第一章 解耦控制

本章内容

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

1. 基本概念
2. 串联补偿器方法
3. 状态反馈＋输入变换
4. 解耦阶常数的性质
5. 闭环极点配置
6. 静态解耦控制

基本概念

多变量系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

飞机控制

某飞机垂面运动线性化模型：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

其中状态分量

$x_1(t)$为高度，

$x_2(t)$为前向速度，

$x_3(t)$为俯仰角，

$x_4(t)$为俯仰角速度，

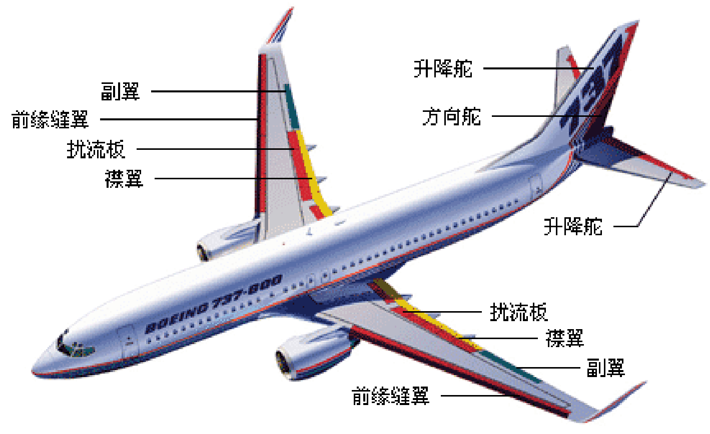
$x_5(t)$为垂直速度；

控制分量

$u_1(t)$为扰流板角度，

$u_2(t)$为前向加速度，

$u_3(t)$为升降舵角度。

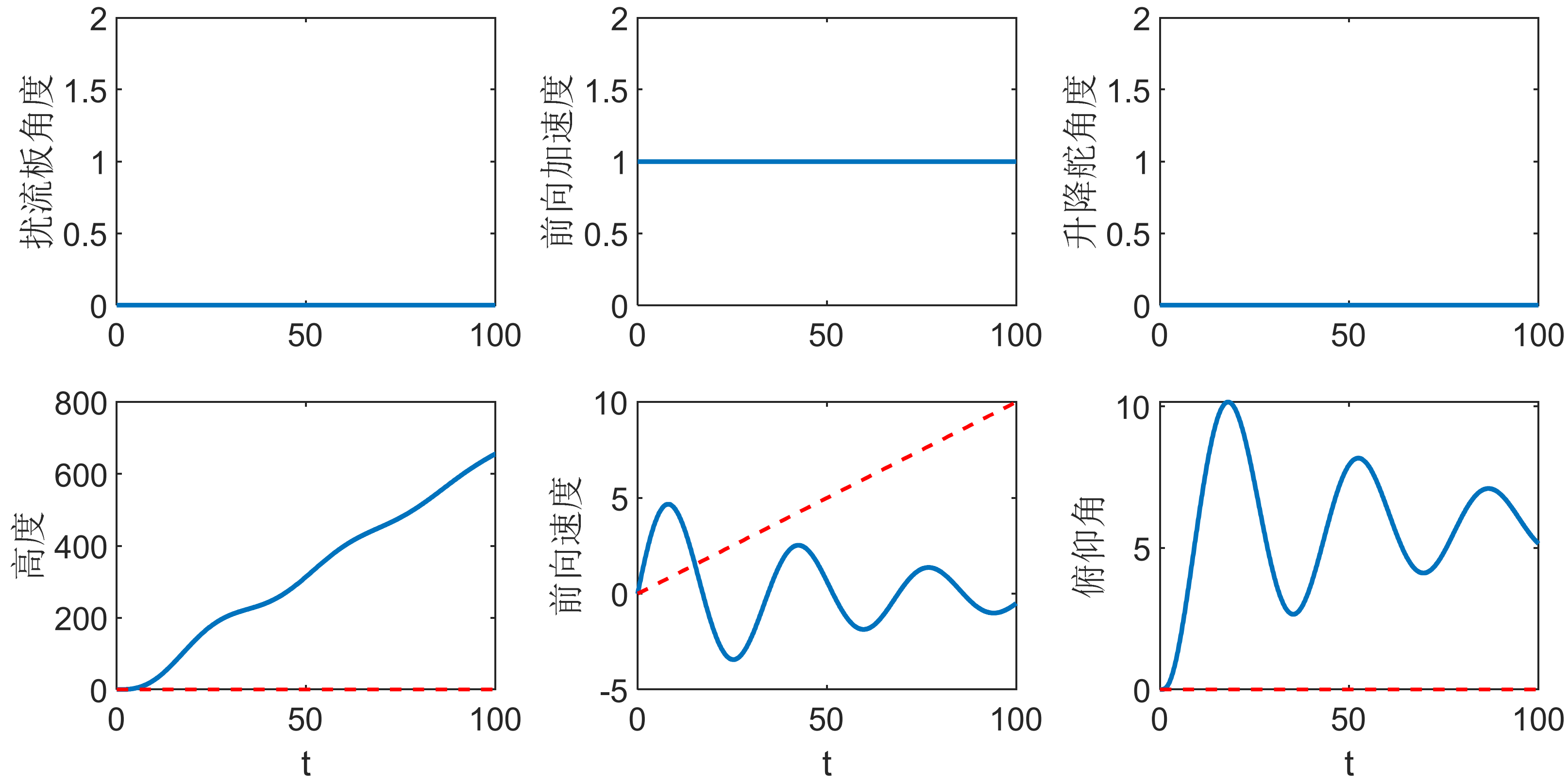


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1715 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

控制互耦

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



调整前向加速度时，不仅水平速度改变，高度和俯仰角也变化.

能否将控制与输出的耦合解开，使得每个控制只调整一个输出?

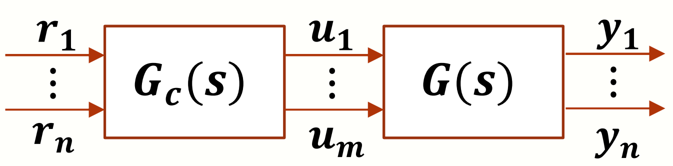
解耦控制问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

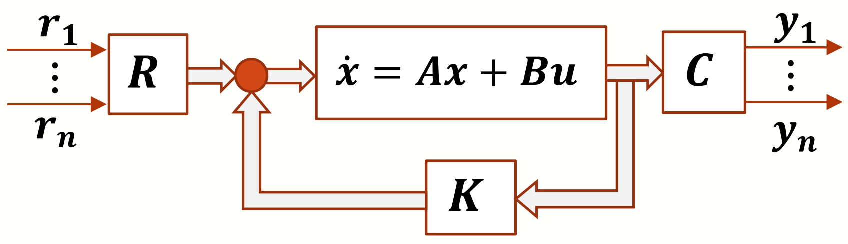
如何通过输入变换和反馈改造系统结构，使系统的参考输入和输出之间一一对应、互不耦合.

优点：将控制设计分解为多个易于分析的单变量问题。

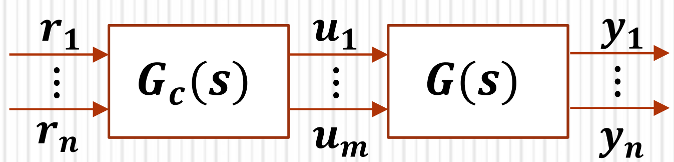
动态变换：串联补偿



静态变换：输入变换+状态反馈



串联补偿器方法



解耦系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

记$G(s)$为r-输入 r-输出线性定常系统的传递函数矩阵.

