第二章 抗外扰控制

本章内容

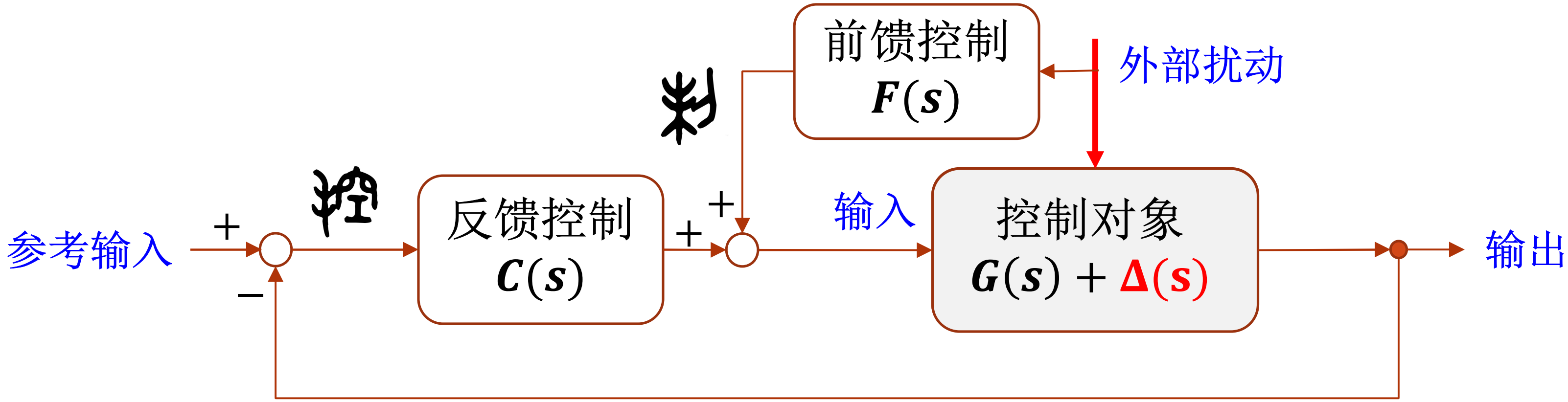
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 基本概念
- 控制系统中的外扰
- 对外扰的完全不变性
- 对外扰的静态不变性
- 鲁棒抗外扰控制器

基本概念

自动控制的核心概念

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



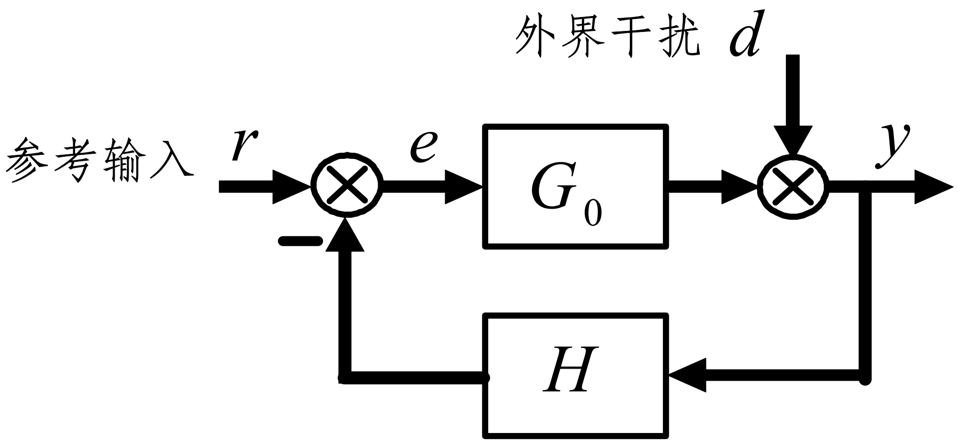
动态：通过建模分析对象的动态演化特征

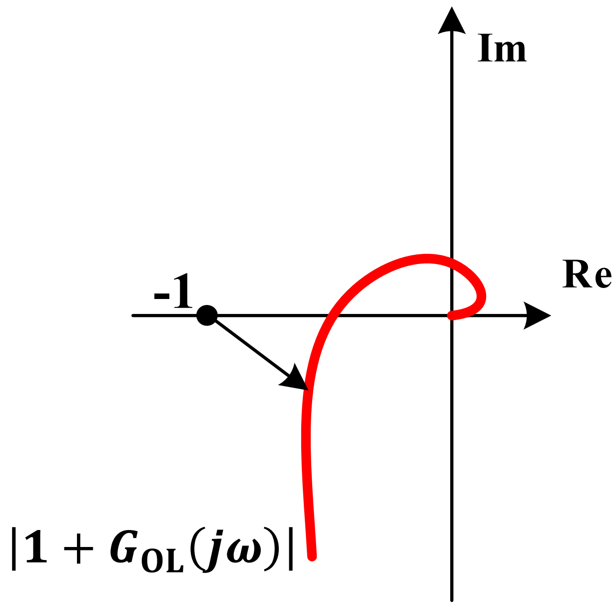
反馈：通过闭环控制改善对象的动态性能

不确定性：内部（模型误差）+ 外部（扰动信号）

前馈：根据扰动测量从输入端进行补偿

回顾：灵敏度函数





调节问题和干扰抑制问题都与灵敏度函数有关

$$S(s)=G_{r\to e}(s)=G_{d\to y}(s)=\frac{1}{1+G_0(s)H(s)}$$

理想目标：$|S(j\omega)|$对任何 ω 都足够小.

回顾：灵敏度函数

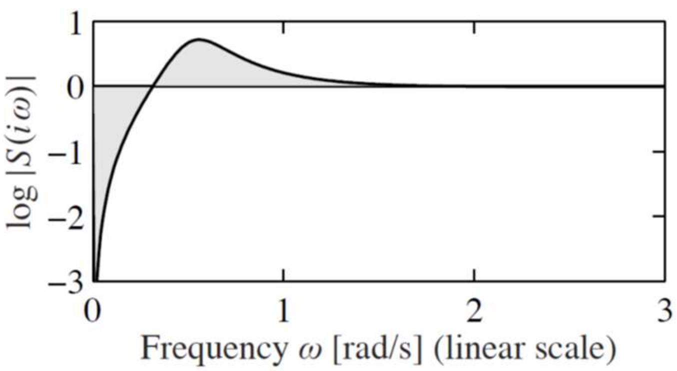
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

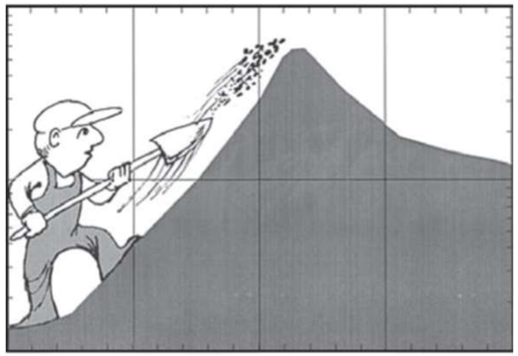
Bode 积分定理：若$\boldsymbol{G}_{\mathbf{OL}}(\boldsymbol{s})$没有右半复平面极点，则

$$\int_{0}^{\infty} \ln|S(j\omega)|\mathrm{d}\omega = 0$$

<u>现实约束</u>：只能牺牲其他频段，以保障特定频段性能.

