第一章　解耦控制

解耦控制的目的是对多输入多输出（MIMO）系统，寻找合适的控制规律，使系统的参考输入和输出之间实现一一对应的控制，将原本各个通道之间存在控制耦合的系统“解耦”成为若干个互不影响的单输入单输出（SISO）系统，使系统的分析和控制问题得以简化。本章仅讨论线性定常系统的解耦控制问题。

§1　串联补偿器方法

设受控系统的传递函数阵是$G_O(s)$，串联补偿器方法是一种开环解耦控制方法，其设想如下图所示：用原系统的“逆系统”“抵消”原系统，得到所希望的新系统$G_L(s)$。当$G_L(s)$为非奇异对角阵时，则可实现解耦控制。

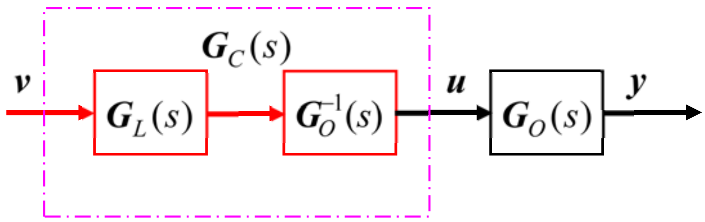

图 1-1　串联补偿解耦控制

显然，给定$G_O(s)$和$G_L(s)$，串联补偿器的设计如下：

$$G_C(s) = G_O^{-1}(s)G_L(s) \tag{1-1}$$

注意，传递函数阵$G_O(s)$中每个元素的分母与分子均为s的多项式，通常分母的幂次高于或者等于分子的幂次，对$G_O^{-1}(s)$而言（若数学上存在的话），则是分子的幂次可能高于分母。 为了保证$G_C(s)$在物理上可实现，$G_L(s)$每个矩阵元的分母幂次应高于分子幂次，一个最简单的形式如下：

$$G_L(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{\alpha_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s^{\alpha_m}} \end{bmatrix}, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m \tag{1-2}$$

其中α_i为足够大正整数，使得 $G_C(s)$的第i列的所有元的分母的幂次高于或者等于分子的幂次。

[定义 1-1]　传递函数阵为非奇异对角阵的系统称为输入输出解耦系统，简称为解耦系统。

[定义 1-2]　对角元素为α阶积分器的解耦系统称为α阶积分型解耦系统，简称为*ID*系统。（注：$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha\_m)$ 是一个向量。）

[例 1-1]　求一个串联补偿器使下述系统实现解耦控制。

$$G_O(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{-1}{s+1}\\ \frac{s-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

解:

$$G_O^{-1}(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2}\\ -\frac{s^2-1}{2s} & \frac{(s+1)^2}{2s}\end{bmatrix}$$

为保证串联补偿器$G_C(s)=G_O^{-1}(s)G_L(s)$ $G_C(s)$可实现，可根据$G_O^{-1}(s)$各矩阵元的相对阶选择:

$$G_L(s)=\mathrm{diag}\left[\frac{1}{s}\ ,\ \ \frac{1}{s}\right]$$

从而得到:

$$G_C(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+1}{2s} & \frac{s+1}{2s}\\ -\frac{s^2-1}{2s^2} & \frac{(s+1)^2}{2s^2}\end{bmatrix}$$

■ 思考：本例中，$G_L(s)$还可以取其它形式吗？如:

$\mathrm{diag}\left[1\ ,\ \ \frac{1}{s}\right]$， $\mathrm{diag}\left[\frac{1}{s}\ ,\ \ \frac{1}{s^2}\right]$

§ 2 状态反馈 + 输入变换

基于逆系统的串联补偿器概念直观，易于理解，但由于增加了系统的动态，实现起来比较复杂。更重要的，当对象是非最小相位系统时，求得的串联补偿器与受控系统之间会存在不稳定的零极相消，从而无法使用。