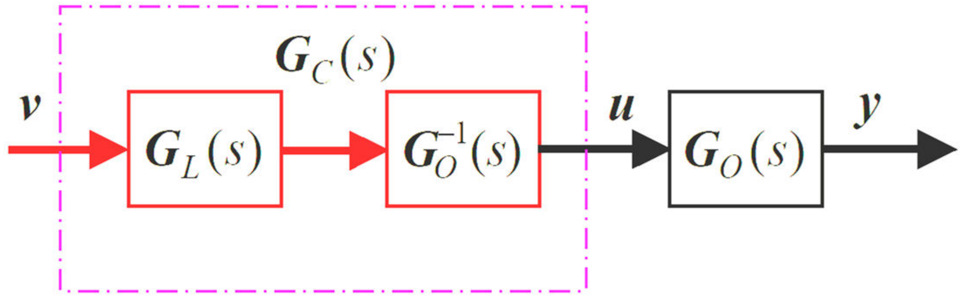
定义1：若$G(s)$为非奇异对角阵，则称该系统为输入输出解耦系统.

$$G(s)=\begin{bmatrix} g_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & g_r(s) \end{bmatrix}$$

定义2：对角元素为积分器的解耦系统称为积分型解耦系统 (Integral Decoupling)

$$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s^{\alpha_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s^{\alpha_r}} \end{bmatrix}$$

串联补偿器方法



对于给定的多输入多输出系统 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{G_O}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{u}$，若$\boldsymbol{G_O}(\boldsymbol{s})$可逆，则可以通过串联补偿器：

$$\boldsymbol{G_C}(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{G_O^{-1}}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{G_L}(\boldsymbol{s}),\ \text{其中}\ \boldsymbol{G_L}(\boldsymbol{s})=\mathbf{diag}\left[\frac{1}{s^{\alpha_1}},\cdots,\frac{1}{s^{\alpha_m}}\right]$$

将系统补偿为积分型解耦系统 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{s})=\mathbf{diag}\left[\frac{1}{s^{\alpha_1}},\cdots,\frac{1}{s^{\alpha_m}}\right]\boldsymbol{v}(\boldsymbol{s})$：

$$y_i(s)=\frac{1}{s^{\alpha_i}}v_i(s),\quad i=1,2,\cdots,m$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

求一个串联补偿器使下述系统实现积分型解耦控制。

$$G_O(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{-1}{s+1} \\ \frac{s-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

解：可构造如下补偿器实现积分型解耦

$$G_C(s) = G_O^{-1}(s)G_L(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} \\ -\frac{s^2-1}{2s} & \frac{(s+1)^2}{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{\alpha_1}} & \\ & \frac{1}{s^{\alpha_2}} \end{bmatrix}$$

问题：α_1和α_2 应该如何选取？

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

如下形式的 $\boldsymbol{G}_L(s)$ 是否可以实现解耦?

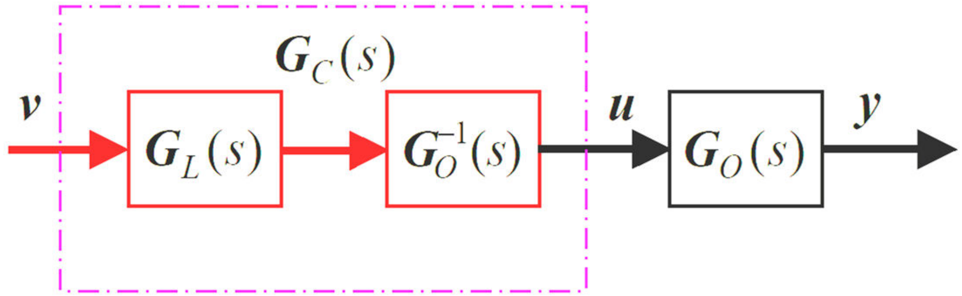
- $\boldsymbol{G}_L(s) = \mathrm{diag}\left[1\ ,\quad \frac{1}{s}\right]$
- $\boldsymbol{G}_L(s) = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{s}\ ,\quad \frac{1}{s^2}\right]$
- $\boldsymbol{G}_L(s) = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{s+1}\ ,\quad \frac{1}{s+2}\right]$
- $\boldsymbol{G}_L(s) = \mathrm{diag}\left[\frac{s+4}{s^2+3s+2}\ ,\quad \frac{s-1}{s^2+8s+100}\right]$

$$\boxed{\boldsymbol{G}_C(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} \\ -\frac{s^2-1}{2s} & \frac{(s+1)^2}{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{\alpha_1}} & \\ & \frac{1}{s^{\alpha_2}} \end{bmatrix}}$$

为保证物理可实现性， $\boldsymbol{\alpha}_1 \geq 1, \boldsymbol{\alpha}_2 \geq 1$ （$\Rightarrow$ 解耦阶常数）

串联型补偿的优缺点

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



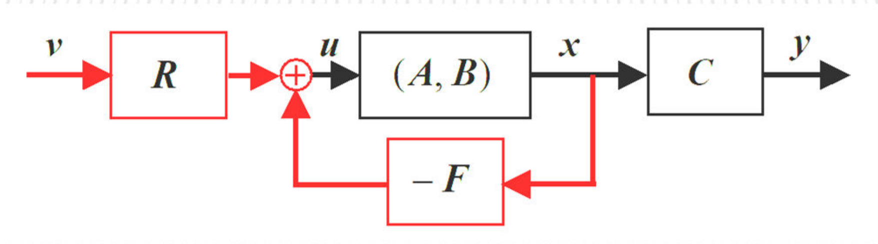
（1） 系统结构简单：无需对输出或者状态进行量测;

（2） 需要被补偿系统的传递函数矩阵$\boldsymbol{G_O}(s)$可逆;

（3） 动态补偿器 $\boldsymbol{G_C}(s)$ 引入了新的模态，控制律复杂；

（4） 可能存在不稳定零极相消：$\boldsymbol{G_O(s)G_O^{-1}(s)G_L(s)}$.

状态反馈 + 输入变换



状态空间模型

考虑如下待解耦的系统 $\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$，其中 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$. 尝试采用“状态反馈+输入变换”：

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ 是参考输入. 变换后的闭环系统如下：

$$\Sigma_L: \quad \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}\boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \end{cases}$$

若闭环系统 $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C})$ 为解耦系统，即闭环传递函数矩阵$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{s}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}$为非奇异对角矩阵，则称系统$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C})$可 $\{\boldsymbol{F}, \boldsymbol{R}\}$解耦.

分析思路

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

输出方程 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ 里不显含 $\boldsymbol{u}$, 说明$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$与$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$无关吗?

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$ 通过状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})$$

影响 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ 的变化，从而可能影响 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t})$的变化，即$\dot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t})$, $\ddot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{t})$, ⋯等.

思路：分析每个 $\boldsymbol{y}_i(\boldsymbol{t})$ 及其各阶导数与$\boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{t})$的依赖关系.

解耦阶常数

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考察待解耦系统，将第$\boldsymbol{i}$个输出$\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{x}$对$\boldsymbol{t}$求导：

$$\boldsymbol{y}_i^{(1)} = \boldsymbol{c}_i^\top \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1^\top \boldsymbol{x} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}_m^\top \boldsymbol{x} \end{bmatrix}$$

若$\boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{y}_i^{(1)}$不显含$\boldsymbol{u}$，可继续求导

$$\boldsymbol{y}_i^{(2)} = \boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

若$\boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$，则$\boldsymbol{y}_i^{(2)}$不显含$\boldsymbol{u}$，仍可继续求导⋯

设求导$\boldsymbol{\alpha}_i$次后有：

$$\boldsymbol{y}_i^{(\alpha_i)} = \boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{A}^{\alpha_i}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{A}^{\alpha_i - 1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}，\quad \boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{A}^{\alpha_i - 1}\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{0}$$

解耦阶常数

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定义：输入 $\boldsymbol{u}$ 可以直接影响$\boldsymbol{y}_i$对时间导数的最小阶，即：

$$\alpha_i \triangleq \min\{k | c_i^\top A^{k-1} B \neq 0, 1 \leq k \leq n\}, \qquad i = 1, \cdots, m.$$

是否有可能 $c_i^\top A^{k-1} B = 0$ 对所有 $1 \leq k \leq n$均成立?

如果 m 个 α_i已求出，则下式成立：

$$y^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} y_1^{(\alpha_1)} \\ \vdots \\ y_m^{(\alpha_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^\top A^{\alpha_1} \\ \vdots \\ c_m^\top A^{\alpha_m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} c_1^\top A^{\alpha_1 - 1} B \\ \vdots \\ c_m^\top A^{\alpha_m - 1} B \end{bmatrix} u \triangleq Lx + D_0 u$$

其中 $D_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 称为可解耦矩阵.

解耦控制律设计

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

引入反馈 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$，则对于新的参考输入：

$$\boldsymbol{y}^{(\alpha)}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_0\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{D}_0\boldsymbol{F})\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}_0\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}$$

显然，若 $\det\boldsymbol{D}_0\neq\boldsymbol{0}$，则可以选择反馈系数：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{D}_0^{-1},\quad \boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}_0^{-1}\boldsymbol{L}$$

使得 $\boldsymbol{y}^{(\alpha)}=\boldsymbol{v}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 阶积分型解耦：

$$y_i^{(\alpha_i)}=v_i,\ \ i=1,\cdots,m.$$

可解耦条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$可$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$解耦，当且仅当可解耦矩阵

$$\boldsymbol{D}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{\tau}\boldsymbol{A}^{\alpha_1-1}\boldsymbol{B}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}_m^{\tau}\boldsymbol{A}^{\alpha_m-1}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

为非奇异矩阵。【充分性显然，必要性怎么证明？】

此时闭环传递函数阵为：$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{s})=\begin{bmatrix}1/s^{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/s^{\alpha_m}\end{bmatrix}.$

示例

给定受控系统$\boldsymbol{\Sigma_O}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$，设计$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$解耦。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

解：计算耦合阶常数

$$\boldsymbol{c}_1^\top\boldsymbol{B}=[1\quad 0]\neq 0\Rightarrow \alpha_1=1;$$

$$\boldsymbol{c}_2^\top\boldsymbol{B}=[0\quad 1]\neq 0\Rightarrow \alpha_2=1.$$

$$\boldsymbol{D}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^\top\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{c}_2^\top\boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow \text{可解耦}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^\top\boldsymbol{A}^{\alpha_1}\\\boldsymbol{c}_2^\top\boldsymbol{A}^{\alpha_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}$$

示例

计算$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$反馈系数矩阵:

- $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{D}_0^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}_0^{-1}\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}$

校验反馈后闭环传递函数矩阵:

$$\boldsymbol{G}_L(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & 0\\ 0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}$$

可以看出,闭环系统确是积分型解耦系统.

