机器人动力学与控制方法

李翔

清华大学自动化系

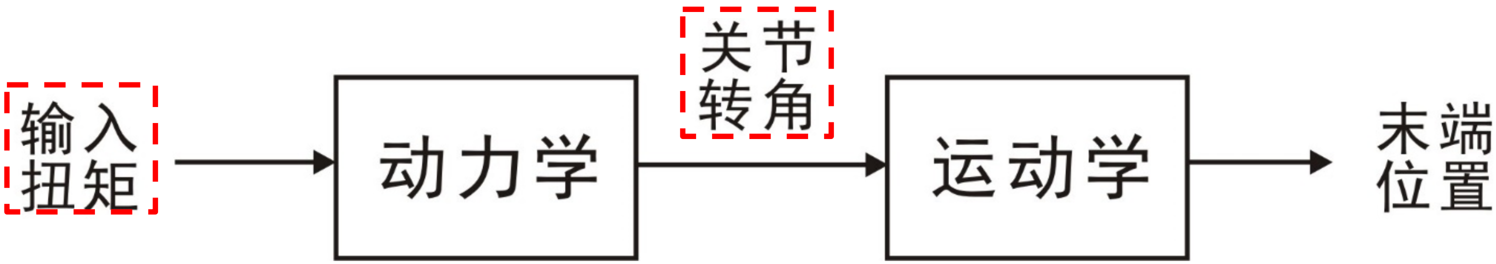
Tsinghua University

内容提纲

- 动力学方程
- 动力学性质
- 关节空间定点控制
- 任务空间轨迹追踪控制

动力学方程

动力学 – 研究机器人输入扭矩与关节转角的关系



拉格朗日方程:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \overset{\text{输入}}{u} + \frac{\partial L}{\partial q}$$

L - 拉格朗日算子

即动能与势能之间的差值

q - 关节转角向量

$$\boldsymbol{q} = [q_1, \ldots, q_n]^T \in R^n$$

拉格朗日算子　　动能　　势能

$$L = K\text{-}U$$

动力学方程

$$L = K - U$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = u + \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = u \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial q} = g(q) \text{ 重力产生的扭矩} \qquad (2)$$

转动惯量

动能 $K = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = M(q)\dot{q}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) = M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q} \qquad (3)$$

动力学方程

$$\frac{\partial K}{\partial q}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{q}^T\dfrac{\partial M}{\partial q_1}\dot{q}\\ \vdots\\ \dot{q}^T\dfrac{\partial M}{\partial q_n}\dot{q}\end{bmatrix} \quad (4)$$

where $q=[q_1,\cdots,q_n]^T$

将(2)，(3)，(4)代入(1)

→ 动力学方程

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+g(q)=u$$

where $C(q,\dot{q})\dot{q}=\dot{M}(q)\dot{q}-\frac{1}{2}[\dot{q}^T\frac{\partial M}{\partial q_1}\dot{q},\cdots\dot{q}^T\frac{\partial M}{\partial q_n}\dot{q}]^T$

$$=\begin{bmatrix}b_{111} & b_{122} & \cdots & b_{1nn}\\ b_{211} & b_{222} & \cdots & b_{2nn}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ b_{n11} & b_{n22} & \cdots & b_{nnn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1^2\\ \dot{q}_2^2\\ \vdots\\ \dot{q}_n^2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2b_{112} & 2b_{123} & \cdots & 2b_{1(n-1)n}\\ 2b_{212} & 2b_{223} & \cdots & 2b_{2(n-1)n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 2b_{n12} & 2b_{n23} & \cdots & 2b_{n(n-1)n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{q}_1\dot{q}_2\\ \dot{q}_2\dot{q}_3\\ \vdots\\ \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n\end{bmatrix}$$

离心力产生的扭矩　　科里奥利力产生的扭矩

Christoffel symbols

$M(q)$ 第ij个元素

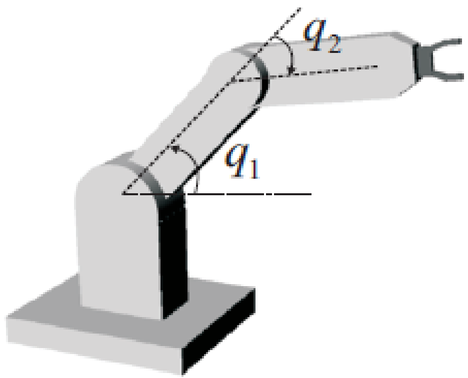
$$m_{ijk}=\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}$$

$$b_{ijk}=\tfrac{1}{2}(m_{ijk}+m_{ikj}-m_{jki})$$

S. Arimoto, *Control Theory of Nonlinear Mechanical Systems*. Oxford University Press, 1996.

动力学方程

清華大學 Tsinghua University



转动惯量　　　　　　　　重力产生的扭矩

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u$$

离心力和科里奥利力
产生的扭矩

两自由度机械臂的动力学方程

$$\overset{\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})}{\boxed{\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}}}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + (\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{M}_{11} & \dot{M}_{12} \\ \dot{M}_{21} & \dot{M}_{22} \end{bmatrix} + \boxed{\begin{bmatrix} 0 & -m_2 \sin(q_2) l_1 l_{c2}(\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2) \\ m_2 \sin(q_2) l_1 l_{c2}(\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2) & 0 \end{bmatrix}})\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \overset{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{q})}{\boxed{\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$S(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{M}(q)$$

动力学性质

$$S(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q}) - \tfrac{1}{2}\dot{M}(q)$$

$$M(q)\ddot{q} + (\tfrac{1}{2}\dot{M}(q) + S(q,\dot{q}))\dot{q} + g(q) = u$$

性质1：转动惯量矩阵 $M(\mathbf{q})$ 是对称正定的。如果矩阵$M(\mathbf{q})$ 的每项都是常数或关于q的三角函数，则存在正的常数 γ_m和 γ_M（$\gamma_m < \gamma_M$）满足

$$\gamma_m I_n \le M(\mathbf{q}) \le \gamma_M I_n$$

其中 $I_n \in \Re^{n\times n}$是单位矩阵。

性质2：矩阵 $\mathbf{S}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \in \Re^{n\times n}$ 是反对称矩阵，满足

$$\mathbf{y}^T\mathbf{S}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\mathbf{y} = 0, \forall \mathbf{q},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{y} \in \Re^n$$

另外，$C(q,\dot{q})\dot{q} = \left(\frac{1}{2}\dot{M}(q) + S(q,\dot{q})\right)\dot{q}$ 是 $\dot{\mathbf{q}}$的二次型，且对 q 的每个分量都是周期的，满足 $\left\|\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\right\| \le c\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|^2$，其中c是正的常数，$\|\cdot\|$为欧几里得范数。

动力学性质

$$M(q)\ddot{q}+(\tfrac{1}{2}\dot{M}(q)+S(q,\dot{q}))\dot{q}+g(q)=u$$

性质3：动力学模型可参数化为一组物理参数 $\boldsymbol{\theta}_d=\left[\boldsymbol{\theta}_{d1},\cdots,\boldsymbol{\theta}_{dn_d}\right]^T\in\Re^{n_d}$

$$M(q)\ddot{q}+\left(\frac{1}{2}\dot{M}(q)+S(q,\dot{q})\right)\dot{q}+g(q)=Y_d(q,\dot{q},\dot{q},\ddot{q})\boldsymbol{\theta}_d$$

其中 $Y_d(q,\dot{q},\dot{q},\ddot{q})\in\Re^{n\times n_d}$ 是动力学回归矩阵(dynamic regressor matrix)。