本节讨论另一种方法—反馈解耦控制方法：状态反馈 + 输入变换。假设待解耦的受控系统的运动方程如下:

$$\Sigma_O:\ \begin{cases}\dot{x}=Ax+Bu\\ y=Cx\end{cases}\qquad (2\text{–}1)$$

$x\in\mathbb{R}^n$， $u\in\mathbb{R}^m$， $y\in\mathbb{R}^m$； A，B，C是适当维数的实数矩阵。

控制律采用如下 $\{F,\ R\}$ 变换:

$$u=Rv-Fx\qquad (2\text{–}2)$$

其中$v\in\mathbb{R}^m$是参考输入（也称为外部指令信号或外部指令），状态反馈矩阵F和输入变换矩阵R是适当维数的实数矩阵。这里为简便起见，假设控制输入u的

个数与输出一致，其实并不必要，但参考输入v的个数必须与输出一致。

在上述控制律下闭环系统运动方程如下：

$$\Sigma_L:\ \begin{cases} \dot{x} = (A - BF)x + BRv \\ y = Cx \end{cases} \qquad (2\text{-}3)$$

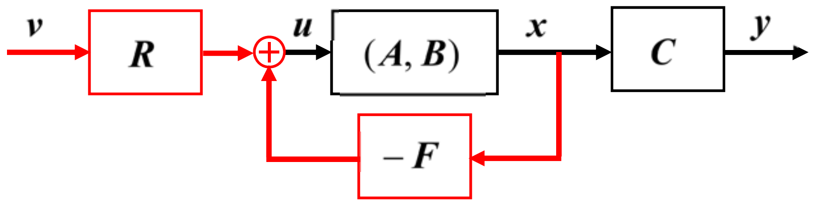

图 2-1 反馈解耦控制

[定义 2-1] 称系统$(A,\ B,\ C)$可$\{F,\ R\}$解耦，指存在控制律$u = Rv - Fx$使闭环系统$(A - BF,\ BR,\ C)$为解耦系统，即从参考输入v到系统输出y的闭环系统传递矩阵为非奇异对角矩阵。

现讨论控制律$u = Rv - Fx$的求解方法。考察待解耦受控系统（2-1）的输出y与输入u的关联情况，若c_i^{T}为C的第i行，对于第i个输出y_i，有：

$y_i = c_i^{\mathrm{T}} x$，　与u无关联；对y_i求导得：

$y_i^{(1)} = c_i^{\mathrm{T}}\dot{x} = c_i^{\mathrm{T}}Ax + c_i^{\mathrm{T}}Bu$，　若$c_i^{\mathrm{T}}B = 0$，$y_i$与$u$无关联；继续求导

$y_i^{(2)} = c_i^{\mathrm{T}}A\dot{x} = c_i^{\mathrm{T}}A^2x + c_i^{\mathrm{T}}ABu$，　若$c_i^{\mathrm{T}}AB = 0$，继续求导

$\vdots$

设求导α_i次后，有：

$y_i^{(\alpha_i)} = c_i^{\mathrm{T}}A^{\alpha_i}x + c_i^{\mathrm{T}}A^{\alpha_i-1}Bu$，$c_i^{\mathrm{T}}A^{\alpha_i-1}B \neq 0$，$y_i^{(\alpha_i)}$与$u$有关联

[定义 2-2] 解耦阶常数定义为输入u可以直接影响的输出y_i对时间导数的最小阶 α_i，即：

$$\alpha_i \triangleq \min\{k \mid c_i^{\mathrm{T}}A^{k-1}B \neq 0,\ k \geq 1\},\ i = 1, \cdots, m. \qquad (2\text{-}4)$$

思考：是否有可能$c_i^{\mathrm{T}}A^{k-1}B = 0$对任意$k \geq 1$均成立？

如果m个α_i已求出，则下式成立：

$$y^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} y_1^{(\alpha_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(\alpha_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^{\mathrm{T}}A^{\alpha_1} \\ \vdots \\ c_m^{\mathrm{T}}A^{\alpha_m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} c_1^{\mathrm{T}}A^{\alpha_1-1}B \\ \vdots \\ c_m^{\mathrm{T}}A^{\alpha_m-1}B \end{bmatrix} u \triangleq Lx + D_0 u$$