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

某飞机垂面运动线性化模型：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

其中状态分量

$x_1(t)$为高度，

$x_2(t)$为前向速度，

$x_3(t)$为俯仰角，

$x_4(t)$为俯仰角速度，

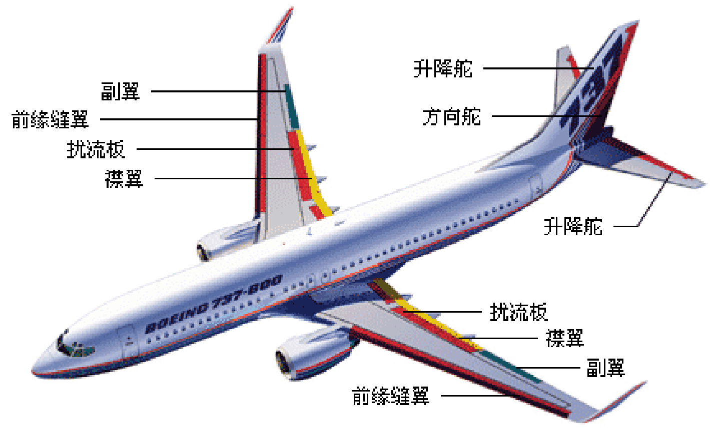
$x_5(t)$为垂直速度；

控制分量

$u_1(t)$为扰流板角度，

$u_2(t)$为前向加速度，

$u_3(t)$为升降舵角度。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1715 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\boldsymbol{CB}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ -0.12 & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{\alpha_2}=\mathbf{1};\ \boldsymbol{CAB}=\begin{bmatrix}-1.575 & \mathbf{0} & 0.732\\ 0.125 & -0.054 & -0.055\\ 4.419 & \mathbf{0} & -1.665\end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{\alpha_1}=\boldsymbol{\alpha_2}=\mathbf{2}$$

$$\boldsymbol{D_0}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c_1^\top AB}\\ \boldsymbol{c_2^\top B}\\ \boldsymbol{c_3^\top AB}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1.575 & \mathbf{0} & 0.732\\ -0.120 & \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ 4.419 & \mathbf{0} & -1.665\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c_1^\top A^2}\\ \boldsymbol{c_2^\top A}\\ \boldsymbol{c_3^\top A^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & 0.291 & \mathbf{0} & 0.079 & 0.686\\ \mathbf{0} & -0.054 & -0.172 & \mathbf{0} & 0.075\\ \mathbf{0} & 0.049 & \mathbf{0} & -0.856 & -1.013\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{D_0^{-1}}=\begin{bmatrix}2.719 & \mathbf{0} & 1.195\\ 0.326 & \mathbf{1} & 0.144\\ 7.217 & \mathbf{0} & 2.572\end{bmatrix},\ \boldsymbol{F}=\boldsymbol{D_0^{-1}L}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & 0.849 & \mathbf{0} & -0.809 & 0.654\\ \mathbf{0} & 0.048 & -0.172 & -0.097 & 0.154\\ \mathbf{0} & 2.224 & \mathbf{0} & -1.632 & 2.344\end{bmatrix}$$

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

闭环系统状态方程与传递函数矩阵：

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.132 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BR}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

容易计算验证： $$\boldsymbol{G}_L(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BF})^{-1}\boldsymbol{BR}=\begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & & \\ & \frac{1}{s} & \\ & & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

解耦阶常数的性质

解耦阶常数的不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：系统 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})$ 经任意 $\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$ $(\det \boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{0})$变换为闭环系统 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{C})$，则变换后解耦阶常数不变.

证：计算$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$变换后系统的解耦阶常数：

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{c}_i^{\top}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})^{k}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R} && (\boldsymbol{k}<\boldsymbol{\alpha}_i) \\
=\ & \boldsymbol{c}_i^{\top}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})^{k-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R} && 【\because \boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}】 \\
=\ & \boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})^{k-2}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R} && 【\because \boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}】 \\
& \vdots \\
=\ & \boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{A}^{k}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}
\end{aligned}
$$

上述关系对$\boldsymbol{k}<\boldsymbol{\alpha}_i$都成立，由$\det \boldsymbol{R} \neq \boldsymbol{0}$，系统变换前后解耦阶常数$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$不变.

可解耦矩阵的变换关系

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

设原系统的可解耦矩阵为$\boldsymbol{D_0}$，则经过$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{R})$变换后闭环系统的可解耦矩阵为：

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{\top}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})^{\alpha_1-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}_m^{\top}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F})^{\alpha_m-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^{\top}\boldsymbol{A}^{\alpha_1-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}_m^{\top}\boldsymbol{A}^{\alpha_m-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}\end{bmatrix}=\boldsymbol{D_0}\boldsymbol{R}.$$

可解耦矩阵与输入变换有关，但与反馈系数无关.

解耦阶常数与传递函数矩阵

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：记 $G_O(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 为线性定常系统(A,B,C)的传递函数阵，其第i行为$g_i^{\top}(s)$，则解耦阶常数

$$\alpha_i=d_i-n_i,$$

其中d_i是$g_i^{\top}(s)$各元素通分后分母多项式的阶次，n_i为各元素分子多项式的最大阶次。可解耦矩阵 D_0 第i行的各元素等于 $g_i^{\top}(s)$ 对应分子多项式 n_i 次幂项的系数.

例：$G_O(s)=\dfrac{1}{s^3+3s^2+2s}\begin{bmatrix}2s^2+3s & s^2\\ -s & s^2\end{bmatrix}\xRightarrow[\alpha_2=3-2=1]{\alpha_1=3-2=1} D_0=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

解耦阶常数与传递函数矩阵

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

证：根据Fedeeva算法可知

$$g_i^\top(s) = c_i^\top(sI - A)^{-1}B = c_i^\top \frac{P(s)}{\psi(s)} B,$$

其中 $\psi(s) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} s + \beta_n$,

$$P(s) = p_0(s)A^{n-1} + p_1(s)A^{n-2} + \cdots + p_{n-2}(s)A + p_{n-1}(s)I$$

其中 $p_i(s)$是幂次为i的首一多项式。

根据耦合阶常数定义：$c_i^\top A^k B = 0$， $0 \le k < \alpha_i - 1$，故

$$g_i^\top(s) = \frac{1}{\psi(s)}\left[p_0(s)c_i^\top A^{n-1}B + \cdots + p_{n-1}(s)c_i^\top B\right]$$

$$= \frac{1}{\psi(s)}\left[p_0(s)c_i^\top A^{n-1}B + \cdots + p_{n-\alpha_i}(s)c_i^\top A^{\alpha_i-1}B\right]$$

解耦阶常数与传递函数矩阵

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$g_i^\top(s) = \frac{1}{\psi(s)}\left[p_0(s)c_i^\top A^{n-1}B + \cdots + p_{n-\alpha_i}(s)c_i^\top A^{\alpha_i-1}B\right]$$

可见 $g_i^\top(s)$ 分母多项式和最高阶分子多项式的阶数为

$$d_i = n, \; n_i = n - \alpha_i \;\Rightarrow\; d_i - n_i = \alpha_i$$

且 n_i 次幂项的系数 $c_i^\top A^{\alpha_i-1}B$ 恰为可解耦矩阵 D_0的第i行。证毕。

注：解耦阶常数 α_i 等于 $g_i^\top(s)$各元素的最小相对阶.

