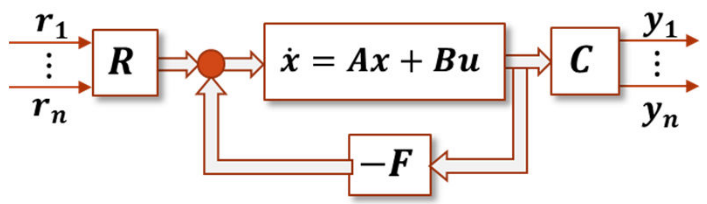
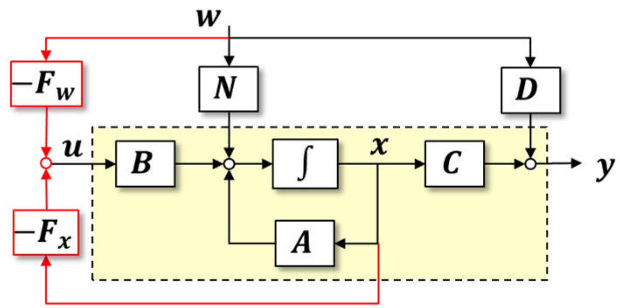
第三章 最优控制

为什么要研究最优控制?

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —





- 解耦控制、抗外扰控制等给出了控制系统的结构设计，在给定结构框架下参数还有选择空间.
- 如何选择“最好”的控制方案?
  - 已有指标 (稳、准、快) 难以反映经济性、能耗等实际关心的指标.
  - 已有方法难以保证控制过程中必须满足的控制或状态约束.
  - “最优”常常是寻找“差不多的”可行解的一种方式.

例：探月飞船软着陆

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

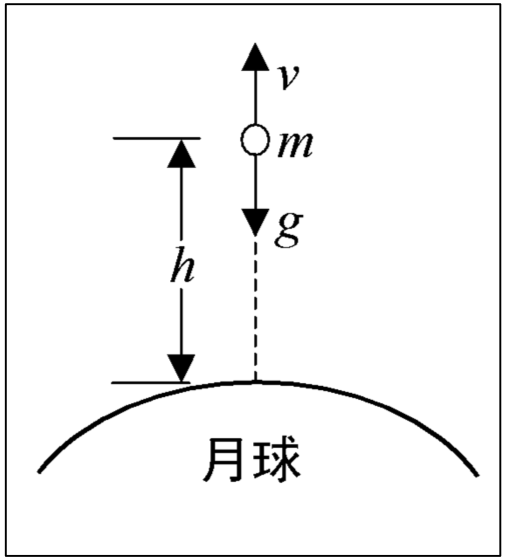
设飞船总质量为$\boldsymbol{m}$，自身质量及所带燃料质量分别为$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{F}$，高度和垂直速度分别为$\boldsymbol{h}$和$\boldsymbol{v}$，月球重力加速度为$\boldsymbol{g}$，自$\boldsymbol{t=0}$时刻进入着陆过程。其运动方程为：

$$\dot{h}(t)=v(t),\qquad h(0)=h_0$$

$$\dot{v}(t)=\frac{f(t)}{m(t)}-g,\quad v(0)=v_0$$

$$\dot{m}(t)=-kf(t),\ \ m(0)=M+F$$

其中 $\boldsymbol{f(t)}$是燃料燃烧产生的推力。



例：探月飞船软着陆

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

要求控制飞船于某一时刻 t_f 实现软着陆，即

$$h(t_f) = 0,\ v(t_f) = 0$$

并且所消耗的燃料最少，即使性能指标

$$J[f(t)] = m(t_f)$$

达到最大,其中推力 $f(t)$ 受发动机最大推力的限制，即

$$0 \le f(t) \le f_{\max}$$

最优控制的形式

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 开环控制解：

确定最佳着陆轨迹 $\boldsymbol{h}^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{v}^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{f}^*(\boldsymbol{t})$
作为跟踪目标.

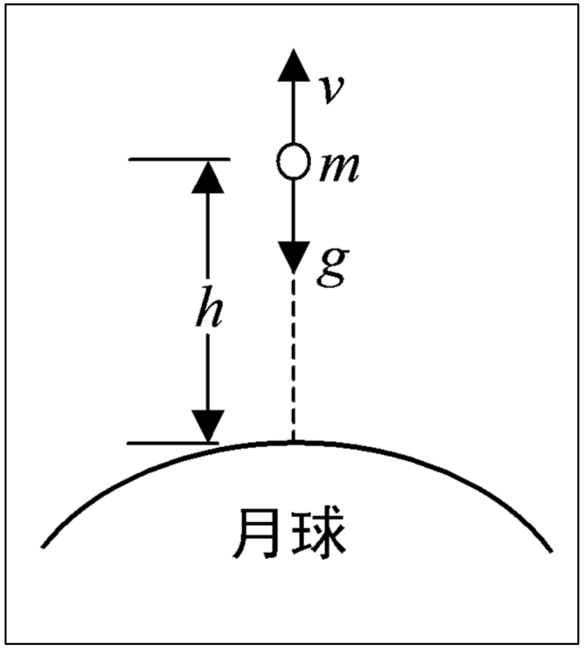
方法：变分法、极小值原理

- 闭环控制解：

确定最佳反馈控制调节方案

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{F}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})]$$

方法：预测控制、动态规划



本章内容

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

1. 最优控制问题
2. 离散时间系统的最优控制
3. 泛函与变分
4. 连续时间系统的最优控制
5. 极小值原理与时间最优控制
6. 线性系统二次型指标的最优控制

最优控制问题

最优控制问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定义：给定受控系统的状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$$

令 $\boldsymbol{U}$为容许控制集。求一容许控制$\boldsymbol{u}(t)\in\boldsymbol{U}$，使系统由给定的初态$\boldsymbol{x}_0$转移到希望的末态或末态集合:

$$\boldsymbol{M}=\left\{\boldsymbol{x}(t_f)\,\middle|\,\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}(t_f),t_f\right)=\boldsymbol{0}\right\}$$

并使如下性能指标最小

$$J[\boldsymbol{u}]=\varphi[\boldsymbol{x}(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}L(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t),t)\mathrm{d}t$$

控制函数$\boldsymbol{u}(\cdot)$的集合$\boldsymbol{U}$是一个无穷维集合!

目标+约束描述

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

目标：以控制 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$和状态$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$为自变量的“函数”（泛函）

$$\min_{\boldsymbol{u}(\cdot),\boldsymbol{x}(\cdot)} \boldsymbol{J}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_f}),\boldsymbol{t_f}] + \int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t_f}} \boldsymbol{L}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t}]\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

过程约束：$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t}],\quad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{x_0}$

末端约束：$\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_f}),\boldsymbol{t_f}\right) = \mathbf{0}$

【类比：$\min\limits_{(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2})} \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}$, s.t., $\boldsymbol{x_1^2} + \boldsymbol{x_2^2} = \mathbf{1}$】

带约束的优化问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

假设$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{x}$是有限维向量.

$$\min_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}),\ \text{其中}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\ \text{满足约束}\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})=\mathbf{0}.$$

思路1【降维】：从方程 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})=\mathbf{0}$ 解出隐函数$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{q}(\boldsymbol{u})$，将原问题化为无约束问题

$$\min_{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}(\boldsymbol{u}))$$

极值条件为

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \boldsymbol{u}}+\left(\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \boldsymbol{x}}=\mathbf{0}.$$

带约束的优化问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

假设$\boldsymbol{u}$和$\boldsymbol{x}$是有限维向量.

$$\min_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}),\ \text{其中}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\ \text{满足约束}\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}.$$

思路2【扩维】：隐函数一般不可解，引入拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$,
将原问题化为无约束问题:

$$\min_{(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})$$

极值条件为（Karush-Kuhn-Tucker，KKT 条件）

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \boldsymbol{u}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{u}}\right)^{\top}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial \boldsymbol{x}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\top}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \mathbf{0}$$

离散时间系统的最优控制

离散时间系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

动态系统的演化常常建立在离散时间之上，例如

- 疫情传播模型，时间以天为单位
- 人口模型，时间以年为单位
- 数字控制系统，时间以采样周期为单位
- 深度神经网络，“时间”以“层”为单位

举例：疫情传播模型

记 $\boldsymbol{I(k)}$为第$\boldsymbol{k}$天的感染总人数，每个患者每天传染$\boldsymbol{\rho}$人:

$$\boldsymbol{I(k+1)=(1+\rho)I(k)} \Rightarrow \boldsymbol{I(k)=(1+\rho)^k I(0)}$$

上述模型不合理，因为总人口是有限的。

- SI（Susceptible-Infectious）模型

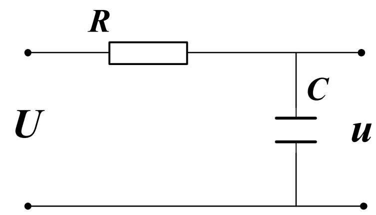
假设总人数不变，$\boldsymbol{i(k)}$为患者所占比例。每个感染者每天接触 $\boldsymbol{\rho}$ 个未感染者:

$$\boldsymbol{i(k+1)=i(k)+\rho i(k)[1-i(k)]} \Rightarrow \boldsymbol{i(k)\to 1}$$

举例：电路模型

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

电容器上的电压是时间的连续函数：



$$u(t) = (u_0 - U)e^{-\frac{t}{RC}} + U，\ u(0) = u_0$$

只考虑离散时刻的电压 $u(k) \leftarrow u(kT_s)$:

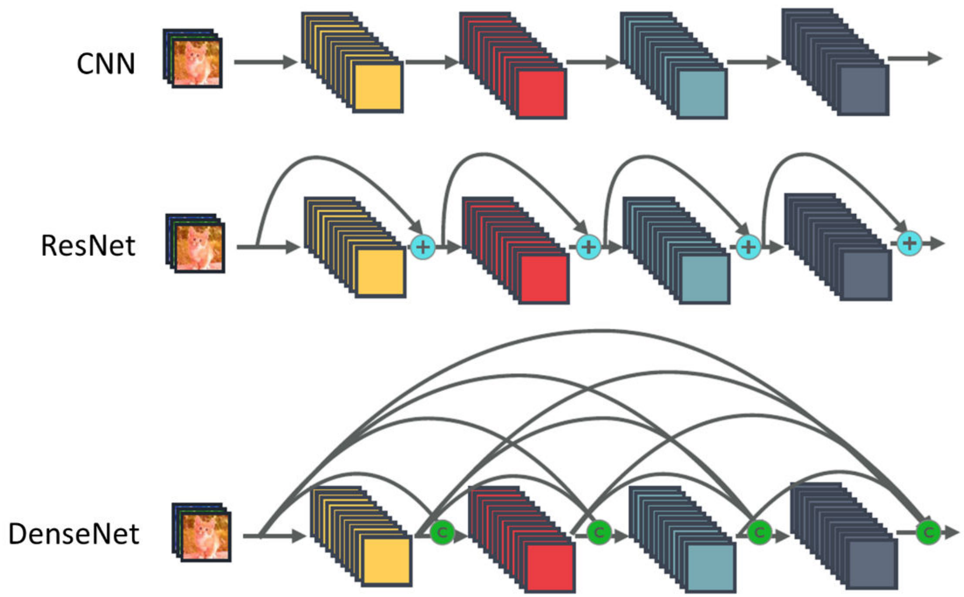
$$u(k) = (u_0 - U)e^{-\frac{kT_s}{RC}} + U \qquad (1)$$

$$u(k+1) = (u_0 - U)e^{-\frac{(k+1)T_s}{RC}} + U \qquad (2)$$

$$\xRightarrow{(2)-(1)\times e^{-\frac{T_s}{RC}}} u(k+1) = e^{-\frac{T_s}{RC}}u(k) + U(1 - e^{-\frac{T_s}{RC}})$$