其中

$$D_0=\begin{bmatrix}c_1^{\mathrm{T}}A^{\alpha_1-1}B\\ \vdots\\ c_m^{\mathrm{T}}A^{\alpha_m-1}B\end{bmatrix},\qquad L=\begin{bmatrix}c_1^{\mathrm{T}}A^{\alpha_1}\\ \vdots\\ c_m^{\mathrm{T}}A^{\alpha_m}\end{bmatrix}\tag{2-5a}$$

实现α阶积分型解耦的目标是：$y_i^{(\alpha_i)}=v_i$，$i=1,\cdots,m$，即：

$$v=y^{(\alpha)}=Lx+D_0u=(L-D_0F)x+D_0Rv$$

若$detD_0\neq 0$，则有：

$$R=D_0^{-1},\quad F=D_0^{-1}L\tag{2-5b}$$

[定义 2-3]　式（2-5a）中的矩阵D_0称为可解耦矩阵。

[定理 2-1]　系统$(A,\ B,\ C)$可$\{F,\ R\}$解耦的充要条件是：解耦阶常数$\alpha<\infty$ 且可解耦矩阵D_0非奇异。实现积分型解耦所需的$\{F,\ R\}$由式（2-5）确定，闭环传递函数阵为：$\mathrm{diag}[1/s^{\alpha_1},\ \cdots,\ 1/s^{\alpha_m}]$。

证明：充分性显然，必要性从后面分析可以看到。

§ 3 解耦阶常数的性质

[定理 3-1]　设系统$\Sigma_O(A,\ B,\ C)$的解耦阶常数为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，可解耦矩阵为D_0，经任意$\{F,\ R\}$ $(\det R\neq 0)$变换后的闭环系统$\Sigma_L(A-BF,\ BR,\ C)$，其解耦阶常数仍为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，可解耦矩阵为D_0R。

证：对于所有的$k\leq\alpha_i-1$，我们有：

$$\begin{aligned}&c_i^{\mathrm{T}}(A-BF)^k && \because\ c_i^{\mathrm{T}}B=0\\ =\ &c_i^{\mathrm{T}}A(A-BF)^{k-1} && \because\ c_i^{\mathrm{T}}AB=0\\ &\ \vdots && \quad\vdots\\ =\ &c_i^{\mathrm{T}}A^{k-1}(A-BF) && \because\ c_i^{\mathrm{T}}A^{k-1}B=0\\ =\ &c_i^{\mathrm{T}}A^k\end{aligned}$$

由于$\det R\neq 0$，故由以上结果可得：

$$c_i^{\mathrm{T}}(A-BF)^kBR=c_i^{\mathrm{T}}A^kBR\quad\begin{cases}=0 & if\ k<\alpha_i-1\\ \neq 0 & if\ k=\alpha_i-1\end{cases}$$

因此，系统$\Sigma_O(A,\ B,\ C)$与系统$\Sigma_L(A-BF,\ BR,\ C)$具有相同的解耦阶常数α_i。有上式可得

$$\begin{bmatrix}c_1^{\mathrm{T}}(A-BF)^{\alpha_1-1}BR\\ \vdots\\ c_m^{\mathrm{T}}(A-BF)^{\alpha_m-1}BR\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1^{\mathrm{T}}A^{\alpha_1-1}BR\\ \vdots\\ c_m^{\mathrm{T}}A^{\alpha_m-1}BR\end{bmatrix}=D_0R$$

可见系统$\Sigma_L(A-BF,\ BR,\ C)$的可解耦矩阵为D_0R。命题得证。

[定理 3-2]　设传递函数阵$G_O(s)$第i行为$g_i^{\mathrm{T}}(s)$，其各元的分母多项式相同，是阶次为d_i的首一多项式，各元分子的最大阶次为n_i，则$\alpha_i=d_i-n_i$，D_0第i行的

