第 6 章　连续参数马尔可夫链

在第 3 章中，曾详细地讨论了离散参数马尔可夫链的有关问题，本章将着重研究连续参数可列状态空间的马尔可夫过程.

6.1　定义与若干基本概念

仍记状态空间为 $S=\{0,1,2,\cdots\}$.

定义 6.1.1　设随机过程 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 对于任意 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n<t_{n+1}$, $i_k\in S$, $0\leqslant k\leqslant n+1$, 若 $P\{X(t_0)=i_0,X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n\}>0$, 就有

$$\begin{aligned}P\{X(t_{n+1})=&i_{n+1}\big|X(t_0)=i_0,X(t_1)=i_1,\cdots,X(t_n)=i_n\}\\=&P\{X(t_{n+1})=i_{n+1}\big|X(t_n)=i_n\},\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

则称 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为**连续参数马尔可夫链**(简称**连续参数马氏链**). 若对于任意 $s,t\geqslant 0,i,j\in S$, 有

$$P\{X(s+t)=j\big|X(s)=i\}=P\{X(t)=j\big|X(0)=i\}\overset{\triangle}{=}P_{ij}(t),$$

称 X 为**齐次马尔可夫链**. 本章仅讨论齐次马尔可夫链. 称 $\boldsymbol{P}(t)=(P_{ij}(t))(i,j\in S)$ 为**转移概率矩阵**. 易知，它满足：

(P.1)　$P_{ij}(t)\geqslant 0,\qquad i,j\in S;$

(P.2) $\quad \sum_{j\in S} P_{ij}(t) = 1, \qquad i \in S;$

(P.3) $\quad P_{ij}(s+t) = \sum_{k\in S} P_{ik}(s)P_{kj}(t), \qquad s,t \geqslant 0,\ \ i,j \in S;$

((P.3) 式通常称为 Chapman-Kolmogorov 方程，或 C-K 方程)

(P.4) $\quad P_{ij}(0) = \delta_{ij},\ \delta_{ii} = 1,\ \delta_{ij} = 0\ (j \neq i).$

本章还附加所谓标准性条件

(P.5) $\quad \lim_{t\to 0} P_{ij}(t) = \delta_{ij}$ (即 $P_{ij}(t)$ 在原点连续).

将 (P.3),(P.4),(P.5) 式写成矩阵形式

$$\boldsymbol{P}(s+t)=\boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t), \boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{I}, \quad \lim_{t\to 0}\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{I} \quad (\boldsymbol{I}\text{为单位矩阵}).$$

如果 $\boldsymbol{P}(t)$ 满足 (P.1)~(P.4), 并且还满足附加连续性条件 (P.5), 则 $\boldsymbol{P}(t)$ 有许多很好的分析性质.

命题 6.1.1 若 $\boldsymbol{P}(t)=(P_{ij}(t))$ 为标准性转移概率矩阵，则：

(1) 对任意给定 $i\in S$, $P_{ij}(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，且此时一致性对 j 亦成立;

(2) $\forall t\geqslant 0, i\in S, P_{ii}(t)>0$.

证明 (1) 由 C-K 方程，对 $\forall t,h>0$ 有

$$P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)=\sum_{k\neq i}P_{ik}(h)P_{kj}(t)-P_{ij}(t)[1-P_{ii}(h)],$$

由此得

$$P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)\leqslant\sum_{k\neq i}P_{ik}(h)P_{kj}(t)\leqslant\sum_{k\neq i}P_{ik}(h)=1-P_{ii}(h),$$

以及

$$P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)\geqslant -P_{ij}(t)(1-P_{ii}(h))\geqslant -(1-P_{ii}(h)),$$

从而有 $|P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)|\leqslant 1-P_{ii}(h)$. 类似地，当 $h<0$ 时，有

$$|P_{ij}(t)-P_{ij}(t+h)|\leqslant 1-P_{ii}(h).$$

(2) 由 $P_{ii}(0)>0$ 及标准性条件 $\left(\lim\limits_{t\to 0}P_{ii}(t)=1\right)$ 可知，对任意固定 $t>0$, 当 n 充分大时，有 $P_{ii}(t/n)>0$, 再由 C-K 方程 $(P_{ii}(s+t)=\sum\limits_{k\in S}P_{ik}(s)P_{ki}(t)\geqslant P_{ii}(s)P_{ii}(t))$, 可得 $P_{ii}(t)\geqslant(P_{ii}(t/n))^n>0$. □

记 $\pi_i(t)=P(X(t)=i),\forall i\in S,t\geqslant 0$, 称 $\boldsymbol{\pi}(t)=(\pi_i(t),i\in S)$ 为马尔可夫链 $X=\{X(t),t\}$ 在 t 时刻的分布，称 $\boldsymbol{\pi}(0)=(\pi_i(0),i\in S)$ 为初始分布．与第 3 章类似的证明方法可以证明, 对于连续时间的马尔可夫链的任意 n 个时刻的联合分布律, 可由其 $\boldsymbol{\pi}(0)$ 与 $\boldsymbol{P}(t)$) 唯一确定，且 $\forall t\geqslant 0,\boldsymbol{\pi}(t)=\boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P}(t)$. 对于连续时间的马尔可夫链 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$, 任取 $h>0$, 定义 $X_n(h)=X(nh),\qquad n\geqslant 0$. 由马尔可夫性知, $\{X(nh),n\geqslant 0\}$ 是一个离散时间的马尔可夫链，称为以 h 为步长的 h- **离散骨架**, 简称 h 骨架，它的 n 转移概率矩阵为 $\boldsymbol{P}(nh)$. 显然, h- 离散骨架是研究连续时间马尔可夫链的一条有效途径 (详见 6.10 节). 对于连续参数马尔可夫链与离散参数马尔可夫链，由于它们都具有 “马尔可夫性”, 且状态空间均为可数集或有限集，因而许多概念和性质有相同或相似之处．例如状态相通，状态分类，不可约链，平稳分布与极限分布等，例如如下的定义．

定义 6.1.2 若存在 $t>0$, 使 $P_{ij}(t)>0$, 则称由状态 i 可达状态 j, 记为 $i\to j$. 若对一切 $t>0$, $P_{ij}(t)=0$, 则称由状态 i 不可达状态 j, 记为 $i\not\to j$. 若 $i\to j$ 且 $j\to i$, 则称状态 i 与 j 相通，记为 $i\leftrightarrow j$.

由此定义及命题 6.1.1 知 $\forall i\in S,P_{ii}(t)>0$, 即 $i\leftrightarrow i$, 可知相通关系具有自反性、对称性、传递性，故相通关系是等价关系，从而可以按相通关系给状态分类．相通的状态组成一个状态类．若整个状态空间是一个状态类，则称该马尔可夫链是不可约的．

对于连续时间的马尔可夫链，由命题 6.1.1 知，对所有 $h>0$ 及正整数 n 及所有的 $i\in S,P_{ii}(nh)>0$, 这意味着对每一个离散的骨架 $X(h)$, 每一个状态 i 都是非周期的，故由 3.5 节中关于 n 步转移概率的极限的讨论，可知对 $\forall i,j\in S,\forall h>0,\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}(nh)=\pi_{ij}$ 总存在，这样，对连续时间的马尔可夫链，就无需引入周期的概念．而且利用 $P_{ij}(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上的一致连续性及 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{ij}(nh)=\pi_{ij}$ 总存在．从而可以证明 $P_{ij}(t)$(在$t\to\infty$时) 极限总存在.

命题 6.1.2 $\forall i, j \in S$, 下述极限总存在

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \pi_{ij}.$$

证明参见文献 [4].

定义 6.1.3 (1) 若 $\int_0^{\infty} P_{ii}(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$, 则称状态 i 为常返状态；否则，称 i 为非常返状态.

(2) 设 i 为常返状态，若 $\lim\limits_{t\to\infty} P_{ii}(t) > 0$, 则称 i 为正常返状态；若 $\lim\limits_{t\to\infty} P_{ii}(t) = 0$, 则称 i 为零常返状态.

(3) 若概率分布 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i,\, i \in S)$ 满足下式

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}(t), \quad \forall\, t \geqslant 0,$$

称 $\boldsymbol{\pi}$ 为 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 的 (或 $\boldsymbol{P}(t)$ 的) 平稳分布.

(4) 若对 $\forall i \in S, \lim\limits_{t\to\infty} \pi_i(t) = \pi_i^*$ 存在，则称 $\boldsymbol{\pi}^* \triangleq \{\pi_i^*, i \in S\}$ 为 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 的极限分布.

与定理 3.5.8 相类似的结果和证明，有如下定理.

定理 6.1.1 不可约链是正常返链的充要条件是它存在平稳分布，且此时平稳分布就等于极限分布.

证明与定理 3.5.8 的证明类似，留给读者作为练习.

本章剩下的几节将着重讨论连续参数马尔可夫链中若干比较基本的特殊的问题 (相对于离散的马尔可夫链而言). 如：转移率矩阵 (Q 矩阵) 及概率意义，柯尔莫哥洛夫向前向后微分方程， Fokker–Planck 方程，生灭过程及应用，强马尔可夫性与嵌入马尔可夫链，以及连

续参数 PH 分布的若干性质、构造及反问题等.

6.2 转移率矩阵 —— Q 矩阵及其概率意义

在离散参数马尔可夫链中，我们知道由一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}=(P_{ij})$ 可以完全确定 n 步转移阵，即有 $\boldsymbol{P}^{(n)}=\boldsymbol{P}^n=\mathrm{e}^{n\ln\boldsymbol{P}}$, 那么对连续参数马尔可夫链，是否有类似的表达式，即 $\boldsymbol{P}(t)=\mathrm{e}^{t\boldsymbol{Q}}$ 呢？其中 $\boldsymbol{Q}$ 为与 t 无关的实数矩阵，假如上式存在，则应有

$$\boldsymbol{P}'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{P}(0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{t\boldsymbol{Q}}-\boldsymbol{I}}{t}=\boldsymbol{Q}.$$

这就提示我们先要研究 $\boldsymbol{P}(t)$ 在 $t=0$ 的导数 (即变化率) 是否存在的问题，先看最简单的一个例子，再给出一般的结论.

