第 3 章　马尔可夫链

3.1　定义与例子

本章讨论离散参数 $T=\{0,1,2,\cdots\}=\mathbb{N}_0$, 状态空间 $S=\{1,2,\cdots,\}$ 可列的马尔可夫过程，通常称为马尔可夫链 (Markov chains), 简称马氏链.

马尔可夫链最初由 Markov 于 1906 年研究而得名. 至今它的理论已发展得较为系统和深入. 它在自然科学、工程技术及经济管理各领域中都有广泛的应用.

定义 3.1.1　如果随机序列 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 对任意 $i_0,i_1,\cdots,i_n,i_{n+1}\in S, n\in\mathbb{N}_0$ 及 $P\{X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}>0$, 有

$$P\{X_{n+1}=i_{n+1}\big|X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_n=i_n\}=P\{X_{n+1}=i_{n+1}\big|X_n=i_n\}. \tag{3.1.1}$$

则称其为**马尔可夫链**.

(3.1.1) 式刻画了马尔可夫链的特性, 称为马尔可夫性 (或无后效性), 简称马氏性.

定义 3.1.2　$\forall i,j\in S$, 称 $P\{X_{n+1}=j\big|X_n=i\}\overset{\triangle}{=}p_{ij}(n)$ 为 n 时刻的一步转移概率. 若对 $\forall\, i,j\in S, p_{ij}(n)\equiv p_{ij}$, 即 p_{ij} 与 n 无关，则称 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 为齐次马尔可夫链. 记 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$, 称 $\boldsymbol{P}$ 为 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 的一步**转移概率矩阵**, 简称为转移矩阵 (transition matrix).

本章仅限于讨论齐次马尔可夫链.

为直观理解马尔可夫性的意义，设想一质点在一直线上的整数点上作随机运动. 以 X_n 表示该质点在时刻 n 的位置，$(X_n=i)$ 表示质点在时刻 n 处在 i 状态 (位置) 这一随机事件. 如果把时刻 n 看作 “现在”, 时刻 $0,1,\cdots,n-1$ 表示 “过去”, 时刻 $n+1$ 表示 “将来”, 那么 (3.1.1) 式表明在已知过去 $X_0=i_0,\cdots X_{n-1}=i_{n-1}$ 及现在 $X_n=i_n$ 的条件下，质点在将来时刻 $n+1$ 处于状态 i_{n+1} (移动到 i_{n+1} 位置) 的条件概率，只依赖于现在发生的事件 $(X_n=i_n)$, 而与过去历史曾发生过什么事件无关. 简言之，在已知 “现在” 的条件下， “将来” 与 “过去” 是独立的. $p_{ij}(n)$ 表示质点在时刻 n 由状态 i 出发，于时刻 $n+1$

转移到状态 j 的条件概率. 而齐次性 $p_{ij}(n) = p_{ij}$ 表示此转移概率与时刻 n 无关.

下面介绍若干例子.

例 1 独立随机变量和的序列

设 $\{\rho_n, n \geqslant 0\}$ 为独立同分布随机变量序列, 且 ρ_n 取值为非负整数, $P\{\rho_n = i\} = a_i, a_i \geqslant 0$, 且 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i = 1$. 令 $X_0 = 0, X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \rho_k$, 则易证 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是一马尔可夫链, 且

$$p_{ij} = \begin{cases} a_{j-i}, & j \geqslant i, \\ 0, & j < i. \end{cases}$$

显然 $\{\rho_n, n \geqslant 0\}$ 本身也是一马尔可夫链.

例 2 直线上的随机游动

(1) 无限制的随机游动　设有一质点在数轴上随机游动, 每隔一单位时间 Δt (设 $\Delta t = 1$) 移动一次, 每次只能向左或向右移动 Δx 单位 (设 $\Delta x = 1$), 或原地不动. 设质点在 0 时刻的位置为 a, 它向右移动的概率为 $p \geqslant 0$, 向左移动的概率为 $q \geqslant 0$, 原地不动的概率为 $r \geqslant 0 (p+q+r=1)$, 且各次移动相互独立, 以 X_n 表示质点经 n 次移动后所处的位置, 则 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是一马尔可夫链, 且 $p_{i,i+1} = p, p_{i,i-1} = q, p_{ii} = r$, 其余 $p_{ij} = 0$.

(2) 带吸收壁的随机游动　设 (1) 中的随机游动限制在 $S = \{0, 1, 2, \cdots, b\}$ 内, 当质点移动到状态 0 或 b 后就永远停留在该位置, 即 $p_{00} = 1, p_{bb} = 1$, 其余 $p_{ij} (1 \leqslant i, j \leqslant b-1)$ 同 (1). 这时序列 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 称为带两个吸收壁 0 和 b 的随机游动, 是一有限状态马尔可夫链.

(3) 带反射壁的随机游动　如 (2) 中的质点到达 0 或 b 后, 下一次移动必返回到 1 或 $b-1$, 即 $p_{01} = 1, p_{b,b-1} = 1, p_{0j} = 0\ (j \neq 1), p_{bj} = 0\ (j \neq b-1)$, 其余同 (1). 称此 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为带反射壁 0 和 b 的随机游动, 则 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是一马尔可夫链.

(4) 艾伦费斯特 (Ehrenfest) 模型　这是一个著名的粒子通过薄膜进行扩散过程的数学模型, 即一质点在状态空间 $S = \{-a, -a+1, \cdots, -1, 0, 1, 2, \cdots, a\}$ 中作随机游动, 且带有两个反射壁 a 和 $-a$, 其一步转移概率是

$$\begin{cases} p_{i,i-1} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{i}{a}\right), \quad p_{i,i+1} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{i}{a}\right), & -a+1 \leqslant i \leqslant a-1, \\ p_{a,a-1} = 1, \quad p_{-a,-a+1} = 1, & \\ p_{ij} = 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由上可看出，当质点位置 $i<0$, 即在原点左边时，$p_{i,i-1}<1/2, p_{i,i+1}>1/2$, 此时质点下一步向右移动比向左移动的概率大，且与离原点的距离成正比. 反之亦然. 当质点在原点时，向左向右的概率相等. 这样的随机游动可作如下两种物理解释.

(1) 考虑一容器内有 $2a$ 个粒子作随机游动. 设想一个薄膜 (界面) 将容器分为相等的左，右两部分 A 和 B. 如用 X_n 表示 n 时刻 B 内的粒子数与 A 内粒子数之差，并假定每次移动只有两种可能，一粒子从左到右或一粒子从右到左 (即同一时刻有两个或两个以上粒子移动的概率为 0, 当 $\Delta t\to 0$ 时作这种假设是合理的), 则 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 可用上述模型来描述.

(2) 设一粒子受一 "弹簧力" 作用，在直线上作随机游动，当粒子偏离原点时，受到一附加的与偏离距离成正比且指向原点的力的作用，从而使向原点移动的概率增大. 用 X_n 表示粒子在时刻 n 的位置，则同样可用上述模型来描述.

例 3　排队模型

(1) 离散排队系统　考虑顾客到达一服务台排队等待服务的情况. 若服务台前至少有一顾客等待，则在一单位时间周期内，服务员完成一个顾客的服务后，该顾客立即离去；若服务台前没有顾客，则服务员空闲. 在一个服务周期内，顾客可以到达，设第 n 个周期到达的顾客数 ξ_n 是一个取值为非负整数的随机变量，且 $\{\xi_n, n\geqslant 1\}$ 相互独立同分布. 在每个周期开始时系统的状态定义为服务台前等待服务的顾客数. 若现在状态为 i, 则下周期的状态 j 应为

$$j=\begin{cases}(i-1)+\xi, & i\geqslant 1,\\ \xi, & i=0,\end{cases}$$

其中 ξ 为该周期内到达的顾客数. 记第 n 周期开始的顾客数为 X_n, 则 $X_{n+1}=(X_n-1)^+ +\xi_n$, 这里 $a^+=\max(a,0)$. 根据马尔可夫链的定义, 容易证明 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 是一个马尔可夫链. 若设 $P\{\xi_n=k\}=a_k, a_k\geqslant 0, \sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k=1$, 则 $\{X_n, n\geqslant 0\}$ 的转移概率为

$$\begin{cases}p_{0j}=a_j, & j\geqslant 0,\\ p_{1j}=a_j, & j\geqslant 0,\\ p_{ij}=a_{j+1-i}, & i>1, j\geqslant i-1,\\ p_{ij}=0, & i>1, j<i-1.\end{cases}$$

直观上显而易见：若 $E\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k > 1$, 则当 n 充分大后，等待顾客的队伍长度将无限增大；若 $E\xi_n < 1$, 则等待服务的顾客队伍长度趋近某种平衡.

(2) $G/M/1$ 排队系统　在 $G/M/1$ 排队系统中，G 表示顾客到达服务台的时间间隔，假设为独立同分布，分布函数为 $G(x)$; M 表示服务时间，假设为独立同指数分布 (设参数为 μ), 且与顾客到达过程相互独立；1 表示单个服务员.

