

LQR 二次最优控制

——李昭阳 2021013445

一、实验目的

1. 掌握线性二次最优控制 LQR 控制的原理和控制器设计方法。
2. 通过 LQR 控制实现倒立摆的稳摆平衡控制。
3. 研究参数矩阵 R 和 Q 的变化对倒立摆平衡控制的影响。

二、实验原理

1. 先对系统该旋转摆系统进行建模。状态空间方程为，

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

2. 状态变量定义为，

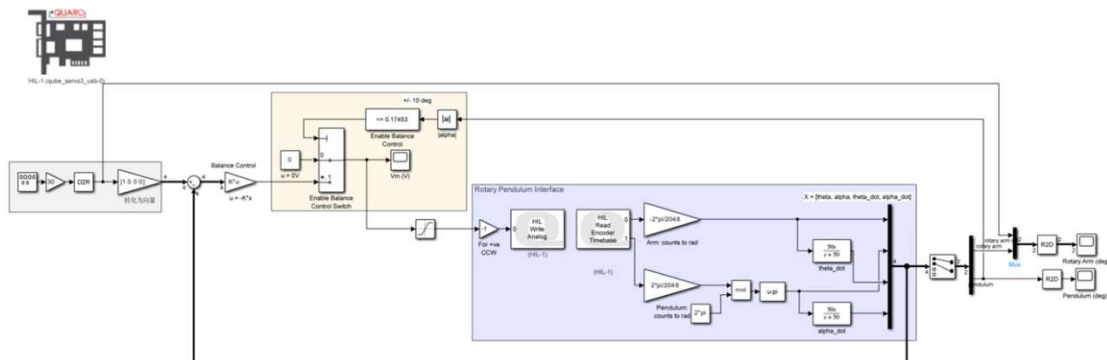
$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) & \alpha(t) & \dot{\theta}(t) & \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix}^T,$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) & \alpha(t) \end{bmatrix}^T,$$

3. 模型的系统矩阵为，

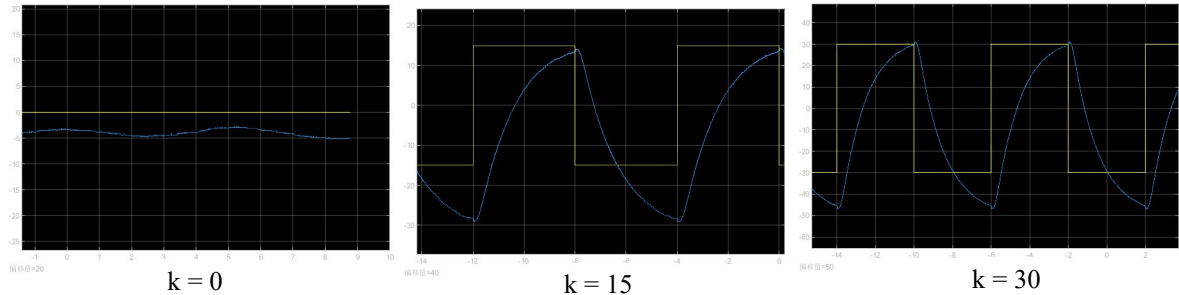
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 152.0057 & -2.5997 & -0.1501 \\ 0 & 264.3080 & -2.5695 & -0.1519 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 56.7136 \\ 56.0542 \end{bmatrix},$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4. 在 Simulink 中搭建包含状态反馈模块的旋转摆模型，系统建模如下，