例 1 设 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为时齐泊松过程，参数为 λ. 因它是独立增量过程，易知它是连续参数马尔可夫链，则

$$\begin{aligned}P_{ij}(t)&=P\{N(s+t)=j|N(s)=i\}\\&=P\{N(s+t)-N(s)=j-i\}\\&=\begin{cases}\dfrac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, & j\geqslant i\geqslant 0,\\ 0, & 0\leqslant j<i.\end{cases}\end{aligned}$$

故 $P'_{ij}(t)$ 存在，且

$$q_{ij}\triangleq P'_{ij}(0)=\begin{cases}-\lambda, & j=i\geqslant 0,\\ \lambda, & j=i+1, i\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若令 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$, 可以验证 $\boldsymbol{P}(t)$ 满足 $\boldsymbol{P}(t)=\mathrm{e}^{t\boldsymbol{Q}}$.

对于一般马尔可夫链，有以下定理.

定理 6.2.1 对 $i\in S$ 极限

$$q_i=-q_{ii}\triangleq\lim_{t\to 0}\frac{1-P_{ii}(t)}{t} \tag{6.2.1}$$

存在，但可能是无限.

证明 首先，由 $P_{ii}(t)>0,\ t\geqslant 0$, 故可以定义 $\phi(t)=-\ln P_{ii}(t)$. 它非负有限，且由于 $P_{ii}(s+t)\geqslant P_{ii}(s)P_{ii}(t)$, 有 $\phi(s+t)\leqslant\phi(s)+\phi(t)$. 令 $q_i=\sup\limits_{t>0}\dfrac{\phi(t)}{t}$, 下面要证 $\dfrac{\phi(t)}{t}$ 极限存在，且即为其上确界．显然

$$0\leqslant q_i\leqslant\infty,\qquad \overline{\lim_{t\to 0}}\frac{\phi(t)}{t}\leqslant q_i,$$

所以以下只需证 $\underline{\lim}\limits_{t\to 0}\dfrac{\phi(t)}{t}\geqslant q_i$.

任给 $0<h<t$, 取 n 使 $t=nh+\varepsilon,\ 0\leqslant\varepsilon<h$, 得

$$\frac{\phi(t)}{t}\leqslant\frac{nh}{t}\ \frac{\phi(h)}{h}+\frac{\phi(\varepsilon)}{t}.$$

注意到，当 $h\to 0^+$ 时, $\varepsilon\to 0$, $\dfrac{nh}{t}\to 1$, $\phi(\varepsilon)=-\ln P_{ii}(\varepsilon)\to 0$, 故 $\forall\, t>0$, 有 $\dfrac{\phi(t)}{t}\leqslant\underline{\lim}\limits_{h\to 0}\dfrac{\phi(h)}{h}$, 得 $q_i\leqslant\underline{\lim}\limits_{t\to 0}\dfrac{\phi(t)}{t}$, 从而 $q_i=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\phi(t)}{t}$.

由 $\phi(t)$ 定义得

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1-P_{ii}(t)}{t}=&\lim_{t\to 0}\frac{1-\mathrm{e}^{-\phi(t)}}{\phi(t)}\ \frac{\phi(t)}{t}\\ =&q_i.\end{aligned}$$

□

定理 6.2.2 对 $i,j\in S,j\neq i$ 极限

$$q_{ij}\triangleq P'_{ij}(0)=\lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t}\tag{6.2.2}$$

存在且有限.

证明 由标准性条件，对任意 $0<\varepsilon<1/3$, 存在 $0<\delta<1$, 使当 $0<t\leqslant\delta$ 时，有 $P_{ii}(t)>1-\varepsilon$, $P_{jj}(t)>1-\varepsilon$, $P_{ji}(t)<\varepsilon$.

下面要证：对任意 $0\leqslant h<t$, 只要 $t\leqslant\delta$, 则有

$$P_{ij}(h)\leqslant\frac{P_{ij}(t)}{n}\cdot\frac{1}{1-3\varepsilon},\tag{a}$$

其中取 $n=\left[\dfrac{t}{h}\right]$ $\Big($ 即 n 为不超过 $\dfrac{t}{h}$ 的最大整数 $\Big)$, 记

$$\begin{cases}{}_jP_{ik}(h)=P_{ik}(h),\\ {}_jP_{ik}(mh)=\displaystyle\sum_{r\neq j}{}_jP_{ir}((m-1)h)P_{rk}(h).\end{cases}$$

其中 ${}_jP_{ik}(mh)$ 表示从 i 出发，在时刻 $h,2h,\cdots,(m-1)h$ 未到达 j 且在 mh 时刻到达 k 的

概率. 当 $h < t \leqslant \delta$ 时，有

$$\begin{aligned}\varepsilon > 1 - P_{ii}(t) =& \sum_{k \neq i} P_{ik}(t) \geqslant P_{ij}(t) \\ \geqslant& \sum_{m=1}^{n} {}_jP_{ij}(mh)P_{jj}(t - mh) \\ \geqslant& (1-\varepsilon) \sum_{m=1}^{n} {}_jP_{ij}(mh),\end{aligned}$$

得

$$\sum_{m=1}^{n} {}_jP_{ij}(mh) \leqslant \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

又由

$$P_{ii}(mh) = {}_jP_{ii}(mh) + \sum_{l=1}^{m-1} {}_jP_{ij}(lh)P_{ji}((m-l)h),$$

得

$${}_jP_{ii}(mh) \geqslant P_{ii}(mh) - \sum_{l=1}^{m-1} {}_jP_{ij}(lh) \geqslant 1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

故

$$\begin{aligned}P_{ij}(t) \geqslant& \sum_{m=1}^{n} {}_{j}P_{ii}((m-1)h)P_{ij}(h)P_{jj}(t-mh)\\ \geqslant& n\left(1-\varepsilon-\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)P_{ij}(h)(1-\varepsilon)\\ \geqslant& n(1-3\varepsilon)P_{ij}(h).\end{aligned}$$

(a) 式得证. (a) 式两边除以 h(注意，当 $h \to 0$ 时，$nh \to t$), 得

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{P_{ij}(h)}{h} \leqslant \frac{1}{1-3\varepsilon}\frac{P_{ij}(t)}{t} < \infty.$$

再令 $t \to 0$, 有

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\frac{P_{ij}(h)}{h} \leqslant \frac{1}{1-3\varepsilon}\underline{\lim_{t\to 0}}\frac{P_{ij}(t)}{t}.$$

再令 $\varepsilon \to 0$, 定理得证. □

推论 1 对任意 $i \in S$

$$0 \leqslant \sum_{j\neq i} q_{ij} \leqslant q_i, \tag{6.2.3}$$

证明 由 $\sum\limits_{j\in S} P_{ij}(t) = 1$, 得 $\dfrac{1-P_{ii}(t)}{t} = \sum\limits_{j\neq i}\dfrac{P_{ij}(t)}{t}$.

令 $t \to 0^+$, 上式两边取下极限，并由 Fatou 引理及 (6.2.1), (6.2.2) 式得

$$q_i = \lim_{t\to 0}\sum_{j\neq i}\frac{P_{ij}(t)}{t} \geqslant \sum_{j\neq i}\lim_{t\to 0}\frac{P_{ij}(t)}{t} = \sum_{j\neq i} q_{ij}. \qquad \square$$

注意到当 S 为有限集时，上式不等式化为等式．故有

推论 2　当 S 为有限状态空间时，$\forall i \in S$，有

$$0 \leqslant \sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i < \infty. \tag{6.2.4}$$

记 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$(其中 $q_{ii} = -q_i$)，称 $\boldsymbol{Q}$ 为 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 的**转移率矩阵**(或称**密度矩阵**)．若转移率矩阵 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ 满足：$\forall i \in S$，$\sum\limits_{j \neq i} q_{ij} = q_i < \infty$，称 $\boldsymbol{Q}$ 为**保守 Q 矩阵**．

由推论 2 知，当 S 为有限集时，$\boldsymbol{Q}$ 必保守．

为了解释 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ 的概率意义，令

$$\tau_1 = \inf\{t\colon t > 0, X(t) \neq X(0)\}.$$

τ_1 表示逗留在初始状态的时间 (或首次离开初始状态的时刻)．τ_1 的概率特性与 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ 有何关系呢？

定理 6.2.3　设马尔可夫链 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 轨道右连续，则对 $i \in S$, $t \geqslant 0$，有

$$P(\tau_1 > t \big| X(0) = i) = \exp(-q_i t). \tag{6.2.5}$$

证明　由轨道右连续，得

$$P(\tau_1 > t \big| X(0) = i) = P[X(u) = i, 0 \leqslant u \leqslant t \big| X(0) = i],$$

所以，首先要将不可列事件转化为可列事件运算．令

$$B \overset{\triangle}{=} \{\Omega\colon X(u) = i, 0 \leqslant u \leqslant t\} = \bigcap_{0 \leqslant u \leqslant t} \{\Omega\colon X(u) = i\}.$$

将 $[0,t]$ 区间 2^n 等分，记

$$\begin{aligned}A_n &\triangleq \left\{\Omega\colon X\left(\frac{k}{2^n}\,t\right)=i, k=0,1,2,\cdots,2^n\right\}\\ &=\bigcap_{k=0}^{2^n}\left\{\Omega\colon X\left(\frac{k}{2^n}\,t\right)=i\right\}.\end{aligned}$$

因为 $A_{n+1}\subset A_n$, 所以记 $A\triangleq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\lim\limits_{n\to\infty}A_n$.