记 X_n 表示第 n 个顾客到达服务台时系统内的顾客数 (包括该顾客), T_n 表示第 n 个顾客到达时刻．易证 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 为一马尔可夫链．下面计算它的转移概率．令

$$\begin{aligned} A &\triangleq \{X_n = i, X_{n+1} = i+1-j\} \qquad (i \geqslant 0, 0 \leqslant j \leqslant i) \\ &= \{X_n = i,\ \text{在}(T_n, T_{n+1}]\text{时间服务完}\, j\, \text{个顾客}\}. \end{aligned}$$

由于各顾客的服务时间相互独立，且服从参数为 μ 的指数分布，所以 $(0,t]$ 时间内服务完的顾客数服从参数为 μ 的泊松分布，即

$$P\{\text{在}(0,t]\text{内服务完}j\text{个顾客}\} = \frac{\mathrm{e}^{-\mu t}(\mu t)^j}{j!}.$$

由此可得

$$P\{A\big|X_n = i\} = \int_0^{+\infty} P\{A\big|X_n = i, T_{n+1}-T_n = t\}\,\mathrm{d}G(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu t}\frac{(\mu t)^j}{j!}\,\mathrm{d}G(t).$$

即

$$p_{i,i+1-j} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu t}\frac{(\mu t)^j}{j!}\,\mathrm{d}G(t), \qquad 1 \leqslant j \leqslant i, \quad i \geqslant 0.$$

p_{i0} 是服务台由有 i 个顾客转为空闲的概率，显然

$$p_{i0} = \sum_{k=i+1}^{\infty}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mu t}\frac{(\mu t)^k}{k!}\,\mathrm{d}G(t) = \int_0^{+\infty}\sum_{k=i+1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu t}\frac{(\mu t)^k}{k!}\,\mathrm{d}G(t), \qquad i \geqslant 0.$$

例 4　离散分支过程

考虑某一群体，假定某一代的每一个个体可以产生 ξ 个下一代个体，其中 ξ 是取值为非负整数的离散随机变量，$P\{\xi = k\} = a_k \geqslant 0, k \geqslant 0, \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. 设某一代各个体产生下一代的个数相互独立同分布且与上代相互独立．记 X_n 表示第 n 代个体的数目，则当 $X_n = 0$ 时，有 $X_{n+1} = 0$; 当 $X_n > 0$ 时，有

$$X_{n+1} = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{X_n},$$

其中 ξ_i 是第 n 代中第 i 个个体产生的下一代的个数. 由此可知, 只要给定 X_n, 那么 X_{n+1} 的分布就完全决定了, 且与以前的 $X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots$ 无关, 故 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是一马尔可夫链. 易知

$$\begin{aligned}p_{ij} =& P\{X_{n+1} = j \big| X_n = i\} = P\{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{X_n} = j \big| X_n = i\} \\ =& P\{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_i = j\} \\ =& \left.\frac{\partial^j \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^i}{j! \partial x^j}\right|_{x=0}.\end{aligned}$$

最后一个等号的证明留给读者 (提示: 用母函数).

下面的定理提供了一个非常有用的获得马尔可夫链的方法, 并可用于检验一随机过程是否为马尔可夫链, 读者可以用前面的有关例子验证.

定理 3.1.1 设随机过程 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 满足:

(1) $X_n = f(X_{n-1}, \xi_n) \quad (n \geqslant 1)$, 其中 $f: S \times S \to S$, 且 ξ_n 取值在 S 上,

(2) $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ 为独立同分布随机变量, 且 X_0 与 $\{\xi_n, n \geqslant 1\}$ 也相互独立,

则 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是马尔可夫链, 而且其一步转移概率为

$$p_{ij} = P(f(i, \xi_1) = j). \tag{3.1.2}$$

证明 设 $n \geqslant 1$, 注意到 ξ_{n+1} 与 $X_0, X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, 有

$$\begin{aligned}&P(X_{n+1} = i_{n+1} \big| X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) \\ &\qquad = P(f(X_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1} \big| X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) \\ &\qquad = P(f(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1} \big| X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) \\ &\qquad = P(f(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1}),\end{aligned}$$

同样地

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \big| X_n = i_n) = P(f(i_n, \xi_{n+1}) = i_{n+1}). \tag{3.1.3}$$

因此

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} \big| X_0 = i_0, \cdots, X_n = i_n) = P(X_{n+1} = i_{n+1} \big| X_n = i_n),$$

即 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是马尔可夫链. 由 (3.1.3) 式知, 一步转移概率为 (3.1.2) 式. $\square$

3.2 转移概率矩阵

设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为马尔可夫链，$\boldsymbol{P} = (p_{ij})$, 其中 $p_{ij} = P\{X_{n+1} = j \big| X_n = i\}$ 是一步转移概率. 显然

$$p_{ij} \geqslant 0,\ i,j \in S;\ \ \sum_{j \in S} p_{ij} = 1,\ i \in S.$$

定义 3.2.1 称矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{S \times S}$ 为**随机矩阵**, 若 $a_{ij} \geqslant 0(i,j \in S)$, 且对 $\forall\, i \in S$, 有 $\sum\limits_{j \in S} a_{ij} = 1$.

显然，$\boldsymbol{P} = (p_{ij})$ 是一随机矩阵.

记

$$\pi_i(n) = P(X_n = i),\ \boldsymbol{\pi}(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n), \cdots, \pi_i(n), \cdots),$$

$\boldsymbol{\pi}(n)$ 表示 n 时刻 X_n 的概率分布向量. 称 $\{\pi_i(0), i \in S\}$ 为马尔可夫链的初始分布. 下面将看到，一个马尔可夫链的特性完全由它的一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 及初始分布向量 $\boldsymbol{\pi}(0)$ 决定.

首先，对任意 $i_0, i_1, \cdots, i_n \in S$, 计算有限维联合分布 $P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n)$. 由概率的乘法公式及马尔可夫性可知

$$\begin{aligned}
&P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n)\\
&\qquad = P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 \big| X_0 = i_0) P(X_2 = i_2 \big| X_0 = i_0, X_1 = i_1) \cdots \times\\
&\qquad\quad\ \ P(X_n = i_n \big| X_0 = i_0, \cdots, X_{n-1} = i_{n-1})\\
&\qquad = P(X_0 = i_0) P(X_1 = i_1 \big| X_0 = i_0) P(X_2 = i_2 \big| X_1 = i_1) \cdots \times\\
&\qquad\quad\ \ P(X_n = i_n \big| X_{n-1} = i_{n-1})\\
&\qquad = \pi_{i_0}(0) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1}, i_n},
\end{aligned}$$

故

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots X_n = i_n) = \pi_{i_0}(0) p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1}, i_n}, \tag{3.2.1}$$

即 $P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \cdots, X_n = i_n)$ 完全由 $\boldsymbol{\pi}(0)$ 及 $\boldsymbol{P}$ 决定.

类似可以证明任意 n 个时刻的联合分布也完全由 $\boldsymbol{\pi}(0)$ 及 $\boldsymbol{P}$ 决定.

其次，有如下定理.

定理 3.2.1

$$\boldsymbol{\pi}(n+1)=\boldsymbol{\pi}(n)\boldsymbol{P}, \tag{3.2.2}$$

$$\boldsymbol{\pi}(n)=\boldsymbol{\pi}(0)\ \boldsymbol{P}^n, \tag{3.2.3}$$

其中 $\boldsymbol{P}^n$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的 n 次幂.

证明 先对事件进行分解

$$(X_{n+1}=j)=\bigcup_{i\in S}(X_n=i,X_{n+1}=j).$$

因为当 $i\neq k$ 时, $(X_n=i)\bigcap(X_n=k)=\varnothing$, 故

$$\begin{aligned}P(X_{n+1}=j)&=\sum_{i\in S}P(X_n=i,X_{n+1}=j)\\&=\sum_{i\in S}P(X_n=i)P(X_{n+1}=j\big|X_n=i)=\sum_{i\in S}\pi_i(n)p_{ij}.\end{aligned}$$

写成向量形式即得

$$\boldsymbol{\pi}(n+1)=\boldsymbol{\pi}(n)\boldsymbol{P}.$$

重复利用 (3.2.2) 式即得 (3.2.3) 式. □

这些事实表明, 马尔可夫链 $\{X_n,n>0\}$ 的概率性质完全由 $\boldsymbol{\pi}(0)$ 与 $\boldsymbol{P}$ 的代数性质决定.

为了下述定理的书写方便, 记 $p_{ij}^{(m)}=P(X_{n+m}=j\big|X_n=i)$ 为 m 步转移概率; $\boldsymbol{P}^{(m)}=(p_{ij}^{(m)})$ 为 m 步转移概率矩阵.

定理 3.2.2 (切普曼—柯尔莫哥洛夫 (Chapman-Kolmogorov) 方程)

$$p_{ij}^{(m+n)}=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(n)}, \tag{3.2.4}$$

或

$$\boldsymbol{P}^{(m+n)}=\boldsymbol{P}^{m+n}=\boldsymbol{P}^m\ \boldsymbol{P}^n=\boldsymbol{P}^{(m)}\ \boldsymbol{P}^{(n)}. \tag{3.2.5}$$

证明 因

$$(X_0=i,X_{m+n}=j)=\bigcup_{k\in S}(X_0=i,X_m=k,X_{n+m}=j),$$

故

$$\begin{aligned}P(X_{m+n}=j\big|X_0=i)&=\sum_{k\in S}P(X_0=i,X_m=k,X_{m+n}=j)/P(X_0=i)\\&=\sum_{k\in S}P(X_m=k\big|X_0=i)\ P(X_{m+n}=j\big|X_0=i,X_m=k)\\&=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}P(X_{m+n}=j\big|X_m=k)\qquad(\text{由马氏性})\\&=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}\ p_{kj}^{(n)},\end{aligned}$$

即

$$p_{ij}^{(m+n)}=\sum_{k\in S}p_{ik}^{(m)}p_{kj}^{(n)}.$$

写成向量形式即

$$\boldsymbol{P}^{(m+n)}=\boldsymbol{P}^{(m)}\ \boldsymbol{P}^{(n)}.$$

再注意到 $\boldsymbol{P}^{(1)}=\boldsymbol{P}$, 将 $m=n=1$ 代入上式得 $\boldsymbol{P}^{(2)}=\boldsymbol{P}\ \boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^2$, 从而得到 (3.2.4) 式及 (3.2.5) 式. □

由上可知，一个马尔可夫链运动规律的概率特性取决于它的转移概率矩阵特性. 这样，研究前者就可以转化为研究后者.

(3.2.4) 式简称 C-K 方程. 显然 $\boldsymbol{P}^{(m)}=\big(p_{ij}^{(m)}\big)$ 是一随机矩阵.

3.3 状态的分类

这一节我们将对马尔可夫链的状态按其概率特性进行分类，并讨论这些分类的判断准则.

先举例说明.

例 1 设系统有三种可能状态 $S=\{1,2,3\}$. “1” 表示系统运行良好，“2” 表示运行正常，“3” 表示系统失效. 以 X_n 表示系统在时刻 n 的状态，并设 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是一马尔可夫链. 在没有维修及更换条件下，其自然转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}17/20&2/20&1/20\\0&9/10&1/10\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

由 $\boldsymbol{P}$ 可以看出，从 “1” 或 “2” 状态出发经有限次转移后总要到达 “3” 状态，而一旦到达 “3” 则永远停在 “3”. 显然状态 “1”, “2” 与状态 “3” 概率性质不同. 由此引入如下定义：

定义 3.3.1　称状态 $i \in S$ 为**吸收态**, 若 $p_{ii} = 1$.