举例：深度学习中的残差神经网络

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

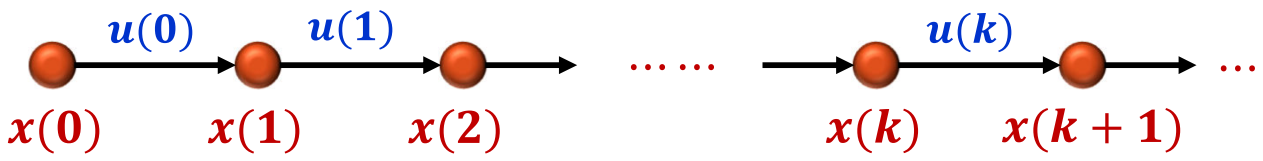


$$x(k+1) = x(k) + S(k)\sigma[A(k)x(k) + b(k)]$$

激活函数

离散时间控制系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



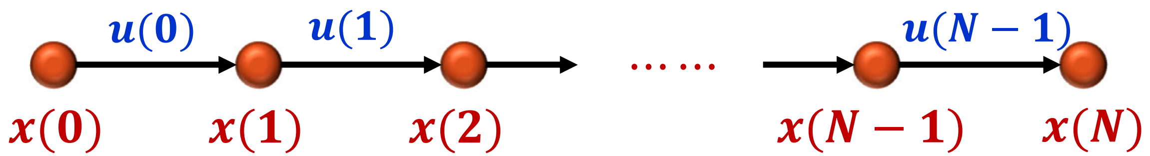
记第k步控制为$u(k)$，该步结束后系统的状态为$x(k)$。

从初始状态$x(0)=x_0$开始，系统按照下列方程演化：

$$x(k+1)=f[x(k),u(k),k].$$

最优控制问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1}) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}]$$

问题：求解最优控制序列$\boldsymbol{u}^*(0), \cdots, \boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{N}-\mathbf{1})$，使得下述性能指标最小。

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{N}), \boldsymbol{N}] + \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{N}-\mathbf{1}} \boldsymbol{L}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}]$$

利用KKT条件求解

目标函数：

$$J[\vec{u},\vec{x}] = \varphi[x(N),\ N] + \sum_{k=0}^{N-1} L[x(k),u(k),k]$$

约束条件 (N组)：

$$\begin{array}{ll}
\lambda(1) & f[x(0),u(0),0]-x(1)=0, \\
\lambda(2) & f[x(1),u(1),1]-x(2)=0, \\
\vdots & \vdots \\
\lambda(N) & f[x(N-1),u(N-1),N-1]-x(N)=0.
\end{array}$$

利用KKT条件求解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

将状态方程看作约束，引入拉格朗日乘子$\{\boldsymbol{\lambda}(1),\cdots,\boldsymbol{\lambda}(N)\}$:

$$J[\vec{u},\vec{x},\vec{\lambda}]=\varphi[x(N),\ N]+\sum_{k=0}^{N-1}L[x(k),u(k),k]$$

3N组变量
$u(0),\cdots,u(N-1)$;
$x(1),\cdots,x(N)$;
$\lambda(1),\cdots,\lambda(N)$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}\lambda^{\top}(k+1)\{f[x(k),u(k),k]-x(k+1)\}$$

$$=\varphi[x(N),\ N]-\sum_{k=1}^{N}\lambda^{\top}(k)x(k)+\sum_{k=0}^{N-1}H(k)$$

其中 $H(k)=L[x(k),u(k),k]+\lambda^{\top}(k+1)f[x(k),\ u(k),\ k]$.

利用KKT条件求解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$J[\vec{u},\vec{x},\vec{\lambda}] = \varphi[x(N),\ N] - \sum_{k=1}^{N} \lambda^{\top}(k)x(k) + \sum_{k=0}^{N-1} H(k)$$

$$H(k) = L[x(k),u(k),k] + \lambda^{\top}(k+1)f[x(k),\ u(k),\ k]$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial J}{\partial u(k)} = \frac{\partial H}{\partial u(k)} = 0 && 【0 \le k \le N-1】\\
&\frac{\partial J}{\partial \lambda(k)} = \frac{\partial H(k-1)}{\partial \lambda(k)} - x(k) = 0 && 【1 \le k \le N】\\
&\frac{\partial J}{\partial x(k)} = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} - \lambda(k) = 0 && 【1 \le k \le N-1】\\
&\frac{\partial J}{\partial x(N)} = \frac{\partial \varphi}{\partial x(N)} - \lambda(N) = 0 && 【k = N】
\end{aligned}\right\} 3N\text{组方程}$$

最优控制必要条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

哈密顿函数：

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{L}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}] + \boldsymbol{\lambda}^{\top}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}]$$

控制条件： $\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k})} = \mathbf{0}$

正则方程：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1}) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{k}], \qquad \boldsymbol{x}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{k}) = \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})} + \left[\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})}\right]^{\top} \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1}), \qquad \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{N}) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{N})}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

系统 $x(k+1) = -x(k) + u(k), x(0) = 3$，求最优控制序列$\{u(0), u(1)\}$。

$$J = \frac{1}{2}x^2(2) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1} u^2(k)$$

解：$H(k) = \frac{1}{2}u^2(k) + \lambda(k+1)[u(k) - x(k)]$

- $\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)} = u(k) + \lambda(k+1) = 0 \Rightarrow u(0) = -\lambda(1), u(1) = -\lambda(2)$
- $x(1) = -3 + u(0),\ x(2) = 3 - u(0) + u(1)$
- $\lambda(k) = \frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} = -\lambda(k+1) \Rightarrow \lambda(1) = -\lambda(2)$
- $\lambda(2) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(2)} = x(2) \quad \Rightarrow x(2) = 1, u(0) = 1, u(1) = -1 \Rightarrow J^* = \frac{3}{2}$

直接求解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

对于线性时不变受控系统：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k),\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0$$

考虑有限拍调节器问题：

$$J=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top}(N)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(N)+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\boldsymbol{x}^{\top}(k)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{u}^{\top}(k)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(k)]$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{Q}$非负定，$\boldsymbol{R}$正定。

由于状态方程有解析解，因此可直接求解最优控制。

直接求解

$$
\begin{aligned}
x(k) &= Ax(k-1) + Bu(k-1) \\
&= A[Ax(k-2) + Bu(k-2)] + Bu(k-1) \\
&= A^2x(k-2) + ABu(k-2) + Bu(k-1) \\
&= \cdots \\
&= A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-j-1}Bu(j)
\end{aligned}
$$

前N步的解可写作如下矩阵形式：

$$
\begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \vdots \\ x(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ A^2 \\ \vdots \\ A^N \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ AB & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A^{N-1}B & A^{N-2}B & \cdots & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ \vdots \\ u(N-1) \end{bmatrix}
$$

简写作 $X(N) = G(N)x_0 + H(N)U(N)$

直接求解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

优化指标:

$$J=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{N})+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}[\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})+\boldsymbol{u}^{\top}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k})]$$

$$=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{X}^{\top}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{Q}_{F}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{N})+\boldsymbol{U}^{\top}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{N})+\boldsymbol{x}_0^{\top}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_0\}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_F(\boldsymbol{N})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{F}\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}$.

直接求解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

将 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{N})=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{k})$ 代入优化指标：

$$J=\frac{1}{2}\{X^\top(N)Q_F(N)X(N)+U^\top(N)R(N)U(N)+x_0^\top Qx_0\}$$

得： $J[U(N)]$

$$=\frac{1}{2}\{[G(N)x_0+H(N)U(k)]^\top Q_F(N)[G(N)x_0+H(N)U(k)]$$

$$+U^\top(N)R(N)U(N)+x_0^\top Qx_0\}$$

容易证明，使 J 最小的控制序列为

$$U^*(N)=-[R(N)+H^\top(N)Q_F(N)H(N)]^{-1}H^\top(N)Q_F(k)G(k)x_0$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

对系统 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})=-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})+\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}), \boldsymbol{x}(\mathbf{0})=\mathbf{3}$，及如下性能指标，求最优控制。

$$J=\frac{1}{2}x^2(2)+\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{2}u^2(k)$$

解： $A=-1,\quad B=1,\quad F=1,\quad Q=0,\quad R=1$

$$X(2)=\begin{bmatrix}x(1)\\x(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}U(2),\qquad U(2)=\begin{bmatrix}u(0)\\u(1)\end{bmatrix}$$

$$J=\frac{1}{2}X^{\top}(2)\begin{bmatrix}Q&\\&F\end{bmatrix}X(2)+\frac{1}{2}U^{\top}(2)\begin{bmatrix}R&\\&R\end{bmatrix}U(2)$$

最优解： $$U(2)=-\left(\begin{bmatrix}1&\\&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}^{\top}\begin{bmatrix}0&\\&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\times\begin{bmatrix}1&0\\-1&1\end{bmatrix}^{\top}\begin{bmatrix}0&\\&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

泛函与变分

泛函 - “函数的函数”

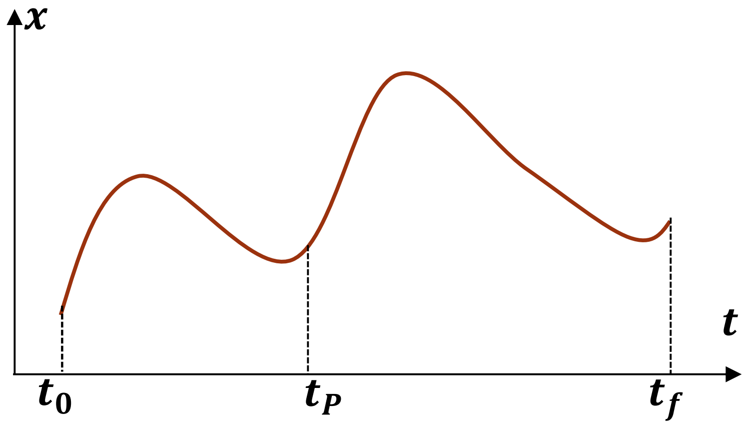
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

泛函 $J: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ 是(无穷维)函数集合$\mathbb{Y}$到实数集合的映射，其自变量称为“宗量”。

例1：曲线上某点的函数值 $J[x]=F[x(t_P)]$

例2：曲线$x(t)$与横轴所围面积：

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_f} x(t)\mathrm{d}t$$



例3：曲线$x(t)$的弧长：

$$J[x]=\int_{t_0}^{t_f}\left[1+\dot{x}^2(t)\right]^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

最优控制问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\min_{u(\cdot),x(\cdot)} J[u(\cdot),x(\cdot)] = \varphi[x(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L[x(t),u(t),t]\mathrm{d}t$$

约束:

1） $\dot{x}(t) = f[x(t),u(t),t], \quad x(t_0) = x_0$

2） $M = \{x(t_f) \mid g\big(x(t_f),t_f\big) = 0\}$

目标和约束均是以函数 $u(t)$和$x(t)$ 为自变量的“函数”

——泛函(functional)：自变量的集合是一个无穷维集合!

