

第一章 解耦控制

本章内容

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

1. 基本概念
2. 串联补偿器方法
3. 状态反馈+输入变换
4. 解耦阶常数的性质
5. 闭环极点配置
6. 静态解耦控制

基本概念

多变量系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



飞机控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

某飞机垂面运动线性化模型：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

其中状态分量

$x_1(t)$ 为高度，

$x_2(t)$ 为前向速度，

$x_3(t)$ 为俯仰角，

$x_4(t)$ 为俯仰角速度，

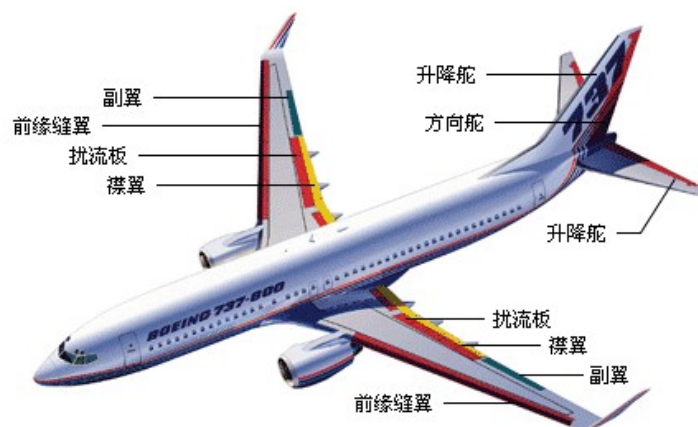
$x_5(t)$ 为垂直速度；

控制分量

$u_1(t)$ 为扰流板角度，

$u_2(t)$ 为前向加速度，

$u_3(t)$ 为升降舵角度。

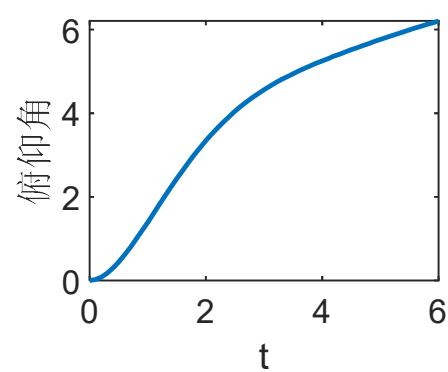
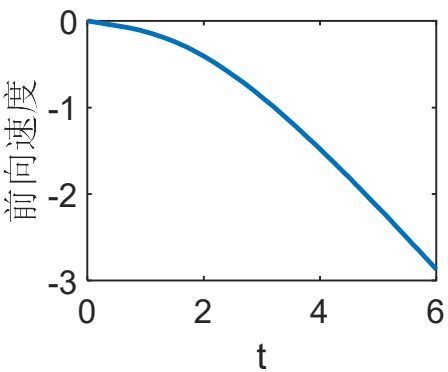
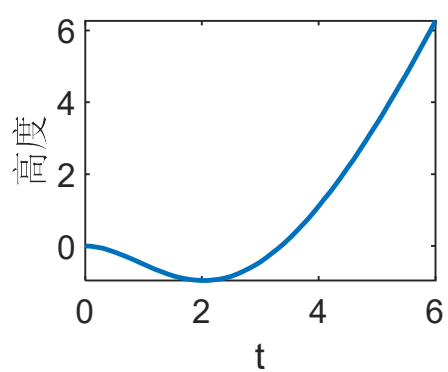
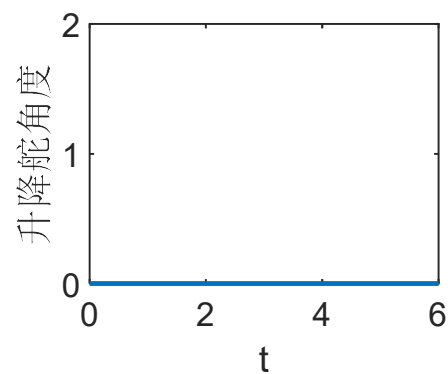
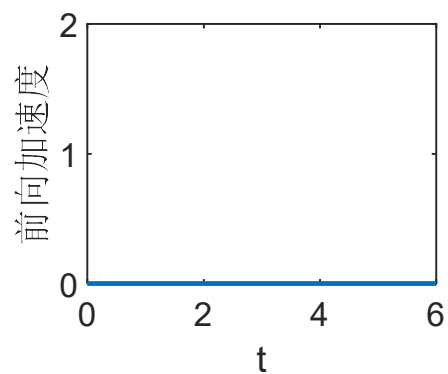
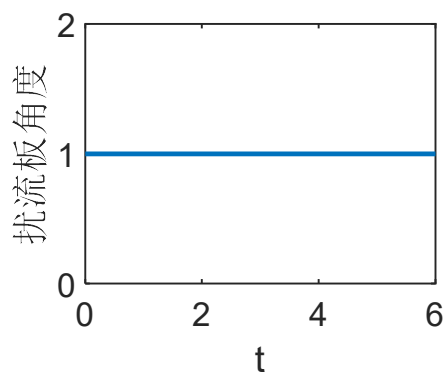


$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1715 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

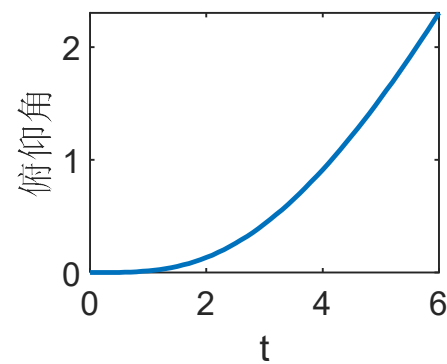
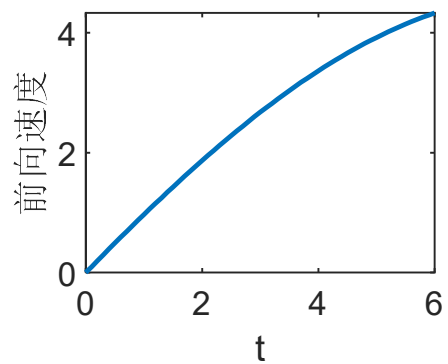
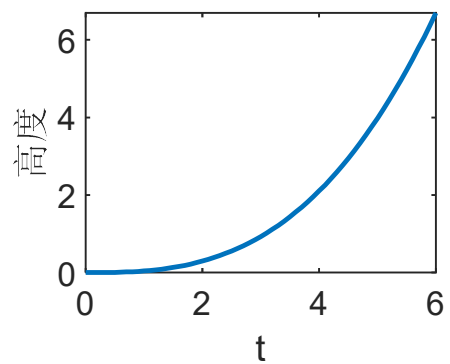
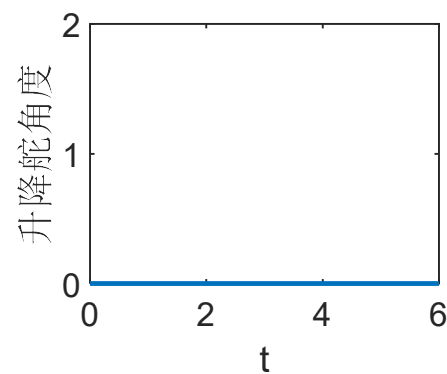
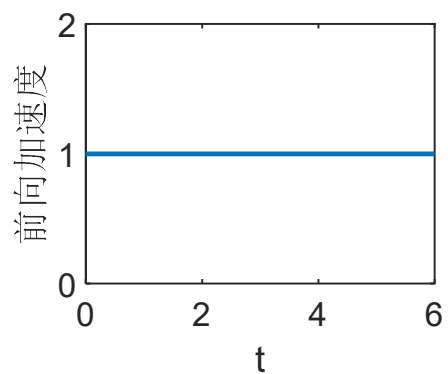
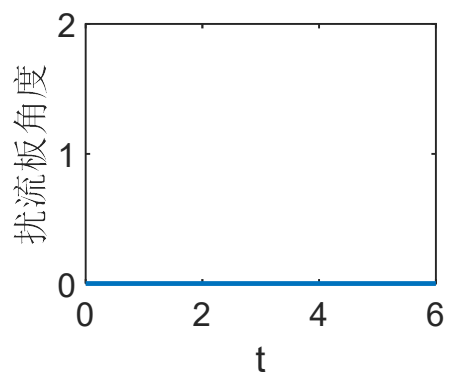
控制互耦（调节扰流板）

