

机器人控制方法讲义

控制目标

设计机械臂控制方法的目的是驱动机械臂运动至期望位置以完成指定的任务。控制输入的工作流程总结如下：

- 1) 给定机器人动力学方程：

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = u \quad (1)$$

设计控制输入 u ，通过动力学方程(1)引起关节角度 q 变化。

- 2) 关节角度变化后，通过机器人运动学

$$r = h(q) \quad (2)$$

带动机械臂末端执行器的姿态与位置发生变化；其中 r 表示末端执行器在笛卡尔空间中的位置与姿态。

- 3) 通过不断改变机械臂末端的当前状态，推动其最终移动到期望的姿态与位置：

$$r \rightarrow r_d \quad (3)$$

r_d 表示指定任务所对应的期望位置与姿态。

该位置可以是一个定点，也可以是时变的轨迹。比如，在图 1(a)的贴瓷片任务中，机械臂末端执行器（吸盘）的期望位置为一系列的定点：抓取目标瓷片，粘上水泥砂浆，然后贴到墙面的指定位置。在图 1(b)展示的喷漆任务中，期望位置为沿着墙面连续运动的一条时变轨迹。因此，期望姿态与位置可以根据具体任务设计成不同形式。在机械臂与环境存在物理性接触的情况下（比如控制图(1)中的机械臂执行打磨任务），控制目标可以设定为期望阻抗模型，以达致机械臂末端位置与环境接触力的动态关系。

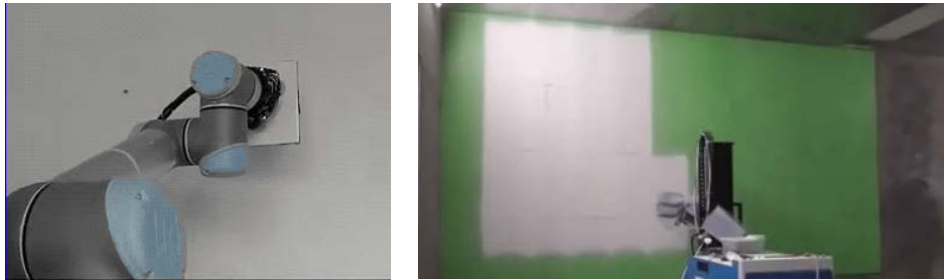


图 1. 机械臂末端任务对应不同的期望位置 (a)贴瓷片任务；(b) 喷漆任务

关节空间控制方法

关节空间控制方法的结构如图 2 所示。首先，在机械臂的任务空间设定期望轨迹，通过求解逆运动学，计算对应的期望关节转角；然后，关节空间控制算法，通过比较当前关节转角与期望角度之间的差值，生成控制力矩，作用在机械臂关节驱动其旋转，并通过前向运动学带动末端执行器运动；接下来，控制算法会进一步地比较关节当前角度与期望值的差异，生成新的输入，直到机械臂关节旋转至期望角度。

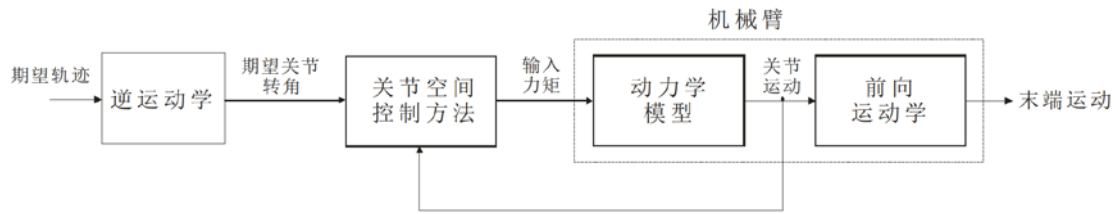


图 2. 关节空间控制方法结构

一个典型的关节空间控制算法为：基于重力补偿的 PD 控制方法，用公式表示为：

$$u = -K_p(q - q_d) - K_v\dot{q} + g(q) \quad (4)$$

公式(4)中的前两项分别表示位置控制（P）与速度控制（D），最后一项为重力补偿项。在公式(4)中， K_p 和 K_v 为控制参数，决定机器人系统的瞬态和稳态特性， q_d 为期望的关节角度。公式(4)描述的控制算法结构如图 3 所示。