显然 $B\subset A$. 另一方面，由过程轨道右连续可以证明 $P(A-B)=0$, 故

$$\begin{aligned}P(\tau_1>t\big|X(0)=i)=&P(X(u)=i,0\leqslant u\leqslant t\big|X(0)=i)\\ =&P(B\big|X(0)=i)\\ =&P(A\big|X(0)=i)\\ =&\lim_{n\to\infty}P(A_n\big|X(0)=i)\\ =&\lim_{n\to\infty}P(X(kt/2^n)=i,k=0,1,2,\cdots,2^n\big|X(0)=i)\\ =&\lim_{n\to\infty}(P_{ii}(t/2^n))^{2^n}(\text{马氏性})\\ =&\lim_{n\to\infty}\exp\{2^n\ln P_{ii}(t/2^n)\}\\ =&\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{\ln[1-q_i(t/2^n)+o(t/2^n)]}{-q_it/2^n}(-q_it)\right\}\\ =&\exp(-q_it).(\text{因为由 } q_i \text{ 的定义知 } P_{ii}(t)=1-q_it+o(t)\quad\square\end{aligned}$$

这说明系统逗留在 $X(0)=i$ 状态的时间 τ_1 是服从参数为 q_i 的指数分布的，显然

$$E[\tau_1\big|X(0)=i]=q_i^{-1}.$$

可见，q_i 决定了过程 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 停留在 $X(0)=i$ 的平均逗留时间，它刻画了过程从 i 出发的转移速率. 分 3 种情形：

(1) $q_i=0$, 称 i 为**吸收状态**, 这是因为 $(\tau_1=\infty)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(\tau_1>n)$, $P(\tau_1=\infty\big|X(0)=i)=\lim\limits_{n\to\infty}P(\tau_1>n\big|X(0)=i)=1$, 即从 i 出发，过程以概率 1 永远停留在 i 状态.

(2) $q_i=\infty$, 称 i 为**瞬时状态**, 此时 $P[\tau_1=0\big|X(0)=i]=\lim\limits_{n\to\infty}P\left[\tau_1\leqslant\dfrac{1}{n}\big|X(0)=i\right]=1$, 这说明 X 在 i 状态几乎不停留立即跳到别的状态.

(3) $0<q_i<\infty$, 称 i 为**逗留状态**, 这时过程停留在状态 i, 若干时间后跳到别的状态，停留时间服从指数分布.

定理 6.2.4 设马尔可夫链 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 轨道右连续, 且 $0<q_i<\infty$. 则对 $t\geqslant 0$, $j\neq i$, 有

$$P[\tau_1\leqslant t,X(\tau_1)=j\big|X(0)=i]=\frac{q_{ij}}{q_i}[1-\exp(-q_it)],\tag{6.2.6}$$

$$P[X(\tau_1)=j\big|X(0)=i]=\frac{q_{ij}}{q_i}.\tag{6.2.7}$$

证明 先进行事件分解

$$(\tau_1\leqslant t,X(\tau_1)=j)=\bigcup_{0\leqslant u\leqslant t}(\tau_1=u,X(\tau_1)=j).$$

与定理 6.2.3 的证明类似，下面也是采用将不可列事件化为可列事件运算．令

$$B=\{\tau_1\leqslant t, X(0)=i, X(\tau_1)=j\},$$

$$A_n=\bigcup_{0\leqslant k\leqslant 2^n}\left\{X\left(\frac{vt}{2^n}\right)=i, 0\leqslant v<k, X\left(\frac{kt}{2^n}\right)=j\right\}.$$

因为 $A_n\supset A_{n+1}$, 所以 $A\triangleq\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}A_n$, 且 $B\bigcup N=A$, 其中 N 是概率为 0 的事件, 即 $P(N)=0$.

由此得

$$\begin{aligned}
&P[\tau_1\leqslant t, X(\tau_1)=j\big|X(0)=i]\\
&\quad=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}P\left\{X\left(\frac{v}{2^n}t\right)=i, 0\leqslant v<k, X\left(\frac{k}{2^n}t\right)=j\big|X(0)=i\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\left(P_{ii}(t/2^n)\right)^{k-1}P_{ij}(t/2^n)\ \text{(马氏性)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(P_{ii}(t/2^n)\right)^{2^n}}{1-P_{ii}(t/2^n)}\ P_{ij}(t/2^n)\\
&=\lim_{n\to\infty}\left\{[1-\left(P_{ii}(t/2^n)\right)^{2^n}]\ \frac{P_{ii}(t/2^n)/(t/2^n)}{(1-P_{ii}(t/2^n))/(t/2^n)}\right\}\ \text{(由 (6.2.1) 式及 (6.2.2) 式)}\\
&=[1-\exp(-q_it)]\frac{q_{ij}}{q_i},
\end{aligned}$$

(6.2.6) 式得证. 上式中令 $t \to \infty$ 即得 (6.2.7) 式. □

推论 若马尔可夫过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 轨道右连续, 且 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ 为保守的, $0 < q_i < \infty$, $i \in S$, 则关于 $X(0) = i$, τ_1 与 $X(\tau_1)$ 条件独立.

证明 由 (6.2.5) ~ (6.2.7) 式, 对 $\forall t \geqslant 0$, $j \in S$, 有 $P(\tau_1 \leqslant t, X(\tau_1) = j \big| X(0) = i) = P(\tau_1 \leqslant t \big| X(0) = i) \cdot P(X(\tau_1) = j \big| X(0) = i)$ 及保守性, 即得 τ_1 与 $X(\tau_1)$ 关于 $X(0) = i$ 条件独立. □

6.3 柯尔莫哥洛夫向前向后微分方程

从上节讨论可知, 由马尔可夫链 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 的转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(t) = (P_{ij}(t))$ 可唯一地决定其密度矩阵 $\boldsymbol{P}'(0) = \boldsymbol{Q} = (q_{ij})$. 很自然地要问: 反之, 给定一个密度矩阵 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$, 是否可唯一地决定一转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(t) = (P_{ij}(t))$, 使其满足 $\boldsymbol{P}(t)$ 的性质 (P.1)~(P.5), 且 $\boldsymbol{P}'(0) = \boldsymbol{Q}$? 为此, 先引入若干概念, 然后着重讨论在 S 为有限集时 $\boldsymbol{P}(t)$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 的关系, 并简介几种由 $\boldsymbol{Q}$ 求 $\boldsymbol{P}(t)$ 的方法.

定义 6.3.1 一个矩阵 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ 称为**Q 矩阵**, 如满足:

(1) $q_{ii} \triangleq -q_i \leqslant 0$(可以取 $-\infty$);

(2) $0 \leqslant q_{ij} < +\infty$, $j \neq i$;

(3) $\displaystyle\sum_{j \neq i} q_{ij} \leqslant q_i$.

称 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵为**保守**, 若 $\forall i \in S$, $\displaystyle\sum_{j \neq i} q_{ij} = q_i < \infty$.

由上节可知, 当 $\boldsymbol{P}(t)$ 为标准转移阵时, 其密度矩阵 $\boldsymbol{P}'(0) = (P'_{ij}(0)) = (q_{ij})$ 为 Q 矩

阵，且当 S 为有限集时，$\boldsymbol{P}'(0)$ 为保守 Q 矩阵.

定义 6.3.2 对给定 Q 矩阵 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$, 若有马尔可夫链 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 的转移阵 $\boldsymbol{P}(t)=(P_{ij}(t))$ 满足 $\boldsymbol{P}'(t)|_{t=0}=\boldsymbol{Q}$, 则称此马尔可夫链 X 为 (Q 矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的)**Q 过程**.

定理 6.3.1 设马尔可夫链 $\{X(t),t\geqslant 0\}$, $\boldsymbol{P}(t)=(P_{ij}(t))$, $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})=\boldsymbol{P}'(0)$. 当 S 为有限集时，有

$$\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}, \tag{6.3.1}$$

$$\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t). \tag{6.3.2}$$

证明 由 C-K 方程 $\boldsymbol{P}(t+h)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(h)=\boldsymbol{P}(h)\boldsymbol{P}(t)$, 有

$$\frac{\boldsymbol{P}(t+h)-\boldsymbol{P}(t)}{h}=\boldsymbol{P}(t)\left[\frac{\boldsymbol{P}(h)-\boldsymbol{I}}{h}\right]=\left[\frac{\boldsymbol{P}(h)-\boldsymbol{I}}{h}\right]\boldsymbol{P}(t), \tag{6.3.3}$$

令 $h\to 0$, 两边取极限，注意到 S 为有限集，即得 (6.3.1),(6.3.2) 式. □

(6.3.1) 和 (6.3.2) 式称为柯尔莫哥洛夫 (Kolmogorov) 向前向后微分方程，其分量形式为

$$P'_{ij}(t)=-P_{ij}(t)q_j+\sum_{k\neq j}P_{ik}(t)q_{kj}; \tag{6.3.1a}$$

$$P'_{ij}(t)=-q_iP_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}q_{ik}P_{kj}(t). \tag{6.3.1b}$$

以上给出 S 有限集时，$\boldsymbol{P}(t)$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 的关系. 当 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$ 为已知的保守 Q 矩阵，且 S 为有限集时容易验证常微分方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t),\\ \boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{I}\end{cases}$$

存在满足 (P.1)~(P.5) 条件的转移概率矩阵的唯一解

$$\boldsymbol{P}(t)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{Q}t}\triangleq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\boldsymbol{Q}^k.$$

同时，$\boldsymbol{P}'(0)=\boldsymbol{Q}$.

对于 S 为可数状态时，向前方程与向后方程不一定成立，但由 (6.3.3) 式及 Fatou 引理，有

$$\boldsymbol{P}'(t)\geqslant\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q},\qquad \boldsymbol{P}'(t)\geqslant\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t).$$

定理 6.3.2 当 S 可数，$\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$ 为保守 Q 矩阵时，则向后方程 $\boldsymbol{P}'(t)=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t)$ 成立.

为了证明该定理，先不加证明地给出一个引理.

引理 6.3.1 设 $f(x)$ 为 (a,b) 上的连续函数，且 $f(x)$ 在 (a,b) 中有连续的右导数，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导.

