机器人动力学讲义

动力学方程

机器人动力学研究关节输入扭矩与关节转角之间的关系。动力学模型与运动学模型的关系如图 1 所示。

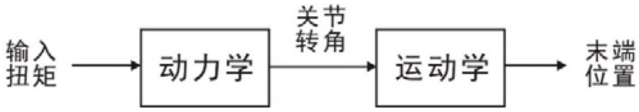

图 1. 动力学模型与运动学模型的关系

在图 1 中，输入机械臂一定的关节扭矩，经过动力学模型之后，机械臂关节转动，通过运动学带动末端执行器完成任务。

一般基于拉格朗日理论推导机器人的动力学模型。拉格朗日理论描述了系统输入与能量的关系，即：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = u + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \tag{1}$$

其中，向量q表示机器人关节角度向量，该向量的维度即机械臂自由度数量；L表示拉格朗日算子，刻画了系统动能与势能的差值，即：

$$L = K - U \tag{2}$$

将公式(2)代入公式(1)，注意到势能函数 U 与关节转速$\dot{q}$无关，进行整理，可以得到公式(3)：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial K}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = u \tag{3}$$

以上公式中，U为势能函数，取决于机械臂的重力。将势能函数U相对于关节转角q求导，可以得到重力对应的关节扭矩$g(q)$：

$$\frac{\partial U}{\partial q} = g(q) \tag{4}$$

此外，K表示系统的动能，其定义为：

$$K = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q} \tag{5}$$

其中，$M(q)$表示机械臂的转动惯量。公式(5)引入的势能定义，可类比于物体在平面运动产生的动能。根据公式(5)，将势能函数K相对于$\dot{q}$求偏导，可以得到：

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}} = M(q)\dot{q} \tag{6}$$

然后公式(6)两边同时相对时间求导，可以得到：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}}\right) = M(q)\ddot{q} + \dot{M}(q)\dot{q} \tag{7}$$

此外，公式(5)相对于向量q求偏导，可以得到：

$$\frac{\partial K}{\partial q} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial q_1}\dot{q} \\ \vdots \\ \dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial q_n}\dot{q} \end{bmatrix} \tag{8}$$

其中，q_1，q_2，…，q_n代表 n 维向量q的元素。

将公式(4)，(7)，(8)代入公式(3)，可以得到机器人的动力学方程：

$$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) = u \tag{9}$$

以上公式的每一项都具有明确的物理意义：第一项表示惯性作用，第二项表示离心力和科里奥利力产生的扭矩，第三项表示由重力产生的扭矩，等式右边表示外部输入的力矩，视为机械臂的控制输入。这里考虑的机械臂关节全部为转动关节；如果机械臂具有平动关节，我们可以将转动惯量与力矩替换为质量与外部作用力，动力学方程的形式与公式(9)类似。

其中，第二项$C(q,\dot{q})\dot{q}$包括了两部分：分别为公式(7)中的第二项，以及公式(8)：

$$C(q,\dot{q})\dot{q} = \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2}[\dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial q_1}\dot{q}, \cdots \dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial q_n}\dot{q}]^T \tag{10}$$

这两项分别对应于离心力与科里奥利力产生的扭矩。

动力学性质

公式(9)描述的机器人动力学模型具有一些重要的性质：

<u>性质一</u>：转动惯量矩阵$M(q)$对称、正定、有界，即

$$\gamma_m I_n \leq M(q) \leq \gamma_M I_n \tag{11}$$

其中，γ_m和γ_M分别表示矩阵$M(q)$的下界和上界，I_n表示 n×n 的单位矩阵。

<u>性质二</u>：定义矩阵:

$$S(q,\dot{q}) = C(q,\dot{q}) - \frac{1}{2}\dot{M}(q) \tag{12}$$

该矩阵为反对称矩阵，即任意非零列向量的转置乘以$S(q,\dot{q})$再乘以该非零列向量

本身，结果等于零：

$$y^T S(q,\dot{q}) y = 0, \forall q,\dot{q}, y \in \Re^n \tag{13}$$

其中，y为任意一个非零列向量。

性质三：公式(9)的等号左边可以参数化为回归矩阵乘以向量的形式：

$$M(q)\ddot{q} + \left(\frac{1}{2}\dot{M}(q) + S(q,\dot{q})\right)\dot{q} + g(q) = Y_d(q,\dot{q},\dot{q},\ddot{q})\theta_d \tag{14}$$

