机器人运动学

李翔

清华大学自动化系

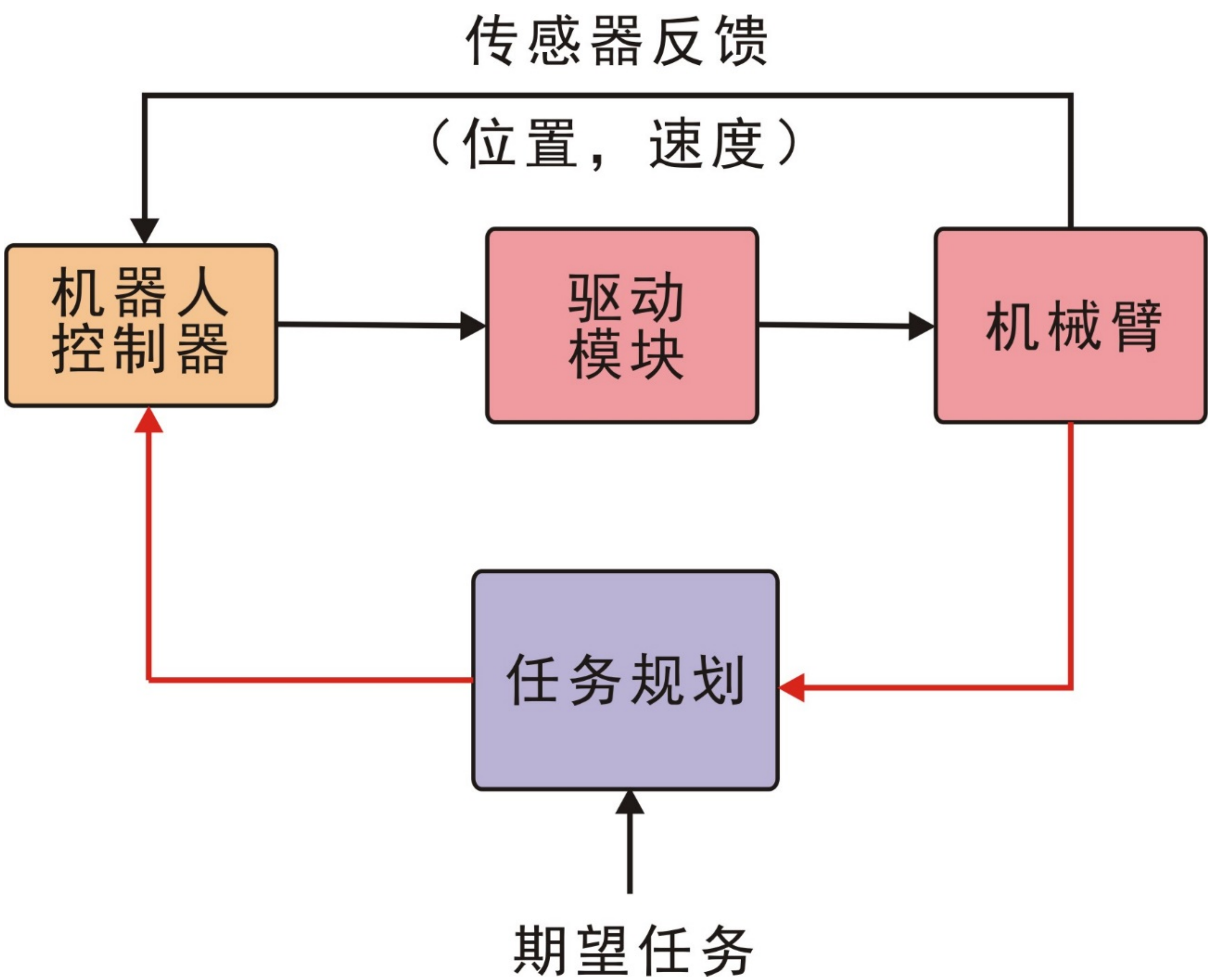
清華大學 Tsinghua University

内容提纲

- 坐标变化与D-H法则
- 末端执行器
- Jacobian矩阵与奇异性

机器人构成

关节空间控制
任务空间控制
PD+重力补偿控制
自适应控制
视觉伺服
…



机器人构成

关节空间

$q = [q_1, \ldots, q_n]^T \in R^n$

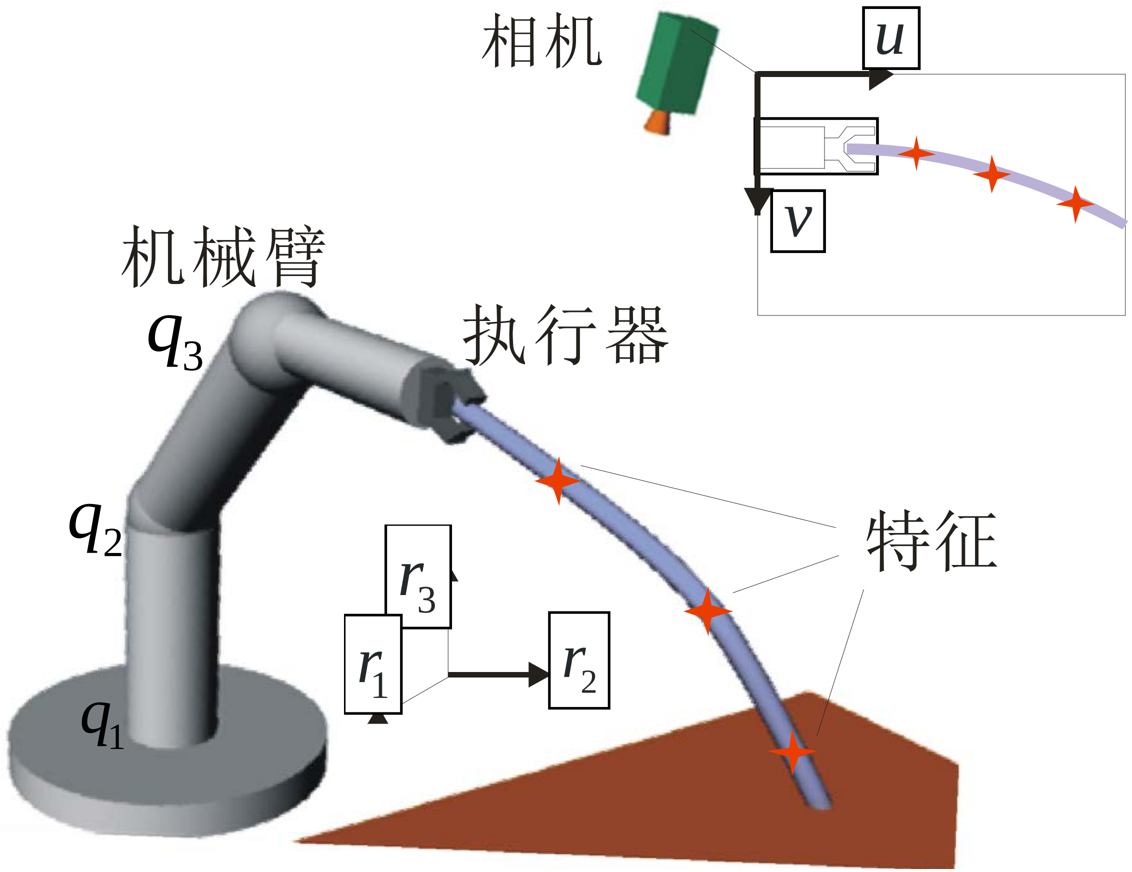
笛卡尔空间

$r = [r_1, \ldots, r_6]^T \in R^6$

图像空间

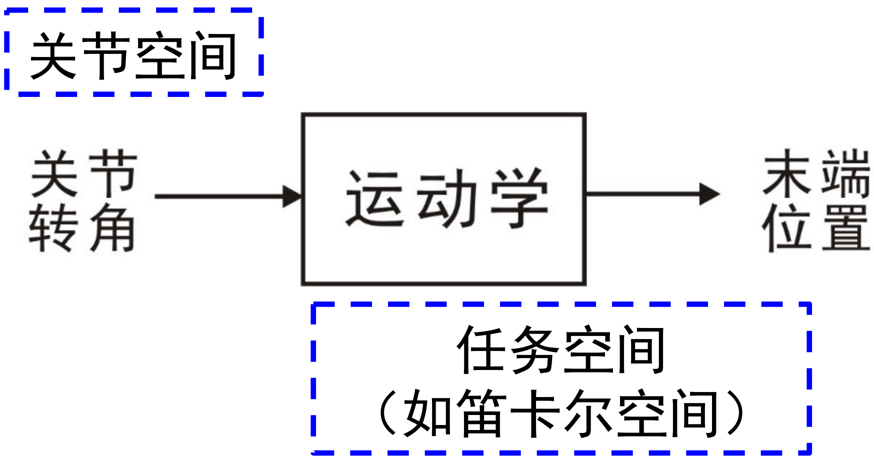
$x = [u, v]^T \in R^2$

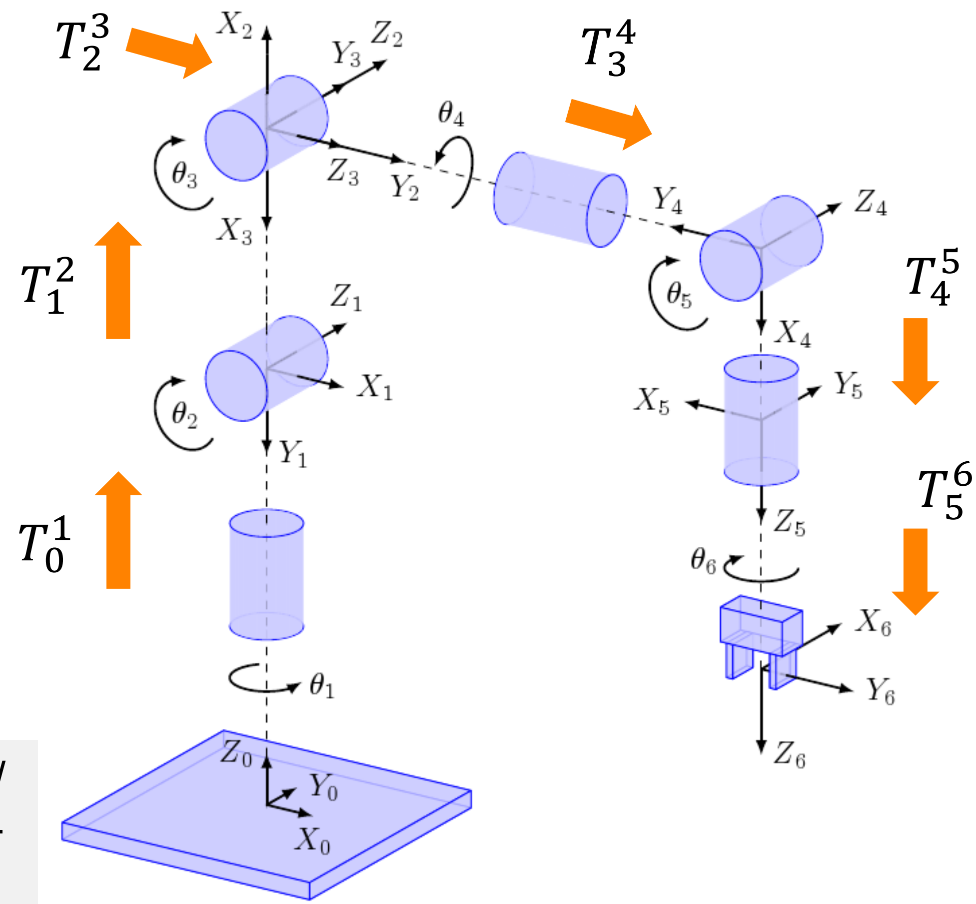
任务空间



坐标变换

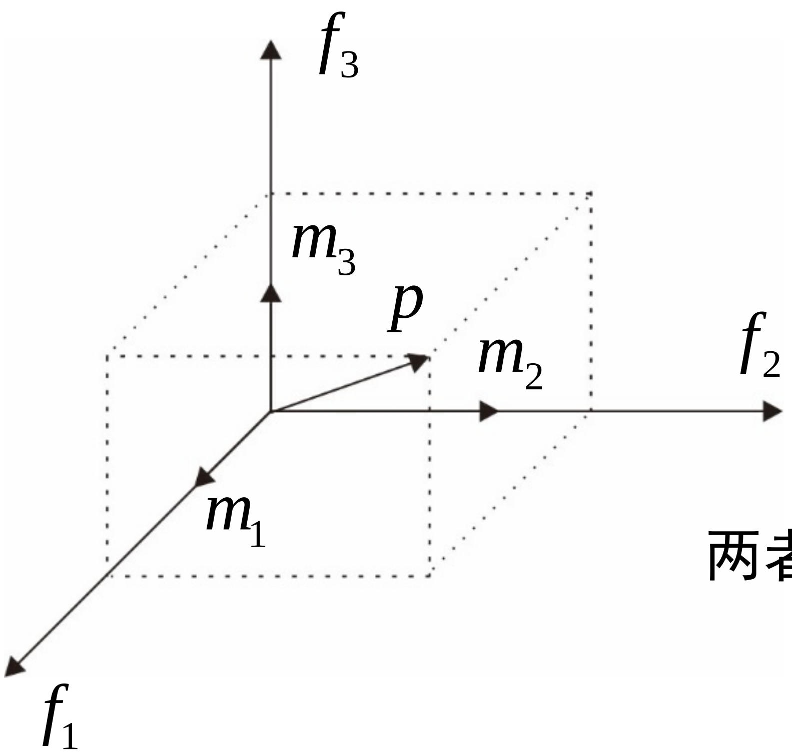
运动学 – 研究机器人关节转角与末端执行器位置的关系





https://robotics.stackexchange.com/questions/11372/any-free-or-paid-software-for-graphical-drawing-of-robotics-kinematic-scheme

坐标变换



向量 p 在某坐标系可表示为：

$$p = p_1^f f_1 + p_2^f f_2 + p_3^f f_3$$

或者 $p = p_1^m m_1 + p_2^m m_2 + p_3^m m_3$

标量 向量

两者转换关系：$\begin{bmatrix} p_1^f \\ p_2^f \\ p_3^f \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} p_1^m \\ p_2^m \\ p_3^m \end{bmatrix}$ R – 旋转矩阵

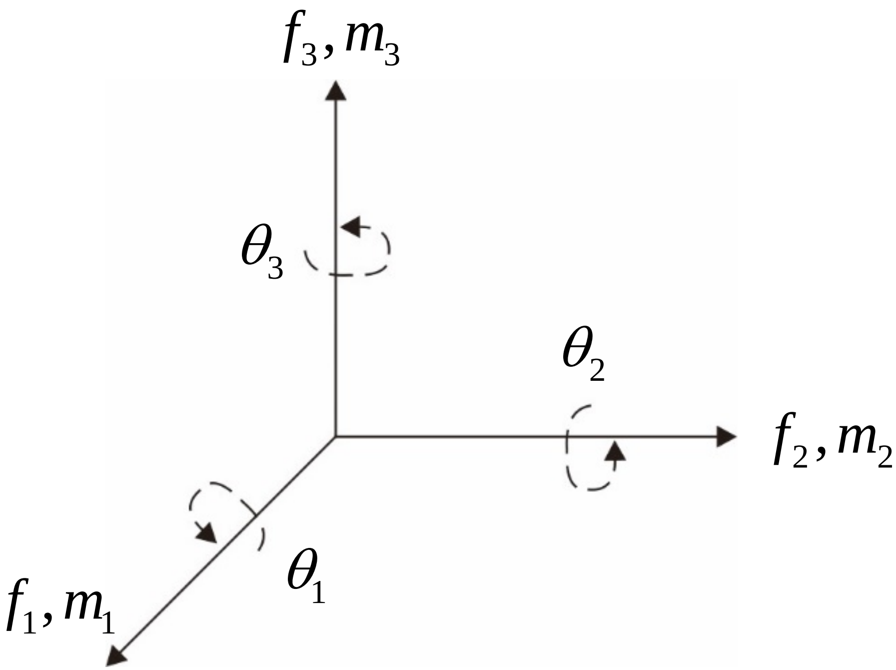
$$p = p_1^m m_1 + p_2^m m_2 + p_3^m m_3$$

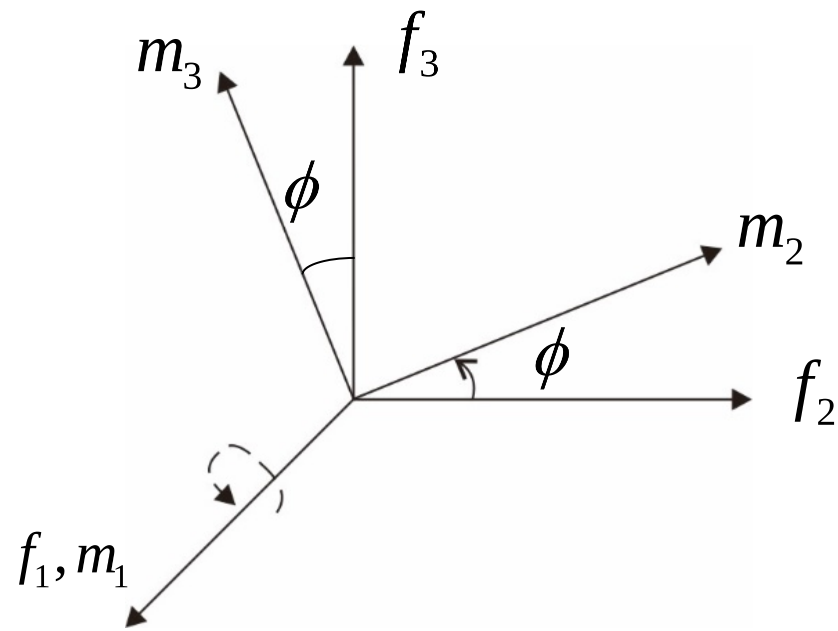
