第三章　最优控制

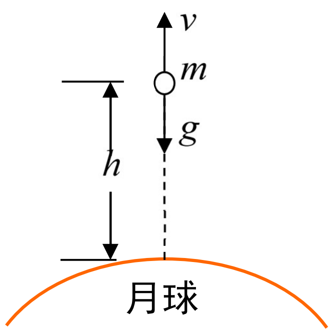
最优控制最初是应航空航天领域的制导、导航和控制技术的需要而发展起来的，是现代控制理论中最富有成果的部分。它从最优化理论出发，针对具有动态运动特征的系统解决控制系统的设计和规划问题，使得期望的性能指标达到最小（大）。最优控制可以用于各种性能指标，而不局限于经典控制的稳、准、快等有限指标，并且可以处理各种控制和状态受约束的系统，因此在解决复杂控制系统的设计问题中更为有效。

§1 基本概念

如图 1-1 示例，探月飞船在月球表面实现软着陆，要求控制发动机的推力f，使燃料消耗最少。

设飞船总质量为m，自身质量及所带燃料分别为M和F，它的高度和垂直速度分别为h和v，月球的重力加速度为g，自$t=0$时刻进入着陆过程。其(简化)运动方程为：

$$\begin{cases} \dot{h} = v, & h(0) = h_0 \\ \dot{v} = \dfrac{f}{m} - g, & v(0) = v_0 \\ \dot{m} = -kf, & m(0) = M + F \end{cases}$$



其中k是一常数。要求控制飞船从初始状态出发，于某一时刻t_f实现软着陆，即

$$h(t_f) = 0,\ v(t_f) = 0$$

推力$f(t)$受发动机最大推力的限制，即

图 1-1

$$0 \le f(t) \le f_{\max}$$

满足上述限制使飞船实现软着陆的推力程序$f(t)$不止一种，但对节省燃料而言，使性能指标$J = m(t_f)$为最大者才是最优的。

[定义 1-1] 最优控制是指：给定受控系统的状态方程，求一容许控制，使系统由给

定的初态转移到希望的末态（目标集），并使给定的性能指标为最小。

最优控制的求解方法有：古典变分法、极大值原理和动态规划。

§2 优化理论回顾

最优控制建立在优化理论的基础之上。优化问题我们早在微积分中就遇到过，本质上是函数极值问题。对于光滑可微的一元函数$f(x)$，其在某点x_0取得最小（或最大）的必要条件是其在x_0的导数$f'(x_0)=0$。

推广到多元函数$f(x_1,\cdots,x_n)$，其在某点$(x_1^0,\cdots,x_n^0)$最小（或最大）的必要条件是其梯度函数在该点为零：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_{(x_1^0,\cdots,x_n^0)}=0. \tag{2-1}$$

若希望最小化函数$f(x)$，但x必须满足约束条件$g(x)=0$，则可以引入拉格朗日乘子λ 将问题转化为无约束优化问题

$$\min_{(x,\lambda)} f(x)+\lambda^{\mathrm{T}}g(x), \tag{2-2}$$

而最优解应满足如下 KKT（Karush-Kuhn-Tucker）条件：

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\lambda=0,\quad g(x)=0. \tag{2-3}$$

§3 离散时间系统的最优控制

我们首先从较简单的离散系统来看怎么利用 KKT 条件求解最优控制问题。

3.1 离散系统最优控制的一般问题

受控系统的运动方程和性能指标如下：

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k),\ \boldsymbol{u}(k),\ k],\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{3-1a}$$

$$J=\varphi[\boldsymbol{x}(N),\ N]+\sum_{k=0}^{N-1} L[\boldsymbol{x}(k),\ \boldsymbol{u}(k),\ k] \tag{3-1b}$$

这里，初始状态$\boldsymbol{x}(0)$是给定的，末端状态$\boldsymbol{x}(N)$是自由的。求解最优控制序列$\boldsymbol{u}^*(k)$，$k=0,\ \cdots,\ N-1$，使得上述性能指标最小。

将状态方程看作约束，引入拉格朗日乘子$\{\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{1}),\cdots,\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{N})\}$：

$$\boldsymbol{J}[\vec{\boldsymbol{u}},\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{\lambda}}]=\boldsymbol{\varphi}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{N}),\ \boldsymbol{N}]+\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{N}-\mathbf{1}}\boldsymbol{L}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k}]$$
$$+\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{N}-\mathbf{1}}\boldsymbol{\lambda}^{\top}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\{\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k}]-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\}$$

其中 $\vec{\boldsymbol{u}}=[\boldsymbol{u}(\mathbf{0}),\cdots,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{N}-\mathbf{1})]$，，$\vec{\boldsymbol{x}}=[\boldsymbol{x}(\mathbf{1}),\cdots,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{N})]$，，$\vec{\boldsymbol{\lambda}}=[\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{1}),\cdots,\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{N})]$．应用 KKT 条件不难得到如下定理：

[定理 3.1]　末时刻固定末状态自由的离散系统最优控制问题（3.1），其最优解应满足的必要条件如下：

H 函数：$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{L}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k}]+\boldsymbol{\lambda}^{\top}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{k}]$

控制方程：$\frac{\partial \boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})}{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k})}=\mathbf{0}$

正则方程：$\begin{cases}\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}[\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{u}(k),k] & \text{状态方程}\\ \lambda(k)=\frac{\partial H(k)}{\partial x(k)} & \text{协态方程}\end{cases}$

边界条件：$\begin{cases}\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 & \text{初始条件}\\ \lambda(N)=\frac{\partial\varphi}{\partial x(N)} & \text{末端条件}\end{cases}$

[例 3-1] 对下述系统和给定的性能指标，求最优控制序列。

$x(k+1)=-x(k)+u(k),\ x(0)=3$

$$J=\frac{1}{2}x^2(2)+\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{2}u^2(k)$$

解：设最优控制序列为$u^*(0)$，$u^*(1)$，必要条件为：

H 函数：$H(k)=\frac{1}{2}u^2(k)+\lambda(k+1)[u(k)-x(k)]$，$k=0,\ 1$

控制方程：$\frac{\partial H(k)}{\partial u(k)}=u(k)+\lambda(k+1)=0$，由此可得 $u(k)=-\lambda(k+1)$.