性质4：重力向量 $\mathbf{g}(\mathbf{q})$是有界的，且可表示为：

$$\mathbf{g}(\mathbf{q})=Y_g(\mathbf{q})\boldsymbol{\theta}_g \qquad \boldsymbol{\theta}_g=\left[\boldsymbol{\theta}_{d1},\cdots,\boldsymbol{\theta}_{dn_g}\right]^T\in\Re^{n_g}$$

其中 $Y_g(q)\in\Re^{n\times n_g}$ 是重力回归矩阵。

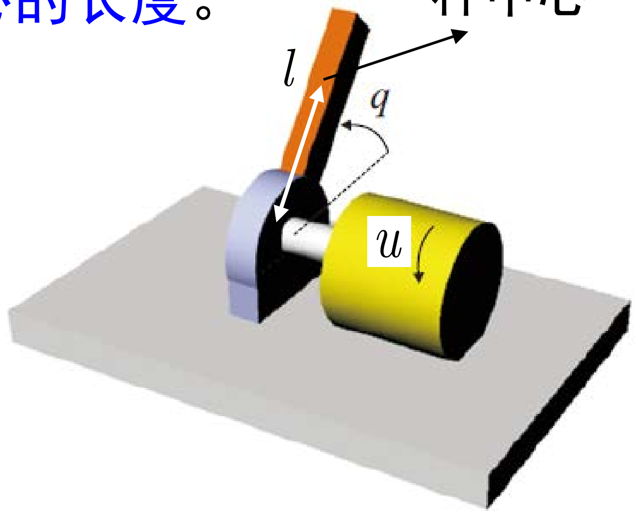
对平移关节（prismatic joints），只要关节变量是有界的，以上性质仍成立

动力学性质

考虑一个单杆机器人，关节角度和输入力矩分别用 q, u 表示，机器人动力学方程由下式表示：

$$ml^2\ddot{q} + ml\,\mathrm{g}\cos(q) = u$$

其中m表示杆的质量，l表示从基座到杆的中心的长度。



转动惯量 $M = ml^2$ 是一个正标量（性质1），

$$C(q,\dot{q})\dot{q} = \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2}\left[\dot{q}^T\frac{\partial M}{\partial q_1}\dot{q}, \cdots \dot{q}^T\frac{\partial M}{\partial q_n}\dot{q}\right]^T = 0$$ （性质2），

动力学方程可以参数化为（性质3），

$$ml^2\ddot{q} + mlg\cos(q) = [\ddot{q}, \cos(q)] \times \left[ml^2, mlg\right]^T = Y_d(q,\ddot{q})\boldsymbol{\theta}_d$$

重力 $g(q) = ml\,\mathrm{g}\cos(q) = Y_g(q)\boldsymbol{\theta}_g, Y_g(q) = \cos(q), \boldsymbol{\theta}_g = ml\,\mathrm{g}$

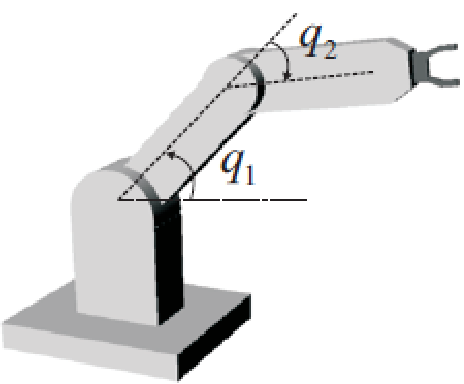
（性质4）

动力学性质

清華大學 Tsinghua University

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + (\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{M}_{11} & \dot{M}_{12} \\ \dot{M}_{21} & \dot{M}_{22} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -m_2 \sin(q_2) l_1 l_{c2}(\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2) \\ m_2 \sin(q_2) l_1 l_{c2}(\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2) & 0 \end{bmatrix})\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



$$M_{11} = m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2[l_1^2 + l_{c2}^2 + 2\cos(q_2) l_1 l_{c2}] + I_2$$

$$M_{22} = m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$M_{12} = M_{21} = m_2 \cos(q_2) l_1 l_{c2} + m_2 l_{c2}^2 + I_2$$

$$g_1 = m_1 g \cos(q_1) l_{c1} + m_2 g[\cos(q_1 + q_2) l_{c2} + \cos(q_1) l_1]$$

$$g_2 = m_2 g \cos(q_1 + q_2) l_{c2}$$

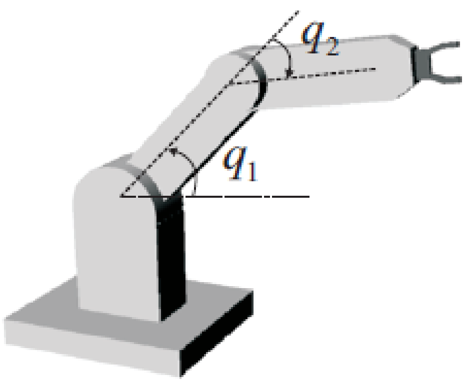
$m_1, m_2, l_1, l_2, I_1, I_2$ – 杆的质量、长度和绕重心转动惯量

l_{c1}, l_{c2} – 表示从关节中心到杆重心的距离

动力学性质

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + (\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{M}_{11} & \dot{M}_{12} \\ \dot{M}_{21} & \dot{M}_{22} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -m_2 \sin(q_2) l_1 l_{c2}(\dot{q}_1 + \tfrac{1}{2}\dot{q}_2) \\ m_2 \sin(q_2) l_1 l_{c2}(\dot{q}_1 + \tfrac{1}{2}\dot{q}_2) & 0 \end{bmatrix})\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



$$M_{11} = m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2[l_1^2 + l_{c2}^2 + 2\cos(q_2) l_1 l_{c2}] + I_2$$

$$M_{11} > 0$$

$$M_{12} = M_{21}$$

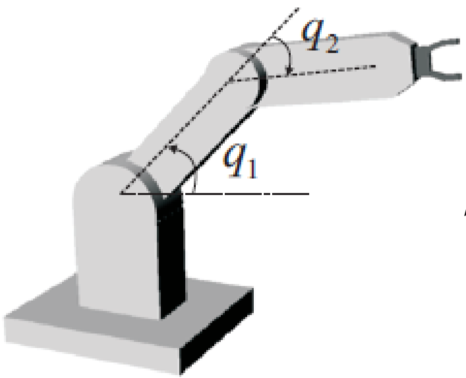
$$\det(M(q)) = I_1 I_2 + l_1^2 l_{c2}^2 m_2^2 \left(1 - \cos^2(q_2)\right)$$
$$+ I_2\left(l_1^2 m_2 + l_{c1}^2 m_1\right) + I_1 l_{c2}^2 m_2 + l_{c1}^2 l_{c2}^2 m_1 m_2 > 0$$

$M(\mathbf{q})$ 每一项都是常数或关于q的三角函数

（性质1）

对称、正定、有界

动力学性质



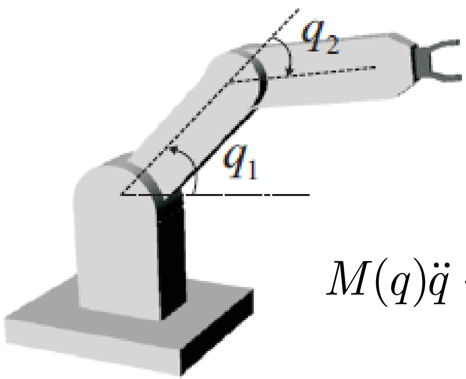
$$S(q,\dot q)=\begin{bmatrix}0 & -m_2\sin(q_2)l_1l_{c2}\left(\dot q_1+\frac{1}{2}\dot q_2\right)\\ m_2\sin(q_2)l_1l_{c2}\left(\dot q_1+\frac{1}{2}\dot q_2\right) & 0\end{bmatrix}\in\Re^{2\times2}$$