附：Fedeeva 算法

$$(sI - A)^{-1} = \frac{P(s)}{\psi(s)}$$

其中

$$\psi(s) = \det(sI - A) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} s + \beta_n$$

$$P(s) = \mathrm{adj}(sI - A) = P_0 s^{n-1} + P_1 s^{n-2} + \cdots + P_{n-2} s + P_{n-1}$$

则 $P_0 = I$， $P_1 = AP_0 + \beta_1 I$， $P_2 = AP_1 + \beta_2 I$， $\cdots, P_{n-1} = AP_{n-2} + \beta_{n-1} I$， $0 = AP_{n-1} + \beta_n I$

其中 $\beta_k = -k^{-1}\mathrm{tr}(AP_{k-1})$，$k = 1, \cdots, n.$

附：Fedeeva 算法

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- $$\begin{aligned} P_k &= AP_{k-1} + a_k I \\ &= A(AP_{k-2} + a_{k-1} I) + a_k I = A^2 P_{k-2} + A a_{k-1} + a_k I \\ &= A^2(AP_{k-3} + a_{k-2} I) + A a_{k-1} + a_k I \\ &= A^k P_0 + A^{k-1} a_1 + A^{k-2} a_2 + \cdots + A^0 a_k \\ &= A^k + A^{k-1} a_1 + A^{k-2} a_2 + \cdots + I a_k \end{aligned}$$

附：Fedeeva 算法

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

- $P_k = A^k + A^{k-1}a_1 + A^{k-2}a_2 + \cdots + Ia_k$

- $P(s) = P_0 s^{n-1} + P_1 s^{n-2} + \cdots + P_{n-2}s + P_{n-1}$

$$= Is^{n-1} + (A + Ia_1)s^{n-2} + \left(A^2 + Aa_1 + Ia_2\right)s^{n-3} +$$

$$\left(A^3 + A^2a_1 + Aa_2 + Ia_3\right)s^{n-4} +$$

$$\cdots + \left(A^k + A^{k-1}a_1 + A^{k-2}a_2 + \cdots + Ia_k\right)s^{n-k-1}$$

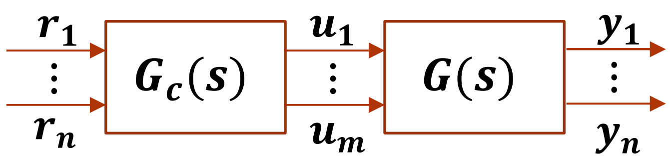
$$\cdots + \left(A^{n-2} + A^{n-3}a_1 + A^{n-4}a_2 + \cdots + Ia_{n-2}\right)s$$

$$+\left(A^{n-1} + A^{n-2}a_1 + A^{n-3}a_2 + \cdots + Ia_{n-1}\right)$$

$$= p_0(s)A^{n-1} + p_1(s)A^{n-2} + \cdots + p_{n-2}(s)A + p_{n-1}(s)I$$

可解耦性与输出可控性

由串联解耦分析可知，系统可解耦当且仅当传递函数矩阵（右）可逆，即存在矩阵$\boldsymbol{G_c(s)}$，使得$\boldsymbol{G(s)G_c(s)=I}$.



这类系统称为右可逆的，亦称为输出可控的，即对于任何一个光滑函数$\boldsymbol{y_0(t)}$，都存在一个输入函数$\boldsymbol{u_0(t)}$，使得该输入作用下系统的输出等于$\boldsymbol{y_0(t)}$.

【注：自控1学到的可控性指状态可控性】

输出可控性指数

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

线性定常系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$输出可控当且仅当输出可控性矩阵:

$$\boldsymbol{Q}=\left[\boldsymbol{CB},\boldsymbol{CAB},\cdots,\boldsymbol{CA}^{n-1}\boldsymbol{B}\right]=\boldsymbol{CQ}_{\mathrm{C}}$$

行满秩。记$\boldsymbol{u}\to\boldsymbol{y}_i$的输出可控性矩阵（行向量）为:

$$\boldsymbol{Q}_i=\left[\boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{B}\mid\boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{AB}\mid\cdots\mid\boldsymbol{c}_i^{\top}\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\right]$$

输出可控性指数$\boldsymbol{\mu}_i$是左起使$\boldsymbol{Q}_i$满秩的最小分块数.

显然$\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\mu}_i$。当$\boldsymbol{g}_i^{\top}(\boldsymbol{s})=\mathbf{0}$时，$\boldsymbol{\alpha}_i=\infty$，此时可解耦矩阵$\boldsymbol{D}_0$第$\boldsymbol{i}$行为零，系统无法通过反馈$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$解耦.

思考：试构造一个不可$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$解耦的系统.

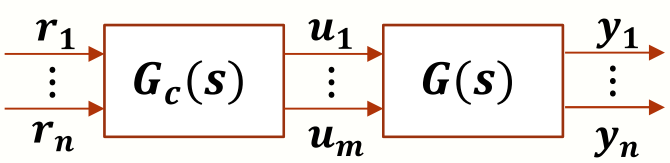
解耦控制回顾

定义：多输入-输出系统的输入和输出变量一一对应，即传递函数为对角矩阵.

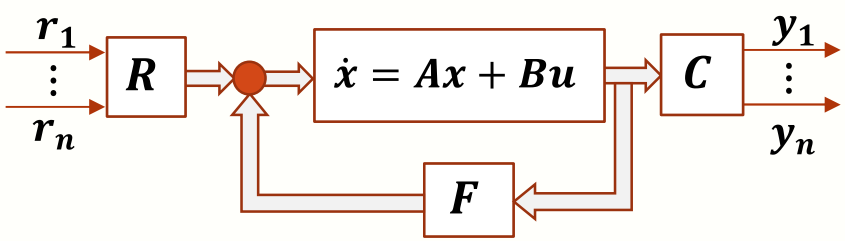
思考：$G(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \\ & 0 \end{bmatrix}$是否是解耦系统?

对象输入输出个数可以不等，通过串联补偿或反馈变换实现解耦.

动态变换：串联补偿



静态变换：输入变换+状态反馈



解耦控制回顾

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

串联补偿: $G_c(s) = G^{-1}(s)G_L(s)$

$\{F, R\}$反馈: （1）解耦阶常数$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m) < \infty$; (2) 可解耦矩阵$D_0 = \begin{bmatrix} c_1^\top A^{\alpha_1 - 1}B \\ \vdots \\ c_m^\top A^{\alpha_m - 1}B \end{bmatrix}$可逆 【$R = D_0^{-1}, F = D_0^{-1}L$】.

性质：$\{F, R\}$变换下，（1）α不变；（2）$D_0 \to D_0 R$

思考：D_0可逆是必要条件吗? 【可解耦→ D_0可逆? 】

证明：$G(s) = \begin{bmatrix} g_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & g_m(s) \end{bmatrix} \Rightarrow D_0 = \begin{bmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_m \end{bmatrix}$

本节内容

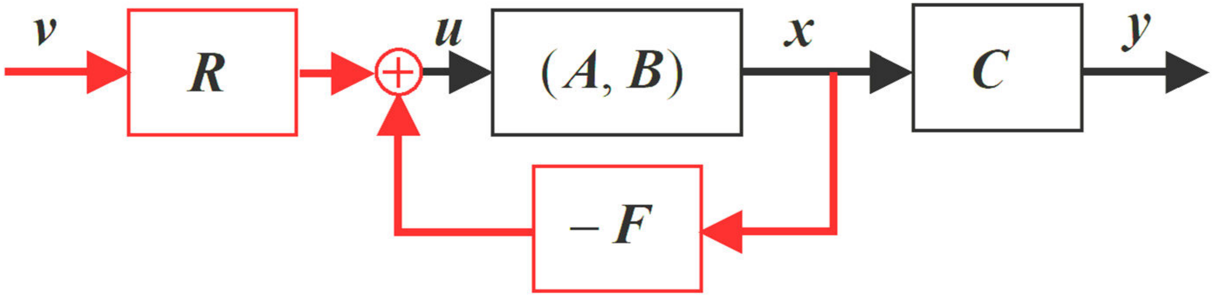
（1）改善积分型解耦的性能 → 极点配置

（2）不能（精确）动态解耦怎么办? → 静态解耦

（3）抗外扰控制介绍

闭环极点配置

解耦系统的稳定性



通过 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{v} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$ 得到的闭环系统，虽然是解耦的，但所有极点都配置在原点，不是渐近稳定的：

$$\boldsymbol{y}_i(s) = \frac{1}{s^{\alpha_i}}\boldsymbol{v}_i(s),\ \ i = 1, \cdots, m$$

因此，需要通过改变反馈策略将极点配置到左半开平面.