定义 3.3.2　对 $i, j \in S$, 若存在 $n \in \mathbb{N}$, 使 $p_{ij}^{(n)} > 0$, 则称自状态 i 出发可达状态 j, 记为 $i \to j$. 如果 $i \to j$ 且 $j \to i$, 则称 i, j **相通**, 记为 $i \leftrightarrow j$. 若一马尔可夫链的任意两个状态都相通，则称为不可约链.

定义 3.3.3　**首达时间**为

$$T_{ij} = \min\{n: n \geqslant 1, X_n = j, X_0 = i\}.$$

若右边为空集，则令 $T_{ij} = \infty$.

T_{ij} 表示从 i 出发首次到达 j 的时间；T_{ii} 表示从 i 出发首次回到 i 的时间.

定义 3.3.4　**首达概率**为

$$f_{ij}^{(n)} = P\{T_{ij} = n \big| X_0 = i\} = P\{X_n = j, X_k \neq j, 1 \leqslant k \leqslant n-1 \big| X_0 = i\}.$$

$f_{ij}^{(n)}$ 表示从 i 出发经 n 步首次到达 j 的概率. 而 $f_{ij} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 表示由 i 出发，经有限步首次到达 j 的概率.

定义 3.3.5　若 $f_{ii} = 1$, 称 i 为**常返状态**; 若 $f_{ii} < 1$, 称 i 为**非常返状态** (或称为瞬时状态).

本节例 1 中，T_{13} 表示系统的工作寿命，因此

$$f_{13}^{(1)} = P\{T_{13} = 1 \big| X_0 = 1\} = p_{13} = \frac{1}{20}.$$

因

$$(T_{13} = 2) = (1 \xrightarrow{(1)} 1 \xrightarrow{(1)} 3) \bigcup (1 \xrightarrow{(1)} 2 \xrightarrow{(1)} 3),$$

这里 $(1 \xrightarrow{(1)} 1 \xrightarrow{(1)} 3)$ 表示从 “1” 出发经 1 步到 “1”, 再经 1 步到 “3”. 故

$$f_{13}^{(2)} = p_{11}\, p_{13} + p_{12}\, p_{23} = \frac{21}{400},$$

$$\cdots$$

$P(T_{13} \geqslant n)$ 表示系统在 $[0, n]$ 内运行的可靠性. 故研究 $f_{ij}^{(n)}$ 及 T_{ij} 的特性是颇有意义的.

显然，该系统至多经有限步总会被吸收态吸收，因此由概率背景可直观地得到

$$\lim_{n\to+\infty}\boldsymbol{P}^{(n)}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

由此人们想到了利用概率背景来解决数学分析与代数问题等，这就是现代随机分析所研究的内容.

当 $f_{ii}=1$ 时，$\{f_{ii}^{(n)},n\geqslant 1\}$ 是一概率分布，有以下定义：

定义 3.3.6 如果 $f_{ii}=1$, 记 $\mu_i=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,f_{ii}^{(n)}$, 则 μ_i 表示从 i 出发再回到 i 的平均回转时间. 若 $\mu_i<\infty$, 称 i 为**正常返态**; 若 $\mu_i=\infty$, 称 i 为**零常返状态**.

定义 3.3.7 如果集合 $\{n\colon n\geqslant 1,p_{ii}^{(n)}>0\}\neq\varnothing$, 称该数集的最大公约数 $d(i)$ 为状态 i 的**周期**. 若 $d(i)>1$, 称 i 为周期的，若 $d(i)=1$, 称 i 为**非周期的**.

例如在 3.1 节的例 2 (1) 无限制随机游动中，当 $r=0,0<p<1$ 时，$S=\{\cdots,-1,0,1,2,\cdots\}$，$\{n\colon n\geqslant 1,p_{00}^{(n)}>0\}=\{2,4,6,\cdots\}$. 即状态 0 的 $d(0)=2$, 即从 0 状态出发需经 2 的整数倍次游动才能回到 0 状态，故它是周期的，且周期为 2. 当 $p,q,r>0$ 且 $p+q+r=1$ 时，$\{n\colon n\geqslant 1,p_{00}^{(n)}>0\}=\{1,2,3,\cdots\}$，$d(0)=1$, 故此时 0 状态是非周期的.

定义 3.3.8 若状态 i 为正常返态的且非周期的，则称 i 为**遍历状态**.

例 2 设马尔可夫链的 $S=\{1,2,3,4\}$, 转移概率矩阵为 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0&0\\1&0&0&0\\0&1/3&2/3&0\\1/2&0&1/2&0\end{pmatrix}$.

因为

$$\begin{aligned}&f_{44}^{(n)}=0,n\geqslant 1,\ f_{44}=0<1,\\&f_{33}^{(1)}=\frac{2}{3},\ f_{33}^{(n)}=0,n\geqslant 2,\ f_{33}=\frac{2}{3}<1,\end{aligned}$$

故状态 4 和 3 非常返；由

$$\begin{aligned}
f_{11} =& f_{11}^{(1)} + f_{11}^{(2)} = 1,\\
f_{22} =& \sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1,\\
\mu_1 =& \sum_{n=1}^{\infty} n\ f_{11}^{(n)} = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < \infty,\\
\mu_2 =& \sum_{n=1}^{\infty} n\ f_{22}^{(n)} = 1 \times 0 + 2 \times \frac{1}{2} + \cdots + n \times \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 3 < \infty,
\end{aligned}$$

故状态 1 和 2 都是正常返状态，且易知它们是非周期的，从而是遍历状态.

下面讨论各状态的若干性质以及如何利用转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 来判断是否为常返状态. $p_{ij}^{(n)}$ 与 $f_{ij}^{(n)}$ 有以下关系.

定理 3.3.1　对 $\forall i, j \in S, n \geqslant 1$, 有：

(1)
$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}; \tag{3.3.1}$$

(2)
$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} I_{(n>1)} + p_{ij} I_{(n=1)}; \tag{3.3.2}$$

(3)
$$i \to j \Leftrightarrow f_{ij} > 0, \tag{3.3.3}$$

$$i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0 \text{ 且 } f_{ji} > 0. \tag{3.3.4}$$

证明　(1) 因为 $\{X_0 = i, X_n = j\} \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} (T_{ij} = l)$, 故

$$\begin{aligned}
\{X_0 = i, X_n = j\} =& \{X_0 = i, X_n = j\} \bigcap \Big\{ \bigcup_{l=1}^{\infty} (T_{ij} = l) \Big\}\\
=& \bigcup_{l=1}^{n} \{X_0 = i, X_n = j, T_{ij} = l\} \bigcup \Big\{ \bigcup_{l>n} (X_0 = i, X_n = j, T_{ij} = l) \Big\},
\end{aligned}$$

而

$$\bigcup_{l>n} \{X_0 = i, X_n = j, T_{ij} = l\} = \varnothing,$$

所以

$$\{X_0 = i, X_n = j\} = \bigcup_{l=1}^{n} \{X_0 = i, X_n = j, T_{ij} = l\}.$$

于是

$$\begin{aligned}&P(X_0=i)P(X_n=j\big|X_0=i)\\&\quad=\sum_{l=1}^{n}P(X_0=i)\ P(T_{ij}=l\big|X_0=i)\ P(X_n=j\big|X_0=i,T_{ij}=l),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&P(X_n=j\big|X_0=i)\\&\quad=\sum_{l=1}^{n}P(T_{ij}=l\big|X_0=i)\ P(X_n=j\big|X_0=i,X_k\neq j,1\leqslant k\leqslant l-1,X_l=j)\\&\quad=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}\ P(X_n=j\big|X_l=j)\qquad(\text{由马氏性})\\&\quad=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}\ p_{jj}^{(n-l)},\end{aligned}$$

即

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_{l=1}^{n}f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)}.$$

(2) 当 $n=1$ 时，显然有 $f_{ij}^{(1)}=p_{ij}$. 下面考虑 $n>1$ 的情况.

由于

$$\{T_{ij}=n,X_0=i\}=\bigcup_{k\neq j}\{X_0=i,X_1=k,X_l\neq j,2\leqslant l\leqslant n-1,X_n=j\},$$

因此有

$$\begin{aligned}P(T_{ij}=n\big|X_0=i)=&\sum_{k\neq j}P(X_1=k\big|X_0=i)\times\\&P(X_n=j\big|X_1=k,X_0=i,X_l\neq j,2\leqslant l\leqslant n-1).\end{aligned}$$

由马尔可夫性得

$$f_{ij}^{(n)}=\sum_{k\neq j}p_{ik}f_{kj}^{(n-1)}.$$

综上，(3.3.2) 式成立.

(3) 当 $i \to j$ 时，$\exists n>0$, 使 $p_{ij}^{(n)}>0$. 取 $n'=\min\{n: p_{ij}^{(n)}>0\}$, 则

$$f_{ij}^{(n')}=P\{T_{ij}=n' \big| X_0=i\}=p_{ij}^{(n')}>0.$$

因此

$$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \geqslant f_{ij}^{(n')}>0,$$

即 $i \to j$ 时，$f_{ij}>0$.

