + F_x P \tag{4-4}$$

[例 4-1] 有外扰的受控系统如下，设计控制律$u = -F_x x - F_w w$，使闭环极点为 -1，-1，且实现输出稳态无差。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ \dot{w} = 0 \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w \end{cases}$$

解：（1）$(A,\ B)$完全可控，因而可镇定；

（2）设计状态反馈矩阵使闭环极点为 -1，-1；

由 $A - BF_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，得到 $F_x = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

（3）由式（4-3）的方程组求解P,Q矩阵

由 $CP = D$，　$C = I$，得到 $P = D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

由 $AP-PM+BQ=N$，得到：

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}P-0+\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}Q=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow P+Q=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow Q=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

（4）由式（4-4）求出前馈补偿阵

$$F_w=Q+F_xP=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$$

§5 带观测器的抗干扰问题※

当外扰和状态不可量测时，一个很自然的想法便是构造观测器。问题是，按照外扰和状态的实际值设计好的抗干扰控制器，用重构值代替后还能保证对外扰输出无静差吗？

直观地看，如果控制律 $u=-F_xx-F_ww$ 实现了输出静态无差，且$t\to\infty$时，有$\hat{x}=x$，$\hat{w}=w$，则控制律 $u=-F_x\hat{x}-F_w\hat{w}$ 也应该能实现输出静态无差。下面分两个步骤证明这一点。

一、证明分离设计的观测器满足内模原理

（1）将外扰和状态合并为增广状态：

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{w}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & N\\0 & M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\w\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\w\end{bmatrix}\end{cases} \tag{5-1}$$

（2）针对增广状态，设计观测器

$$\begin{bmatrix}\dot{\hat{x}}\\\dot{\hat{w}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-H_1C & N-H_1D\\-H_2C & M-H_2D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}\\\hat{w}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}H_1\\H_2\end{bmatrix}y \tag{5-2}$$

取 $u=-F_x\hat{x}-F_w\hat{w}$，得到：

$$\dot{x}_C=A_Cx_C+Hy \tag{5-3}$$

其中

$$x_C=\begin{bmatrix}\hat{x}\\\hat{w}\end{bmatrix},\quad A_C=\begin{bmatrix}A-H_1C-BF_x & N-H_1D-BF_w\\-H_2C & M-H_2D\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}H_1\\H_2\end{bmatrix}$$

这里假设存在观测器增益矩阵H使得A_C为稳定矩阵。

（3）计算$A_C S - SM$

注意，F_x和F_w满足[定理 4-1]的条件，即：

$$\begin{cases} AP - PM - BF_C S = N \\ CP = D \end{cases}, \quad F_C = [F_x \quad F_w], \quad S = \begin{bmatrix} P \\ -I \end{bmatrix} \tag{5-4}$$

$$A_C S - SM = \begin{bmatrix} A - H_1 C - BF_x & N - H_1 D - BF_w \\ -H_2 C & M - H_2 D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ -I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P \\ -I \end{bmatrix} M$$

$$= \begin{bmatrix} AP \underline{- H_1 CP} - BF_x P - N \underline{+ H_1 D} + BF_w - PM \\ \underline{-H_2 CP} - M \underline{+ H_2 D} + M \end{bmatrix} = 0$$

综上可知，系统的设计参数满足如下三个联立方程：

$$\begin{cases} AP - PM - BF_C S = N & \text{【装置条件】} \\ A_C S - SM = 0 & \text{【内模条件】} \\ CP = D & \text{【输出条件】} \end{cases} \tag{5-5}$$

二、证明闭环系统（原系统+观测器+反馈控制律）输出静态无差。

[定理 5-1]　对有外扰受控系统

$$\Sigma_O: \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Nw \\ \dot{w} = Mw \\ y = Cx + Dw \end{cases}$$

采用如下反馈控制律：

$$\begin{cases} \dot{x}_C = A_C x_C + Hy \\ u = -F_C x_C \end{cases}$$

其中H使得A_C为稳定阵，若矩阵P, S满足式（5-5）且如定理 4-1 选取F_C，则闭环系统输出静态无差。

证明：将控制律代入原系统，得到闭环系统：

$$\Sigma_L: \quad \begin{cases} \dot{x}_L = A_L x_L + N_L w \\ \dot{w} = Mw \\ y = C_L x_L + D_L w \end{cases}$$

$$x_L = \begin{bmatrix} x \\ x_C \end{bmatrix}, \quad A_L = \begin{bmatrix} A & -BF_C \\ HC & A_C \end{bmatrix}, \quad N_L = \begin{bmatrix} N \\ HD \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} C_L = [C \quad 0] \\ D_L = D \end{matrix}$$

