

应用随机过程 第 1 次作业

September 12, 2024

题目 1: 橱内有 n 双鞋子, 从中随机抽出 $2r$ 只鞋子 ($2r < n$), 这些鞋子全都无法配对的概率是多少?

题目 2: 监狱的死囚牢里关押了 A, B, C 三个囚犯。狱长决定赦免三人中的一人, 并且随机地选择了一人作为被赦人。他将自己的选择告诉了监狱看守, 但是要求看守几天内不能泄露被赦人的信息。第二天, A 问看守谁被赦免了, 看守拒绝回答。A 接着又问 B 和 C 两人中哪一个会被处死, 看守告诉他 B 将被处死。

看守的推理: 每名囚犯被赦免的概率都是 $1/3$, 显然 B 和 C 中必有一个要被处死, 所以我并没有向 A 透露关于 A 是否将被处死的任何信息。

A 的推理: 假定 B 将被处死, 那么 A 和 C 中必有一个囚犯将被赦免, 即我被赦免的概率增加到了 $1/2$ 。

请问, 看守的推理和 A 的推理哪个正确? 请详细说明原因。

题目 3: 设 Ω 为一个样本空间,

- (1) 证明: $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$ 是一个 σ 代数;
- (2) 证明: $\mathcal{F} = \{\Omega \text{ 的全体子集, 包括 } \Omega \text{ 本身}\}$ 是一个 σ 代数;
- (3) 证明: 两个 σ 代数的交仍是 σ 代数。

题目 4: 证明: (1) 若 $c_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ 为常数, $X_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ 为随机变量, 则

$$E\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i E X_i.$$

(2) 施瓦茨不等式: 若随机变量 X, Y 的二阶矩存在, 则

$$|E(XY)|^2 \leq E(X^2) E(Y^2).$$