定理 6.3.2 的证明 由 C-K 方程，当 $h>0$ 时

$$\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\frac{p_{ii}(h)-1}{h}p_{ij}(t)+\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t). \tag{6.3.4}$$

由 Fatou 引理，有

$$\varliminf_{h\to 0^+}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)\geqslant\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t). \tag{6.3.5}$$

另一方面，对 $N > i$, 有

$$\begin{aligned}\varlimsup_{h\to 0^+}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) &\leqslant \varlimsup_{h\to 0^+}\left[\sum_{k\neq i,k<N}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)+\sum_{k\geqslant N}\frac{p_{ik}(h)}{h}\right]\\ &= \varlimsup_{h\to 0^+}\left[\sum_{k\neq i,k<N}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)+\frac{1-p_{ii}(h)}{h}-\right.\\ &\qquad\left.\sum_{k\neq i,k<N}\frac{p_{ik}(h)}{h}\right]\\ &= \sum_{k\neq i,k<N}q_{ik}p_{kj}(t)+q_i-\sum_{k\neq i,k<N}q_{ik},\end{aligned}$$

令 $N\to\infty$, 由保守性得

$$\varlimsup_{h\to 0^+}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)\leqslant\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t). \tag{6.3.6}$$

由 (6.3.5) 及 (6.3.6) 式得

$$\varlimsup_{h\to 0^+}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)=\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t).$$

再由 (6.3.4) 式得

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h}=\sum_{k}q_{ik}p_{kj}(t).$$

仍由保守性知，上式右边的级数关于 t 一致收敛，因此是 t 的连续函数，故由 引理 6.3.1 得

定理. □

考虑 $X(t)$ 在 t 时刻的概率分布，记 $P_j(t)=P(X(t)=j)$, 显然

$$P_j(t)=\sum_{i\in S}P_i(0)P_{ij}(t).$$

于是有下面的结论.

定理 6.3.3 当 S 为有限集时，成立下列 Fokker-Planck 方程

$$P_j'(t)=-P_j(t)q_j+\sum_{k\neq j}P_k(t)q_{kj}. \tag{6.3.7}$$

证明 由 (6.3.1a) 式两边同乘以 $P_i(0)$ 并对 i 求和即得 (6.3.7) 式. □

为了解决具体问题，先回顾一下平稳分布和极限分布的概念. 若一概率分布 $\{\pi_j,j\in S\}$ 满足 $\pi_j=\sum\limits_{i\in S}\pi_iP_{ij}(t)(\forall j\in S,t\geqslant 0)$, 则称 $\{\pi_j,j\in S\}$ 为平稳分布. 与离散时间马尔可夫链有相类似的结果：当马尔可夫链 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为不可约遍历链时，则必存在唯一的平稳分布 $\{\pi_j,j\in S\}$, 且它就等于极限分布，即 $\pi_j=P_j\ (j\in S)$. 从而有以下定理.

定理 6.3.4 当 S 为有限集且为不可约链时，其平稳分布 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_j,j\in S)$ 存在，且满足 $\pi_jq_j=\sum\limits_{k\neq j}\pi_kq_{kj}$.

证明 由于 $\pi_j=\lim\limits_{t\to\infty}P_{ij}(t)$, 对 (6.3.7) 式两边对 t 取极限，

$$左边=\lim_{t\to\infty}P_j'(t)=P_j'=\pi_j'=0,$$

$$右边=-\pi_jq_j+\sum_{k\neq j}\pi_kq_{kj},$$

从而 $\pi_j q_j = \sum_{k \neq j} \pi_k q_{kj}$. □

有了以上理论上的准备，可以进一步讨论由密度矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 求解转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(t)$ 的几种方法.

(1) 当 S 有限时，可以利用分析的方法求解向前向后微分方程.

例 1 设某触发器状态只有两个，$S = \{0, 1\}$,“0” 表示工作态，“1” 表示失效态. $X(t)$ 表示 t 时触发器状态. 已知其状态转移具有马尔可夫性，即 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 为马尔可夫链，且 $P_{01}(t) = \lambda t + o(t)$, $P_{10}(t) = \mu t + o(t)$, 从而得

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}.$$

试求 $\boldsymbol{P}(t) = (P_{ij}(t))$(设 $P_0(0) = 1$).

解 由向后方程得

$$\begin{pmatrix} P'_{00}(t) \\ P'_{10}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{00}(t) \\ P_{10}(t) \end{pmatrix},$$

且 $P_0(0) = 1$. 经适当简化后有

$$\mu P'_{00}(t) + \lambda P'_{10}(t) = 0,$$

两边积分并利用初始条件 $P_{00}(0) = 1$, $P_{10}(0) = 0$, 得

$$\mu P_{00}(t) - \mu + \lambda P_{10}(t) = 0.$$

于是有

$$\begin{cases} P'_{00}(t) + (\lambda+\mu)P_{00}(t) = \mu, \\ P_{00}(0) = 1. \end{cases}$$

采用解常系数微分方程常用的常数变易法，解之得

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}.$$

从而

$$\begin{aligned} P_{10}(t) =& \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}, \\ P_{01}(t) =& \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}, \\ P_{11}(t) =& \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}. \end{aligned}$$

再由 $P_0(0) = P(X(0) = 0) = 1$, 得

$$P_0(t) = P_0(0)P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t},$$

$$P_1(t) = P_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)t}.$$

再求平稳分布 (也是极限分布), 得

$$P_0 = \lim_{t\to\infty} P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

及

$$P_1=\lim_{t\to\infty}P_{01}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

(2) 当 S 为可列集时，若已知 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$，欲求满足向前向后方程 $\boldsymbol{P}(t)$ 的解，可用概率构造法求之，这里仅以 $\boldsymbol{Q}$ 矩阵为保守 (即 $q_i<\infty$)，且过程轨道右连续为例，求解向后方程. 令

$$\tau_0=0,\tau_n=\inf\{t\colon t>\tau_{n-1},X(t)\neq X(\tau_{n-1})\},\ n\geqslant 1,$$

$${}_nP_{ij}(t)=P[\tau_n\leqslant t<\tau_{n+1},X(t)=j\big|X(0)=i].$$

则首先易得

$${}_0P_{ij}(t)=\delta_{ij}\mathrm{e}^{-q_it},$$

再由全概率公式可求递推关系

$$\begin{aligned}{}_{n+1}P_{ij}(t)=&P[\tau_{n+1}\leqslant t<\tau_{n+2},X(t)=j\big|X(0)=i]\\=&\sum_{k\neq i}\int_0^t P(\tau_{n+1}\leqslant t<\tau_{n+2},X(t)=j\big|X(0)=i,\tau_1=s,X(\tau_1)=k)\times\\&\mathrm{d}P(\tau_1\leqslant s,X(\tau_1)=k\big|X(0)=i)(\text{对 }\tau_1\text{ 及 }X(\tau_1)\text{ 用全概率公式})\\=&\sum_{k\neq i}\int_0^t\ \mathrm{e}^{-q_is}q_{ik}\ {}_nP_{kj}(t-s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

以上递推式也可有如下直观概率解释：

$${}_{n+1}P_{ij}(t)=\sum_{k\neq i}\int_0^t(\mathrm{e}^{-q_is})(q_{ik}\,\mathrm{d}s)({}_nP_{kj}(t-s)),$$

其中, $e^{-q_i s}$ 表示在 $[0,s]$ 上停留在 i 状态的概率, $q_{ik}\,\mathrm{d}s$ 表示在 $[s,s+\mathrm{d}s]$ 时间上恰有一次跳且跳到 k 状态的概率, ${}_nP_{kj}(t-s)$ 表示在余下时间内发生 n 次跳跃且 $X(t)=j$ 的概率. 最后, 对 k 求和, 对时间 s 从 0 到 t 积分.

有了以上递推公式后, 令 $f_{ij}(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}{}_nP_{ij}(t)$, 则可验证 $\boldsymbol{F}(t)=(f_{ij}(t))$ 是向后方程的最小非负解. 这启示我们: 可以借助于概率方法求某一类微分方程的解.

(3) 用拉普拉斯变换求解向前向后微分方程. 它将这些方程转化成代数方 程, 以便于用

代数方法作处理. 为此首先叙述一些必需的有关拉普拉斯变换的基本知识.

引理 6.3.2 设 $[0,\infty]$ 上的函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换为 $\phi(\lambda)$, 则

$$g(t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-q(t-s)}f(s)\,\mathrm{d}s,\quad q>0$$

的拉普拉斯变换为 $\dfrac{\phi(\lambda)}{\lambda+q}$.

证明 直接计算即可.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\int_0^t \mathrm{e}^{-q(t-s)}f(s)\,\mathrm{d}s=&\int_0^\infty \mathrm{e}^{qs}f(s)\,\mathrm{d}s\int_s^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda+q)t}\,\mathrm{d}t\\=&\frac{1}{\lambda+q}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}f(s)\,\mathrm{d}s\\=&\frac{\phi(\lambda)}{\lambda+q}.\end{aligned}$$

在上述计算过程中以 $|f(s)|$ 代 $f(s)$, 由 $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda s}|f(s)|\,\mathrm{d}s<\infty$ 可知，在计算中交换积分号是可行的，且 $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}|g(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$. □

对于转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}(t)$, 由于 $P_{ij}(t)$ 是 $[0,\infty)$ 上的有界连续函数，它有拉普拉斯变换，记为

$$r_{ij}(\lambda)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}P_{ij}(t)\,\mathrm{d}t,\quad \lambda>0,\quad i,j\in S.$$

令

$$\boldsymbol{R}(\lambda)=(r_{ij}(\lambda)),\quad \lambda>0,\quad i,j\in S.$$

它们称作转移概率函数的**预解式**, 有下面的性质.

定理 6.3.5 对一切 $i,j\in S$ 及 $\lambda,\mu>0$ 有

(1) $r_{ij}(\lambda)>0$;

(2) $\lambda\sum\limits_{j\in S}r_{ij}(\lambda)=1$;

(3) $r_{ij}(\lambda)-r_{ij}(\mu)+(\lambda-\mu)\sum\limits_{k\in S}r_{ik}(\lambda)r_{kj}(\mu)=0$;

(4) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda r_{ij}(\lambda)=\delta_{ij}$.