容易证明,A_L为稳定矩阵。

令 $E=\begin{bmatrix}P\\S\end{bmatrix}$，得到：$C_LE=[C\quad 0]\begin{bmatrix}P\\S\end{bmatrix}=CP=D=D_L$

$$A_LE-EM=\begin{bmatrix}A & -BF_C\\ HC & A_C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P\\S\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}P\\S\end{bmatrix}M$$

$$=\begin{bmatrix}AP-PM-BF_CS\\ HCP+A_CS-SM\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N\\HD\end{bmatrix}=N_L$$

以上结果说明：若存在P,S矩阵满足式（5-5），则对于闭环系统Σ_L而言，存在矩阵E使得$C_LE=D_L$和$A_LE-EM=N_L$同时成立，因而能实现输出静态无差。证毕。

§6 常值扰动下的鲁棒抗干扰控制器

鲁棒（Robust）性是指系统的某些性能对系统及其环境的某些变化所具有的保持能力。比如：当线性系统参数变化时，只要极点仍在左半平面，系统将保持稳定。因而，系统的稳定性对系统参数的变化具有鲁棒性。

前述抗干扰控制器设计方法中，静态无差是靠控制器和受控系统参数之间的“精确配合”（矩阵方程组有解，或者是信号恰好正负抵消）实现的，因此，对系统参数的变化不具有鲁棒性。下面介绍一种鲁棒抗干扰控制器的设计方法。

6.1 PI 控制器的启示

在经典的单变量控制理论中，为使闭环系统对常值扰动输出静态无差，通常采用 PI 控制，$u(t)=K_Py(t)+K_I\int y(t)dt$，如下图：

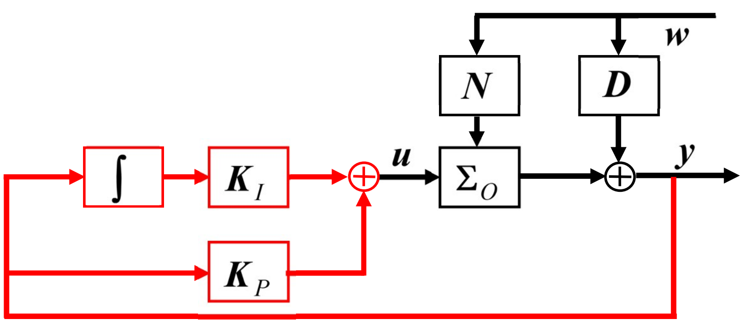

图 6-1

- 只要y不为零，积分器输出就不断增长（或减少），直到将y “拉回零”，此时，积分器输出保持不变，以抵消常值扰动。

- 即使系统参数发生变化，只要系统仍然稳定，积分环节将保证系统输出静态无差，从而使后者对系统的参数变化具有鲁棒性。

对于存在常值扰动的多变量系统，仿照上述单变量 PI 抗干扰控制器思想，在每一个输出分量后面串入一个积分器，共m个积分器（见图 6-2）。

受控系统： $$\Sigma_O: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Nw \\ \dot{w} = Mw \quad (M = 0) \\ y = Cx + Dw \end{cases} \tag{6-1}$$

鲁棒抗干扰控制器： $$\begin{cases} \dot{q} = y \\ u = -F_x x - F_q q \end{cases} \tag{6-2}$$

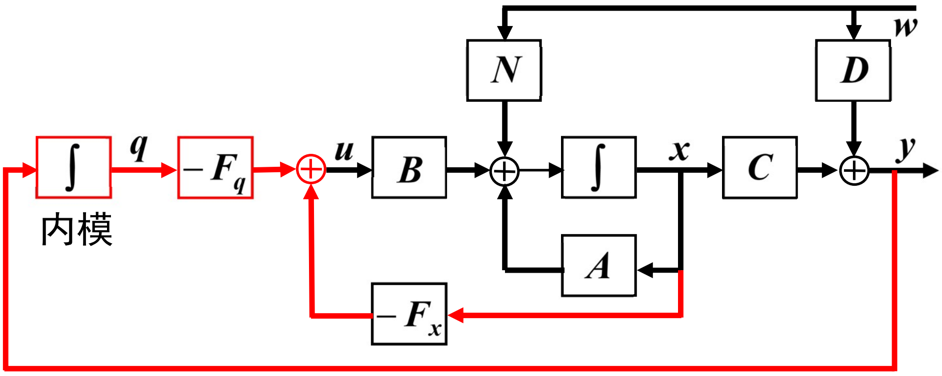

图 6-2

- 思考：请比较控制律 $u = -F_x x - F_q q$ 和 $u = -F_x x - F_w w$ 的异同。

由式（6-1）及（6-2）的第一式，得增广系统$\tilde{\Sigma}$的方程：

$$\tilde{\Sigma}: \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} N \\ D \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + Dw \end{cases} \tag{6-3}$$