$$\begin{cases} p_1^f = p \cdot f_1 = p_1^m m_1 \cdot f_1 + p_2^m m_2 \cdot f_1 + p_3^m m_3 \cdot f_1 \\ p_2^f = p \cdot f_2 = p_1^m m_1 \cdot f_2 + p_2^m m_2 \cdot f_2 + p_3^m m_3 \cdot f_2 \\ p_3^f = p \cdot f_3 = p_1^m m_1 \cdot f_3 + p_2^m m_2 \cdot f_3 + p_3^m m_3 \cdot f_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} p_1^f \\ p_2^f \\ p_3^f \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} m_1 \cdot f_1 & m_2 \cdot f_1 & m_3 \cdot f_1 \\ m_1 \cdot f_2 & m_2 \cdot f_2 & m_3 \cdot f_2 \\ m_1 \cdot f_3 & m_2 \cdot f_3 & m_3 \cdot f_3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} p_1^m \\ p_2^m \\ p_3^m \end{bmatrix}$$

$$p_F = R(\bullet) p_M$$

坐标变换

在笛卡尔空间的三种旋转方式： 将 M 坐标系绕 f_1 旋转角度 ϕ





$$\begin{bmatrix} p_1^f \\ p_2^f \\ p_3^f \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 \cdot f_1 & m_2 \cdot f_1 & m_3 \cdot f_1 \\ m_1 \cdot f_2 & m_2 \cdot f_2 & m_3 \cdot f_2 \\ m_1 \cdot f_3 & m_2 \cdot f_3 & m_3 \cdot f_3 \end{bmatrix}}_{R_1(\phi)} \begin{bmatrix} p_1^m \\ p_2^m \\ p_3^m \end{bmatrix}$$