反之，当 $f_{ij}>0$ 时，$\exists n'$, 使 $f_{ij}^{(n')}>0$, 从而 $p_{ij}^{(n')}>0$, 得 $i \to j$. 综上所述

$$i \to j \ \Leftrightarrow \ f_{ij}>0.$$

同理 $j \to i$ 时，有 $j \to i \Leftrightarrow f_{ji}>0$, 故

$$i \leftrightarrow j \ \Leftrightarrow \ f_{ij}>0, \text{且}\, f_{ji}>0. \qquad \square$$

定理 3.3.2 状态 i 为常返状态，当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\infty; \tag{3.3.5}$$

状态 i 为非常返状态，当且仅当

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{1-f_{ii}}<\infty. \tag{3.3.6}$$

证明 约定 $p_{ii}^{(0)}=1, f_{ii}^{(0)}=0$. 由 (3.3.1) 式有

$$p_{ii}^{(n)}=\sum_{l=0}^{n} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)}.$$

令 $\{p_{ii}^{(n)}\}, \{f_{ii}^{(n)}\}(i \geqslant 0)$ 的母函数分别为 $P(\rho), F(\rho)$, 即

$$P(\rho)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rho^n, \quad F(\rho)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} \rho^n.$$

又

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rho^n &=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{n} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)}\right) \rho^n=\left(\sum_{l=1}^{\infty} f_{ii}^{(l)} \rho^l\right)\left(\sum_{n=l}^{\infty} p_{ii}^{(n-l)} \rho^{n-l}\right) \\ &=\big(F(\rho)-f_{ii}^{(0)}\big) \sum_{n'=0}^{\infty} p_{ii}^{(n')} \rho^{n'}=F(\rho)\ P(\rho) \qquad \big(\text{因为} f_{ii}^{(0)}=0\big).\end{aligned}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rho^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \rho^n - p_{ii}^{(0)} \rho^0 = P(\rho) - 1,$$

因此

$$P(\rho) - 1 = P(\rho)\ F(\rho).$$

注意到，当 $0 \leqslant \rho < 1$ 时，$F(\rho) < f_{ii} \leqslant 1$, 故

$$P(\rho) = \frac{1}{1 - F(\rho)},\ 0 \leqslant \rho < 1. \tag{3.3.7}$$

又因对一切 $0 \leqslant \rho < 1$ 及正整数 N, 有

$$\sum_{n=0}^{N} p_{ii}^{(n)} \rho^n \leqslant P(\rho) \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}, \tag{3.3.8}$$

且当 $\rho \uparrow 1$ 时 $P(\rho)$ 不减，故在 (3.3.8) 式中先令 $\rho \uparrow 1$, 后令 $N \to \infty$ 可得

$$\lim_{\rho \to 1^-} P(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}. \tag{3.3.9}$$

同理可得

$$\lim_{\rho \to 1^-} F(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii}. \tag{3.3.10}$$

于是在 (3.3.7) 式中两边令 $\rho \uparrow 1$, 由 (3.3.9) 式和 (3.3.10) 式便可得定理的结论.

□

为解释定理 3.3.2 的直观意义，令

$$I_n(i) = \begin{cases} 1, & X_n = i, \\ 0, & X_n \neq i, \end{cases}$$

及 $S(i) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n(i)$. 则 $S(i)$ 表示马尔可夫链 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 到达 i 的次数. 于是

$$E\{S(i) \big| X_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} E(I_n(i) \big| X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{X_n = i \big| X_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}. \tag{3.3.11}$$

可见 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ 表示由 i 出发返回到 i 的平均次数. 当 i 为常返状态时, 返回 i 的平均次数为无限多次，反之亦然. 当 i 为非常返状态时，再回到 i 的平均次数至多有限次.

推论 1 若 j 为非常返状态，则对任意 $i \in S$, 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty, \tag{3.3.12}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0. \tag{3.3.13}$$

证明 由 (3.3.1) 式两边对 n 求和得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} = \sum_{l=1}^{N}\sum_{n=l}^{N} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}\\ &= \sum_{l=1}^{N} f_{ij}^{(l)} \sum_{m=0}^{N-l} p_{jj}^{(m)} \leqslant \sum_{l=1}^{N} f_{ij}^{(l)} \sum_{n=0}^{N} p_{jj}^{(n)}.\end{aligned}$$

令 $N \to \infty$, 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}\right) \leqslant 1+\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty,$$

由此即得 (3.3.12) 式. 又因为 $p_{ij}^{(n)} \geqslant 0$, 所以 (3.3.13) 式也成立. □

推论 2 若 j 为常返状态，则

(1) 当 $i \to j$ 时，有

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = \infty. \tag{3.3.14}$$

(2) 当 $i \not\to j$ 时 (不可达), 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 0. \tag{3.3.15}$$

证明 (3.3.15) 式显然成立，下面证 (3.3.14) 式. 因 $i \to j$, 故 $\exists m > 0$, 使 $p_{ij}^{(m)} > 0$. 而

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \geqslant p_{ij}^{(m)}\ p_{jj}^{(n)},$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(m+n)} \geqslant p_{ij}^{(m)} \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty,$$

此即 (3.3.14) 式. □

下面再从概率意义考察常返状态的性质. 记

$$\begin{aligned} S_m(j) &= \sum_{n=m}^{\infty} I_n(j), \\ g_{ij} &= P\{S_1(j) = +\infty \big| X_0 = i\} = P\{S_{m+1}(j) = +\infty \big| X_m = i\}. \end{aligned}$$

事件 $\{S_m(j) = +\infty\}$ 表示从时刻 m 起系统无穷多次到达状态 j. 有下面的定理.

定理 3.3.3　对任意 $i \in S$, 有

$$g_{ij} = \begin{cases} f_{ij}, & \text{如 } j \text{ 为常返状态}, \\ 0, & \text{如 } j \text{ 为非常返状态}. \end{cases} \tag{3.3.16}$$

证明　因 $\{S_m(j) \geqslant k+1\} \subset \{S_m(j) \geqslant k\}$, 故

$$(S_1(j) = +\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{S_1(j) \geqslant k\} = \lim_{k\to\infty} \{S_1(j) \geqslant k\}.$$

由概率的连续性可得

$$\begin{aligned} g_{ij} &= P\{S_1(j) = +\infty \big| X_0 = i\} \\ &= P\Big\{\bigcap_{k=1}^{\infty} (S_1(j) \geqslant k) \big| X_0 = i\Big\} \\ &= \lim_{k\to\infty} P\{S_1(j) \geqslant k \big| X_0 = i\}. \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

又

$$\{S_1(j) \geqslant k+1, X_0 = i\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \{T_{ij} = l, S_1(j) \geqslant k+1\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \{T_{ij} = l, S_{l+1}(j) \geqslant k\},$$

故

$$\begin{aligned}
&P\{S_1(j)\geqslant k+1\big|X_0=i\}\\
&\quad=\sum_{l=1}^{\infty}P\{T_{ij}=l\big|X_0=i\}P\{S_{l+1}(j)\geqslant k\big|X_0=i,T_{ij}=l\}\\
&\quad=\sum_{l=1}^{\infty}f_{ij}^{(l)}P\{S_{l+1}(j)\geqslant k\big|X_0=i,X_m\neq j,1\leqslant m\leqslant l-1,X_l=j)\\
&\quad=\sum_{l=1}^{\infty}f_{ij}^{(l)}P\{S_{l+1}(j)\geqslant k\big|X_l=j\}\qquad(\text{由马氏性})\\
&\quad=\sum_{l=1}^{\infty}f_{ij}^{(l)}P\{S_1(j)\geqslant k\big|X_0=j\},\qquad(\text{由时齐性})
\end{aligned}$$

即

$$P\{S_1(j)\geqslant k+1\big|X_0=i\}=f_{ij}P\{S_1(j)\geqslant k\big|X_0=j\}.\tag{3.3.18}$$

反复利用上式可得

$$P\{S_1(j)\geqslant k+1\big|X_0=i\}=f_{ij}(f_{jj})^k.\tag{3.3.19}$$

令 $k\to\infty$, 若 j 为常返状态，即 $f_{jj}=1$, 则由 (3.3.17) 式及 (3.3.19) 式得

$$g_{ij}=f_{ij},$$

若 j 为非常返状态，即 $f_{jj}<1$, 则 $g_{ij}=0$. □

定理 3.3.4 状态 i 为常返状态，当且仅当 $g_{ii}=1$; 若状态 i 为非常返状态，则 $g_{ii}=0$.

证明 将 (3.3.16) 式中 j 换成 i 即可得. □

定理 3.3.4 的说明：若 i 为常返状态，则系统从 i 出发以概率 1 无穷多次返回 i, 即从 i 出发的几乎所有样本轨道无穷多次回到 i . 若 i 为非常返状态，则从 i 出发几乎所有样本轨道至多有限次回到 i.

进一步地，若 i 为常返状态，如何判别它是零常返状态或遍历状态？有以下的重要定理.

定理 3.3.5 设 j 为常返状态,则对于任意的 $i\in S$, 有 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$.

下面利用实分析的一个结果，来证明该定理.

引理 3.3.1 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 在 $0 \leqslant z < 1$ 上收敛，a_n 非负，记

$$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad 0 \leqslant z < 1,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k=\lim_{z\to 1-0}(1-z)A(z). \tag{3.3.21}$$

这个引理由 Hardy 与 Littlewood 给出，有兴趣的读者可参见 [13,19].

定理 3.3.5 的证明 记 $F_{ij}(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n$, 把 $P_{ij}(z)=\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^n$ 作为引理 3.3.1 中的 $A(z)$, 于是由 (3.3.21) 式有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)}=\lim_{z\to 1-0}(1-z)P_{ij}(z).$$

由 (3.3.1) 式及 (3.3.7) 式，对 $i \neq j$ 有

$$P_{ij}(z)=F_{ij}(z)P_{jj}(z)=\frac{F_{ij}(z)}{1-F_{jj}(z)}.$$

因此，对 $i \neq j$ 有

$$\lim_{z\to 1-0}(1-z)P_{ij}(z)=\lim_{z\to 1-0}\frac{1-z}{1-F_{jj}(z)}\ F_{ij}(z).$$

因为 $\lim\limits_{z\to 1-0}F_{ij}(z)=F_{ij}(1)=f_{ij}$, 而由洛必达法则有

$$\lim_{z\to 1-0}\frac{1-z}{1-F_{jj}(z)}=\lim_{z\to 1-0}\frac{-1}{-F_{jj}'(z)}=\frac{1}{F_{jj}'(1)},$$

又由于

$$F_{jj}'(1)=\sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)}=\mu_j.$$

所以

$$\lim_{z\to 1-0}(1-z)P_{ij}(z)=\frac{f_{ij}}{\mu_j}.$$

当 $i=j$ 时，利用 (3.3.7) 式，类似可证，此时， $f_{jj}=1$. □

由 Secero 可和定理可知，若极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$ 存在，则有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} p_{ii}^{(k)}.$$

由此及定理 3.3.5 不难得到 (注：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a$. 可参考文献 [25] 中的第 1 章)：

定理 3.3.6 设 i 为常返状态且周期为 d, 则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}, \tag{3.3.22}$$

其中 μ_i 为 i 的平均回转时间．当 $\mu_i = +\infty$ 时，理解为 $\dfrac{d}{\mu_i} = 0$.