概念回顾：函数的微分

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

函数 $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \mathbb{R}$ 的微分

$$\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n) = \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_1} \mathbf{d}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_n} \mathbf{d}\boldsymbol{x}_n$$

函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0$处取极值的必要（非充分）条件：

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^0) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_1}, \cdots, \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}_n} \right) \Big|_{\boldsymbol{x}^0} = \mathbf{0}.$$

如何定义并计算泛函的“微分”(→ 变分，variation)？

泛函的变分（← 微分）

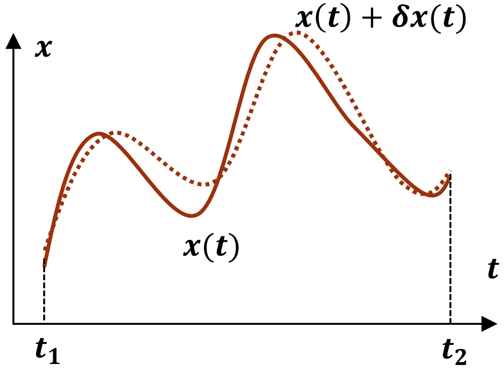
对于积分型泛函 $J[x]=\int_{t_1}^{t_2} F[x(t)]\,\mathrm{d}t$，其中$t_0$和$t_f$固定。

考察微扰$\delta x(t)$下泛函的变化：

$$\Delta J = J[x+\delta x]-J[x]$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\{F[x(t)+\delta x(t)]-F[x(t)]\}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial x}\delta x(t)+o\{[\delta x(t)]^2\}\right\}\mathrm{d}t$$



$$\Rightarrow\ \delta J=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial F}{\partial x}\delta x(t)\mathrm{d}t$$ (忽略高阶无穷小)

泛函的变分（← 微分）

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

示例： 泛函 $J[x]=\int_0^1 x^2(t)\mathrm{d}t$的变分

$$\delta J=\int_0^1 \frac{\partial\left[x^2\right]}{\partial x}\delta x(t)\mathrm{d}x \;=2\int_0^1 x(t)\delta x(t)\mathrm{d}t$$

推论：对于有多个宗量的泛函：

$$J[x_1,\cdots,x_n]=\int_{t_0}^{t_f} F\left[x_1(t),\cdots,x_n(t),t\right]\mathrm{d}t$$

则

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial F}{\partial x_1}\delta x_1(t)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial x_n}\delta x_n(t)\right]\mathrm{d}t$$

泛函的极值

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

若泛函$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{x}]$对于充分接近$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t})$的任何曲线$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$，都有

$$\boldsymbol{\Delta J}=\boldsymbol{J}[\boldsymbol{x}]-\boldsymbol{J}[\boldsymbol{x}^*]\geq \boldsymbol{0}\quad (\leq \boldsymbol{0})$$

则称泛函 $\boldsymbol{J}[\boldsymbol{x}]$在曲线$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t})$上达到极小值（极大值）.

多元函数$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$在$\boldsymbol{x_0}$取极值的必要条件是$\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})=\boldsymbol{0}$.

推广：泛函$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{x}]$在$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t})$取极值的必要条件是 $\boldsymbol{\delta J}[\boldsymbol{x}^*]=\boldsymbol{0}$

例：$\boldsymbol{\delta}\left[\int_0^1 \boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{t})\mathbf{d}\boldsymbol{t}\right]=\boldsymbol{2}\int_0^1 \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{\delta x}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{dx}=0$

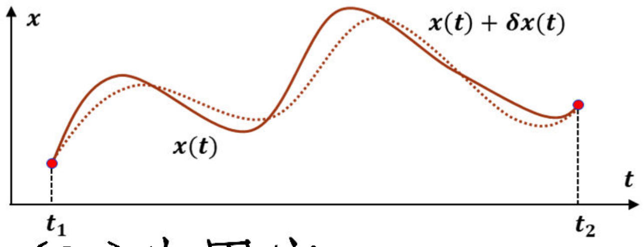
$\Rightarrow \boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t})\equiv \boldsymbol{0}$　【由$\boldsymbol{\delta x}(\boldsymbol{t})$的任意性和$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$的连续性】

欧拉-拉格朗日方程

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考虑积分型泛函：

$$J[x(\cdot)]=\int_{t_0}^{t_f}F[x(t),\dot{x}(t),t]\,\mathrm{d}t$$



其中t_0和t_f 固定，起点$x(t_0)$和终点$x(t_f)$也固定。

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\delta x(t)+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x}(t)\right)\mathrm{d}t \qquad 【\mathrm{d}(\delta x)=\delta\dot{x}\mathrm{d}t】$$

$$=\int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial F}{\partial x}\delta x(t)\mathrm{d}t+\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x(t)\bigg|_{t_0}^{t_f}-\int_{t_0}^{t_f}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\delta x(t)\mathrm{d}t$$

$$=\cancel{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x(t)\bigg|_{t_0}^{t_f}}+\int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x(t)\mathrm{d}t$$

欧拉-拉格朗日方程

由于$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)$和$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f)$固定，$\boldsymbol{\delta x}(\boldsymbol{t}_f) = \boldsymbol{\delta x}(\boldsymbol{t}_0) = \mathbf{0}$.

由$\boldsymbol{\delta J} = \mathbf{0}$得:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right] \delta x(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

由$\boldsymbol{\delta x}(\boldsymbol{t})$的任意性得到如下欧拉-拉格朗日方程:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考察以下泛函

$$J = \int_1^2 \left[\dot{x}(t) + \dot{x}^2(t)t^2\right] \mathrm{d}t$$

若固定 $x(1) = 1$，$x(2) = 2$，求 $x^*(t)$使得 J 达到极值。

解：欧拉-拉格朗日方程为：

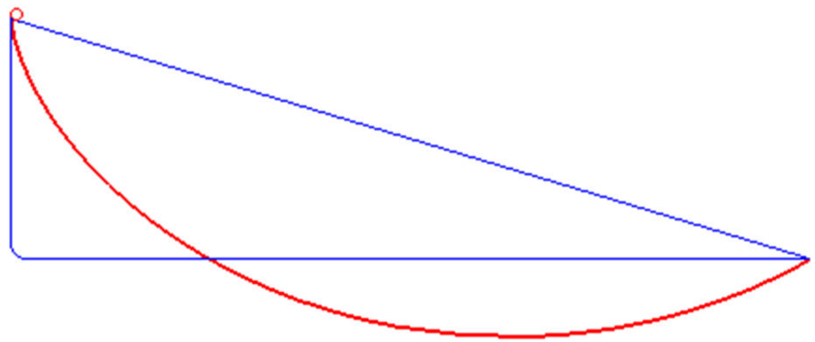
$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 + 2\dot{x}t^2\right) = 0 \Rightarrow \ t\ddot{x} + 2\dot{x} = 0$$

结合边界条件 $x(1) = 1$，$x(2) = 2$，可得其解为

$$x^*(t) = -2t^{-1} + 3.$$

最速降线问题（brachistochrone)

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



变分法的诞生：1696年，J. Bernoulli 发起的数学挑战，求无摩擦情况下两端固定的最速下降曲线：

$$\min_{y(x)} \boldsymbol{T}[\boldsymbol{y}] = \int_0^a \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{l}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})} = \int_0^a \frac{\sqrt{\mathbf{1} + \dot{\boldsymbol{y}}^2(\boldsymbol{x})}}{\sqrt{\mathbf{2}\boldsymbol{g}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})}} \mathbf{d}\boldsymbol{x}$$

连续时间系统的最优控制

最优控制问题分类

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

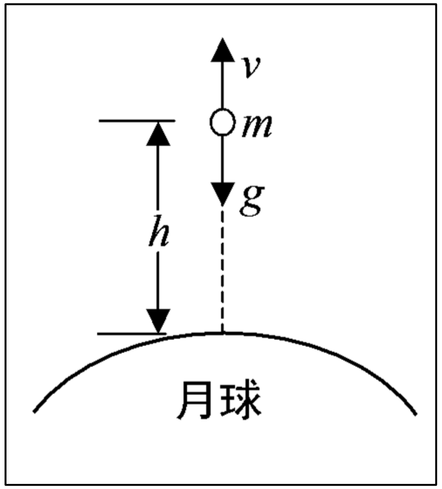
$$\min_{u(\cdot),x(\cdot)} J[u,x]=\varphi[x(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f} L[x(t),u(t),t]\mathrm{d}t$$

过程约束：$\dot{x}(t)=f[x(t),u(t),t],\quad x(t_0)=x_0$

末端约束：$M=\{x(t_f)|\ g(x(t_f),t_f)=0\}$

- 末端时刻 t_f 固定 / 不固定
- 末端状态 $x(t_f)$ 固定 / 不固定

例：飞船软着陆问题末端时刻不固定，
但末端状态（高度和速度）固定.



末端时刻固定/末端状态自由问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

受控对象：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$，其中$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

寻找$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t})$使性能指标：

$$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{u}, x] = \boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_f}), \boldsymbol{t_f}] + \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t})\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

最小，其中$\boldsymbol{t_0}$和$\boldsymbol{t_f}$固定，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0}) = \boldsymbol{x_0}$给定，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_f})$自由。

对象方程可看作是对$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$的过程约束：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}) = \mathbf{0}$$

拉格朗日法求极值

针对动态约束

$$\dot{x} - f(x, u, t) = 0$$

引入Lagrange 乘子 $\lambda(t) = [\,\lambda_1(t),\ \cdots,\ \lambda_n(t)]^{\top}$, 令

$$J_1[u, x, \lambda] = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{L(x, u, t) + \lambda^{\top}[f(x, u, t) - \dot{x}]\}\mathrm{d}t$$

极值条件（KKT条件的推广）：

$$\delta J_1[u, x(\cdot), \lambda(\cdot)] = 0$$

极值条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\delta J_1[u,x,\lambda] = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}\delta x(t_f) + \delta\left(\int_{t_0}^{t_f}\{L(x,u,t) + \lambda^\top[f(x,u,t) - \dot{x}]\}\mathrm{d}t\right)$$

$$= \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}\delta x(t_f)} + \delta\left(\int_{t_0}^{t_f}\{\overbrace{L(x,u,t) + \lambda^\top f(x,u,t)}^{H(u,x,\lambda,t)} - \lambda^\top \dot{x}\}\mathrm{d}t\right)$$

$$\delta\left(\int_{t_0}^{t_f} F[z(t),\dot{z}(t),t]\,\mathrm{d}t\right) = \frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\delta z(t)\bigg|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{z}}\right)\right]\delta z(t)\mathrm{d}t$$

$z = (u,x,\lambda)$

$$-\lambda(t)\delta x(t)\Big|_{t_0}^{t_f} = \boxed{-\lambda(t_f)\delta x(t_f)}$$

$$\int_{t_0}^{t_f}\boxed{\left\{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^\top \delta x(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^\top \delta u(t) + [f(x,u,t) - \dot{x}]^\top \delta\lambda(t) + \dot{\lambda}\delta x(t)\right\}}\delta z(t)\mathrm{d}t$$

极值条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\delta J_1 = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)} - \lambda(t_f)\right]^{\mathrm{T}} \delta x(t_f)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^{\mathrm{T}} \delta u(t) + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}\right)^{\mathrm{T}} \delta x(t) + [f(x,u,t) - \dot{x}]\delta\lambda(t) \right\} \mathrm{d}t$$

由极值条件$\delta J_1 = 0$，下列条件必须满足

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \qquad \dot{x} = f(x,u,t), \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

边界条件：

$$x(t_0) = x_0, \qquad \lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}.$$

变分法求最优控制总结

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：末时刻固定末状态自由的最优控制问题，其最优解应满足的必要条件为：

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0,$$

其中$H(x,u,\lambda,t) = \lambda^{\top} f(x,u,t) + L(x,u,t)$，且满足正则方程(两点边值问题)：

$$\dot{x} = f(x,u,t), \quad x(t_0) = x_0$$
$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}$$

注：还应满足二阶条件$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \geq 0$ (极小值问题).

求解最优控制问题步骤

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

1. 根据状态方程 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$和性能指标

$$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{u}(\cdot)] = \boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f), \boldsymbol{t}_f] + \int_{\boldsymbol{t}_0}^{\boldsymbol{t}_f} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

写出$\boldsymbol{H}$函数：$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}) + \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$

2. 从控制方程 $\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{u}} = \mathbf{0}$ 解出 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t})$

3. 根据正则方程及其边界条件解最优轨迹 $\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t})$：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}), & \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{x}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}), & \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{t}_f) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f)} \end{cases}$$

4. 计算最优控制 $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{q}[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{t}]$.