各元等于$g_i^{\mathsf{T}}(s)$对应元分子n_i次幂项的系数。

证：　　$g_i^{\mathsf{T}}(s) = c_i^{\mathsf{T}}(sI-A)^{-1}B$．根据 Feedeva 算法，预解矩阵可表示如下：

$$(sI-A)^{-1} = \frac{P(s)}{\psi(s)}$$

其中 $\psi(s) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}s + \beta_n$

$$P(s) = p_0(s)A^{n-1} + p_1(s)A^{n-2} + \cdots + p_{n-2}(s)A + p_{n-1}(s)I$$

式中$p_i(s)$是幂次为i的s的首一多项式。考虑到

$$c_i^{\mathsf{T}}A^kB = 0,\ \ \forall k < \alpha_i - 1，\ c_i^{\mathsf{T}}A^{\alpha_i-1}B \neq 0，$$

可以得到：

$$g_i^{\mathsf{T}}(s) = \frac{1}{\psi(s)}\left[p_0(s)c_i^{\mathsf{T}}A^{n-1}B + \cdots + p_{n-\alpha_i}(s)c_i^{\mathsf{T}}A^{\alpha_i-1}B\right]$$

可见，当$g_i^{\mathsf{T}}(s)$的公分母为首一多项式$\psi(s)$时，$d_i = n$，$n_i = n - \alpha_i$；且n_i次幂项的系数为$c_i^{\mathsf{T}}A^{\alpha_i-1}B$，恰为$D_0$的第$i$行；满足定理。此外，$g_i^{\mathsf{T}}(s)$的公分母不是$\psi(s)$时（有对消），不影响上面的结论。证毕。

- $g_i^{\mathsf{T}}(s) \neq 0$时，$1 \leq \alpha_i \leq n$；$g_i^{\mathsf{T}}(s) = 0$时，$\alpha_i$不存在，相应的$y_i$不可控，此时，$D_0$的第$i$行为零，$detD_0 = 0$，不可$\{F,\ R\}$解耦。

[例 3-1] 给定受控系统$\Sigma_O(A,B,C)$，设计$\{F,\ R\}$解耦。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解：　（1） 设计

$$c_1^{\mathsf{T}}B = [1 \quad 0] \neq 0 \qquad \alpha_1 = 1$$

$$c_2^{\mathsf{T}}B = [0 \quad 1] \neq 0 \qquad \alpha_2 = 1$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} d_1^{\mathsf{T}} \\ d_2^{\mathsf{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^{\mathsf{T}}B \\ c_2^{\mathsf{T}}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad detD_0 \neq 0$$

亦可根据传递函数阵确定α_i和d_i^{T}

$$G_O(s) = C(sI-A)^{-1}B = \frac{1}{s^3+3s^2+2s}\begin{bmatrix} s^2+3s+2 & s \\ -s & s^2 \end{bmatrix}$$

由第一行得到：$\alpha_1 = 1, d_1^{\mathsf{T}} = [1\ \ 0]$.

由第二行得到：$\alpha_2 = 1, d_2^{\mathsf{T}} = [0\ \ 1]$

$$L=\begin{bmatrix}c_1^\top A^{\alpha_1}\\ c_2^\top A^{\alpha_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}$$

$$R=D_0^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad F=D_0^{-1}L=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}$$

（2）校核

$$A-BF=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&-2&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$(sI-A+BF)^{-1}=\frac{1}{s^3}\begin{bmatrix}s^2&0&-s\\0&s^2&s\\0&0&s^2\end{bmatrix}=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix}s&0&-1\\0&s&1\\0&0&s\end{bmatrix}$$

$$G_L(s)=C(sI-A+BF)^{-1}BR=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix}s&0\\0&s\end{bmatrix}=\frac{1}{s}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