证明 由文献 [4] 知, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)}$ 存在 (此处从略), 然后类似定理 3.3.5 的证明，只须令 $z = x^d$, 对 $P_{ij}(z)$ 用引理 3.3.1 便可证得. □

定理 3.3.7 设 i 为常返状态，则

(1) i 为零常返状态，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0;$$

(2) i 为遍历状态，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0. \tag{3.3.23}$$

证明 (1) 若 i 为零常返状态，则由 (3.3.22) 式知 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = 0$, 由周期的定义知，当 n 不能被 d 整除 (即 $n \neq 0 \bmod d$) 时，$p_{ii}^{(n)} = 0$, 故有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0.$$

反之，若 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$, 假设 i 是正常返状态，由 (3.3.22) 式得矛盾的结果 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} > 0$, 故 i 是零常返状态.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \dfrac{1}{\mu_i} > 0$, 由 (1) 知 i 为正常返状态，且 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \dfrac{1}{\mu_i}$, 与 (3.3.22) 式比较得 $d = 1$, 故 i 为遍历状态．反之，由定理 3.3.6 即得. □

状态相通关系为等价关系，因为具有

(1) 自反性：$i \leftrightarrow i$. 这由下面定义可得

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i, \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

(2) 对称性：若 $i \leftrightarrow j$, 则 $j \leftrightarrow i$.

(3) 传递性：若 $i \leftrightarrow j$ 且 $j \leftrightarrow k$, 则 $i \leftrightarrow k$.

传递性的证明如下：由于 $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k$, 则 $\exists m, n$, 使 $p_{ij}^{(m)} > 0, p_{jk}^{(n)} > 0$, 则

$$p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{l \in S} p_{il}^{(m)} p_{lk}^{(n)} \geqslant p_{ij}^{(m)}\ p_{jk}^{(n)} > 0.$$

故 $i \to k$. 同理可证 $k \to i$. 故 $i \leftrightarrow k$. □

利用等价关系，可以把马尔可夫链的状态空间分为若干等价类．在同一等价类内的状态彼此相通；在不同的等价类中的状态不可能彼此相通．然而，从某一类出发以正的概率到达另一类的情形是可能的．由上知对于不可约链，又有以下的定义：

定义 3.3.9 如一马尔可夫链的所有状态属于同一等价类，则称它是**不可约链**.

为说明这些概念，考虑下面几个例子.

例 3

(1)

$$S = \{1, 2, 3\}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix};$$

(2) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$

(3) $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

利用各种情况下的状态转移图进行判断.

(1) 由于所有状态相通，组成一等价类. 故该链是不可约链.

(2) 此链可分为两个等价类 $\{1,2\}$ 及 $\{3,4,5\}$ (3) 此链可分为 3 个等价类 $\{1,2,3\},\{4\}$ 及 $\{5\}$(见图 3.4). 由 $\{1,2,3\}$ 可进入 $\{4\}$ 或 $\{5\}$, 反之则不行.

定理 3.3.8 如果 i 为常返状态，且 $i \to j$, 则 j 必为常返状态，且 $f_{ji}=1$.

证明 先证对 $\forall i,j \in S$, 有 $0 \leqslant g_{ij} \leqslant f_{ij}$. 这是因为 $(X_0=i, S_1(j) \geqslant 1) = (X_0=i, T_{ij}<\infty)$, 且 $\forall k \geqslant 1$, $(S_1(j) \geqslant k) \subset (S_1(j) \geqslant 1)$, 故

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}(X_0=i, S_1(j) \geqslant k) \subset (X_0=i, T_{ij}<\infty),$$

因而

$$\{X_0=i, S_1(j)=+\infty\} = \bigcap_{k=1}^{\infty}(X_0=i, S_1(j) \geqslant k) \subset (X_0=i, T_{ij}<\infty),$$

故

$$0 \leqslant g_{ij} = P(S_1(j)=+\infty \big| X_0=i) \leqslant P(T_{ij}<+\infty \big| X_0=i) = f_{ij}.$$

因 $i \to j$, 存在 $m>0$, 使 $p_{ij}^{(m)}>0$, 又对 $\forall h \in S$,

$$\{X_0=i, S_1(h)=+\infty\} = \bigcup_{k \in S}\{X_0=i, X_m=k, S_{m+1}(h)=+\infty\},$$

有

$$g_{ih} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} P(S_{m+1}(h)=+\infty \big| X_0=i, X_m=k) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} g_{kh}.$$

又因 i 为常返状态，$f_{ii}=1$, 故

$$0 = 1-f_{ii} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} - \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} g_{ki} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)}(1-g_{ki}) \geqslant p_{ij}^{(m)}(1-g_{ji}) \geqslant 0.$$

从而 $1=g_{ji} \leqslant f_{ji} \leqslant 1$, 得 $f_{ji}=1$, 故 $j \to i$.

设 $p_{ji}^{(r)}=\alpha>0, p_{ij}^{(s)}=\beta>0$. 由 C-K 方程知，对任意 $n \geqslant 0$, 有

$$p_{jj}^{(r+n+s)} \geqslant p_{ji}^{(r)}\ p_{ii}^{(n)}\ p_{ij}^{(s)} = \alpha\ \beta\ p_{ii}^{(n)}. \tag{3.3.24}$$

由 i 为常返状态及定理 3.3.2, 有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}=\infty$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = +\infty,$$

故 j 为常返状态. □

对于相通的状态，有：

定理 3.3.9 若 $i \leftrightarrow j$, 则

(1) i 与 j 同为常返状态或非常返状态. 若为常返状态，则它们同为正常返状态或同为零常返状态；

(2) i 与 j 或有相同的周期，或同为非周期.

证明 (1) 的前一部分是定理 3.3.8 的直接推论. 现设 j 为零常返状态，由定理 3.3.7 有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$. 由 (3.3.24) 式得 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$, 故 i 也是零常返状态.

同理可证，若 i 为零常返状态，由

$$p_{ii}^{(r+n+s)} \geqslant p_{ij}^{(s)}\ p_{jj}^{(n)}\ p_{ji}^{(r)} = \beta\ \alpha\ p_{jj}^{(n)}, \tag{3.3.25}$$

可知 j 也是零常返状态.

(2) 仍令 $p_{ji}^{(r)} = \alpha > 0$, $p_{ij}^{(s)} = \beta > 0$, 设 i 的周期为 d, j 的周期为 t. 因此对 $\forall\, m \in \mathbb{N}, \exists n = mt$, 使得 $p_{jj}^{(n)} > 0$. 由 (3.3.25) 式知，$p_{ii}^{(n+r+s)} > 0$, 从而 $n+r+s$ 能被 d 整除. 但 $p_{ii}^{(r+s)} \geqslant p_{ij}^{(s)}\ p_{ji}^{(r)} = \alpha\ \beta > 0$, 所以 $r+s$ 也能被 d 整除. 可见，n 能被 d 整除，故 t 能被 d 整除. 反之，利用 (3.3.24) 式类似可推得 d 能被 t 整除，从而 $t = d$. □

该定理说明，对相通的状态，因是同类型，故只需选出其中之一较容易判别的状态即可.

例 4 设马尔可夫链 $S = \{1, 2, 3, \cdots\}$, 转移概率为 $p_{11} = \dfrac{1}{2}, p_{ii+1} = \dfrac{1}{2}, p_{i1} = \dfrac{1}{2}, i \in S$. 分析状态 1.

$$f_{11}^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad f_{11}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad f_{11}^{(3)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \quad \cdots, \quad f_{11}^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

故 $f_{11} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 1$, 所以 “1” 是常返状态. 又 $\mu_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \infty$, 所以 “1” 是正常返状态. 再由 $p_{11}^{(1)} = \dfrac{1}{2} > 0$, 知 “1” 是非周期的. 从而 “1” 是遍历状态. 对其他 $i \neq 1$, 因 $i \leftrightarrow 1$, 故 i 也是遍历状态 (若求 $f_{ii}^{(n)}$ 则较麻烦) .

关于常返状态的判断，可以总结为以下重要定理：

定理 3.3.10 下列命题等价：

(1) i 为常返状态;

(2) $P\Big\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(X_n=i)\Big|X_0=i\Big\}=1$;

(3) $P(S_1(i)=+\infty\big|X_0=i)=1$;

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=+\infty$;

(5) $E\{S_1(i)\big|X_0=i\}=+\infty$.

证明 (1) $\Longleftrightarrow$ (2): 由于 $f_{ii}=P(T_{ii}<\infty\big|X_0=i)=1$, 及

$$\begin{aligned}\{T_{ii}<\infty\}&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{T_{ii}=n\}\\&=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_0=i,X_l\neq i,0<l<n,X_n=i\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_0=1,X_n=i\},\end{aligned}$$

因此

$$P\Big\{\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n=i)\Big|X_0=i\Big\}=P(T_{ii}<\infty\big|X_0=i)=f_{ii}=1,$$

即 (1) 与 (2) 等价.

(1) $\Longleftrightarrow$ (3): 见定理 3.3.4 .

(1) $\Longleftrightarrow$ (4): 见定理 3.3.2 .

(4) $\Longleftrightarrow$ (5): 由 (3.3.11) 式即得. □

读者可自己对以上结论给出直观解释.

例 5 直线上无限制随机游动

设 $\{Y_n,n\geqslant 1\}$ 独立同分布，$Y_0=0$, $P(Y_1=1)=p, P(Y_1=-1)=q$, 令 $X_0=0$, $X_n=\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i$, 则 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 称为直线上无限制随机游动. 易知该马尔可夫链的全体状态 $\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$ 构成一个类. 问题是：它是常返类还是非常返类？为此，只需选一个代表 i 即可.