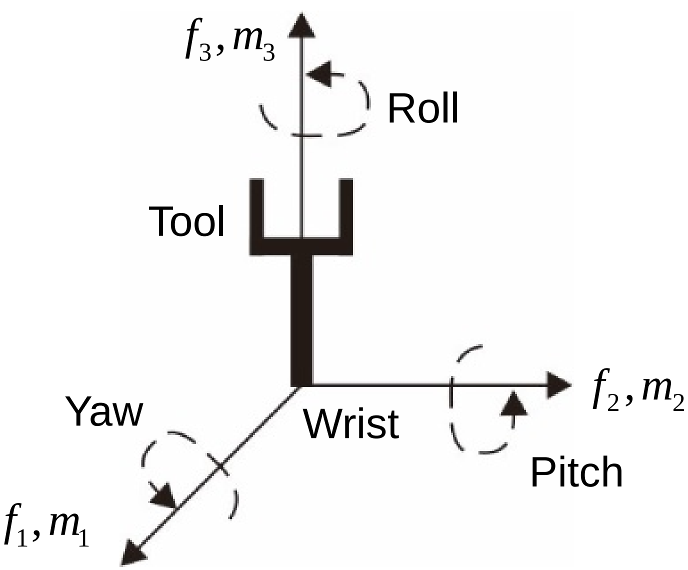
$$R_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

坐标变换

将 M 坐标系绕 f_2 旋转角度 ϕ ➡ $R_2(\phi)=\begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \sin\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix}$

将 M 坐标系绕 f_3 旋转角度 ϕ ➡ $R_3(\phi)=\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

复合旋转矩阵 - Yaw-Pitch-Roll矩阵



$$YPR(\theta) = R_3(\theta_3)R_2(\theta_2)R_1(\theta_1)$$

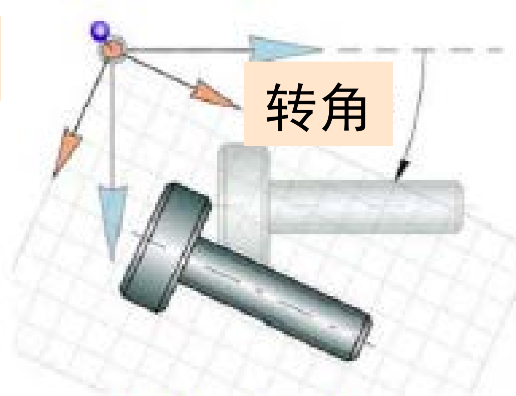
➡ $$= \begin{bmatrix} C_2C_3 & S_1S_2C_3 - C_1S_3 & C_1S_2C_3 + S_1S_3 \\ C_2S_3 & S_1S_2S_3 + C_1C_3 & C_1S_2S_3 - S_1C_3 \\ -S_2 & S_1C_2 & C_1C_2 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \cos(\theta_1), S_1 = \sin(\theta_1), \ldots$$

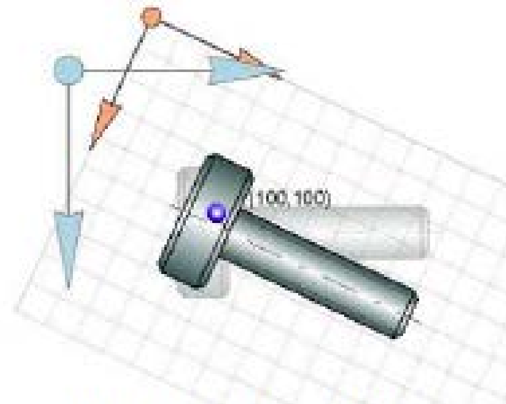
坐标变换

旋转矩阵　平移向量

$$T=\begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



旋转



旋转 ＋ 平移

关节转角

$$T_{k-1}^{k}=\begin{bmatrix} \cos(\theta_k) & -\cos(\alpha_k)\sin(\theta_k) & \sin(\alpha_k)\sin(\theta_k) & a_k\cos(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\alpha_k)\cos(\theta_k) & -\sin(\alpha_k)\cos(\theta_k) & a_k\sin(\theta_k) \\ 0 & \sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

θ_k α_k a_k d_k - 通过D-H算法描述的运动学参数

[Denavit and Hartenberg, 1955]

D-H法则

(1) 从底座到末端，将每个关节依次记为*1*，*2*，…，*n*

(2) 按照右手定则，将第*0*个坐标系分配至机器人底座，设定z_0，将其对齐于关节*1*的旋转轴

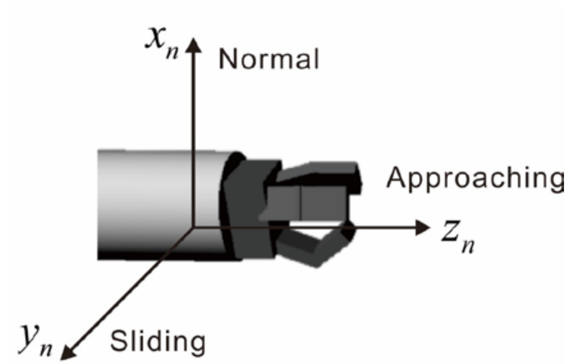
(3) 设置$k=1$，按如下步骤进行：

- 设定z_k，将其对齐于关节$k+1$的旋转轴；
- 将z_k与$z_{k\text{-}1}$轴的交点设为第k个坐标系的原点；如果两轴不相交，选择同时垂直于z_k和$z_{k\text{-}1}$的轴线，将z_k与该线交点设为第k个坐标系的原点；
- 设定x_k为同时垂直于z_k和$z_{k\text{-}1}$的轴线；如果z_k与$z_{k\text{-}1}$平行，选择远离$z_{k\text{-}1}$的方向为x_k；
- 设定y_k，以组成右手坐标系