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



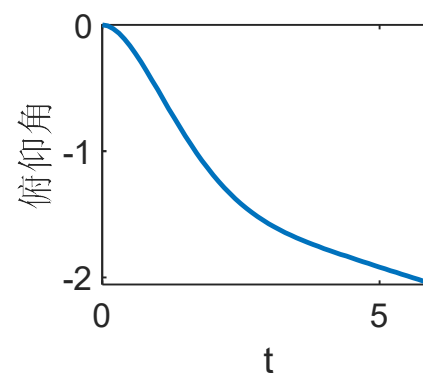
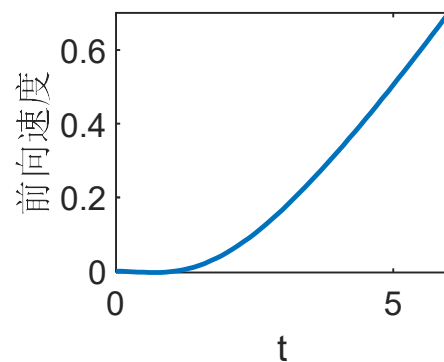
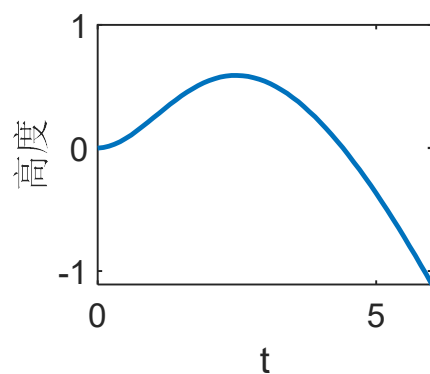
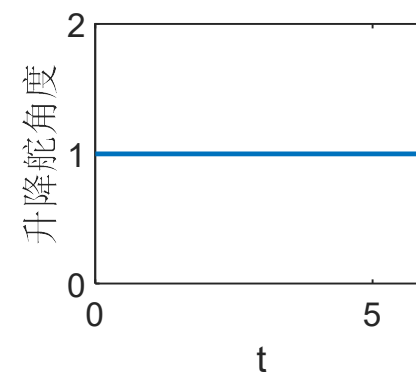
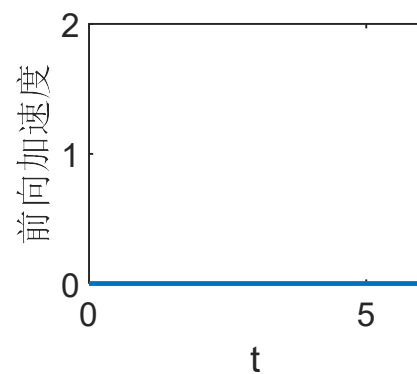
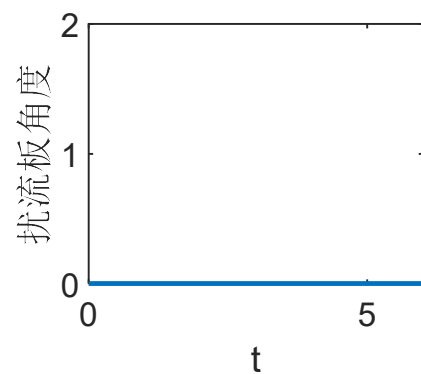
控制互耦（调节加速度）

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



控制互耦（调节升降舵）

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



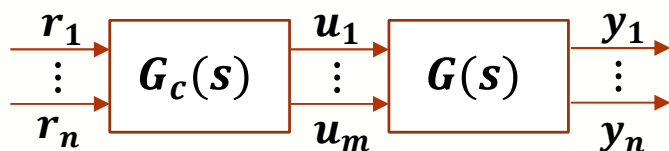
解耦控制问题

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

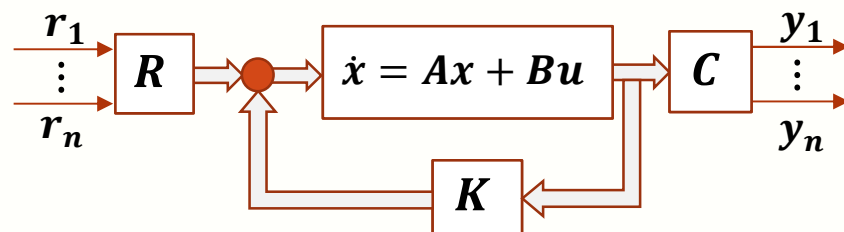
如何通过输入变换和反馈改造系统结构，使系统的参考输入和输出之间一一对应、互不耦合。

优点：将控制设计分解为多个易于分析的单变量问题。

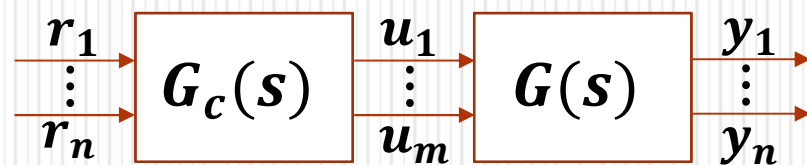
串联补偿



输入变换+状态反馈



串联补偿器方法



解耦系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

记 $\mathbf{G}(s)$ 为 n -输入 n -输出线性定常系统的传递函数矩阵。

定义1: 若 $\mathbf{G}(s)$ 为 **非奇异对角阵**，则称该系统为输入输出解耦系统。

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} g_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & g_n(s) \end{bmatrix}$$

定义2: 对角元素为 **积分器** 的解耦系统称为积分型解耦系统 (Integral Decoupling)

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{\alpha_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s^{\alpha_n}} \end{bmatrix}$$

可逆系统

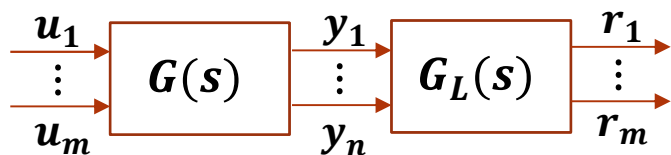
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

记 $G(s)$ 为 m -输入 n -输出线性定常系统的传递函数矩阵。

定义1: 若存在 $G_L(s)$ 使得

$$G_L(s)G(s) = \mathbb{I}_m$$

则称系统 $G(s)$ 是左可逆的,
 $G_L(s)$ 称为左逆系统。



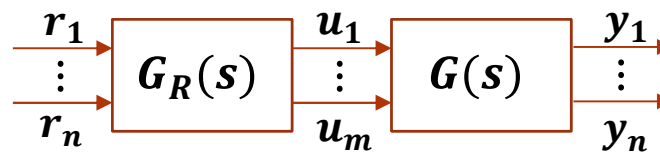
可用于恢复未知输入信号 ($n \geq m$)

(又称函数可观性)

定义2: 若存在 $G_R(s)$ 使得

$$G(s)G_R(s) = \mathbb{I}_n$$

则称系统 $G(s)$ 是右可逆的,
 $G_R(s)$ 称为右逆系统。



可用于按需设计控制输入 ($m \geq n$)

(又称函数可控性)

可逆系统

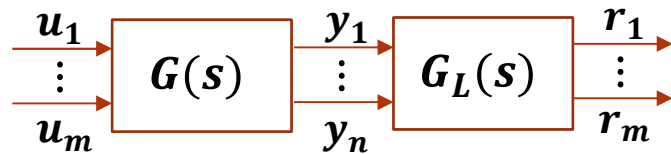
— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

记 $G(s)$ 为 m -输入 n -输出线性定常系统的传递函数矩阵。

定义1: 若存在 $G_L(s)$ 使得

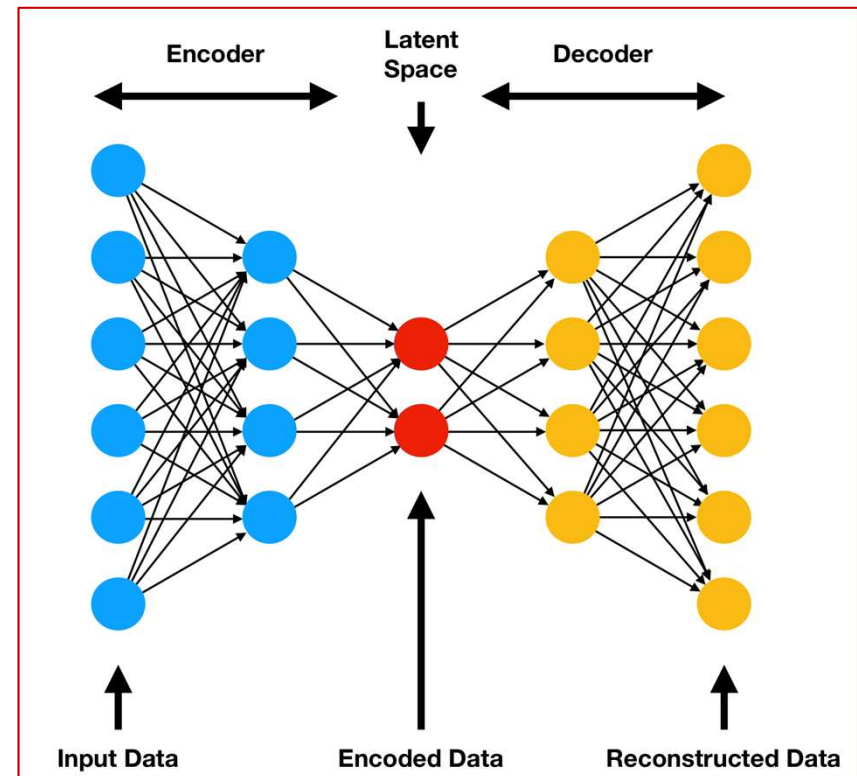
$$G_L(s)G(s) = \mathbb{I}_m$$

则称系统 $G(s)$ 是左可逆的，
 $G_L(s)$ 称为左逆系统。



可用于恢复未知输入信号 ($n \geq m$)

(又称函数可观性)