示例

已知受控系统

$$\dot{x} = u,\quad x(t_0) = x_0$$

求$u(t)$使下述性能指标最小（其中终端时刻t_f固定）：

$$J = \frac{1}{2}x^2(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} u^2(t)\mathrm{d}t$$

解：这是t_f固定，$x(t_f)$自由的最优控制问题。

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- H函数： $H = L + \lambda f = (1/2)u^2 + \lambda u$
- 控制方程： $\partial H/\partial u = u + \lambda = 0$，即 $u = -\lambda$
- 正则方程： $\dot{x} = u = -\lambda$， $\dot{\lambda} = -\partial H/\partial x = 0$
- 边界条件： $x(t_0) = x_0$， $\lambda(t_f) = \partial \varphi/\partial x(t_f) = x(t_f)$
- 解方程得： $x(t) = -x(t_f)(t - t_0) + x_0$
- $u^*(t) = -\lambda(t) \equiv -x\left(t_f\right) = -\frac{x_0}{1+\left(t_f-t_0\right)}$
- $J^* = \frac{1}{2}x^{*2}\left(t_f\right) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[u^*(t)]^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{x_0^2}{1+\left(t_f-t_0\right)}$

其它末端条件下的最优控制问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 根据末端情况的不同，有4类问题：
  - 末端时刻固定 / 末端状态自由
  - 末端时刻固定 / 末端状态固定或受限
  - 末端时刻自由 / 末端状态自由
  - 末端时刻自由 / 末端状态固定或受限
- 最优控制的推导过程类似，最优控制解的必要条件中包含相同的哈密顿函数、控制方程、正则方程和初始条件，仅末端条件不同。

最优控制必要条件（共同部分）

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- H函数： $H(x,u,\lambda,t)=\lambda^{\top}f(x,u,t)+L(x,u,t)$
- 控制方程： $\dfrac{\partial H}{\partial u}=0 \Rightarrow \quad u=q(x,\lambda,t)$
- 正则方程： $\begin{cases}\dot{x}=f(x,q(x,\lambda,t),t) & \text{状态方程}\\ \dot{\lambda}=-\dfrac{\partial}{\partial x}H(x,q(x,\lambda,t),t) & \text{协态方程}\end{cases}$
- 初始条件： $x(t_0)=x_0\in\mathbb{R}^n$
- 还需要 n 个边界条件确定正则方程的解.

末端状态固定的情况

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- H函数： $H(x,u,\lambda,t)=\lambda^{\top}f(x,u,t)+L(x,u,t)$
- 控制方程： $\dfrac{\partial H}{\partial u}=0 \Rightarrow \ u=q(x,\lambda)$
- 正则方程： $\begin{cases}\dot{x}=f(x,q(x,\lambda),t) & \text{状态方程}\\ \dot{\lambda}=-\dfrac{\partial}{\partial x}H(x,q(x,\lambda),t) & \text{协态方程}\end{cases}$
- 初始条件： $x(t_0)=x_0$
- 终端条件： $x(t_f)=x_f$

末端状态受约束的情况

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

受控对象：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{x}_0$

性能指标：

$$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}] = \boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f), \boldsymbol{t}_f] + \int_{\boldsymbol{t}_0}^{\boldsymbol{t}_f} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t}) \mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

边界条件：$\boldsymbol{t}_0$和 $\boldsymbol{t}_f$ 固定，终端状态满足 $\boldsymbol{p}$ 个约束

$$\boldsymbol{g}\big[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f), \boldsymbol{t}_f\big] = \mathbf{0},\ \ \boldsymbol{g}[\cdot] \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{p}}.$$

针对状态方程和终端约束分别引入Lagrange乘子：

$$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{t}) = [\boldsymbol{\lambda}_1(\boldsymbol{t}), \cdots, \boldsymbol{\lambda}_n(\boldsymbol{t})]^\top,\ \ \boldsymbol{\mu} = [\boldsymbol{\mu}_1, \cdots, \boldsymbol{\mu}_p]^\top$$

末端状态受约束的情况

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$J_1[u, x, \lambda, \mu] = \varphi[x(t_f), t_f] + \mu^\top g[x(t_f), t_f]$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} \{L(x, u, t) + \lambda^\top [f(x, u, t) - \dot{x}]\} \mathrm{d}t$$

$$= \hat{\varphi}[x(t_f), t_f, \mu] + \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u, \lambda, t) - \lambda^\top \dot{x}] \mathrm{d}t$$

$$\delta J_1 = \left[\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x(t_f)} - \lambda(t_f)\right]^\top \delta x(t_f) + g^\top [x(t_f), t_f] \delta\mu$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\lambda}\right]^\top \delta x(t) + [f(x, u, t) - \dot{x}]^\top \delta\lambda(t) + \left[\frac{\partial H}{\partial u}\right]^\top \delta u(t) \right\} \mathrm{d}t$$

末端状态受约束的情况

- H函数： $H(x,u,\lambda,t)=\lambda^{\top}f(x,u,t)+L(x,u,t)$
- 控制方程： $\dfrac{\partial H}{\partial u}=0 \Rightarrow \ u=q(x,\lambda)$
- 正则方程： $\begin{cases}\dot{x}=f(x,q(x,\lambda),t) & \text{状态方程}\\ \dot{\lambda}=-\dfrac{\partial}{\partial x}H(x,q(x,\lambda),t) & \text{协态方程}\end{cases}$
- 初始条件： $x(t_0)=x_0$
- 末端条件： $g[x(t_f),t_f]=0,\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}+\left(\dfrac{\partial g[x(t_f),t_f]}{\partial x(t_f)}\right)^{\top}\mu$

示例： t_f固定，$x(t_f)$受约束

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

已知受控系统

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ x_1(0) = x_2(0) = 0$$

求$u(t)$使得$t_f = 1$时满足$x_1(1) + x_2(1) = 1$，且下述性能指标最小：

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 \mathrm{d}t$$

解： 写出 H 函数

$$H = L + \lambda^T f = (1/2)u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$$

示例： t_f固定，$x(t_f)$受约束

$\boldsymbol{H}$函数：$\boldsymbol{H = L + \lambda^T f = (1/2)u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u}$

控制方程：$\boldsymbol{\partial H/\partial u = u + \lambda_2 = 0}$，即 $\boldsymbol{u = -\lambda_2}$

正则方程：$\boldsymbol{\dot{x}_1 = x_2}$，$\boldsymbol{\dot{x}_2 = -\lambda_2}$，$\boldsymbol{\dot{\lambda}_1 = 0}$，$\boldsymbol{\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1}$

边界条件：$\boldsymbol{x_1(0) = 0}$，$\boldsymbol{x_2(0) = 0}$

根据终端状态约束 $\boldsymbol{g(x(1)) = x_1(1) + x_2(1) - 1 = 0}$

$$\boldsymbol{\lambda(1) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(1)} + \frac{\partial g}{\partial x(1)}\mu = \begin{bmatrix} \mu \\ \mu \end{bmatrix}}$$

示例： t_f固定，$x(t_f)$受约束

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

解协态方程：$\dot{\lambda}_1 = 0$，$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1, \lambda_1(1) = \lambda_2(1) = \mu$

易得： $\lambda_1(t) = \mu,\quad \lambda_2(t) = -\mu t + 2\mu$

控制律： $u(t) = -\lambda_2(t) = \mu t - 2\mu$

继续求解状态方程：

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = \mu t - 2\mu;\ x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0$$

解得：

$$x_2(t) = \frac{1}{2}\mu t^2 - 2\mu t,\ x_1(t) = \frac{1}{6}\mu t^3 - \mu t^2.$$

示例： t_f固定，$x(t_f)$受约束

再利用边界条件：$g(x(1)) = x_1(1) + x_2(1) - 1 = 0$

$$\frac{1}{2}\mu - 2\mu + \frac{1}{6}\mu - \mu = 1 \Rightarrow \mu = -\frac{3}{7}$$

最后得： $u^*(t) = \mu t - 2\mu = -\frac{3}{7}t + \frac{6}{7}$

$$x_1^*(t) = -\frac{1}{14}t^3 + \frac{3}{7}t^2$$

$$x_2^*(t) = -\frac{3}{14}t^2 + \frac{6}{7}t$$

边界条件总结 (末端时间固定)

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

	t_f固定	t_f可变
$x(t_f)$自由	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}$	
$x(t_f)$固定	$x(t_f)=x_f$	
$x(t_f)$受约	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}+\dfrac{\partial g^T}{\partial x(t_f)}\mu$ $g[x(t_f),\ t_f]=0$	

末端时间自由的情况

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

受控对象：$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})$，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{x}_0$

性能指标：

$$\boldsymbol{J}[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}_f] = \boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f), \boldsymbol{t}_f] + \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{t})\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

边界条件：$\boldsymbol{t}_f$ 自由，以末端状态 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f)$ 自由情况为例。

$$\boxed{\boldsymbol{J}_1[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}_f] = \boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f), \boldsymbol{t}_f] + \int_{t_0}^{t_f} [\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{t}) - \boldsymbol{\lambda}^\top \dot{\boldsymbol{x}}]\mathbf{d}\boldsymbol{t}}$$

需要额外条件 $\frac{\partial J_1}{\partial t_f} = \mathbf{0}$ 以确定最优控制对应 $\boldsymbol{t}_f$ 的取值。

关于末端时间的变分条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$0=\frac{\partial}{\partial t_f}\left\{\varphi\left[x(t_f),t_f\right]+\int_{t_0}^{t_f}\left[H(x,u,\lambda,t)-\lambda^{\top}\dot{x}\right]\mathrm{d}t\right\}$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}\dot{x}(t_f)+\frac{\partial\varphi}{\partial t_f}+H\left(x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),t_f\right)-\lambda^{\top}(t_f)\dot{x}(t_f)$$

$$=\cancel{\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}-\lambda^{\top}(t_f)\right]}\dot{x}(t_f)+\frac{\partial\varphi}{\partial t_f}+H\left(x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),t_f\right)$$

因此得到条件：

$$H\left(x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),t_f\right)=-\frac{\partial\varphi}{\partial t_f}$$

若$\varphi(\cdot)$ 不依赖于t_f，则 $H\left(x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f),t_f\right)=0.$

末端条件总结

	t_f固定	t_f自由
$x(t_f)$自由	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}$	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}$ $H(t_f)=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_f}$
$x(t_f)$固定	$x(t_f)=x_f$	$x(t_f)=x_f$ $H(t_f)=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_f}$
$x(t_f)$受限	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}+\left[\dfrac{\partial g}{\partial x(t_f)}\right]^{\mathrm{T}}\mu$ $g[x(t_f),\ t_f]$	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}+\left[\dfrac{\partial g}{\partial x(t_f)}\right]^{\mathrm{T}}\mu$ $g[x(t_f),\ t_f]=0$ $H(t_f)=-\dfrac{\partial\varphi}{\partial t_f}-\left[\dfrac{\partial g}{\partial t_f}\right]^{\mathrm{T}}\mu$

示例： 末端时间自由

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

已知受控系统

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1$$

求$u(t)$使$x(t_f) = 0$（t_f可变），且下述性能指标最小：

$$J = t_f + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2 \mathrm{d}t$$

解：哈密顿函数 $H = L + \lambda f = (1/2)u^2 + \lambda u$

控制方程：$\partial H/\partial u = u + \lambda = 0 \ \Rightarrow \ u = -\lambda$

正则方程：$\dot{x} = u = -\lambda,\ \dot{\lambda} = -\partial H/\partial x = 0$

示例：　末端时间自由

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

边界条件：$x(0)=1$，$x(t_f)=0$，

$$H(t_f)=\frac{1}{2}u^2(t_f)+\lambda(t_f)u(t_f)=-\frac{\partial\phi}{\partial t_f}=-1$$

$$\Rightarrow \lambda(t_f)=\pm\sqrt{2} \quad 【\lambda=-u】$$

解方程 $\dot{x}=-\lambda$，$\dot{\lambda}=0$ 得：

$$\lambda(t)=+\sqrt{2},\ u^*(t)=-\sqrt{2},\ x^*(t)=1-\sqrt{2}t,\ t_f^*=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

思考：由$H(t_f)=-1$可得$\lambda(t_f)=\pm\sqrt{2}$，为何舍去负值?