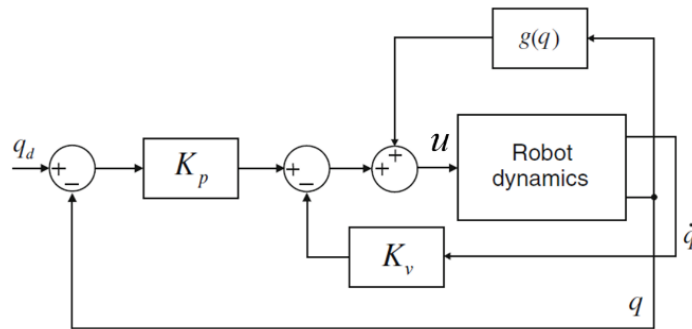


图 3. 基于重力补偿的 PD 控制算法结构

该控制算法的不足主要包括两点：

- 1) 需要求解机器人逆运动学以获得期望的关节转角；如果机械臂自由度较高，或者存在运动学参数未知的问题，求解难度较大。
- 2) 需要准确的重力扭矩补偿信息；当动力学参数未知时，补偿效果有限，未补偿的动力学将对控制器造成干扰。

将公式(4)表示的控制算法代入机器人动力学方程(1),可以获得对应的闭环方程为:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K_p\Delta q + K_v\dot{q} = 0 \quad (5)$$

其中, Δq 定义为: $\Delta q = q - q_d$, 表示关节转角误差。为了证明公式(5)刻画的闭环系统能够保证系统的稳定性与角度误差的收敛性, 我们介绍以下的 LaSalle 不变集定理。

LaSalle 不变集定理: 设 $V: \mathbb{R}^{n_s} \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个标量函数, 使 $\dot{V} \leq 0$ 在紧致集合 Ω 中成立。设 D 是 Ω 中所有满足 $\dot{V}(x_s) = 0$ 的点的集合, 则 $\dot{x}_s = f(x_s)$ 系统将收敛于 D 的最大不变集。其中, 如果 D 不包括除 $x_s = 0$ 以外的轨迹, 则 $x_s = 0$ 为局部渐近稳定。

LaSalle 不变集定理用于分析自治系统的稳定性 (如, 定点控制)。对于非自治系统 (如, 轨迹追踪控制), 可以使用 Barbalat 引理与相关的 Lyapunov-like 引理进行证明。

我们将基于 LaSalle 不变集定理进行闭环系统的稳定性分析。首先, 构造 Lyapunov 函数如下:

$$V = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\Delta q^T K_p \Delta q > 0 \quad (6)$$

对公式两边同时相对时间求导可得:

$$\dot{V} = \dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} + \Delta q^T K_p \dot{q} \quad (7)$$

将闭环方程(5)代入以上公式(7)可得:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{q}^T M(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\dot{q}^T \dot{M}(q)\dot{q} + \Delta q^T K_p \dot{q} \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{1}{2}\dot{M}(q)\dot{q} - C(q, \dot{q})\dot{q} - K_p\Delta q - K_v\dot{q} \right) + \Delta q^T K_p \dot{q} \\ &= \dot{q}^T \left(\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right) \dot{q} - \dot{q}^T K_v \dot{q} \end{aligned} \quad (8)$$

利用机器人动力学的性质二化简得到:

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_v \dot{q} \leq 0 \quad (9)$$

根据 LaSalle 不变集定理, 闭环系统将收敛于不变集 $\dot{V} = 0$, 即:

$$\dot{q} = 0 \quad (10)$$

将以上公式(10)代入闭环方程(5)可得:

$$\Delta q = 0 \quad (11)$$

即 $q = q_d$ ，因此，机器人关节在稳态时转动至期望角度。

笛卡尔空间控制方法

笛卡尔空间控制方法的结构如图 4 所示。相比于关节空间控制方法，笛卡尔空间控制方法省去了求解逆运动学的步骤，应用于高自由度机械臂、运动学参数未知的情况时具有更多优势。