期望闭环系统

希望通过极点配置改造闭环系统的传递函数:

$$G_i(s)=\frac{1}{s^{\alpha_i}} \quad \rightarrow \quad G_i(s)=\frac{1}{\psi_i^*(s)}$$

其中 $\psi_i^*(s)$是一个同阶Hurwitz多项式:

$$\psi_i^*(s)=s^{\alpha_i}+\beta_{i1}s^{\alpha_i-1}+\cdots+\beta_{i\alpha_i}$$

即期望第i个子系统满足微分方程:

$$y_i^{(\alpha_i)}(t)+\beta_{i1}y_i^{(\alpha_i-1)}(t)+\cdots+\beta_{i\alpha_i}y_i(t)=v_i(t)$$

解耦控制律

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

将已知关系 $y_i^{(k)} = \begin{cases} c_i^\top A^k x, & k < \alpha_i \\ c_i^\top A^{\alpha_i} x + c_i^\top A^{\alpha_i - 1} B u, & k = \alpha_i \end{cases}$

代入

$$y_i^{(\alpha_i)}(t) + \beta_{i1} y_i^{(\alpha_i - 1)}(t) + \cdots + \beta_{i\alpha_i} y_i(t) = v_i(t)$$

得

$$c_i^\top \psi_i^*(A) x(t) + c_i^\top A^{\alpha_i - 1} B u(t) = v_i(t)$$

其中 $\psi_i^*(A) = A^{\alpha_i} + \beta_{i1} A^{\alpha_i - 1} + \cdots + \beta_{i\alpha_i} I$

解耦控制律

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理　系统$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})$可通过反馈$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$解耦，并使闭环传递函数为对角阵【注：不能配置零点.】

$$\boldsymbol{G}(s)=\mathbf{diag}\left[\frac{1}{\psi_1(s)},\cdots,\frac{1}{\psi_m(s)}\right]$$

的充要条件是可解耦矩阵$\boldsymbol{D}_0$非奇异，所需的矩阵解为：

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{D}_0^{-1},\quad \boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}_0^{-1}\boldsymbol{L}$$

其中 $\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^\top\psi_1^*(\boldsymbol{A})\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}_m^\top\psi_m^*(\boldsymbol{A})\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{D}_0=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_1^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\\ \vdots\\ \boldsymbol{c}_m^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$.

示例：飞机控制

某飞机垂面运动线性化模型：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

其中状态分量

$x_1(t)$为高度，

$x_2(t)$为前向速度，

$x_3(t)$为俯仰角，

$x_4(t)$为俯仰角速度，

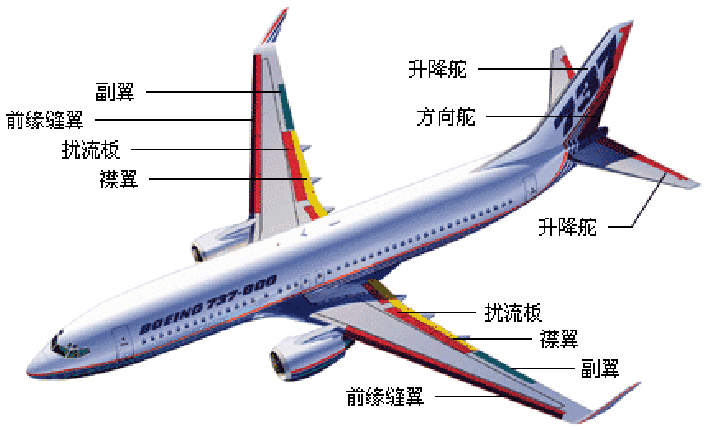
$x_5(t)$为垂直速度；

控制分量

$u_1(t)$为扰流板角度，

$u_2(t)$为前向加速度，

$u_3(t)$为升降舵角度。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1715 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

示例：飞机控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

选择期望的闭环传递函数（$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$）：

$$\psi_1^*(s) = s^2 + 18s + 80，\ \psi_2^*(s) = s + 1，\ \psi_3^*(s) = s^2 + 30s + 200$$

$$L = \begin{bmatrix} c_1^\top(A^2 + 18A + 80I) \\ c_2^\top(A + I) \\ c_3^\top(A^2 + 30A + 200I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 0.291 & 20.376 & 0.079 & -17.314 \\ 0 & 0.946 & -0.172 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0.049 & 200 & 29.144 & -1.013 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} c_1^\top AB \\ c_2^\top B \\ c_3^\top AB \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.719 & 0 & 1.195 \\ 0.326 & 1 & 0.144 \\ 7.217 & 0 & 2.572 \end{bmatrix},$$

$$F = RL = \begin{bmatrix} 217.529 & 0.849 & 294.490 & 35.054 & -48.290 \\ 26.103 & 1.048 & 35.167 & 4.207 & -5.720 \\ 577.333 & 2.224 & 661.473 & 75.532 & -127.556 \end{bmatrix}$$

示例：飞机控制

为保持静态时单位传输关系，调整矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}2.719 & \mathbf{0} & 1.195\\ 0.326 & \mathbf{1} & 0.144\\ 7.217 & \mathbf{0} & 2.572\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}80 & & \\ & \mathbf{1} & \\ & & 200\end{bmatrix}$$

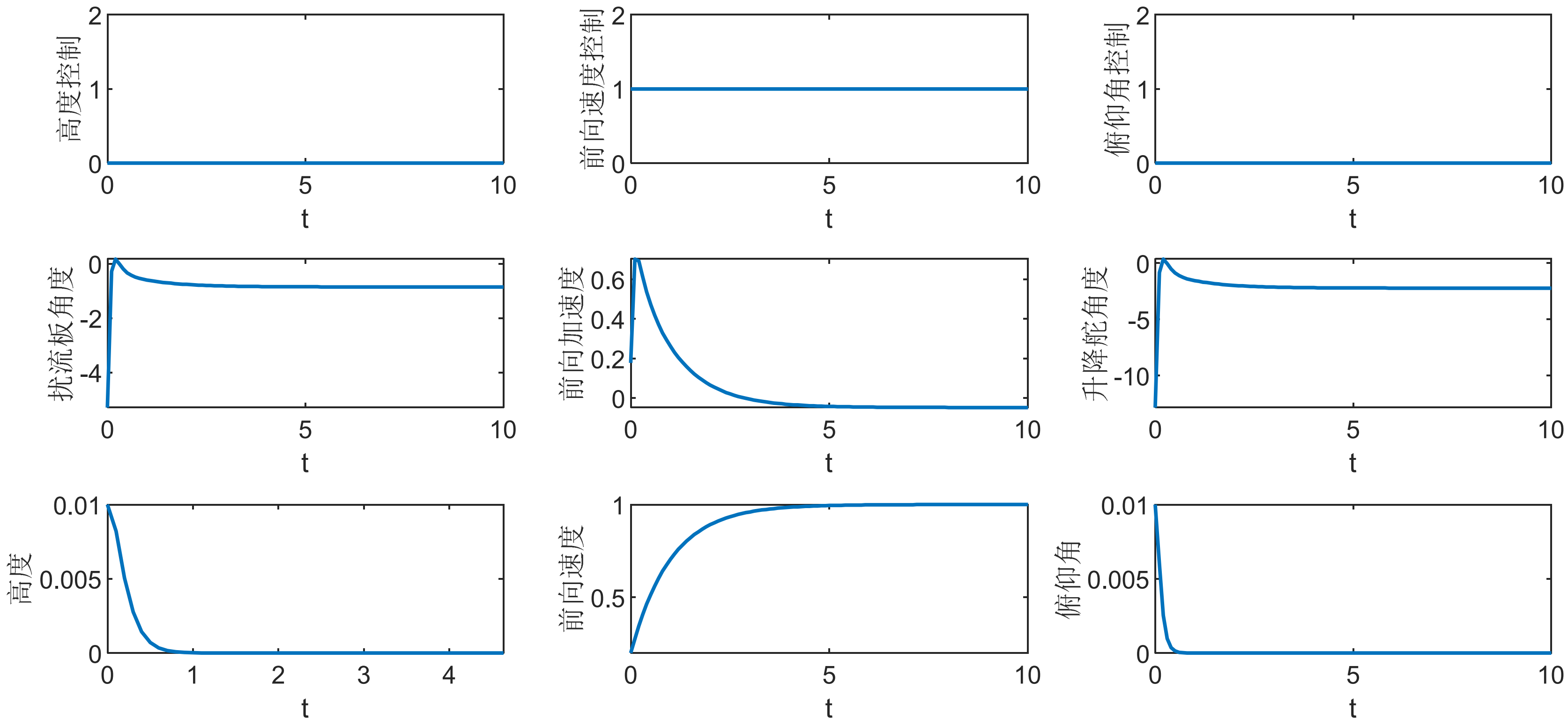
变换后的系统传递函数为：

$$\boldsymbol{G_L(s)=C(sI-A+BF)^{-1}BR}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s^2+18s+80}} & & \\ & \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s+1}} & \\ & & \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s^2+30s+200}}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{\mathbf{80}}{\boldsymbol{s^2+18s+80}} & & \\ & \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s+1}} & \\ & & \frac{\mathbf{200}}{\boldsymbol{s^2+30s+200}}\end{bmatrix}$$