或写成以下简洁的矩阵形式:

(1′) $\boldsymbol{R}(\lambda)\geqslant\boldsymbol{0}$;

(2′) $\lambda\boldsymbol{R}(\lambda)\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}})$;

(3′) $\boldsymbol{R}(\lambda)-\boldsymbol{R}(\mu)+(\lambda-\mu)\boldsymbol{R}(\lambda)\boldsymbol{R}(\mu)=\boldsymbol{0}$;

(4′) $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\boldsymbol{R}(\lambda)=\boldsymbol{I}$.

称 (1′) ~ (4′) 为**预解方程**.

证明 (1), (2) 容易证，留给读者练习，这里只证 (3) 与 (4).

(3) 可由 C-K 方程用如下方法推得.

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda t+\mu s)}P_{ij}(t+s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s=\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda t+\mu t)}\sum_k P_{ik}(t)P_{kj}(s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s$$

$$=\sum_k r_{ik}(\lambda)r_{kj}(\mu). \tag{6.3.8}$$

现在不妨设 $\lambda > \mu$. 注意到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu s} P_{ij}(t+s)\,\mathrm{d}s = &\int_t^\infty \mathrm{e}^{-\mu(u-t)} P_{ij}(u)\,\mathrm{d}u \\ =&\mathrm{e}^{\mu t}\left\{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu u} P_{ij}(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^t \mathrm{e}^{-\mu u} P_{ij}(u)\,\mathrm{d}u\right\} \\ =&\mathrm{e}^{\mu t} r_{ij}(\mu) - \int_0^t \mathrm{e}^{\mu(t-u)} P_{ij}(u)\,\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda t+\mu s)} P_{ij}(t+s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = &\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu s} P_{ij}(t+s)\,\mathrm{d}s \\ =&r_{ij}(\mu)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda-\mu)t}\,\mathrm{d}t - \\ &\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu u} P_{ij}(u)\,\mathrm{d}u \int_u^\infty \mathrm{e}^{-(\lambda-\mu)t}\,\mathrm{d}t \\ =&\frac{r_{ij}(\mu)}{\lambda-\mu} - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda u} P_{ij}(u)\frac{\mathrm{d}u}{\lambda-\mu} \\ =&-\frac{1}{\lambda-\mu}\{r_{ij}(\lambda)-r_{ij}(\mu)\}.\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

易见，若 $\mu > \lambda$, 可得到同样的结果. 由 (6.3.8) 和 (6.3.9) 式即得 (3).

(4) 可由连续性条件推得. 事实上

$$\lambda r_{ij}(\lambda) = \lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t} P_{ij}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u} P_{ij}(u/\lambda)\,\mathrm{d}u,$$

$$\lim_{\lambda\to\infty} P_{ij}(u/\lambda) = \delta_{ij}, \qquad \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1,$$

由控制收敛定理即得 (4). □

下面引入向后方程的积分形式

$$P_{ij}(t) = \delta_{ij}\mathrm{e}^{-q_i t} + \sum_{k\neq i}\int_0^t \mathrm{e}^{-q_i(t-s)} q_{ik} P_{kj}(s)\,\mathrm{d}s. \tag{6.3.10}$$

实际上，由向后方程 $P'_{ij}(t) = \sum\limits_k q_{ik}P_{kj}(t)$, 可得

$$\begin{aligned}
P_{ij}(t) - \delta_{ij}\mathrm{e}^{-q_i t} &= \int_0^t \mathrm{d}[P_{ij}(s)\mathrm{e}^{-q_i(t-s)}] \\
&= \int_0^t \mathrm{e}^{-q_i(t-s)} P'_{ij}(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t q_i \mathrm{e}^{-q_i(t-s)} P_{ij}(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \mathrm{e}^{-q_i(t-s)}\Big(q_{ii}P_{ij}(s) + \sum_{k\neq i} q_{ik}P_{kj}(s)\Big)\,\mathrm{d}s\ + \\
&\quad\ \int_0^t (-q_{ii})\mathrm{e}^{-q_i(t-s)} P_{ij}(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \sum_{k\neq i}\int_0^t \mathrm{e}^{-q_i(t-s)} q_{ik}P_{kj}(s)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

即得 (6.3.8) 式. 对其取拉普拉斯变换，利用引理 6.3.2, 得到预解式满足的向后方程 (线性代数方程组)

$$r_{ij}(\lambda) = \sum_{k\neq i}\frac{q_{ik}}{\lambda+q_i} r_{kj}(\lambda) + \frac{\delta_{ij}}{\lambda+q_i}, \quad \lambda > 0, \quad i,j\in S.$$

类似地，也可得到向前方程的积分形式和向前线性代数方程组．这样，解微分方程就转化成求解线性代数方程组了．

6.4 生 灭 过 程

这一节转到讨论一类特殊的马尔可夫链——生灭过程，它在排队系统、可靠性理论、生物、医学、经济管理、物理、通讯、交通等方面有广泛的应用．而且它的理论成果较为系统，成熟和深入．

定义 6.4.1 设马尔可夫链 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$, 状态空间 $S=\{0,1,2,\cdots\}$, 若 $\boldsymbol{P}(t)=(P_{ij}(t))$ 满足：当 h 充分小时，

$$\begin{cases} P_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h), & \lambda_i \geqslant 0, i \geqslant 0, \\ P_{i,i-1}(h) = \mu_i h + o(h), & \mu_i \geqslant 0, i \geqslant 1, \\ P_{ii}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + o(h), & \mu_0 = 0, i \geqslant 0, \\ \sum\limits_{|j-i| \geqslant 2} P_{ij}(h) = o(h), & i \geqslant 0. \end{cases} \tag{6.4.1}$$

称 X 为**生灭过程**.

(6.4.1) 式表示，当 h 充分小时，状态转移有 3 种可能：$i \to i+1, i \to i-1, i \to i$. 这个特性是许多生物群体，粒子裂变，信号计数等的共同特点，因而可作为这一类物理自然现象的数学模型.

由 (6.4.1) 式知：$q_i = (\lambda_i + \mu_i)$, $q_{i,i+1} = \lambda_i$, $q_{i,i-1} = \mu_i$, 其他 $q_{ij} = 0$, 即 $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ 表示为

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1 + \mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2 + \mu_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_i & -(\lambda_i + \mu_i) & \lambda_i & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{6.4.2}$$

形如 (6.4.2) 式的矩阵，称作生灭过程 Q 矩阵. 显然，它是保守 Q 矩阵，且在 $\lambda_i > 0 (i \geqslant 0)$, $\mu_i > 0 (i \geqslant 1)$ 时，有 $i-1 \leftrightarrow i \leftrightarrow i+1 (i \geqslant 1)$, 可知对 $\forall i, j \in S$, $i \leftrightarrow j$, 从而这样的生灭过程是不可约链，同时有以下定理.

定理 6.4.1 若 X 为生灭过程，则 $\boldsymbol{P}(t)$, $\boldsymbol{Q}$ 满足向前向后方程

$$P'_{ij}(t) = -P_{ij}(t)(\lambda_j + \mu_j) + P_{i,j-1}(t)\lambda_{j-1} + P_{i,j+1}(t)\mu_{j+1}, \tag{6.4.3}$$

$$P'_{ij}(t) = -(\lambda_i + \mu_i)P_{ij}(t) + \lambda_i P_{i+1,j}(t) + \mu_i P_{i-1,j}(t). \tag{6.4.4}$$

且 $\{P_j(t), j \in S\}$ 满足 Fokker-Planck 方程

$$\begin{cases} P'_0(t) = -P_0(t)\lambda_0 + P_1(t)\mu_1, \\ P'_j(t) = -P_j(t)(\lambda_j + \mu_j) + P_{j-1}(t)\lambda_{j-1} + P_{j+1}(t)\mu_{j+1}. \end{cases} \tag{6.4.5}$$

证明 先证 (6.4.3) 式.

由 C-K 方程及 (6.4.1) 式，有

$$\begin{aligned} \frac{P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t)}{h} =& - P_{ij}(t)\frac{(1 - P_{jj}(h))}{h} + P_{i,j-1}(t)\frac{P_{j-1,j}(h)}{h} \\ &+ P_{i,j+1}(t)\frac{P_{j+1,j}(h)}{h} + \frac{1}{h}o(h). \end{aligned}$$

令 $h \to 0$ 即得 (6.4.3) 式. 类似可证 (6.4.4) 式. 由 (6.4.3) 式两边乘以 $P_i(0)$ 再对 i 求和，并注意到 $P_j(t) = \sum\limits_{i \in S} P_i(0)P_{ij}(t)$, 即得 (6.4.5) 式. □

如 X 的极限分布存在，即 $P_j = \lim\limits_{t \to \infty} P_{ij}(t)$ 存在，且与 i 无关 $(\forall i, j \in S)$, 则有 $P'_j(t) \to 0 (t \to \infty)$. 因此由 (6.4.5) 式令 $t \to \infty$, 两边取极限得

$$\begin{cases} -\lambda_0 P_0 + \mu_1 P_1 = 0, \\ -(\lambda_j + \mu_j)P_j + \lambda_{j-1}P_{j-1} + \mu_{j+1}P_{j+1} = 0, \quad j \geqslant 1. \end{cases} \tag{6.4.6}$$

解 (6.4.6) 式的代数方程组，得

$$P_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}P_0,\quad P_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}P_0,\ \cdots,\ P_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}P_0,\ \cdots$$

再由 $\sum\limits_{k\in S}P_k=1$, 得

$$P_0=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\right)^{-1}.$$

可知，当

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}<\infty \tag{6.4.7}$$

时, $0<P_0<1$, 且 $0<P_k<1(k\geqslant 1)$. 因此，(6.4.7) 式成立是 (6.4.6) 式的代数方程组存在唯一的极限分布解的充要条件．进一步有以下结论.

定理 6.4.2 设 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为生灭过程，$\lambda_i>0$, $i\geqslant 0$, $\mu_i>0$, $i\geqslant 1$ $(\mu_0=0)$, 则 X 存在唯一的平稳分布 (它等于极限分布) 的充要条件为 (6.4.7) 式成立，即

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}<\infty,$$

且 $P_0=\left(1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\right)^{-1}$, $P_k=\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}P_0(k\geqslant 1)$.