哈密顿函数的性质

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- Hamilton函数： $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})=\boldsymbol{\lambda}^{\top}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{t})+\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{t})$

- 正则方程： $\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{t})=\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} & \text{状态方程}\\[2ex] \dot{\boldsymbol{\lambda}}=-\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{x}} & \text{协态方程}\end{cases}$

沿最优轨线 $\boldsymbol{H}$ 对时间的全导数与偏导数相等：

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\top}\dot{x}+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^{\top}\dot{u}+\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^{\top}\dot{\lambda}+\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$=\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^{\top}\frac{\partial H}{\partial \lambda}+0\cdot\dot{u}+\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^{\top}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}$$

哈密顿函数的性质

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 对于定常系统，哈密顿函数$\boldsymbol{H}$不显含$\boldsymbol{t}$，则沿最优轨线$\boldsymbol{H}$为常数，即以$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$为状态的哈密顿系统能量守恒；

- 若$\boldsymbol{t_f}$自由，且目标函数中$\boldsymbol{\varphi}[\cdot]$和约束$\boldsymbol{g}[\cdot]$中不显含$\boldsymbol{t_f}$，则由最优条件

$$\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_f}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t_f}),\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{t_f}),\boldsymbol{t_f}\right)=-\left(\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\boldsymbol{t_f}}+\boldsymbol{\mu}^{\top}\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial\boldsymbol{t_f}}\right)=0$$

哈密顿函数$\boldsymbol{H}$沿最优轨线不变，且恒为零。

极小值原理简介

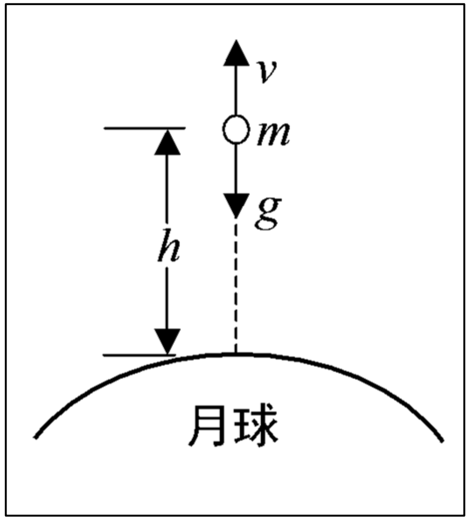
探月飞船软着陆

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\dot{h}(t) = v(t), \qquad h(0) = h_0$$

$$\dot{v}(t) = \frac{f(t)}{m(t)} - g, \quad v(0) = v_0$$

$$\dot{m}(t) = -kf(t), \; m(0) = M + F$$



软着陆：$h(t_f) = 0$，$v(t_f) = 0$

消耗的燃料最少：$\min\limits_{0 \le f(t) \le f_{max}} J[f(t)] = m(t_f)$.

问题类型：末端时间自由/末端状态受约束

变分法的局限性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

要求哈密顿函数 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{t})$对 $\boldsymbol{u}$ 可偏导, 但是

1. 哈密顿函数可能是 $\boldsymbol{u}$ 的线性函数

   --- 奇异最优控制问题【本课程不讨论】

2. 哈密顿函数可能不是 $\boldsymbol{u}$ 的光滑函数

例： $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^{\top}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\cdot \mathbf{sgn}(\boldsymbol{u}))$

3. 哈密顿函数是$\boldsymbol{u}$的光滑函数，但$\boldsymbol{u}$的约束可能不是开集

例： $|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})| \leq \mathbf{1}$ 【 $|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})| < \mathbf{1}$为开集约束 】

最优解可能在边界，但哈密顿函数在边界不可导.

Pontryagin 极小值原理

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

如果$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t})$是所给问题的最优控制，$\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t})$和$\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t})$是对应于$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t})$的最优轨线和最优协态变量，则

$$\boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t}]=\min_{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\in \boldsymbol{U}}\boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{t}]$$

- 对于离散时间系统同样适用

$$\boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k}]=\min_{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k})\in \boldsymbol{U}}\boldsymbol{H}[\boldsymbol{x}^*(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{\lambda}^*(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k}]$$

- 极小值原理的证明非常复杂，在此从略。
- 与变分法相比，利用极小值原理解决最优控制问题时，只需用上式替代控制方程$\boldsymbol{\partial H/\partial u=0}$ 即可。
- 极小值原理给出的仍然是最优控制应满足的必要条件。

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

已知受控系统

$$\dot{x} = -x + u,\ x(0) = 1$$

终端时间 $t_f = 1$固定，$x(t_f)$自由，$|u(t)| \le 1$，求使下述性能指标最小的最优控制及相应的最优状态轨线。

$$J = \int_0^1 \left[x(t) - \frac{1}{2}u(t)\right] d\,t$$

解：Hamilton函数

$$H(x, u, \lambda) = x - \frac{1}{2}u + \lambda(-x + u) = x - \lambda x + u\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$$

示例

$$H(x,u,\lambda) = x - \lambda x + u\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$$

根据极小值原理

$$u^* = \arg\min_{u\in[-1,1]} H(x^*,u,\lambda^*) \Rightarrow\ u = -\operatorname{sgn}(\lambda^* - 1/2)$$

正则方程：$\dot{x} = -x + u$，$\dot{\lambda} = -\partial H/\partial x = -1 + \lambda$

边界条件：$x(0) = 1$，$\lambda(1) = 0$

解协态方程得 $\lambda^*(t) = 1 - e^{t-1}$.

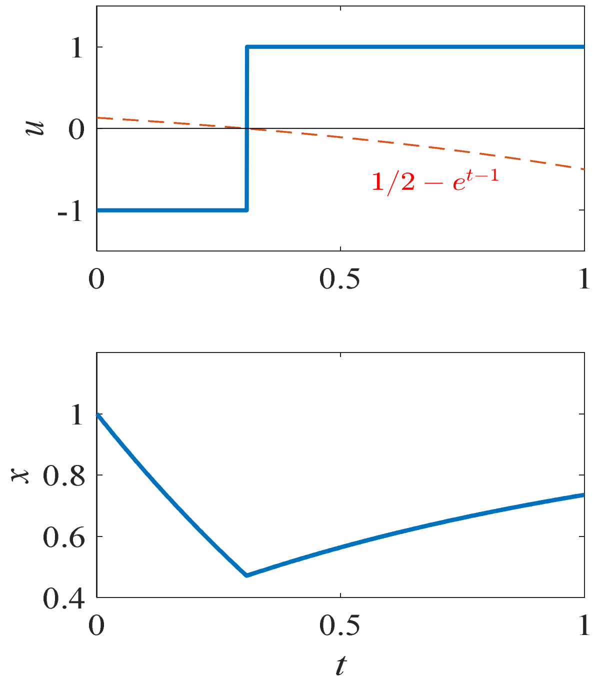
示例

因此最优控制为bang-bang形式

$$u^*(t) = -\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{2} - e^{t-1}\right)$$

$$= \begin{cases} -1, & 0 \le t \le t_s \\ +1, & t_s \le t \le 1 \end{cases}$$

其中$t_s = 1 - \ln 2 = 0.3069.$

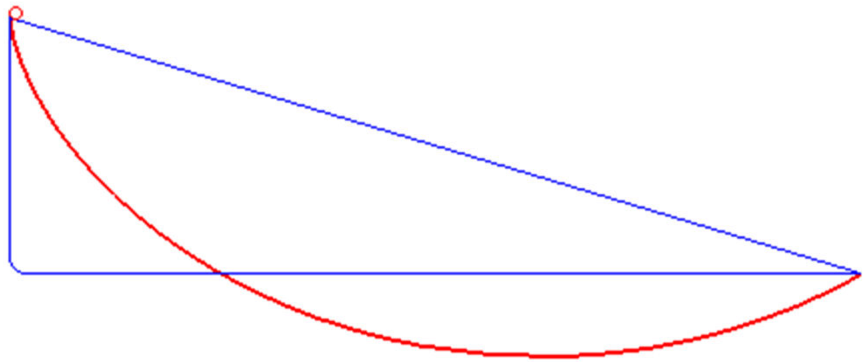


根据$u^*(t)$和状态方程$\dot{x} = -x + u$可以解出状态轨迹

$$x^*(t) = \begin{cases} 2e^{-t} - 1, & 0 \le t \le t_s \\ 1 - (2 - 4e^{-1})e^{-(t-t_s)}, & t_s \le t \le 1 \end{cases}$$

二阶积分系统的时间最优控制

最速降线问题（brachistochrone）



1696年，J. Bernoulli 发起的数学挑战，变分法由此诞生。

$$\min_{y(x)} \boldsymbol{T}[\boldsymbol{y}(\cdot)] = \int_0^a \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}}\,\mathrm{d}x$$

时间最优控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考察二阶积分型受控系统：

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = u$$

求最优控制$u^*(t)$，在约束$|u(t)| \le 1$下使系统在最短时间内自初态$(x_{10},\ x_{20})$转移到状态空间的原点。

对应性能指标：

$$J = \int_0^{t_f} 1 \cdot \mathrm{d}t = t_f$$

这是终端时间t_f可变，$x(t_f)$固定的最优控制问题。

必要条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\boldsymbol{H(u,x,\lambda) = L + \lambda^{\top} f(x,u) = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u}$$

根据极小值原理，最优控制满足 $\boldsymbol{u = -\mathrm{sgn}(\lambda_2)}$.

