习题课 3 解答

1 解：令 $A_i=\{$ 第 i 个部件需要调整 $\}, i=1,2,3.$ 考虑随机变量

则 X_i 服从 $0-1$ 分布, 因此有

$$\mathbb{E}\left(X_i\right)=P\left(A_i\right), D\left(X_i\right)=P\left(A_i\right)\left[1-P\left(A_i\right)\right].$$

按题意，因而有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}\left(X_1\right)+\mathbb{E}\left(X_2\right)+\mathbb{E}\left(X_3\right)=P\left(A_1\right)+P\left(A_2\right)+P\left(A_3\right) \\
=0.10+0.20+0.30=0.60
\end{aligned}$$

由于 X_1, X_2, X_3 相互独立, 又有

$$\begin{aligned}
D(X) & =D\left(X_1\right)+D\left(X_2\right)+D\left(X_3\right) \\
& =0.10 \times 0.90+0.20 \times 0.80+0.30 \times 0.70 \\
& =0.46
\end{aligned}$$

2 解：设 $A_k=\{$ 第 k 位乘客在第 i 站下车 $\}$ ，则 $\mathrm{P}\left(A_k\right)=1/9, k=1,2,\cdots,25$ 。又因 $A_1, A_2, \cdots, A_{25}$ 相互独立，所以，第 i 站无人下车（因此不停车）的概率为

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{25} \overline{A_k}\right)=\prod_{k=1}^{25} P\left(\overline{A_k}\right)=\left(\frac{8}{9}\right)^{25}, i=1,2,\cdots,9.$$

则

$$P\left(X_i=0\right)=\left(\frac{8}{9}\right)^{25}, P\left(X_i=1\right)=1-\left(\frac{8}{9}\right)^{25}, i=1,2,\cdots,9.$$

停车次数

$$S=\sum_{i=1}^9 X_i$$

所以

$$\mathbb{E}(S)=\sum_{i=1}^9 \mathbb{E}\left(X_i\right)=\sum_{i=1}^9 P\left(X_i=1\right)=9\left[1-\left(\frac{8}{9}\right)^{25}\right].$$

3 解：先求 X 的概率分布。X 的可能取值为：$n, n+1, \cdots N$ 。事件 $\{X=k\}$ 表示某人看到的 n 个不同牌照号中最大的为 k，其余 $n-1$ 个牌照号都小于 k, 即有

$$p_k = P(X=k) = \frac{C_k^n - C_{k-1}^n}{C_N^n} = \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n}, k = n, n+1, \cdots N.$$

利用熟知的组合公式 $\sum_{k=n}^{M} C_{k-1}^{n-1} = C_M^n$ ，可知

$$\sum_{k=n}^{N} p_k = \sum_{k=n}^{N} \frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n} = 1$$

所以，$\{p_k, k = n, n+1, \cdots N\}$ 为 X 的概率分布，而其数学期望是

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=n}^{N} k p_k = \sum_{k=n}^{N} \frac{k C_{k-1}^{n-1}}{C_N^n} = \sum_{k=n}^{N} \frac{\frac{k!}{(n-1)!(k-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} \\
&= \frac{n(N+1)}{n+1} \sum_{k=n}^{N} \frac{\frac{k!}{n(n-1)!(k-n)!}}{\frac{(N+1)N!}{(n+1)n!(N-n)!}} \\
&= \frac{n(N+1)}{n+1} \sum_{k=n}^{N} \frac{C_k^n}{C_{N+1}^{n+1}} \\
&= \frac{n(N+1)}{n+1}
\end{aligned}$$

即

$$N = \frac{n+1}{n}\mathbb{E}(X) - 1$$

4 证明：有对称性

$\frac{X_1}{X_1+\ldots+X_n}, \frac{X_2}{X_1+\ldots+X_n}, \cdots \frac{X_n}{X_1+\ldots+X_n}$ 同分布，故

