第二章 解耦控制

2.1 求一个串联补偿器使下述系统解耦，并使得解耦后的两个子系统的极点分别是 -1，-1和 -2，0。

$$\boldsymbol{G(s)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2}\\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s}\end{bmatrix}$$

解：

解耦系统极点分别为-1，-1 和-2，0，则有：

$$\boldsymbol{G_L(s)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{(s+1)^2} & 0\\ 0 & \frac{1}{s(s+2)}\end{bmatrix}$$

而

$$\boldsymbol{G^{-1}}(s)=\frac{1}{\frac{1}{s(s+1)}-\frac{1}{s(s+1)(s+2)}}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{-1}{s+2}\\ \frac{-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s+2 & -s\\ \frac{-(s+2)}{(s+1)} & \frac{s(s+2)}{s+1}\end{bmatrix}$$

于是串联补偿器设计为：

$$\boldsymbol{G_C}(s)=\ \boldsymbol{G^{-1}}(s)\boldsymbol{G_L}(s)=\begin{bmatrix}\frac{s+2}{(s+1)^2} & \frac{-1}{s+2}\\ \frac{-(s+2)}{(s+1)^3} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

2.2 对上题给定的$\boldsymbol{G}(s)$，计算解耦阶常数α_i和可解耦性矩阵$\boldsymbol{D_0}$，从而判断$\boldsymbol{G}(s)$的最小实现$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$是否可$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$解耦？

解：

根据课件定理 3-2，将$\boldsymbol{G(s)}$稍加整理：

$$\boldsymbol{G(s)}=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}s(s+1) & s(s+1)\\ (s+2) & (s+1)(s+2)\end{bmatrix}$$

此时，易得$\alpha_1=3-2=1$，$\alpha_2=3-2=1$

$$D_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1}\end{bmatrix}$$

此时，$\mathrm{rank}(D_0)=2$, D_0非奇异，系统最小实现$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$可$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$解耦

2.3 给定受控系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，求一个$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换，使闭环为积分型解耦系统；判断该闭环系统是否产生零极相消?

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & -2 & -3\\ 0 & 4 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\\ 0 & 7\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

解:

（1） 设计:

$c_1{}^{\tau}B=[2\ \ 24]\neq 0,\alpha_1=1$，　$c_2{}^{\tau}B=[10\ \ 20]\neq 0,\alpha_2=1$

$$D_0=\begin{bmatrix}2 & 24\\ 10 & 20\end{bmatrix},\quad \mathrm{rank}(D_0)=2,\text{因此可解耦。}$$

$$L=\begin{bmatrix}c_1{}^{\tau}A\\ c_2{}^{\tau}A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2 & -6\\ -4 & 0 & -10\end{bmatrix}$$

$$R=D_0{}^{-1}=\begin{bmatrix}-0.1 & 0.12\\ 0.05 & -0.01\end{bmatrix}$$

$$F=D_0{}^{-1}L=\begin{bmatrix}-0.68 & 0.2 & -0.6\\ 0.14 & -0.1 & -0.2\end{bmatrix}$$

（2） 校验略

反馈 $u=Rv-Fx$, 此时解耦阶常数之和为 2 ，而状态个数为 3， 因此存在零极点相消。

2.4 给定受控系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，检查是否存在$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换使系统解耦？若存在，解耦后的系统可配置几个极点？是否产生零极点相消?

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

解:

$$c_1{}^{\tau}B=[0\ \ 0],\ c_1{}^{\tau}AB=[1\ \ 1]\neq 0,\ \alpha_1=2$$

$$c_2{}^{\tau}B=[1\ \ 0],\ \alpha_2=1$$

$D_0=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$rank(D_0)=2$,且系统能控且能观，可解耦，系统可以配置

三个极点，不会产生零极点相消。

2.5 给定受控系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，求$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换使系统解耦，且保持所有极点不变。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&-3&-3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

解：

$$Det(sI-A)=\begin{vmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\1&3&s+3\end{vmatrix}=(s+1)^3=0$$

$$s_1=-1, s_2=-1, s_3=-1$$

$$c_1{}^{\tau}B=[1\ \ 0]\ ,\ \ \alpha_1=1$$

$$c_2{}^{\tau}B=[0\ \ 0]\ ,\ \ c_2{}^{\tau}AB=[0\ \ 1]\ ,\alpha_2=2$$

$$D_0=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, rank(D_0)=2,\text{ 可解耦。}$$