证明 注意到当 $\lambda_i>0$, $i\geqslant 0$, $\mu_i>0$, $i\geqslant 1$ 时，此过程为不可约链．再由定理 6.1.1 可知，它是正常返链的充要条件是存在平稳分布，且就等于极限分布，而 (6.4.7) 式成立是 (6.4.6) 式代数方程存在唯一极限分布的充要条件. □

通常在排队论中，若存在极限分布，且等于平稳分布，称此时系统处于**统计平衡**, 简称**稳态**.

例 1　$M/M/1$ 排队系统, 即顾客到达流是参数为 λ 的泊松流, 每个顾客的服务时间独立同分布, 服从参数为 μ 的指数分布且与顾客到达时间相互独立, 另外只有一个服务员. 记 $X(t)$ 表示系统 t 时刻顾客数，易知 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 为生灭过程, $\lambda_i = \lambda(i \geqslant 0)$, $\mu_i = \mu(i \geqslant 1, \mu_0 = 0)$. 显然，当 $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ 时，$0 < P_0 = 1 - \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$, $0 < P_k = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \dfrac{\lambda}{\mu}\right) < 1$, 因此得出：对于 $M/M/1$ 排队系统，当 $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ 时，过程存在唯一平稳分布 $\{P_j, j \in S\}$; 当 $t \to +\infty$ 时，$P_j(t) \to P_j$. 以下求稳态下的几个数量指标：

(1) 系统的平均队长

$$L = \lim_{t \to \infty} E[X(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k P_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

由

$$\lim_{t \to \infty} E[X^2(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 P_k = \rho \left[\frac{2}{(1-\rho)^2} - \frac{1}{(1-\rho)}\right],$$

有

$$\lim_{t \to \infty} D[X(t)] = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}.$$

(2) 平均等待的顾客数

$$L_g = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) P_k = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}.$$

(3) 等待时间分布与平均等待时间

以 T_g 表示稳态时 (如考虑初始分布等于平稳分布的系统，此时是一平稳过程) 顾客排队等待的时间，记 $G(x)=P(T_g\leqslant x)$, 当 $x=0$ 时

$$G(0)=P(T_g=0)=P_0=1-\frac{\lambda}{\mu}.$$

当 $x>0$ 时，由全概公式

$$\begin{aligned}G(x)=&\sum_{n=0}^{\infty}P(X(s)=n)P(T_g\leqslant x\big|X(s)=n)\\=&P(T_g\leqslant x,X(s)=0)+\sum_{n=1}^{\infty}P_nP(T_g\leqslant x\big|X(s)=n).\end{aligned}$$

在 $X(s)=n$ 条件下，T_g 应等于 $n-1$ 个顾客服务时间之和再加上正在服务的顾客的剩余服务时间，再由指数分布的无记忆性，知 $P(T_g\leqslant x|X(s)=n)$ 应等于参数为 μ 的指数分布的 n 重卷积，即

$$P(T_g\leqslant x\big|X(s)=n)=\int_0^x\frac{\mu(\mu u)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\mu u}\,\mathrm{d}u,$$

故

$$\begin{aligned}G(x)=&\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\lambda\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda u)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\mu u}\,\mathrm{d}u\\=&\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)+\frac{\lambda}{\mu}[1-\mathrm{e}^{-(\mu-\lambda)x}]\\=&1-\frac{\lambda}{\mu}\mathrm{e}^{-(\mu-\lambda)x}.\end{aligned}$$

平均等待时间 $W_g = ET_g = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$.

(4) 费用最优的参数

考虑最优服务率 μ 的问题，设每一顾客在系统一小时损失 C_1 元，服务机构每小时费用正比于 μ, 比例系数为 C_2, 记 $R(\mu)$ 为每小时费用，则系统平均每小时费用损失为 $ER(\mu) = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda}C_1 + C_2\mu$. 如何选取最优的 μ^*, 使 $ER(\mu^*) = \min ER(\mu)$. 显然由 $\dfrac{\mathrm{d}ER(\mu)}{\mathrm{d}\mu} = 0$, 可得

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{C_1\lambda}{C_2}}. \qquad \square$$

例 2 一台大型计算机系统，有 m 个终端，假定可能的用户有无限多. 在 $(t, t+h)$ 内

又有一用户要求使用终端的概率为 $\lambda h+o(h)(\lambda>0,h$充分小), 并与正在使用的用户无关. 此时若有空闲终端, 则它占用一终端; 否则, 因终端占满, 请求使用的用户被取消. 又假定每一个在 t 时刻正在占用一终端, 在 $(t,t+h)$ 内使用完毕而空出的概率为 $\mu h+o(h)$. 各用户正在占用与结束之间相互独立. 设 $X(t)$ 表示 t 时刻正在占用的终端数, 易验证 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 为马尔可夫链, 且是有限状态生灭过程, $S=\{0,1,2,\cdots,m\}$. 依题意有

$$\begin{aligned}
&P_{i,i+1}(h)=\lambda h+o(h),\ \ 0\leqslant i\leqslant m-1;\\
&P_{i,i-1}(h)=i\mu h+o(h),\ \ 1\leqslant i\leqslant m;\\
&P_{ii}(h)=1-(\lambda+i\mu)h+o(h),\ \ 0\leqslant i\leqslant m-1;\\
&P_{ij}(h)=o(h),\ \ |j-i|\geqslant 2;\\
&P_{mm}(h)=1-m\mu h+o(h).
\end{aligned}$$

则相应的极限分布 $\{P_j,0\leqslant j\leqslant m\}$ 满足方程 (6.4.6)$(0\leqslant j\leqslant m)$. 解之得 $P_k=\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k P_0$, 再由 $\displaystyle\sum_{j=0}^{m}P_j=1$ 知

$$\begin{aligned}
&P_0=\left(1+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right)^{-1},\\
&P_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\left[\sum_{l=0}^{m}\frac{1}{l!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^l\right]^{-1},\ \ 0\leqslant k\leqslant m.
\end{aligned}$$ □

考虑几个特殊的生灭过程.

(1) 有迁入的线性增长模型

生灭过程 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$, 若 $\lambda_n=n\lambda+a$, $\mu_n=n\mu$, $\lambda>0$, $\mu>0$, $a>0$, 称 X 为有迁入线性增长模型. 它用于描述生物再生和人口增长过程. 假定群体中的每个个体以指数率 λ 出生，同时，群体由于从外界迁入的影响又以系数 a 增加，而群体中每个个体以指数率 μ 死亡. 这时方程 (6.4.3) 化为

$$\begin{cases} P_{i0}'(t)=-aP_{i0}(t)+\mu P_{i1}(t), \\ P_{ij}'(t)=[\lambda(j-1)+a]P_{i,j-1}(t)-[(\lambda+\mu)j+a]P_{ij}(t)+ \\ \qquad\qquad \mu(j+1)P_{i,j+1}(t), \quad j\geqslant 1. \end{cases} \tag{6.4.8}$$

记 $M_i(t)=E[X(t)\big|X(0)=i]=\sum\limits_{j=1}^{\infty} jP_{ij}(t)$, 则由 (6.4.8) 式两边乘以 j, 再对 j 求和，可知 $(M_i(t),t\geqslant 0)$ 满足下列微分方程

$$\begin{cases} M_i'(t)=a+(\lambda-\mu)M_i(t), \\ M_i(0)=i. \end{cases}$$

解之得到

$$M_i(t)=\begin{cases} at+i, & 如\lambda=\mu, \\ \dfrac{a}{\lambda-\mu}(\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}-1)+i\mathrm{e}^{(\lambda-\mu)t}, & 如\lambda\neq\mu. \end{cases} \tag{6.4.9}$$

且

$$\lim_{t\to\infty} M_i(t)=\begin{cases} \infty, & 如\lambda\geqslant\mu, \\ \dfrac{-a}{\lambda-\mu}, & 如\lambda<\mu. \end{cases}$$

这在直观上的意义是很明显的.

(2) 纯生过程 (耶洛过程)

泊松过程是一个最简单的纯生过程，它是当 $\mu_n = 0$, $\lambda_n = \lambda$ 的生灭过程. 泊松过程的一个自然推广是在给定时刻一事件发生的可能性依赖于已发生的事件数，即对于充分小的 $h \geqslant 0$, 若 $P_{i,i+1}(h) = \lambda_i h + o(h)$, $P_{ii}(h) = 1 - \lambda_i h + o(h)$, 其他 $P_{ij}(h) = o(h), j > i+1$, $P_{ij}(h) = 0, j < i$, 这便是纯生过程. 纯生过程中一个特殊情形是：当 $\lambda_n = n\beta$ 时，称为耶洛 (yule) 过程. 耶洛过程在物理、生物中常会看到它的踪迹. 假定某群体的每一位个体在 h 时间长度内生出新的概率为 $\beta h + o(h)$, 且个体之间产生下一代的个体数也相互独立，那么

$$\begin{aligned} P_{i,i+1}(h) =& P(X(t+h) = i+1 \big| X(t) = i) \\ =& P(X(t+h) - X(t) = 1 \big| X(t) = i) \\ =& \mathrm{C}_i^1 (\beta h + o(h))[1 - \beta h + o(h)]^{i-1} \\ =& i\beta h + o(h). \end{aligned}$$

当 $j > i+1$ 时, $P_{ij}(h) = o(h)$ ； $j < i$ 时, $P_{ij}(h) = 0$, $P_{ii}(h) = (1-\beta h - o(h))^i = 1 - i\beta h + o(h)$. 以 $\lambda_n = n\beta$, $\mu_n = 0$ 代入 (6.4.5) 式得

$$P_n'(t) = -n\beta P_n(t) + (n-1)\beta P_{n-1}(t), \quad n \geqslant 1. \tag{6.4.10}$$

分两种情况讨论：

① 设 $X(0) = 1$, 即 $P_1(0) = 1$, $P_n(0) = 0 (n \geqslant 2)$ 为初始条件. 由 $n = 1$, $P_1'(t) = -\beta P_1(t)$, $P_1(0) = 1$, 得 $P_1(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}$. 再由 (6.4.10) 式递推归纳得

$$P_n(t) = \exp(-\beta t)[1 - \exp(-\beta t)]^{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

