第三章 最优控制

3.1 设离散时间系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k), \qquad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

针对优化目标

$$\mathrm{J} = \frac{1}{2} x_1^2(2) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{1} u^2(k)$$

设计最优控制$u(0), u(1)$使 J 最小.

解 1：

$$J[x(1), u(1)] = \frac{1}{2}[x_1(1) + x_2(1) + u(1)]^2 + \frac{1}{2}u^2(1) + J[x(0), u(0)]$$

$$= \frac{1}{2}\{[x_1(1) + x_2(1) + u(1)]^2 + u^2(1)\} + J[x(0), u(0)]$$

当$u(1) = -\frac{1}{2}[x_1(1) + x_2(1)]$时,

$$J^*[x(1), u(1)] = \frac{1}{4}[x_1(1) + x_2(1)]^2 + J[x(0), u(0)]$$

$$J[x(0), u(0)] = \frac{1}{4}[2 + u(0) + 1 + u(0)]^2 + \frac{1}{2}u(0)^2$$

当$u(0) = -1$时，

$$J^*[x(0), u(0)] = \frac{3}{4}$$

则$u(1) = -\frac{1}{2}[x_1(1) + x_2(1)] = -\frac{1}{2}$，$u(0) = -1$。

解 2：

3.1

解: $\varphi = \frac{1}{2}x_1^2(2)$. $L = \frac{1}{2}u^2(k)$ $f = \begin{bmatrix} x_1(k)+x_2(k)+u(k) \\ x_1(k)+u(k) \end{bmatrix}$.

$H(k) = L+\lambda^T f = \frac{1}{2}u^2(k)+[\lambda_1(k+1) \quad \lambda_2(k+1)]\cdot\begin{bmatrix} x_1(k)+x_2(k)+u(k) \\ x_1(k)+u(k) \end{bmatrix}$

控制条件: $\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = u(k)+\lambda_1(k+1)+\lambda_2(k+1) = 0$.

正则方程: $x_1(k+1) = x_1(k)+x_2(k)+u(k)$

$x_2(k+1) = x_1(k)+u(k)$.

$x_1(0)=1$. $x_2(0)=1$. $N=2$.

$\lambda_1(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x_1(k)} = \lambda_1(k+1)+\lambda_2(k+1)$

$\lambda_2(k) = \partial H(k)/\partial x_2(k) = \lambda_1(k+1)$ $k=1,2$.

$\lambda_1(2) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1(2)} = x_1(2)$. $\lambda_2(2) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_2(2)} = 0$.

综合以上各式,可得: $u(0)=-1$. $u(1) = -\frac{1}{2}$. $x_1(2) = \frac{1}{2} \Rightarrow J^* = \frac{3}{4}$.

2 求下列泛函的变分:

(1) $J = \int_0^1 y^3(x)\sin(x)\mathrm{d}x$

(2) $J = \int_0^1 y^3(t)x^2(t)\mathrm{d}t$

解 :

(1)

$F(y(x),x) = y^3(x)sin(x)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2(x)sin(x)$

$$\delta J = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x)dx = \int_0^1 3y^2(x)sin(x)\delta y(x)dx$$

(2)

$F(x(t),y(t)) = y^3(t)x^2(t)$,

$$\begin{aligned}\delta J &= \int_0^1 [\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial x}\delta x]dt \\ &= \int_0^1 [3y^2(t)x^2(t)\delta y + 2y^3(t)x(t)\delta x]dt\end{aligned}$$

3.3 试求最速降线(brachistochrone)满足的 Euler-Lagrange 方程，其中泛函为

$$T[y]=\int_0^a \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2(x)}}{\sqrt{2y(x)}}\mathrm{d}x.$$

$$F[y(x),\dot{y}(x)]=\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}$$

相应的 Euler-Lagrange 方程为

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{\dot{y}}=0$$

显然 $y(x)$ 等于常数不是极值解，即极值解的导数不恒等于零，因此，极值解满足如下方程

$$\dot{y}F_y-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{\dot{y}}\right)\dot{y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F-F_{\dot{y}}\dot{y})=0$$

即

$$\frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}}-\frac{1}{\sqrt{2gy}}\frac{\dot{y}^2}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}=c$$

其中 c 为一常数。整理上式得

$$y(1+\dot{y}^2)=k^2$$

其中

$$k^2=\frac{1}{2gc^2}$$

3.4 某运动控制系统方程如下：

$$\ddot{z}(t)+[1-z^2(t)]\dot{z}(t)+z(t)=u(t),\quad z(0)=z_0,$$

其中$\boldsymbol{z(t)}$是物体的位置，控制$\boldsymbol{u(t)}$为驱动电压的幅值。希望设计控制使得物体在时刻 $\boldsymbol{t=T}$ 时回到平衡位置（即$\boldsymbol{z=0}$），且消耗的控制能量最小。请将该问题表述为最优控制问题，给出相应的状态方程、优化目标和约束条件。