正则方程：$x(k+1)=-x(k)-\lambda(k+1)$，$\lambda(k)=\frac{\partial H(k)}{\partial x(k)}=-\lambda(k+1)$

边界条件：$x(0)=3$， $\lambda(2)=\frac{\partial\varphi}{\partial x(2)}=x(2)$

首先由正则方程和边界条件解得：

$$\lambda^*(1)=-\lambda^*(2)=-x^*(2),$$

将其代入状态方程，我们有

$$x^*(1)=-x^*(0)-\lambda(1)=-3+x^*(2)$$

$$x^*(2)=-x^*(1)-\lambda^*(2)=3-2x^*(2)$$

从中可以顺序解得：

$$x^*(1)=-2,\quad x^*(2)=1;\ \lambda^*(1)=-1,\ \lambda^*(2)=1;$$

由 $u(k)=-\lambda(k+1)$得到： $u^*(0)=1$， $u^*(1)=-1.$

3.2 线性离散系统有限拍状态调节器的最优控制解

受控系统和最小化性能指标如下：

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}),\quad \boldsymbol{x}(\mathbf{0})=\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}} \tag{3-2a}$$

$$\boldsymbol{J}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{N})+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\boldsymbol{N}-\mathbf{1}}[\boldsymbol{x}^{\top}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k})+\boldsymbol{u}^{\top}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k})] \tag{3-2b}$$

其中F和Q非负定，R正定。

[定理 3.2] 有限拍状态调节器问题（3-2）最优解可由如下反馈控制实现：

$$\mathbf{u}^*(\boldsymbol{k})=-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}) \tag{3-3}$$

其中$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k})=\mathbf{R}^{-\mathbf{1}}\mathbf{B}^{\boldsymbol{T}}(\mathbf{A}^{\top})^{-\mathbf{1}}[\mathbf{P}(\boldsymbol{k})-\mathbf{Q}]$， 矩阵$P(k)$是 Riccati 矩阵递推方程

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{k})=\mathbf{Q}+\mathbf{A}^{\top}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})[\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})]^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{N})=\boldsymbol{F} \tag{3-4}$$

的解；且最小值

$$J^*=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T(0)\mathbf{P}(0)\mathbf{x}(0) \tag{3-5}$$

[例 3-2] 对下述系统和给定的性能指标，求最优控制序列。

$$K(0)=\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T(\mathrm{A}^{\top})^{-1}[\mathrm{P}(0)-\mathrm{Q}]=-\frac{1}{3}$$

$x(k+1) = -x(k) + u(k)$, $x(0) = 3$

$$J = \frac{1}{2}x^2(2) + \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{2}u^2(k)$$

解：该例同[例 3-1]。$\mathbf{A} = -1$，　$\mathbf{B} = 1$，　$\mathbf{F} = 1$，　$\mathbf{Q} = 0$，　$\mathbf{R} = 1$

（1）$P(2) = F = 1$，反向递推得

$$\mathbf{P(1) = Q + A^{\top}\boldsymbol{P}(2)[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{BR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P}(2)]^{-1}\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}}$$

$$\mathbf{P(0) = Q + A^{\top}\boldsymbol{P}(1)[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{BR}^{-1}\boldsymbol{B}^{\top}\boldsymbol{P}(1)]^{-1}\boldsymbol{A} = \frac{1}{3}}$$

反馈控制律为：

$$K(0) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}(\mathrm{A}^{\top})^{-1}[\mathrm{P}(0) - \mathrm{Q}] = -\frac{1}{3}$$

$$K(1) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}(\mathrm{A}^{\top})^{-1}[\mathrm{P}(1) - \mathrm{Q}] = -\frac{1}{2}$$

正向递推得：$u^*(0) = 1$，$x^*(1) = -2$，$u^*(1) = -1$，$x^*(2) = 1$

（3）$J^* = (1/2)x^*(0)P(0)x^*(0) = 3/2$

校核：$J = \frac{1}{2}[x^*(2)]^2 + \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{2}[u^*(k)]^2 = \frac{3}{2}$

3.3 线性定常离散系统有限拍状态调节器的最优开环控制解

上述有限拍最优调节器问题还可以利用最小二乘法直接求取开环最优控制解，这是后面预测控制的基础。

首先由状态方程的解

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{x}(0) + \sum_{\boldsymbol{j}=0}^{\boldsymbol{k}-1} \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}+1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{j}) \qquad (3-6)$$

可将前$\boldsymbol{k}$步的解写作如下矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(1) \\ \boldsymbol{x}(2) \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(0) + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}-1}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{k}-1}\boldsymbol{B} & \cdots & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}(0) \\ \boldsymbol{u}(1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{k}-1) \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}7)$$

我们将其简写作 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{k})$，并将指标简写为：

$$\boldsymbol{J}=\frac{1}{2}\{\boldsymbol{X}^{\top}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{Q}_F(\boldsymbol{N})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{N})+\boldsymbol{U}^{\top}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{U}(\boldsymbol{N})+\boldsymbol{x}_0^{\top}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_0\}$$

其中 $\boldsymbol{Q}_F(\boldsymbol{N})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{F}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}$. 将状态方程 (3-7) 代入优化指标可得到一个标准的最小二乘问题，并容易计算求得使 $\boldsymbol{J}$ 最小的开环控制解为

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{N})=-[\boldsymbol{R}(\boldsymbol{N})+\boldsymbol{H}^{\top}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{Q}_F(\boldsymbol{N})\boldsymbol{H}(\boldsymbol{N})]^{-1}\boldsymbol{H}^{\top}(\boldsymbol{N})\boldsymbol{Q}_F(\boldsymbol{k})\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k})\boldsymbol{x}_0 \qquad (3\text{-}8)$$

§4 泛函与变分

4.1 定义与公式

[定义 4-1] 如果对于函数集合$\{y(x)\ \}$中的每一个函数$y(x)$，均有J的一个实数值与之对应，则称变量J是函数$y(x)$的泛函。 通常记为：$J=J[y(x)]$。

如，$J=\int_0^1 y(x)\,d\,x$，则 $y(x)=x$，$J=0.5$；$y(x)=\cos x$，$J=\sin 1$。

又如，图 2-1 所示，设$y=y(x)$

是连接平面上 A、B 两点的一条曲线。

则曲线的弧长 S 是函数$y(x)$的泛函。

若$y(x)$连续可微，则 S 可表示为：

$$S[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}[1+\dot{y}^2(x)]^{\frac{1}{2}}\,d\,x$$

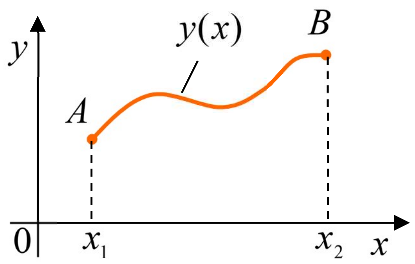


图 4-1

- 注意，泛函的自变量是函数。通常把泛函的自变量称为“宗量”，并通俗地将泛函比喻作“函数的函数”。

- 思考：$J=y(x)|_{x=1}$，$J=\int_0^1\sin x\,dx$ 是泛函吗?