在图 4 中，机器人末端执行器的期望轨迹定义在笛卡尔空间，控制算法生成的力矩作用在机器人关节，驱动关节转动，通过运动学模型带动末端执行器运动；末端在笛卡尔空间的当前与期望位置差值，通过 Jacobian 矩阵的转置矩阵或逆矩阵转化成对应的关节扭矩；之后控制方法再次比较末端当前位置与期望轨迹的差距，生成新的控制输入，直到末端在笛卡尔空间运动到了期望位置。

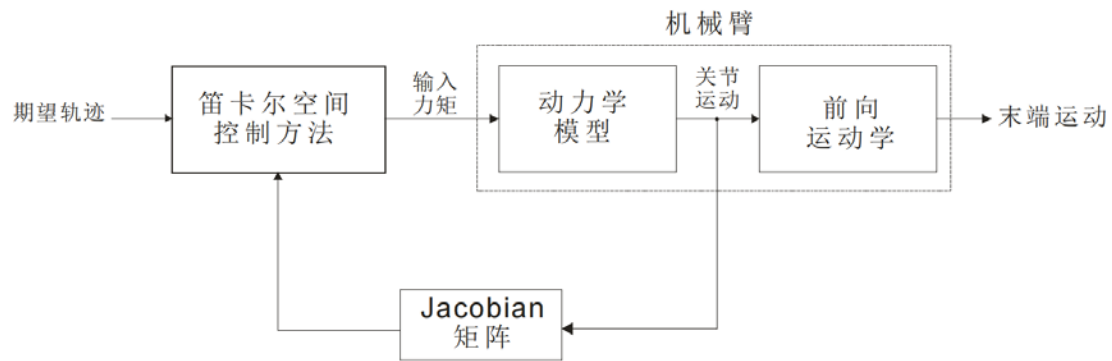


图 4. 笛卡尔空间控制方法框图

因此，基于笛卡尔空间的机器人控制方法，将求解逆运动学的步骤通过 Jacobian 矩阵来代替，简化了计算过程。

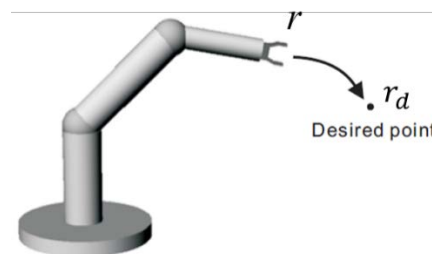


图 5. 期望关节角度对应于任务空间中一个定点

公式(5)设计的关节空间控制方法，控制机械臂从当前关节角度，转动至期望角度，期望关节角度对应于任务空间中一个定点（如图 5 所示）。在某些任务中（如图 1(b)所示的机器人喷漆任务），机器人需要追踪时变轨迹，因此，可以设

计基于动力学补偿的轨迹追踪控制方法:

$$u = -K_s s + M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + g(q) \quad (12)$$

其中, s 为滑模向量:

$$s = \dot{q} - J^{-1}(q)(\dot{r}_d - \alpha(r - r_d)) \quad (13)$$

包括了任务空间的期望轨迹信息 (由 \dot{r}_d 与 r_d 进行描述, 如图 6 所示); $J^{-1}(q)$ 为 Jacobian 矩阵的逆矩阵, 对于具有冗余自由度的机械臂, 该矩阵可以替换为广义逆矩阵 $J^+(q)$ 。