记 $f_1(\rho,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P_n(t)\rho^n$, 那么

$$f_1(\rho,t)=\frac{\rho\mathrm{e}^{-\beta t}}{1-(1-\mathrm{e}^{-\beta t})\rho}.$$

② 设 $X(0)=k$, 即 $P_k(0)=1$, $P_n(0)=0$, $n\neq k$ 的情形. 由于每个个体产生下一代相互独立, 因此我们可以设想: 这个 $X(0)=k$ 的耶洛过程可以看作是由 $X_i(0)=1$ 的 k 个耶洛过程 $X_i(t)(1\leqslant i\leqslant k)$ 的和构成, 即 $X(t)=\sum\limits_{i=1}^{k}X_i(t)$. 令

$$\begin{aligned}&P_{kn}(t)=P(X(t)=n\big|X(0)=k),\\&f_k(\rho,t)=\sum_{n=k}^{\infty}P_{kn}(t)\rho^n,\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}f_k(\rho,t)=&[f_1(\rho,t)]^k\\=&\left[\frac{\rho\mathrm{e}^{-\beta t}}{1-(1-\mathrm{e}^{-\beta t})\rho}\right]^k\\=&(\rho\mathrm{e}^{-\beta t})^k\sum_{m=0}^{\infty}\mathrm{C}_{m+k-1}^{m}(1-\mathrm{e}^{-\beta t})^m\rho^m\\=&\sum_{n=k}^{\infty}\mathrm{C}_{n-1}^{n-k}(\mathrm{e}^{-\beta t})^k(1-\mathrm{e}^{-\beta t})^{n-k}\rho^n.\end{aligned}$$

与 $f_k(\rho,t)$ 的定义比较，得

$$\begin{cases} P_{kn}(t) = \mathrm{C}_{n-1}^{n-k}\mathrm{e}^{-k\beta t}(1-\mathrm{e}^{-\beta t})^{n-k}, & n \geqslant k, \\ P_{kn}(t) = 0, & n < k. \end{cases}$$

这说明，对耶洛过程，由初始分布及 Q 矩阵能够唯一确定 $\boldsymbol{P}(t)$.

6.5 强马尔可夫性与嵌入马尔可夫链

在马尔可夫链中，它的基本性质是它具有 “马尔可夫性”, 即在已知 “现在” 的情况下, “将来” 与 “过去” 无关. 这里所指的 “现在” 时刻 t 是一个 T 中的数. 自然地要问：如果 “现在” 改为随机 “停时”, 其 “马尔可夫性” 是否还保持？例如, 已知过程在第一次跳跃时刻τ_1(现在时刻是 τ_1) 的状态，那么过程在第一次跳跃后 (将来) 与过程在 τ_1 之前是否条件独立？这就是所谓 “强马尔可夫性” 问题. 强马尔可夫性概念是一个非常有用的概念，但它的严格定义需要测度论的知识. 本节力图用直观的、初等概率论的语言对 “强马尔可夫性” 与有关的重要结果作简要的介绍，以便读者应用.

记 $F_t = \sigma(X(u), 0 \leqslant u \leqslant t)$ 是由 $\{X(u), 0 \leqslant u \leqslant t\}$ 生成的事件的 σ 域，即由过程 X 在 $[0,t]$ 内可能提供的全部信息 (参见 4.3 节). 一个非负随机变量 τ, 若对于 $\forall t \geqslant 0$ 有 $(\tau \leqslant t) \in F_t$, 即事件 $\{\tau \leqslant t\}$ 发生与否，完全由过程 X 在 t 时刻之前 (包括 t 时刻) 的状态 $\{X(u), 0 \leqslant u \leqslant t\}$ 决定，则称 τ 关于 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$ 是停时 (或马尔可夫时间). 显然，任意常数 $t \geqslant 0$ 是停时. 若 τ, θ 是停时，则 $\tau + \theta$, $\tau \wedge \theta$, $\tau \vee \theta$ 亦是停时.

定义 6.5.1 设马尔可夫过程 $X = \{X(t), t \geqslant 0\}$, 状态空间 $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$, ρ_n 关于 X 是停时 $(n \geqslant 1)$, $0 \leqslant \rho_1 \leqslant \rho_2 \leqslant \cdots \leqslant \rho_n$ 及 $t \geqslant 0$. 若对 $\forall j, i_k \in S$

$(0 \leqslant k \leqslant n)$ 有

$$\begin{aligned} &P\{X(\rho_n+t)=j \big| X(0)=i_0, X(\rho_k)=i_k, (1\leqslant k\leqslant n)\} \\ &\quad = P\{X(\rho_n+t)=j \big| X(\rho_n)=i_n\}, \end{aligned}$$

则称 $\{X(t), t\geqslant 0\}$ 关于 $\{\rho_k, 0\leqslant k\leqslant n\}(n\geqslant 1)$ 具有**强马尔可夫性**.

令 $\tau_0=0$ 及

$$\tau_n=\inf\{t\text{：}\ t>\tau_{n-1}, X(t)\neq X(\tau_{n-1})\}(n\geqslant 1),\quad \theta_n=\tau_n-\tau_{n-1}(n\geqslant 1).$$

τ_n 表示 X 的第 n 次跳跃时刻,θ_n 表示第 n 次与第 $n-1$ 次跳跃的时间间隔. 令 $Y^{(n)}(t)=X(\tau_n+t)$, $Y^{(n)}=\{X(\tau_n+t), t\geqslant 0\}(n\geqslant 1)$, $\tau_0^{(1)}=0$, $\tau_n^{(1)}=\inf\left\{t\text{：}\ t>\tau_{n-1}^{(1)}, Y^{(1)}(t)\neq Y^{(1)}\big(\tau_{n-1}^{(1)}\big)\right\}$.

本章以下几节总假定时齐马尔可夫链 $X=\{X(t), t\geqslant 0\}$ 轨道右连续，$\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$ 为保守 Q 矩阵，且 $0<q_i<+\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n=+\infty(\text{a.e.})$, $i\in S$. 本节并着重讨论 X 关于跳跃时刻的强马尔可夫性问题.

定理 6.5.1 $\forall s,t\geqslant 0, j\neq i$, 有

$$\begin{aligned} &P\{\tau_1\leqslant s, X(\tau_1+v)=j, 0\leqslant v\leqslant t \big| X(0)=i, X(\tau_1)=j\} \\ &\quad =[1-\exp(-q_i s)]\exp(-q_j t). \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

证明 由定理 6.2.4 的推论知，$\forall\,\mu\geqslant 0$

$$\begin{aligned} P(\tau_1\leqslant u \big| X(0)=i, X(\tau_1)=j) =& P(\tau_1\leqslant u \big| X(0)=i) \\ =& 1-\exp(-q_i u). \end{aligned}$$

故 $\forall\, s,t \geqslant 0$

$$
\begin{aligned}
&P(\tau_1 \leqslant s, X(\tau_1+v)=j, 0\leqslant v\leqslant t \big| X(0)=i, X(\tau_1)=j)\\
=&\int_0^s P\{\tau_1 \leqslant s, X(\tau_1+v)=j, 0\leqslant v\leqslant t \big| X(0)=i, \tau_1=u, X(u)=j\}\times\\
&\mathrm{d}P\{\tau_1\leqslant u \big| X(0)=i, X(\tau_1)=j\}\\
=&\int_0^s P\{X(u+v)=j, 0\leqslant v\leqslant t \big| X(z)=i, 0\leqslant z<u, X(u)=j\} q_i\exp(-q_i u)\,\mathrm{d}u\\
=&\lim_{n\to\infty}\int_0^s P\{X(u+v)=j, 0\leqslant v\leqslant t \big| X(ku/2^n)=i, 0\leqslant k<2^n, X(u)=j\}\times\\
&q_i\exp(-q_i u)\,\mathrm{d}u \quad (\text{轨道右连续及概率连续性})\\
=&\int_0^s P[X(u+v)=j, 0\leqslant v\leqslant t \big| X(u)=j] q_i\exp(-q_i u)\,\mathrm{d}u \quad (\text{马氏性})\\
=&\int_0^s P[X(v)=j, 0\leqslant v\leqslant t \big| X(0)=j] q_i\exp(-q_i u)\,\mathrm{d}u \quad (\text{时齐性})\\
=&P[X(v)=j, 0\leqslant v\leqslant t \big| X(0)=j][1-\exp(-q_i s)]\\
=&[1-\exp(-q_i s)]\exp(-q_j t) \quad (\text{由 (6.2.5) 式}).
\end{aligned}
$$

命题得证. □

推论　$\forall s,t \geqslant 0, j\neq i$ 有

(1)

$$
P(\theta_1\leqslant s, \theta_2\leqslant t \big| X(0)=i, X(\tau_1)=j) = [1-\exp(-q_i s)][1-\exp(-q_j t)]. \tag{6.5.2}
$$

(2) 给定 $X(0)$, $X(\tau_1)$, θ_1 与 θ_2 条件独立.

(3) $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 关于 τ_1 具有强马尔可夫性.

证明略，留给有兴趣的读者作为练习.

定理 6.5.2 $Y^{(1)}=\{X(\tau_1+t),t\geqslant 0\}$ 是时齐马尔可夫链，且与 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 有相同的 $\boldsymbol{P}(t)=(P_{ij}(t))$ 和 Q 矩阵 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$.

证明略，留给有兴趣的读者作为练习.

推论 $Y^{(n)}=\{X(\tau_n+t),t\geqslant 0\}$ 是时齐马尔可夫链且与 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 具有相同的 $\boldsymbol{P}(t)=(P_{ij}(t))$ 与 Q 矩阵 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$.

证明略，留给有兴趣的读者作为练习.