(4) $k=k+1$，按照步骤(3)继续，直到$k=n$

(5) 设定第n个坐标系为末端执行器坐标系：

z_n – *approaching vector*
y_n – *sliding vector*
x_n – *normal vector*

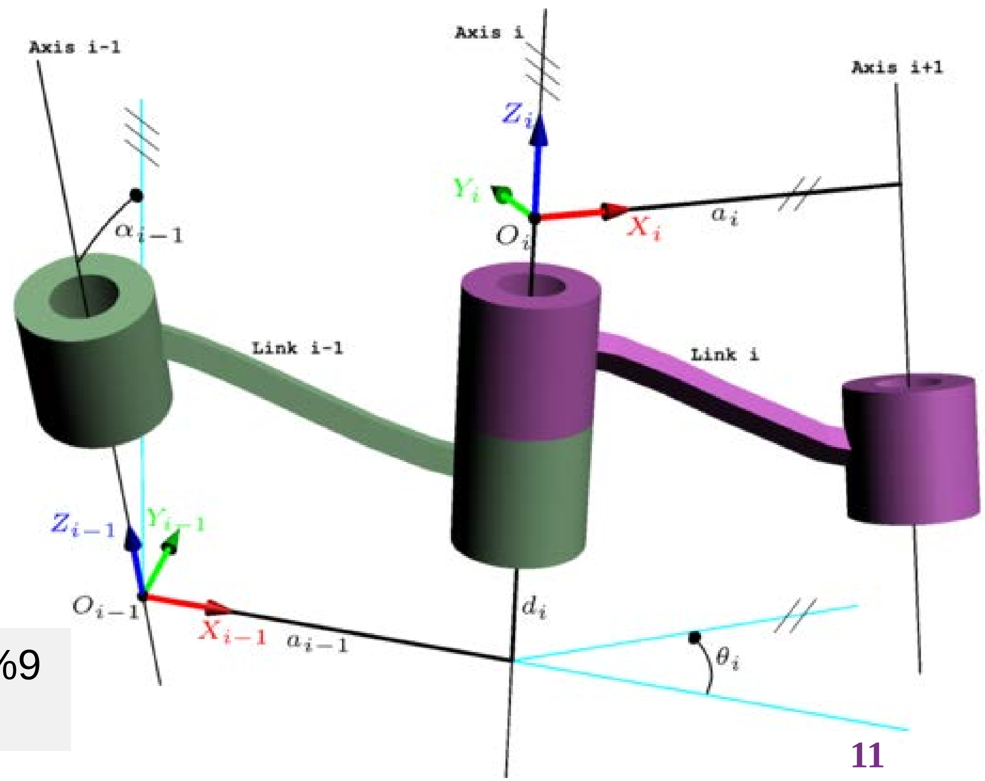


D-H法则

Tsinghua University

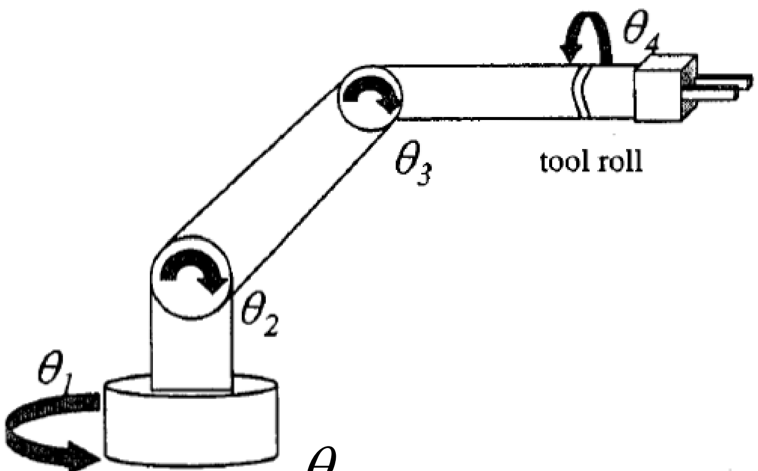
D-H参数定义为：

- θ_k 为 x_{k-1}与 x_k 轴沿着 z_{k-1}方向的夹角；
- d_k 为 x_{k-1}与 x_k 轴沿着 z_{k-1} 方向的距离；
- a_k 为 z_{k-1}与 z_k 轴沿着 x_k 方向的距离；
- α_k 为 z_{k-1}与 z_k 轴沿着 x_k 方向的夹角。

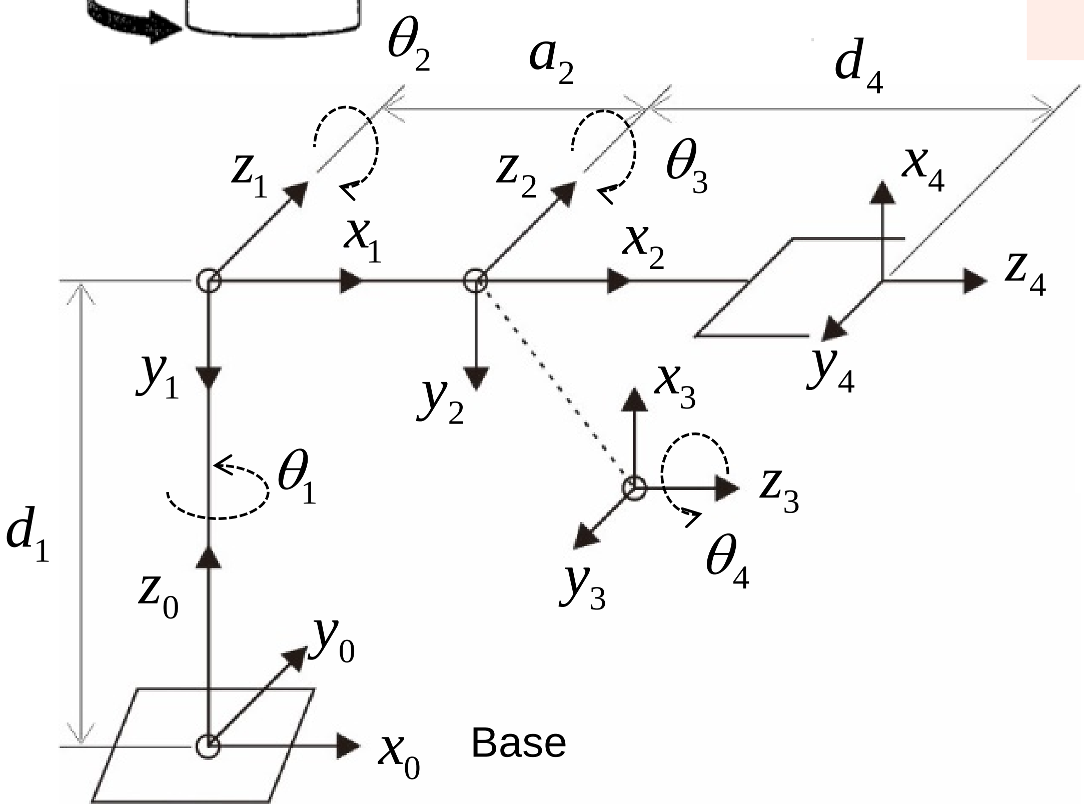


https://en.wikipedia.org/wiki/Denavit%E2%80%93Hartenberg_parameters

D-H法则



Axis	θ	d	a	α
1	θ_1	d_1	0	$-\pi/2$
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	0	0	$-\pi/2$
4	θ_4	d_4	0	0

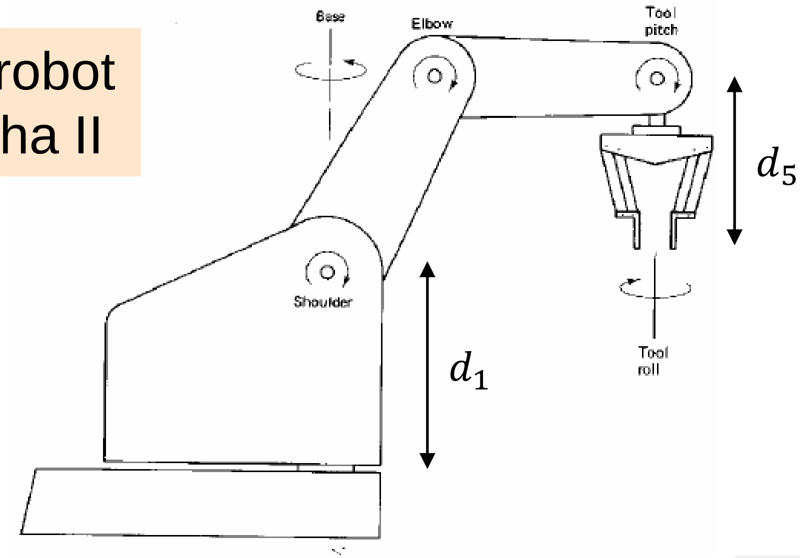


D-H参数定义为：

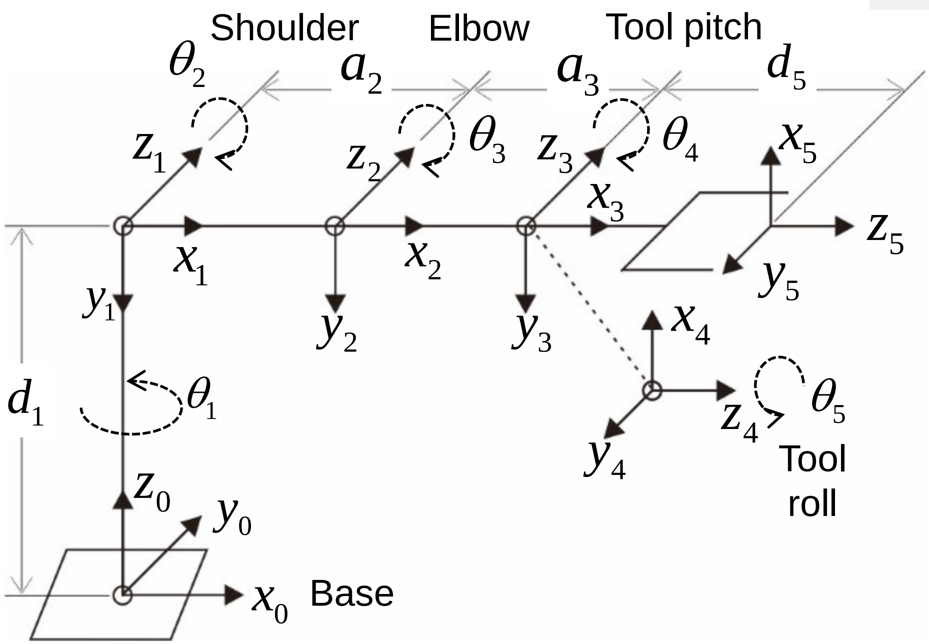
- θ_k 为 x_{k-1} 与 x_k 轴沿着 z_{k-1} 方向的夹角；
- d_k 为 x_{k-1} 与 x_k 轴沿着 z_{k-1} 方向的距离；
- a_k 为 z_{k-1} 与 z_k 轴沿着 x_k 方向的距离；
- α_k 为 z_{k-1} 与 z_k 轴沿着 x_k 方向的夹角。