- 思考：试比较泛函$J=J[y(x)]$和复合函数$f=f[y(x)]$的异同。

[定义 4-2] 线性泛函是满足以下条件的泛函：

$$\begin{cases} J[y_1(x)+y_2(x)] = J[y_1(x)] + J[y_2(x)] \\ J[ay(x)] = aJ[y(x)] \qquad (a\text{为任意常数}) \end{cases} \tag{4-1}$$

[定义 4-3] 函数（宗量）的变分$\delta y(x)$是$y(x)$与另一个函数之差：

$$\delta y(x) = y'(x) - y(x) \tag{4-2}$$

[定理 4-1] 函数$y(x)$的变分$\delta y(x)$仍然是 x的函数。根据定义有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\delta y(x) = \delta\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)\right], \quad \int_0^x \delta y(x)\mathrm{d}x = \delta\left[\int_0^x y(x)\mathrm{d}x\right] \tag{4-3}$$

[定义 4-4] 宗量的变分δy引起的泛函增量可以表示为：

$$\Delta J = J[y(x)+\delta y(x)] - J[y(x)] = L[y(x),\ \delta y(x)] + \beta[y(x),\ \delta y(x)] \tag{4-4}$$

若L是关于δy的线性泛函，而β是关于δy的高阶无穷小，则把L称为泛函的变分，记为：

$$\delta J = L[y(x),\ \delta y(x)] \tag{4-5}$$

表 4-1 泛函的变分与函数的微分概念对比

类型	增量Δ	微分d /变分δ
自变量x 函数$y(x)$	$\Delta x = x' - x$ $\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$	$dx \Leftrightarrow \Delta x$ $dy \Leftrightarrow \Delta y$的线性主部
宗量$y(x)$ 泛函$J[y(x)]$	$\Delta y = y'(x) - y(x)$ $\Delta J = J[y+\Delta y] - J[y]$	$\delta y \Leftrightarrow \Delta y$ $\delta J \Leftrightarrow \Delta J$的线性主部

[定理 4-2] 泛函$J = J[y(x)]$的变分可如下计算：（其中a是实变量）

$$\delta J = \frac{\partial}{\partial a}J[y(x)+a\delta y(x)]\Big|_{a=0} \tag{4-6}$$

证明：

$$\frac{\partial}{\partial a}J[y(x)+a\delta y(x)]\bigg|_{a=0}=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\{J[y(x)+\Delta a\delta y(x)]-J[y(x)]\}$$

$$=\lim_{\Delta a\to 0}\frac{L_y[\Delta a\delta y(x)]}{\Delta a}+\lim_{\Delta a\to 0}\frac{\beta_y[\Delta a\delta y(x)]}{\Delta a}=L[y(x),\ \delta y(x)]=\delta J.$$

[定理 4-3] 若 $J=\int_{x_1}^{x_2}F[y(x)]\,d\,x$，则：

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x)\mathrm{d}x \tag{4-7}$$

证明： 由公式（4-6）得：

$$\delta J=\frac{\partial}{\partial a}\int_{x_1}^{x_2}F\,[y(x)+a\delta y(x)]\mathrm{d}x\bigg|_{a=0}$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F(y+a\delta y)}{\partial(y+a\delta y)}\cdot\frac{\partial(y+a\delta y)}{\partial a}\right]\bigg|_{a=0}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x)\mathrm{d}x \qquad \text{证毕。}$$

[定理 4-4] 若 $J=\int_{x_1}^{x_2}F\,[y_1(x),\ \cdots,\ y_n(x),\ x]\mathrm{d}x$，则：

$$\delta J=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y_1}\delta y_1(x)+\cdots+\frac{\partial F}{\partial y_n}\delta y_n(x)\right]\mathrm{d}x \tag{4-8}$$

[例 4-1] 求泛函$J=\int_0^1 y^2(x)\mathrm{d}x$的变分

解：以下三种方法分别根据式（4-5）、（4-6）和（4-7）

（1） $\mathit{\Delta}J=\int_0^1[y(x)+\delta y(x)]^2\mathrm{d}x-\int_0^1[y(x)]^2\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^1 y(x)\delta y(x)\mathrm{d}x+\int_0^1[\delta y(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$\delta J=2\int_0^1 y(x)\delta y(x)\mathrm{d}x$$

（2） $\delta J=\frac{\partial}{\partial a}J[y(x)+a\delta y(x)]|_{a=0}=\int_0^1\frac{\partial}{\partial a}[y(x)+a\delta y(x)]^2|_{a=0}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1 2[y(x)+a\delta y(x)]\delta y(x)|_{a=0}\,d\,x=2\int_0^1 y(x)\delta y(x)\mathrm{d}x$$

（3） $\delta J=\int_0^1\frac{\partial F}{\partial y}\delta y(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 y(x)\delta y(x)\mathrm{d}x$

4.2 无条件泛函极值

[定义 4-5] 如果泛函$J[y(x)]$对于充分接近$y^*(x)$的任何曲线$y(x)$，都有$\varDelta J = J[y(x)] - J[y^*(x)] \geq 0$ (≤ 0)，则称泛函$J[y(x)]$在曲线$y^*(x)$上达到极小值（极大值)。

[定理 4-5] 具有变分的泛函$J[y(x)]$在$y^*(x)$上取极值的必要条件是:

$$\delta J[y^*(x)] = 0 \tag{4-9}$$

证明：泛函$J[y(x)]$在$y^*(x)$上取得极值，即$J[y^*(x) + a\delta y(x)]$在$a = 0$时取得极值，由函数在某点取极值的必要条件可得：$\left.\frac{\partial J[y^*(x)+a\delta y(x)]}{\partial a}\right|_{a=0} = \delta J[y^*(x)] = 0$。证毕。

[例 4-2] 不动边界的泛函极值问题。设泛函为:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F[x(t),\ \dot{x}(t),\ t]\mathrm{d}t \tag{4-10}$$

起始时刻t_0和终端时刻t_f是固定的，初值$x(t_0)$和终值$x(t_f)$也都是固定的，求使J为极小的$x^*(t)$应满足的条件(方程)。

解： $$\delta J = \int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta \dot{x}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial F}{\partial x}\delta x\mathrm{d}t + \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f}\delta x\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\delta x\right|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f}\left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)\right]\delta x\mathrm{d}t = 0$$

由于$x(t_0)$和$x(t_f)$是固定的，$\delta x(t_f) = \delta x(t_0) = 0$，上式第一项为零，因而第二项也必须为零。由于$\delta x$是任意的，得到:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 \tag{4-11}$$