滑模向量也可以表示为: $s = \dot{q} - \dot{q}_r$, 其中

$$\dot{q}_r = J^{-1}(q)(\dot{r}_d - \alpha(r - r_d)) \quad (14)$$

定义为参考向量。公式(13)中的滑模向量可视为位置误差和速度误差的加权和; 将公式(13)两边同时乘以 Jacobian 矩阵可得:

$$J(q)s = (\dot{r} - \dot{r}_d) + \alpha(r - r_d) \quad (15)$$

因此, 如果能够证明滑模向量在稳态时趋于零, 可以推得位置误差和速度误差同时收敛于零的结论。

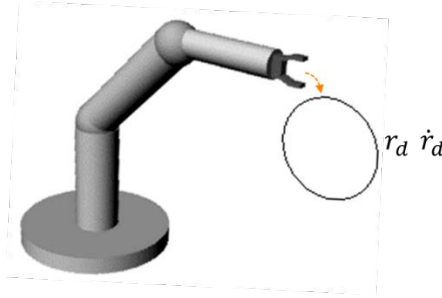


图 6. 机械臂末端期望位置定义为任务空间的期望轨迹

在公式(12),(13)中, K_s, α 为控制器相关参数: K_s 决定了速度误差的收敛速度, α 决定了闭环系统的稳态误差。公式(12)描述的轨迹追踪控制算法无需期望关节转角 q_d 的信息, 因此省去了求解逆运动学的步骤。公式(12)描述的控制算法结构如图 7 所示。

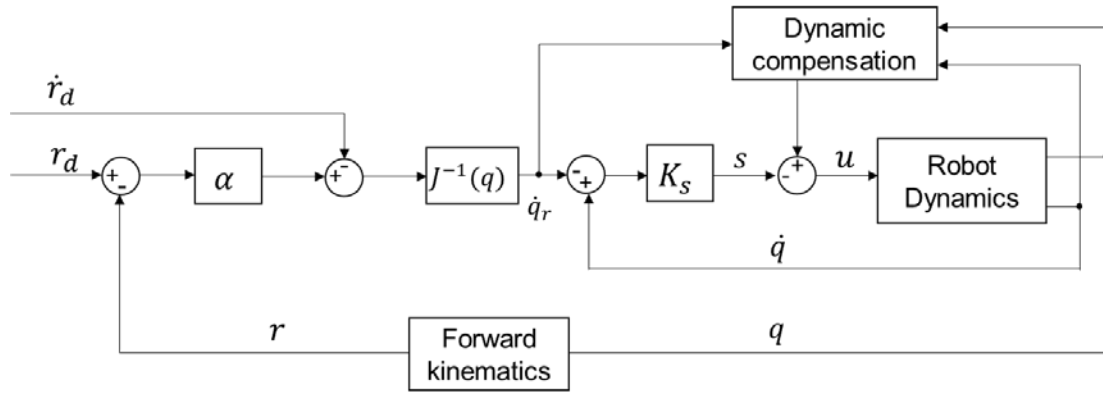


图 7. 基于动力学补偿的轨迹追踪控制算法结构

该控制算法的不足主要包括两点：

- 1) 机械臂末端执行器的位置与姿态信息基于前向运动学模型获得；如果机器人运动学模型参数未知，向量 r 的精准值无法获得。
- 2) 控制输入中包括有逆矩阵信息 $J^{-1}(q)$ ；如果机械臂运动过程中经过了关节奇异位置，控制输入信号将变得非常大，造成安全隐患。

根据滑模向量的定义，可得

$$\dot{q} = s + \dot{q}_r \quad (16)$$

为了进行稳定性分析，机器人动力学方程(1)可以通过以上公式表示为：

$$M(q)\dot{s} + C(q, \dot{q})s + M(q)\ddot{q}_r + C(q, \dot{q})\dot{q}_r + g(q) = u \quad (17)$$

将公式(12)表示的控制算法代入以上公式(17)，可以得到对应的闭环方程为：

$$M(q)\dot{s} + (C(q, \dot{q}) + K_s)s = 0 \quad (18)$$

为了证明闭环系统的稳定性，构造 Lyapunov 函数如下：

$$V = \frac{1}{2} s^T M(q) s \quad (19)$$

对公式两边同时相对时间求导可得：

$$\dot{V} = s^T M(q) \dot{s} + \frac{1}{2} s^T \dot{M}(q) s \quad (20)$$

将闭环方程(18)代入以上公式(20)可得：

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T \left(M(q) \dot{s} + \frac{1}{2} \dot{M}(q) s \right) \\ &= s^T \left(\frac{1}{2} \dot{M}(q) s - C(q, \dot{q}) s - K_s s \right) \\ &= -s^T \left(\frac{1}{2} \dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right) s - s^T K_s s \end{aligned} \quad (21)$$