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1}{X_1+\ldots+X_n}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{X_2}{X_1+\ldots+X_n}\right) = \cdots = \mathbb{E}\left(\frac{X_n}{X_1+\ldots+X_n}\right)$$

而

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1+\ldots+X_n}{X_1+\ldots+X_n}\right) = 1$$

故 $\mathbb{E}\left(\frac{X_i}{X_1+\ldots+X_n}\right) = \frac{1}{n}$

因此由数学期望的线性性知：$\mathbb{E}\left(\frac{X_1+\ldots+X_k}{X_1+\ldots+X_n}\right) = \frac{k}{n}$ 。

5 证明利用数学期望的极值性质：

$D(X) = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 \le \mathbb{E}\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2 \le \mathbb{E}\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{4}.$

方差表示 $r.v$ 的离散程度，只有当离散程度达到最大时才能达到它的上限。

取值于 [a, b] 的 r. v. 何时离散程度最大呢？当然是把概率质量均衡地放在两个端点上，因此

当

$P(X=a)=P(X=b)=1/2,$

时, 其方差最大, 计算可知等于 $\frac{(b-a)^2}{4}$.

注：极值不等式推导:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X-c)^2 &= \mathbb{E}X^2-2c\mathbb{E}X+c^2 \\ &= \mathbb{E}X^2-\mathbb{E}X)^2+(EX)^2-2c\mathbb{E}X+c^2 \\ &= \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2+(\mathbb{E}X-c)^2\end{aligned}$$

6

a：袋中有 N 只球，但其中白球的个数为随机变量，只知道其数学期望为 n ，试求从袋中摸一球，该球为白球的概率。

解: 记 X 为袋中的白球数, 由题意, $\mathbb{E}X=\sum_{k=0}^{N} kP(X=k)=n$, 利用全概率公式得 $P($ 摸一球为白球 $)=\sum_{k=0}^{N} P($ 摸一球为白球 $\mid X=k)P(X=k)$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{N}P(X=k)=\frac{\mathbb{E}X}{N}=\frac{n}{N}$$

b：教材习题 1.24 和 2.18 的统一解法。

解：设 X_i 表示进行 i 次后袋中的白球数，$i=1,2,\cdots$ ，n . 记

$$\xi_i=\begin{cases}1, \text{第}i\text{ 次摸到一只白球}, \\ 0, \text{第}i\text{ 次摸到一只黑球},\end{cases} \qquad \mathrm{i}=1,2,\ldots,n$$

则 $X_i=X_{i-1}+1-\xi_i$, 故 $\mathbb{E}X_i=\mathbb{E}X_{i-1}+1-\mathbb{E}\xi_i$

而由例 1 知

$\mathbb{E}\xi_i=P($ 第 i 次摸到一只白球 $)=\frac{\mathbb{E}X_{i-1}}{a+b}$

于是, $\mathbb{E}X_i=EX_{i-1}+1-\frac{\mathbb{E}X_{i-1}}{a+b}$, 即

$\mathbb{E}X_i=1+\frac{a+b-1}{a+b}\mathbb{E}X_{i-1}, i=1,2,\ldots,n$

$\mathbb{E}X_0=a$

解得

$\mathbb{E}X_n=(a+b)-b\left(\frac{a+b-1}{a+b}\right)^n$

从而，所求概率为 $\frac{\mathbb{E}X_n}{(a+b)}=1-\frac{b}{a+b}\left(\frac{a+b-1}{a+b}\right)^n$

7 解: $\mathbb{E}\left(N_1+N_2 \mid N_1\right)=\mathbb{E}\left(N_1 \mid N_1\right)+\mathbb{E}\left(N_2 \mid N_1\right)$

$=N_1+\mathbb{E} N_2=N_1+\lambda_2$, 所以

$P\left(\mathbb{E}\left(N_1+N_2 \mid N_1\right)=k\right)=P\left(N_1=k-\lambda_2\right)=e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{k-\lambda_2}}{\left(k-\lambda_2\right)!}\left(k \in \mathbb{Z}, k \geq \lambda_2\right)$.