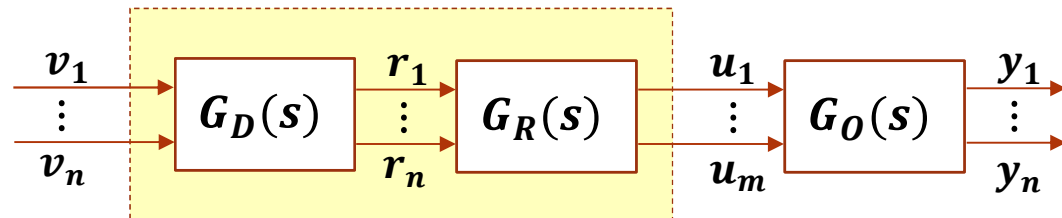


自编码器 (Auto-encoder)

串联补偿器方法

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

对于给定的多输入多输出系统 $\mathbf{y} = \mathbf{G}_O(s)\mathbf{u}$,



若 $\mathbf{G}_O(s)$ 右可逆，则可以通过串联补偿器：

$$\mathbf{G}_C(s) = \mathbf{G}_R(s)\mathbf{G}_D(s), \text{ 其中 } \mathbf{G}_D(s) = \text{diag} \left[\frac{1}{s^{\alpha_1}}, \dots, \frac{1}{s^{\alpha_m}} \right]$$

将系统补偿为积分型解耦系统 $\mathbf{y}(s) = \text{diag} \left[\frac{1}{s^{\alpha_1}}, \dots, \frac{1}{s^{\alpha_m}} \right] \mathbf{v}(s)$ ：

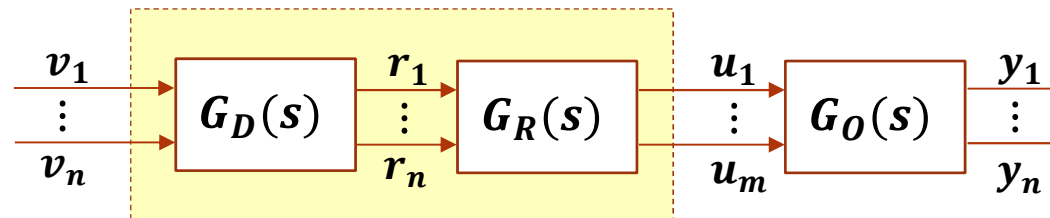
$$y_i(s) = \frac{1}{s^{\alpha_i}} v_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

—— 解铃还须系铃人

串联补偿器方法

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

基本性质：系统 $G_O(s)$ 可解耦与系统（右）可逆是等价的。



- 若 $G_O(s)$ 右可逆，则系统一定可解耦。

- 若 $G_O(s)$ 可解耦，则系统一定右可逆。

证明：此时存在控制器 $G_C(s)$ ，使得 $G_D(s) = G_C(s)G_O(s)$ 是解耦系统，故 $G_D^{-1}(s)G_C(s)$ 是系统的右逆系统。

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

求一个串联补偿器使下述系统实现积分型解耦控制。

$$\mathbf{G}_O(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{-1}{s+1} \\ \frac{s-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

解：可构造如下补偿器实现积分型解耦

$$\mathbf{G}_C(s) = \mathbf{G}_O^{-1}(s)\mathbf{G}_D(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} \\ -\frac{s^2-1}{2s} & \frac{(s+1)^2}{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{\alpha_1}} & \\ & \frac{1}{s^{\alpha_2}} \end{bmatrix}$$

问题： α_1 和 α_2 应该如何选取？

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

如下形式的 $\mathbf{G}_D(s)$ 是否可以实现解耦？

- $\mathbf{G}_D(s) = \text{diag}\left[1, \frac{1}{s}\right]$

- $\mathbf{G}_D(s) = \text{diag}\left[\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}\right]$

- $\mathbf{G}_D(s) = \text{diag}\left[\frac{1}{s+1}, \frac{1}{s+2}\right]$

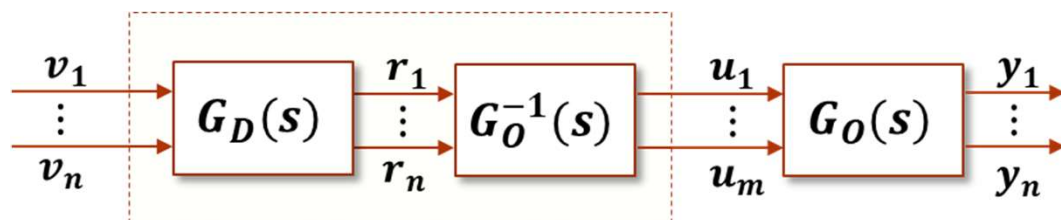
- $\mathbf{G}_D(s) = \text{diag}\left[\frac{s+4}{s^2+3s+2}, \frac{s-1}{s^2+8s+100}\right]$

$$\mathbf{G}_C(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} \\ -\frac{s^2-1}{2s} & \frac{(s+1)^2}{2s} \end{bmatrix} \mathbf{G}_D(s)$$

为保证物理可实现性， $\alpha_1 \geq 1, \alpha_2 \geq 1$ (\Rightarrow 解耦阶常数)

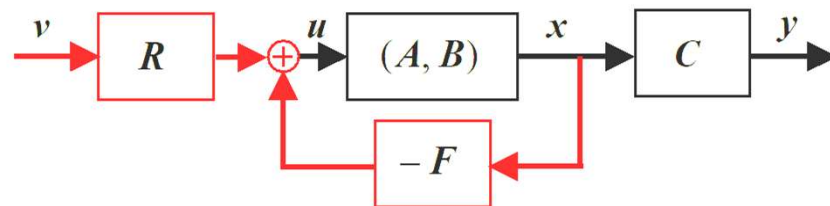
串联型补偿的优缺点

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



- (1) 结构简单，无需对输出或者状态进行量测；
- (2) 动态补偿器包含内部模态，动力学复杂；
- (3) 可能存在不稳定零极相消： $G_O(s)G_O^{-1}(s)G_L(s)$ ；
- (4) 未考虑初值的影响。

状态反馈 + 输入变换

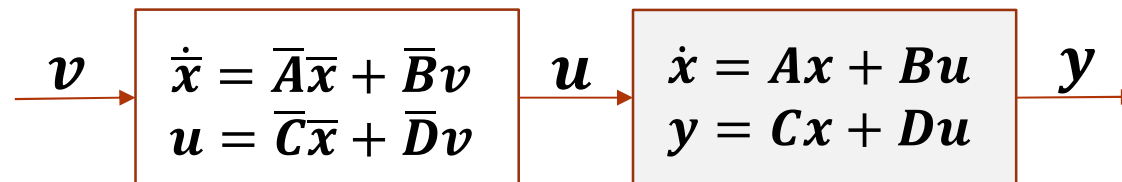


状态空间模型

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

待解耦系统 $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$ 其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$.

能否也能够采用串联逆系统的方法解耦？



假如 \mathbf{D} 是可逆矩阵，则从状态方程可以得到逆系统方程：

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{v} \\ \mathbf{u} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{v} - \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad [\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}(0)]$$

尝试将逆系统中反馈信号用 $\mathbf{x}(t)$ 替代，将串联方案简化为反馈方案 $\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{v} - \mathbf{F}\mathbf{x}$.

状态空间模型

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考虑如下待解耦的系统 $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$, 其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. 尝试采用“状态反馈+输入变换”:

$$\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{v} - \mathbf{F}\mathbf{x}$$

其中 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ 是参考输入. 变换后的闭环系统如下:

$$\Sigma_L: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{R}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$$

若闭环系统 $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}, \mathbf{B}\mathbf{R}, \mathbf{C})$ 为解耦系统, 即闭环传递函数矩阵 $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}$ 为非奇异对角矩阵, 则称系统 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 可 $\{\mathbf{F}, \mathbf{R}\}$ 解耦.

分析思路

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

方程 $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$ 里不显含输入 \mathbf{u} , 说明 $\mathbf{y}(t)$ 与 $\mathbf{u}(t)$ 无关吗? 否.

控制输入 $\mathbf{u}(t)$ 通过状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

影响 $\mathbf{x}(t)$ 的变化, 从而可能影响 $\mathbf{y}(t)$ 的变化, 即 $\dot{\mathbf{y}}(t)$, $\ddot{\mathbf{y}}(t)$, ... 等.

思路: 分析每个 $\mathbf{y}_i(t)$ 及其各阶导数与 $\mathbf{v}_i(t)$ 的依赖关系.

