习题课 2

1.（遗传模型）对于三种基因：AA, Aa, aa ，假定亲本总体有比例 $u:2v:w(u>0, v>0, w>0, u+2v+w=1)$ 且数量很多。而参与交配的亲本是该总体总“随机的”两个，试找出在子一代中，这三种基因型式的比例。进一步考察其子二代的情况。

在遗传学中，某种“坏的”基因会引起夭折，设 a 为“坏的”基因，基因型 aa 将不能长大成人，基因型 Aa 的人为“带菌者”，假定在一般总体中（不分性别）带菌者的概率为 p, 考察下列问题:

（a）已知某人（成人）有一个哥哥或姐姐在童年死去（aa 型），求该人为带菌者的概率?

（b）若该人与一位不知是否具有那种“历史”（即有一个哥哥或姐姐在童年死去）的女子结婚，其子一代的基因型分布如何?

2. （Laplace 问题）假设有 $n+1$ 只编号分别为 $0,1,\cdots,n$ 的盒子，其中第 i 号盒子中装有 i 只白球和 $n-i$ 只黑球 $(0 \leq i \leq n)$ ，随机选一只盒子，再在此选定的盒子中一只一只地有放回取球，问在取到的前 m 只球均为白球的条件下，取到的第 $m+1$ 只球也是白球的概率为多大？并求此概率在 $n \rightarrow \infty$ 时的极限值。

3. 进行某种独立重复的试验,每次试验成功的概率为 $p(0<p<1)$,失败的概率为 $q(q=1-p)$,问在 m 次失败之前取得 n 次成功的概率是多少?

4. 从 $1,2,\cdots,N$ 中不放回地取出 n 个数，并按大小排列成 $X_1<X_2<\cdots<X_m<\cdots<X_n$,试求 $X_m=M$ 的概率，这里 $1 \leq M \leq N$。若改为有放回的取数，其结果又是怎样?

5. 设 $X_k(k=1,2,\cdots,n)$ 相互独立，均服从参数为 $p>0$ 的几何分布，求

(1）X_1+X_2 的分布;

(2）X_k 的矩母函数 $M_{X_k}(u)$ ，并利用矩母函数计算 $E\left[(X_1+X_2+X_3)^2\right]$。

6. 若时齐的独立增量过程 N_t 取非负整数值, 满足 $N_0=0$ 且当 $h \rightarrow 0$ 时,

有 $\left\{\begin{array}{c}P\left(N_{t+h}-N_t=1\right)=\lambda h+o(h) \\ P\left(N_{t+h}-N_t \geq 2\right)=o(h)\end{array}\right.$;

若记 $p_{i,j}(s, s+t)=P\left(N_{s+t}=j \mid N_s=i\right), s, t \geq 0 ; i, j=0,1,2, \cdots$, 试求:

$$\lim _{t \rightarrow 0^{+}} \frac{p_{i,j}(s, s+t)-p_{i,j}(s, s)}{t} \quad(s \geq 0, i, j \geq 0)$$