正则方程：

$$\dot{x}_1 = x_2\,,\quad \dot{x}_2 = u\,,\quad \dot{\lambda}_1 = 0\,,\quad \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$$

边界条件：

$$x_1(0) = x_{10}\,,\quad x_2(0) = x_{20}, \qquad x_1(t_f) = 0\,,\quad x_2(t_f) = 0$$

从上可以解得 $\lambda_1(t) = c_1$，$\lambda_2(t) = c_2 - c_1 t$, 其中$c_1$和$c_2$为待定常数

Bang-bang 控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

根据边界条件

$$H(t_f) = 1 + \cancel{\lambda_1(t_f)x_2(t_f)} + \lambda_2(t_f)u(t_f) = -\frac{\partial\varphi}{\partial t_f} = 0$$

$\lambda_2(t) = c_2 - c_1 t$ 中 c_1和c_2不能同时为零。

因此 $\lambda_2(t)$是一条不恒为零的直线，在区间$[0,\ t_f]$上至多变号一次。

相应的，最优控制 $u^*(t) = -\mathrm{sgn}[\lambda_2^*(t)]$是最多切换一次的Bang-Bang控制。

时间最优控制求解

考虑到最优控制$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t})$的取值为$\pm\mathbf{1}$，由

$$\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = u,\ x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20},$$

可解得：

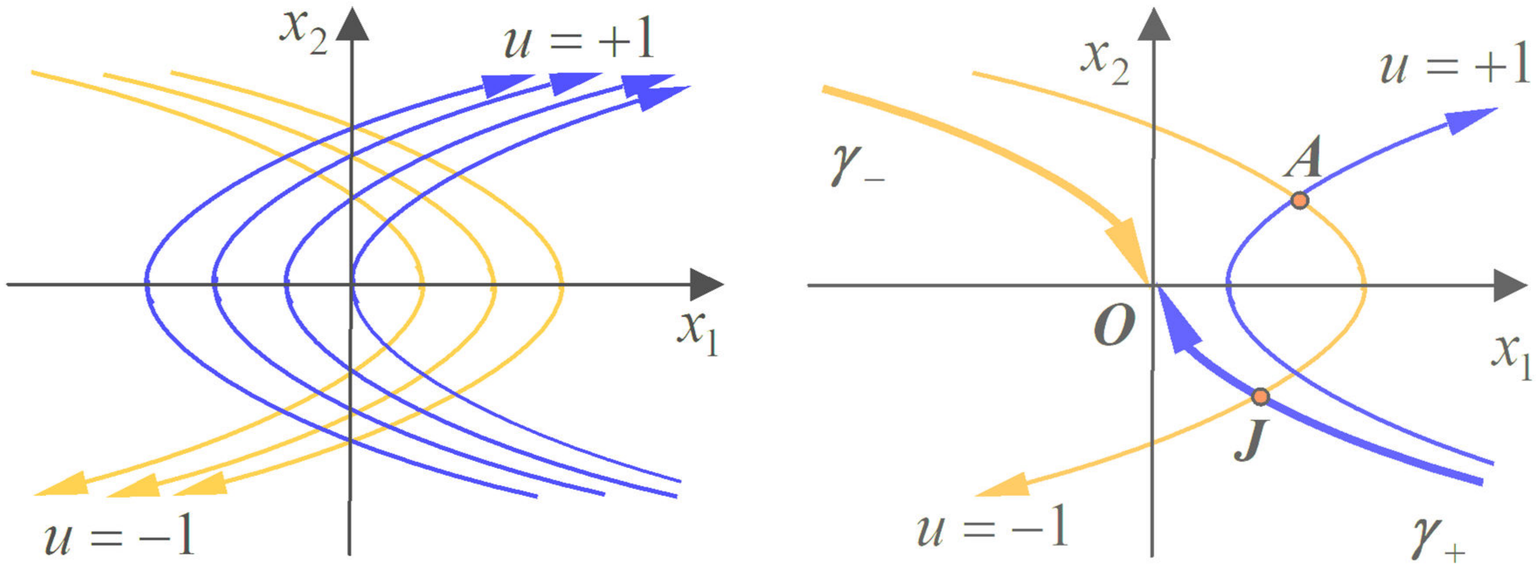
$$x_2(t) = x_{20} \pm t,\ x_1(t) = x_{10} + x_{20}t \pm \frac{1}{2}t^2$$

消去$\boldsymbol{t}$后，得到：

$$x_1(t) = \left(x_{10} \pm \frac{1}{2}x_{20}^2\right) \mp \frac{1}{2}x_2^2(t)$$

时间最优控制开关曲线

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

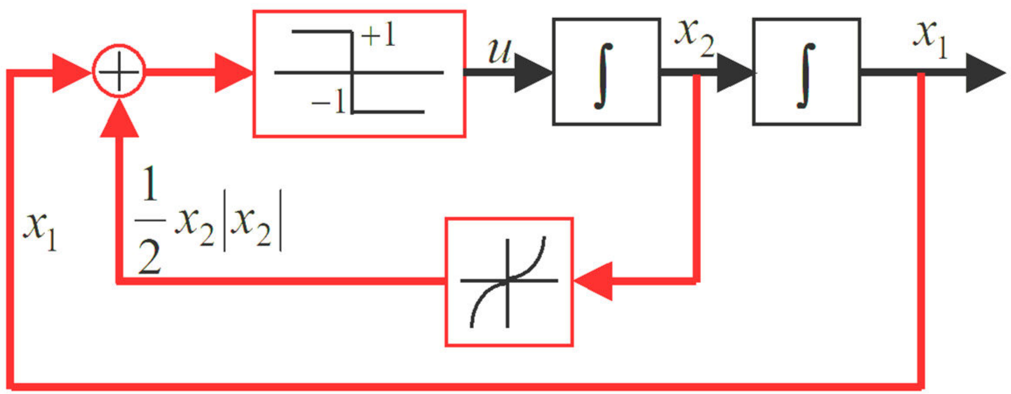


$$x_1(t)=\left(x_{10}\pm\frac{1}{2}x_{20}^2\right)\pm\frac{1}{2}x_2^2(t)$$

只有γ_+和γ_-两条轨线能到达原点，它们合成的曲线γ称为开关曲线：

$$\gamma=\gamma_+\cup\gamma_-=\left\{(x_1,x_2):x_1=-\frac{1}{2}x_2|x_2|\right\}$$

结论



二阶积分型受控系统的时间最优控制$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t})$为

$$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t}) = \begin{cases} +1, & \gamma(x_1, x_2) < 0 \\ -1, & \gamma(x_1, x_2) > 0 \\ -\operatorname{sgn}(x_2), & \gamma(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

其中 $\gamma(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2|$ 为开关函数。

线性系统二次型指标的最优控制

线性二次型最优节器

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

受控系统：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}), \quad \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{x}_0$$

性能指标 (LQR, Linear Quadratic Regulator):

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t}_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f) + \frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{t}_0}^{\boldsymbol{t}_f}[\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{u}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})]\mathrm{d}\boldsymbol{t}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t})$ 为非负定矩阵，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{t})$为正定矩阵.

目标：调节状态到原点 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f) = \boldsymbol{0}$

二次型指标

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$J = \frac{1}{2}x^{\top}(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^{\top}(t)Q(t)x(t) + u^{\top}(t)R(t)u(t)]\mathrm{d}t$$

- F反映了对末态的要求，$Q(t)$项反映了对过渡过程性能的要求，$R(t)$则反映了对控制能量的限制。
- F, Q, R的取值决定了各项之间的权衡。如何选择是个非平凡的问题，需要经验与试探，这里假定它们已知.
- 有限时间状态调节器问题是末端时间t_f固定、末端状态$x(t_f)$自由、控制$u(t)$不受限的最优控制问题。

基于变分法求解最优控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

Hamilton函数：

$$H = L + \lambda^\top f = \frac{1}{2} x^\top Q x + \frac{1}{2} u^\top R u + \lambda^\top A x + \lambda^\top B u$$

控制方程：

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^\top \lambda = 0 \;\Rightarrow\; u = -R^{-1} B^\top \lambda$$

正则方程：

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^\top \lambda, \qquad \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx - A^\top \lambda$$

边界条件：

$$x(t_0) = x_0\,, \quad \lambda(t_f) = \frac{\partial}{\partial x(t_f)} \left[\frac{1}{2} x^\top(t_f) F x(t_f) \right] = F x(t_f)$$

基于变分法求解最优控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

由于正则方程是线性的，且$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f)$也是线性的，不妨设：

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t),\quad \boldsymbol{P}(t_f) = \boldsymbol{F}$$

则

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \dot{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}} = (\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}$$

由正则方程知 $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = (-\boldsymbol{Q} - \boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}$，与上式比较得：

$$\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{P}(t_f) = \boldsymbol{F}$$

最优控制的充要条件

定理：线性系统有限时间状态调节器问题具有如下最优反馈控制解：

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\boldsymbol{R}^{-1}(t)\boldsymbol{B}^\top(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t),$$

其中$\boldsymbol{P}(t)$是Riccati矩阵微分方程的解：

$$\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{P}(t_f) = \boldsymbol{F}$$

在最优控制作用下的性能指标为

$$J^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0).$$

最优控制的充要条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

证明：前面推导已经证明$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{B}^\top(\boldsymbol{t})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$满足最优控制的必要条件，只需证明相应$\boldsymbol{J}^*$是最小值.

首先根据Riccati方程:

$$\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_f) = \boldsymbol{F}$$

可以证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{B}^\top)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^\top\dot{\boldsymbol{P}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u})$$

$$= \boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \dot{\boldsymbol{P}})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^\top\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}$$

最优控制的充要条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

对所得方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}\boldsymbol{x})^\top \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}$$

两端积分得:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\right)^\top \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_f} (\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\,\mathrm{d}t$$

$$= \boldsymbol{x}^\top(t_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(t_f) - \boldsymbol{x}^\top(t_0)\boldsymbol{P}(t_0)\boldsymbol{x}(t_0)$$

最优控制的充要条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

重新整理得：

$$J=\frac{1}{2}x^{\top}(t_f)Fx(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(x^{\top}Qx+u^{\top}Ru)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}x^{\top}(t_0)P(t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t_f}\left(u+R^{-1}B^{\top}Px\right)^{\top}R\left(u+R^{-1}B^{\top}Px\right)\mathrm{d}t$$

上式右边第二项非负，当且仅当$u^{*}=-R^{-1}B^{\top}Px$时为零，此时指标最小值 $J^{*}=\frac{1}{2}x^{\top}(t_0)P(t_0)x(t_0)$ 。证毕。

Riccati矩阵微分方程解的性质

为强调$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$依赖于末时刻$\boldsymbol{t_f}$和末值$\boldsymbol{F}$，记为$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{t},\boldsymbol{F},\boldsymbol{t_f}\right)$.

在$[\boldsymbol{t_0},\ \boldsymbol{t_f}]$上，若方程中所给矩阵的元均连续并有界，则$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$存在唯一解（通常无解析解），且是对称的、非负定的。

即使方程中相关矩阵均为定常，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$通常也是时变的，但 $\boldsymbol{t_f}\rightarrow\infty$时，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$趋于定常矩阵。

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

已知受控系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}，\ \boldsymbol{x}(\mathbf{0}) = \boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}，$$

求最优反馈控制使下述性能指标最小：

$$\boldsymbol{J} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int_{t_0}^{t_f}\left[x^2(t) + u^2(t)\right]\mathrm{d}t$$

解：由题知 $\boldsymbol{A} = -1$，$\boldsymbol{B} = 1$，$\boldsymbol{Q} = 1$，$\boldsymbol{R} = 1$，$\boldsymbol{F} = 0$

根据定理得最优反馈控制 $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$，其中$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t})$

满足 Riccati方程： $\dot{\boldsymbol{p}} - \mathbf{2}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}^{\mathbf{2}} + \mathbf{1} = \mathbf{0}$，$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{f}}) = \mathbf{0}$

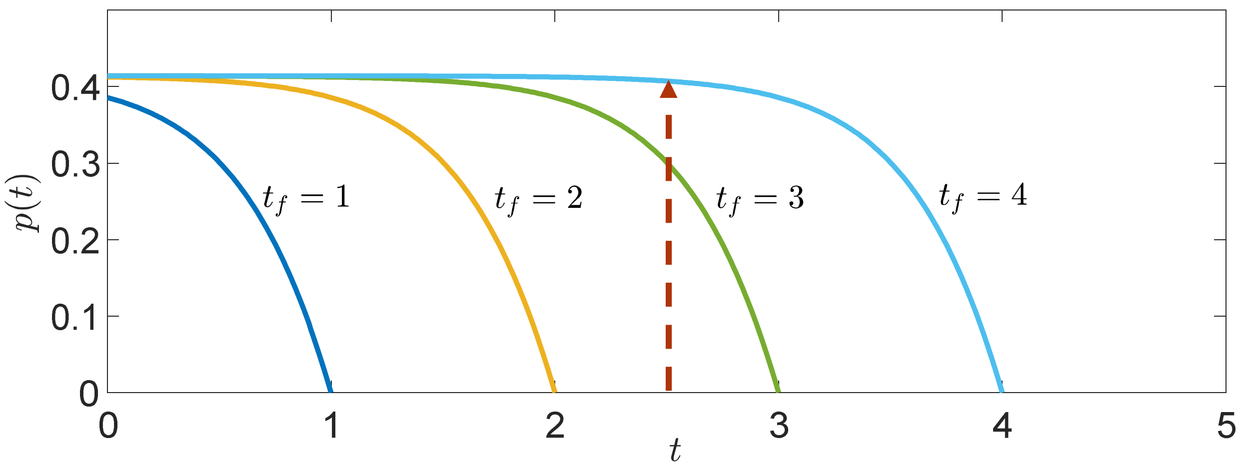
示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