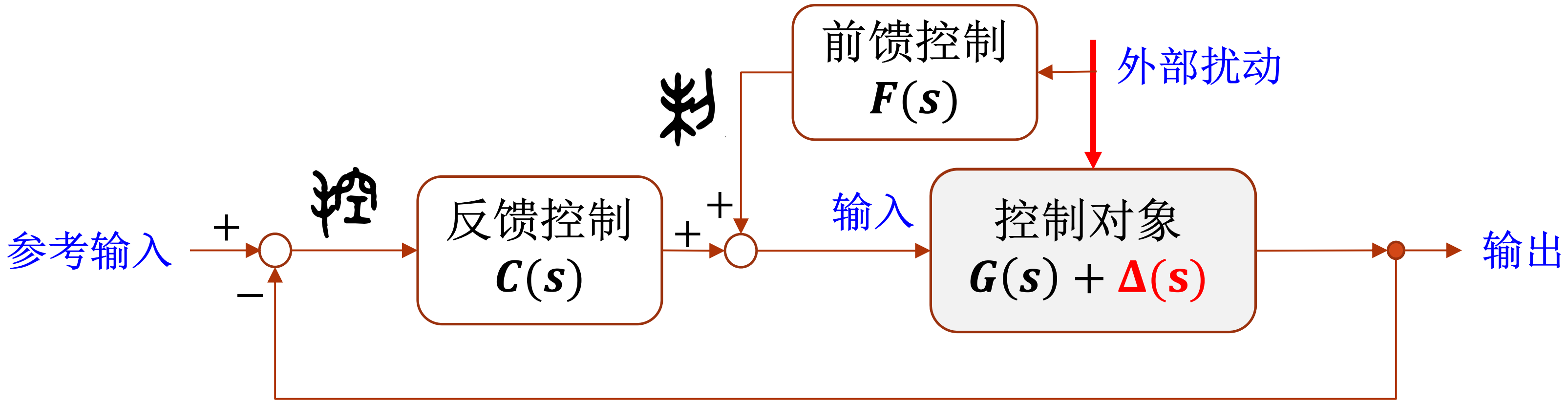
结论：仅靠反馈无法完全抑制干扰的影响！





解决方案：前馈控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



前馈：利用“双通道原理”从输入端进行补偿

优点：作用在输出变化之前，快速没有滞后

缺点：依赖于对象模型 → “粗调”

回顾：静态误差与系统型次

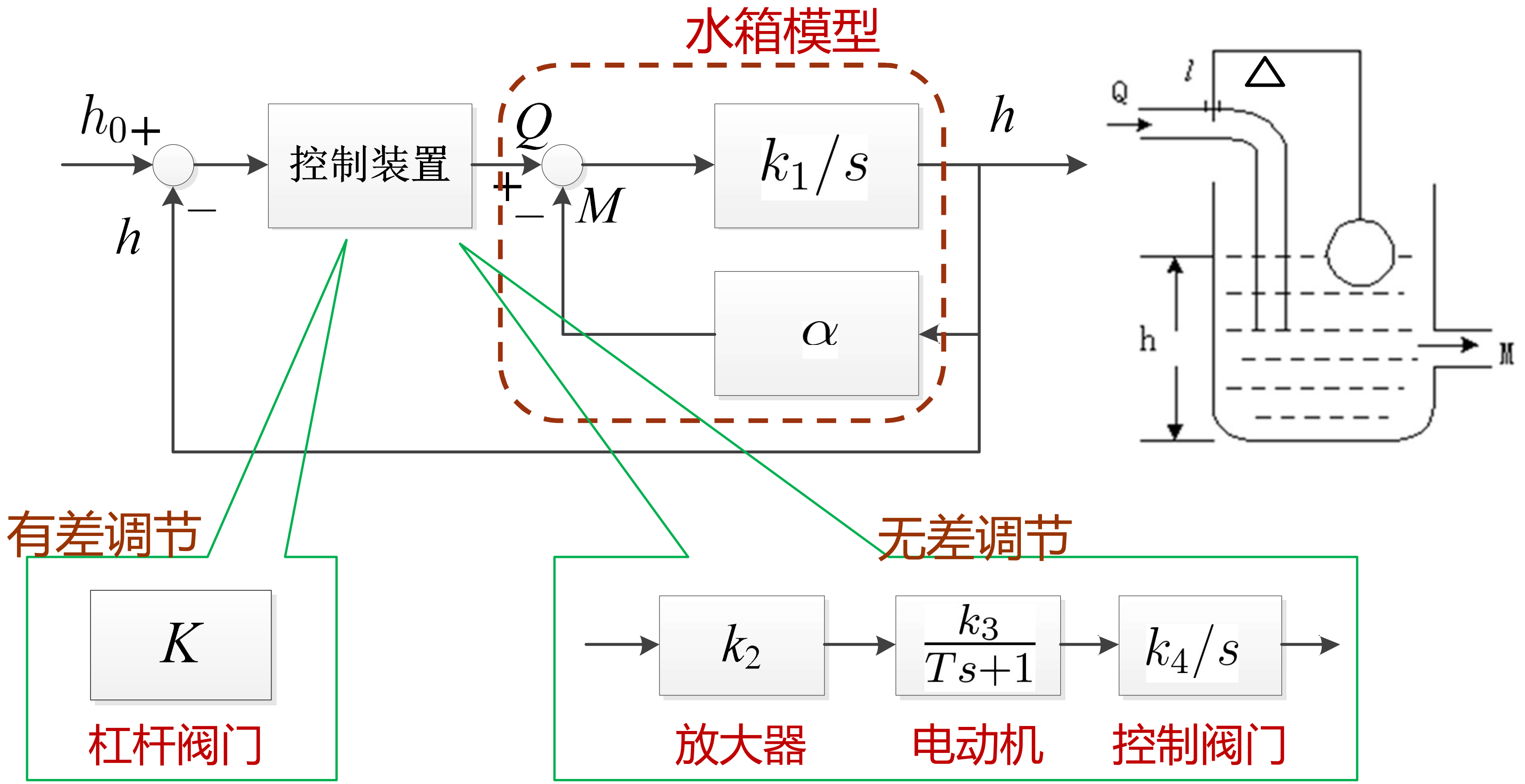
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$G_{OL}(s)=\frac{k(\tau_1 s+1)\cdots(\tau_m s+1)}{s^{\gamma}(T_1 s+1)\cdots(T_n s+1)}$$

输入	误差系数			静差		
	0 型	1 型	2 型	0 型	1 型	2 型
阶跃信号 $\frac{1}{s}$	k	∞	∞	$\frac{1}{1+k}$	0	0
斜坡信号 $\frac{1}{s^2}$	0	k	∞	∞	$\frac{1}{k}$	0
加速度信号 $\frac{1}{s^3}$	0	0	k	∞	∞	$\frac{1}{k}$