设

$$\psi_1^*(s)=s+1,\ \psi_2^*(s)=s^2+2s+1$$

$$L=\begin{bmatrix}c_1^{\tau}\psi_1^*(A)\\c_2^{\tau}\,\psi_2^*(A)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1^{\tau}(A+I)\\c_2^{\tau}(A^2+2A+I)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-2&-1\end{bmatrix}$$

$$R_0=D_0^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\qquad F=D_0^{-1}L=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&-2&-1\end{bmatrix}$$

核验：

$$A-BF=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&-1&2\end{bmatrix},\ BR=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$G_L(s)=C(sI-A+BF)^{-1}BR=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1}&0\\0&\dfrac{1}{s^2+2s+1}\end{bmatrix}$$

2.6 给定受控系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，设计$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换使系统解耦，且每个子系统的极点都配置在$-1$上。

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\3&0&0&2\\0&0&0&1\\0&-2&0&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

解：

$$c_1{}^{\tau}B=\ [0\ \ 0]\ ,\quad c_1{}^{\tau}AB=\ [1\ \ 0]\,,\alpha_1=2$$

$$c_2{}^{\tau}B=\ [0\ \ 0]\ ,\quad c_2{}^{\tau}AB=\ [0\ \ 1]\,,\alpha_2=2$$

$D_0=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$, $rank(D_0)=2$，可解耦。

四个极点都配置到-1 上，设 $\psi_1^*(s)=\psi_2^*(s)=s^2+2s+1$

$$L=\begin{bmatrix}c_1^{\tau}\psi_1^*(A)\\c_2^{\tau}\psi_2^*(A)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1^{\tau}(A^2+2A+I)\\c_2^{\tau}(A^2+2A+I)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&0&2\\0&-2&1&2\end{bmatrix}$$

$$R=D_0^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad F=D_0^{-1}L=\begin{bmatrix}4&2&0&2\\0&-2&1&2\end{bmatrix}$$

校验：

$$G_L(s)=C(sI-A+BF)^{-1}BR=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s^2+2s+1}&0\\0&\dfrac{1}{s^2+2s+1}\end{bmatrix}$$

2.7 给定系统$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{Bu}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}$，其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{1<m<n}$，

（a）在什么条件下，存在$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换，即 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{Rv}-\boldsymbol{Fx}$，使得$\boldsymbol{v}$到$\boldsymbol{y}$解耦？

（b）若条件满足，设计$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换使闭环传递函数的极点均为$-1$；

（c）写出变换后闭环系统的方程，验证$\boldsymbol{v}$到$\boldsymbol{y}$的传递函数阵。

解：

(a)

$$A=I$$

对于$y^{(\alpha_i)}$,如果$c_i^TB=0$,则$c_i^TA^{\alpha_i-1}B=0$，此时无法寻找到α_i

那么首先需要满足$c_i^TB\neq0$，即$\alpha_i=1$。

此时$D_0 = CB$，若要使系统存在{F,R}变换，则D_0可逆。

(b)

对于所满足的条件，设 $\psi_i^*(s) = s + 1$,

$$\mathrm{L} = 2\mathrm{C}, \qquad \mathrm{F} = D_0^{-1}L = 2(CB)^{-1}C\,, \quad R = D_0^{-1} = (CB)^{-1}$$

(c)略

2.8 给定受控系统$\Sigma(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，问：是否存在$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$变换使系统解耦或静态解耦?

如存在，求该变换。

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

解：

$$c_1{}^{\tau}B = [1\ \ 0]\,,\ \ \alpha_1 = 1$$

$$c_2{}^{\tau}B = [0\ \ 0]\,,\ \ c_2{}^{\tau}AB = [1\ \ 0]\,, \alpha_2 = 2$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \ rank(D_0) = 1, \text{不存在}\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}\text{变换使系统动态解耦}$$

系统能控矩阵$U_c = [B\ AB] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{rank}(U_c) = 3$, 因此系统可镇定。

但$det\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 0$, 因此也不可以被静态解耦。