D-H法则

Microbot
Alpha II



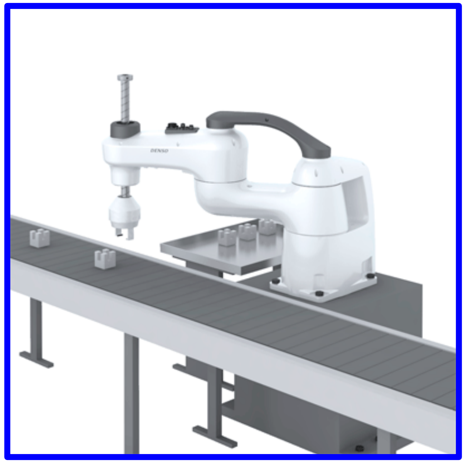
https://www.youtube.com/watch?v=I2P9zETXmWo



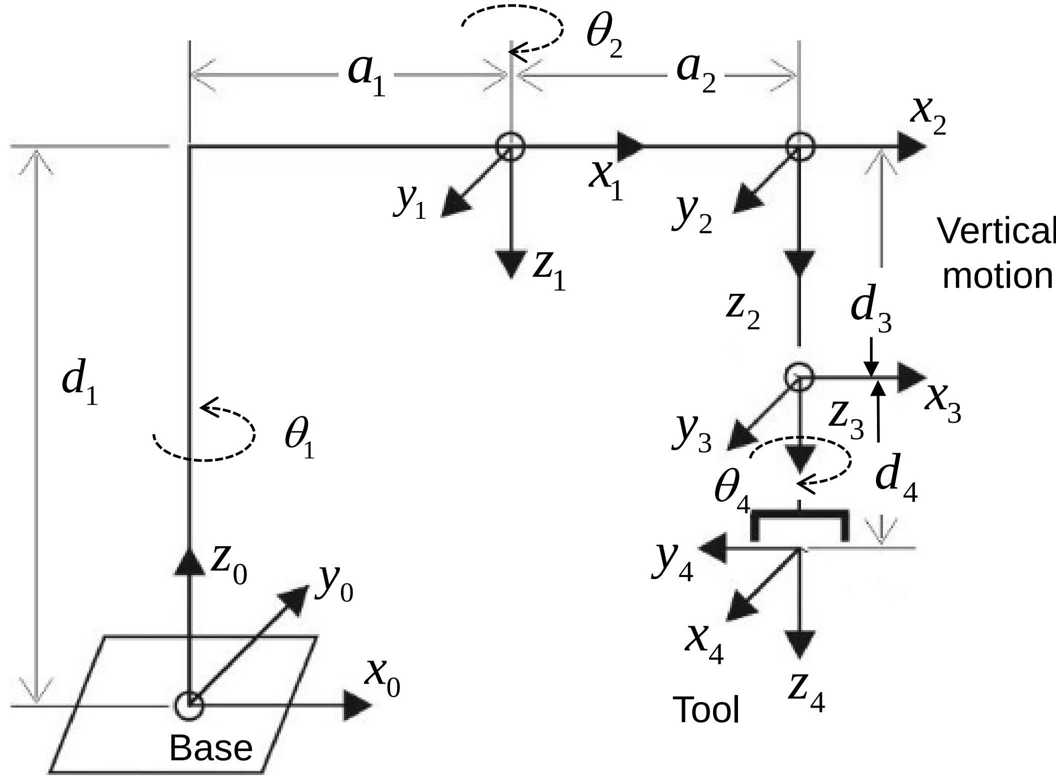
Axis	θ	d	a	α
1	θ_1	d_1	0	$-\pi/2$
2	θ_2	0	a_2	0
3	θ_3	0	a_3	0
4	θ_4	0	0	$-\pi/2$
5	θ_5	d_5	0	0

D-H法则

SCARA



https://www.denso-wave.com/en/robot/product/function/Ctrack.html



Axis	θ	d	a	α
1	θ_1	d_1	a_1	π
2	θ_2	0	a_2	0
3	0	d_3	0	0
4	θ_4	d_4	0	0

D-H参数定义为：

- θ_k为 x_{k-1}与 x_k 轴沿着 z_{k-1} 方向的夹角；
- d_k为 x_{k-1}与 x_k 轴沿着 z_{k-1} 方向的距离；
- a_k为 z_{k-1}与 z_k 轴沿着 x_k 方向的距离；
- α_k为 z_{k-1}与 z_k 轴沿着 x_k 方向的夹角。

D-H法则

SCARA

Axis	θ	d	a	α
1	θ_1	d_1	a_1	π
2	θ_2	0	a_2	0
3	0	d_3	0	0
4	θ_4	d_4	0	0

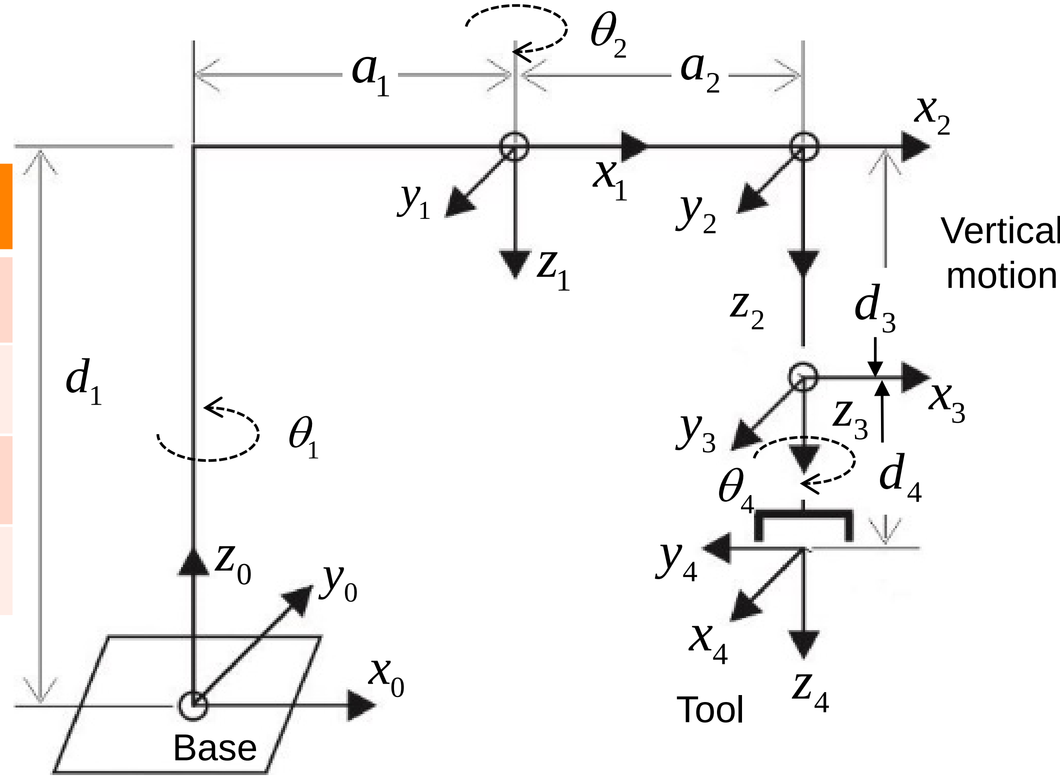
$$T_{k-1}^{k} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_k) & -\cos(\alpha_k)\sin(\theta_k) & \sin(\alpha_k)\sin(\theta_k) & a_k\cos(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\alpha_k)\cos(\theta_k) & -\sin(\alpha_k)\cos(\theta_k) & a_k\sin(\theta_k) \\ 0 & \sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) & d_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_o^1, T_1^2 \dots T_{n-1}^n$$

D-H法则

SCARA

Axis	θ	d	a	α
1	θ_1	d_1	a_1	π
2	θ_2	0	a_2	0
3	0	d_3	0	0
4	θ_4	d_4	0	0



- T_{k-1}^{k}
- $T_{base}^{tool} = T_o^1 \cdot T_1^2 \cdots T_{n-1}^n$

$$T_{base}^{tool} = \begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{cccc} C_{124} & S_{124} & 0 & a_1C_1 + a_2C_{12} \\ S_{124} & -C_{124} & 0 & a_1S_1 + a_2S_{12} \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} x_4 & \quad y_4 & \quad z_4 & \qquad\qquad \end{array} \end{array}$$

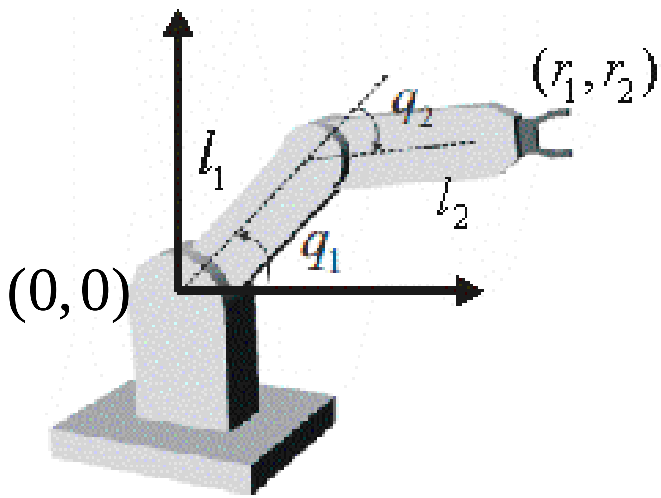
Base Tool

$$\begin{bmatrix} p_1^f \\ p_2^f \\ p_3^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \cdot f_1 & m_2 \cdot f_1 & m_3 \cdot f_1 \\ m_1 \cdot f_2 & m_2 \cdot f_2 & m_3 \cdot f_2 \\ m_1 \cdot f_3 & m_2 \cdot f_3 & m_3 \cdot f_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1^m \\ p_2^m \\ p_3^m \end{bmatrix}$$

$$C_{124} = \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_4)\ldots$$

前向运动学

$$T_{base}^{tool} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{旋转} & \text{平移} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2) & \sin(q_1+q_2) & l_1\cos(q_1)+l_2\cos(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2) & -\cos(q_1+q_2) & l_1\sin(q_1)+l_2\sin(q_1+q_2) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