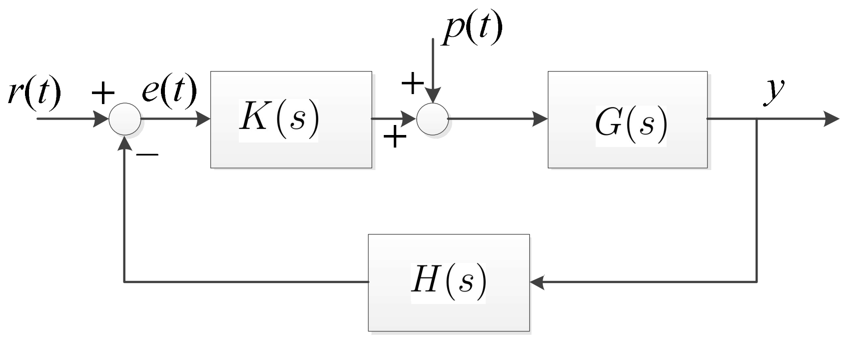
回顾：静态误差与系统型次

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



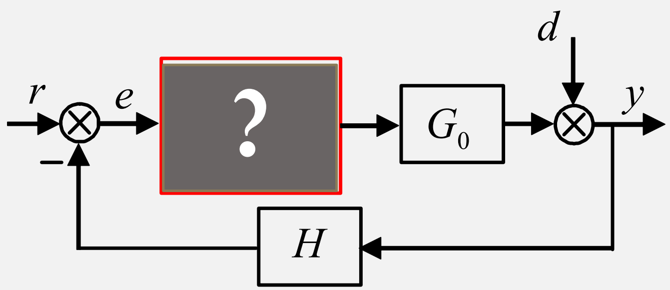
回顾：静态误差与系统型次

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



误差： $\boldsymbol{E(s) = G_{r\to e}(s)R(s) + G_{p\to e}(s)P(s)}$

只有$\boldsymbol{K(s)}$中含积分时，阶跃扰动引起的误差才可能为 **0**

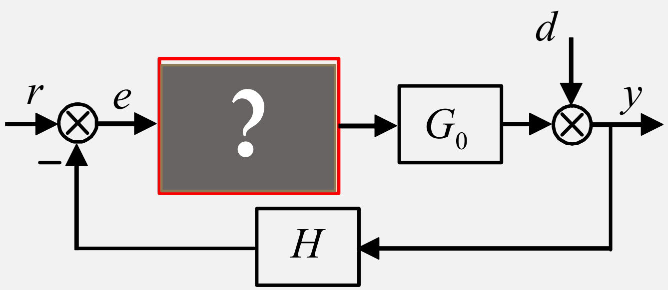


内模原理——控制器中应包含外扰或参考输入信号的特性

以其人之道，还治其人之身

鲁棒抗扰控制中的内模原理

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



内模原理——控制器中应包含外扰或参考输入信号的特性

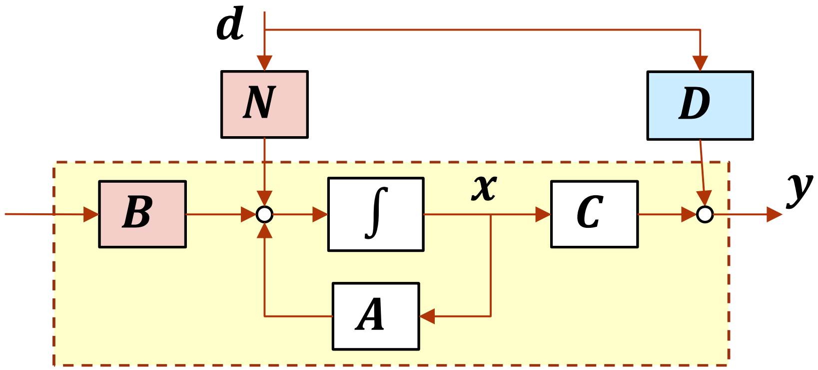
以其人之道，还治其人之身

鲁棒抗扰：只需要利用对象的特性，不需要模型精确的参数

控制系统中的外扰

带干扰和参考输入的状态空间模型

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



$$\Sigma_O:\begin{cases}\dot{x}=Ax+Bv+Nd\\ y=Cx+Dd\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dot{x}=Ax+\begin{bmatrix}N & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\\ v\end{bmatrix}\\ y=Cx+\begin{bmatrix}D & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\\ v\end{bmatrix}\end{cases}$$

其中 参考输入v和未知干扰d可以统一看做外扰信号$w=\begin{bmatrix}d\\ v\end{bmatrix}$.

存在干扰的调节器问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

希望跟踪误差$e = v - y$趋于零，且不受干扰影响:

$$\Sigma_O:\begin{cases}\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} N & \\ & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix} \\ y = Cx + \begin{bmatrix} D & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix}\end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases}\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} N & \\ & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix} \\ e = -Cx + \begin{bmatrix} -D & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix}\end{cases}}$$

调节器问题
（ $d = 0$ ）

$$\boxed{\begin{cases}\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} 0 & \\ & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix} \\ e = -Cx + \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix}\end{cases}}$$

干扰抑制问题
（ $v = 0$ ）

$$\boxed{\begin{cases}\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} N & \\ & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix} \\ e = -Cx + \begin{bmatrix} -D & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ v \end{bmatrix}\end{cases}}$$

存在干扰的调节器问题

统一模型: $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w} \end{cases}$ 其中$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}$统一称为外扰.

可以统一描述带干扰和参考输入的控制问题，其解为：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}}\boldsymbol{x}(\mathbf{0}) + \tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t});\ \ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}}\boldsymbol{x}(\mathbf{0}) + \tilde{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t})$$

其中强迫响应分量

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{\tau})}\boldsymbol{N}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{d}\boldsymbol{\tau},$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{D}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t}) + \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{\tau})}\boldsymbol{N}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{d}\boldsymbol{\tau}$$

通常随外扰$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t})$【包括干扰和参考输入】变化.

对外扰的不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

<u>对状态（输出）的完全不变性</u>：

状态（或输出）强迫响应完全为零，不受扰动影响

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0} \quad \left(\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0} \right)，且\ \tilde{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) \equiv \mathbf{0}\ \ (\tilde{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t}) \equiv \mathbf{0})$$

<u>对状态（输出）的静态不变性</u>：

状态（或输出）响应的稳态部分为零，不受扰动影响

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0} \quad \left(\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \mathbf{0} \right)$$

对外扰的完全不变性

状态对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

当控制输入为零（$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$）时，根据状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{N}\boldsymbol{w}$$

的Laplace变换可得：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}}\boldsymbol{x}(\mathbf{0})+\boldsymbol{\mathcal{L}}^{-1}\left[(\boldsymbol{s}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{w}\right]$$