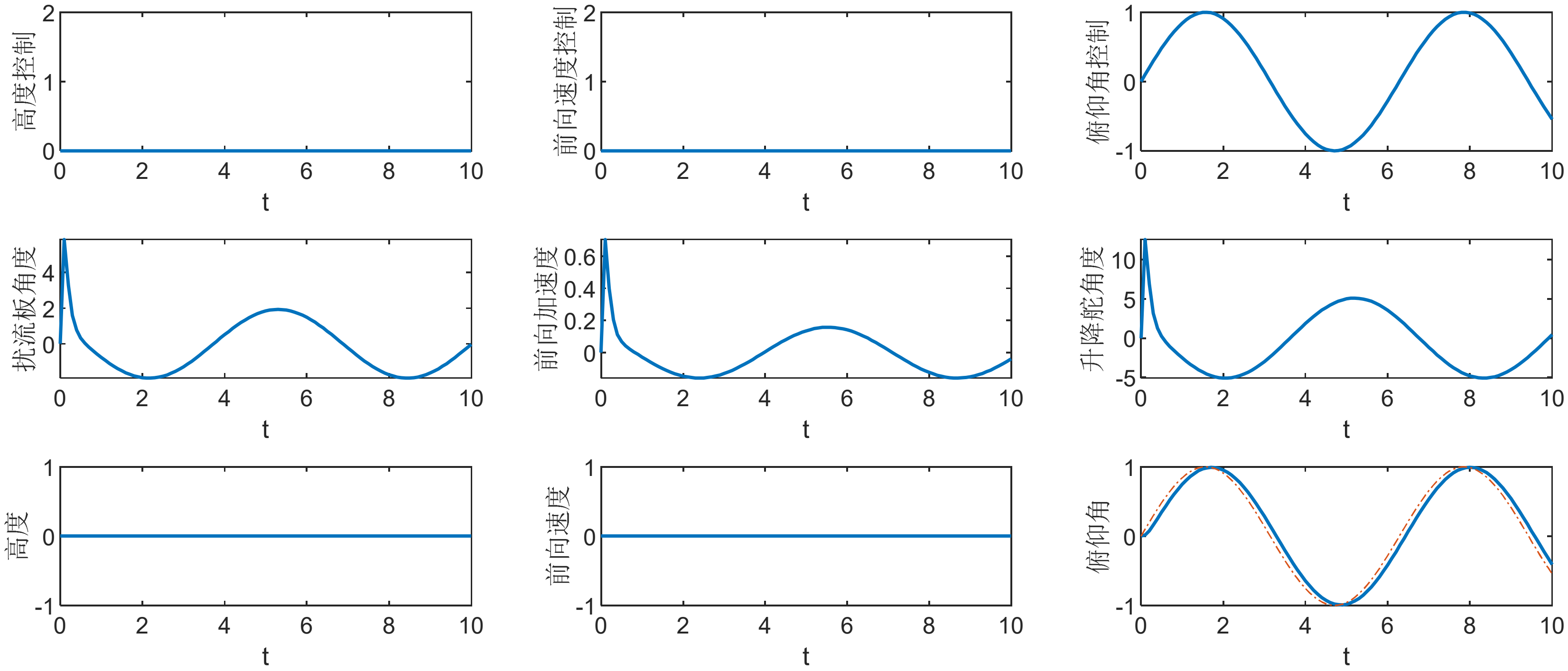
仿真效果

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



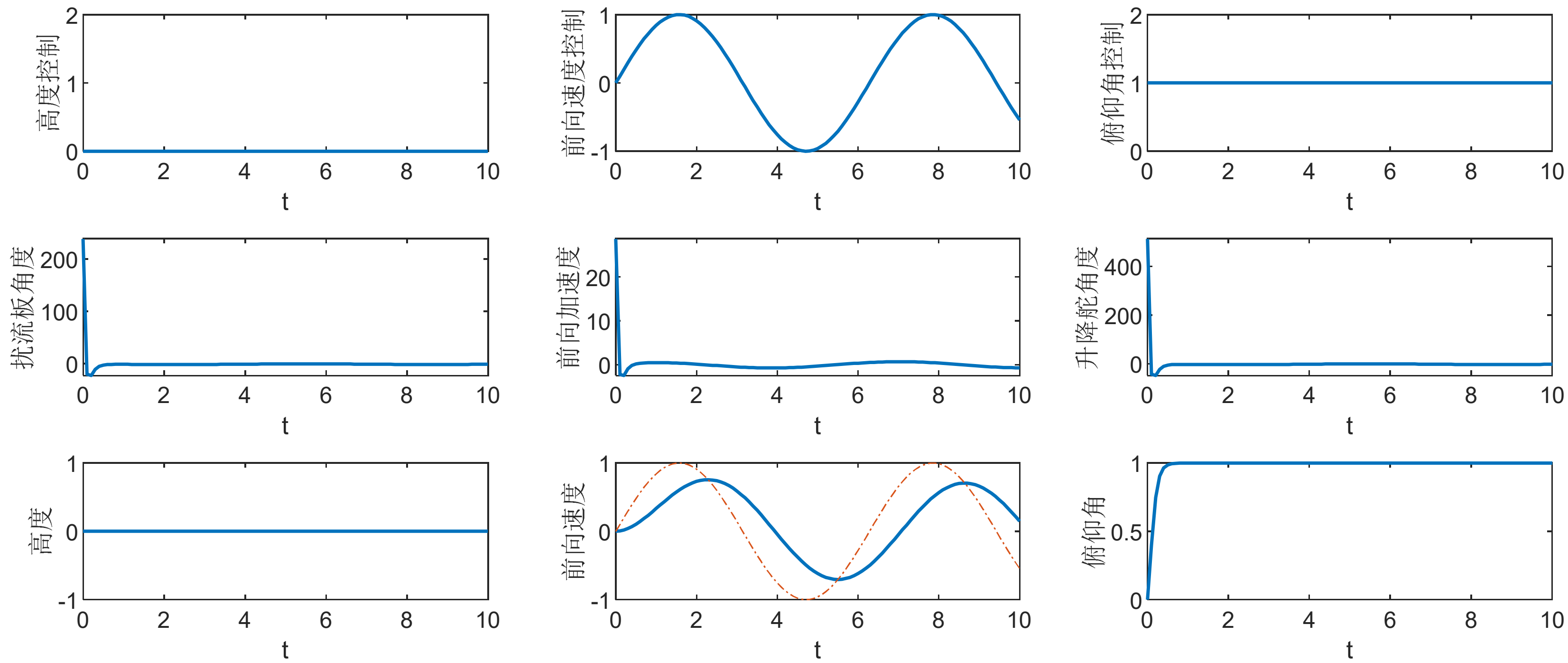
仿真效果

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



仿真效果

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



示例

为下列系统 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$设计 $\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$ 解耦并配置极点:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

解：根据之前计算$\boldsymbol{\alpha_1=\alpha_2=1}$，故 $\boldsymbol{\alpha_1+\alpha_2<3}$.

$$\boldsymbol{Q_c}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-3}\\\mathbf{0}&\mathbf{1}&\mathbf{-1}&\mathbf{-3}&\mathbf{3}&\mathbf{7}\end{bmatrix},\boldsymbol{Q_O}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{1}\\\mathbf{-1}&\mathbf{-2}&\mathbf{-3}\\\mathbf{-1}&\mathbf{-2}&\mathbf{-3}\\\mathbf{3}&\mathbf{6}&\mathbf{7}\end{bmatrix}$$

示例

解：根据之前计算$\alpha_1=\alpha_2=1$. 设目标特征多项式为：

$$\psi_1^*(s)=s+\beta_1,\qquad \psi_2^*(s)=s+\beta_2$$

因此得到

$$D_0=\begin{bmatrix} c_1^\top B \\ c_2^\top B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, L=\begin{bmatrix} c_1^\top \psi_1^*(A) \\ c_2^\top \psi_2^*(A) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_1 & 1 \\ -1 & -2 & \beta_2-3 \end{bmatrix}$$

$$R=D_0^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad F=D_0^{-1}L=\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_1 & 1 \\ -1 & -2 & \beta_2-3 \end{bmatrix}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