- $\mathbf{y}^T\mathbf{S}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\mathbf{y}=\left(y_1y_2-y_1y_2\right)m_2\sin(q_2)l_1l_{c2}\left(\dot q_1+\frac{1}{2}\dot q_2\right)=0$ $\quad y=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ 非零
- $\mathbf{S}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ 是反对称的

$\mathrm{C}(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}})\dot{\mathrm{q}}=\left(\frac{1}{2}\dot{\mathrm{M}}(\mathrm{q})+\mathrm{S}(\mathrm{q},\dot{\mathrm{q}})\right)\dot{\mathrm{q}}$ 是关于 $\dot q$ 的二次型且对 q 有周期性

$\left\|\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\right\|\le c\left\|\dot{\mathbf{q}}\right\|^2$ （性质2）

动力学性质



$$M(q)\ddot{q} + \left(\frac{1}{2}\dot{M}(q) + S(q,\dot{q})\right)\dot{q} + g(q) = Y_d(q,\dot{q},\dot{q},\ddot{q})\boldsymbol{\theta}_d =$$

（性质3）

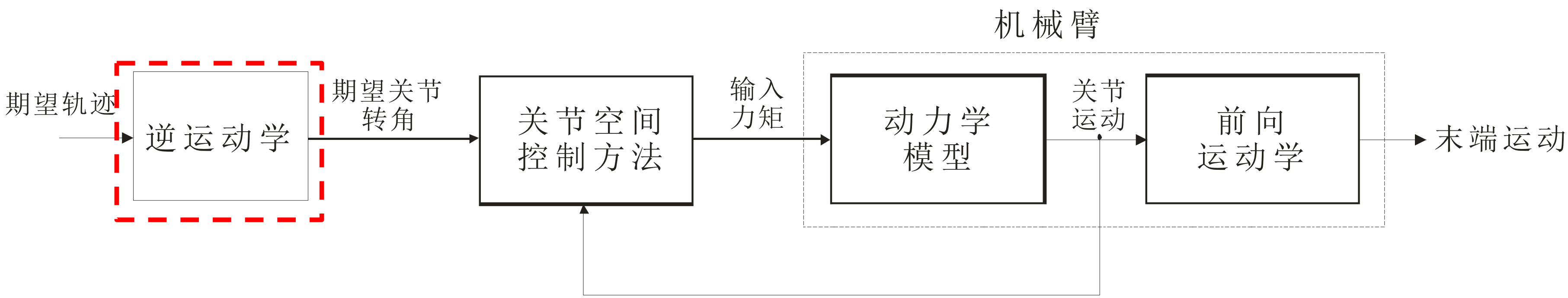
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & 2c_2\ddot{q}_1 + c_2\ddot{q}_2 - s_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - s_2\left(\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right) & c_1 & c_{12} \\ 0 & \ddot{q}_1 + \ddot{q}_2 & c_2\ddot{q}_1 + s_2\dot{q}_1^2 & 0 & c_{12} \end{bmatrix}}_{Y_d} \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_1 \\ m_2 l_{c2}^2 + I_2 \\ m_2 l_1 l_{c2} \\ m_1 g l_{c1} + m_2 g l_1 \\ m_2 g l_{c2} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}_d}$$

（性质4）

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{Y}_g(\mathbf{q})\boldsymbol{\theta}_g = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_{12} & c_1 \\ 0 & c_{12} & 0 \end{bmatrix}}_{Y_g} \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 g l_{c1} \\ m_2 g l_{c2} \\ m_2 g l_1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\theta}_g}$$

关节空间控制

- **控制器结构**



反馈线性化

$$u = M(q)(\ddot{q}_d - K_p \Delta q - K_v \Delta \dot{q})$$ PD控制项

$$+ (\tfrac{1}{2}\dot{M}(q) + S(q,\dot{q}))\dot{q} + g(q)$$ 动力学补偿项

$K_p\ K_v$ – 控制参数

$$\Delta q = q - q_d$$

q_d – 期望关节角度 ➡ 求解逆运动学

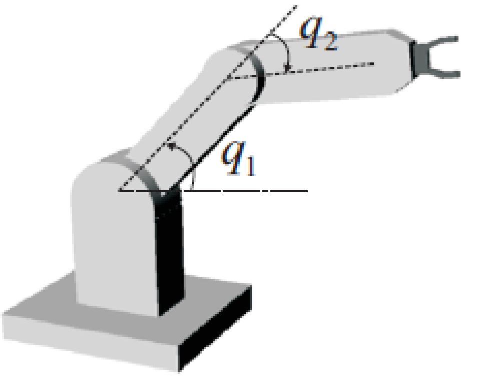
关节空间控制

$$u = M(q)(\ddot{q}_d - K_p\Delta q - K_v\Delta\dot{q}) + (\tfrac{1}{2}\dot{M}(q) + S(q,\dot{q}))\dot{q} + g(q)$$

代入 $\qquad \ddot{q} = \ddot{q}_d - K_p\Delta q - K_v\Delta\dot{q}$

$$M(q)\ddot{q} + (\tfrac{1}{2}\dot{M}(q) + S(q,\dot{q}))\dot{q} + g(q) = u$$

闭环方程 $\qquad \Delta\ddot{q} + K_v\Delta\dot{q} + K_p\Delta q = 0$



考虑两自由度机械臂

$$\begin{bmatrix}\Delta\ddot{q}_1\\ \Delta\ddot{q}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}k_{v1} & 0\\ 0 & k_{v2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\dot{q}_1\\ \Delta\dot{q}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}k_{p1} & 0\\ 0 & k_{p2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta q_1\\ \Delta q_2\end{bmatrix} = 0$$

关节空间控制

$$\Delta\ddot{q}_i + k_{vi}\Delta\dot{q}_i + k_{pi}\Delta q_i = 0 \quad (i = 1, 2)$$

- $\Delta\dot{q}_i \to 0, \Delta q_i \to 0$ as $t \to \infty$
- 闭环系统稳定（稳态特性）

考虑特征方程（瞬态特性）：

$$s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

s – 复变量

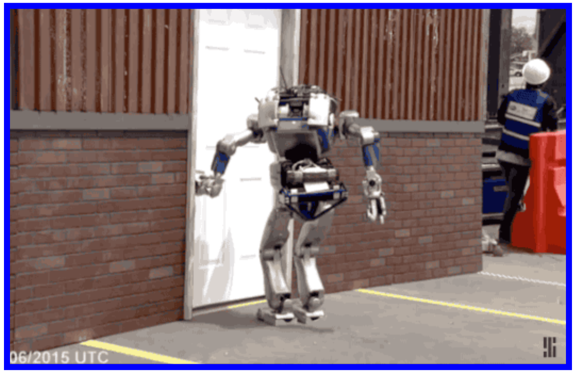
ς – 阻尼系数

ω_n – 自然角频率

$\Rightarrow \begin{cases} \varsigma \geq 1 & \text{避免过大超调} \\ \omega_n \leq 0.5\omega_{res} & \text{避免共振} \end{cases}$