易见状态对外扰完全不变的充要条件为：

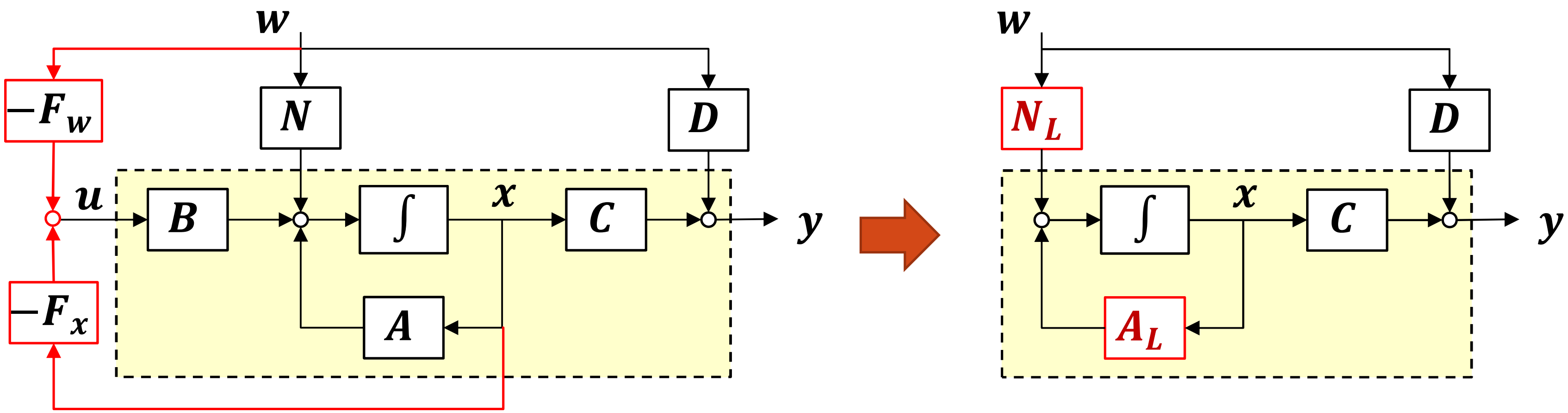
1）系统稳定，即 $\boldsymbol{A}$ 为Hurwitz矩阵；

2）$(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{N}=0$，即 $\boldsymbol{N}=0$.

当$\boldsymbol{N}\neq 0$或开环系统不稳定时，如何使状态对外扰不变？

状态对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



采用控制律 $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}_w\boldsymbol{w}$，得到闭环系统

$$\boldsymbol{\Sigma}_L:\quad \dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x)\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{N} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_w)\boldsymbol{w}$$

- 状态反馈 $\boldsymbol{F}_x$ 改造 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_L = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x$，保证闭环稳定;
- 扰动顺馈 $\boldsymbol{F}_w$改造 $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}_L = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_w$，阻断扰动影响.

状态对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理 基于控制律 $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}_w\boldsymbol{w}$ 可实现状态对外扰完全不变的充要条件是:

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \text{ 可镇定，且 } \operatorname{rank} \boldsymbol{B} = \operatorname{rank} [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}].$$

证明：$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$可镇定保证存在$\boldsymbol{F}_x$使得$\boldsymbol{A}_L = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x$稳定。

欲使状态对外扰完全不变，须 $\boldsymbol{N}_L = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_w = \boldsymbol{0}$,

即$\boldsymbol{N}$的列向量可由$\boldsymbol{B}$的列向量线性表示，这等价于

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{B} = \operatorname{rank} [\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}].$$

这意味着扰动作用的方向不能超出控制作用的范围.

输出对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考虑外扰对输出的影响（$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$），由状态空间方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{N}\boldsymbol{w},\ \ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

的Laplace变换可得：

$$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{C}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}}\boldsymbol{x}(\mathbf{0})+\mathcal{L}^{-1}\left[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{w}\right]$$

易见输出 $\boldsymbol{y}$ 完全不受扰动 $\boldsymbol{w}$ 影响的充要条件为：

1）系统稳定，即 $\boldsymbol{A}$ 为Hurwitz矩阵；

2）$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{N}=0.$

输出对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

可以证明

$$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{N}=\frac{p_0(s)\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{N}+p_1(s)\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{N}+\cdots+p_{n-1}(s)\boldsymbol{C}\boldsymbol{N}}{s^n+\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n}$$

其中 $p_k(s)$ 是幂次为 k 的首一多项式，分母为特征多项式。

故有

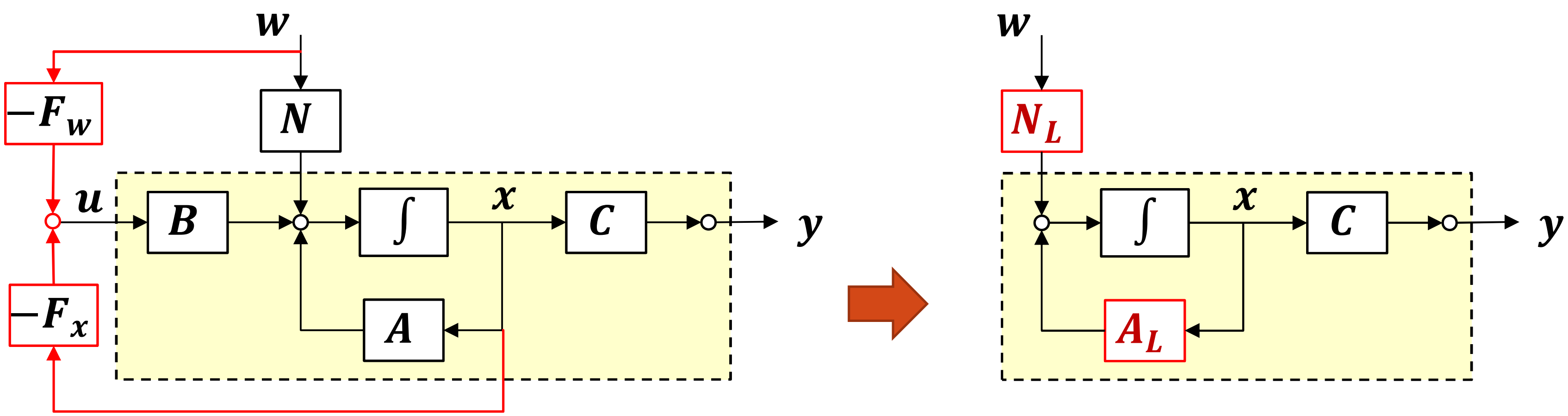
$$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{N}=0 \ \ (k=0,1,\cdots,n-1)$$

即 $\boldsymbol{C}[\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{N} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{N}]=0$

上述条件意味着 $\boldsymbol{w}$ 可控的状态是输出 $\boldsymbol{y}$ 不可观测的。

输出对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



采用控制律 $u = -F_x x - F_w w$，得到闭环系统

$$\Sigma_L:\quad \dot{x} = (A - BF_x)x + (N - BF_w)w$$

- 反馈 F_x 改造 $A \to A_L = A - BF_x$，保证闭环稳定;
- 顺馈 F_w改造 $N \to N_L = N - BF_w$，阻断扰动对输出影响.

输出对外扰的完全不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理 基于控制律 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}_w\boldsymbol{w}$ 可实现输出对外扰完全不变的充要条件是：

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\text{ 可镇定，且}\boldsymbol{C}[\boldsymbol{N}_L\quad \boldsymbol{A}_L\boldsymbol{N}_L\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}_L^{n-1}\boldsymbol{N}_L]=0,$$

其中 $\boldsymbol{A}_L=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x$，$\boldsymbol{N}_L=\boldsymbol{N}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_w$.