校核闭环系统：

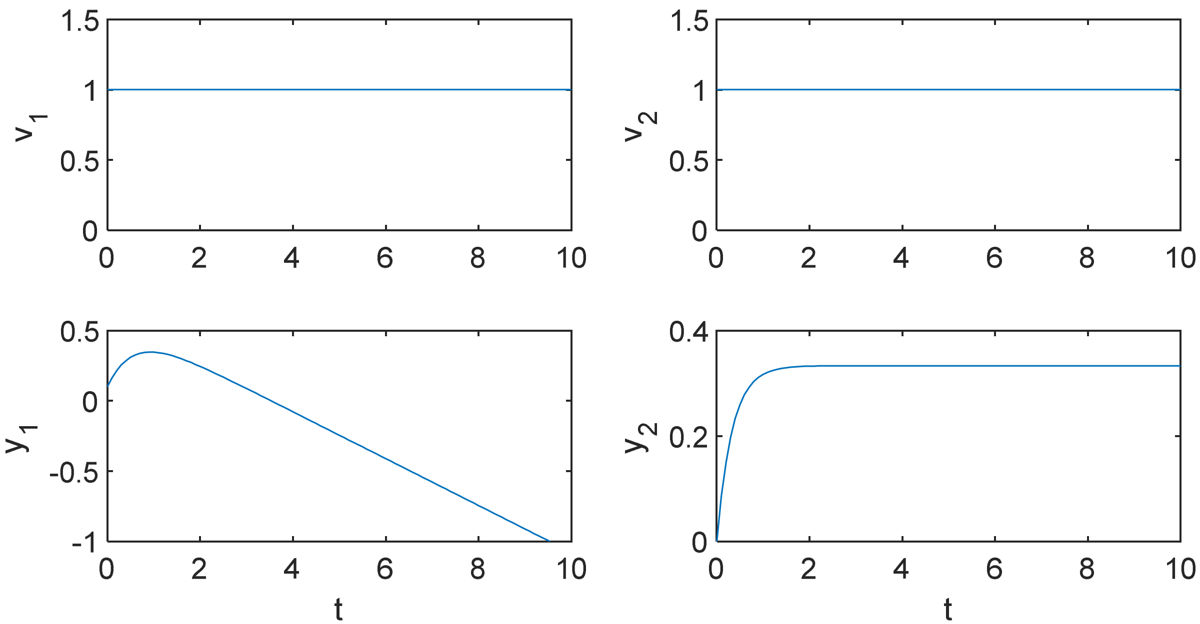
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF}=\begin{bmatrix}-\beta_1 & -\beta_1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -\beta_2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BR}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}_L(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BF})^{-1}\boldsymbol{BR}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+\beta_1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+\beta_2}\end{bmatrix}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



取 $\boldsymbol{\beta_1 = -2}$, $\boldsymbol{\beta_2 = -3}$，闭环系统应该动态解耦且渐进稳定，但为什么第一个输出没有跟踪第一个输入?

解耦零点

若闭环解耦系统积分环节个数小于状态个数，即

$$\boldsymbol{\alpha} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\alpha}_i < \boldsymbol{n}$$

则意味着传递函数矩阵存在一个 $\boldsymbol{\alpha}$ 维状态空间实现，即 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF},\boldsymbol{BR},\boldsymbol{C})$不是一个最小实现.

反馈改变了系统的能观性，从而产生零极相消，并且相消的极点可能是不稳定的.

问题*：能否通过反馈实现解耦控制，并配置这些极点?

解耦控制的零点问题

行零点

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

设系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$的传递函数阵$\boldsymbol{G_O}(\boldsymbol{s})$的第$\boldsymbol{i}$行为$\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{i}}^{\top}(\boldsymbol{s})$，其各元素分母为系统特征多项式时，记所有分子多项式的公因子为 $\boldsymbol{n}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{s})$，它的根称为该行的行零点。

把各行公因子提出来，得到如下表示：

$$\boldsymbol{G_O}(\boldsymbol{s}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_1(\boldsymbol{s}) & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{n}_m(\boldsymbol{s}) \end{bmatrix} \widetilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{s})\widetilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{s})$$

假定$\widetilde{\boldsymbol{G}}_O(s)$的状态空间实现为($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\widetilde{\boldsymbol{C}}$)。如果

（1）$\tilde{\Sigma}_O$可以通过{$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{R}$}实现解耦，且

（2）配置第i个子系统的极点与行零点$n_i(s)$相异.

则

（1）Σ_O必然可以通过同样的矩阵对{$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{R}$}实现解耦，并

（2）保留了相应的行零点。

（3）保留下来的零点数就是增配的极点数。

$\widetilde{C}$阵的求解

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\boldsymbol{G}_O(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}(s)\widetilde{\boldsymbol{G}}_O(s) = \boldsymbol{N}(s)\widetilde{\boldsymbol{C}}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$

或

$$n_i(s)\tilde{\boldsymbol{c}}_i^{\top}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}_i^{\top}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}$$

根据上述公式，确定$\tilde{\boldsymbol{c}}_i^{\top}$。

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

对下列系统 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})$，解耦并配置尽可能多的极点。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解： 由传递函数矩阵

$$\boldsymbol{G_O(s)}=\boldsymbol{C(sI-A)^{-1}B}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s(s+1)(s+2)}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{s^2+3s+1} & \boldsymbol{s}\\ \boldsymbol{-s} & \boldsymbol{s^2}\end{bmatrix}$$

可知 $\boldsymbol{n_1(s)=1}$， $\boldsymbol{n_2(s)=s}$.

$\boldsymbol{n_1(s) = 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{c}_1^\top = c_1^\top}.$

令 $\tilde{\boldsymbol{c}}_2^\top = [\boldsymbol{r_1} \quad \boldsymbol{r_2} \quad \boldsymbol{r_3}]$，由条件

$$\boldsymbol{n_2(s)\tilde{c}_2^\top (sI - A)^{-1} B = c_2^\top (sI - A)^{-1} B}$$

有

$$\boldsymbol{s[r_1 \quad r_2 \quad r_3]\begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ -1 & s \\ -s & s^2 \end{bmatrix} = [-s \quad s^2]}$$

$$\boldsymbol{\Rightarrow \tilde{c}_2^\top = [0 \quad 1 \quad 0] \quad (c_2^\top = [0 \quad 0 \quad 1])}$$

对 $(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \widetilde{\boldsymbol{C}})$ 进行$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$解耦和极点配置:

由$\widetilde{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{O}}(\boldsymbol{s})$得到：$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{1}}=\mathbf{1}$，$\quad\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{2}}=\mathbf{2}$，$\quad\boldsymbol{D}_{\mathbf{0}}=\boldsymbol{I}_{\mathbf{2}}$

对输出1（$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{1}}=\mathbf{1}$），设 $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{1}}^{*}(\boldsymbol{s})=\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{1}}$

对输出2（$\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\mathbf{2}}=\mathbf{2}$），设 $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{2}}^{*}(\boldsymbol{s})=(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{2}})(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{3}})$

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{c}}_{1}^{\top}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{1}}^{*}(\boldsymbol{A})\\ \tilde{\boldsymbol{c}}_{2}^{\top}\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{2}}^{*}(\boldsymbol{A})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_{1} & \boldsymbol{\beta}_{1} & \mathbf{1}\\ -\mathbf{1} & -\mathbf{2}+\boldsymbol{\beta}_{2}\boldsymbol{\beta}_{3} & -\mathbf{3}+\boldsymbol{\beta}_{2}+\boldsymbol{\beta}_{3}\end{bmatrix}$$

求得 $\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$：$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{D}_{\mathbf{0}}^{-\mathbf{1}}=\boldsymbol{I}_{\mathbf{2}}$，$\quad\boldsymbol{F}=\boldsymbol{D}_{\mathbf{0}}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}$

校核

$$\boldsymbol{G_L(s) = C(sI - A + BF)^{-1}BR}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+\beta_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{s}{(s+\beta_2)(s+\beta_3)} \end{bmatrix}$$

静态解耦控制

静态解耦系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

前述解耦问题又称动态解耦，希望在整个动态演化过程中，每个输入只影响相应的输出.

很多应用场景中不需要暂态过程互不影响，但当参考输入是阶跃型信号，系统达到稳态后每个输入只影响相应的输出，满足这个条件的系统称为静态解耦系统.

问题：能否设计反馈控制律 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$ 使闭环系统 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F},\boldsymbol{B}\boldsymbol{R},\boldsymbol{C})$ 静态解耦？

静态解耦条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

动态解耦要求传递函数矩阵渐近稳定，且 $\boldsymbol{G}(s)$为非奇异对角矩阵.

静态解耦不要求 $\boldsymbol{G}(s)$ 是对角矩阵，但要求其静态增益矩阵 $\boldsymbol{G}(\mathbf{0})$为非奇异对角阵.

定理 系统$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C})$可$\{\boldsymbol{F},\boldsymbol{R}\}$静态解耦的充要条件是$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$可镇定且

$$\mathbf{det}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}\neq 0.$$

设计分工：$\boldsymbol{F}$ 使系统镇定，$\boldsymbol{R}$ 使系统静态解耦.

静态解耦条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

证明：在反馈控制律 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{v}-\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}$ 下，闭环系统

$$\boldsymbol{G}_L(s)=\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_L)^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}$$

其中$\boldsymbol{A}_L=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}$. 易见静态解耦条件为:

(1) 闭环系统可镇定，即存在 $\boldsymbol{F}$ 使 $\boldsymbol{A}_L$为Hurwitz矩阵;

(2) $\boldsymbol{G}_L(0)=-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}$为非奇异对角阵.

由于$\boldsymbol{R}$是非奇异的，故矩阵$\boldsymbol{G}_L(\mathbf{0})$的非奇异性由下式可见:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ 0 & \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & 0\\ -\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_L^{-1} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \mathbf{0}\\ -\boldsymbol{F} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_L^{-1} & \boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{B}\\ 0 & -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

若希望静态时 $\boldsymbol{G}_L(\mathbf{0})=\boldsymbol{G}_D$, 则可以设置 $\boldsymbol{R}=-(\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_L^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{G}_D$.