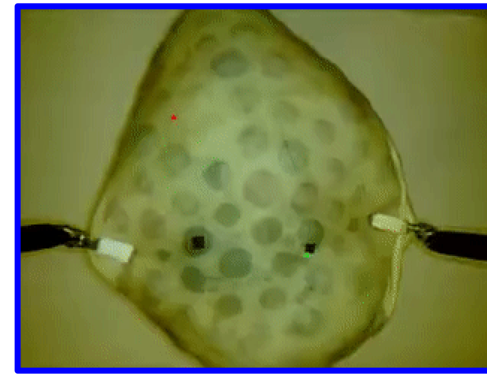
ω_{res} – 共振角频率

关节空间控制



稳定性不足

超调过大



稳态误差过大

$$\Delta\ddot{q}_i + k_{vi}\Delta\dot{q}_i + k_{pi}\Delta q_i = 0 \quad \longleftrightarrow \quad s^2 + 2\varsigma\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

（闭环方程） （线性系统特征方程）

$$\Rightarrow \begin{cases} k_{pi} = \omega_n^2 \\ k_{vi} = 2\varsigma\omega_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varsigma \geq 1 \\ \omega_n \leq 0.5\omega_{res} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_{pi} \leq 0.25\omega_{res}^2 \\ \dfrac{k_{vi}}{2\sqrt{k_{pi}}} \geq 1 \end{cases}$$

关节空间控制

Tsinghua University

PD控制 + 重力补偿

$$M(q)\ddot{q}+(\tfrac{1}{2}\dot{M}(q)+S(q,\dot{q}))\dot{q}+g(q)=u$$

重力补偿

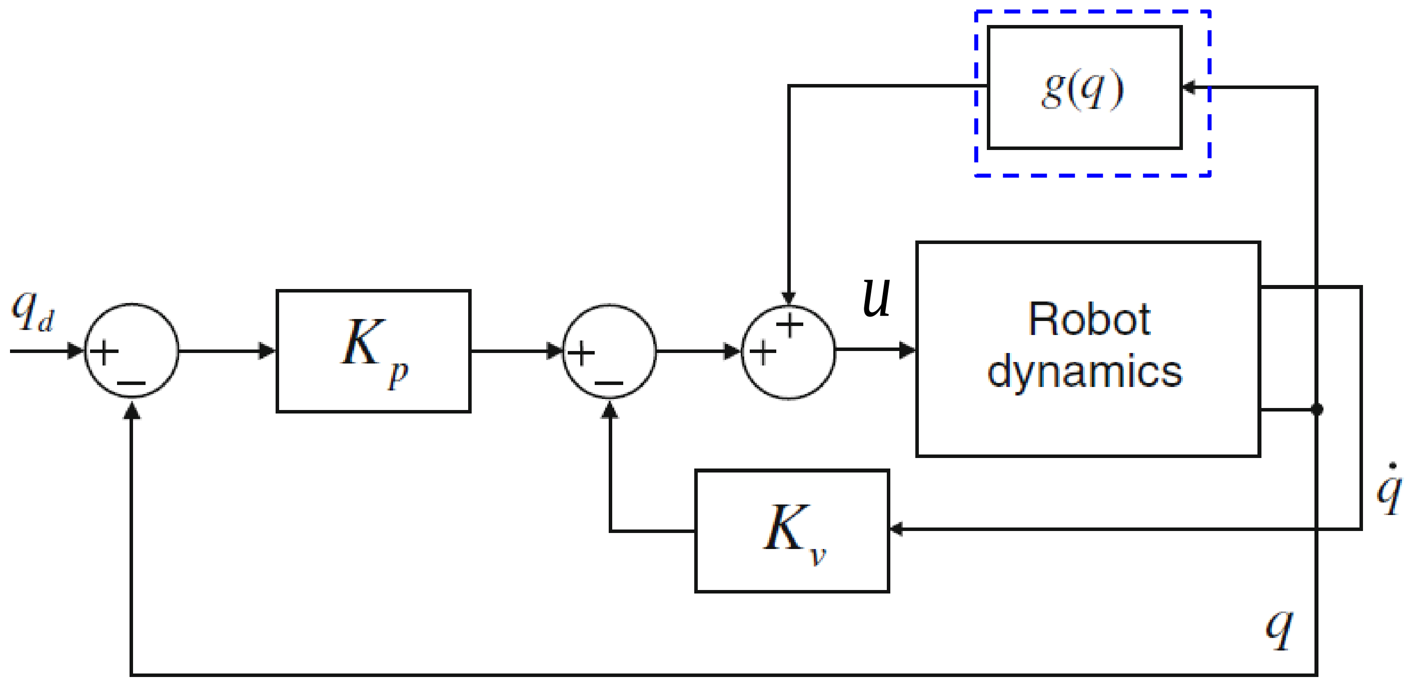
$$M(q)\ddot{q}+(\tfrac{1}{2}\dot{M}(q)+S(q,\dot{q}))\dot{q}=0$$

$$u=-K_p(q-q_d)-K_v\dot{q}+\boxed{g(q)}$$

重力的精确信息

$K_p\ K_v$ – 控制参数

q_d – 期望关节角度



关节空间控制

$$u = -K_p(q - q_d) - K_v\dot{q} + g(q)$$

闭环方程

$$M(q)\ddot{q} + (\tfrac{1}{2}\dot{M}(q) + S(q,\dot{q}))\dot{q} + K_p\Delta q + K_v\dot{q} = 0 \quad (\Delta q = q - q_d)$$

稳定性分析

性质1

$$V = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\Delta q^T K_p \Delta q > 0$$ – 李雅普诺夫函数（Lyapunov function）

$$\dot{V} = -\dot{q}^T K_v \dot{q} \le 0$$ （ LaSalle's Invariance Theorem)

性质2

J.-J. E. Slotine and Weiping Li, *Applied Nonlinear Control. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall,* 1991.
S. Arimoto, *Control Theory of Nonlinear Mechanical Systems*. Oxford University Press, 1996.

Lemma A.1 (LaSalle's Invariance Theorem) *Let* $V : \Re^{n_s} \to \Re$ *be a scalar function such that* $\dot{V}(\boldsymbol{x}_s) \le 0$ *in a compact set* Ω. *Let* D *be the set of all points in* Ω *where* $\dot{V}(\boldsymbol{x}_s) = 0$. *Therefore, every solution of the system* $\dot{\boldsymbol{x}}_s = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_s)$ *starting in* Ω *approaches the largest invariant set in D. In particular, if D contains no trajectories other than* $\boldsymbol{x}_s = \boldsymbol{0}$, *then the origin is locally asymptotically stable.* $\triangle\triangle\triangle$

LaSalle's invariance theorem enables one to conclude asymptotic stability only for autonomous systems. For nonautonomous systems, Barbalat's lemma and the associated Lyapunov-like lemma can be used. 适于自治系统

$$V = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} + \frac{1}{2}\Delta q^T K_p \Delta q > 0 \qquad \dot{V} = -\dot{q}^T K_v \dot{q} \le 0$$

$\Rightarrow$ $\dot{V} = 0$ $\Rightarrow$ $\dot{q} = 0$ $\qquad D = \{(\dot{q}, \Delta q) | \dot{q} = 0\}$

$\Rightarrow$ 代入 $M(q)\ddot{q} + (\frac{1}{2}\dot{M}(q) + S(q,\dot{q}))\dot{q} + K_p \Delta q + K_v \dot{q} = 0$