解耦阶常数

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

考察待解耦系统，将第*i*个输出 $y_i = c_i^\top x$ 对*t*求导：

$$y_i^{(1)} = c_i^\top \dot{x} = c_i^\top Ax + c_i^\top Bu$$

$$y = Cx = \begin{bmatrix} c_1^\top x \\ \vdots \\ c_m^\top x \end{bmatrix}$$

若 $c_i^\top B = 0$ ，则 $y_i^{(1)}$ 不显含 u ，可继续求导

$$y_i^{(2)} = c_i^\top A\dot{x} = c_i^\top A^2x + c_i^\top ABu$$

若 $c_i^\top AB = 0$ ，则 $y_i^{(2)}$ 不显含 u ，仍可继续求导…

设求导 α_i 次后有：

$$y_i^{(\alpha_i)} = c_i^\top A^{\alpha_i}x + c_i^\top A^{\alpha_i-1}Bu, \quad c_i^\top A^{\alpha_i-1}B \neq 0$$

解耦阶常数

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定义：输入 \mathbf{u} 可以直接影响 \mathbf{y}_i 对时间导数的最小阶，即：

$$\alpha_i \triangleq \min\{k | \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} \neq \mathbf{0}, 1 \leq k \leq n\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

是否有可能 $\mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{B} = \mathbf{0}$ 对所有 $1 \leq k \leq n$ 均成立？

如果 m 个 α_i 已求出，则下式成立：

$$\mathbf{y}^{(\alpha)} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^{(\alpha_1)} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m^{(\alpha_m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^\top \mathbf{A}^{\alpha_1} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top \mathbf{A}^{\alpha_m} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^\top \mathbf{A}^{\alpha_1-1} \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_m^\top \mathbf{A}^{\alpha_m-1} \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u} \triangleq \mathbf{L} \mathbf{x} + \mathbf{D}_0 \mathbf{u}$$

其中 $\mathbf{D}_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 称为可解耦矩阵。

解耦控制律设计

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

引入反馈 $\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{v} - \mathbf{F}\mathbf{x}$ ，则对于新的参考输入：

$$\mathbf{y}^{(\alpha)} = \mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{D}_0\mathbf{u} = (\mathbf{L} - \mathbf{D}_0\mathbf{F})\mathbf{x} + \mathbf{D}_0\mathbf{R}\mathbf{v}$$

显然，若 $\det \mathbf{D}_0 \neq 0$ ，则可以选择反馈系数：

$$\mathbf{R} = \mathbf{D}_0^{-1}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{D}_0^{-1}\mathbf{L}$$

使得 $\mathbf{y}^{(\alpha)} = \mathbf{v}$ ，即 α 阶积分型解耦：

$$y_i^{(\alpha_i)} = v_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

注： $m > n$ 时，要求 \mathbf{D}_0 行满秩（系统右可逆）

可解耦条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：系统 (A, B, C) 可 $\{F, R\}$ 解耦，当且仅当可解耦矩阵

$$D_0 = \begin{bmatrix} c_1^\top A^{\alpha_1-1} B \\ \vdots \\ c_m^\top A^{\alpha_m-1} B \end{bmatrix}$$

为非奇异矩阵。【充分性显然，必要性怎么证明？】

此时闭环传递函数阵为：

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1/s^{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/s^{\alpha_m} \end{bmatrix}.$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

给定受控系统 $\Sigma_O(A, B, C)$ ，设计 $\{F, R\}$ 解耦。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解：计算解耦阶常数

$$c_1^T B = [1 \quad 0] \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1;$$

$$c_2^T B = [0 \quad 1] \neq 0 \Rightarrow \alpha_2 = 1.$$

$$\begin{aligned} D_0 &= \begin{bmatrix} c_1^T B \\ c_2^T B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{可解耦} \end{aligned}$$

$$L = \begin{bmatrix} c_1^T A^{\alpha_1} \\ c_2^T A^{\alpha_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

计算 $\{F, R\}$ 反馈系数矩阵:

- $R = D_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $F = D_0^{-1}L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

校验反馈后闭环传递函数矩阵:

$$G_L(s) = C(sI - A + BF)^{-1}BR = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

可以看出, 闭环系统确是积分型解耦系统.

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

某飞机垂面运动线性化模型：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

其中状态分量

$x_1(t)$ 为高度，

$x_2(t)$ 为前向速度，

$x_3(t)$ 为俯仰角，

$x_4(t)$ 为俯仰角速度，

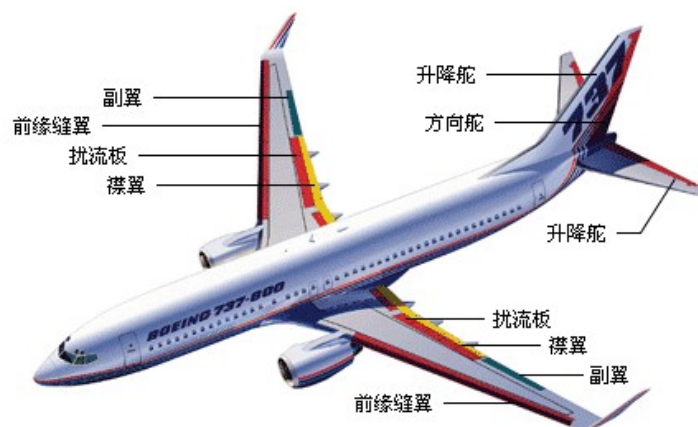
$x_5(t)$ 为垂直速度；

控制分量

$u_1(t)$ 为扰流板角度，

$u_2(t)$ 为前向加速度，

$u_3(t)$ 为升降舵角度。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1715 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_2 = 1; CAB = \begin{bmatrix} -1.575 & 0 & 0.732 \\ 0.125 & -0.054 & -0.055 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_3 = 2$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} c_1^\top AB \\ c_2^\top B \\ c_3^\top AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.575 & 0 & 0.732 \\ -0.120 & 1 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} c_1^\top A^2 \\ c_2^\top A \\ c_3^\top A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.291 & 0 & 0.079 & 0.686 \\ 0 & -0.054 & -0.172 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0.049 & 0 & -0.856 & -1.013 \end{bmatrix}$$

$$R = D_0^{-1} = \begin{bmatrix} 2.719 & 0 & 1.195 \\ 0.326 & 1 & 0.144 \\ 7.217 & 0 & 2.572 \end{bmatrix}, F = D_0^{-1}L = \begin{bmatrix} 0 & 0.849 & 0 & -0.809 & 0.654 \\ 0 & 0.048 & -0.172 & -0.097 & 0.154 \\ 0 & 2.224 & 0 & -1.632 & 2.344 \end{bmatrix}$$

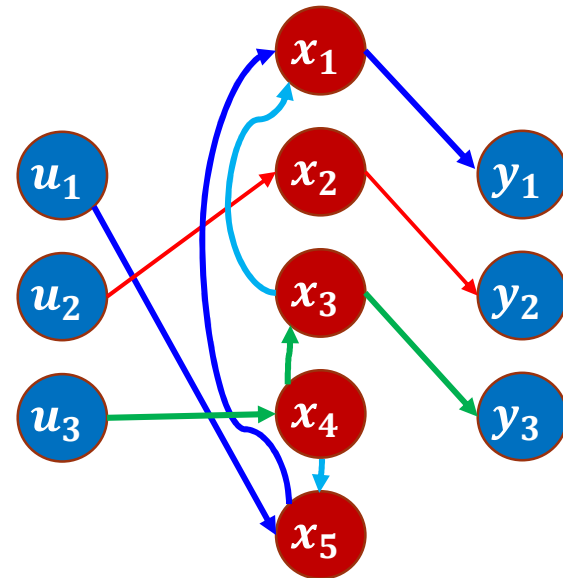
飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

闭环系统状态方程与传递函数矩阵：

$$A - BF = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.132 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BR = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



容易计算验证： $G_L(s) = C(sI - A + BF)^{-1}BR = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & & \\ & \frac{1}{s} & \\ & & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$

解耦阶常数的性质

解耦阶常数的不变性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理：系统 (A, B, C) 经任意 $\{F, R\}$ ($\det R \neq 0$) 变换为闭环系统 $(A - BF, BR, C)$ ，则变换后解耦阶常数不变。

证：计算 $\{F, R\}$ 变换后系统的解耦阶常数：

$$\begin{aligned} & c_i^\top (A - BF)^k BR && (k < \alpha_i) \\ &= c_i^\top (A - BF)(A - BF)^{k-1} BR && \text{【}\because c_i^\top B = 0 \text{】} \\ &= c_i^\top A(A - BF)(A - BF)^{k-2} BR && \text{【}\because c_i^\top AB = 0 \text{】} \\ &\vdots \\ &= c_i^\top A^k BR \end{aligned}$$

上述关系对 $k < \alpha_i$ 都成立，由 $\det R \neq 0$ ，系统变换前后解耦阶常数 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ 不变。

可解耦矩阵的变换关系

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

设原系统的可解耦矩阵为 D_0 ，则经过 (F, R) 变换后闭环系统的可解耦矩阵为：

$$D = \begin{bmatrix} c_1^\top (A - BF)^{\alpha_1-1} BR \\ \vdots \\ c_m^\top (A - BF)^{\alpha_m-1} BR \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^\top A^{\alpha_1-1} BR \\ \vdots \\ c_m^\top A^{\alpha_m-1} BR \end{bmatrix} = D_0 R.$$

可解耦矩阵与输入变换有关，但与反馈系数无关.