可以看出，闭环系统确是积分型解耦系统，解耦阶常数和原系统相同。

§4 闭环极点配置

积分型解耦系统的子系统为α_i阶积分器，极点均在原点，因此解耦系统不是渐近稳定的。能否既保证解耦，又能配置极点使闭环系统渐近稳定？

假设对于第i个子系统，我们希望重新配置极点，使得

$$y_i(s)=\frac{1}{\psi_i^*(s)}v_i(s),\quad \psi_i^*(s)=s^{\alpha_i}+\beta_{i1}s^{\alpha_i-1}+\cdots+\beta_{i\alpha_i}$$

即 $v_i(t)=y_i^{(\alpha_i)}(t)+\beta_{i1}y_i^{(\alpha_i-1)}(t)+\cdots+\beta_{i\alpha_i}y_i(t)$，则根据之前分析:

$$y_i^{(k)}=\begin{cases}c_i^\top A^k x & k<\alpha_i\\ c_i^\top A^{\alpha_i}x+c_i^\top A^{\alpha_i-1}Bu & k=\alpha_i\end{cases}$$

可以得到

$$v_i(t)=c_i^\top\psi_i^*(A)x(t)+c_i^\top A^{\alpha_i-1}Bu(t),$$

其中 $\psi_i^*(A)=A^{\alpha_i}+\beta_{i1}A^{\alpha_i-1}+\ \cdots\ +\beta_{i\alpha_i}I$。

写成向量形式$v=Lx+D_0u$，其中

$$L=\begin{bmatrix}c_1^\top\psi_1^*(A)\\ \vdots\\ c_m^\top\psi_m^*(A)\end{bmatrix},\quad D_0=\begin{bmatrix}c_1^\top A^{\alpha_1-1}B\\ \vdots\\ c_m^\top A^{\alpha_m-1}B\end{bmatrix}\qquad (4\text{-}1a)$$

令$u=Rv-Fx$，有$v=(L-D_0F)x+D_0Rv$，并解得:

$$R=D_0^{-1},\quad F=D_0^{-1}L \tag{4-1b}$$

[定理 4-1] 系统$(A,\ B,\ C)$可$\{F,\ R\}$解耦时，第i个子系统可任意配置α_i个极点，所需$\{F,\ R\}$由式(4-1)确定，闭环传递函数阵为$\mathrm{diag}[1/\psi_1^*(s),\ \cdots,\ 1/\psi_m^*(s)]$。

✚ 积分型解耦系统是这里所述一般解耦系统的特例，即 $\psi_i^*(s)=s^{\alpha_i}$。

[例 4-1] 给定受控系统$\Sigma_O(A,B,C)$，设计$\{F,\ R\}$解耦，并配置极点。

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

解：由例（3-1）知$\alpha_1=1$，$\alpha_2=1$。选择

$$\psi_1^*(s)=s+\beta_1,\quad \psi_2^*(s)=s+\beta_2$$

则

$$D_0=\begin{bmatrix}c_1^{\mathrm{T}}B\\c_2^{\mathrm{T}}B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad L=\begin{bmatrix}c_1^{\mathrm{T}}(A+\beta_1 I)\\c_2^{\mathrm{T}}(A+\beta_2 I)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1&\beta_1&1\\-1&-2&\beta_2-3\end{bmatrix}$$

$$R=D_0^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad F=D_0^{-1}L=\begin{bmatrix}\beta_1&\beta_1&1\\-1&-2&\beta_2-3\end{bmatrix}$$

（1）校核

$$A-BF=\begin{bmatrix}-\beta_1&-\beta_1&-1\\0&0&1\\0&0&-\beta_2\end{bmatrix}\quad BR=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$G_L(s)=C(sI-A+BF)^{-1}BR=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+\beta_1}&0\\0&\dfrac{1}{s+\beta_2}\end{bmatrix}$$