$\Rightarrow$ $\Delta q = 0$ $\Rightarrow$ $q = q_d$（稳态特性）

D中的最大不变集 $S = \{(\dot{q}, \Delta q) | \dot{q} = 0, \Delta q = 0\}$

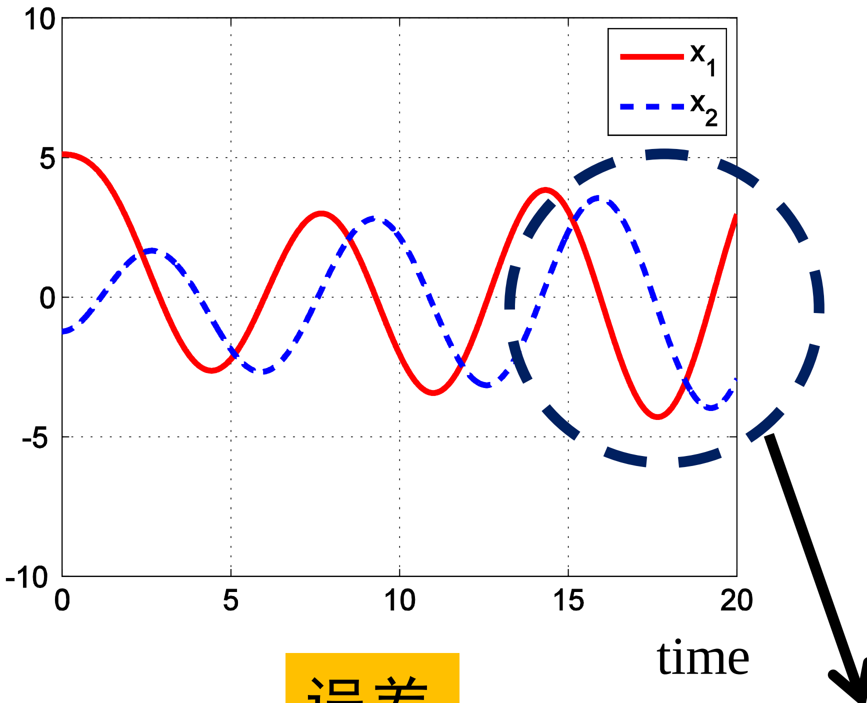
$$u = -K_p(q - q_d) - K_v \dot{q} + \boxed{g(q)} \rightarrow g(q_d)$$

控制参数设置

$$u = -K_p(q - q_d) - K_v\dot{q} + g(q)$$

- K_v 过小 ➡ 稳定性下降

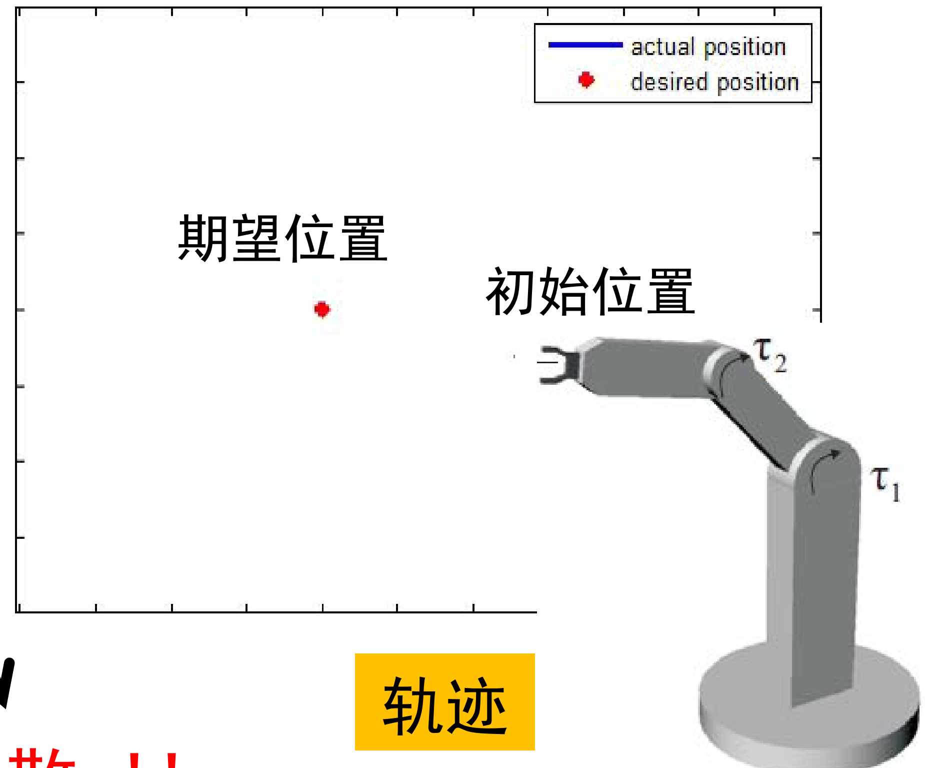
error



time

误差

发散 !!

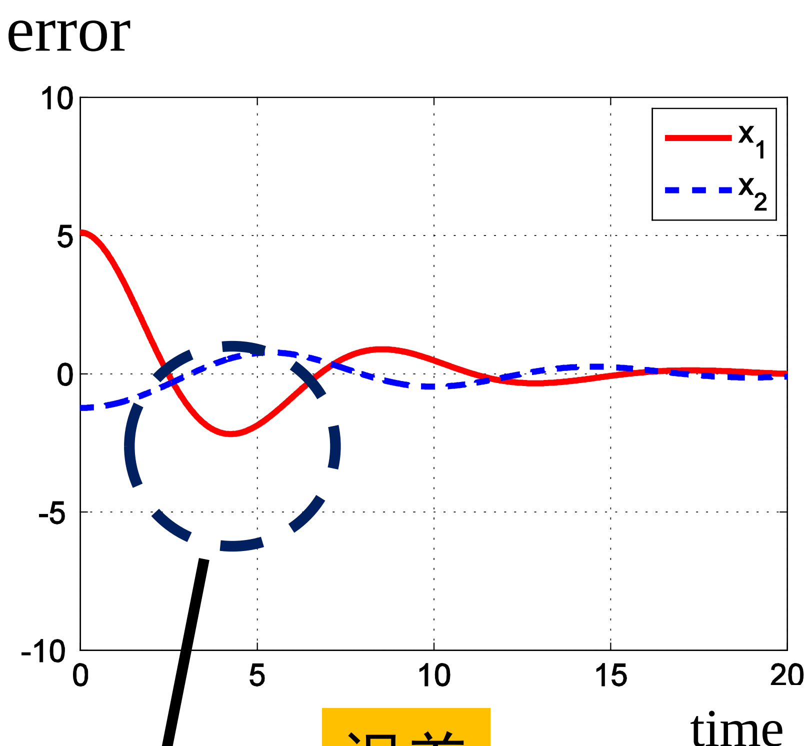


轨迹

控制参数设置

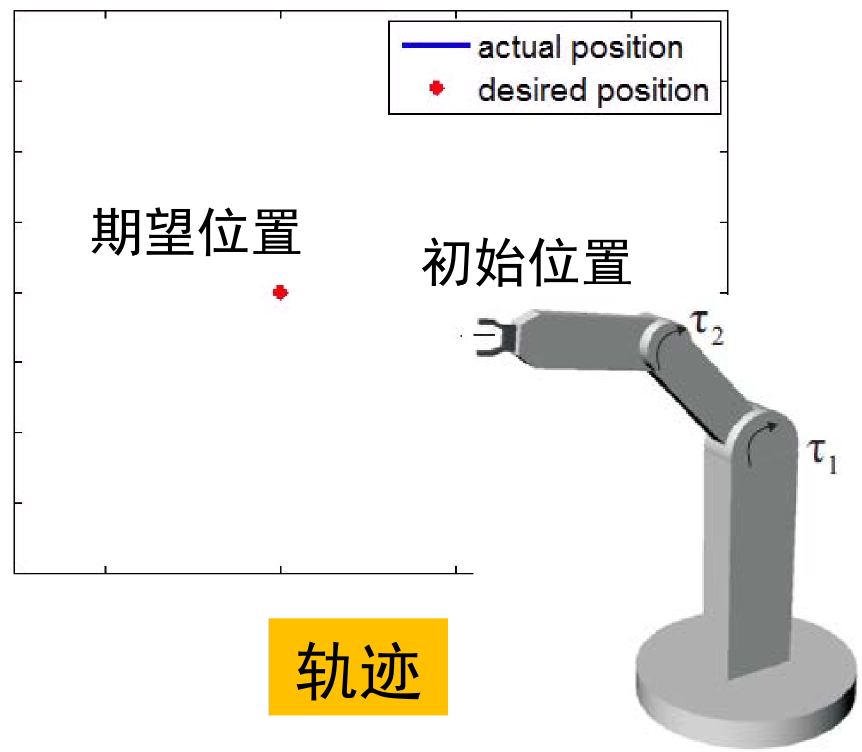
$$u = -K_p(q - q_d) - K_v\dot{q} + g(q)$$

