第 2 周讲稿

★ 概率的连续性问题的证明（上课不讲，思考）

结论：设 P 为定义在事件域 $\mathcal{F}$ 上的满足 $P(\Omega)=1$ 且具有有限可加性的非负实值集合函数，则下列条件等价：

（1） P 具有可数可加性（即 P 为概率测度）；

（2） P 具有上连续性（见教材）；

（3） P 具有下连续性（见教材）；

（4） P 在 ϕ 处连续，即若 $A_n\in\mathcal{F}$，$n=1,2,\cdots$，$A_n\supset A_{n+1}$ 且 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\phi$，则 $\lim_{n\to\infty}P(A_n)=0$；

（5） P 具有连续性，即若 $A_n\in\mathcal{F}$，$n=1,2,\cdots$ 且 $\lim_{n\to\infty}A_n$ 存在，则 $\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n)$.

证明：只证 $(3)\Leftrightarrow(5)$，其余的类似，留作大家思考。

$(3)\Rightarrow(5)$：（3）成立知（2）也成立，因此 $\lim_{n\to\infty}A_n$ 存在，所以 $\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，

记 $B_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k$，$C_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$，显然，$B_n\uparrow, C_n\downarrow$，故由（2）、（3）得

$$P(\lim_{n\to\infty}A_n)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\lim_{n\to\infty}P(B_n),\quad P(\lim_{n\to\infty}A_n)=P(\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n)=\lim_{n\to\infty}P(C_n)$$

由于 $B_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\subset A_n$，所以 $\varliminf_{n\to\infty}P(A_n)\geq\varliminf_{n\to\infty}P(B_n)=\lim_{n\to\infty}P(B_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n)$；

同样 $C_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\supset A_n$，故 $\varlimsup_{n\to\infty}P(A_n)\leq\varlimsup_{n\to\infty}P(C_n)=\lim_{n\to\infty}P(C_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n)$.

从而

$$P(\lim_{n\to\infty}A_n)\leq\varliminf_{n\to\infty}P(A_n)\leq\varlimsup_{n\to\infty}P(A_n)\leq P(\lim_{n\to\infty}A_n)，\ 即 \lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n)$$

$(5)\Rightarrow(3)$，由条件知 $\lim_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ 存在，故由（5）得

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n)=P(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)$$

★ 示性函数补充（以后要用到，上课不单独讲）：记 $I_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A,\end{cases}$

则有如下结论

（1） $A \subset B \Leftrightarrow I_A(x) \le I_B(x), \forall x \in \Omega$；

（2） $I_{\bigcup_i A_i}(x) = \max_i I_{A_i}(x), \forall x \in \Omega$； $I_{\bigcap_i A_i}(x) = \min_i I_{A_i}(x), \forall x \in \Omega$；

（3） $I_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} I_{A_n}(x)$， $I_{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} I_{A_n}(x)$.

证明：只证 $I_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} I_{A_n}(x)$，其余简单。

$$I_{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n}(x) = I_{\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}(x) = \min_{n\ge1} I_{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}(x) = \min_{n\ge1} \max_{k\ge n} I_{A_k}(x)(i.e. = \inf_{n\ge1} \sup_{k\ge n} I_{A_k}(x))$$

$$= \overline{\lim_{n\to\infty}} I_{A_n}(x)$$

§4 条件概率与 Bayes 公式，独立性的概念

1. 条件概率与事件独立性的定义

★ **样本空间缩减法：**$\Omega \to B$

★ **条件概率定义：**$P(A|B) = \dfrac{P(A\bigcap B)}{P(B)} \quad P(B) > 0$

注：**条件概率也是一种概率，故概率的运算规则同样适用于条件概率。**

例 1　从 1~100 这 100 个整数中，任取一数，已知取出的一数是不超过 50 的数，求它是 2 或 3 的倍数的概率.　【$\frac{33}{50}$】

例 2（教材中嘉宾猜奖游戏的样本空间解法）可以证明：

$$P(\text{嘉宾猜中}|\text{嘉宾永远改变自己的选择}) = \frac{2}{3}$$

上面的均可以用样本空间缩减法实现。

注意：为何要用定义法来解决条件概率。

2. 独立性的有关重要性质

（1）独立性的定义

（2）条件概率与独立性的联系

★ A，$B \in \mathscr{F}$相互独立，即 $P(AB) = P(A)P(B)$

$$\Leftrightarrow P(A|B) = P(A) \qquad P(B) > 0$$
$$\Leftrightarrow P(A|\overline{B}) = P(A) \qquad P(\overline{B}) > 0$$
$$\Leftrightarrow P(A|B) = P(A|\overline{B}) \quad 0 < P(B) < 1$$

注：两事件独立性的实质及与两事件互不相容的关系

结论 1： 若 4 对事件$\{A,B\},\{\overline{A},B\},\{A,\overline{B}\},\{\overline{A},\overline{B}\}$中有一对是相互独立的，则另外 3 对也都是相互独立的。

结论 2： 当$P(A),P(B)>0$时，如果 A 与 B 互不相容，则 A 与 B 一定不相互独立；如果 A 与 B 相互独立，则 A 与 B 一定不会互不相容.

（3）多个事件的独立性的定义及其实质

★ 称n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$是**相互独立**的，如果对任意自然数$k(2\le k\le n)$都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

其中$i_1,i_2,\cdots,i_k$是满足$1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$的任意$k$个自然数.