§ 5 解耦控制的零点问题※

上述解耦控制方法所能配置的极点数等于解耦阶常数之和。当该和数小于系统的可控模态数时（如前例中，解耦阶常数之和为 2，可控模态数为 3），意味着闭环系统存在被消去的可控极点（可能是不稳定的），这种极点能否配置而仍能实现解耦控制呢？

设$G_O(s)$第i行的行零点（指该行各元素有同一分母时，各分子多项式的公因子。无公因子时，取为 1）为$n_i(s)$，则下式成立：

$$G_O(s)=\begin{bmatrix}n_1(s)&&\\&\ddots&\\&&n_m(s)\end{bmatrix}\tilde{G}_O(s)=N(s)\tilde{G}_O(s) \tag{5-1}$$

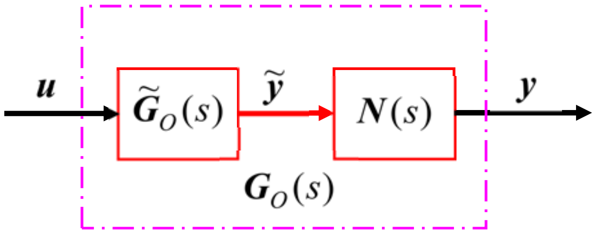

图 5-1 分子提取行公因子

假定$G_O(s)$和$\tilde{G}_O(s)$分别对应于$\Sigma_O(A,\ B,\ C)$和$\tilde{\Sigma}_O(A,\ B,\ \tilde{C})$。因为$N(s)$是非奇异对角矩阵，不难看出，如果$\tilde{\Sigma}_O$可以通过$\{F,\ R\}$实现解耦，且将第$i$个子系统的极点配置得和$\Sigma_O$的行零点$n_i(s)$相异，则$\Sigma_O$必然可以通过同样的矩阵对$\{F,\ R\}$实现解耦，并保留了相应的行零点。显然，保留下来的零点数就是增配的极点数。

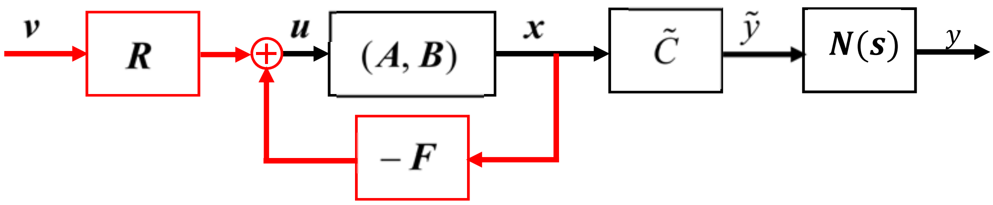

图 5-2

现在，问题转化为如何确定$\tilde{C}$阵。从$\tilde{C}$的定义，我们有：

$$N(s)\tilde{C}(sI-A)^{-1}B=C(sI-A)^{-1}B$$

或：
$$n_i(s)\tilde{c}_i^{\mathrm{T}}(sI-A)^{-1}B=c_i^{\mathrm{T}}(sI-A)^{-1}B \tag{5-2}$$

根据上述公式，就可以确定$\tilde{c}_i^{\mathrm{T}}$。事实上，当原系统传递函数阵的某行没有行零点时，即，$n_i(s)$ =1，此时，$\tilde{c}_i^{\mathrm{T}}=c_i^{\mathrm{T}}$，不必计算。

[例 5-1] 给定受控系统$\Sigma_O(A,\ B,\ C)$，解耦并配置尽可能多的极点。

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

解：（该例的受控系统同[例 4-1]）

（1） 设计

$$(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}(s+1)(s+2)&0\\-1&s\\-s&s^2\end{bmatrix}$$

$$G_O(s)=C(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s^2+3s+1&s\\-s&s^2\end{bmatrix}$$