Riccati方程： $\dot{p} - 2p - p^2 + 1 = 0$， $p(t_f) = 0$

$$p(t) = \frac{1 - e^{2\sqrt{2}(t-t_f)}}{\sqrt{2} + 1 + \left(\sqrt{2} - 1\right) e^{2\sqrt{2}(t-t_f)}} \xrightarrow{t_f \to \infty} \sqrt{2} - 1$$

注： $p(t)$曲线不仅依赖于t，而且依赖于t_f



有限时间线性二次型最优调节器

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

受控系统：$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$

性能指标:

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{t}_f)\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_f) + \frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{t}_0}^{\boldsymbol{t}_f}[\boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{t})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{u}^\top(\boldsymbol{t})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})]\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

最优反馈控制解：$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{B}^\top(\boldsymbol{t})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}),$

其中$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})$是Riccati矩阵微分方程的解:

$$\dot{\boldsymbol{P}} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_f) = \boldsymbol{F}$$

在最优控制作用下的性能指标为：$\boldsymbol{J}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{t}_0)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}_0)\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0).$

无限时间状态调节器

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

受控系统：$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$

性能指标（$\boldsymbol{Q}$非负定，$\boldsymbol{R}$正定）：

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty} [\boldsymbol{x}^\top(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}^\top(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)]\mathrm{d}t$$

若最优输出调节器：$J = \int_0^{\infty}(\boldsymbol{y}^\top\boldsymbol{W}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\mathrm{d}t$，其中 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ 是系统输出，可转化为最优状态调节器问题：

$$J = \int_0^{\infty}(\boldsymbol{x}^\top\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^\top\boldsymbol{R}\boldsymbol{u})\mathrm{d}t\text{，其中 } \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{W}\boldsymbol{C}.$$

无限时间状态调节器

$$\boldsymbol{J}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int_{\boldsymbol{t}_0}^{\infty}[\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{u}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})]\mathbf{d}\boldsymbol{t}$$

- $\boldsymbol{t}\to\infty$时，$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$需趋于零，否则$\boldsymbol{J}$会趋于无穷大.

有限时间调节器问题必存在最优解，但无限时间调节器有可能不存在最优解。

- 什么时候最优解存在?
- 如果存在，怎么求解?
- 得到的最优解是否能用?

解的存在性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：若线性定常系统系统完全可控，则其无限时间状态调节器问题必存在最优解。

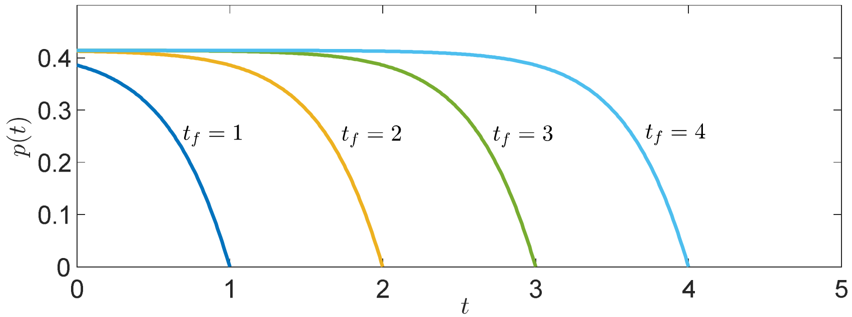
证明：因系统完全可控，对任意初始状态$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0})$，必存在有界控制$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t})$，在有限时刻$\boldsymbol{t_1} > \boldsymbol{t_0}$使系统回到状态空间原点；在时刻$\boldsymbol{t_1}$之后置$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t})$为零，而状态将停留在原点。

在如此定义的$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{t})$，$\boldsymbol{t} \in [\boldsymbol{t_0}, \infty)$作用下，性能指标$\boldsymbol{J}$一定是有界的，因而最优解存在。 证毕。

注：若系统不完全可控，但不可控模态渐近稳定，或不可控不渐稳模态在性能指标中不可观，问题亦有解。

LQR问题求解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



定理：若无限时间调节器有解，则Riccati 矩阵微分方程的解 $\boldsymbol{P}(t, 0, \infty)$存在，且为常数矩阵。【证明略】

Riccati 矩阵微分方程变为Riccati 矩阵代数方程：

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$$

注：Riccati 矩阵微分方程的解是唯一的，但其对应的矩阵代数方程的解却不一定唯一。

LQR问题求解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：对线性定常系统无限时间状态调节器问题，若问题有解，则最优反馈控制是：

$$\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t}) = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$$

其中$\boldsymbol{P}$是Riccati矩阵代数方程

$$\boldsymbol{PA} + \boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P} - \boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$$

的非负定解，且

$$\boldsymbol{J}^* = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{t}_0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)$$

闭环系统稳定性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

先看一个例子:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u},\ \ \boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}$$

由性能指标直接看出最优解 $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{t}) \equiv \mathbf{0}$，但此时系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$ 显然是不稳定的。

这是因为开环系统的不稳定模态没有反映在性能指标中，如采取下列指标则可使闭环系统稳定:

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{2}\int_0^\infty (\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{Q} = \mathbf{1}$$

闭环系统稳定性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：设$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}$，若$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观测，则由最优控制律构成的闭环系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P}\right)\boldsymbol{x}$ 渐近稳定。

证明：可以证明（见引理）若$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{D})$能观，则Riccati方程的解 $\boldsymbol{P}>0$. 选$V(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}>0$，则

$$\dot{V}(\boldsymbol{x})=\dot{\boldsymbol{x}}^{\top}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}=-\boldsymbol{x}^{\top}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}^{\top}\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\leq 0$$

根据李雅普诺夫定理，系统渐近稳定需保证仅当$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\equiv 0$时有$\dot{V}(\boldsymbol{x})\equiv 0$. 这一点可以从后面引理证明过程中得到。

引理：设 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}$，则$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观测当且仅当Riccati 矩阵代数方程的非负定解为正定矩阵。

闭环系统稳定性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

注：

- $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}$的分解不唯一，但不同$\boldsymbol{D}$矩阵间只相差一个正交变换，因此$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观性互相等价。
- $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$ 完全能观是保证闭环渐稳的充分条件。当系统 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$ 不完全能观时，只要不可观模态是渐近稳定的（可检测性），闭环系统就是渐近稳定的。

闭环系统稳定性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

引理：设 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}$，则$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观测当且仅当Riccati矩阵代数方程的非负定解为正定矩阵。

证明：（充分性）设$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观但非负定解$\boldsymbol{P}$不是正定的，则存在非零$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)$，使$\boldsymbol{J}^*=\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t}_0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)=\mathbf{0}$。

由于指标中$\boldsymbol{R}>\mathbf{0}$，故最优控制函数 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\equiv\mathbf{0}$，从而 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})=e^{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0)}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)\neq\mathbf{0}$，且

$$\boldsymbol{J}^*=\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{t}_0}^{\infty}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{t}_0}^{\infty}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$$

闭环系统稳定性

引理：设 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}$，则$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观测当且仅当Riccati矩阵代数方程的非负定解为正定矩阵。

证明：（续）上述积分为零意味着

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{D}e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)\equiv 0$$

即非零状态$\boldsymbol{x}(t_0)$是$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$不可观的，与$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$能观矛盾。

（必要性）假设$\boldsymbol{P}$为正定矩阵，但$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$不可观。此时必存在非零状态$\boldsymbol{x}(t_0)$，使得 $\boldsymbol{D}e^{\boldsymbol{A}(t-t_0)}\boldsymbol{x}(t_0)\equiv 0$。

闭环系统稳定性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

引理：设 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}$，则$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{D})$完全能观测当且仅当 Riccati 矩阵代数方程的非负定解为正定矩阵。

证明：（续）如果令 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\equiv 0$，则$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_0)}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)$

$$\boldsymbol{J}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int_{\boldsymbol{t}_0}^{\infty}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\mathbf{d}\boldsymbol{t}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int_{\boldsymbol{t}_0}^{\infty}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{D}^{\top}\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\mathbf{d}\boldsymbol{t}=\mathbf{0}$$

显然$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\equiv 0$ 是最优解，故而

$$\boldsymbol{J}^{*}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{t}_0)\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_0)=\mathbf{0}$$

但这与$\boldsymbol{P}$为正定矩阵的假设矛盾。必要性得证。

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

已知受控系统

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u$$

求最优反馈控制使下述性能指标最小：

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} (x^\top x + u^2)\,\mathrm{d}t$$

解：相关矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$Q = I$，$R = 1$.

$(A,\ B)$完全可控；取$D = I$使$Q = D^\top D$，(A, D)完全可观.

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

设$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$，解Riccati矩阵方程：

$$\boldsymbol{PA}+\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{P}-\boldsymbol{PBR}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}+\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 1-p_{12}^2 & p_{11}-p_{22}p_{12} \\ p_{11}-p_{22}p_{12} & -p_{22}^2+2p_{12}+1 \end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

得唯一正定实数矩阵解 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

最优反馈控制：$\boldsymbol{u}^*(t)=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t)=-[1\ \ \sqrt{3}]\boldsymbol{x}(t)$

闭环系统 $\boldsymbol{A}_L=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BR}^{-1}\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$，渐近稳定。

应用示例：旋转倒立摆

旋转倒立摆系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

状态变量：$x=[\theta,\alpha,\dot{\theta},\dot{\alpha}]^{\mathrm{T}}$ 【横摆角θ / 竖摆角α 】

在平衡点$\alpha=180°$附近进行微偏线性化：

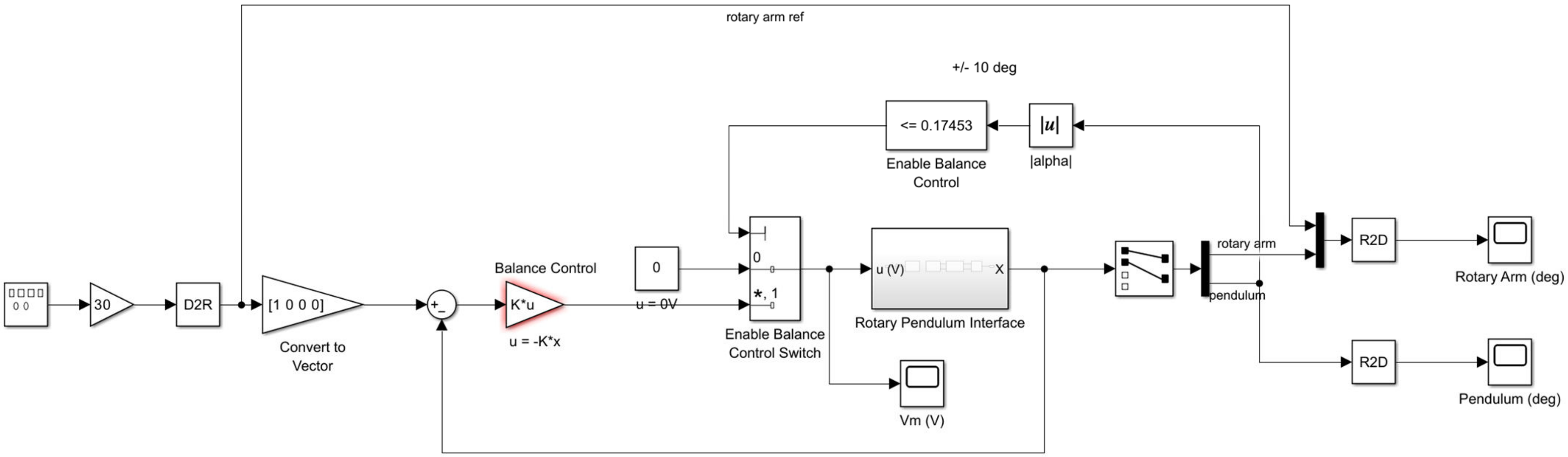
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 149.3 & -0.0104 & 0\\ 0 & 261.6 & -0.0103 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 49.7\\ 49.2\end{bmatrix}\tau,$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

其中 τ 为加在横摆上的控制转矩.