下面来计算 $\sum\limits_{n}p_{ii}^{(n)}$, 据此来判别 i 是否为常返状态. 易知

$$p_{ii}^{(2n-1)}=0,$$

而

$$p_{ii}^{(2n)}=\mathrm{C}_{2n}^{n}p^nq^n. \tag{3.3.26}$$

考虑母函数

$$
\begin{aligned}
P_{ii}(z)=&\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{C}_{2n}^{n}p^nq^nz^{2n}\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!n!}(pqz^2)^n\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n}(-1)^n}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(pqz^2)^n\\
=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(-4pqz^2)^n\\
=&(1-4pqz^2)^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

从而有

$$
\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=P_{ii}(1)=\lim_{z\to 1-0}P_{ii}(z)=\lim_{z\to 1-0}(1-4pqz^2)^{-\frac{1}{2}}=\begin{cases}\infty, & p=1/2,\\ \text{有限}, & p\neq 1/2.\end{cases}
$$

由此知，当 $p=1/2$ 时 i 是常返状态，从而全体状态构成单一的类是常返的；当 $p\neq 1/2$ 时，链是非常返的.

例 6 现在我们讨论平面上的对称随机游动. 质点的位置是平面上的整数格点 (坐标为整数的点). 每个位置有 4 个相邻的位置，质点各以 $\dfrac{1}{4}$ 的概率转移到这 4 个相邻位置中的每一个. 易见平面上的对称游动是周期为 2 的不可约链.

计算质点经过 $2n$ 步仍回原位置的概率 u_n. 这时质点必须与横坐标平行地向右移动 k 步，向左也移动 k 步，与纵坐标轴平行的向上移动 l 步，向下也移动 l 步，且 $k+l=n$. 因此

$$
u_n=\frac{1}{4^{2n}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n)!}{[k!(n-k)!]^2}=\frac{1}{4^{2n}}\mathrm{C}_{2n}^{n}\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{C}_n^k)^2=\frac{1}{4^{2n}}(\mathrm{C}_{2n}^{n})^2\simeq\frac{1}{\pi n},
$$

由于 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$, 平面上的对称的随机游动也是常返的.

再讨论空间中的对称随机游动. 这时质点的位置是空间中的整数格点，每个位置有 6 个相邻的位置. 质点各以 $\dfrac{1}{6}$ 的概率转移到 6 个相邻位置中的每一

个. 同样地，空间中的对称随机游动也是周期为 2 的不可约链.

质点经过 $2n$ 步返回原位置的概率 u_n, 可类似地计算：

$$\begin{aligned}u_n =&\frac{1}{6^{2n}}\sum_{j,k\geqslant 0,j+k\leqslant n}\frac{(2n)!}{[j!k!(n-j-k)!]^2}\\ =&\frac{1}{2^{2n}}\mathrm{C}_{2n}^{n}\sum_{j,k\geqslant 0,j+k\leqslant n}\left[\frac{1}{3^n}\frac{(n)!}{j!k!(n-j-k)!}\right]^2\\ \leqslant&\frac{1}{2^{2n}}\max_{j,k\geqslant 0,j+k\leqslant n}\left[\frac{1}{3^n}\frac{(n)!}{j!k!(n-j-k)!}\right]^2.\end{aligned}$$

这里利用了三项式定理

$$\sum_{j,k\geqslant 0,j+k\leqslant n}\left[\frac{1}{3^n}\frac{(n)!}{j!k!(n-j-k)!}\right]=1,$$

三项分布的最大项在 j 与 k 最接近 $\frac{n}{3}$ 时达到. 仍由斯特林公式可知，这最大项与 $\frac{1}{n}$ 同阶，从而 u_n 的阶数不超过 $\frac{1}{n^{3/2}}$. 但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}<\infty$, 因此与直线和平面上的对称随机游动不同，空间中的对称随机游动是非常返的.

更一般地，$d\geqslant 3$ 维空间中的对称随机游动也是一个周期为 2 的不可约链. 此时，质点经过 $2n$ 步返回原位置的概率 u_n 的阶数不超过 $\frac{1}{n^{d/2}}$. 但是 $\sum_n\frac{1}{n^{d/2}}<\infty$, 因此 $d\geqslant 3$ 维空间中的对称随机游动是非常返的. 然而在直观上很难找可以接受的理由，解释为什么 $d\geqslant 3$ 维空间与一二维空间中的对称随机游动在常返性上会截然不同. 这个结果通常被称为波利亚 (Polya) 定理. □

3.4　状态空间的分解

前面已提到，马尔可夫链的状态空间可以分为若干不同的等价类. 本节将进一步讨论状态空间的分解问题.

定义 3.4.1　设 $C\subset S$, 如对任意 $i\in C$ 及 $j\notin C$, 都有 $p_{ij}=0$, 称 C 为(随机)**闭集**. 若 C 的状态相通，闭集 C 称为不可约的.

引理 3.4.1　C 是闭集的充要条件为：对任意 $i\in C$ 及 $j\notin C, n\geqslant 1$, 都有 $p_{ij}^{(n)}=0$.

证明　只需证必要性. 用归纳法证之. 设 C 为闭集，则由定义，当 $n=1$

时，结论成立．现设 $n=l$ 时对任意 $i\in C, j\notin C$ 有 $p_{ij}^{(l)}=0$, 则

$$p_{ij}^{(l+1)}=\sum_{k\in C}p_{ik}^{(l)}p_{kj}+\sum_{k\notin C}p_{ik}^{(l)}p_{kj}=\sum_{k\in C}0\cdot p_{ik}^{(l)}+\sum_{k\notin C}0\cdot p_{kj}=0.$$

于是引理 3.4.1 得证． □

易知，i 为吸收态则等价于单点集 $\{i\}$ 是闭集．显然整个状态空间 S 构成一闭集．3.3 节中例 3 (2) 的 $\{1,2\}$ 及 $\{3,4,5\}$ 分别为闭集．

闭集 C 的直观意义是自 C 内部不能到达 C 的外部，这意味着系统一旦进入闭集 C 内，它就永远在 C 中运动．

定理 3.4.1 所有常返状态构成一闭集．

证明 设 i 为常返状态，且 $i\to j$, 则由定理 3.3.8 知 $i\leftrightarrow j$, j 亦为常返状态．说明从常返状态出发，只能到达常返状态，不可能到达非常返状态．从而定理得证． □

今后用 C 表示所有常返状态构成的闭集． T 表所有非常返状态组成的集合．

推论 不可约马尔可夫链或者没有非常返状态或者没有常返状态．

定理 3.4.2 设 $C\neq\varnothing$, 则它可分为若干个相互不相交的闭集 $\{C_n\}$, 使 $C=C_1\bigcup C_2\bigcup\cdots$, 且有

(1) C_n 中任两状态相通；

(2) $C_h\bigcap C_l=\varnothing(h\neq l)$, 即 C_h 中任一状态与 C_l 中的任一状态互不相通，即 $\{C_n\}$ 均为互不相通闭集．

证明 因 $C\neq\varnothing$, 任取 $i_1\in C$, 令 $C_1=\{i\colon i\leftrightarrow i_1\in C\}$. 若 $C-C_1\neq\varnothing$, 再任取 $i_2\in C-C_1$, 令 $C_2=\{i\colon i\leftrightarrow i_2\in C-C_1\},\cdots$; 若 $C-\bigcup\limits_{i=1}^{h}C_i\neq\varnothing$, 取 $i_{h+1}\in C-\bigcup\limits_{i=1}^{h}C_i$, 令 $C_{h+1}=\{i\colon i\leftrightarrow i_{h+1}\in C-\bigcup\limits_{i=1}^{h}C_i\}$, $\cdots$.

显然，由 $\{C_h\}$ 的构成即得定理的结论． □

推论 状态空间 S 可分解为

$$S=T\bigcup C=T\bigcup C_1\bigcup C_2\bigcup\cdots, \tag{3.4.1}$$

其中 $\{C_h\}$ 为基本常返闭集，T 不一定是闭集．

因此，当系统从某非常返状态出发，系统可能一直在非常返集 T 中 (当 T 为闭集时), 也可能在某时刻离开 T 进入到某一基本常返闭集 C_h 中运动．

若 S 为有限集，则有以下结论：

定理 3.4.3 若 S 为有限集，则 T 一定是非闭集，亦即不管系统自什么状态出发，迟早要进入常返闭集.

证明 因 $T\subset S$ 有限，又根据定理 3.3.4, 系统至多有限次返回非常返状态. 从而只有有限次返回 T. 换言之，系统迟早将进入常返闭集. □

推论 有限不可约马尔可夫链的状态都是常返状态，即 $T=\varnothing, S=C$.

引理 3.4.2 设 $C_h\subset S$ 为闭集，只考虑 C_h 上所得的 m 步转移子矩阵 $\boldsymbol{P}_h^{(m)}=(p_{ij}^{(m)}), i,j\in C_h$, 则它们为随机矩阵.

证明 任取 $i\in C_h$, 由引理 3.4.1, 有

$$1=\sum_{j\in S}p_{ij}^{(m)}=\sum_{j\in C_h}p_{ij}^{(m)}+\sum_{j\notin C_h}p_{ij}^{(m)}=\sum_{j\in C_h}p_{ij}^{(m)}.$$

显然，$p_{ij}^{(m)}\geqslant 0$, $i,j\in C_h$. 故局限在 C_h 上的 $\boldsymbol{P}_h^{(m)}=(p_{ij}^{(m)})(i,j\in C_h)$ 为随机矩阵. □

为了计算与分析的方便，有时把状态空间中的状态顺序按如下规则重新排列：

(1) 属于同一等价类的状态接连不断地依次编号.

(2) 安排不同等价类的先后次序，使得系统从一给定状态可以达到同一类的另一状态或到达前面的等价类, 但不能到达后面的等价类. 由定理 3.4.1 知, 由常返状态组成的等价类是一闭集，而由非常返状态组成的等价类不一定是闭集，于是按上述规则，常返状态的类放在非常返状态的类之前.