解耦阶常数与传递函数矩阵

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

回顾前述串联补偿解耦的例子： $\mathbf{G}_O(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{-1}{s+1} \\ \frac{s-1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$

构造如下补偿器实现积分型解耦

$$\mathbf{G}_C(s) = \mathbf{G}_O^{-1}(s)\mathbf{G}_D(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{2} & \frac{s+1}{2} \\ -\frac{s^2-1}{2s} & \frac{(s+1)^2}{2s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{\alpha_1}} & \\ & \frac{1}{s^{\alpha_2}} \end{bmatrix}$$

问题： α_1 和 α_2 应该如何选取？

与解耦阶常数什么关系？是否能直接从 $\mathbf{G}_O(s)$ 观察得出？

解耦阶常数与传递函数矩阵

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理: 记 $\mathbf{G}_O(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ 为线性定常系统 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 的传递函数阵, 其第 i 行为 $\mathbf{g}_i^T(s)$, 则解耦阶常数

$$\alpha_i = d_i - n_i,$$

其中 d_i 是 $\mathbf{g}_i^T(s)$ 各元素通分后分母多项式的阶次, n_i 为各元素分子多项式的最大阶次。可解耦矩阵 \mathbf{D}_0 第 i 行的各元素等于 $\mathbf{g}_i^T(s)$ 对应分子多项式 n_i 次幂项的系数。

$$\text{例: } \mathbf{G}_O(s) = \frac{1}{s^3+3s^2+2s} \begin{bmatrix} \mathbf{2s^2} + 3s & \mathbf{s^2} \\ -s & \mathbf{s^2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\alpha_2=3-2=1]{\alpha_1=3-2=1} \mathbf{D}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

解耦阶常数与传递函数矩阵

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

证：根据Fedeeva算法可知

$$g_i^\top(s) = c_i^\top (sI - A)^{-1} B = c_i^\top \frac{P(s)}{\psi(s)} B,$$

其中 $\psi(s) = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n$,

$$P(s) = p_0(s)A^{n-1} + p_1(s)A^{n-2} + \dots + p_{n-2}(s)A + p_{n-1}(s)I$$

其中 $p_i(s)$ 是幂次为 i 的首一多项式。

根据耦合阶常数定义： $c_i^\top A^k B = 0, \quad 0 \leq k < \alpha_i - 1$ ，故

$$\begin{aligned} g_i^\top(s) &= \frac{1}{\psi(s)} [p_0(s)c_i^\top A^{n-1} B + \dots + p_{n-1}(s)c_i^\top B] \\ &= \frac{1}{\psi(s)} [p_0(s)c_i^\top A^{n-1} B + \dots + p_{n-\alpha_i}(s)c_i^\top A^{\alpha_i-1} B] \end{aligned}$$

解耦阶常数与传递函数矩阵

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\mathbf{g}_i^\top(s) = \frac{1}{\psi(s)} [p_0(s)\mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} + \cdots + p_{n-\alpha_i}(s)\mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{\alpha_i-1}\mathbf{B}]$$

可见 $\mathbf{g}_i^\top(s)$ 分母多项式和最高阶分子多项式的阶数为

$$d_i = n, \quad n_i = n - \alpha_i \Rightarrow d_i - n_i = \alpha_i$$

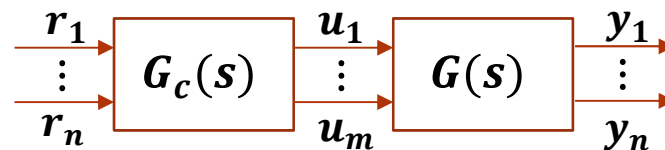
且 n_i 次幂项的系数 $\mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{\alpha_i-1}\mathbf{B}$ 恰为可解耦矩阵 \mathbf{D}_0 的第 i 行。证毕。

注：解耦阶常数 α_i 等于 $\mathbf{g}_i^\top(s)$ 各元素的最小相对阶。

可解耦性与输出可控性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

由串联解耦分析可知，系统可解耦当且仅当传递函数矩阵（右）可逆，即存在矩阵 $G_c(s)$ ，使得 $G(s)G_c(s) = I$ 。



这类系统称为右可逆的，亦称为输出可控的，即对于任何一个光滑函数 $y_0(t)$ ，都存在一个输入函数 $u_0(t)$ ，使得该输入作用下系统的输出等于 $y_0(t)$ 。

【注：自控1学到的可控性指状态可控性】

输出可控性指数

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

线性定常系统 (A, B, C) 输出可控当且仅当输出可控性矩阵：

$$Q = [CB, CAB, \dots, CA^{n-1}B] = CQ_c$$

行满秩。记 $u \rightarrow y_i$ 的输出可控性矩阵（行向量）为：

$$Q_i = [c_i^T B \mid c_i^T AB \mid \dots \mid c_i^T A^{n-1}B]$$

输出可控性指数 μ_i 是左起使 Q_i 满秩的最小分块数。

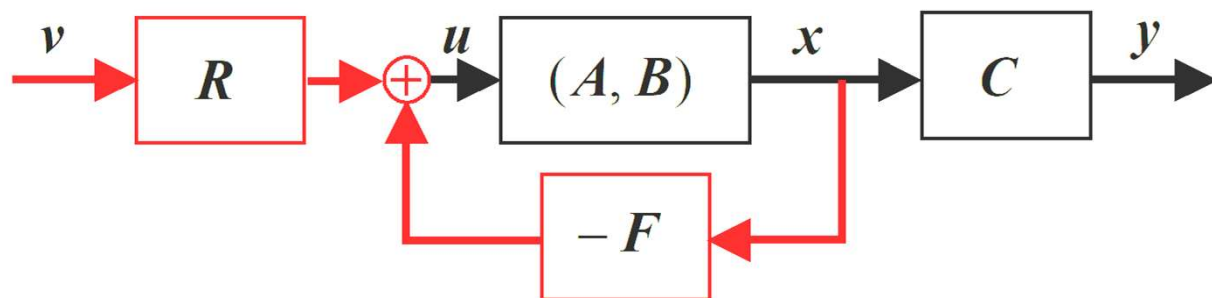
显然 $\alpha_i = \mu_i$ 。当 $g_i^T(s) = 0$ 时， $\alpha_i = \infty$ ，此时可解耦矩阵 D_0 第 i 行为零，系统无法通过反馈 $\{F, R\}$ 解耦。

思考：试构造一个不可 $\{F, R\}$ 解耦的系统。

闭环极点配置

解耦系统的稳定性

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



通过 $u = Rv - Fx$ 得到的闭环系统，虽然是解耦的，但所有极点都配置在原点，不是渐近稳定的：

$$y_i(s) = \frac{1}{s^{\alpha_i}} v_i(s), \quad i = 1, \dots, m$$

因此，需要通过改变反馈策略将极点配置到左半开平面。

期望闭环系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

希望通过极点配置改造闭环系统的传递函数：

$$G_i(s) = \frac{1}{s^{\alpha_i}} \rightarrow G_i(s) = \frac{1}{\psi_i^*(s)}$$

其中 $\psi_i^*(s)$ 是一个同阶 Hurwitz 多项式：

$$\psi_i^*(s) = s^{\alpha_i} + \beta_{i1}s^{\alpha_i-1} + \dots + \beta_{i\alpha_i}$$

即期望第 i 个子系统满足微分方程：

$$y_i^{(\alpha_i)}(t) + \beta_{i1}y_i^{(\alpha_i-1)}(t) + \dots + \beta_{i\alpha_i}y_i(t) = v_i(t)$$

解耦控制律

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

$$\text{将已知关系 } \mathbf{y}_i^{(k)} = \begin{cases} \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^k \mathbf{x}, & k < \alpha_i \\ \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{\alpha_i} \mathbf{x} + \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{\alpha_i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}, & k = \alpha_i \end{cases}$$

代入

$$\mathbf{y}_i^{(\alpha_i)}(t) + \beta_{i1} \mathbf{y}_i^{(\alpha_i-1)}(t) + \cdots + \beta_{i\alpha_i} \mathbf{y}_i(t) = \mathbf{v}_i(t)$$

得

$$\mathbf{c}_i^\top \boldsymbol{\psi}_i^*(\mathbf{A}) \mathbf{x}(t) + \mathbf{c}_i^\top \mathbf{A}^{\alpha_i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(t) = \mathbf{v}_i(t)$$

$$\text{其中 } \boldsymbol{\psi}_i^*(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^{\alpha_i} + \beta_{i1} \mathbf{A}^{\alpha_i-1} + \cdots + \beta_{i\alpha_i} \mathbf{I}$$

解耦控制律

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

定理 系统 (A, B, C) 可通过反馈 $u = Rv - Fx$ 解耦，并使闭环传递函数为对角阵 【注：不能配置零点.】

$$G(s) = \text{diag} \left[\frac{1}{\psi_1(s)}, \dots, \frac{1}{\psi_m(s)} \right]$$

的充要条件是可解耦矩阵 D_0 非奇异，所需的矩阵解为：

$$R = D_0^{-1}, \quad F = D_0^{-1}L$$

$$\text{其中 } L = \begin{bmatrix} c_1^\top \psi_1^*(A) \\ \vdots \\ c_m^\top \psi_m^*(A) \end{bmatrix}, \quad D_0 = \begin{bmatrix} c_1^\top AB \\ \vdots \\ c_m^\top AB \end{bmatrix}.$$

示例：飞机控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

某飞机垂面运动线性化模型：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

其中状态分量

$x_1(t)$ 为高度，

$x_2(t)$ 为前向速度，

$x_3(t)$ 为俯仰角，

$x_4(t)$ 为俯仰角速度，

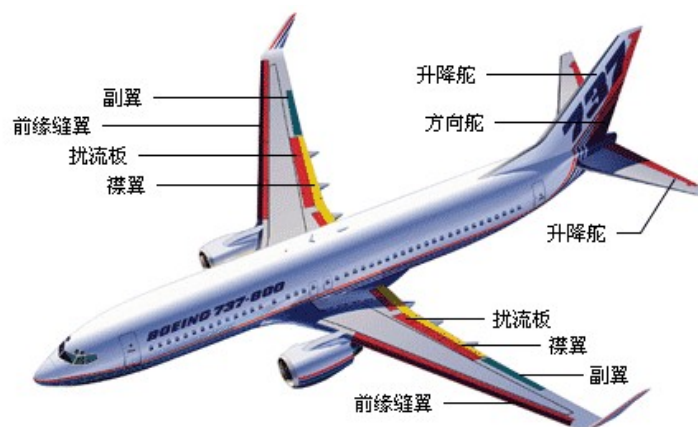
$x_5(t)$ 为垂直速度；

控制分量

$u_1(t)$ 为扰流板角度，

$u_2(t)$ 为前向加速度，

$u_3(t)$ 为升降舵角度。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1715 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