这就是著名的欧拉 - 拉格朗日方程，简称欧拉方程。

[例 4-3] 设泛函为$J = \int_1^2(\dot{x} + \dot{x}^2t^2)dt$，$x(1) = 1$， $x(2) = 2$，求$x^*(t)$。

解：该题符合上面讨论的问题类型，可直接利用欧拉方程求解。

$F = \dot{x} + \dot{x}^2 t^2$ 的欧拉方程为：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 + 2\dot{x}t^2) = 0$，即：$t\ddot{x} + 2\dot{x} = 0$，

其解为：$x = \frac{c_1}{t} + c_2$，代入$x(1) = 1$，$x(2) = 2$得：$c_1 = -2$，$c_2 = 3$，

因此，使性能指标 J取极值的最优函数为$x^*(t) = -\frac{2}{t} + 3$。

§5 变分法求解最优控制

5.1 末时刻固定末状态自由问题

（1） 原问题描述

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{5-1a}$$

$$J[u(\cdot)] = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} L(x, u, t)\mathrm{d}t \tag{5-1b}$$

t_f固定，$x(t_f)$自由，寻找$u^*(t)$使$J[u^*(\cdot)]$最小。

（2）化为无条件极值问题

引入 Lagrange 待定乘子 $\lambda(t) = [\lambda_1(t), \cdots, \lambda_n(t)]^T$，设：

$$J_1[u(\cdot)] = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{L(x, u, t) + \lambda^T[f(x, u, t) - \dot{x}]\}\mathrm{d}t$$

定义 Hamilton 函数 $H(x, u, \lambda, t) = \lambda^T f(x, u, t) + L(x, u, t)$，则

$$J_1[u(\cdot)] = \varphi[x(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u, \lambda, t) - \lambda^T \dot{x}]\mathrm{d}t$$

$$\because \quad -\int_{t_0}^{t_f} \lambda^T \dot{x}\, d\, t = -\lambda^T x\big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T x\mathrm{d}t$$

$$\therefore \quad J_1[u(\cdot)] = \varphi[x(t_f), t_f] + \lambda^T(t_0)x(t_0) - \lambda^T(t_f)x(t_f)$$

$$+ \int_{t_0}^{t_f} [H(x, u, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T x]\mathrm{d}t$$

原问题转化为求J_1的无条件极小。

（3）令J_1的变分为零

注意，该问题中，当$u(t)$有变分（变化）$\delta u(t)$时，将引起状态变分$\delta x(t)$，

从而有末态变分$\delta x(t_f)$；而t_f、t_0和$x(t_0)$是固定的，无变分，待定乘子$\lambda(t)$也无变分。

$$\delta J_1=\left[\frac{\partial\ \varphi}{\partial x(t_f)}-\lambda(t_f)\right]^T\delta x(t_f)$$

$$+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}(t)\right]^T\delta x(t)+\left[\frac{\partial H}{\partial u}\right]^T\delta u(t)\right\}\mathrm{d}t=0$$

选择λ： $\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}$，$\lambda(t_f)=\frac{\partial\ \varphi}{\partial x(t_f)}$

可得控制方程：$\frac{\partial H}{\partial u}=0$

[定理 5-1] 末时刻固定末状态自由的最优控制问题（3-1），其最优解应满足的必要条件如下：

*H*函数： $H(x,\ u,\ \lambda,t)=\lambda^T f(x,\ u,\ t)+L(x,\ u,\ t)$

控制方程： $\frac{\partial H}{\partial u}=0$

正则方程： $\begin{cases}\dot{x}=f(x,u,t) & \textit{状态方程}\\ \dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x} & \textit{协态方程}\end{cases}$

边界条件： $\begin{cases}x(t_0)=x_0 & \textit{初始条件}\\ \lambda(t_f)=\frac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)} & \textit{末端条件}\end{cases}$

5.2 各种末端情况下的最优控制问题

以上讨论了t_f固定$x(t_f)$自由的最优控制问题。事实上，根据末端情况的不同，有 2 大类问题：t_f固定和t_f可变；每一类中，又可分为 3 种情形：$x(t_f)$自由、$x(t_f)$固定和$x(t_f)$受约束。

[定理 5-2] 各种末端情况下的最优控制问题，其最优解的必要条件具有相同的哈密顿函数、控制方程、正则方程和初始条件，仅末端条件不同（参见[定理 5-1]）。

表 5-1 各种情形下应满足的末端条件

	t_f固定、$x(t_f)$ 可变	t_f可变
$x(t_f)$自由	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\ \varphi}{\partial x(t_f)}$	$H(t_f)=-\dfrac{\partial\ \varphi}{\partial t_f}$
$x(t_f)$固定	$x(t_f)=x_f$	$H(t_f)=-\dfrac{\partial\ \varphi}{\partial t_f}$
$x(t_f)$受限	$\lambda(t_f)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x(t_f)}+\dfrac{\partial g^T}{\partial x(t_f)}\mu$ $g[x(t_f),\ t_f]=0$	$H(t_f)=-\dfrac{\partial\ \varphi}{\partial t_f}-\dfrac{\partial g^T}{\partial t_f}\mu$

- t_f可变时的末端条件和t_f固定时是相同的（见上表第 2 列），但要增加一个条件（见上表第 3 列），以确定t_f。
- $x(t_f)$受约束时，g为 k维约束向量函数，μ为 k维待定向量。

■ 思考：$\lambda(t)$和μ均是 Lagrange 待定乘子，为什么前者是 t 的函数，而后者不是？它们对应的约束方程各是什么？

5.3 哈密顿函数的性质

- 正则方程中，状态方程和协态方程对偶

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial\lambda},\quad \dot{\lambda}=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{5-2}$$

- 沿最优轨线 H的全导数 = 偏导数

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial H}{\partial x^T}\dot{x}+\frac{\partial H}{\partial u^T}\dot{u}+\frac{\partial H}{\partial \lambda^T}\dot{\lambda}+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t} \tag{5-3}$$

- 对于定常系统，H不显含 t，则沿最优轨线 H为常数；进一步，若t_f可变，φ和g中不显含t_f，则沿最优轨线 H为零。

5.4 变分法求解最优控制问题举例

[例 5-1] 已知受控系统 $\dot{x}=u$, $x(t_0)=x_0$, 求$u(t)$, 使下述性能指标最小: (其中，t_f是固定时刻)

$$J=\frac{1}{2}x^2(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}u^2\,d\,t$$