定理 6.5.3 马尔可夫链 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 关于跳跃时刻 $\{\tau_k,0\leqslant k\leqslant n\}$ $(n\geqslant 1)$ 具有强马尔可夫性，即 $\forall t\geqslant 0$, $i_k\in S$, $i_{k-1}\neq i_k$, $1\leqslant k\leqslant n-1$, $i_{n-1}\neq i$, $j\in S$, 则

$$\begin{aligned}&P\{X(\tau_n+t)=j\big|X(0)=i_0,X(\tau_1)=i_1,\cdots,X(\tau_{n-1})=i_{n-1},X(\tau_n)=i\}\\&\quad=P\{X(\tau_n+t)=j\big|X(\tau_n)=i\}\\&\quad=P_{ij}(t).\end{aligned}\tag{6.5.3}$$

证明 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时，由定理 6.5.1 知结论成立.

现设 (6.5.3) 式对 n 成立，往下证对 $n+1$ 的情形. 由定理 6.5.2 知 $Y^{(1)}$ 在 $X(\tau_1)$ 下与 $X(0)$ 无关，于是

$$\begin{aligned}&P\{X(\tau_{n+1}+t)=j\big|X(0)=l,X(\tau_1)=i_0,X(\tau_2)=i_1,\cdots,X(\tau_{n+1})=i\}\\&\quad=P\big\{Y^{(1)}\big(\tau_n^{(1)}+t\big)=j\big|Y^{(1)}(0)=i_0,Y^{(1)}\big(\tau_1^{(1)}\big)=i_1,\cdots,Y^{(1)}\big(\tau_n^{(1)}\big)=i\big\}\\&\quad=P\big\{Y^{(1)}\big(\tau_n^{(1)}+t\big)=j\big|Y^{(1)}\big(\tau_n^{(1)}\big)=i\big\}\quad(\text{由归纳假设})\\&\quad=P_{ij}(t).\quad(\text{定理 6.5.2})\end{aligned}$$

从而结论对任意 $n \geqslant 1$ 均成立. □

由以上定理，不难有以下推论.

推论

(1) $\forall i_k \in S,\ i_k \neq i_{k+1},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1,\ i \neq i_{n-1},\ t \geqslant 0$

$$\begin{aligned} &P\{\theta_{n+1} \leqslant t \big| X(0)=i_0, X(\tau_1)=i_1, \cdots, X(\tau_{n-1})=i_{n-1}, X(\tau_n)=i\} \\ &\quad = 1-\exp(-q_i t). \end{aligned} \tag{6.5.4}$$

(2) $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n, \theta_{n+1}$ 关于 $X(0), X(\tau_1), \cdots, X(\tau_n)$ 条件独立.

(3)

$$P\{X(\tau_{n+1})=j \big| X(0)=i_0, \cdots, X(\tau_{n-1})=i_{n-1}, X(\tau_n)=i\} = \begin{cases} \dfrac{q_{ij}}{q_i} & j \neq i, \\ 0 & j = i. \end{cases}$$

证明 仅证 (3).

$$
\begin{aligned}
&P\{X(\tau_{n+1})=j\big|X(0)=i_0,\cdots,X(\tau_{n-1})=i_{n-1},X(\tau_n)=i\}\\
&\quad=P\{X(\tau_n+\theta_{n+1})=j\big|X(0)=i_0,\cdots,X(\tau_n)=i\}\\
&\quad=\int_0^\infty P\{X(\tau_n+t)=j\big|X(0)=i_0,\cdots,X(\tau_n)=i,\theta_{n+1}=t\}\times\\
&\qquad\mathrm{d}P\{\theta_{n+1}\leqslant t\big|X(0)=i_0,\cdots,X(\tau_n)=i\}\\
&\quad=\int_0^\infty P\{X(\tau_n+u)=i,0\leqslant u<t,X(\tau_n+t)=j\big|\\
&\qquad X(0)=i_0,\cdots,X(\tau_n)=i,\theta_{n+1}=t\}\cdot\mathrm{d}P\{\theta_{n+1}\leqslant t\big|X(\tau_n)=i\}\\
&\quad=\int_0^\infty P\{X(u)=i,0\leqslant u<t,X(t)=j\big|X(0)=i,\theta_1=t\}\,\mathrm{d}P\{\theta_1\leqslant t\big|X(0)=i\}\\
&\quad=P\{X(\tau_1)=j\big|X(0)=i\}\quad(\text{全概率公式})\\
&\quad=\frac{q_{ij}}{q_i}.
\end{aligned}
$$

□

若令 $\tilde{X}_n=X(\tau_n)$, 称 $\tilde{X}=\{\tilde{X}_n,n\geqslant 0\}$ 为**嵌入马尔可夫链**.

定理 6.5.4 $\tilde{X}=\{\tilde{X}_n,n\geqslant 0\}$ 是离散参数马尔可夫链，其一步转移概率 $\tilde{P}_{ij}$ 为

$$
\tilde{P}_{ij}=\begin{cases}\dfrac{q_{ij}}{q_i}, & j\neq i,\\ 0, & j=i.\end{cases}\tag{6.5.5}
$$

$$
\tilde{\boldsymbol{P}}=(\delta_{ij}+q_{ij}q_i^{-1}).
$$

证明 由定理 6.5.3 推论即得. □

以上说明: 对于连续参数马尔可夫链 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$, 如果只考虑跳跃时刻 $\{\tau_n,n\geqslant 0\}$ 的状态 $\tilde{X}_n=X(\tau_n)$, 则 $\tilde{X}=\{\tilde{X}_n,n\geqslant 0\}$ 仍是马尔可夫链, 其转移矩阵为 $\tilde{\boldsymbol{P}}=(\delta_{ij}+q_{ij}q_i^{-1})$.

6.6　连续参数马尔可夫链的随机模拟

从上节讨论知道, 对于连续参数马尔可夫链 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$, 当给定 $X(\tau_n)=i_n(n\geqslant 0)$ 时, 停留在 i_n 状态的时间 $\{\theta_n,n\geqslant 1\}$ 条件独立, 且 θ_n 服从参数为 q_{i_n} 的指数分布. 而状态转移概率 $P\{X(\tau_{n+1}=i_{n+1}\big|X(\tau_n)=i_n\}=q_{i_n,i_{n+1}}/q_{i_n}$, 故 X 的轨道可形象表示如图 6.1.

因此对于初始分布为 $\{P_j(0),j\in S\}$, Q 矩阵 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$ 为保守的马尔可夫链 $X=\{X(t),t\geqslant 0\}$ 轨道的模拟可分为以下 3 部分:

(1) 初始分布 $P_i(0)$ 的模拟;

(2) 停留时间 $\{\theta_n,n\geqslant 1\}$ 的模拟;

(3) 状态转移 $\tilde{P}_{ij}=P(X(\tau_{n+1})=j\big|X(\tau_n)=i)=\delta_{ij}+q_{ij}q_i^{-1}$ 的模拟.

具体模拟步骤如下:

(1) 取两串相互独立的同为 $(0,1)$ 上的均匀分布随机变量序列 $\{U_n,n\geqslant 0\}$ 及 $\{V_n,n\geqslant 1\}$;

(2) 若 U_0 满足

$$\sum_{k=0}^{i_0-1}P_k(0)\leqslant U_0<\sum_{k=0}^{i_0}P_k(0),$$

则取 $X(0)=i_0$ 作为初始状态;

(3) 取出 U_1, 令 $\theta_1=-q_{i_0}^{-1}\ln U_1$ 作为 $X(t)$ 停留在 $X(0)=i_0$ 的时间;

(4) 取出 V_1, 若 $i_1 \in S$ 使 V_1 满足

$$\sum_{k=0}^{i_1-1} \frac{q_{i_0 k}}{q_{i_0}} \leqslant V_1 < \sum_{k=0}^{i_1} \frac{q_{i_0 k}}{q_{i_0}},$$

则取 $X(\tau_1) = X(\theta_1) = i_1$;

(5) 取出 U_2, 令 $\theta_2 = -q_{i_1}^{-1} \ln U_2$ 作为 $X(t)$ 停留在 $X(\tau_1) = i_1$ 状态的停留时间，再取 $\tau_2 = \theta_1 + \theta_2$, 作为第二次跳跃时刻;

(6) 取出 V_2, 若 $i_2 \in S$ 使 V_2 满足

$$\sum_{k=0}^{i_2-1} \frac{q_{i_1 k}}{q_{i_1}} \leqslant V_2 < \sum_{k=0}^{i_2} \frac{q_{i_1 k}}{q_{i_1}},$$

则取 $X(\tau_2) = i_2$;

……

继续以上步骤

(7) 取出 U_n, 令 $\theta_n = -q_{i_{n-1}}^{-1} \ln U_n$ 作为 $X(t)$ 停留在 $X(\tau_{n-1}) = i_{n-1}$ 状态的停留时间, 再取 $\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k$;

(8) 取出 V_n, 若 $i_n \in S$ 使 V_n 满足

$$\sum_{k=0}^{i_n-1} \frac{q_{i_{n-1},k}}{q_{i_{n-1}}} \leqslant V_n < \sum_{k=0}^{i_n} \frac{q_{i_{n-1},k}}{q_{i_{n-1}}},$$

则取 $X(\tau_n) = i_n$.

如此继续重复如上步骤，就可模拟 X 的一条轨道，它满足已给的条件：首先

$$P(X(0)=i_0)=P\left(\sum_{k=0}^{i_0-1}P_k(0)\leqslant U_0<\sum_{k=0}^{i_0}P_k(0)\right)=P_{i_0}(0);$$

其次

$$P\{\theta_{n+1}\leqslant t\big|X(\tau_n)=i_n\}=P\{-q_{i_n}^{-1}\ln U_{n+1}\leqslant t\}=1-\exp(-q_{i_n}t);$$

最后

$$\begin{aligned}P\{X(\tau_{n+1})=i_{n+1}\big|X(\tau_n)=i_n\}&=P\left[\sum_{k=0}^{i_{n+1}-1}\frac{q_{i_n,k}}{q_{i_n}}\leqslant V_{n+1}<\sum_{k=0}^{i_{n+1}}\frac{q_{i_n,k}}{q_{i_n}}\right]\\&=\frac{q_{i_n,i_{n+1}}}{q_{i_n}}.\end{aligned}$$