示例

设计反馈控制$\{\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{R}\}$使受控系统$(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{C})$静态解耦。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\quad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

解： $\boldsymbol{CB}=\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}\end{bmatrix}\Rightarrow\ \boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{1},\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{1}.$

$\boldsymbol{D}_0=\boldsymbol{CB}$ 奇异 $\Rightarrow$ 系统不可动态输出解耦.

$$\left.\begin{array}{l}\text{rank}[\boldsymbol{B}\ \ \boldsymbol{AB}\ \ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}]=\mathbf{3}\\ \mathbf{det}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \mathbf{0}\end{bmatrix}=\mathbf{1}\end{array}\right.\Rightarrow \text{系统可静态输出解耦.}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

(1) 选择反馈阵 $\boldsymbol{F}$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为：$-1,-2,+1$，通过反馈$\boldsymbol{u_2}=-4\boldsymbol{x_3}$将不稳定极点配置到$-3$，得到：

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & -4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A_L}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BF}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -2 & 1\\1 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

(2) 计算输入变换阵$\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{A_L^{-1}}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\1 & 3 & 1\\2 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{CA_L^{-1}B}=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & -2\end{bmatrix}$$

选择期望的$\boldsymbol{G_L}(0)=\boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{R}=-(\boldsymbol{CA_L^{-1}B})^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}$

示例

(3) 校验闭环传递函数

$$G_L(s) = C(sI - A_L)^{-1}BR$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} 2(s^2+3s+3) & -s(s+3) \\ -2s(s+2) & (s+2)(s+3) \end{bmatrix}$$

可知闭环系统渐稳，且 $G_L(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$是对角的.

- 可实现静态解耦的系统未必能实现动态解耦
- 可实现动态解耦的系统一定能实现静态解耦

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

某飞机垂面运动线性化模型：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t)$$

其中状态分量

$x_1(t)$为高度，

$x_2(t)$为前向速度，

$x_3(t)$为俯仰角，

$x_4(t)$为俯仰角速度，

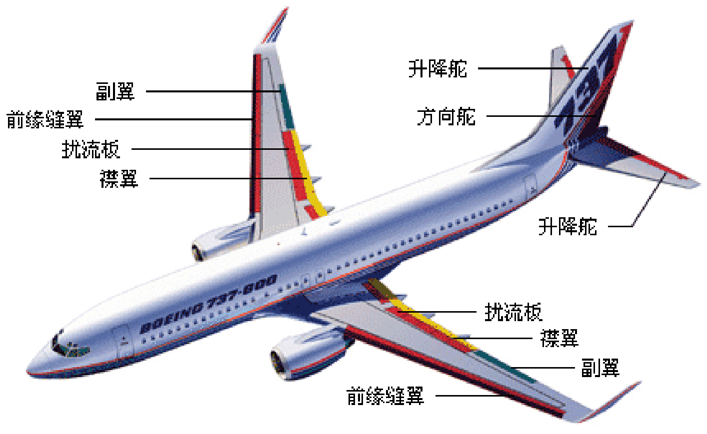
$x_5(t)$为垂直速度；

控制分量

$u_1(t)$为扰流板角度，

$u_2(t)$为前向加速度，

$u_3(t)$为升降舵角度。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1715 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

飞机垂面运动控制

(1) 可静态解耦性分析

- $\det\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = 0.6123 \neq 0$
- $\mathrm{Rank}\ \boldsymbol{Q}_{c1} = \mathrm{Rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{A}^3\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{A}^4\boldsymbol{b}_1 \end{bmatrix} = 5$

可知$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}_1)$是可控对，因此该系统是可静态解耦的。

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

(2) 设计镇定反馈律 $\boldsymbol{F}$

因为$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b_1})$是可控对，故可只利用$\boldsymbol{u_1}$反馈，通过反馈

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} -1598.7 & -10676.9 & -4744.1 & -1466.6 & 3309.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将闭环极点配置在$\{-1,-2,-3,-4,-5\}$.

MATLAB 命令： p = [-1,-2,-3,-4,-5]; F = place(A,B(:,1),p)

飞机垂面运动控制

(3) 计算输入变换矩阵$\boldsymbol{R}$

根据已经确定的反馈矩阵$\boldsymbol{F}$

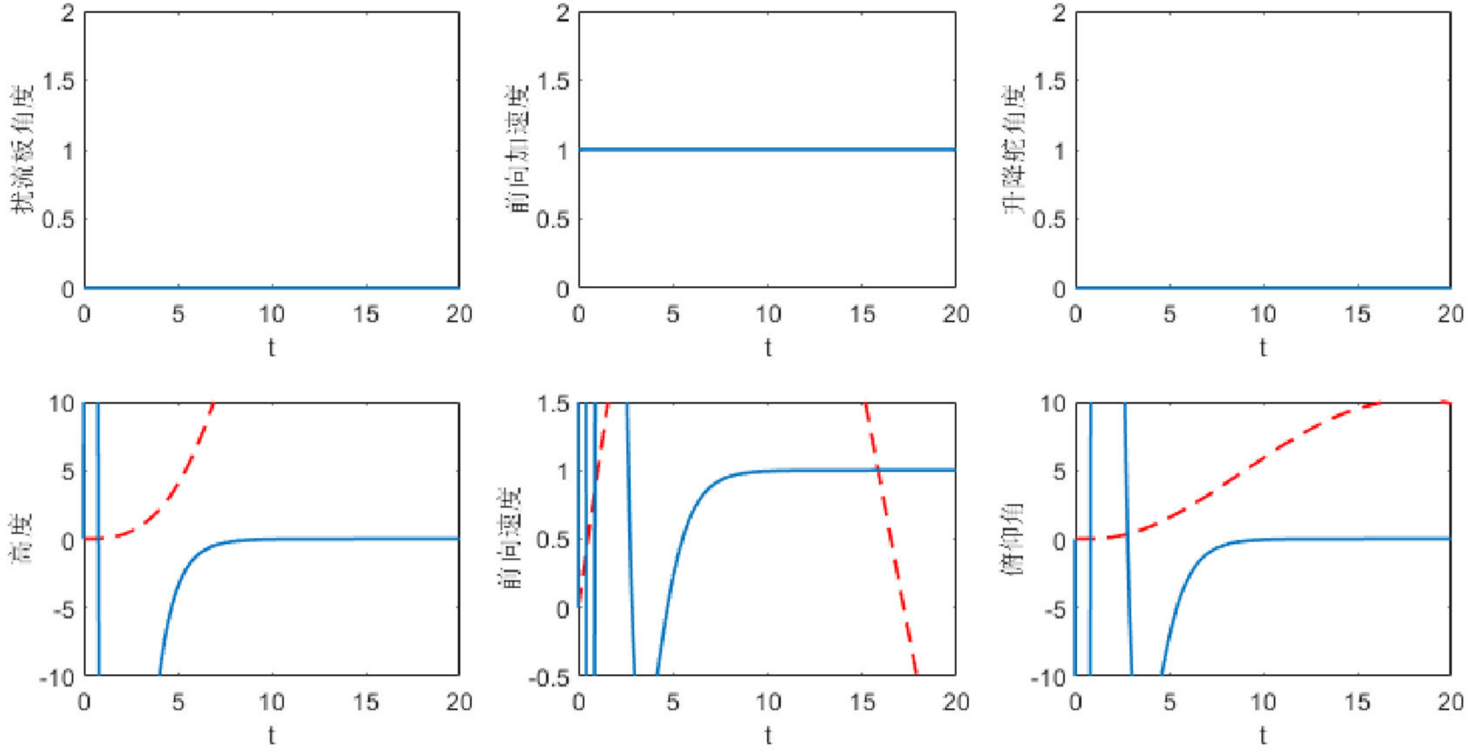
$$\boldsymbol{A}_L=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.1 & 0.0 & -1.0 \\ -191.8 & -1281.3 & -569.5 & -176.0 & 397.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 7064.6 & 47181.5 & 20964.2 & 6480.1 & -14627.7 \\ 2517.9 & 16815.9 & 7472.0 & 2311.0 & -5213.8 \end{bmatrix}$$

选择静态传递函数矩阵 $\boldsymbol{G}_D=\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{R}=-\left[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}_L)^{-1}\boldsymbol{B}\right]^{-1}\boldsymbol{G}_D=\begin{bmatrix} -1598.7 & -10677.8 & -998.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.2 & -2.7 \end{bmatrix}$$

仿真检验

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



本章总结

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

1. 基本概念
2. 串联补偿器方法
3. $\{F,R\}$解耦及其可解耦条件【$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{D_0}$】
4. 解耦阶常数的性质
5. 闭环极点配置
6. 静态解耦控制