代入 $u = -F_x x - F_q q$，得到闭环系统Σ_L的方程：

$$\Sigma_L: \quad \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BF_x & -BF_q \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N \\ D \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + Dw \end{cases} \tag{6-4}$$

6.2 闭环实现静态无差的条件

由于$M=0$，根据[定理 3-2]，Σ_L实现静态无差的充要条件是：A_L渐稳，且存在矩阵P使得方程$A_LP=N_L$和$C_LP=D$同时成立。

从式（6-4）可以看出：$A_LP=N_L$的第二行就是$C_LP=D$。也就是说，前者蕴涵了后者。而当A_L渐稳时，方程$A_LP=N_L$必有解。

[定理 6-1]　式（6-1）描述的系统，采用抗干扰控制器（6-2）实现静态无差的充要条件是：闭环系统（6-4）渐稳。

闭环系统Σ_L可以任意配置极点，当且仅当增广系统$\tilde{\Sigma}$完全可控。由式（6-3）可知，$\tilde{\Sigma}$的可控性矩阵为：

$$\tilde{Q}_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n+m-1}B \\ 0 & CB & CAB & \cdots & CA^{n+m-2}B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B & AQ \\ 0 & CQ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & Q \\ I & 0 \end{bmatrix}$$

其中$Q=[B \;\; AB \;\; \cdots \;\; A^{n+m-2}B$，不难证明（请自行思考），

$\mathrm{rank}\tilde{Q}_C=n+m$，当且仅当：

$$rank\,Q=n，且\ rank \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m \tag{6-5}$$

[定理 6-2]　式（6-1）描述的系统存在鲁棒抗干扰控制器（6-2）且可任意配置极点的充要条件是：$(A,\ B)$完全可控，且

$$rank \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m \tag{6-6}$$

- 不难看出，式（6-6）成立的一个必要条件是：矩阵B的列数l不少于矩阵C的行数m，即控制量个数不少于输出的个数。

■ 思考：欲使式（6-6）成立，矩阵B和C的秩至少应满足什么要求？其物理意义是什么？

[例 6-1] 受控系统如下，扰动w是常值，设计鲁棒抗干扰控制器，使闭环极点为$-1, -1, -2, -2$。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} w \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} w \end{cases}$$

解：（1）根据[定理 6-2]，判断是否存在鲁棒抗干扰控制器

$$(A,\ B)\text{完全可控，}\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 4 = n + m$$

存在鲁棒抗干扰控制器。

（2）设计鲁棒抗干扰控制器：$\dot{q} = y$，确定控制律$u = -F_x x - F_q q$

$$A_L = \begin{bmatrix} A - BF_x & -BF_q \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

根据希望的闭环极点可得（解不唯一）：

$$F_x = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad F_q = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- 常值扰动下的鲁棒抗干扰控制器的关键是采用积分器作补偿器，而积分器恰好是常值扰动的模型，即：当$M = 0$时，$(sI - M)^{-1} = s^{-1}I$。

§7 一般扰动下的鲁棒抗干扰控制器的结构※

7.1 鲁棒抗干扰控制器的频域讨论

对于一般扰动下的鲁棒抗干扰控制器问题，很自然的想法是，将式(6-2)中的积分器（常值扰动的内模）换成相应扰动的内模。受控系统和鲁棒抗干扰控制器的描述如下：

受控系统：
$$\Sigma_O:\ \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Nw \\ \dot{w} = Mw \\ y = Cx + Dw \end{cases} \tag{7-1}$$