- K_p 过大 ➡ 超调严重



误差

超调 ！！

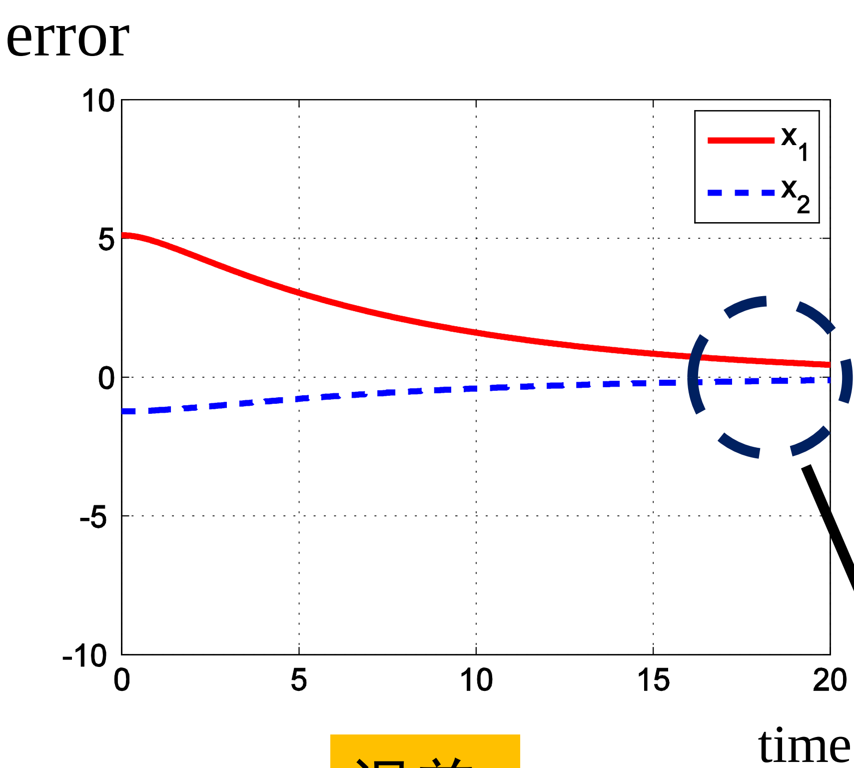


轨迹

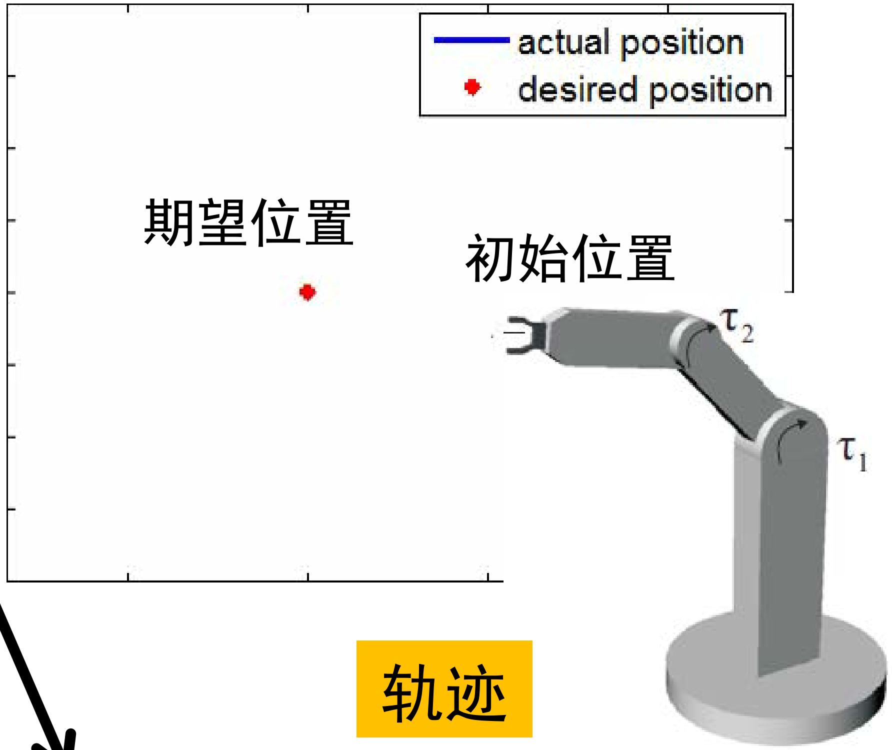
控制参数设置

$$u = -K_p(q - q_d) - K_v\dot{q} + g(q)$$

- K_p 过小 ➡ 稳态误差增加



误差



轨迹

稳态误差 ！！

控制参数设置

清華大學 Tsinghua University

控制参数调整基本准则:

- 位置控制误差过大 ➡ $K_p \uparrow$
- 速度控制误差过大 ➡ $K_v \uparrow$
- 联调参数达到期望的瞬态及稳态响应
- 避免参数值过大以致噪声放大或控制输入饱和