两自由度机械臂

l_1 l_2 – 手臂长度

末端执行器相对于原点的坐标：

$$\begin{cases} r_1 = l_1\cos(q_1)+l_2\cos(q_1+q_2) \\ r_2 = l_1\sin(q_1)+l_2\sin(q_1+q_2) \end{cases}$$

表示为 $r = h(q)$

$h(\cdot)$ – 非线性函数

前向运动学

清华大学 Tsinghua University

速度关系：

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = -l_1\dot{q}_1\sin(q_1) - l_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\sin(q_1+q_2) \\ \dot{r}_2 = l_1\dot{q}_1\cos(q_1) + l_2(\dot{q}_1+\dot{q}_2)\cos(q_1+q_2) \end{cases}$$

矩阵表达形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{r}_1 \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -l_1\sin(q_1) - l_2\sin(q_1+q_2) & -l_2\sin(q_1+q_2) \\ l_1\cos(q_1) + l_2\cos(q_1+q_2) & l_2\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

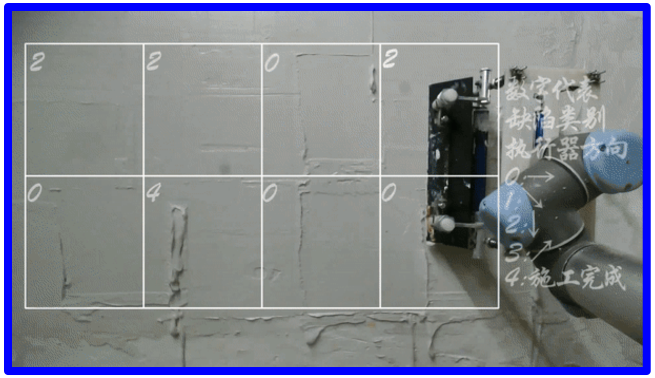
通用形式：

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

雅可比矩阵 (Jacobian Matrix)

– 代表关节空间到任务空间的映射

末端执行器



如何表征末端执行器的位置与姿态？

$$T_{base}^{tool} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & p_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & p_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

坐标系间平移 → 表征执行器位置？ → OK

坐标系间旋转 → 表征执行器姿态？ → **信息冗余！**

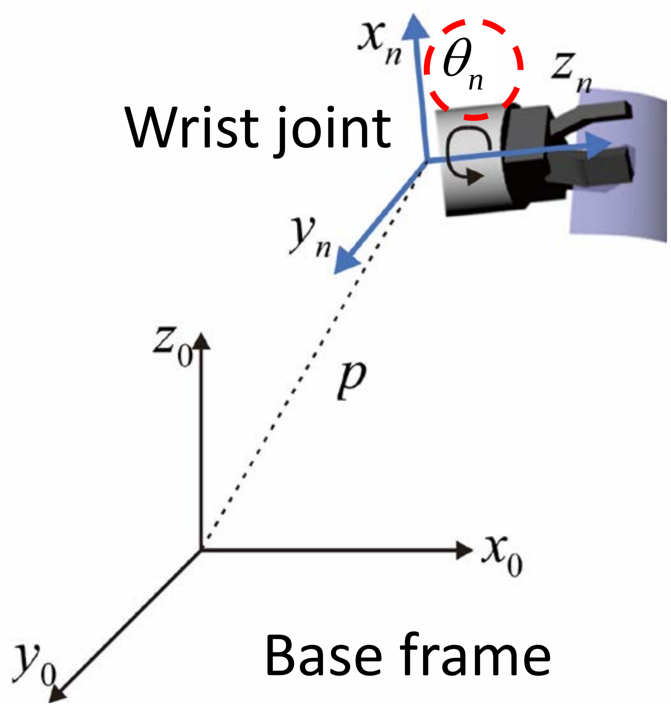
末端执行器

$$T_{base}^{tool}=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & p_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & p_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & p_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Approaching vector

- 用于表示末端执行器方向
- 如何表示转角？

$$\begin{bmatrix} p_1^f \\ p_2^f \\ p_3^f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} m_1\cdot f_1 & m_2\cdot f_1 & m_3\cdot f_1 \\ m_1\cdot f_2 & m_2\cdot f_2 & m_3\cdot f_2 \\ m_1\cdot f_3 & m_2\cdot f_3 & m_3\cdot f_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1^m \\ p_2^m \\ p_3^m \end{bmatrix}$$



前进方向 + 旋转角 ➡ 末端姿态

末端执行器

$r_3 = [R_{13}, R_{23}, R_{33}]^T$ 单位向量，仅表示方向

- 将转角编码为正值标量与之相乘（不改变 r_3 表示的方向）
- $f(\theta_n) = e^{\theta_n / \pi}$
- $$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ r_3 e^{\theta_n / \pi} \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\ \Re^3 \\ \}\ \Re^3 \end{matrix}$$

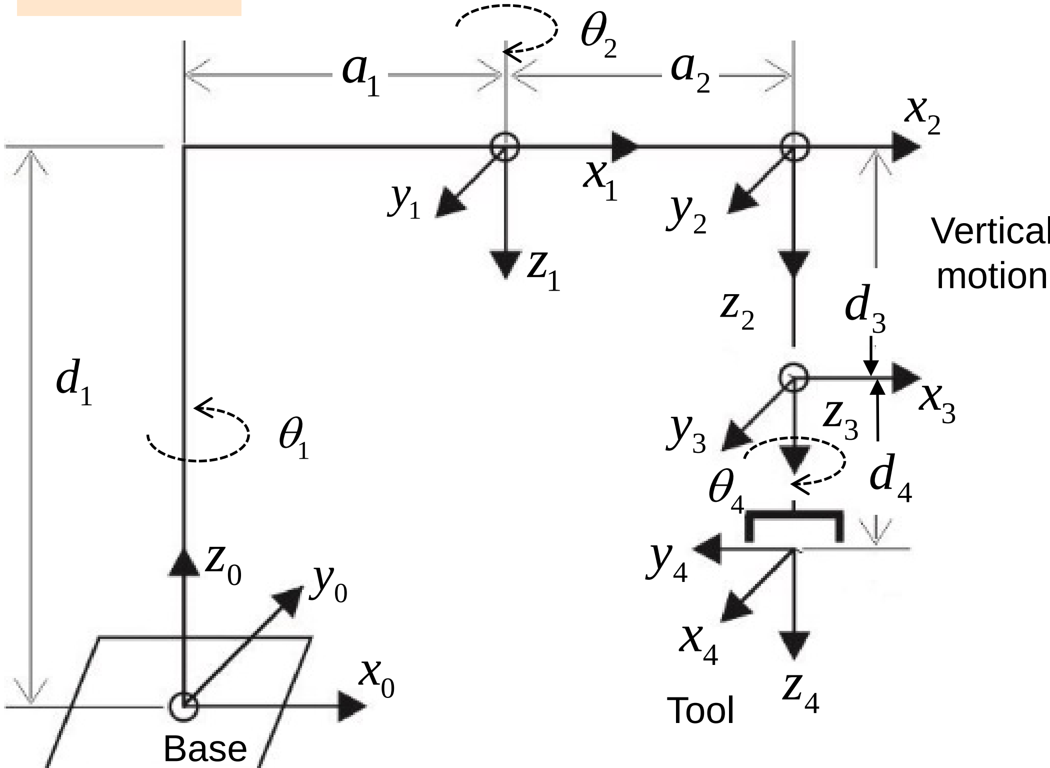
最简表示

w_1, w_2, w_3 － 表示执行器的位置

w_4, w_5, w_6 － 表示执行器的姿态

末端执行器

SCARA



$$T_{base}^{tool} = \begin{bmatrix} C_{124} & S_{124} & 0 & a_1C_1 + a_2C_{12} \\ S_{124} & -C_{124} & 0 & a_1S_1 + a_2S_{12} \\ 0 & 0 & -1 & d_1 - d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

关节空间

$$q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$$
$$= [\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4]^T$$

末端执行器向量

$$w(q) = \begin{bmatrix} a_1C_1 + a_2C_{12} \\ a_1S_1 + a_2S_{12} \\ d_1 - q_3 - d_4 \\ 0 \\ 0 \\ -e^{q_4/\pi} \end{bmatrix}$$