示例：飞机控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

选择期望的闭环传递函数 ($\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 2$) :

$$\psi_1^*(s) = s^2 + 18s + 80, \quad \psi_2^*(s) = s + 1, \quad \psi_3^*(s) = s^2 + 30s + 200$$

$$L = \begin{bmatrix} c_1^\top (A^2 + 18A + 80I) \\ c_2^\top (A + I) \\ c_3^\top (A^2 + 30A + 200I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 0.291 & 20.376 & 0.079 & -17.314 \\ 0 & 0.946 & -0.172 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0.049 & 200 & 29.144 & -1.013 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} c_1^\top AB \\ c_2^\top B \\ c_3^\top AB \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2.719 & 0 & 1.195 \\ 0.326 & 1 & 0.144 \\ 7.217 & 0 & 2.572 \end{bmatrix},$$

$$F = RL = \begin{bmatrix} 217.529 & 0.849 & 294.490 & 35.054 & -48.290 \\ 26.103 & 1.048 & 35.167 & 4.207 & -5.720 \\ 577.333 & 2.224 & 661.473 & 75.532 & -127.556 \end{bmatrix}$$

示例：飞机控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

为保持静态时单位传输关系，调整矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 2.719 & \mathbf{0} & 1.195 \\ 0.326 & \mathbf{1} & 0.144 \\ 7.217 & \mathbf{0} & 2.572 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{80} & & \\ & \mathbf{1} & \\ & & \mathbf{200} \end{bmatrix}$$

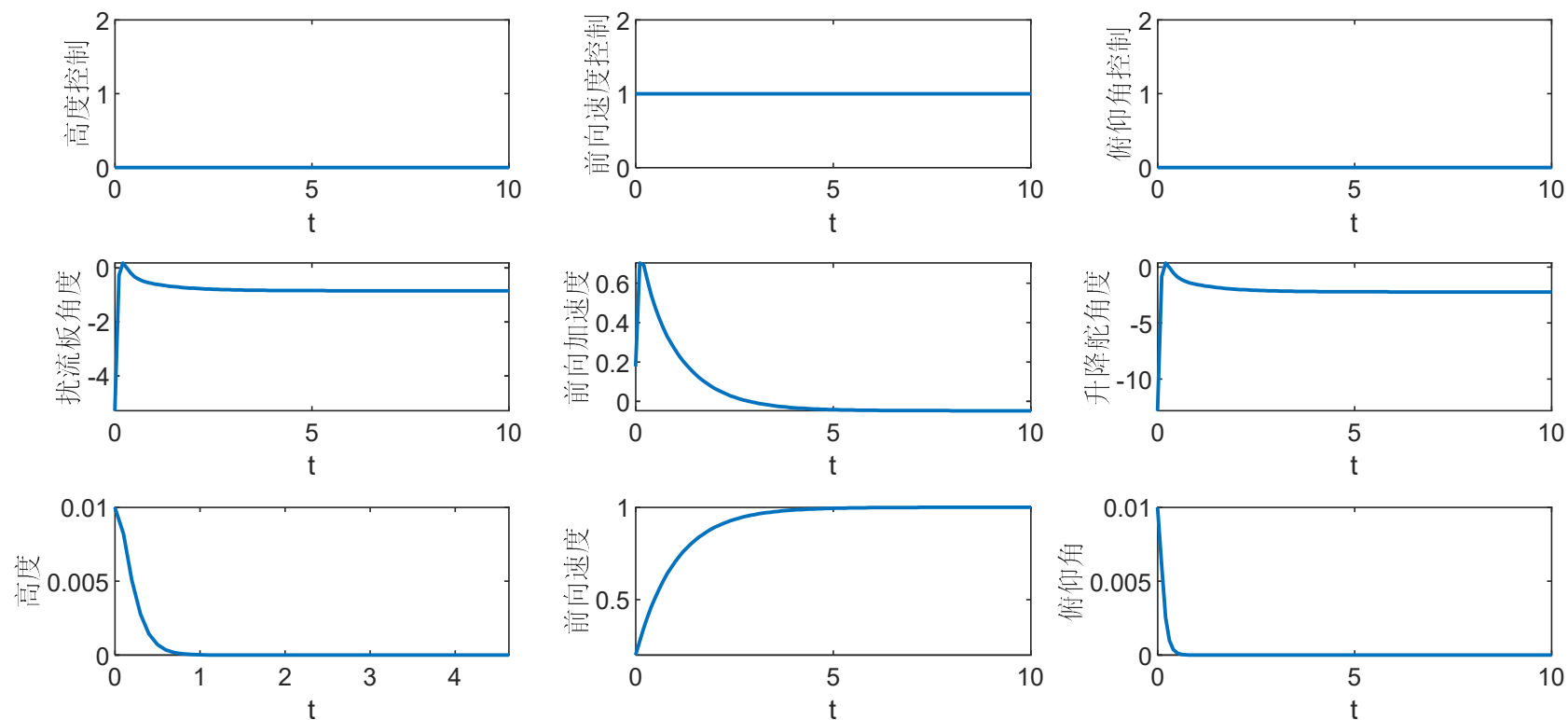
变换后的系统传递函数为：

$$G_L(s) = C(sI - A + BF)^{-1}BR$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+18s+80} & & \\ & \frac{1}{s+1} & \\ & & \frac{1}{s^2+30s+200} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{80}}{s^2+18s+80} & & \\ & \frac{1}{s+1} & \\ & & \frac{\mathbf{200}}{s^2+30s+200} \end{bmatrix}$$

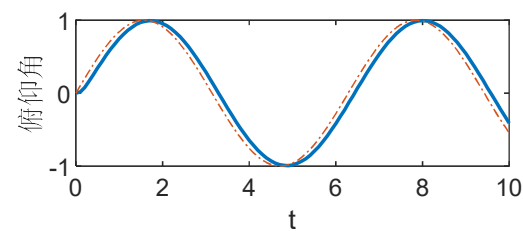
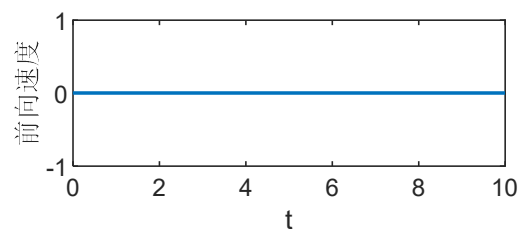
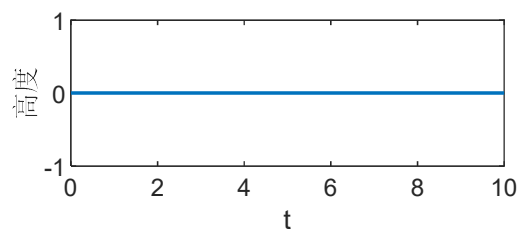
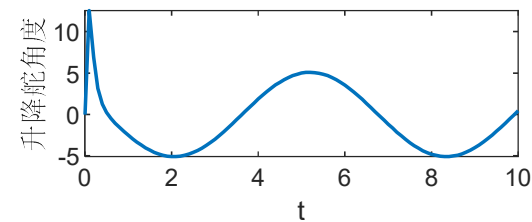
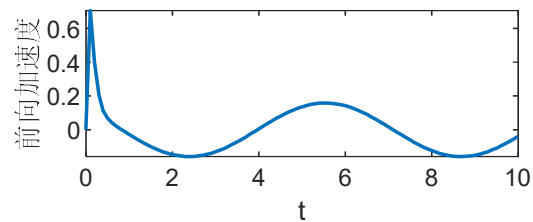
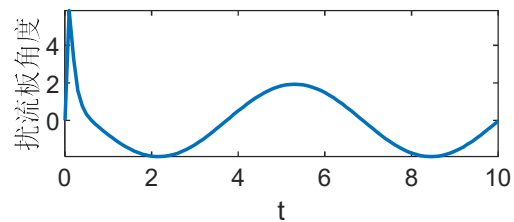
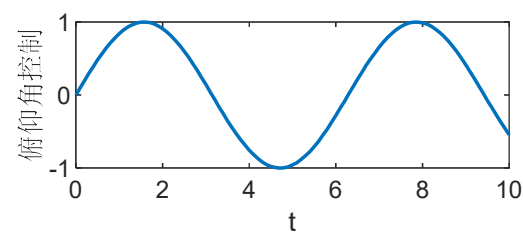
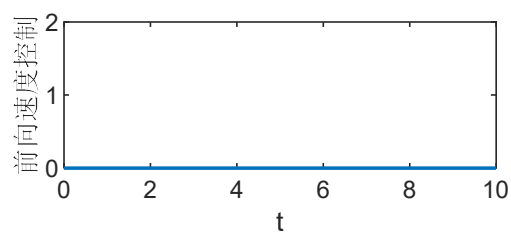
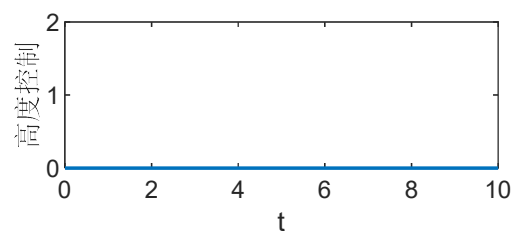
仿真效果