解：这是t_f固定，$x(t_f)$自由的最优控制问题。

H函数：$H=L+\lambda f=(1/2)u^2+\lambda u$

控制方程：$\partial H/\partial u=u+\lambda=0$，即 $u=-\lambda$

正则方程：$\dot{x}=u=-\lambda$，$\dot{\lambda}=-\partial H/\partial x=0$

边界条件：$x(t_0)=x_0$，$\lambda(t_f)=\partial\varphi/\partial x(t_f)=x(t_f)$

解方程得：$x(t)=-x(t_f)t+x(t_f)t_0+x_0$

$$u^*(t)=-\lambda(t)=-x(t_f)=-\frac{x_0}{1+(t_f-t_0)}$$

- 已知问题本身有解，而根据必要条件求得的解又是唯一的，所以该极值控制就是最优控制。

[例 5-2] 已知受控系统 $\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=u$，$x_1(0)=x_2(0)=0$，求$u(t)$，使得$t_f=1$时满足$x_1(1)+x_2(1)=1$，并使下述性能指标最小：

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1 u^2\,d\,t$$

解：这是t_f固定，$x(t_f)$受约束的最优控制问题。

H函数：$H=L+\lambda^T f=(1/2)u^2+\lambda_1x_2+\lambda_2u$

控制方程：$\partial H/\partial u=u+\lambda_2=0$，即 $u=-\lambda_2$

正则方程：$\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=-\lambda_2$，$\dot{\lambda}_1=0$，$\dot{\lambda}_2=-\lambda_1$

边界条件：$x_1(0)=0$，$x_2(0)=0$

$$g(x(1))=x_1(1)+x_2(1)-1=0$$

$$\lambda(1)=\partial\varphi/\partial x(1)+[\partial g/\partial x(1)]\mu=[\mu\quad\mu]^T$$

解方程得：$u^*(t) = -\frac{3}{7}t + \frac{6}{7}$

$$x_1^*(t) = -\frac{1}{14}t^3 + \frac{3}{7}t^2,\ x_2^*(t) = -\frac{3}{14}t^2 + \frac{6}{7}t$$

■ 思考：该例所得的正则方程中，$\dot{\lambda}$仅和λ有关，而和x无关，因而可以方便地求出λ。若$\dot{\lambda}$和x有关，如何求解？

[例 5-3] 已知受控系统 $\dot{x} = u$，$x(0) = 1$，求$u(t)$，使得$x(t_f) = 0$（t_f可变），并使下述性能指标最小：

$$J = t_f + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} u^2\, d\, t$$

解：这是一个t_f可变，$x(t_f)$固定的问题。

H函数：$H = L + \lambda f = (1/2)u^2 + \lambda u$

控制方程：$\partial H/\partial u = u + \lambda = 0$，即 $u = -\lambda$

正则方程：$\dot{x} = u = -\lambda$，$\dot{\lambda} = -\partial H/\partial x = 0$

边界条件：$x(0) = 1$，$x(t_f) = 0$，$H(t_f) = -\partial\phi/\partial t_f = -1$

解方程得：$\lambda(t) = \sqrt{2}$，$u^*(t) = -\sqrt{2}$，$x^*(t) = 1 - \sqrt{2}\,t$，$t_f^* = 1/\sqrt{2}$

■ 思考：该例中，将控制方程代入 H函数得：$H = -(1/2)\lambda^2$，再由$H(t_f) = -1$可得$\lambda(t) = \pm\sqrt{2}$，这里舍去了负值，为什么？

§6 线性系统二次型指标的最优控制

对于线性系统，若性能指标中的各项取二次型函数形式，则称为线性系统二次型指标的最优控制，简称线性二次型（LQ）问题。它的最优解可以用解析形式表达为简单的状态反馈控制律，是最优控制中最有成效的一部分。

6.1 线性系统有限时间状态调节器

受控系统和最小化性能指标如下：

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0 \tag{6-1a}$$

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^TQ(t)x + u^TR(t)u]\,d\,t \tag{6-1b}$$

F和$Q(t)$非负定，$R(t)$正定。

- F项反映了对末态趋于零的要求，Q项反映了对过渡过程性能的要求，R项则反映了对控制能量的限制。
- F，Q，R的选择决定了各项之间的权衡，这是个困难的问题，通常靠试探和经验，这里假定它们已确定。

这里的有限时间状态调节器问题实际上是t_f固定、$x(t_f)$自由、u不受限的最优控制问题，可以直接利用前面的结果。

H函数：$H = L + \lambda^T f = \frac{1}{2}x^TQx + \frac{1}{2}u^TRu + \lambda^TAx + \lambda^TBu$

控制方程：$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T\lambda = 0$，即 $u = -R^{-1}B^T\lambda$

正则方程：$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T\lambda$，$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx - A^T\lambda$

边界条件：$x(t_0) = x_0$，$\lambda(t_f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)} = Fx(t_f)$

正则方程是线性的，且$\lambda(t_f) = Fx(t_f)$也是线性的，不妨设：

$$\lambda(t) = P(t)x(t), \quad P(t_f) = F$$

$$\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x} = (\dot{P} + PA - PBR^{-1}B^TP)x$$

由正则方程知 $\dot{\lambda} = (-Q - A^TP)x$，与上式比较得：

$$\dot{P} + PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + Q = 0 \tag{6-2a}$$

$$P(t_f) = F \tag{6-2b}$$

[定理 6-1] 对线性系统有限时间状态调节器问题（6-1），最优反馈控制的充要条件是：

$$u^*(t) = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t) \tag{6-3}$$

其中，$P(t)$是 Riccati 矩阵微分方程（6-2）的解，且

$$J^* = (1/2)\,x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) \tag{6-4}$$

证明:（前面的推导过程已经证明了必要性，以下证明充分性）

（1）$\frac{d}{dt}(x^TPx) = (x^TA^T + u^TB^T)Px + x^T\dot{P}x + x^TP(Ax + Bu)$

$= x^T(A^TP + PA + \dot{P})x + u^TB^TPx + x^TPBu$ [参见（6-2a）]

$$= (u + R^{-1}B^TPx)^TR(u + R^{-1}B^TPx) - x^TQx - u^TRu$$

（2）对（1）两端积分得:

$$\int_{t_0}^{t_f}[(u + R^{-1}B^TPx)^TR(u + R^{-1}B^TPx)]\,dt - \int_{t_0}^{t_f}(x^TQx + u^TRu)\,dt$$

$$= x^T(t_f)Fx(t_f) - x^T(t_0)P(t_0)x(t_0)$$

（3）将（2）两端的第二项交换位置得:

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Fx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(x^TQx + u^TRu)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}x^T(t_0)P(t_0)x(t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[(u + R^{-1}B^TPx)^TR(u + R^{-1}B^TPx)]\,dt$$