具体实现方案不唯一，可以

- 仅靠顺馈（$\boldsymbol{F}_x=\boldsymbol{0}$）：$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{N}_L\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{N}_L\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{N}_L]=0$
- 仅靠反馈（$\boldsymbol{F}_w=\boldsymbol{0}$）：$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{N}\quad \boldsymbol{A}_L\boldsymbol{N}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}_L^{n-1}\boldsymbol{N}]=0$

思考：如果 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{w}$ 且 $\boldsymbol{D}\neq\boldsymbol{0}$，是否能够通过反馈+顺馈实现输出对外扰完全不变？

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

分析如下受控系统状态和输出对外扰的完全不变性，并设计控制方案改善对外扰的完全不变性。

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases}$$

(1) 状态对外扰不具有完全不变性，且无法改变

$$\mathbf{rank}\,\boldsymbol{B} \neq \mathbf{rank}[\boldsymbol{B} \quad \boldsymbol{N}]$$

(2) 输出对外扰不具有完全不变性（← 可以改善）

$$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{N} \quad \boldsymbol{AN}] = [\mathbf{0} \quad \mathbf{150}] \neq \mathbf{0}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考虑状态反馈 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}$, 由于 $\boldsymbol{CN}=\boldsymbol{0}$，因此输出对外扰完全不变等价于：

$$\boldsymbol{A}_L=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF}_x \text{ 渐进稳定，且 } \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF}_x)\boldsymbol{N}=\boldsymbol{0}$$

设 $\boldsymbol{F}_x=[\boldsymbol{f}_1 \quad \boldsymbol{f}_2]$, 可得闭环特征多项式：

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BF}_x)=s^2+(3+f_2)s+(20+5f_1+3f_2)$$

根据劳斯判据，闭环系统稳定要求：

$$3+f_2>0,\ 20+5f_1+3f_2>0.$$

示例

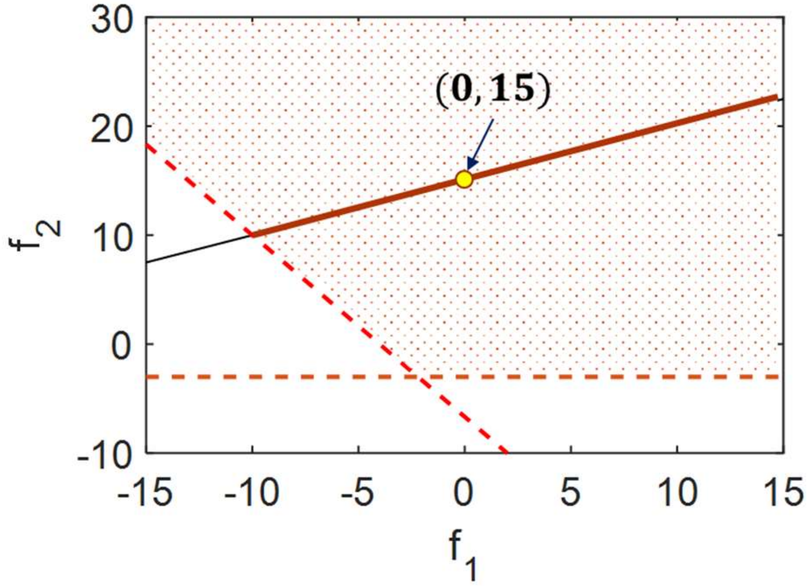
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

进一步，由条件

$$C(A-BF_x)N$$
$$=150+5f_1-10f_2=0$$

可选 $f_1=0$，$f_2=15$，

即 $F_x=[0 \quad 15]$.



可检验基于上述反馈控制方案输出对外扰完全不变。

思考：能否仅利用顺馈实现输出对外扰完全不变?

对外扰的静态不变性

外模型

常见的确定性外扰$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t})$或参考输入信号$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})$可由线性模型描述：

$$\dot{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t})$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}).$$

由于跟踪和干扰抑制问题数学上相同，可以将外扰和参考输入合称为外部信号，合并模型如下：

$$\dot{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t}),$$

其中 $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{t}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t}) \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T} \end{bmatrix}$.

外模型

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

常见信号模型（以外扰为例）： $\dot{\boldsymbol{d}}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{t})$

阶跃函数: $\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{0} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{d}(\boldsymbol{t})\equiv\boldsymbol{d}(\mathbf{0})$

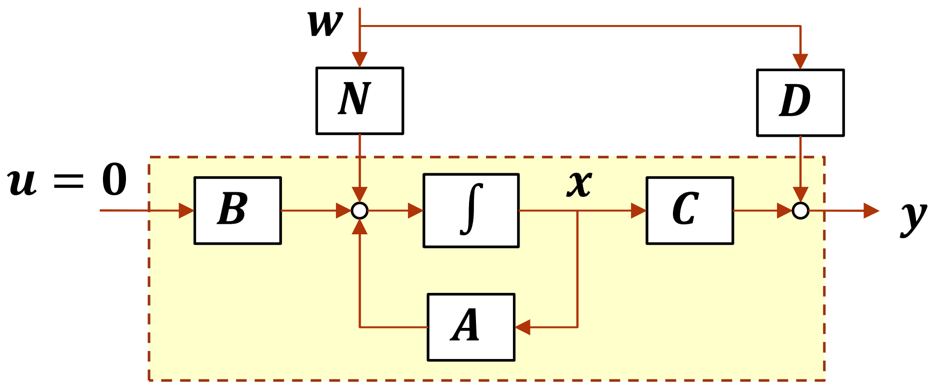
斜坡函数: $\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\boldsymbol{d}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{d}_{\mathbf{1}}(\mathbf{0})+\boldsymbol{d}_{\mathbf{2}}(\mathbf{0})\boldsymbol{t}\\ \boldsymbol{d}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{d}_{\mathbf{2}}(\mathbf{0})\end{cases}$

正余弦函数: $\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{\omega}\\ -\boldsymbol{\omega} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\Rightarrow$

$$\begin{cases}\boldsymbol{d}_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{d}_{\mathbf{1}}(\mathbf{0})\cos\boldsymbol{\omega t}+\boldsymbol{d}_{\mathbf{2}}(\mathbf{0})\sin\boldsymbol{\omega t}\\ \boldsymbol{d}_{\mathbf{2}}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{d}_{\mathbf{2}}(\mathbf{0})\cos\boldsymbol{\omega t}-\boldsymbol{d}_{\mathbf{1}}(\mathbf{0})\sin\boldsymbol{\omega t}\end{cases}$$

输出对外扰的静态不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



$$\Sigma_O:\begin{cases}\dot{x} = Ax + Nw\\ y = Cx + Dw\end{cases}$$

静态不变性：输出的稳态值不受扰动影响

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

状态强迫响应 $\tilde{x}(t)$ 可不为零.

注：$D \neq 0$时，无法实现对外扰完全不变，但可以针对已知外扰模式实现静态不变.

外扰引起的强制解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理 外扰 $\boldsymbol{w}$ 引起的状态稳态强迫响应可以表示为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t)，即 \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t),$$

当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 为稳定矩阵，且如下关于$\boldsymbol{P}$的矩阵方程有解：

$$\boldsymbol{AP} - \boldsymbol{PM} = \boldsymbol{N}.$$

注：Sylvester 矩阵方程 $\boldsymbol{AP} - \boldsymbol{PM} = \boldsymbol{N}$ 有唯一解矩阵$\boldsymbol{P}$ 的充要条件是矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{M}$没有相同特征值。

外扰引起的强制解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

证明：（充分性）若$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$且方程有解，则

$\boxed{N = AP - PM}$

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}(AP - PM)\boldsymbol{w}(\tau)d\tau$$

$$= e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}AP\boldsymbol{w}(\tau)d\tau$$

$\boxed{\dot{w}(\tau) = Mw(\tau)}$

$$-\left\{\left[e^{A(t-\tau)}P\boldsymbol{w}(\tau)\right]\Big|_{t_0}^{t} + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}AP\boldsymbol{w}(\tau)d\tau\right\}$$

$$= -P\boldsymbol{w}(t) + e^{A(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0) + e^{A(t-t_0)}P\boldsymbol{w}(t_0)$$

当A渐进稳定时，可见$\lim\limits_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t) = -P\boldsymbol{w}(t)$。

外扰引起的强制解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

（必要性）令$\boldsymbol{u}=\mathbf{0}$，若外扰$\boldsymbol{w}$引起的状态的稳态强制解为 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)=-\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t)$，将其代入状态方程得：

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{N}\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}+\boldsymbol{N}\boldsymbol{w}$$

另一方面，直接对两边求导得 $\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}=-\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{w}}=-\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}\boldsymbol{w}$.