由$G_O(s)$得到：$n_1(s)=1,\quad n_2(s)=s$

从而有：$\tilde{c}_1^{\mathrm{T}}=c_1^{\mathrm{T}}$，下面确定 $\tilde{c}_2^{\mathrm{T}}=[r_1\quad r_2\quad r_3]$

由公式 $n_i(s)\tilde{c}_i^{\mathrm{T}}(sI-A)^{-1}B=c_i^{\mathrm{T}}(sI-A)^{-1}B$，得到：

$$s[r_1\quad r_2\quad r_3]\begin{bmatrix}(s+1)(s+2) & 0\\ -1 & s\\ -s & s^2\end{bmatrix}=[-s\quad s^2]$$

由第一列：$r_1(s+1)(s+2)-r_2-r_3s=-1\quad \Rightarrow r_1=0,\ r_2=1,\ r_3=0$

由第二列：$r_1\times 0+r_2s+r_3s^2=s\quad \Rightarrow r_2=1,\ r_3=0$

综上，有$\tilde{c}_1^{\mathrm{T}}=(1\quad 1\quad 0)$，$\tilde{c}_2^{\mathrm{T}}=(0\quad 1\quad 0)$

下面，对$\Sigma_O(A,\ B,\ \tilde{C})$进行$\{F,\ R\}$解耦和极点配置。

由$\tilde{G}_O(s)$［参见$G_O(s)$］得到：$\tilde{\alpha}_1=1,\quad \tilde{\alpha}_2=2,\quad D_0=I_2$

对子系统 1（$\tilde{\alpha}_1=1$），设 $\psi_1^*(s)=s+\beta_1$

对子系统 2（$\tilde{\alpha}_2=2$），设 $\psi_2^*(s)=(s+\beta_2)(s+\beta_3)$

$$L=\begin{bmatrix}\tilde{c}_1^{\mathrm{T}}\psi_1^*(A)\\ \tilde{c}_2^{\mathrm{T}}\psi_2^*(A)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_1 & 1\\ -1 & -2+\beta_2\beta_3 & -3+\beta_2+\beta_3\end{bmatrix}$$

求得$\{F,\ R\}$：$R=D_0^{-1}=I_2,\quad F=D_0^{-1}L=L$

（2） 校核

$$A-BF=\begin{bmatrix}-\beta_1 & -\beta_1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -\beta_2\beta_3 & -\beta_2-\beta_3\end{bmatrix}\qquad BR=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$G_L(s)=C(sI-A+BF)^{-1}BR$$

$$=C\frac{1}{(s+\beta_1)(s+\beta_2)(s+\beta_3)}\begin{bmatrix}(s+\beta_2)(s+\beta_3) & -(s+\beta_1)\\ 0 & s+\beta_1\\ 0 & s(s+\beta_1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+\beta_1} & 0\\ 0 & \frac{s}{(s+\beta_2)(s+\beta_3)}\end{bmatrix}$$

§6 静态解耦控制

前面讨论的解耦问题又称动态解耦，本节考虑所谓的静态解耦。

［定义 6-1］ 渐近稳定且静态增益矩阵$G(0)$为非奇异对角阵的系统称为静态解

耦系统。

不难看出，当系统静态解耦时，某个输入的阶跃变化将引起相应（可能包含其它通道的）输出的变化，而对其它输出的稳态没有影响（动态可能有影响）。在一些应用场合静态解耦是可以接受的。

[定义 6-2]　受控系统$(A,\ B,\ C)$可以$\{F,\ R\}$静态解耦，是指存在控制律$u = Rv - Fx$使闭环系统$(A - BF,\ BR,\ C)$实现静态解耦。