上式第二项非负，当且仅当$u^* = -R^{-1}B^TPx$时为零， 证毕。

[例 6-1] 已知受控系统 $\dot{x} = -x + u$，$x(0) = x_0$，求最优反馈控制使下述性能指标最小:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(x^2 + u^2)\,dt$$

解：由题意知：$A = -1$，$B = 1$，$Q = 1$，$R = 1$，$F = 0$，根据[定理 6-1]得:

最优控制: $u^*(t) = -p(t)x(t)$

Riccati 方程: $\dot{p} - 2p - p^2 + 1 = 0$，$p(t_f) = 0$

$$p(t) = \frac{1 - e^{2\sqrt{2}(t-t_f)}}{\sqrt{2} + 1 + (\sqrt{2} - 1)\,e^{2\sqrt{2}(t-t_f)}}$$

$$\lim_{t_f\to\infty} p(t) = \sqrt{2} - 1 = const$$

注意，$p(t)$依赖于t_f，下图给出了不同t_f下的$p(t)$曲线:

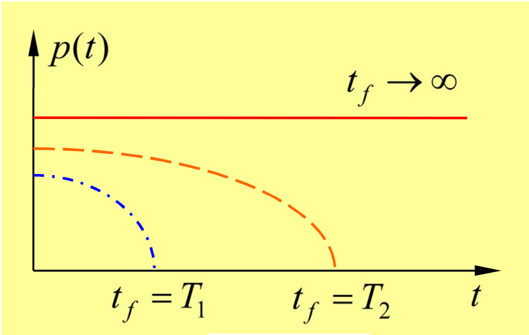


图 6-1

■ 思考：该例中，$p(t_f) = 0$，但当$t_f \to \infty$时，$p(t)$趋于常数（$\sqrt{2} - 1$），有矛盾吗？

Riccati 矩阵微分方程解的性质

- 在$[t_0,\ t_f]$上，若方程中所给矩阵的元均连续并有界，则$P(t)$存在唯一解（通常无解析解），且是对称的、非负定的。

- 即使方程中所给矩阵均是定常的，$P(t)$通常也是时变的，但如果$t_f \to \infty$，则$P(t)$趋于定常矩阵。

- 为强调$P(t)$依赖于末时刻t_f和末值F，记为$P(t, F, t_f)$，例如：$P(t, 0, t_f)$所表示的$P(t)$满足$P(t_f) = 0$。

6.2 线性定常系统无限时间状态调节器

受控系统和最小化性能指标如下：

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{6-5a}$$

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]\mathrm{d}t \tag{6-5b}$$

Q非负定，R正定。

- 和上节研究的问题相比主要有两点差别：首先是所有的系数矩阵和加权矩阵均改为常数矩阵，其次是末端时间由有限改为无限。

- 由于$t_f \to \infty$，不再有末时刻，因而没有末态指标项；对稳态（注意稳态和末态的区别）时状态趋于零的要求体现在Q项中。

6.2.1 最优解的存在条件

对于有限时间调节器问题，J总是有限值，必存在最优解。但在无限时间情况下，也许无论怎样选择 u，J总是无限大，因而不存在最优解。怎样才能保证有最优解呢?

[定理 6-2] 对线性定常系统无限时间状态调节器问题（6-5），若系统完全可控，则存在最优解。

证明：因系统完全可控，对任意非零初始状态$x(t_0)$，必存在有界控制$\tilde{u}(t)$，在有限时刻$t_1 > t_0$使系统回到状态空间原点（平衡点），在时刻t_1之后置$\tilde{u}(t)$为零。在如此定义的$\tilde{u}(t)$，$t \in [t_0, \infty)$作用下，性能指标 J一定是有界的，因而最优解存在。证毕。

- 完全可控性只是问题有解的充分条件。事实上，只要不可控模态是渐稳的（可镇定性），或者既不可控又不渐稳的模态在性能指标中不可观（不反映在指标中），问题就有解。

6.2.2 最优解的表达形式

在问题有解的前提下，可以将前节讨论的有限时间调节器的结果推广到这里。因此，我们要考察$t_f \to \infty$时，Riccati 矩阵微分方程的解$P(t, 0, \infty)$是否存在。(注：$F = 0$)

[定理 6-3] 当问题（6-5）有解时，Riccati 矩阵微分方程（6-2）的解$P(t, 0, \infty)$存在，且为常数。

证明：(1) 若问题（6-5）有解，则$J^*(t_f) = (1/2)\, x^T(t_0)P(t_0, 0, t_f)x(t_0)$在

$t_f \to \infty$时有界，由于t_0 和 $x(t_0)$的任意性，$P(t, 0, \infty)$存在。

(2) 对问题（6-5），矩阵微分方程（6-2）是定常的，具有性质：

$P(t, 0, t_f) = P(0, 0, t_f - t)$，令$t_f \to \infty$，则有：

$P(t, 0, \infty) = \mathrm{P}(0, 0, \infty)$，即$P(t) = P(0)$为定常矩阵。证毕。

由于$P(t)$定常，导数为零，Riccati 矩阵微分方程（6-4）变为：

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \qquad (6\text{-}6)$$

[定理 6-4] 对线性定常系统无限时间状态调节器问题（6-5），若问题有解，则最优反馈控制的充要条件是：

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t) \qquad (6\text{-}7)$$

其中，P是 Riccati 矩阵代数方程（6-6）的非负定解，且

$$J^* = (1/2)\, x^T(t_0)Px(t_0) \qquad (6\text{-}8)$$

- Riccati 矩阵微分方程的解是唯一的，$t_f \to \infty$时，解也是唯一的；但其对应的矩阵代数方程的解却不一定唯一（非负定解唯一）。

6.2.3 闭环系统的稳定性

按上述定理构成的闭环系统是否一定稳定呢？先看一个例子：

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{J} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int_{\mathbf{0}}^{\infty} \boldsymbol{u}^T(\boldsymbol{t})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\mathbf{dt}$$

由于$Q = 0$，根据 Riccati 代数方程得到$P = 0$，从而$u^* = 0$（也可由性能指标直接看出），闭环系统$\dot{x} = x$显然是不稳定的，这是由于开环系统的不稳定状态没有反映在性能指标中。

[定理 6-5] 设$Q = D^T D$，则(A, D)完全能观测是 Riccati 矩阵代数方程（6-6）的非负定解为正定矩阵的充要条件。

证明：（充分性）(A, D)完全能观测必导致非负定 P为正定矩阵。

反设 P不是正定的，因而存在非零的$x(t_0)$，使得

$$J^* = \frac{1}{2}x^T(t_0)Px(t_0) = 0$$

这就要求性能指标中的被积函数恒等于零，$\because\ R>0$，$\therefore\ u\equiv 0$，此时，系统的状态为：$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)$，从而

$$J^*=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}x^T(t)Qx(t)\,d\,t=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}x^T(t)D^TDx(t)\,d\,t=0$$