其中，$Y_d(q,\dot{q},\dot{q},\ddot{q})$称为回归矩阵，包含了机械臂的状态量（比如，角加速度$\ddot{q}$，角速度$\dot{q}$，还有关节转角q），θ_d包含了机械臂的动力学参数信息（比如，连杆长度，质量，质心位置，转动惯量等）。

性质四：重力扭矩向量$g(q)$有界的，且同样可以参数化写成回归矩阵与参数向量乘积的形式：

$$g(q) = Y_g(q)\theta_g \tag{15}$$

其中，$Y_g(q)$表示重力对应的回归矩阵，θ_g包含了重力扭矩对应的动力学参数。

以上四条性质对于设计机器人控制算法、进行稳定性分析非常重要：其中，性质一用于构造 Lyapunov 函数，性质二用于简化控制算法，性质三与性质四可以用于设计机器人的自适应控制方法。自适应控制方法具有在线更新未知机器人动力学参数的能力，从而保证即使机器人的精确动力学参数未知，仍然可以保证机械臂的控制精度。

接下来，我们以图 2 所示的单关节机械臂为例，验证其动力学方程满足以上四条性质：

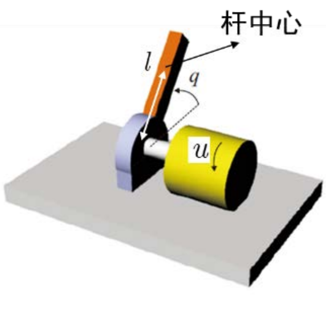

图 2. 单关节机械臂

图 2 所示的单关节机器人动力学方程可以表达为：

$$ml^2\ddot{q} + mlgcos(q) = u \tag{16}$$

其中，m为连杆质量，假设质心位于连杆几何中心，l为杆长，q为转动的角度值，g为重力加速度，u为外部输入的扭矩，视为控制输入。公式(16)中的第一项表示

惯性作用，第二项表示重力作用在连杆产生的扭矩。

对于公式(16)表达的动力学方程，对应的转动惯量为：

$$M = ml^2 \tag{17}$$

因此，转动惯量矩阵退化为常数，满足性质一提到的对称、正定、有界。

其次，根据公式(10)与(17)，离心力和科里奥利力对应的扭矩为：

$$C(q,\dot{q})\dot{q} = \dot{M}(q)\dot{q} - \frac{1}{2}[\dot{q}^T\frac{\partial M}{\partial q_1}\dot{q},\cdots \dot{q}^T\frac{\partial M}{\partial q_n}\dot{q}]^T = 0 \tag{18}$$

即，对应的扭矩恒为零。因为单关节机器人没有受到其他旋转关节带来的影响，所以非惯性坐标系所对应的离心力和科里奥利力扭矩等于零，恒等于零的结果也满足性质二的反对称性质。

此外，公式(16)中的所有项都可以参数化为：

$$ml^2\ddot{q} + mlgcos(q) = [\ddot{q}, cos(q)] \times [ml^2, mlg]^T = Y_d(q,\ddot{q})\theta_d \tag{19}$$

其中，Y_d为回归矩阵，包括了机器人的状态；θ_d为参数向量，包括了动力学参数信息；这些参数为常数，但其准确值可能未知；为解决参数未知问题，可利用公式(14)的参数化性质构造自适应律更新参数值。

重力扭矩同样可以参数化为：

$$g(q) = mlgcos(q) = Y_g(q)\theta_g \tag{20}$$

其中，$Y_g(q) = cos(q), \theta_g = mlg$分别为回归矩阵与参数向量。因此，公式(16)描述的动力学方程同样满足性质三与性质四。

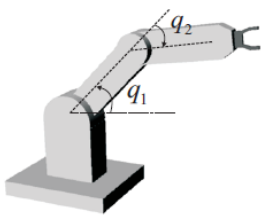

图 3. 两自由度平面机械臂

接下来，考虑图 3 所示的两自由度平面机械臂，同样验证其动力学满足是否满足以上四条性质。两自由度平面机械臂的动力学方程可以描述为：

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + (\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \dot{M}_{11} & \dot{M}_{12} \\ \dot{M}_{21} & \dot{M}_{22} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -m_2\, sin(\,q_2)l_1 l_{c2}(\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2) \\ m_2\, sin(\,q_2)l_1 l_{c2}(\dot{q}_1 + \frac{1}{2}\dot{q}_2) & 0 \end{bmatrix})\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \tag{21}$$