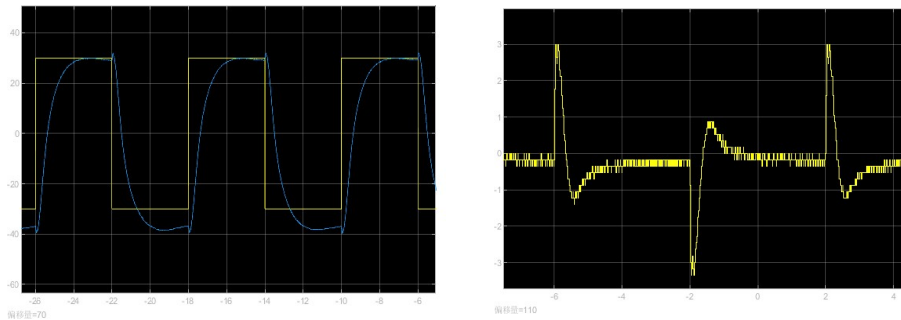


三、实验结果

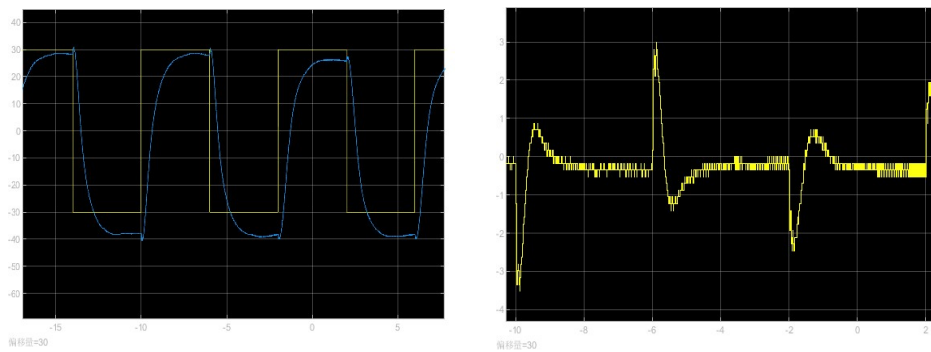
1. 摆平衡后，修改参考信号增益 k ，得到如下跟踪结果。观察可知，随着增益增加，系统响应时间减少，超调量略增加。



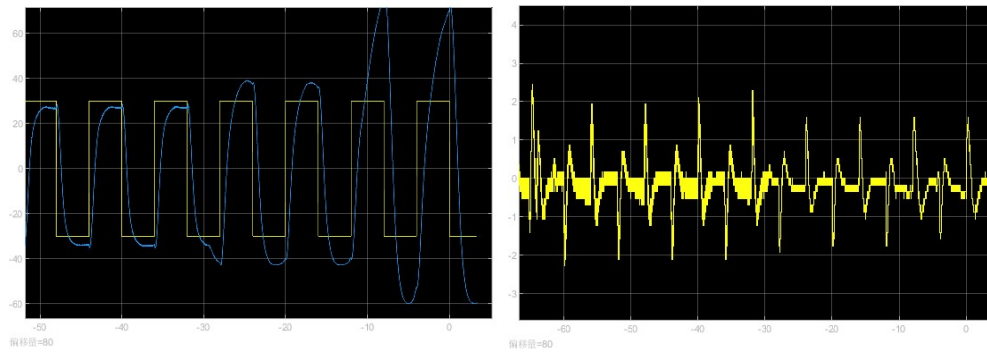
2. $Q = \text{diag}([5 \ 1 \ 1 \ 1])$, $R = 1$ ，重新求解增益矩阵 K ，得到转角和摆角输出曲线如下所示。可以观察到相较于 $Q = \text{diag}([5 \ 1 \ 1 \ 1])$ ，转角更快地进入稳定状态，振荡的幅度也会更小，控制强度更高，系统更加稳定，但摆角震荡增大。由于 Q 的第一个分量对应的是对转角位置的控制，因此其增加会强化对转角位置的控制而使得对摆角的控制强度降低。



3. 调节矩阵 Q 的对角线元素，使得旋转臂转角变化时，旋转摆的倾斜角（超调量）减小。将 $Q = \text{diag}([5 \ 1 \ 1 \ 1])$ 变为 $Q = \text{diag}([5 \ 1 \ 1 \ 10])$ ，得到如下图线。观察可知，转角变化幅度不大，但摆角震荡降低。这可能由于 Q 第四个分量对应的是对摆角角速度的控制，相对于位置控制更为平滑，因此可在增强摆角稳定性的同时，不会对转角的稳定性造成显著影响。



4. 将参数 R 从 $R = 0.5$ 改为 $R = 5$ ，改为 $R = 20$ ，观察转角和摆角变化，得到图像如下。在转角上，当 R 从 1 增大到 5 时，转角曲线振幅增大，达到稳态所需时间增加；从 5 增大到 20 时曲线从临界阻尼态变为了欠阻尼态，出现了类正弦函数的震荡。在摆角上，摆角震荡的峰值逐渐减小，震荡频率显著增加。 R 的增加会减弱控制模块的控制效果，使得受控系统反应速度提高但稳定性降低。



综上， Q 与 R 的参数调整相互影响、互相依存，均会对系统的性能产生不同方面、不同程度的影响。在实际使用过程中，应该合理设计期望的系统性能综合设计 Q ， R 矩阵的取值，以谋求最好的预期效果。