解：

令$x_1=z,x_2=\dot{z}$，则

$\dot{x_1}=x_2,\dot{x}_2=(x_1^2-1)x_2-x_1+u$，$x_1(0)=z_0,x_2(0)=z_1$

目标函数$J=\int_0^T u^2(t)dt$,

引入协态变量 $H=\lambda_1x_2+\lambda_2[(x_1^2-1)x_2-x_1+u]+u^2$

控制方程：$\frac{\partial H}{\partial u}=\lambda_2+2u=0$

协态方程：$\dot{\lambda}_1=1-2x_1x_2$，$\dot{\lambda}_2=-\lambda_1-(x_1^2-1)\lambda_2$

末端条件：$x_1(T)=0$，$\lambda_2(T)=0$

3.5 设受控系统为 $\dot{x}(t)=-x(t)+u(t)$，$x(0)=x_0$，求$u(t)$使下述性能指标最小：

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1[3x^2(t)+u^2(t)]\mathrm{d}t$$

解：

$$f=\ -x+u,\qquad \varphi=0,\qquad L=3x^2+u^2$$

H 函数：$H=\ L+\lambda f=3x^2+u^2+\lambda(-x+u)$

控制方程：$\frac{\partial H}{\partial u}=2u+\lambda=0\rightarrow u=\ -\frac{1}{2}\lambda$

正则方程：$\dot{x}=\ -x+u=\ -x-\frac{1}{2}\lambda\rightarrow\ \lambda=\ -2x-2\dot{x}$

$\dot{\lambda}=\ -\frac{\partial H}{\partial x}=\ -(6x-\lambda)\rightarrow\ddot{x}-\ 4x=0$

边界条件：$x(0)=x_0$，$\lambda(t_f)=0=\ \lambda(1)$

通过正则方程可以解得：$x^*(t)=C_1e^{-2t}-C_2e^{2t}$，$\lambda^*(t)=6C_2e^{2t}+2C_1e^{-2t}$

带入边界条件：

$$x(0)=C_1-C_2=x_0,\ \lambda(1)=6C_2e^2+2C_1e^{-2}=0$$

于是

$$C_1=\frac{3e^4}{3e^4+1}x_0,\ \ C_2=\ -\frac{x_0}{3e^4+1}$$

而

$$u^*(t)=\frac{3x_0}{3e^4+1}e^{2t}-\frac{3e^4}{3e^4+1}x_0e^{-2t}$$

3.6 已知受控系统$\dot{x}(t)=4u(t)$，$x(0)=x_0$，求$u(t)$使系统状态在T时刻转移到x_T，且使下述性能指标最小：

$$J=\int_0^T[x^2(t)+4u^2(t)]\mathrm{d}t$$

解：

定义 Hamilton 函数：

$$H(x,u,\lambda)=x^2(t)+4u^2(t)+\lambda(t)4u(t)$$

定义：

$$\hat{\varphi}\left(x^*(t_f),t_f\right)=[x(t_f)-x_T]\mu$$

极值条件:

$$\frac{\partial H}{\partial u}=8u(t)+4\lambda(t)=0$$

得

$$u(t)=-\frac{1}{2}\lambda(t)$$

正则方程:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 4u(t)=-2\lambda(t)\\ \dot{\lambda}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x}=-2x(t)\end{aligned}$$

可解得:

$$\lambda(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$$
$$x(t)=-C_1e^{2t}+C_2e^{-2t}$$
$$u(t)=\ -\frac{1}{2}(C_1e^{2t}+C_2e^{-2t})$$

边界条件:

$$x(0)=x_0,x(T)=x_T$$
$$\lambda(T)=\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial x(T)}=\mu$$

进一步解得:

$$C_1=\frac{x_0e^{-2T}-x_T}{e^{2T}-e^{-2T}},C_2=\frac{x_0e^{2T}-x_T}{e^{2T}-e^{-2T}}$$

对应最优控制:

$$u^*(t)=\ -\frac{1}{2}(\frac{x_0e^{-2T}-x_T}{e^{2T}-e^{-2T}}e^{2t}+\frac{x_0e^{2T}-x_T}{e^{2T}-e^{-2T}}e^{-2t})$$

3.7 已知受控系统 $\dot{x}(t)=u(t)$, $x(0)=1$, 求$u(t)$和t_f使系统状态在t_f时刻转移到坐标原点，且使下述性能指标最小:

$$J=t_f^2+\int_0^{t_f}u^2(t)\mathrm{d}t$$

解:

控制函数,

$$f(x,u)=u(t)$$

Hamilton 函数,

$$H(x,u,\lambda)=u^2(t)+\lambda(t)u(t)$$

控制方程，

$$\frac{\partial H}{\partial u}=2u(t)+\lambda(t)=0$$

得，

$$u(t)=-\frac{1}{2}\lambda(t)$$

正则方程，

$$\begin{cases}\dot{x}=u(t)=-\frac{1}{2}\lambda(t)\\ \dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=0\end{cases}$$