共有2^n-n-1个等式。

注：（1）两两独立与相互独立的联系与区别（抛正四面体的例子）

（2）“极端”事件（概率为 0 或 1）与任一事件独立（包括它本身）

（3）非极端事件，独立与不相关是相互矛盾的。

★ 独立性的实质（事件σ域相互独立）

定理 如果事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立，那么将该事件序列分成互不重叠的 m 组$(m\le n)$，则这 m 组事件各自所生成的σ-域也是相互独立的，后者的含义是指：在此m个$\sigma-$域任意各取一个事件，则此m个事件总是相互独立的。（大家不会证明）

★ $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i)=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)\cdots P(\overline{A}_n)$

注：小概率原则、实际推断原理。

补充：条件独立

★ 称A与B关于C条件独立，若有$P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)$。

思考（上课选讲）：独立与条件独立有啥关系吗？能举出反例吗？

* A与B独立，A与C独立，试问A与BC是否独立？否
* A与B独立，对任意的C，A与B是否关于C条件独立？否
* 若A与B关于C条件独立，是否有A与B关于C^c也条件独立？否

3 条件概率的三大公式（乘法公式、全概率公式与 Bayes 公式）及应用

★ **乘法公式：** 若$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}$ 满足$P(\bigcap_{j=1}^{n-1}A_j)>0$，则

$$P(\bigcap_{j=1}^{n} A_j) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_n|\bigcap_{j=1}^{n-1} A_j)$$

例 3 将字母 M、A、X、A、M 分开写在 5 张卡片上，每卡一字，混合后重新排列，问正好得到顺序 MAXAM 的概率是多少？ 【$\frac{1}{30}$】

解：依次取出后，排成一列，设 $A_1 =$ {第 1 次取到字母 M}，$A_2 =$ {第 2 次取到字母 A}，$A_3 =$ {第 3 次取到字母 X}，$A_4 =$ {第 4 次取到字母 A}，$A_5 =$ {第 5 次取到字母 M}，则

$$P(A_1A_2A_3A_4A_5) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)P(A_5|A_1A_2A_3A_4)$$
$$= \tfrac{2}{5}\cdot\tfrac{2}{4}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1 = \tfrac{1}{30}$$

例4 (可靠性)

已知某装置的**故障强度(死亡率或风险率)函数为** $\lambda(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{h(t+\Delta t;t)}{\Delta t}$，其中，$h(t+\Delta t;t)$ 是装置在 $(0,t]$ 上无故障的情况下，在 $(t,t+\Delta t]$ 上出现故障的条件概率。

试求装置的**可靠性函数** $g(t)$ (即在时间段 $(0,t]$ 上无故障的概率。其中设 $g(0)=1$，即假定设备在开始时刻都是无故障的)。**参见教材**

★ **全概率公式：** 设事件 $B_1, B_2\ldots$ 为样本空间 Ω 的一个正划分，则对任何一个事件 A，有

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A|B_i)$$

例 5 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品，从甲箱中任取 3 件放入乙箱后，求从乙箱中任取一件产品是次品的概率. 【$\frac{1}{4}$】

解： $P(A) = \sum_{k=0}^{3} P(A \mid X=k)P(X=k) = 0\times\frac{C_3^0C_3^3}{C_6^3} + \frac{1}{6}\times\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3} + \frac{2}{6}\times\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3} + \frac{3}{6}\times\frac{C_3^3C_3^0}{C_6^3} = \frac{1}{4}$

例 6 (赌徒输光问题) 设甲有赌本 $i(i\ge 1)$ 元，其对手乙有赌本 $a-i>0$ 元．每赌一次甲以概率 p 赢一元，而以概率 $q=1-p$ 输一元．假定不欠不借，赌博一直到甲乙中有一人输光才结束．因此，两个人中的赢者最终有总赌资 a 元． 求甲输光的概率．

解决思路首步分析法（类似的思想可以应用到抽签问题，Polya 模型等）

例 7 r 个人相互传球，从甲开始，每次传球时，传球者等可能地把球传给其余 $r-1$ 个人中的任意一个，求第 n 次传球时仍由甲传出的概率？

【 $p_n = \dfrac{1}{r}[1-(\dfrac{-1}{r-1})^{n-2}],\ n\ge 2$ 】

解决思路末步分析法

★ Bayes 公式(逆概率公式)：设 $B_1, B_2, \cdots$ 为样本空间 Ω 的一个正划分, $A \in \mathscr{F}$ 满足 $P(A) > 0$，则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} .$$

若将它与全概率公式结合起来，就是 Bayes 公式的以下的常用形式

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(B_j)P(A|B_j)} \qquad (m \le +\infty, \ i = 1,2,\cdots m).$$

例 8 （续例 5）已知从乙箱中取出的一件产品是次品的条件下，求从甲箱中取出的 3 件中有 2 件次品的概率?

例 9 （Jailer's Paradox）甲乙丙三名囚犯获知他们中将有两人获释，一人被判死刑，而监狱里只有狱卒知道确切的结果。于是，甲写了一封家信，找到狱卒希望狱卒告诉他乙或丙那个将获释，以便让获释的那个囚犯将家信带出去。狱卒拒绝透露任何信息给甲，解释说，如果他告诉了甲，乙或丙那个获释，那么甲被判死刑的概率就从原来的 $\frac{1}{3}$ 变为 $\frac{1}{2}$ 了，是这样的吗，解释之?

例 10（嘉宾猜奖游戏的 Bayes 公式解法）**见教材**

注：1. 问题判断：若随机试验可以分两阶段（或层次）进行，且第一阶段的各试验结果具体发生了哪一个未知，要求第二阶段的结果发生的概率，肯定用全概率公式；

若随机试验可以分两阶段（或层次）进行，且第一阶段的各试验结果具体发生了哪一个未知，但第二阶段的某一个结果是已知的，要求此结果是第一阶段某一个结果所引起的概率，则肯定用 Bayes 公式。

2. 先验概率与后验概率（Bayes 统计的主要思想）