设 $S=C\bigcup T, C=C_1\bigcup C_2\bigcup\cdots\bigcup C_h$ 及 $T=T_{h+1}\bigcup\cdots\bigcup T_n$, 这是按上面规则编排的等价类次序, 其中 $C_1,C_2,\cdots,C_h$ 是常返等价类 (闭集), $T_{h+1},\cdots,T_n$ 是非常返等价类. 于是，转移概率矩阵可分解成如下形式：

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{P}_h & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{R}_{h+1,1} & \boldsymbol{R}_{h+1,2} & \cdots & \boldsymbol{R}_{h+1,h} & \boldsymbol{Q}_{h+1} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{R}_{n,1} & \boldsymbol{R}_{n,2} & \cdots & \boldsymbol{R}_{n,h} & \boldsymbol{R}_{n,h+1} & \cdots & \boldsymbol{Q}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_C & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q}_T\end{pmatrix},\tag{3.4.2}$$

其中 $\mathbf{0}$ 表示零矩阵，而

$$\boldsymbol{P}_C=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{P}_2 & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{P}_h\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}_T=\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_{h+1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{R}_{h+2,h+1} & \boldsymbol{Q}_{h+2} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{R}_{n,h+1} & \boldsymbol{R}_{n,h+2} & \cdots & \boldsymbol{Q}_n\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{R}_{h+1,1} & \boldsymbol{R}_{h+1,2} & \cdots & \boldsymbol{R}_{h+1,h}\\ \boldsymbol{R}_{h+2,1} & \boldsymbol{R}_{h+2,2} & \cdots & \boldsymbol{R}_{h+2,h}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{R}_{n,1} & \boldsymbol{R}_{n,2} & \cdots & \boldsymbol{R}_{n,h}\end{pmatrix}.$$

其中 $\boldsymbol{P}_l(1\leqslant l\leqslant h)$ 是局限在 C_l 上的转移概率矩阵；$\boldsymbol{Q}_l(h+1\leqslant l\leqslant n)$ 是局限在 T_l 上的转移概率矩阵.

以 3.3 节例 3(3) 的转移概率矩阵为例，它可重新排列分解如下：

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0.3 & 0 & 0.6 & 0.1 & 0\\ 0.2 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.1\\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4\end{pmatrix},$$

则对应的 $\boldsymbol{P}_C,\boldsymbol{Q}_T,\boldsymbol{R}$ 为

$$\boldsymbol{P}_C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{Q}_T=\begin{pmatrix}0.6 & 0.1 & 0\\ 0.2 & 0.5 & 0.1\\ 0.2 & 0.2 & 0.4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.3 & 0\\ 0.2 & 0\\ 0.1 & 0.1\end{pmatrix}.$$

还有以下简单而有效的定理.

定理 3.4.4 若转移概率矩阵按 (3.4.2) 式的形式分解，则

(1) $\boldsymbol{P}_l(1\leqslant l\leqslant h)$ 是局限在 C_l 上的随机矩阵；

(2)

$$\boldsymbol{P}^n=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_C^n & \mathbf{0}\\ \boldsymbol{R}_n & \boldsymbol{Q}_T^n\end{pmatrix}. \tag{3.4.3}$$

其中 $\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}_n=\boldsymbol{R}_{n-1}\boldsymbol{P}_C+\boldsymbol{Q}_T^{n-1}\boldsymbol{R}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{Q}_T^n = \boldsymbol{0}$.

证明 (1) 由定理 3.4.2 及引理 3.4.2 即得;

(2) 由归纳可证之;

(3) 由定理 3.3.2 推论 1 的 (3.3.13) 式即得. □

3.5 $\boldsymbol{P}^n$ 的极限性态与平稳分布

在实际应用中，人们常常关心的问题有两个：(a) 当 $n\to\infty$ 时，$P(X_n = i) = \pi_i(n)$ 的极限是否存在？(b) 在什么条件下，一个马尔可夫链是一个平稳序列？对于前者，由于 $\pi_j(n) = \sum\limits_{i\in S}\pi_i(0)p_{ij}^{(n)}$, 故可转化为研究 $p_{ij}^{(n)}$ 的渐近性质，即 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 是否存在？若存在，其极限是否与 i 有关？对于后者，实际上是一个平稳分布是否存在的问题. 这两个问题有密切联系.

1. $\boldsymbol{P}^n$ 的极限性态

$p_{ij}^{(n)}$ 的渐近性态，在 3.3 节中已有所涉及，这里分两种情形再加以进一步的讨论.

(1) j 为非常返状态或零常返状态

定理 3.5.1 若 j 为非常返状态或零常返状态，则对任意 $i\in S$, 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0. \tag{3.5.1}$$

证明 当 j 为非常返状态时，上述结论已在定理 3.3.2 的推论 1 中证过，故只需证 j 为零常返状态的情形. 取 $m<n$, 有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \leqslant \sum_{l=1}^{m} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} + \sum_{l=m+1}^{n} f_{ij}^{(l)}. \tag{3.5.2}$$

固定 m 先令 $n\to\infty$, 由定理 3.3.7 知，上式右方第一项趋于 0 (因为 $p_{jj}^{(n)}\to 0$, 且是有限项的和)；再令 $m\to\infty$, 第二项因 $\sum\limits_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} \leqslant 1$ 而趋于 0. 故 $p_{ij}^{(n)}\to 0\,(n\to\infty)$. □

推论 1 有限马尔可夫链没有零常返状态.

证明 设有某状态 i 是零常返状态，令 $C_i = \{j{:}\, i\leftrightarrow j\}$, 由定理 3.4.2 知 C_i 是相通的常返闭集，且 $C_i\in S$ 为有限集. 由定理 3.4.4 有 $\sum\limits_{j\in C_i} p_{ij}^{(n)} = 1\,(n\geqslant 1)$.

但由定理 3.5.1 知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j\in C_i} p_{ij}^{(n)}=0$, 二者矛盾. 故 S 有限时无零常返状态. □

推论 2 不可约的有限马尔可夫链的状态都是正常返状态.

证明 由推论 1 及定理 3.4.3 的推论即得. □

推论 3 若马尔可夫链有一零常返状态，则必有无限多个零常返状态.

证明 由推论 1 即得. □

(2) j 为正常返状态

这时情况较复杂，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 不一定存在，即使存在也可能与 i 有关. 但有以下结论：

定理 3.5.2 若 j 为正常返状态, 周期为 d, 则对任意 $i\in S$ 及 $0\leqslant r\leqslant d-1$, 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd+r)}=f_{ij}(r)\,\frac{d}{\mu_j}, \tag{3.5.3}$$

其中 $f_{ij}(r)=\sum\limits_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}$, $0\leqslant r\leqslant d-1$.

此定理的证明可见文献 [4].

推论 1 若 j 是遍历状态，则对任意的 $i\in S$, 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}. \tag{3.5.4}$$

推论 2 对于不可约的遍历链 (即所有状态遍历), 对任意 $i,j\in S$, 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{\mu_j}. \tag{3.5.5}$$

定理 3.5.3 若 j 为常返状态，则对任意 $i\in S$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ij}^{(l)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}. \tag{3.5.6}$$

证明参见定理 3.3.5.

推论 如不可约马尔可夫链的状态是常返状态，则对任意 $i,j\in S$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ij}^{(l)}=\frac{1}{\mu_j}. \tag{3.5.7}$$

该推论直观解释如下：$\sum_{l=1}^{n} p_{ij}^{(l)}$ 表示自 i 出发在前 n 个单位时间内到达 j 的总次数，故 $\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ij}^{(l)}$ 表示每单位时间到达 j 的平均次数，而 $\frac{1}{\mu_j}$ 亦表示每单位时间到达 j 的平均次数．故对不可约常返链，有 $\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} p_{ij}^{(l)} \to \frac{1}{\mu_j}$.

定理 3.5.4 若马尔可夫链是不可约的遍历链，则 $\left\{\pi_i = \frac{1}{\mu_i}\right\}$ 是方程组

$$x_j = \sum_{i\in S} x_i p_{ij} \tag{3.5.8}$$

满足条件 $x_j \geqslant 0, j \in S, \sum_{j\in S} x_j = 1$ 的唯一解.

证明 记 $\pi_i = \frac{1}{\mu_i}$, 由定理 3.5.2 推论 2 有

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j.$$

对任意 n, M 有

$$1 = \sum_{j\in S} p_{ij}^{(n)} \geqslant \sum_{j=1}^{M} p_{ij}^{(n)},$$

固定 M, 令 $n \to \infty$, 可得 $\sum_{j=1}^{M} \pi_j \leqslant 1$; 再令 $M \to \infty$, 知

$$\sum_{j\in S} \pi_j \leqslant 1.$$

由 C-K 方程有

$$p_{ij}^{(n+1)} \geqslant \sum_{l=1}^{M} p_{il}^{(n)} p_{lj}.$$

如令 $n \to \infty$, 则得 $\pi_j \geqslant \sum_{l=1}^{M} \pi_l p_{lj}$. 再令 $M \to \infty$, 有

$$\pi_j \geqslant \sum_{l\in S} \pi_l p_{lj}, \quad \forall j \in S. \tag{3.5.9}$$

将 (3.5.9) 式两边乘以 p_{ji} 并对 j 求和，得

$$\pi_i \geqslant \sum_{j\in S}\pi_j p_{ji} \geqslant \sum_{l\in S}\pi_l p_{li}^{(2)}.$$

重复上述步骤，得 $\pi_j \geqslant \sum\limits_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)}$ 对所有 $j\in S$ 及 $n\geqslant 1$ 成立．现设上式对某个 j 严格不等式成立，即 $\pi_j > \sum\limits_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)}$, 那么，将此式对 j 求和，有

$$\sum_{j\in S}\pi_j > \sum_{j\in S}\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S}\pi_i \sum_{j\in S}p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S}\pi_i,$$

但这是不可能的．于是对所有 n 及 j, 有

$$\pi_j = \sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)}. \tag{3.5.10}$$

由于 $\sum\limits_{j\in S}\pi_i \leqslant 1$, 且 $p_{ij}^{(n)}$ 关于 n 一致有界，故在 (3.5.10) 式中令 $n\to\infty$ 时，由控制收敛定理，有

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S}\pi_i \lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)} = \Big(\sum_{i\in S}\pi_i\Big)\ \pi_j.$$