假设待解耦的系统为：$\Sigma_O(A,\ B,\ C)$，控制律采用$\{F,\ R\}$变换：

$$u = Rv - Fx \tag{6-1a}$$

得到闭环系统传递函数：$G_L(s) = C(sI - A_L)^{-1}BR$，其中

$$A_L = A - BF \tag{6-1b}$$

若A_L渐稳，且$\det(CA_L^{-1}B) \neq 0$，则根据希望的G_D可以求得：

$$R = -(CA_L^{-1}B)^{-1}G_D \tag{6-1c}$$

[定理 6-1]　系统$(A,\ B,\ C)$可$\{F,\ R\}$静态解耦的充要条件是：$(A,\ B)$可镇定，且

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \tag{6-2}$$

可解耦时，所需的$\{F,\ R\}$由式（6-1）确定。

证明：（1）$(A,\ B)$可镇定　$\Leftrightarrow$　可选择 F 使$A_L = A - BF$渐稳。

（2）$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad det(CA_L^{-1}B) \neq 0$

（a）$\det\begin{bmatrix} A_L & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad \Leftarrow$

$$\begin{bmatrix} A - BF & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -F & I \end{bmatrix}$$

（b）$\det\begin{bmatrix} A_L & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \rightleftarrows \quad \Leftrightarrow \quad \det(CA_L^{-1}B) \neq 0 \quad \Leftarrow$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & CA_L^{-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA_L^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_L & B \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_L^{-1} & A_L^{-1}B \\ 0 & -I \end{bmatrix}$$

[例 6-1]　给定受控系统$\Sigma_O(A,\ B,\ C)$，求静态解耦的$\{F,\ R\}$变换。

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解：不难验证，该系统不存在动态解耦的$\{F,\ R\}$变换（$detD_0 = 0$），但由于满足[定理 6-1]给出的条件，因而可以静态解耦。

（1） 选择反馈阵 F

考察原系统，矩阵 A 的特征值为：-1，-2，$+1$，不妨将闭环极点设置为：-1，-2，-3，容易得到：

$$F=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-4\end{bmatrix},\ A_L=A-BF=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-2&1\\1&0&-3\end{bmatrix}$$

（2） 计算输入变换阵R

$$A_L^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6&0&0\\1&3&1\\2&0&2\end{bmatrix},\ CA_L^{-1}B=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&2\\2&-2\end{bmatrix}$$

设希望的G_D为单位阵，根据公式（6-1）求得：

$$R=-(CA_L^{-1}B)^{-1}G_D=\begin{bmatrix}2&2\\2&-1\end{bmatrix}$$

（3） 校验闭环传递函数

$$G_L(s)=C(sI-A_L)^{-1}BR$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix}2(s^2+3s+3)&-s(s+3)\\-2s(s+2)&(s+2)(s+3)\end{bmatrix}$$

$$G_L(0)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

- 可实现静态解耦控制的系统未必能实现动态解耦控制（见该例）。

- 思考：可实现动态解耦控制的系统一定能实现静态解耦控制吗？为什么？

附录 1　计算预解矩阵$(sI-A)^{-1}$的 Fedeeva 算法

令$(sI-A)^{-1}=\frac{P(s)}{\psi(s)}$，　其中

$$\psi(s)=\det(sI-A)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

$$P(s)=\mathrm{adj}(sI-A)=P_0s^{n-1}+P_1s^{n-2}+\cdots+P_{n-2}s+P_{n-1}$$

则

$$\begin{aligned}
&P_0=I\\
&P_1=AP_0+a_1I, && a_1=\mathrm{tr}(A)\\
&P_2=AP_1+a_2I, && a_2=-2^{-1}\,\mathrm{tr}(AP_1)\\
&\vdots\\
&P_{n-1}=AP_{n-2}+a_{n-1}I, && a_{n-1}=-(n-1)^{-1}\mathrm{tr}(AP_{n-2})\\
&0=AP_{n-1}+a_nI, && a_n=-n^{-1}\mathrm{tr}(AP_{n-1})
\end{aligned}$$

矩阵$P(s)$可表示为：

$$P(s) = p_0(s)A^{n-1} + p_1(s)A^{n-2} + \cdots + p_{n-2}(s)A + p_{n-1}(s)I$$

其中$p_i(s)$是幂次为i的s的首一多项式。