两式联立，并由$\boldsymbol{w}$的任意性可知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}$成立。根据前面推导：

$$\boldsymbol{x}(t)=-\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t)+e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}[\boldsymbol{x}(t_0)+\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t_0)]\rightarrow-\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t),$$

易见后项必趋于零，因此 $\boldsymbol{A}$ 必然渐近稳定。

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

求如下系统外扰产生的强迫响应 $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$.

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{w} \\ \dot{\boldsymbol{w}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{w}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

解：$\boldsymbol{A}$特征值$\{-\mathbf{1},\ -\mathbf{2}\}$和$\boldsymbol{M}$特征值$\{\pm\boldsymbol{j}\}$相异，故可解方程

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

强迫响应为

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}(t) = -\boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{M}t}\boldsymbol{w}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ -\cos t \end{bmatrix}$$

实现静态不变性的条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

若希望稳态输出 $\tilde{\boldsymbol{y}}$不受外扰 $\boldsymbol{w}$影响，即 $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w} = 0$

则根据前述结论 $\tilde{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{P}\boldsymbol{w}$，得 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$。

定理　对于系统$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w}$，若 $\boldsymbol{A}$ 渐近稳定且下述矩阵方程组有解

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}\ (\text{装置条件}),\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}\ (\text{输出条件}),$$

则输出对外扰静态不变.

实现静态不变性的条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理　对于系统$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{w}$，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w}$，若 $\boldsymbol{A}$ 渐近稳定且下述矩阵方程组有解

$$\boldsymbol{AP} - \boldsymbol{PM} = \boldsymbol{N}\ (\text{装置条件}),\quad \boldsymbol{CP} = \boldsymbol{D}\ (\text{输出条件}),$$

则输出对外扰静态不变.

上述矩阵方程组是超定方程

- 若外扰模型$\boldsymbol{M}$没有负实部特征值，则$\boldsymbol{A}$渐近稳定时，方程 $\boldsymbol{AP} - \boldsymbol{PM} = \boldsymbol{N}$ 一定有唯一解$\boldsymbol{P}$.
- 若解 $\boldsymbol{P}$ 不满足$\boldsymbol{CP} = \boldsymbol{D}$，可通过反馈+顺馈改造 $\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{N}$.

抗干扰控制问题

考虑如下系统：

$$\Sigma_O: \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu} + \boldsymbol{Nw} \\ \dot{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{Mw} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Dw} \end{cases}$$

若状态和外扰可直接测量，则可以通过控制律

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}_w\boldsymbol{w}$$

改善系统的抗干扰性能（反馈+顺馈）.

问题：设计控制律，使输出稳态无差，即 $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{0}$.

抗干扰控制设计

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

根据前面讨论，实现稳态无差的充要条件是闭环系统渐近稳定，且存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 满足方程组：

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x)\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_w,\quad \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}.$$

定理：闭环系统输出稳态无差的充要条件是：$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$可镇定，且存在矩阵$\boldsymbol{P}$、$\boldsymbol{Q}$满足：

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}.$$

反馈控制律的设计：

（1）选择$\boldsymbol{F}_x$使得$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x$为Hurwitz矩阵；

（2）利用上述方程解，计算 $\boldsymbol{F}_w=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{P}$.

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

有外扰的受控系统如下，设计控制律$\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x}-\boldsymbol{F}_w\boldsymbol{w}$，使闭环极点为 -1，-1，且实现输出稳态无差.

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\boldsymbol{w}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \dot{\boldsymbol{w}}=0\\ \boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\boldsymbol{w}\end{cases}$$

解：容易验证$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$完全可控，故可以设计状态反馈矩阵$\boldsymbol{F}_x$ 配置闭环极点为 -1，-1:

$$\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x)=(s+1)^2 \ \Rightarrow\ \boldsymbol{F}_x=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

示例

根据条件

$$\boldsymbol{AP}-\boldsymbol{PM}+\boldsymbol{BQ}=\boldsymbol{N},\qquad \boldsymbol{CP}=\boldsymbol{D}$$

求矩阵$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{Q}$，得到

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}，\ \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

最后得到顺馈补偿矩阵：

$$\boldsymbol{F_w}=\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{F_x}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}.$$

常值扰动下的鲁棒抗干扰控制器

抗干扰控制的鲁棒性

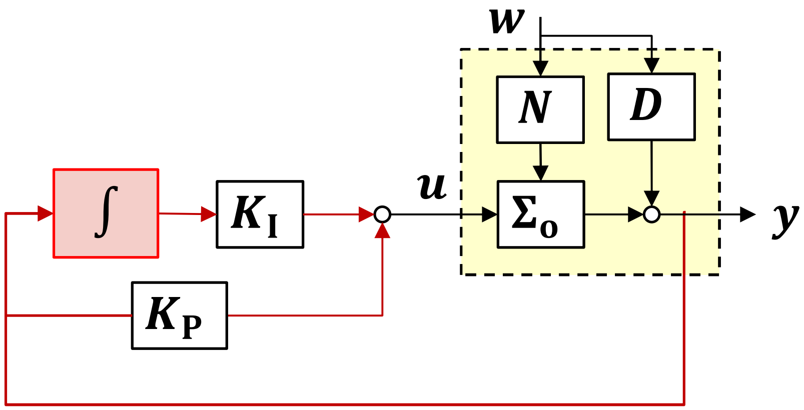
- 鲁棒性（Robustness）：系统自身或环境发生变化时，系统性能仍然保持不变或者变化很小的能力。
- 前述抗干扰控制器实现静态无差需要控制器和受控系统的“精确配合”(矩阵方程有解)，因此对系统参数的变化不具有鲁棒性。

问题：是否可能改进控制器设计，使得不论干扰为何种形式、不论系统参数如何变化，系统仍保持静态无差?

若否，是否能够针对特定干扰设计鲁棒抗干扰控制器?