其中，转动惯量矩阵与重力扭矩中的元素定义为：

$$M_{11}=m_1 l_{c1}^2+I_1+m_2[l_1^2+l_{c2}^2+2\,cos(\,q_2)l_1 l_{c2}]+I_2 \tag{22}$$

$$M_{22}=m_2 l_{c2}^2+I_2 \tag{23}$$

$$M_{12}=M_{21}=m_2\,cos(\,q_2)l_1 l_{c2}+m_2 l_{c2}^2+I_2 \tag{24}$$

$$g_1=m_1 g\,cos(\,q_1)l_{c1}+m_2 g[cos(\,q_1+q_2)l_{c2}+cos(\,q_1)l_1] \tag{25}$$

$$g_2=m_2 g\,cos(\,q_1+q_2)l_{c2} \tag{26}$$

在公式(22)至(26)中，m_1，m_2表示两根连杆的质量，l_1，l_2表示两根连杆的长度，I_1，I_2表示连杆的转动惯量，l_{c1}和l_{c2}表示连杆的质心位置。

根据公式(22)-(24)定义的转动惯量矩阵，可以推得：$M(q)$满足对称且有界的性质。为了考量矩阵的正定性，分别求解矩阵的各阶主子式：

$$M_{11}=m_1 l_{c1}^2+I_1+m_2[l_1^2+l_{c2}^2+2\,cos(\,q_2)l_1 l_{c2}]+I_2 \tag{27}$$

易推得：$M_{11}>0$。此外，

$$\begin{gathered}\det\big(M(q)\big)=I_1 I_2+l_1^2 l_{c2}^2 m_2^2\big(1-cos^2(q_2)\big)\\+I_2(l_1^2 m_2+l_{c2}^2 m_1)+I_1 l_{c2}^2 m_2+l_{c1}^2 l_{c2}^2 m_1 m_2>0\end{gathered} \tag{28}$$

因此，转动惯量矩阵$M(q)$的各阶主子式均大于零，具有正定性。以上分析证明性质一满足。

接下来验证动力学方程的性质二。根据(21)，可以求得$S(q,\dot{q})$矩阵为：

$$S(q,\dot{q})=\begin{bmatrix}0 & -m_2\,sin(q_2)l_1 l_{c2}\left(\dot{q}_1+\dfrac{1}{2}\dot{q}_2\right)\\ m_2\,sin(q_2)l_1 l_{c2}\left(\dot{q}_1+\dfrac{1}{2}\dot{q}_2\right) & 0\end{bmatrix}\in\Re^{2\times 2} \tag{29}$$

公式(29)中的主对角线元素为零，反对角线元素符号相反；对于任意的非零向量$y=[y_{1,}y_2]\in R^2$，可以求得：

$$y^T S(q,\dot{q})y=(y_1 y_2-y_1 y_2)m_2\,sin(q_2)l_1 l_{c2}\left(\dot{q}_1+\frac{1}{2}\dot{q}_2\right)=0 \tag{30}$$

因此，动力学方程的性质二满足。

此外，公式(21)的左边三项以及单独的重力扭矩均可表达为回归矩阵与参数向量的形式：

$$M(q)\ddot{q}+\left(\frac{1}{2}\dot{M}(q)+S(q,\dot{q})\right)\dot{q}+g(q)=Y_d(q,\dot{q},\dot{q},\ddot{q})\theta_d=$$

$$\begin{bmatrix}\ddot{q}_1 & \ddot{q}_1+\ddot{q}_2 & 2c_2\ddot{q}_1+c_2\ddot{q}_2-s_2\dot{q}_1\dot{q}_2-s_2(\dot{q}_1\dot{q}_2+\dot{q}_2^2) & c_1 & c_{12}\\ 0 & \ddot{q}_1+\ddot{q}_2 & c_2\ddot{q}_1+s_2\dot{q}_1^2 & 0 & c_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_1l_{c1}^2+m_2l_1^2+I_1\\ m_2l_{c2}^2+I_2\\ m_2l_1l_{c2}\\ m_1gl_{c1}+m_2gl_1\\ m_2gl_{c2}\end{bmatrix} \tag{31}$$