$e^{q_4/\pi}$ → 末端转角

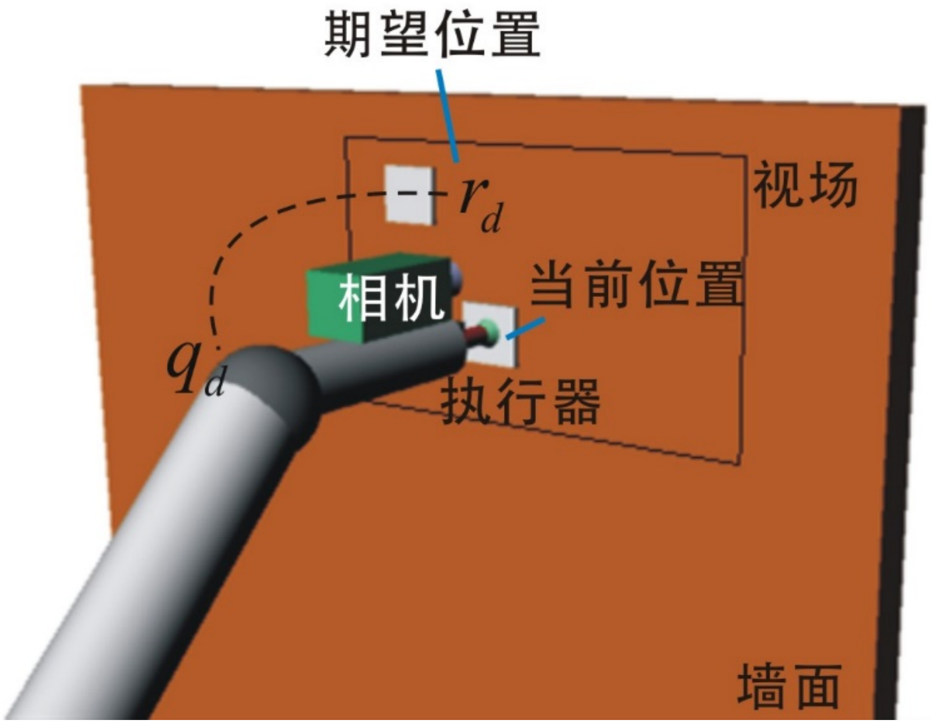
逆运动学

逆运动学 – 给定末端执行器期望位置，计算对应的机器人关节角度

正向： $r = h(q)$

逆向： $q = h^{-1}(r)$

$h^{-1}(\cdot)$ – 反函数



单关节机械臂运动学

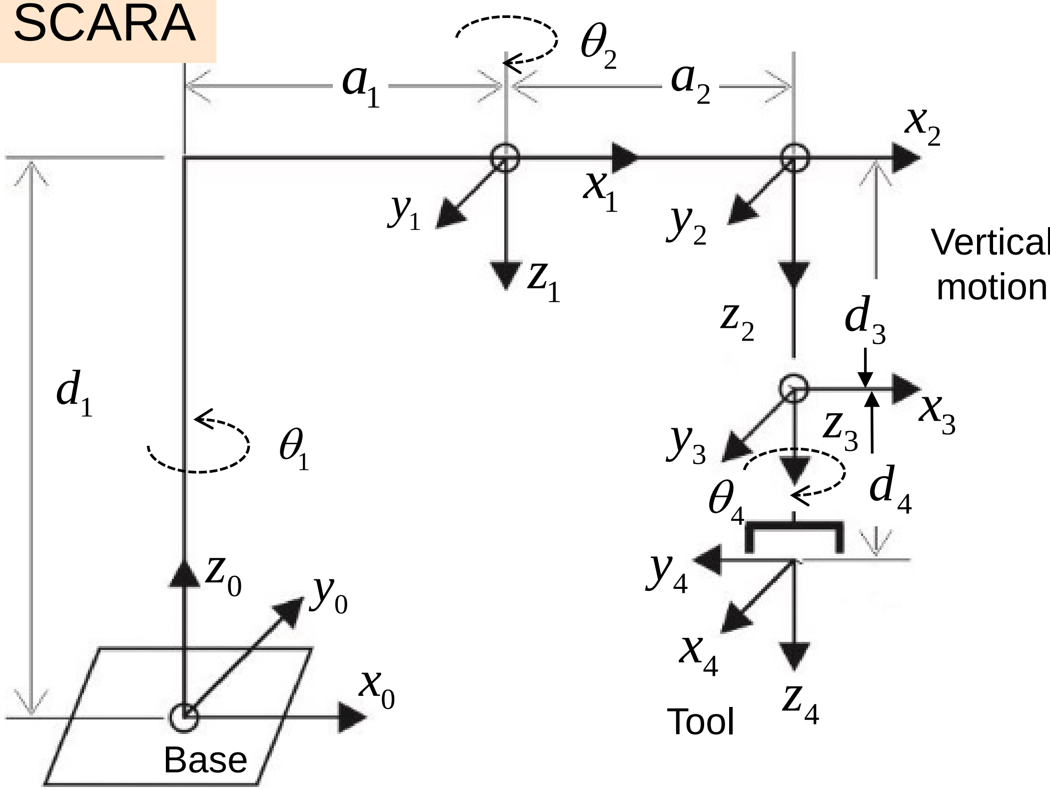
$$\begin{cases} r_1 = l\cos(q) \\ r_2 = l\sin(q) \end{cases}$$

逆运动学

$$q = \cos^{-1}\left(\frac{r_1}{l}\right)$$

逆运动学

SCARA



末端执行器位姿向量

$$w(q)=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1C_1+a_2C_{1-2} \\ a_1S_1+a_2S_{1-2} \\ d_1-q_3-d_4 \\ 0 \\ 0 \\ -e^{q_4/\pi} \end{bmatrix}$$

给定 $w(q)$

求解 q_1, q_2, q_3, q_4

$$w_1^2+w_2^2=a_1^2+2a_1a_2C_2+a_2^2$$

$$q_2=\pm\cos^{-1}\frac{w_1^2+w_2^2-a_1^2-a_2^2}{2a_1a_2}$$

第二关节

逆运动学

$$\begin{cases} w_1 = (a_1 + a_2 C_2) C_1 + a_2 S_2 S_1 \\ w_2 = (a_1 + a_2 C_2) S_1 - a_2 S_2 C_1 \end{cases}$$

因 q_2 已求出

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{a_2 S_2 w_1 + (a_1 + a_2 C_2) w_2}{(a_2 S_2)^2 + (a_1 + a_2 C_2)^2} \\ C_1 = \dfrac{(a_1 + a_2 C_2) w_1 - a_2 S_2 w_2}{(a_2 S_2)^2 + (a_1 + a_2 C_2)^2} \end{cases}$$

第一关节

$$q_1 = \tan^{-1} \frac{a_2 S_2 w_1 + (a_1 + a_2 C_2) w_2}{(a_1 + a_2 C_2) w_1 - a_2 S_2 w_2}$$

