习题课 3

1. 一台设备由三大部件组成，在设备运转中各部件需要调整的概率分别是 $0.1, 0.2$ 和 0.3 。假设各个部件的运转是相互独立的，以 X 表示同时需要调整的部件数，试求 X 的期望和方差。

2. 一辆公共汽车上共有 25 名乘客，每个乘客都等可能地在 9 个车站中的任一站下车，并且他们下车与否相互独立，又知公共汽车只有在有人下时才停车，求公共汽车停车次数的数学期望。

3. 某城市有汽车 N 部, 编号从 1 到 N , 某人站在街头, 将所看到的不同汽车牌号记下: $X_1, \ldots, X_n (n < N)$ ，令 $X = \max(X_1, \ldots, X_n)$ ，试证：

$$N = \frac{n+1}{n}\mathbb{E}(X) - 1$$

4. 若 $X_1, \ldots, X_n$ 为正的独立随机变量, 服从相同分布, 证明:

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_k}{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}\right) = \frac{k}{n}$$

5. 设随机变量 X 在 $[a, b]$ 中取值，证明：$D(X) \leq \frac{(a-b)^2}{4}$ ，并说明等式在何中情况下成立。

6. 袋中有 N 只球，但其中白球的个数为随机变量，只知道其数学期望为 n ，试求从袋中摸一球，该球为白球的概率。

进而，可由上面的结论统一解出教材习题 1.24 和 2.18 。

7. 若随机变量 X 满足

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k \in N = \{0, 1, 2, \cdots\}$$

其中 $\lambda > 0$ 是常数, 则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 记作 $X \sim \mathrm{po}(\lambda)$.
设随机变量 N_1, N_2 独立，$N_i \sim \mathrm{po}(\lambda_i) (i = 1, 2)$ ；求 $\mathbb{E}(N_1 + N_2 \mid N_1)$ 的分布律。