任务空间控制

控制目标 – 设计控制输入使机器人完成指定任务

机器人动力学

控制输入

$$M(q)\ddot{q}+\left(\tfrac{1}{2}\dot{M}(q)+S(q,\dot{q})\right)\dot{q}+g(q)=u$$

$\boldsymbol{q}$ 变化（关节转动）

机器人运动学

$$r=h(q)$$

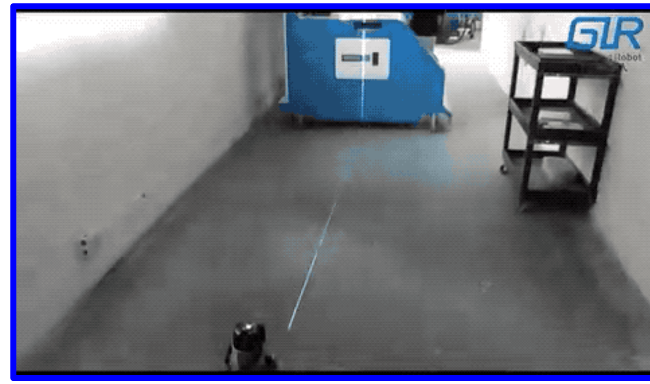
$\boldsymbol{r}$ 变化（末端移动）

指定任务

$$\boldsymbol{r}\rightarrow\boldsymbol{r}_d$$

期望位置

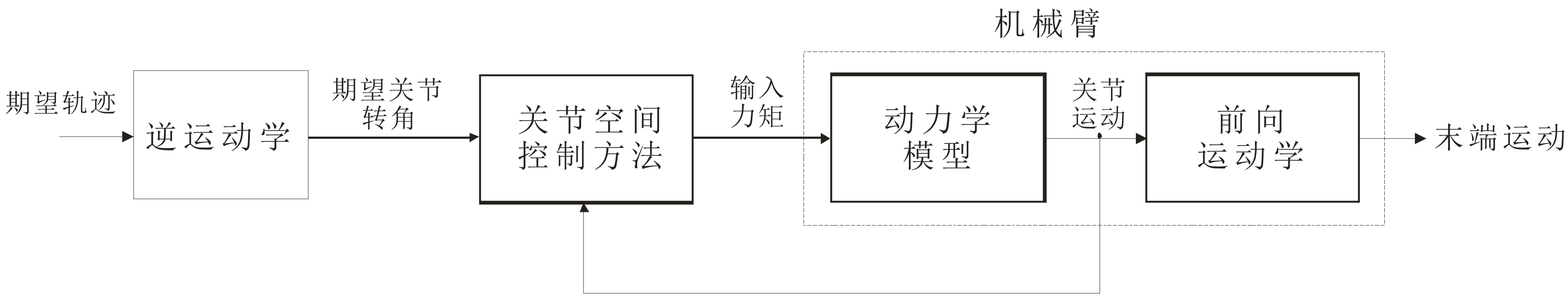
期望位置：定点到定点



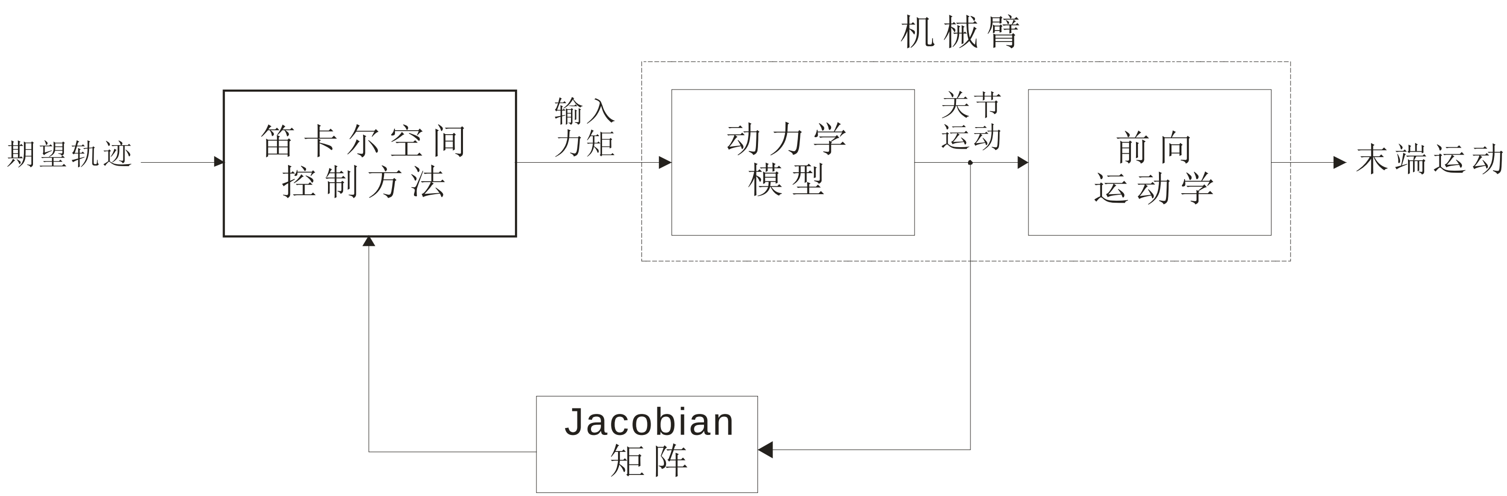
期望位置：时变轨迹

任务空间控制

- 基于关节空间的机器人控制方法



- 基于笛卡尔空间的机器人控制方法

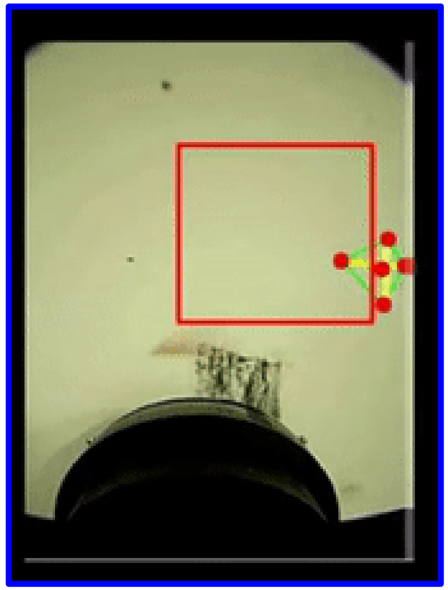


任务空间控制

清華大學 Tsinghua University

- 轨迹追踪问题

机器人喷漆任务



机器人打磨任务

– 控制目标非固定角度
– 时变轨迹
– 同时跟踪位置与速度

任务空间控制

- 基于笛卡尔空间的轨迹追踪控制

$$u = -K_s s + M(q)\ddot{q}_r + \left(\tfrac{1}{2}\dot{M}(q) + S(\dot{q}, q)\right)\dot{q}_r + g(q)$$

动力学补偿

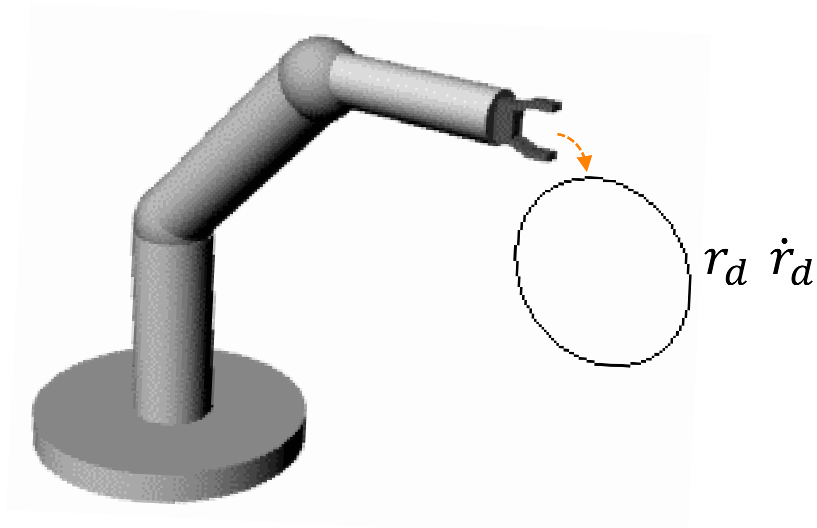
$$s = \dot{q} - \dot{q}_r$$
$$= \dot{q} - J^{-1}(q)(\dot{r}_d - \alpha(r - r_d))$$

滑模向量

$$J(q)s = (\dot{r} - \dot{r}_d) + \alpha(r - r_d)$$

K_s α – 控制参数

r_d $\dot{r}_d$ – 时变轨迹



- 滑模向量是位置误差和速度误差的加权和；
- α 为控制参数，$\alpha > 0$ ；
- 使用滑模向量，轨迹跟踪问题相当于保持在滑模面上。

$$s \to 0$$

任务空间控制

滑模向量（sliding vector） $s = \dot{q} - \dot{q}_r$

$$= \dot{q} - J^{-1}(q)(\dot{r}_d - \alpha(r - r_d))$$

$$s \;\xrightarrow{\text{Input}}\; \boxed{\dfrac{1}{\alpha + p}} \;\xrightarrow{\text{Output}}\; \Delta r$$