鲁棒抗干扰控制器：
$$\begin{cases} q = G_c(s)y \\ u = -F_x x - F_q q \end{cases}$$

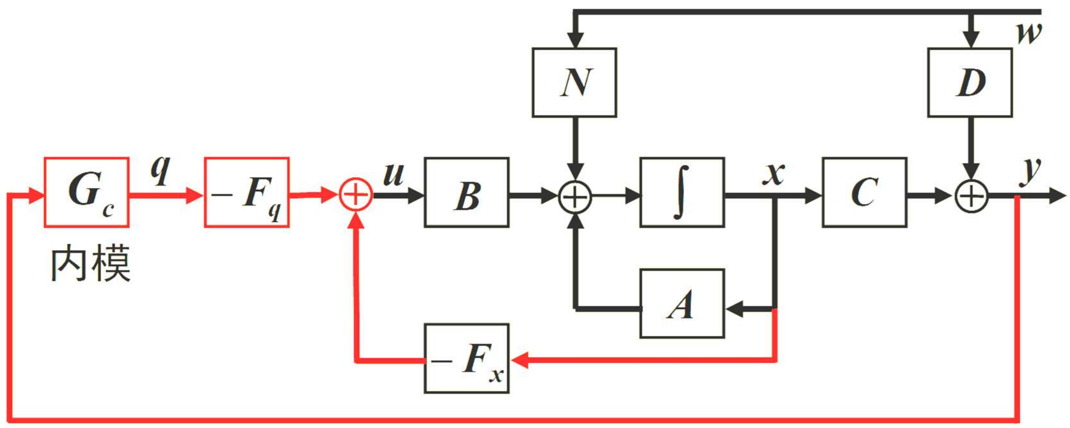

图 7-1

因

$$sX(s) = AX(s) + NW(s) + B\left(-F_x X(s) - F_q q\right)$$
$$(sI - A + BF_x)X(s) = NW(s) + B\left(-F_q q\right)$$
$$CX(s) = C(sI - A + BF_x)^{-1}\left(NW(s) + B\left(-F_q q\right)\right)$$

若令

$$G_1(s) = C(sI - A + BF_x)^{-1} = \frac{R(s)}{\psi(s)}$$

则结构图 7-1 可改绘为下图：

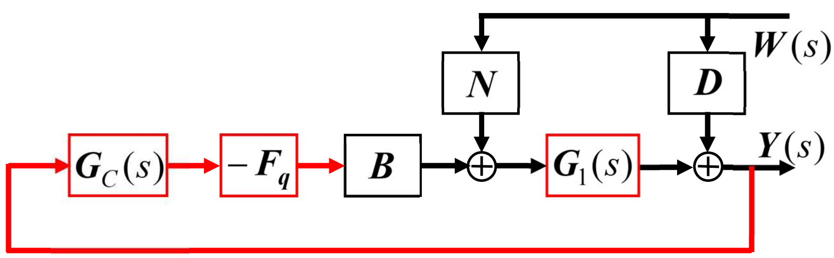

图 7-2

设

$$(sI-M)^{-1}=\frac{P(s)}{\varphi(s)}$$

选

$$G_C(s)=\frac{Q(s)}{\varphi(s)}$$ （内模原理）

令

$$G_2(s)=[I+G_1(s)BF_qG_C(s)]^{-1}=\psi(s)\varphi(s)\frac{T(s)}{\gamma(s)}$$

其中

$$\frac{T(s)}{\gamma(s)}=[\psi(s)\varphi(s)I+R(s)BF_qQ(s)]^{-1}$$

则

$$Y(s)=G_2(s)[D+G_1(s)N]W(s)=\varphi(s)\frac{T(s)}{\gamma(s)}[D\psi(s)+R(s)N]\frac{P(s)}{\varphi(s)}w(0)$$

注意，由外模产生的零点多项式$\varphi(s)$（上式第一项），与实际的外扰极点多项式$\varphi(s)$（倒数第二项分母）对消，而$\gamma(s)$是大闭环（被设计成渐稳）的特征多项式，从而保证了$Y(s)$是渐稳的，根据终值定理有：$y(\infty)=\lim_{s\to 0}sY(s)=0$。

- 和外模型有相同极点的动力学模型都可作为外模（外模型模态）。
- 外模嵌在$w\to y$的反馈通道里，使得它的极点多项式$\varphi(s)$变成闭环的零点多项式，从而与外扰极点多项式$\varphi(s)$对消。
- 所得闭环系统的稳态无差性能对于系统的参数变化具有鲁棒性，但对内模极点多项式的系数而言，不具有鲁棒性。

[定理 7-1] 在外扰至输出传递的反馈通道中，对每个输出分量都串入外扰的内模，只要闭环系统渐近稳定，则闭环系统可实现稳态无差。

7.2 鲁棒抗干扰控制器的设计

假设鲁棒抗干扰控制器的状态空间描述为

鲁棒抗干扰控制器：
$$\begin{cases}\dot{q}=A_Cq+B_Cy\\ u=-F_xx-F_qq\end{cases}\tag{7-2}$$

设M的最小多项式为：$\varphi(s)=s^r+\alpha_1 s^{r-1}+\cdots+\alpha_r \qquad r\le p$

根据[定理 7-1]，在每一个输出分量的后面各串入一个外模。为简单计，可采用单输入可控规范型$(R,\ S)$如下：

$$\dot{q}_i=Rq_i+Sy_i,\ R=\begin{bmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -\alpha_r & -\alpha_{r-1} & \cdots & -\alpha_1\end{bmatrix},\ S=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{7-3}$$