利用机器人动力学的性质二化简得到：

$$\dot{V} = -s^T K_s s \quad (22)$$

公式(19)构造的函数可以描述闭环系统的能量水平。根据机器人动力学方程的性质一，我们可得： $V > 0, \dot{V} < 0$ 。因此，闭环系统的能量下降，保证了稳定性；与此同时，可以推得：

$$V \rightarrow 0 \quad (23)$$

根据公式(19)，滑模向量 s 也在稳态趋于零；根据之前的分析，可得位置误差与速度误差均趋于零，因此实现了轨迹追踪任务。

在某些情况下，机器人的动力学模型存在不确定性（比如，机械臂末端抓取了未知重量的工具进行操作任务）；为了保证未知动力学参数情况下的轨迹追踪精度，可基于公式(12)设计自适应轨迹追踪方法：

$$u = -K_s s + Y_d(\ddot{q}_r, \dot{q}_r, \dot{q}, q) \hat{\theta}_d \quad (24)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_d = -L_d Y_d^T(\ddot{q}_r, \dot{q}_r, \dot{q}, q) s \quad (25)$$

其中，回归矩阵 $Y_d(\cdot)$ 的构造是基于机器人动力学模型的性质三； $\hat{\theta}_d$ 为未知动力学参数向量（如质量、转动惯量等），其初始值可通过先验知识设置，并通过公式(25)表示的自适应更新律进行更新； L_d 决定了动力学参数的更新速度。从公式(25)可见，未知动力学参数的更新基于滑模向量驱动：在每个控制周期，自适应更新律接收滑模向量误差更新动力学参数值；如果机器人末端当前位置尚未达到期望轨迹，滑模向量误差非零，自适应更新继续；若滑模向量趋于零值，自适应更新停止，轨迹追踪任务完成。公式(24)描述的控制算法结构如图 8 所示。

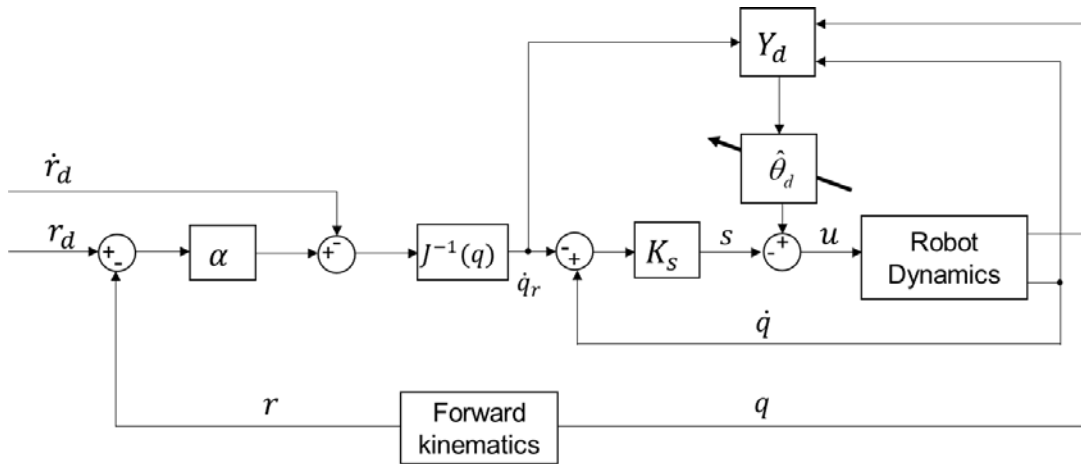


图 8. 自适应轨迹追踪控制算法结构

该控制算法所需机械臂末端执行器的位置与姿态信息（即 r 向量），同样需要

通过前向运动学模型获得，因此其准确值同样受到未知运动学参数的影响；对于高自由度机械臂，构造回归矩阵 $Y_d(\cdot)$ 的难度较大，可以通过神经网络进行拟合。