这就意味着：$Dx(t)=De^{A(t-t_0)}x(t_0)\equiv 0$，也就是说，存在非零状态$x(t_0)$是$(A,\ D)$不可观测的，这和$(A,\ D)$完全能观测是矛盾的。证毕。

命题的必要性可以用类似的方法得到证明（略）。

[定理 6-6] 设$Q=D^TD$，若$(A,\ D)$完全能观测，则由最优控制律构成的闭环系统 $\dot{x}=(A-BR^{-1}B^TP)x$ 是渐近稳定的。

证明：由给定条件和[定理 6-5]可以得到：$P>0$；

选：$V(x)=x^TPx>0$

则：$\dot{V}(x)=x^T(A^T-PBR^{-1}B^T)Px+x^TP(A-BR^{-1}B^TP)x$

$$=x^T(A^TP+PA-PBR^{-1}B^TP)x-x^TPBR^{-1}B^TPx$$

$$=-x^TQx-u^TRu\le 0$$

假设$\dot{V}(x)\equiv 0$，$\because\ R>0$，$\therefore\ u\equiv 0$，根据[定理 6-5]的证明过程可知，这将导致$(A,\ D)$不完全能观，这和给定条件相矛盾；因此，沿状态轨线$\dot{V}(x)$不恒为零，故闭环系统渐近稳定。证毕。

- 注意，$Q=D^TD$的分解并不是唯一的，可以证明$(A,\ D)$的完全能观测性并不取决于某个特定的分解，而是由 A 和 Q 本身决定的。

- $(A,\ D)$完全能观是保证闭环渐稳的充分条件。事实上，只要不可观模态是渐稳的（可检测性），闭环系统就是渐近稳定的。

[例 6-2] 已知受控系统 $\dot{x}_1=x_2$，$\dot{x}_2=u$，求最优反馈控制使下述性能指标最小：

$$J=\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty}(x^Tx+u^2)\,d\,t\quad(Q=I,\ R=1)$$

解：　$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$(A,\ B)$完全可控；

$Q=D^TD=I$，(A,D)完全可观；

Riccati 方程：$PA+A^TP-PBR^{-1}B^TP+Q=0$

设 $P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$，并代入$A$，$B$，$R$，$Q$，得到：

$p_{12}^2=1$，$p_{22}^2=2p_{12}+1$，$p_{11}=p_{12}p_{22}$

$\because$ P非负定，得到：$p_{12}=1$，$p_{11}=p_{22}=\sqrt{3}$

最优控制：$u^*(t)=-R^{-1}B^TPx(t)=-[1\ \ \sqrt{3}]x(t)$

闭环系统：$A_L=A-B[1\ \ \sqrt{3}]=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$，渐近稳定。

- 思考：若性能指标为：$J=\int_0^{\infty}(y^TWy+u^TRu)dt$，其中 $y=Cx$ 是系统的输出，这类问题称为最优输出调节器问题，请问它和最优状态调节器问题之间有什么关系？

§7 极大（小）值原理简介

古典变分法求解最优控制问题存在局限性：要求 H对 u可导，不能处理控制受限的情形。庞特里亚金（Pontryagin）的极大（小）值原理成功地解决了这些问题。

[定理 7-1]　（极小值原理）　如果$u^*(t)$是所给问题的最优控制，$x^*(t)$和$\lambda^*(t)$是对应于$u^*(t)$的最优轨线和最优协态变量，则

$$H(\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{u}^*(t),\lambda^*(t),t)=\min_{\boldsymbol{u}(t)\in U} H(\boldsymbol{x}^*(t),\boldsymbol{u}(t),\lambda^*(t),t) \qquad (7\text{-}1)$$

- 和古典变分法相比，极小值原理在解决同类最优控制问题时，只需将控制方程$\partial H/\partial u=0$改用上式，其余相同。
- 极小值原理给出的仍然是最优控制所应满足的必要条件，也不涉及最优解的存在问题。

[例 7-1]　已知受控系统$\dot{x}=-x+u$，$x(0)=1$，$t_f=1$，$x(t_f)$自由，$|u|\le 1$，求使

下述性能指标最小的最优控制及相应的最优状态轨线。

$$J=\int_0^1 (x-\frac{1}{2}u)\,d\,t$$

解：这是一个t_f固定，$x(t_f)$自由，控制受限的最优控制问题。

H函数：$H=L+\lambda f=x-\lambda x+u(\lambda-1/2)$

控制方程：$u=-sign(\lambda-1/2)$

正则方程：$\dot{x}=-x+u$，$\dot{\lambda}=-\partial H/\partial x=-1+\lambda$

边界条件：$x(0)=1$，$\lambda(1)=\partial\phi/\partial x\,(t_f)=0$

解方程得：$\lambda(t)=1-e^{t-1}$，$u^*(t)=-sign(1/2-e^{t-1})$，

即：$u^*(t)=\begin{cases}-1, & 0\le t\le t_s\\ +1, & t_s\le t\le 1\end{cases}$ $\quad t_s=1-ln\,2=ln\frac{e}{2}$

最优控制分为两段，是 Bang-Bang 控制，见图 7-1。

当 $0\le t\le t_s$时有：$\dot{x}=-x-1$，$x(0)=1$，

得 $x^*(t)=2e^{-t}-1$，$x^*(t_s)=4e^{-1}-1$;

当$t_s\le t\le 1$时有：$\dot{x}=-x+1$，$x(t_s)=4e^{-1}-1$,

得$x^*(t)=1-(2-4e^{-1})e^{-(t-t_s)}$.