$w_3 = d_1 - q_3 - d_4$ ➡ $q_3 = d_1 - w_3 - d_4$ 第三关节

$w_6 = -e^{q_4/\pi}$ ➡ $q_4 = \pi \ln(-w_6)$ 第四关节

逆运动学

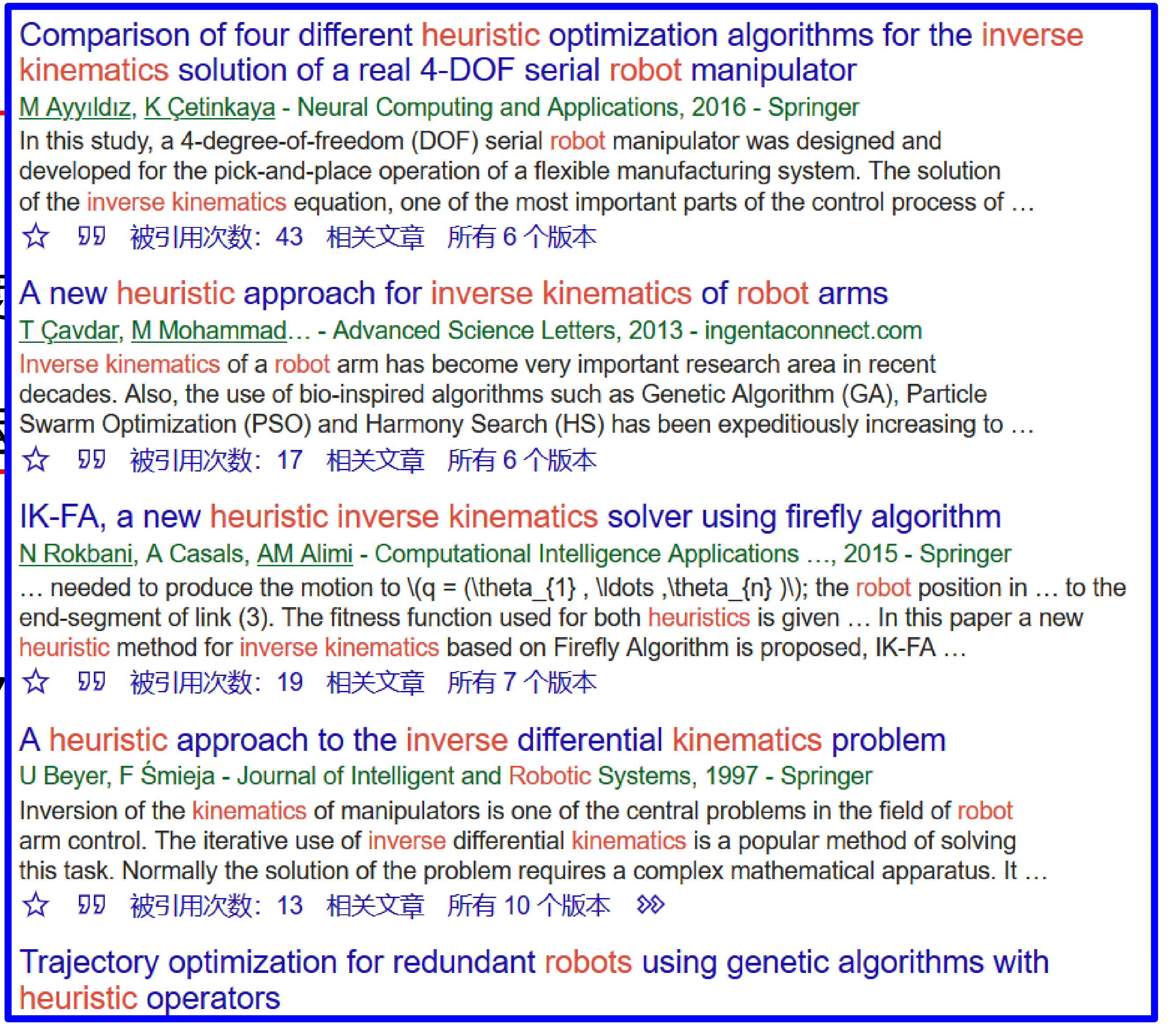
解析法求解

- 无固定流程，
- 对于高自由度
- 对于未知的运

数值法求解

$$q = \arg\min \| w$$

启发式算法



Jacobian逆矩阵

前向运动学　　对时间求导

$$r = h(q) \longrightarrow \underset{m\times 1}{\dot{r}} = \underset{m\times n}{J(q)}\underset{n\times 1}{\dot{q}}$$

$m = n$（非冗余机器人）

→ 逆矩阵 $J^{-1}(q)$

$m < n$（冗余机器人）

→ 广义矩阵

$$\underset{n\times m}{J^{+}(q)} = \underset{n\times m}{J^{T}(q)}(\underset{m\times m}{J(q)J^{T}(q)})^{-1}$$

单位矩阵

$$\longrightarrow J(q)J^{+}(q) = J(q)J^{T}(q)(J(q)J^{T}(q))^{-1} = \boxed{I_m}$$

奇异性

- 在某些关节角度，$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})$不满秩，导致逆矩阵（或广义逆阵）不存在
- 即笛卡尔空间的微小运动需要关节无穷大的转速

$$J^{-1}(q) \qquad J^{+}(q)=J^{T}(q)(J(q)J^{T}(q))^{-1}$$

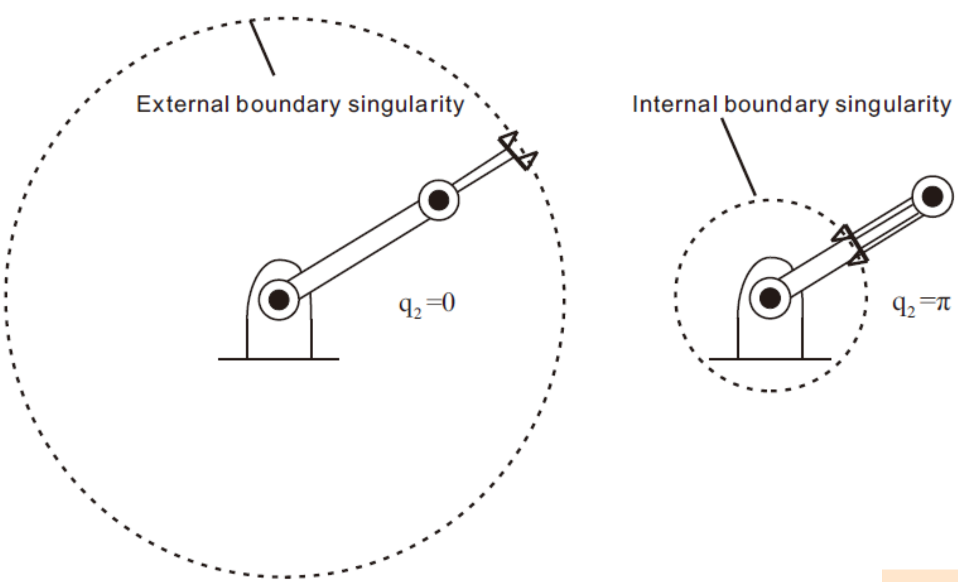
- 通过求解 $\det(J(q))=0$（无冗余） $\det(J(q)J^{T}(q))=0$（有冗余）
- 机器人奇异问题可以被分为外部奇异问题和内部奇异问题。外部奇异发生在工作空间外部边界，内部奇异包括内边界奇异和内奇异。

奇异性

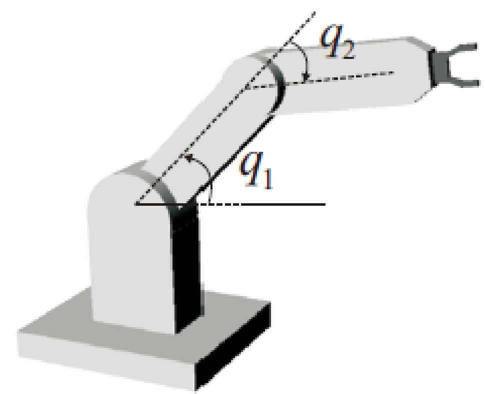
当 $\det[J(\mathbf{q})] = l_1 l_2 \sin(q_2) = 0$ 时该矩阵是奇异的。

奇异问题出现在 $q_2 = 0$（外边界奇异点）和 $q_2 = \boldsymbol{\pi}$（内边界奇异点）

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \in \Re^{2\times 2}$$



(a) (b)

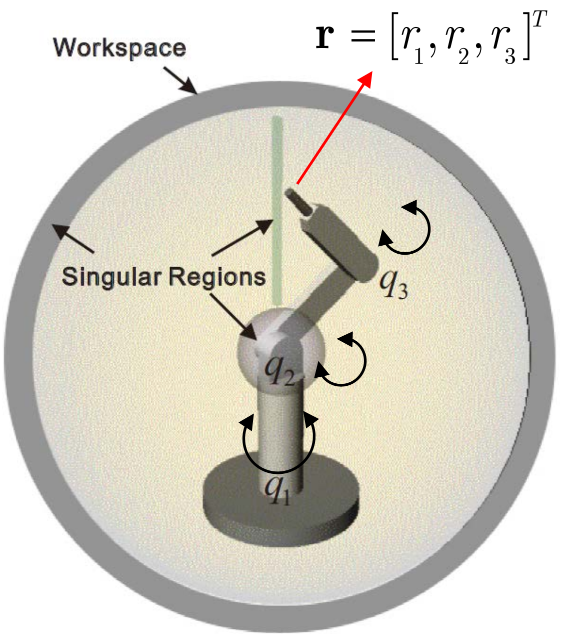


两自由度关节奇异位置

奇异性

考虑一个3自由度机械臂。用 $\mathbf{r}=[r_1,r_2,r_3]^T$ 表示笛卡尔空间中末端执行器的位置，得到前向运动学方程

$$r=\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(q_1)\left[l_2\cos(q_2)+l_3\cos(q_2+q_3)\right] \\ \sin(q_1)\left[l_2\cos(q_2)+l_3\cos(q_2+q_3)\right] \\ l_1-l_2\sin(q_2)-l_3\sin(q_2+q_3) \end{bmatrix}\in\Re^3$$



得到雅可比矩阵：

$$J(\mathbf{q})=\begin{bmatrix} -s_1\left(l_2c_2+l_3c_{23}\right) & -s_2c_1l_2-s_{23}l_3c_1 & -s_{23}l_3c_1 \\ -c_1\left(l_2c_2+l_3c_{23}\right) & -s_2s_1l_2-s_{23}l_3s_1 & -s_{23}l_3s_1 \\ 0 & -c_2l_2-c_{23}l_3 & -c_{23}l_3 \end{bmatrix}\in\Re^{3\times3}$$

其中 $s_1=\sin(q_1),s_{23}=\sin(q_2+q_3),c_{23}=\cos(q_2+q_3)\ldots$

奇异性

考虑一个3自由度机械臂。

$$J(\mathbf{q})=\begin{bmatrix} -s_1(l_2c_2+l_3c_{23}) & -s_2c_1l_2-s_{23}l_3c_1 & -s_{23}l_3c_1 \\ -c_1(l_2c_2+l_3c_{23}) & -s_2s_1l_2-s_{23}l_3s_1 & -s_{23}l_3s_1 \\ 0 & -c_2l_2-c_{23}l_3 & -c_{23}l_3 \end{bmatrix}\in\Re^{3\times 3}$$

雅可比矩阵在 $\det[\mathbf{J}(\mathbf{q})]=[l_2\cos(q_2)+l_3\cos(q_2+q_3)]l_3l_2\sin(q_3)=0$ 时奇异。

即 $q_3=0$ (外边界奇异点)

$q_3=\boldsymbol{\pi}$ (内边界奇异点)

$l_2\cos(q_2)+l_3\cos(q_2+q_3)=0$ (内奇异点)