PI 控制的启发

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

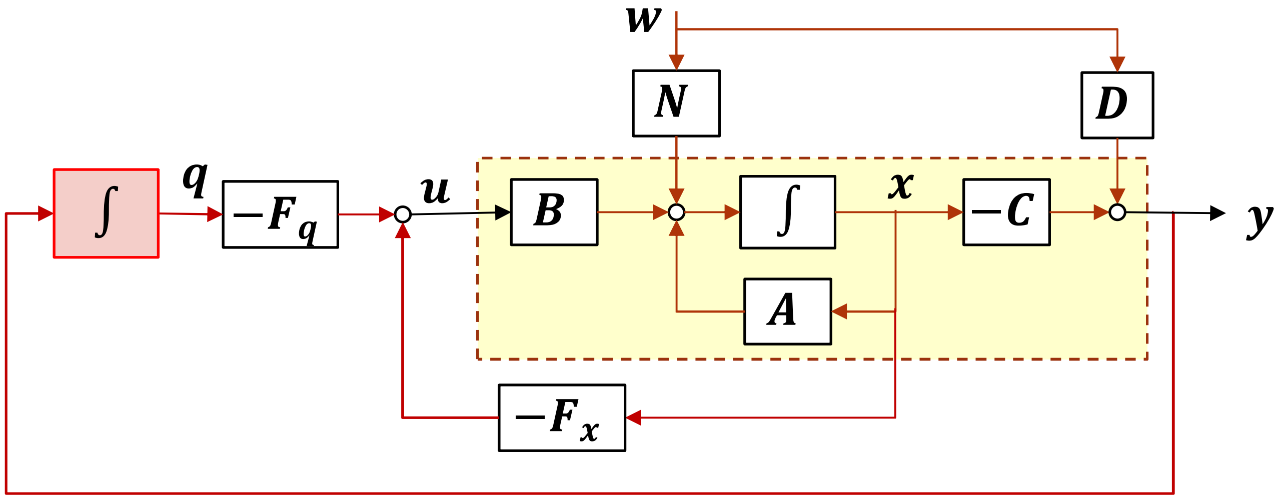


在经典的单变量控制理论中，为使闭环系统对常值扰动静态无差，通常采用PI控制．只要y不为零，积分器输出就会随之增长或减少，直到将 y “拉回零”．

系统参数发生变化时，只要系统仍然稳定，积分环节将保证系统静态无差，从而使后者对参数变化具有鲁棒性．

PI 控制的启发

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



对于多变量系统，仿照上述基于 PI 抗干扰控制的思想，在每个输出分量后面串入一个积分器，共 m 个积分器。

$$\Sigma_O: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Nw \\ \dot{w} = 0 \\ y = Cx + Dw \end{cases}$$

$$u = -F_x x - F_w w$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = y \\ u = -F_x x - F_q q \end{cases}$$

PI控制的启发

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

增广系统方程：$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\boldsymbol{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = [\boldsymbol{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{w} \end{cases}$

代入 $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}_q\boldsymbol{q}$，得到闭环系统$\Sigma_L$的方程：

$$\boldsymbol{\Sigma}_L: \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_L = \boldsymbol{A}_L\boldsymbol{x}_L + \boldsymbol{N}_L\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}_L\boldsymbol{x}_L + \boldsymbol{D}_L\boldsymbol{w} \end{cases}, \quad 其中\ \boldsymbol{x}_L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix}$$

系数矩阵 $\boldsymbol{A}_L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_q \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{N}_L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{D} \end{bmatrix},$

$$\boldsymbol{C}_L = [\boldsymbol{C} \quad 0], \qquad \boldsymbol{D}_L = \boldsymbol{D}.$$

输出静态无差条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：采用上述抗干扰控制器实现输出静态无差的充要条件是闭环系统 $\boldsymbol{A}_L$ 渐近稳定.

证：由前面讨论可知，输出静态无差当且仅当存在矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}_L$ （$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{0}$）和 $\boldsymbol{C}_L\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}_L$：

$$\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}_L \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_q\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N}\\ \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_L=[\boldsymbol{C}\quad 0],\quad \boldsymbol{D}_L=\boldsymbol{D}$$

由于等式 $\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}_L$ 的第二行就是 $\boldsymbol{C}_L\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}_L$，因此只需存在 $\boldsymbol{P}$ 满足 $\boldsymbol{A}_L\boldsymbol{P}=\boldsymbol{N}_L$ 即可. 而 $\boldsymbol{A}_L$ 渐稳时必可逆，故方程必存在解 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{N}_L$.

输出静态无差条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

根据上述定理，为实现闭环系统输出静态无差，控制的设计转化为如下问题：

寻找 $\boldsymbol{F}_C = [\boldsymbol{F}_x \quad \boldsymbol{F}_q]$，使得$\boldsymbol{A}_L$为渐近稳定矩阵

$$\boldsymbol{A}_L = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{F}_C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_x & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_q \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}.$$

若原系统可控，则增广系统 $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ 的能控性矩阵为：

$$\widetilde{\boldsymbol{Q}}_C = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{A}^{n+m-1}\boldsymbol{B} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n+m-2}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} \\ 0 & \boldsymbol{C}\boldsymbol{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{I} & 0 \end{bmatrix}$$

其中$\boldsymbol{Q}_C$是原系统$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$的能控性矩阵.

鲁棒抗干扰控制器

结论：系统存在鲁棒抗干扰控制器且可任意配置极点的充要条件是 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B})$完全可控，且

$$\mathbf{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\boldsymbol{n}+\boldsymbol{m}\ (\text{行满秩}).$$

- 不难看出，上述条件要求矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数不少于矩阵$\boldsymbol{C}$的行数，即控制量个数不少于被调量个数。

思考：$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的秩应满足什么要求？物理意义是什么？

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

为如下系统设计鲁棒抗干扰控制器，使闭环极点为 $-1, -1, -2, -2$，其中扰动 $\boldsymbol{w}$ 是常值.

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{w}$$

解：容易检验 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$ 完全可控，且

$$\mathbf{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} = 4 = \boldsymbol{n} + \boldsymbol{m}$$

因此存在反馈控制律实现鲁棒抗干扰控制.

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

设计鲁棒抗干扰控制器：

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{y}$$

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{F}_x\boldsymbol{x} - \boldsymbol{F}_q\boldsymbol{q}$$

根据期望闭环极点$\{-\mathbf{1},-\mathbf{1},-\mathbf{2},-\mathbf{2}\}$解极点配置方程：

$$\det\left(\boldsymbol{sI} - \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BF}_x & -\boldsymbol{BF}_q \\ \boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}\right) = (\boldsymbol{s}+\mathbf{1})^2(\boldsymbol{s}+\mathbf{2})^2$$

可得（解不唯一）

$$\boldsymbol{F}_x = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{F}_q = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

一般扰动下的鲁棒抗干扰控制器

PI控制的推广

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 常值扰动下的鲁棒抗干扰控制器采用积分器作补偿器，而积分器描述了常值扰动模型，即$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{s}^{-1}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{0})$。

问题：如果干扰不是常值，所设计的鲁棒抗干扰控制器能保持输出稳态无差吗?

$$\boldsymbol{\Sigma_O}:\quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}+\boldsymbol{Nw} \\ \dot{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{Mw} \\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}+\boldsymbol{Dw} \end{cases}$$