其中，回归矩阵Y_d的维度为 2×5，参数向量θ_d的维度为 5×1。

$$g(q)=Y_g(q)\theta_g=\begin{bmatrix}c_1 & c_{12} & c_1\\ 0 & c_{12} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m_1gl_{c1}\\ m_2gl_{c2}\\ m_2gl_1\end{bmatrix} \tag{32}$$

其中，回归矩阵Y_g的维度为 2×3，参数向量θ_g的维度为 3×1。因此，动力学的性质三与性质四均可满足。这里需要注意公式(31)与(32)的参数化方式并不唯一。

物理性接触

当机械臂末端与环境存在物理性接触的情况下（如图 4 所示），动力学方程中必须考虑接触力对关节扭转产生的影响。

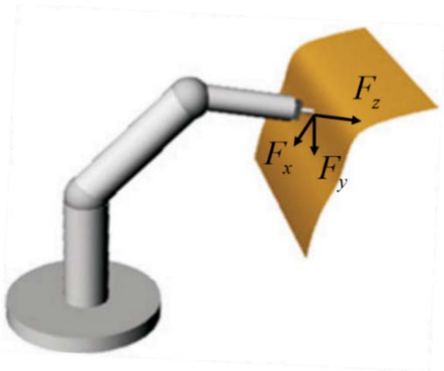

图 4. 机械臂末端执行器与环境存在物理性接触

在图 4 中，机器人末端与环境的交互力表征在笛卡尔坐标系的三个方向：F_x，F_y，F_z。接下来推导接触力与机器人动力学的关系。

首先，Jacobian 矩阵可以将关节空间的微小转角与任务空间的微小位移联系起来：

$$\delta r=J(q)\delta q \tag{33}$$

公式(33)中的δr与δq表示虚位移，即符合约束条件的无穷小位移。

然后我们再引入虚功的概念（virtual work）：扭矩作用在机器人关节造成关节转动所用的功，与外力作用在机器人末端造成末端运动所用功之间的差值，即：

$$\delta W = \tau^T \delta q - F^T \delta r \tag{34}$$

其中τ为作用在机器人关节的扭矩，F为作用在机器人末端的外力。

虚功原理阐明：一个物理系统处于静态平衡，当且仅当，所有施加的外力，经过符合约束条件的虚位移，所做的虚功的总和等于零，即：

$$\delta W = 0 \tag{35}$$

将公式(35)代入公式(34)，可得：

$$\tau^T \delta q = F^T \delta r \tag{36}$$

将公式(36)代入公式(33)且约去两边虚位移可得：

$$r = J^T(q) F \tag{37}$$

公式(37)说明：如果机械臂末端执行器与外界存在物理性接触，接触力将通过公式(37)映射到关节空间产生额外扭矩。此时的动力学方程应该修正为：

$$M(q)\ddot{q} + \left(\frac{1}{2}\dot{M}(q) + S(q,\dot{q})\right)\dot{q} + g(q) = u + J^T(q)F \tag{38}$$

我们接下来回到图 3 所示的两自由度平面机械臂，研究末端外力与关节扭矩的对应关系。该机械臂的 Jacobian 矩阵可通过运动学模型求得：

$$J(q) = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2) & -l_2 \sin(q_1 + q_2) \\ l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2) & l_2 \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} \tag{39}$$

考虑机械臂两连杆长度分别为：

$$l_1 = l_2 = 1 \tag{40}$$

关节转角为：

$$q_1 = 0, q_2 = \frac{\pi}{3} \tag{41}$$

在此配置下，若给机械臂末端执行器施加一个竖直向下的 1N 外力：

$$F = [0, -1]^T \tag{42}$$

将公式(39)-(42)代入公式(37)，即可求得对应的关节扭矩：

$$\tau = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]^T \tag{43}$$

换言之，如果我们需要平衡该竖直向下的外力，我们需要在关节空间反方向施加相反力矩以抵消其作用。