➡ 稳定的一阶系统

p – 拉普拉斯算子

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{s} = \dot{q} - \dot{q}_r \\ \dot{\mathbf{s}} = \ddot{q} - \ddot{q}_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q} = \mathbf{s} + \dot{q}_r \\ \ddot{q} = \dot{\mathbf{s}} + \ddot{q}_r \end{cases}$$

机器人动力学方程 $M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \left(\frac{1}{2}\dot{M}(\mathbf{q}) + \mathbf{S}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\right)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = u$

$$\Rightarrow \mathbf{M}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{s}} + \left(\tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) + \mathbf{S}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\right)\mathbf{s} + \boxed{\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \left(\tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) + \mathbf{S}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\right)\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{g}(\mathbf{q})} = u$$

任务空间控制

$$u = -K_s s + M(q)\ddot{q}_r + (\tfrac{1}{2}\dot{M}(q) + S(\dot{q}, q))\dot{q}_r + g(q)$$

闭环方程

$$M(q)\dot{s} + (\tfrac{1}{2}\dot{M}(q) + S(q, \dot{q}) + K_s)s = 0$$

稳定性分析

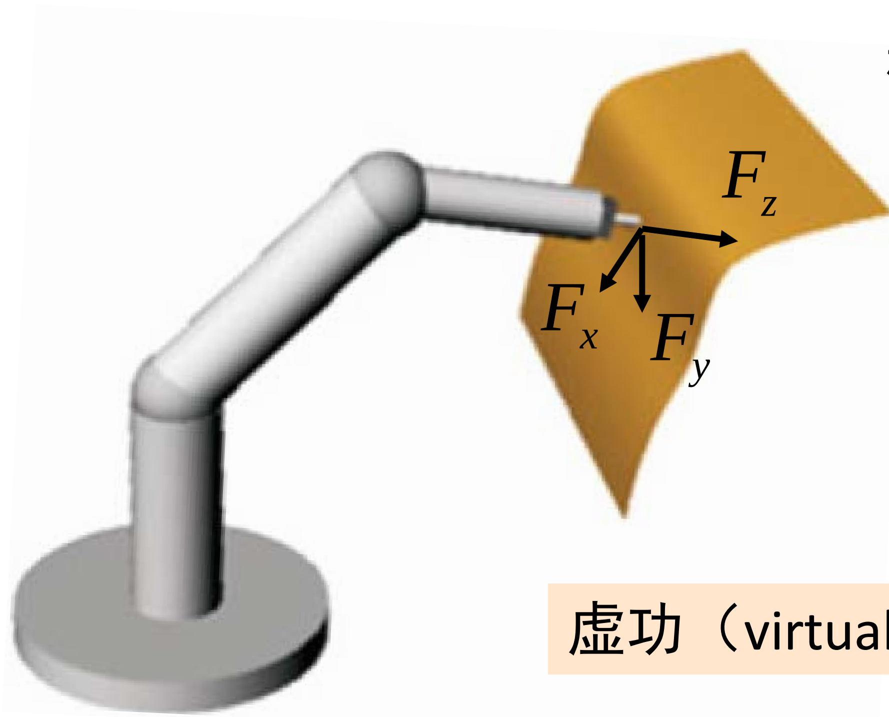
$$V = \frac{1}{2}s^T M(q)s > 0 \Rightarrow$$

$$\dot{V} = -s^T K_s s < 0 \Rightarrow \quad s \to 0 \quad \text{(Barbalat's Lemma)} \Rightarrow \begin{cases} r \to r_d \\ \dot{r} \to \dot{r}_d \end{cases}$$

- J.-J. E. Slotine and Weiping Li, *Applied Nonlinear Control.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1991.
- S. Arimoto, *Control Theory of Nonlinear Mechanical Systems*. Oxford University Press, 1996.

物理性交互

Tsinghua University



机器人末端与外界环境的接触力

$$F=[F_x,F_y,F_z]^T$$

关节空间与任务空间的关系

$$\boxed{\delta r}=J(q)\boxed{\delta q}$$

无穷小位移　　无穷小关节转角

虚功（virtual work）　$\delta W=\tau^T\delta q-F^T\delta r$

由于末端受到接触环境的几何限制　$\delta W=0$ ➡ $\tau^T\delta q=F^T\delta r=F^TJ(q)\delta q$

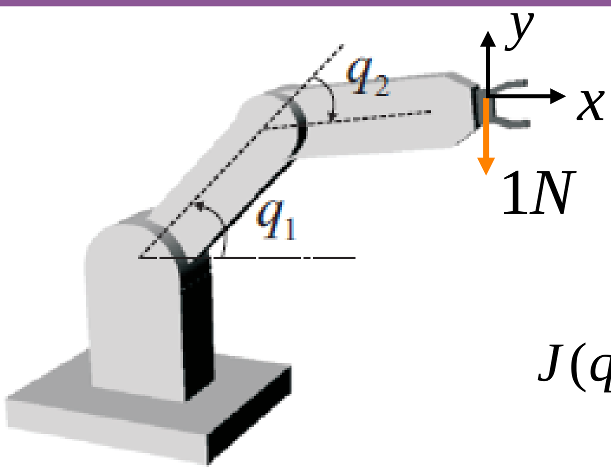
➡ $\boxed{\tau=J^T(q)F}$

➡ 与环境存在物理性交互的机器人动力学

$$M(q)\ddot{q}+(\tfrac{1}{2}\dot{M}(q)+S(q,\dot{q}))\dot{q}+g(q)=u+J^T(q)F$$

H. Asada and J.-J. E. Slotine, *Robot Analysis and Control, Wiley-Interscience,* 1986.

物理性交互



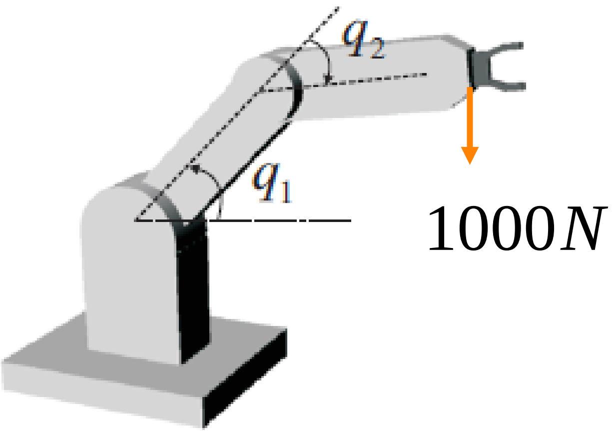
$$J(q)=\begin{bmatrix} -l_1\sin(q_1)-l_2\sin(q_1+q_2) & -l_2\sin(q_1+q_2) \\ l_1\cos(q_1)+l_2\cos(q_1+q_2) & l_2\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

$$J^T(q)=\begin{bmatrix} -l_1\sin(q_1)-l_2\sin(q_1+q_2) & l_1\cos(q_1)+l_2\cos(q_1+q_2) \\ -l_2\sin(q_1+q_2) & l_2\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} F &= [0,-1]^T \\ l_1 &= l_2 = 1 \\ q_1 &= 0, q_2 = \frac{\pi}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau = J^T(q)F \Rightarrow \tau = [-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}]^T$$

物理性交互

清華大學 Tsinghua University



$$J^T(q)=\begin{bmatrix} -l_1\sin(q_1)-l_2\sin(q_1+q_2) & l_1\cos(q_1)+l_2\cos(q_1+q_2) \\ -l_2\sin(q_1+q_2) & l_2\cos(q_1+q_2) \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &F=[0,-1000]^T \\ &l_1=l_2=1 \\ &q_1=\frac{\pi}{2},q_2=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tau=J^T(q)F \Rightarrow \tau=[0,0]^T$$

奇异角度！