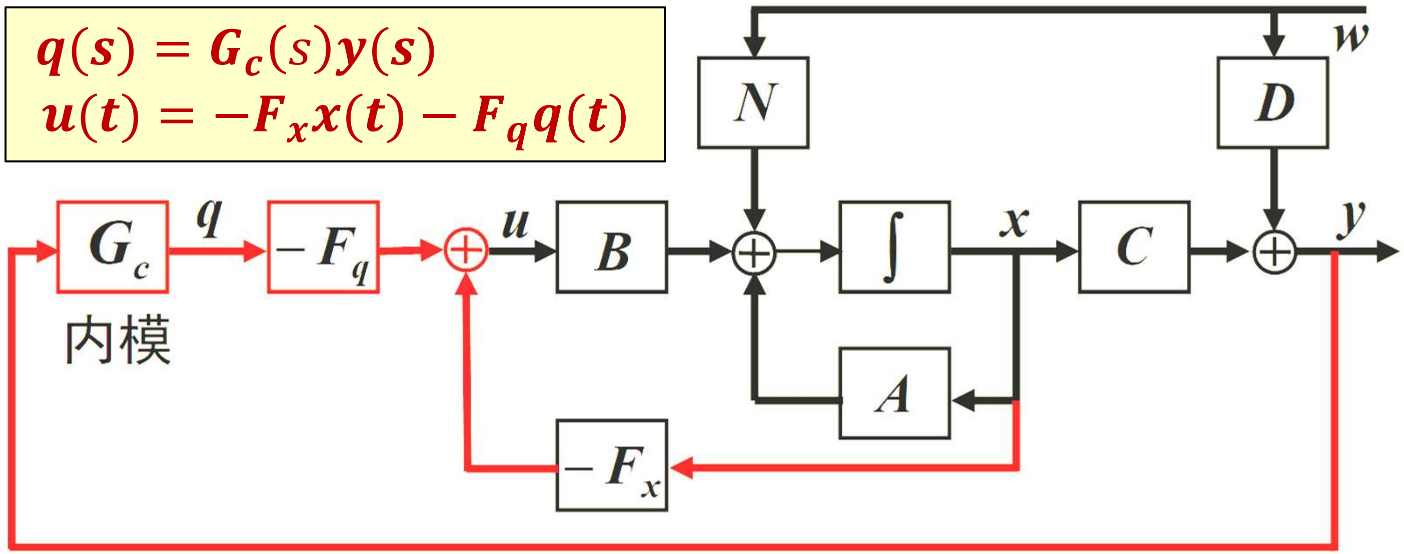
鲁棒抗干扰控制器如何根据扰动模型设计?

鲁棒抗干扰控制器

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$q(s) = G_c(s)y(s)$

$u(t) = -F_x x(t) - F_q q(t)$



$$sx(s) = Ax(s) + Nw(s) + B\left[-F_x x(s) - F_q q(s)\right]$$

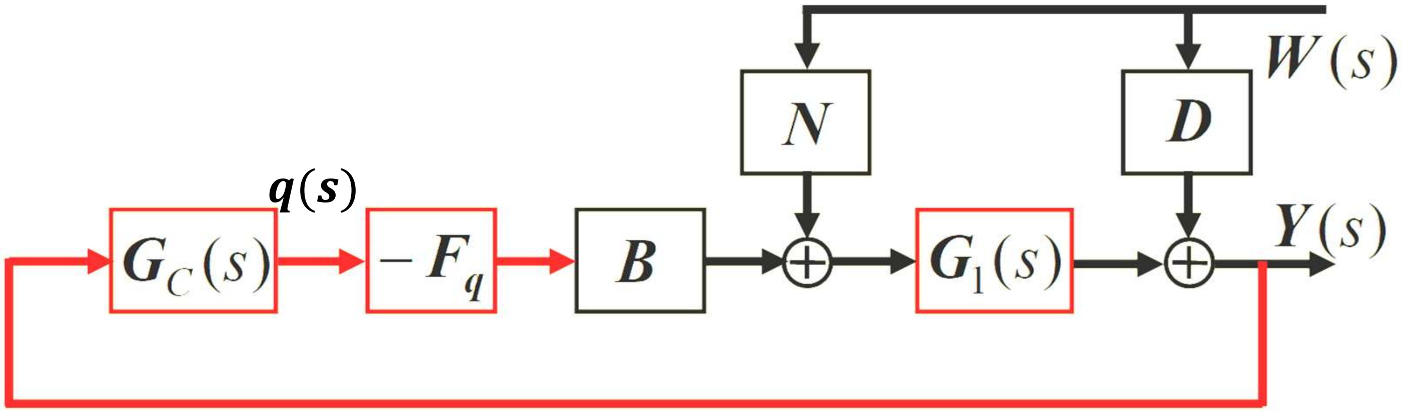
$$\Rightarrow \quad Cx(s) = G_1(s)\left[Nw(s) - BF_q q(s)\right]$$

其中闭环传递函数 $G_1(s) = C(sI - A + BF_x)^{-1} = \dfrac{R(s)}{\psi(s)}$

鲁棒抗干扰控制器

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

根据 $Cx(s) = G_1(s)\left[Nw(s) - BF_q q(s)\right]$ 画出等价框图：



并得到输出与干扰信号的传递关系：

$$y(s) = [I + G_1(s)BF_q G_C(s)]^{-1}[D + G_1(s)N]w(s)$$

如何选择适当的$G_C(s)$阻断干扰对输出的影响？

鲁棒抗干扰控制器

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

根据外扰模型：$\dot{\boldsymbol{w}}(t)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{w}(t)$，可以得到频域表示

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{s})=(\boldsymbol{s}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})^{-1}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{0}).$$

记 $(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})^{-1}=\frac{\boldsymbol{P}(s)}{\varphi(s)}$，其中$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{s})$是多项式矩阵，则

$$\boldsymbol{y}(s)=[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{s})]^{-1}[\boldsymbol{D}+\boldsymbol{G}_{1}(s)\boldsymbol{N}]\frac{\boldsymbol{P}(s)}{\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{0})$$

思路：设计$\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{s})$产生零点与外扰极点$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{s})$对消.

内模原理

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

选择 $G_C(s)=\dfrac{Q(s)}{\varphi(s)}$，其中$Q(s)$为待定多项式矩阵

$$G_2(s)=[I+G_1(s)BF_qG_C(s)]^{-1}$$

$$=\left[I+\frac{R(s)}{\psi(s)}BF_q\frac{Q(s)}{\varphi(s)}\right]^{-1}=\psi(s)\varphi(s)\,\frac{T(s)}{\gamma(s)}$$

其中 $\dfrac{T(s)}{\gamma(s)}=[\psi(s)\varphi(s)I+R(s)BF_qQ(s)]^{-1}.$

综上可实现期望的零极对消：

$$y(s)=\varphi(s)\frac{T(s)}{\gamma(s)}[D\psi(s)+R(s)N]\frac{P(s)}{\varphi(s)}w(0).$$

内模原理

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$y(s) = \varphi(s)\frac{T(s)}{\gamma(s)}[D\psi(s) + R(s)N]\frac{P(s)}{\varphi(s)}w(0)$$

- 外扰的内模嵌在$w \rightarrow y$的反馈通道里，使得它的极点多项式$\varphi(s)$变成闭环的零点多项式，从而与外扰极点多项式$\varphi(s)$对消。
- 可通过反馈F_x将$\gamma(s)$的根配置在左半开平面，因此$\lim\limits_{t\rightarrow 0} y(t) = 0$。只要极点配置离虚轴足够远，所得闭环系统的输出稳态无差性对系统参数变化就具有鲁棒性。

内模原理

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理　在外扰至误差输出的反馈通道中，对每个误差输出分量都串入外扰的内模，只要闭环渐近稳定，则闭环实现输出稳态无差。