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



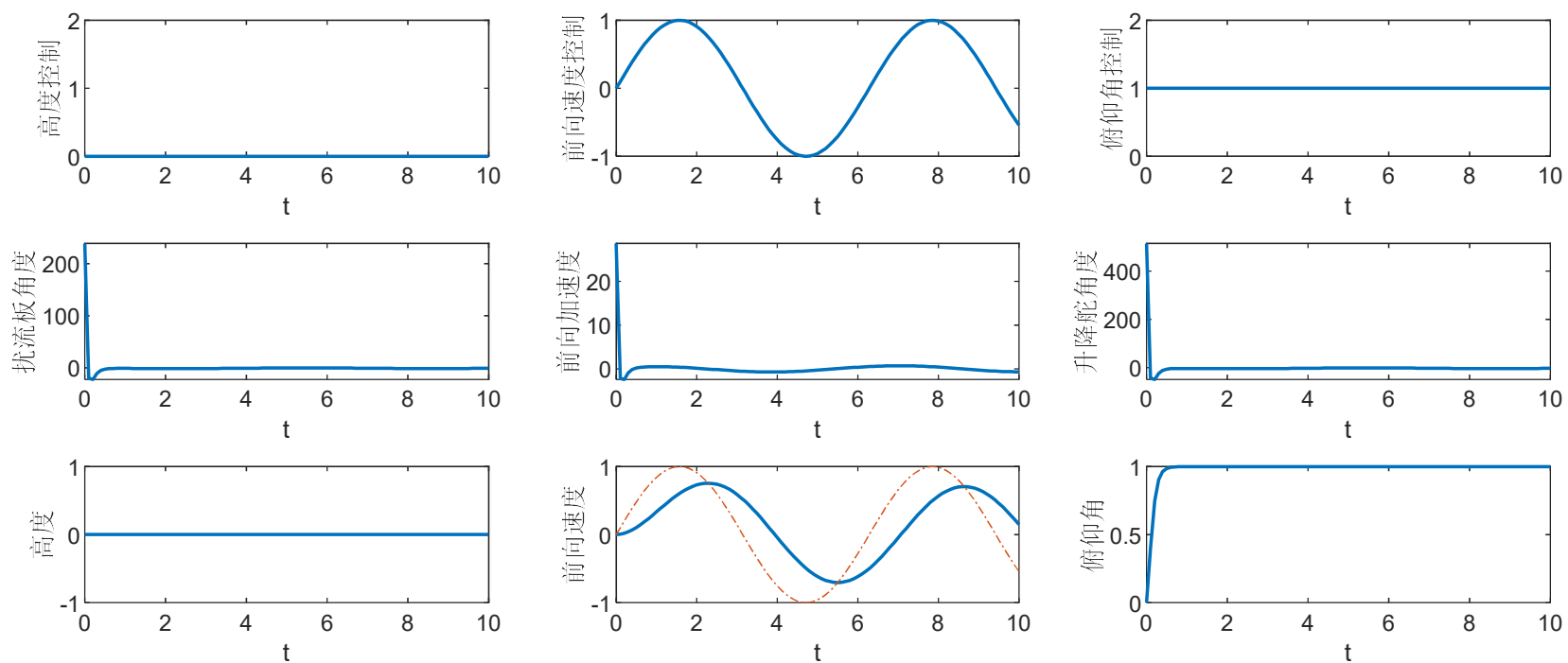
仿真效果

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



仿真效果

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

为下列系统 (A, B, C) 设计 $\{F, R\}$ 解耦并配置极点：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解：根据之前计算 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ，故 $\alpha_1 + \alpha_2 < 3$ 。

$$Q_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 3 & 7 \end{bmatrix}, Q_o = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

解：根据之前计算 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. 设目标特征多项式为：

$$\psi_1^*(s) = s + \beta_1, \quad \psi_2^*(s) = s + \beta_2$$

因此得到

$$D_0 = \begin{bmatrix} c_1^\top B \\ c_2^\top B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} c_1^\top \psi_1^*(A) \\ c_2^\top \psi_2^*(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_1 & 1 \\ -1 & -2 & \beta_2 - 3 \end{bmatrix}$$

$$R = D_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = D_0^{-1}L = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_1 & 1 \\ -1 & -2 & \beta_2 - 3 \end{bmatrix}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

校核闭环系统：

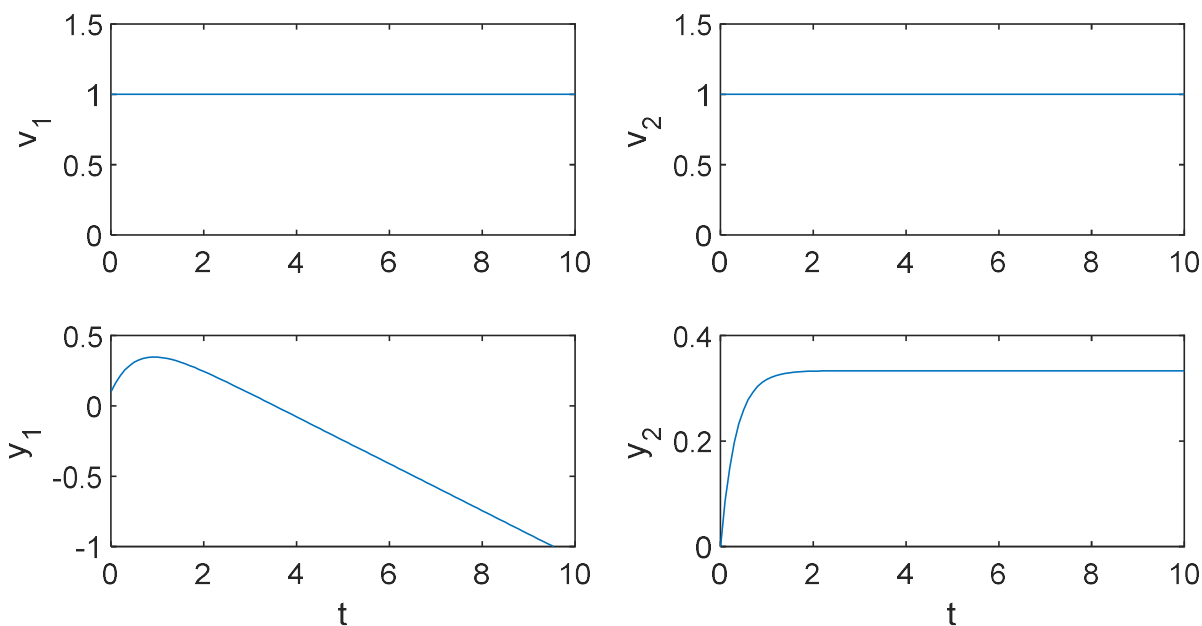
$$A - BF = \begin{bmatrix} -\beta_1 & -\beta_1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta_2 \end{bmatrix}$$

$$BR = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G_L(s) = C(sI - A + BF)^{-1}BR = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+\beta_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\beta_2} \end{bmatrix}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



取 $\beta_1 = -2$, $\beta_2 = -3$, 闭环系统应该动态解耦且渐进稳定, 但为什么第一个输出没有跟踪第一个输入?

解耦零点

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

若闭环解耦系统积分环节个数小于状态个数，即

$$\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i < n$$

则意味着传递函数矩阵存在一个 α 维状态空间实现，即 $(A - BF, BR, C)$ 不是一个最小实现。

反馈改变了系统的能观性，从而产生零极相消，并且相消的极点可能是不稳定的。

问题*：能否通过反馈实现解耦控制，并配置这些极点？

静态解耦控制

静态解耦系统

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

前述解耦问题又称动态解耦，希望在整个动态演化过程中，每个输入只影响相应的输出。

很多应用场景中不需要暂态过程互不影响，但当参考输入是阶跃型信号，系统达到稳态后每个输入只影响相应的输出，满足这个条件的系统称为静态解耦系统。

问题：能否设计反馈控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{v} - \mathbf{F}\mathbf{x}$ 使闭环系统 $(\mathbf{A} - \mathbf{BF}, \mathbf{BR}, \mathbf{C})$ 静态解耦？

静态解耦条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

动态解耦要求传递函数矩阵渐近稳定，且 $\mathbf{G}(s)$ 为非奇异对角矩阵。

静态解耦不要求 $\mathbf{G}(s)$ 是对角矩阵，但要求其静态增益矩阵 $\mathbf{G}(0)$ 为非奇异对角阵。

定理 系统 $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ 可 $\{\mathbf{F}, \mathbf{R}\}$ 静态解耦的充要条件是 (\mathbf{A}, \mathbf{B}) 可镇定且

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \neq 0.$$

设计分工： \mathbf{F} 使系统镇定， \mathbf{R} 使系统静态解耦。

静态解耦条件

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

证明：在反馈控制律 $\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{v} - \mathbf{F}\mathbf{x}$ 下，闭环系统

$$\mathbf{G}_L(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_L)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}$$

其中 $\mathbf{A}_L = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{F}$. 易见静态解耦条件为：

- (1) 闭环系统可镇定，即存在 \mathbf{F} 使 \mathbf{A}_L 为 Hurwitz 矩阵；
- (2) $\mathbf{G}_L(0) = -\mathbf{C}\mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{B}\mathbf{R}$ 为非奇异对角阵.