Simulink 实验模型

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



MATLAB 仿真

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- 求解Riccati 方程

$$[X,K,L] = \text{icare}(A,B,Q,R,[\ ],[\ ],[\ ])$$

- 求解LQR问题

$$\text{sys} = \text{ss}(A,B,C,[\ ]);$$

$$[K,P] = \text{lqr}(\text{sys},Q,R,[\ ])$$

- 仿真闭环系统性能

$$\text{sys\_cl} = \text{ss}(A\text{-}B*K,B,C,[\ ]);$$

$$y = \text{lsim}(\text{sys\_cl},u,t)$$

二次型最优调节器

如何 选取 LQR 指标?

- 为了限制控制幅度，取 $\boldsymbol{R}=\mathbf{1}$.
- 由于设计目标是抑制竖摆摆角$\boldsymbol{\alpha}$偏离，因此很自然考虑

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^{\top}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & \\ & \mathbf{1} & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

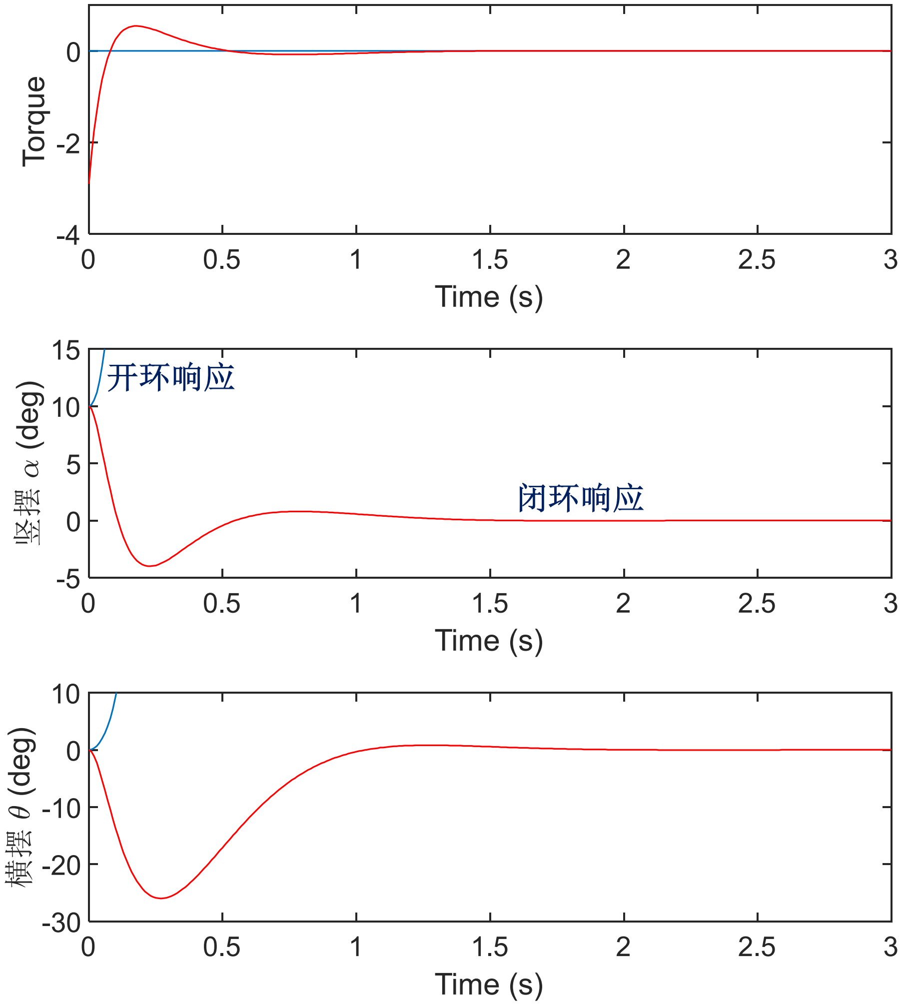
这样可以实现最优控制吗? 【考察 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{C})$ 能观性】

二次型最优调节器

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

为使系统能观，将竖摆摆角$\boldsymbol{\theta}$ 也计入优化指标：

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & \mathbf{1} & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$



闭环系统渐近稳定.

还能进一步改善性能吗?

二次型最优调节器

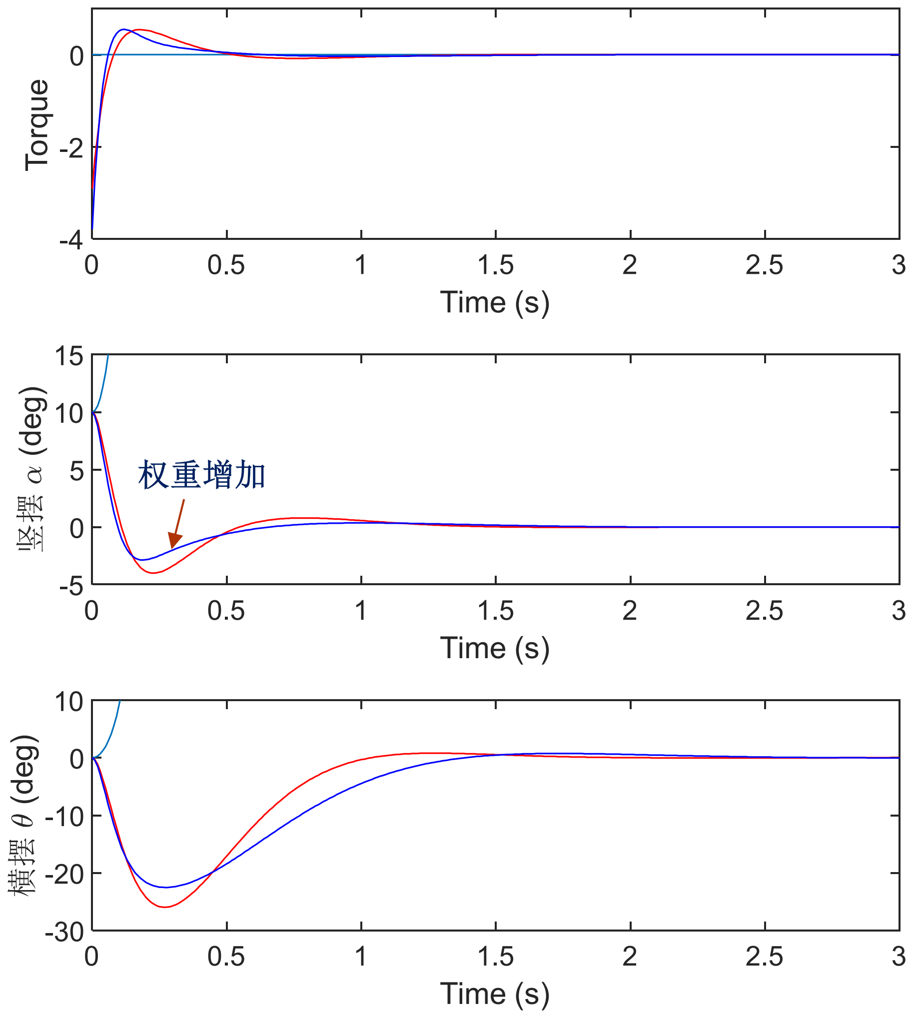
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

增加竖摆偏角权重:

$$Q=\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 100 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

- 响应速度变快
- 超调减小

是否还能提升性能?



二次型最优调节器

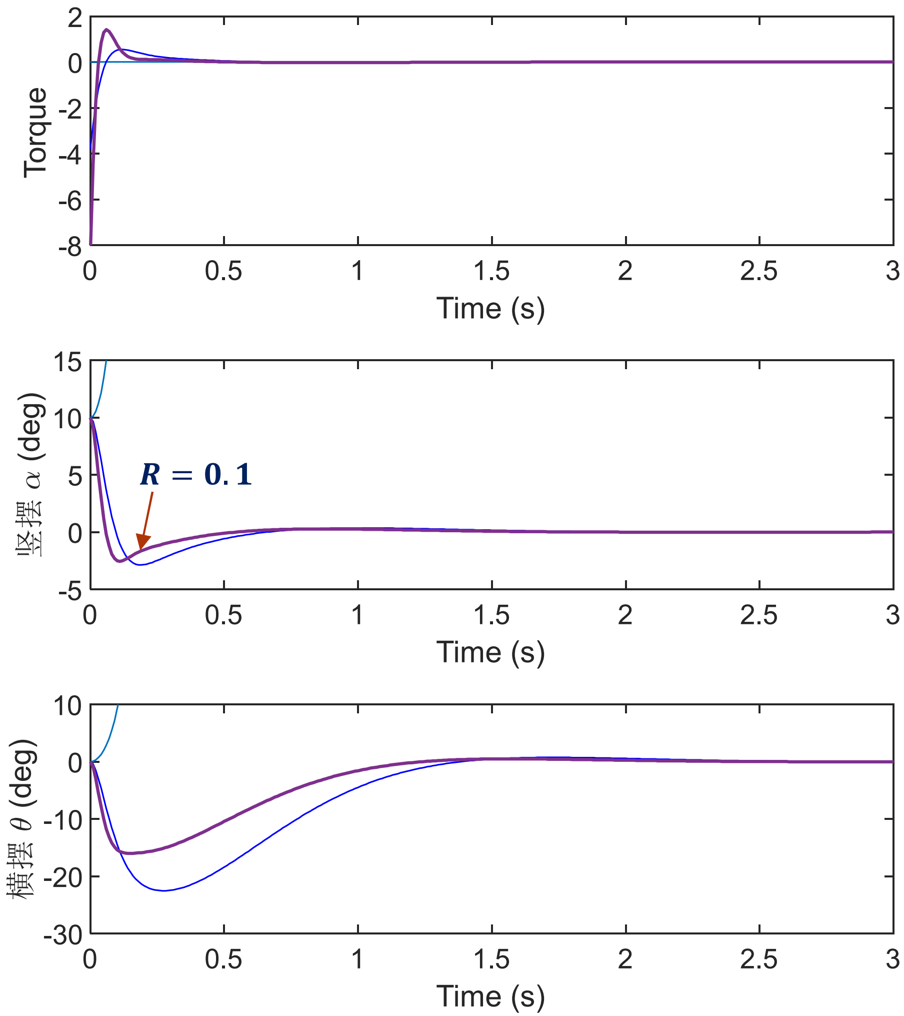
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

降低控制限幅 $\boldsymbol{R} = \mathbf{0.1}$:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & \mathbf{100} & & \\ & & \mathbf{0} & \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

- 响应进一步变快
- 超调进一步减小

代价：控制转矩明显增加



总结

- 变分法原理（根据驻点条件求极值）
- 最优控制必要条件（控制条件；正则方程；边界条件）
- 极小值原理（控制函数闭集约束）
- 有限时间 LQR（时变Riccati方程）
- 无限时间 LQR（代数Riccati方程；解的稳定性）