将公式(24)描述的控制输入代入机器人动力学方程(1)可得：

$$M(q)\dot{s} + (C(q, \dot{q}) + K_s)s + Y_d(\ddot{q}_r, \dot{q}_r, \dot{q}, q)\Delta\theta_d = 0 \quad (26)$$

其中， $\Delta\theta_d = \theta_d - \hat{\theta}_d$ 表示动力学参数的真实值与估计值的误差。为了证明公式(26)刻画的闭环系统能够保证系统的稳定性与轨迹追踪误差的收敛性，我们介绍以下的 Barbalat 引理与 Lyapunov-like 引理。

Barbalat 引理：如果一个 n 维标量函数 $f(t)$ 定义在 $[0, \infty)$ 上，有界且在时间上一致连续，并且 $f(t) \in L_1(0, \infty)$ 或者 $L_2(0, \infty)$ ，则当 $t \rightarrow \infty$ 时 $f(t) \rightarrow 0$ 。

Lyapunov-like 引理：如果一个标量函数 $V(x_s, t)$ 满足以下条件：

- (i) $V(x_s, t)$ 有下界；
- (ii) $\dot{V}(x_s, t)$ 为半负定；
- (iii) $\dot{V}(x_s, t)$ 在时间上是一致连续的。

则当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\dot{V}(x_s, t) \rightarrow 0$ 。

为了分析系统的稳定性，先构造 Lyapunov 函数如下：

$$V = \frac{1}{2}s^T M(q)s + \frac{1}{2}\Delta\theta_d^T L_d^{-1}\Delta\theta_d > 0 \quad (27)$$

对公式两边同时相对时间求导可得：

$$\dot{V} = s^T M(q)\dot{s} + \frac{1}{2}s^T \dot{M}(q)s - \Delta\theta_d^T L_d^{-1}\dot{\hat{\theta}}_d \quad (28)$$

公式(28)中最后一项的负号，是因为 $\Delta\theta_d = \theta_d - \hat{\theta}_d$ ， θ_d 为常数值， $\hat{\theta}_d$ 为时变向量（根据自适应更新律发生变化）。

将自适应更新律(25)与闭环方程(26)代入以上公式(28)可得：

$$\begin{aligned} \dot{V} &= s^T M(q)\dot{s} + \frac{1}{2}s^T \dot{M}(q)s + \Delta\theta_d^T L_d^{-1}\dot{\hat{\theta}}_d \\ &= s^T \left(\frac{1}{2}\dot{M}(q) - (C(q, \dot{q}) + K_s)s - Y_d(\ddot{q}_r, \dot{q}_r, \dot{q}, q)\Delta\theta_d \right) - \Delta\theta_d^T L_d^{-1}\dot{\hat{\theta}}_d \\ &= s^T \left(\frac{1}{2}\dot{M}(q) - C(q, \dot{q}) \right) s - s^T K_s s \end{aligned} \quad (29)$$

利用机器人动力学的性质二化简得到：

$$\dot{V} = -s^T K_s s \leq 0 \quad (30)$$

注意因为 V 同时包含向量 s 与 $\Delta\theta_d$ 的信息，而 \dot{V} 仅包含向量 s 的信息， \dot{V} 非严格小于

零。因为 $V > 0$, $\dot{V} \leq 0$, 闭环系统具有稳定性, 且根据公式(13)可得, 向量 s 有界; 根据闭环方程(24), 可以推得 \dot{s} 同样有界; 应用 Barbalat 引理或 Lyapunov-like 引理, 可以推得: \dot{V} 在稳态趋于零, 即向量 s 趋于零。因此, 在存在未知动力学参数的情况下, 该控制算法实现了轨迹追踪任务。