最优轨线分为两段，方程不同，首尾相接，见图 7-2。

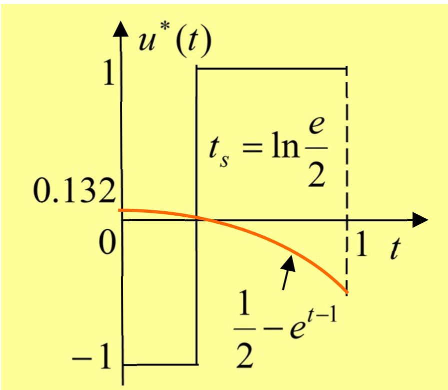


图 7-1

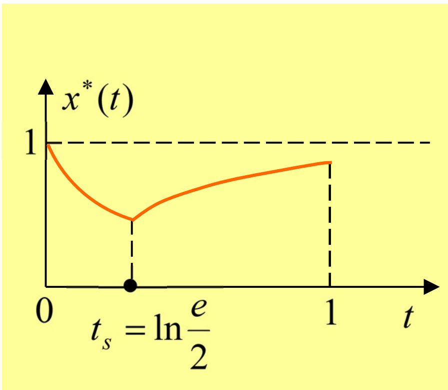


图 7-2

§8 二阶积分系统的时间最优控制※

使系统由初态转移到目标集的时间为最短的控制称为时间最优控制，或最速控制。这里，我们仅讨论一种简单而典型的情况。

已知控制受约束的二阶积分型受控系统及性能指标如下：

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = x_{10}, & x_1(t_f) = 0 \\ \dot{x}_2 = u, & x_2(0) = x_{20}, & x_2(t_f) = 0\end{cases} \tag{8-1a}$$

$$J = \int_0^{t_f} d\,t = t_f, \qquad |u(t)| \le 1 \tag{8-1b}$$

求最优控制$u^*(t)$，使系统在最短的时间t_f内（即 J 最小），自任意初态(x_{10}，x_{20})转移到状态空间的原点。(时间最优调节器问题)

显然，这是t_f可变，$x(t_f)$固定的最优控制问题。

H函数：$H(t) = L + \lambda^T f = 1 + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t)$

控制方程：$u = -sgn(\lambda_2)$ （根据极小值原理）

正则方程：$\dot{x}_1 = x_2$，$\dot{x}_2 = u$，$\dot{\lambda}_1 = 0$，$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1$

边界条件：$x_1(0) = x_{10}$，$x_2(0) = x_{20}$，$x_1(t_f) = 0$，$x_2(t_f) = 0$，

$H(t_f) = -\partial\varphi/\partial t_f = 0$，即：

$$1 + \lambda_1(t_f)x_2(t_f) + \lambda_2(t_f)u(t_f) = 0$$

由正则方程可得：$\lambda_1(t) = c_1$，$\lambda_2(t) = c_2 - c_1 t$。其中$c_1$和$c_2$为任意常数，且不能同时为零，否则不满足上述边界条件中的最后一个方程，所以，$\lambda_2(t)$是一条不恒为零的直线，在区间$[0,\ t_f]$上，$\lambda_2(t)$至多变号一次。相应的最优控制$u^*(t) = -sgn[\lambda_2^*(t)]$是最多切换一次的 Bang-Bang 控制。

考虑到最优控制只可能取+1或−1，现取$u(t) = u =$ *常数*，由状态方程和初始条件可以解得：

$$x_2(t) = x_{20} + ut，\ x_1(t) = x_{10} + x_{20}t + \frac{1}{2}ut^2$$

消去t后，得到：

$$x_1 = (x_{10} - \frac{1}{2u}x_{20}^2) + \frac{1}{2u}x_2^2 \tag{8-2}$$

这就是在控制u = 常数的作用下，始于(x_{10}, x_{20})的状态轨线（相轨线）方程，如图 8-2 所示，在相平面上，它是一族抛物线。图中向右开口的抛物线（蓝色）对应于$u = +1$的轨线，向左开口的抛物线（橙色）则对应于$u = -1$的轨线，箭头表示随时间增长状态演化的方向。

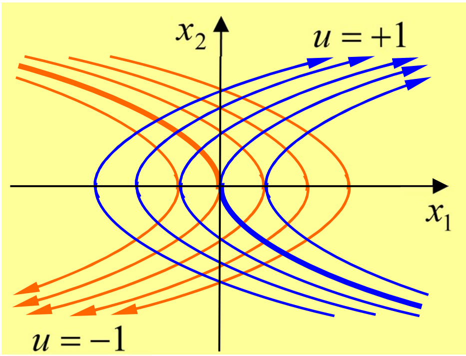


图 8-2

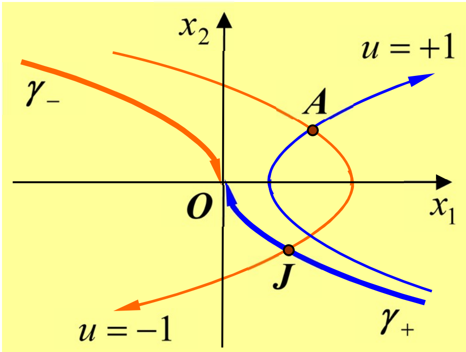


图 8-3

由图 8-3 可见，只有γ_+和γ_-两条轨线能到达原点，它们合成的曲线γ称为开关曲线：

$$\gamma = \gamma_+ \cup \gamma_- = \left\{(x_1, x_2) : x_1 = -\frac{1}{2}x_2|x_2|\right\} \tag{8-3}$$

若初态位于γ的上方，如图 8-3 上的 *A* 点，只有采用控制序列$\{-1, +1\}$且当相点到达开关线γ（γ_+）时进行转换才能使状态最快地转移到原点，相应的最优轨线为 *AJO*。同理，若初态位于γ的下方，最优控制序列应是$\{+1, -1\}$，转换同样应发生在开关线γ（γ_-）上。

[定理 8-1] 二阶积分型受控系统的时间最优控制u^*为：

$$u^* = \begin{cases} +1, & \gamma(x_1, x_2) < 0 \\ -1, & \gamma(x_1, x_2) > 0 \\ -sgn(x_2), & \gamma(x_1, x_2) = 0 \end{cases} \tag{8-4}$$

其中，$\gamma(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2}x_2|x_2|$，称为开关函数。

可见，二阶积分型受控系统的时间最优控制能以状态变量函数的形式表示出来，因而可按状态反馈实现闭环控制。下图所示的是它的一种工程实现框图。

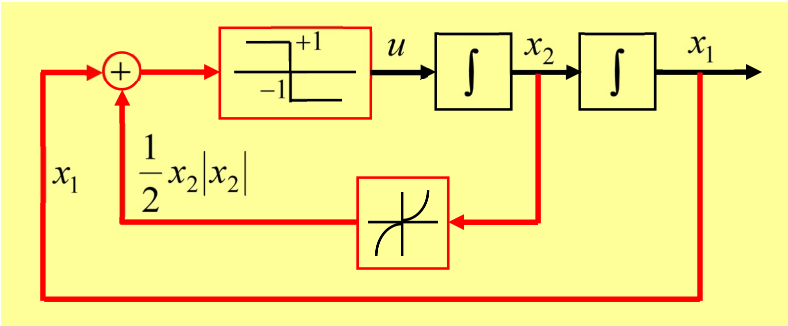


图 8-4

■ 思考：二阶积分型系统自任意初态转移到状态空间原点所需的最小时间是多少？