边界条件，$x(0)=1,\ x(t_f)=0$

$$H(t_f)=-\frac{\partial\varphi}{\partial t_f}$$

即

$$\lambda^2(t_f)=8t_f$$

又，$x(t)$ 应该递减，所以 $\lambda(t_f)>0$，解得，

$$\lambda(t)=2\sqrt{2t_f}$$

$$x(t)=-\sqrt{2t_f}t+1$$

又 $x(t_f)=0$, 解得，$t_f=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

故，

$$x(t)=-4^{\frac{1}{6}}t+1$$

$$u(t)=-4^{\frac{1}{6}}=-\sqrt[6]{4}$$

即

$$\begin{cases}u(t)=-4^{\frac{1}{6}}\\ t_f=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{3}}\end{cases}$$

又 $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=2\geq 0$, 该解为最小值对应解。

3.8 已知受控系统

$\dot{x}_1(t)=x_2(t)$，$\dot{x}_2(t)=x_3(t)$，$\dot{x}_3(t)=u(t)$，$x_1(0)=x_2(0)=x_3(0)=0$,

求$u(t)$和t_f，其中$|u(t)|\leq 1$，使系统状态在t_f时刻转移到目标集

$$x_1^2(t_f)=t_f^2,\ x_2(t_f)=x_3^2(t_f),$$

且使下述性能指标最小（仅列出必要条件）

$$J=x_2(t_f)t_f+\int_0^{t_f}u^2(t)\mathrm{d}t.$$

解：

定义 Hamilton 函数:

$$H = u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 u = (u^2 + \lambda_3 u) + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3$$

定义

$$\hat{\phi}[x(t_f), t_f] = x_2(t_f) + \mu_1[x_1^2(t_f) - t_f^2] + \mu_2[x_2(t_f) - x_3^2(t_f)]$$

根据极小值原理:

$$u^* = argmin_u H = \begin{cases} -\dfrac{\lambda_3}{2} & |\lambda_3| \leq 2 \\ -sign(\lambda_3) & |\lambda_3| > 2 \end{cases}$$

正则方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\lambda}_1 = 0 \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \\ \dot{\lambda}_3 = -\lambda_2 \end{cases}$$

边界条件:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$$

$$\lambda_1(t_f^*) = 2\mu_1 x_1(t_f^*),\ \ \lambda_2(t_f^*) = t_f^* + \mu_2,\ \ \lambda_3(t_f^*) = -2\mu_2 x_3(t_f^*)$$

终端条件:

$$H(t_f^*) = -[x_2(t_f^*) - 2\mu_1 t_f^*] = 0$$

3.9 已知受控系统$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$, $\dot{x}_2(t) = u(t)$, $x_1(0) = x_2(0) = 2$。性能指标为:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} [4x_1^2(t) + u^2(t)]\mathrm{d}t$$

求使J最小的反馈控制律 $u^*(\boldsymbol{x})$，以及相应的最小值 J^*。

解:

解: $\varphi = 0, L = \frac{1}{2}(x_1^2 + u^2)$,

状态方程为: $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} [x_1^2(t) + u^2(t)]dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x(t)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + u(t)^T * I * u(t)\, dt =$$

于是$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, R=I,$

$$故有Riccati方程：PA+A^TP-PBB^TP+Q=0$$

解得$P=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 1\\ 1 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$

$$于是\ u^*(t)=-R^{-1}B^TPx(t)=\left(-1-\sqrt{2}\right)x(t)$$

$$J^*=\frac{1}{2}x^T(t_0)Px(t_0)=4+4\sqrt{2}$$

又 $\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & -\sqrt{2}\end{bmatrix}x$

通过反拉普拉斯变换求得：

$$x(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}x(0)]=\begin{bmatrix}2[e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)+(1+\sqrt{2})e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)]\\ 2[e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)-(1+\sqrt{2})e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)]\end{bmatrix}$$

于是：$u^*(t)=\left(-1-\sqrt{2}\right)x(t)=2[e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)-(1+\sqrt{2})e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)]$

3.10 已知旋转倒立摆的控制模型为

$$\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 81.4033 & -45.8259 & -0.9319\\ 0 & 122.0545 & -44.0906 & -1.3972\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 83.4659\\ 80.3162\end{bmatrix}u(t),$$

其中$x(t)=\left[\theta(t)\ \alpha(t)\ \ \dot{\theta}(t)\ \ \dot{\alpha}(t)\right]$, $\theta(t)$为水平旋转臂转角, $\alpha(t)$为竖直旋转摆摆角。请利用二次型最优调节器设计反馈控制律（可调用 MATLAB 函数 lqr(·)），其中$Q=\mathrm{diag}[1\ \ q\ \ 1\ \ 1]$，$R=1$，搭建 Simulink 模型进行仿真，绘制响应曲线，并分析参数q取值对闭环系统性能的影响。

解：略