视觉空间控制方法

公式(12)描述的笛卡尔空间控制方法通过前向运动学模型计算机械臂末端执行器的位置与姿态, 因此易受建模与标定误差的影响。比如, 如果机械臂抓住了未知工具进行操作, 工具的长度与抓取角度都会影响向量 r 的准确值。

采用外部传感器直接对机械臂末端进行测量可以解决标定误差的问题。基于传感反馈空间的机器人控制方法结构如图 9 所示。

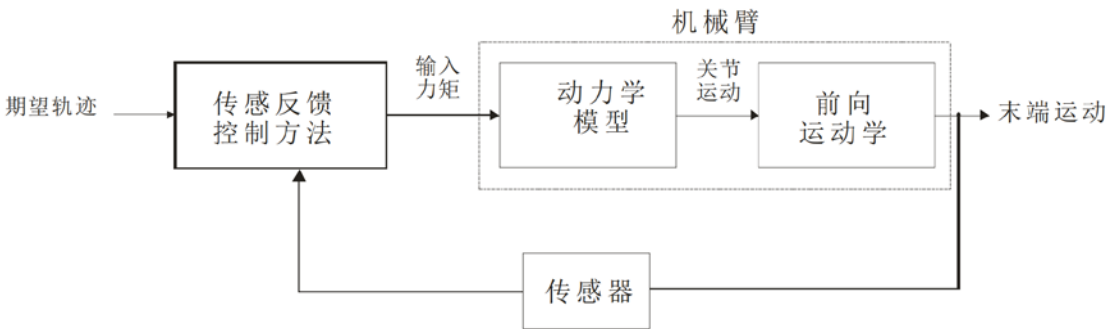


图 9. 基于传感反馈空间的机器人控制方法结构

与图 7 所示的方法相比, 最大的不同是采用传感器直接测量末端的运动。因此, 期望轨迹定义在传感反馈空间, 控制算法比较传感器输出值与期望轨迹的差值, 生成对应的控制力矩作用到机械臂关节, 驱动关节转动以带动末端执行器完成任务; 然后, 末端的当前位置与姿态再次通过传感器测量并与期望轨迹比较, 生成新的控制力矩作用到机械臂, 直至机械臂末端在传感反馈空间实现了轨迹追踪任务。该方法将任务误差直接定义在传感反馈空间, 因此具有相对于建模与标定误差较高的鲁棒性; 与此同时, 相比于之前的两类控制方法, 该方法需要安装外部传感器。

对于机械臂操作系统, 最常见的外部传感器为相机。相机为机器人提供视觉反馈, 具有环境信息丰富、成本低、鲁棒性强等优点。采用相机直接测量机械臂的末端执行器, 特征的当前位置与期望位置均定义在相机的视觉空间。一个基于视觉反馈的机械臂操作系统如图 10 所示。

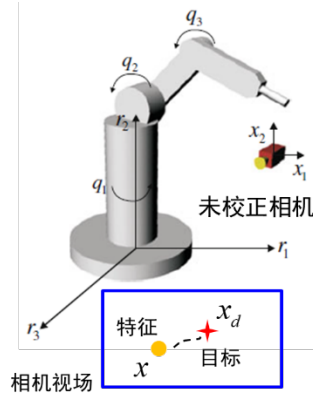


图 10. 基于视觉反馈的机械臂操作系统

图 10 考虑了相机未校正的情况。虽然特征(图 10 中对应机械臂末端执行器)在视觉空间的位置可以精确测量，但是从关节空间到视觉空间所对应的 Jacobian 矩阵的精确信息是未知的(因为相机的精确模型未知；比如，从相机的焦平面到机械臂特征所对应的深度信息未知)。一种可用于这种情况下的无校正视觉反馈控制算法可定义为：

$$u = -\hat{f}^T(q)K_p \text{sat}(\Delta x) - K_v \dot{q} + g(q) \quad (31)$$

其中, $\hat{f}(q)$ 表示由于相机未校正造成的非精确 Jacobian 矩阵。在实际应用中，该矩阵可以被设置为估计值； K_p , K_v 表示控制参数； $\Delta x = x - x_d$ ，表示当前位置与期望位置在视觉空间的差值； $\text{sat}(\cdot)$ 表示饱和函数，用来保证视觉空间的误差有界，其变化如图 11 所示。