由于 \mathbf{R} 是非奇异的，故矩阵 $\mathbf{G}_L(0)$ 的非奇异性由下式可见：

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}\mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\mathbf{A}_L^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{F} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_L^{-1} & \mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

若希望静态时 $\mathbf{G}_L(0) = \mathbf{G}_D$, 则可以设置 $\mathbf{R} = -(\mathbf{C}\mathbf{A}_L^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{G}_D$.

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

设计反馈控制 $\{F, R\}$ 使受控系统 (A, B, C) 静态解耦。

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解： $CB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1.$

$D_0 = CB$ 奇异 \Rightarrow 系统不可动态输出解耦。

$$\text{rank}[B \ AB \ A^2B] = 3$$

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \text{系统可静态输出解耦.}$$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

(1) 选择反馈阵 F

A 的特征值为： $-1, -2, +1$ ，通过反馈 $u_2 = -4x_3$ 将不稳定极点配置到 -3 ，得到：

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_L = A - BF = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

(2) 计算输入变换阵 R

$$A_L^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad CA_L^{-1}B = -\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

选择期望的 $G_L(0) = I$ ，则 $R = -(CA_L^{-1}B)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

示例

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

(3) 校验闭环传递函数

$$\mathbf{G}_L(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_L)^{-1}\mathbf{B}R$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 2(s^2 + 3s + 3) & -s(s+3) \\ -2s(s+2) & (s+2)(s+3) \end{bmatrix}$$

可知闭环系统渐稳，且 $\mathbf{G}_L(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是对角的。

- 可实现静态解耦的系统未必能实现动态解耦
- 可实现动态解耦的系统一定能实现静态解耦

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

某飞机垂面运动线性化模型：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

其中状态分量

$x_1(t)$ 为高度，

$x_2(t)$ 为前向速度，

$x_3(t)$ 为俯仰角，

$x_4(t)$ 为俯仰角速度，

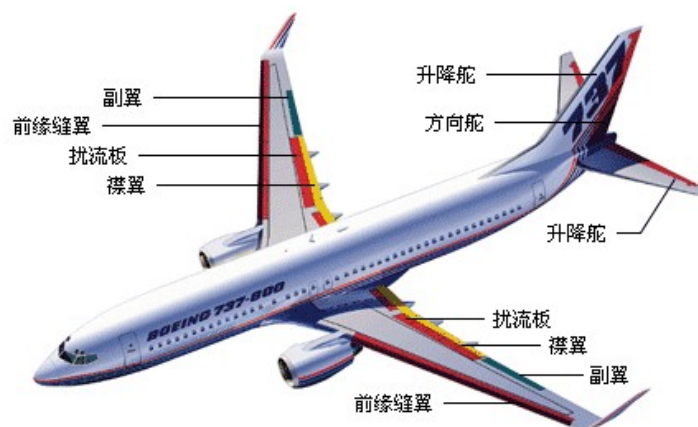
$x_5(t)$ 为垂直速度；

控制分量

$u_1(t)$ 为扰流板角度，

$u_2(t)$ 为前向加速度，

$u_3(t)$ 为升降舵角度。



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.132 & 0 & -1 \\ 0 & -0.0538 & -0.1715 & 0 & 0.075 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.0485 & 0 & -0.8556 & -1.013 \\ 0 & -0.2909 & 0 & 1.0532 & -0.6859 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4.419 & 0 & -1.665 \\ 1.575 & 0 & -0.732 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

(1) 可静态解耦性分析

- $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 0.6123 \neq 0$
- $\text{Rank } Q_{c1} = \text{Rank} [b_1 \ Ab_1 \ A^2b_1 \ A^3b_1 \ A^4b_1] = 5$

可知 (A, b_1) 是可控对，因此该系统是可静态解耦的。

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

(2) 设计镇定反馈律 F

因为 (A, b_1) 是可控对，故可只利用 u_1 反馈，通过反馈

$$F = \begin{bmatrix} -1598.7 & -10676.9 & -4744.1 & -1466.6 & 3309.9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

将闭环极点配置在 $\{-1, -2, -3, -4, -5\}$.

MATLAB 命令: $p = [-1, -2, -3, -4, -5]; F = \text{place}(A, B(:,1), p)$

飞机垂面运动控制

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

(3) 计算输入变换矩阵 R

根据已经确定的反馈矩阵 F

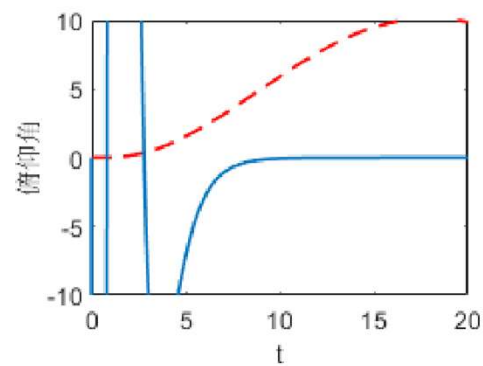
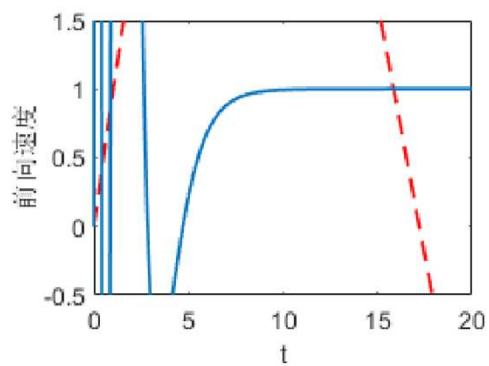
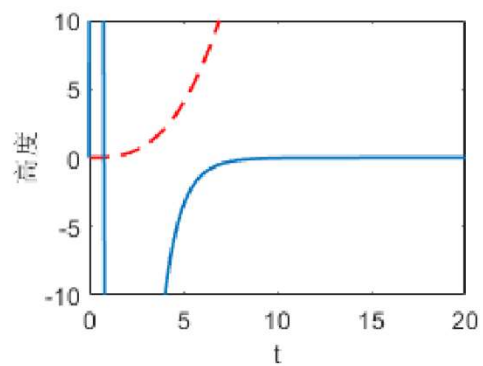
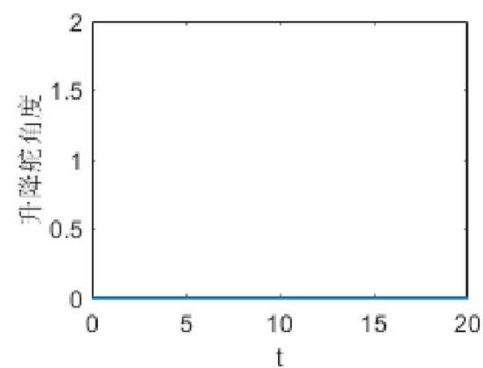
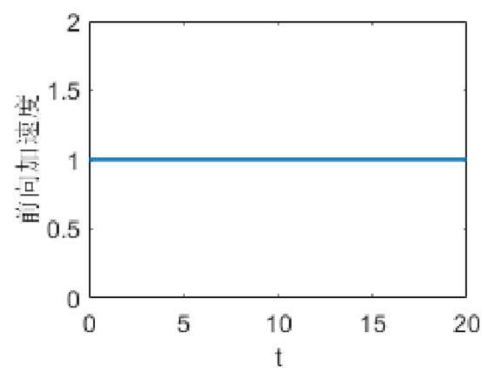
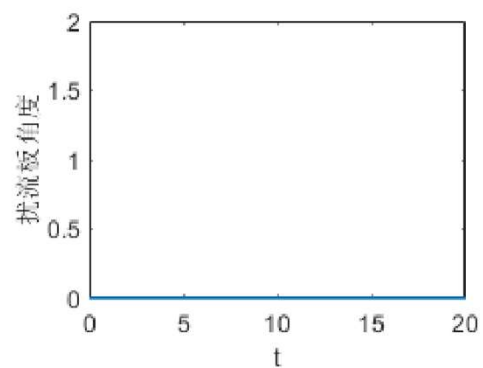
$$A_L = A - BF = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 1.1 & 0.0 & -1.0 \\ -191.8 & -1281.3 & -569.5 & -176.0 & 397.3 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 7064.6 & 47181.5 & 20964.2 & 6480.1 & -14627.7 \\ 2517.9 & 16815.9 & 7472.0 & 2311.0 & -5213.8 \end{bmatrix}$$

选择静态传递函数矩阵 $G_D = I$:

$$R = -[C(A_L)^{-1}B]^{-1}G_D = \begin{bmatrix} -1598.7 & -10677.8 & -998.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.2 & -2.7 \end{bmatrix}$$

仿真检验

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —



本章总结

— automatic control — automatic control — automatic control — automatic control —

1. 基本概念
2. 串联补偿器方法
3. $\{F, R\}$ 解耦及其可解耦条件 **$[\alpha, D_0]$**
4. 解耦阶常数的性质
5. 闭环极点配置
6. 静态解耦控制