在此设计下，式（7-2）鲁棒抗干扰控制器的系数矩阵为：

$$A_C=\begin{bmatrix}R & & \\ & \ddots & \\ & & R\end{bmatrix} \qquad B_C=\begin{bmatrix}S & & \\ & \ddots & \\ & & S\end{bmatrix} \tag{7-4}$$

考察增广系统：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & 0\\ B_C C & A_C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}N\\ B_C D\end{bmatrix}w \tag{7-5}$$

根据模态判据，该增广系统完全可控的充要条件是：对于矩阵A和A_C的所有特征值λ，满足

$$rank\begin{bmatrix}A-\lambda I & 0 & B\\ B_C C & A_C-\lambda I & 0\end{bmatrix}=n+mr \tag{7-6}$$

对于属于A但不属于A_C的特征值λ，不难看出，上式等价于$(A,\ B)$完全可控。对于A_C的特征值λ，由式（7-3）和（7-4）得：

$$A_C-\lambda I=\begin{bmatrix}R-\lambda I & & \\ & \ddots & \\ & & R-\lambda I\end{bmatrix} \quad B_C C=\begin{bmatrix}Sc_1^\tau\\ \vdots\\ Sc_m^\tau\end{bmatrix} \tag{7-7}$$

矩阵$A_C-\lambda I$有m个相同的对角分块$R-\lambda I$，由于$(R,\ S)$是可控规范型，$R-\lambda I$的前$r-1$行线性独立，第r行（最后一行）可经行变换化为零；矩阵$B_C C$也有m个分块，每个相应分块的前$r-1$行为零，第r行（最后一行）则是C矩阵的相应行。因此，式（7-6）等价于

$$rank\begin{bmatrix}A-\lambda I & B\\ C & 0\end{bmatrix}=n+m \tag{7-8}$$

[定理 7-2]　式（7-1）描述的系统存在鲁棒抗干扰控制器（7-2）且可任意配置极点的充要条件是：$(A,\ B)$完全可控，且外模型M的所有特征值λ均满足式（7-

8)。

- 常值扰动下的鲁棒抗干扰控制器[定理 6-2]是上述定理在$M=0$时的特殊情形。

[例 7-1] 受控系统和外扰w的模型如下,设计鲁棒抗干扰控制器。

$$\begin{cases} \dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}0.5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.2\end{bmatrix}w \\ \dot{w}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}w \\ y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\end{bmatrix}w \end{cases}$$

解:(1)求外模型M的特征值和最小多项式$\varphi(s)$

$$det(sI-M)=s(s^2+1)\text{。特征值:0,}\pm j\text{;}\ \varphi(s)\text{:}\ s^3+s$$

(2)根据[定理 7-2],判断是否存在鲁棒抗干扰控制器

(A,B)完全可控,且对M的所有特征值λ均满足:

$$\text{rank}\begin{bmatrix}A-\lambda I & B\\ C & 0\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=n+m=3$$

存在鲁棒抗干扰控制器。

(3)根据$\varphi(s)$和公式(7-4)构造补偿器

$$\dot{q}=A_Cq+B_Cy=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}q+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}y$$

(4)确定控制律$u=-F_xx-F_qq$,使闭环极点满足要求

$$A_L=\begin{bmatrix}A-BF_x & -BF_q\\ B_CC & A_C\end{bmatrix},\ \psi(s)=det(sI-A_L)$$

令 $F_x=[a_1\quad a_2]$, $F_q=[a_3\quad a_4\quad a_5]$,可得:

$$\psi(s)=s^5-(1-a_2)s^4+a_1s^3-(1-a_2-a_5)s^2$$
$$-(1-a_1-a_4)s+a_3$$

设希望的极点分别是 -1,$-0.5\pm j$,$-2\pm j$。即:

$$\psi^*(s) = s^5 + 6s^4 + \frac{61}{4}s^3 + \frac{81}{4}s^2 + \frac{65}{4}s + \frac{25}{4}$$

由上可得： $F_x = \begin{bmatrix} \frac{61}{4} & 7 \end{bmatrix}$， $F_q = \begin{bmatrix} \frac{25}{4} & 2 & \frac{57}{4} \end{bmatrix}$