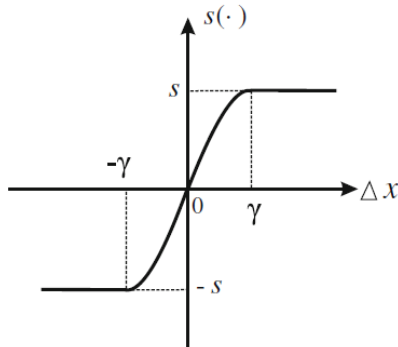


图 11. 饱和函数示例

基于饱和函数的控制方法类似于人类的操作过程：当人手距离目标较远时，并不过多地依赖视觉反馈信息；仅当人手与目标非常近的时候，人类采用视觉反馈来精细地调整自己的操作策略。

公式(31)描述的控制算法结构如图 12 所示。

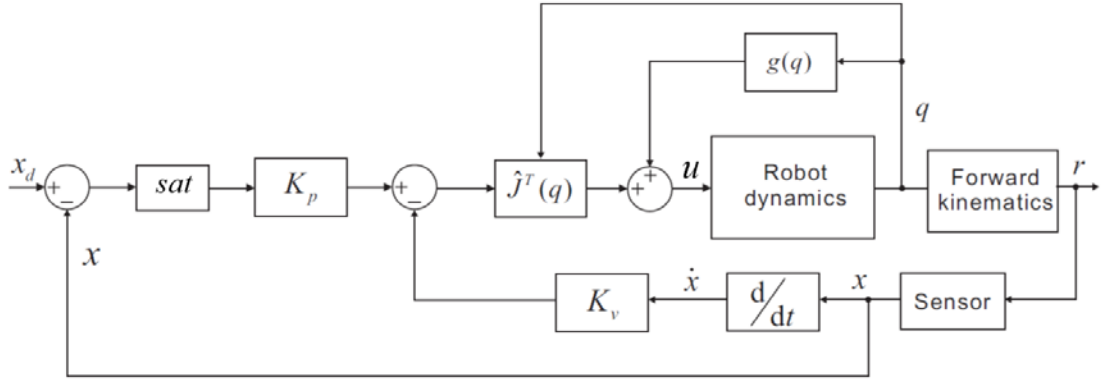


图 12. 无校正视觉反馈控制算法结构

将公式(31)代入机器人动力学方程，可以得到：

$$M(q)\ddot{q} + (C(q, \dot{q}) + K_v)\dot{q} + \hat{J}^T(q)K_p \text{sat}(\Delta x) = 0 \quad (32)$$

为了证明闭环系统的稳定性以及视觉空间误差的收敛性，构造如下的 Lyapunov 函数：

$$V = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \alpha \dot{q}^T M(q) \hat{J}^T(q) \text{sat}(\Delta x) + \sum_{i=1}^m (k_{pi} + \alpha k_{vi}) S_i(\Delta x_i) > 0 \quad (33)$$

其中， α 为正常数， k_{pi} 与 k_{vi} 为 K_p ， K_v 的对角线元素， $S_i(\cdot)$ 为饱和函数对应的势能函数。

对公式(33)两边同时相对时间求导，并代入闭环方程整理可得：

$$\dot{V} \leq -k_v(l_1 \|\dot{q}\|^2 + l_2 \|\text{sat}(\Delta x)\|^2) \quad (34)$$

其中， l_1 与 l_2 为与控制参数相关的变量。因此，如果 l_1 与 l_2 取值合适，可得 $\dot{V} \leq 0$ 。应用 LaSalle 不变集原理，最终可以得到，特征在视觉空间的当前位置趋于其期望位置： $x \rightarrow x_d$ 。