由于 $\pi_j>0$, 故得

$$\sum_{i\in S}\pi_i = 1.$$

现证唯一性．设 $\{v_i\}$ 是满足条件的另一组解，则类似 (3.5.10) 式有

$$v_j = \sum_{i\in S}v_i p_{ij} = \cdots = \sum_{i\in S}v_i p_{ij}^{(n)}.$$

令 $n\to\infty$ 则有

$$v_j = \sum_{i\in S}v_i \lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)} = \pi_j\ \Big(\sum_{i\in S}v_i\Big) = \pi_j. \qquad \square$$

2. 平稳分布

定义 3.5.1 一个定义在 S 上的概率分布 $\boldsymbol{\pi}=\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_i,\cdots\}$ 称为**马尔可夫链的平稳分布**, 如有

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}, \tag{3.5.11}$$

即 $\forall j \in S$, 有

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}. \tag{3.5.12}$$

平稳分布也称马尔可夫链的不变概率测度. 对于一个平稳分布 $\boldsymbol{\pi}$, 显然有

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}^2 = \cdots = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}^n. \tag{3.5.13}$$

定理 3.5.5 设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是马尔可夫链，则 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为平稳过程的充要条件是 $\boldsymbol{\pi}(0) = (\pi_i(0), i \in S)$ 是平稳分布，即

$$\boldsymbol{\pi}(0) = \boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P}.$$

证明 充分性. 记 $\boldsymbol{\pi}(0) = \boldsymbol{\pi}$, 显然

$$\boldsymbol{\pi}(1) = \boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\pi}(n) = \boldsymbol{\pi}(n-1)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}.$$

因此 $\forall i_k \in S, t_k \in \mathbb{N},\ n \geqslant 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n,\ t \in \mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned} P(X_{t_1} = i_1, \cdots, X_{t_n} = i_n) &= \pi_{i_1}(t_1) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}) \\ &= \pi_{i_1}(t_1 + t) p_{i_1 i_2}(t_2 - t_1) \cdots p_{i_{n-1} i_n}(t_n - t_{n-1}) \\ &= P(X_{t_1+t} = i_1, X_{t_2+t} = i_2, \cdots, X_{t_n+t} = i_n). \end{aligned}$$

所以 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是严平稳过程.

必要性. 由于 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是平稳过程,因此有 $\boldsymbol{\pi}(n) = \boldsymbol{\pi}(n-1) = \cdots = \boldsymbol{\pi}(0)$. 又由 $\boldsymbol{\pi}(1) = \boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P}$ 得 $\boldsymbol{\pi}(0) = \boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P}$, 即 $\boldsymbol{\pi}(0)$ 是平稳分布. □

由定理 3.5.4 有下面的结论.

定理 3.5.6 不可约遍历链恒有唯一的平稳分布 $\left\{\pi_i = \dfrac{1}{\mu_i}\right\}$, 且

$$\pi_j = \lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)}.$$

对于一般的马尔可夫链，其平稳分布是否存在？若存在，是否唯一？有以下的定理.

定理 3.5.7 令 C_+ 为马尔可夫链中全体正常返状态构成的集合. 则有:

① 平稳分布不存在的充要条件为 $C_+ = \varnothing$;

② 平稳分布唯一存在的充要条件为只有一个基本正常返闭集 $C_a = C_+$;

③ 有限状态马尔可夫链的平稳分布总存在;

④ 有限不可约非周期马尔可夫链存在唯一的平稳分布.

证明 ① 充分性. 用反证法, 假设该马尔可夫链存在一个平稳分布 $\boldsymbol{\pi} \neq \boldsymbol{0}$, 则由平稳分布定义知有 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P}$, 则 $\forall n \geqslant 1$, $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P} = \cdots = \pi \boldsymbol{P}^n$, 让 $n \to \infty$. 因 $C_+ = \varnothing$, 故该马尔可夫链中均是零常返状态或非常返状态, 而由定理 3.5.1 知当 $n \to \infty$ 时, $\boldsymbol{P}^n \to \boldsymbol{0}$, 这与 $\boldsymbol{\pi} \neq \boldsymbol{0}$ 矛盾. 所以该马尔可夫链不存在平稳分布.

必要性. 仍用反证法, 假设 $C_+ \neq \varnothing$, 不妨设 $C_+ = C$ 只有一个正常返的闭集, 则类似于定理 3.5.4 可以证明该马尔可夫链限制在 C 上存在一平稳分布 $\boldsymbol{\pi}_1$ 使 $\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{P}_1$, 其中 $\boldsymbol{P}_1$ 是一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 在 C 上的限制. 即 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q}_T \end{pmatrix}$. 此时只需取 $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{0})$, 则有 $\boldsymbol{\pi P} = (\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{0}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{Q}_T \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{\pi}$. 可见, $\boldsymbol{\pi}$ 是平稳分布, 与平稳分布不存在矛盾, 故 $C_+ = \varnothing$.

② 充分性. 因该马尔可夫链只有一个基本正常返闭集, 故类似于定理 3.5.4 可证明该马尔可夫链存在唯一的平稳分布.

必要性. 首先, 因它存在一个平稳分布, 故由 ① 知 $C_+ \neq \varnothing$. 又不妨假设其常返状态集可分解为两个常返闭集的并, 即 $C_+ = C_a \bigcup C_b$. 则易知一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 可写为

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{R}_2 & \boldsymbol{Q}_T \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$ 分别是 $\boldsymbol{P}$ 在 C_a, C_b 上的限制. 类似于定理 3.5.4 可证明存在 $\boldsymbol{\pi}_1$, $\boldsymbol{\pi}_2$ 使得 $\boldsymbol{\pi}_1 = \boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{P}_1$, 且 $\boldsymbol{\pi}_2 = \boldsymbol{\pi}_2 \boldsymbol{P}_2$, 若取 $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$, $\boldsymbol{\pi}' = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\pi}_2, \boldsymbol{0})$, 则易知 $\boldsymbol{\pi P} = (\boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = (\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \pi$, $\boldsymbol{\pi}' \boldsymbol{P} = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{\pi}_2, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{\pi}'$. 可见 $\boldsymbol{\pi}$ 与 $\boldsymbol{\pi}'$ 均是平稳分布, 与唯一性矛盾. 故该马尔可夫链只有一个基本正常返闭集 $C_a = C_+$.

③ 由定理 3.4.3 及定理 3.5.1 的推论 1 可知, 有限状态马尔可夫链总存在正常返状态, 即对有限状态马尔可夫链总有 $C_+ \neq \varnothing$, 故由 ① 知它的平稳分布总存在.

④ 由定理 3.5.1 的推论 2 及定理 3.5.6 易得. □

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}_j(\boldsymbol{n})$ 的存在性

下面来研究 $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_j(n)$ 的存在性问题.

定义 3.5.2 若 $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_j(n) = \pi_j^* \, (j \in S)$ 存在, 则称 $\boldsymbol{\pi}^* = \{\pi_1^*, \cdots, \pi_j^*, \cdots\}$

为**马尔可夫链的极限分布**.

定理 3.5.8 非周期不可约链是正常返的充要条件是它存在平稳分布，且此时平稳分布就是极限分布.

证明 充分性. 设存在平稳分布 $\boldsymbol{\pi}=\{\pi_1,\cdots,\pi_j\cdots\}$, 由此有 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi P}=\boldsymbol{\pi P}^2=\cdots=\boldsymbol{\pi P}^n$, 即 $\pi_j=\sum\limits_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)}$. 由于 $\pi_i\geqslant 0,\sum\limits_{j\in S}\pi_j=1$, 当 $n\to\infty$ 时, 利用控制收敛定理，极限号与和式可交换，得

$$\pi_j=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)}=\sum_{i\in S}\pi_i\Big(\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}\Big)=\Big(\sum_{i\in S}\pi_i\Big)\frac{1}{\mu_j}=\frac{1}{\mu_j}.$$

因为 $\sum\limits_{j\in S}\pi_j=\sum\limits_{j\in S}\dfrac{1}{\mu_j}=1$, 于是至少存在一个 $\pi_l=\dfrac{1}{\mu_l}>0$, 从而

$$\lim_{n\to\infty}p_{il}^{(n)}=\frac{1}{\mu_l}>0,$$

即 $\mu_l<\infty$, 故 l 为正常返状态. 由不可约性知，整个链是正常返的，且所有 $\pi_j=\dfrac{1}{\mu_j}>0$.

必要性. 由于马尔可夫链是正常返非周期链，即为遍历链，由定理 3.5.6 立即得证，且所有 $\pi_j=\pi_j^*=\dfrac{1}{\mu_j}$, $j\in S$. □

由上可知, 对于不可约遍历链, 则极限分布 $\pi^*=\pi$ 存在且等于平稳分布. 这意味着当 n 充分大时,

$$P(X_n=j)\approx\pi_j=\frac{1}{\mu_j},$$

即 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 是一渐近平稳序列. 这在实际问题中是很有意义的.

例 1 设

$$S=\{1,2\},\quad \boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}3/4 & 1/4\\ 5/8 & 3/8\end{pmatrix},$$

求平稳分布及 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{P}^n=?$

解 由 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi P}$ 得 $\pi_1=\dfrac{3}{4}\pi_1+\dfrac{5}{8}\pi_2$ 及 $\pi_1+\pi_2=1$, 解得 $\pi_1=\dfrac{5}{7},\pi_2=\dfrac{2}{7}$, 故

$$\boldsymbol{\pi}=\left(\frac{5}{7},\frac{2}{7}\right).$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \dfrac{1}{\mu_j}$, 故

$$\mu_1 = \frac{7}{5}, \quad \mu_2 = \frac{7}{2},$$

且

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^n = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 5/8 & 3/8 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 5/7 & 2/7 \\ 5/7 & 2/7 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

例 2 设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 为艾伦费斯特链, $S = \{0, 1, 2, \cdots, 2N\}$, 转移概率为

$$\begin{aligned} p_{ii} =& 0 \quad (0 \leqslant i \leqslant 2N), \\ p_{i,i+1} =& \frac{2N-i}{2N} \quad (0 \leqslant i \leqslant 2N-1), \\ p_{i,i-1} =& \frac{i}{2N} \quad (1 \leqslant i \leqslant 2N). \end{aligned}$$

求此链的 π_j 及 $\mu_j\,(i \in S)$.

解 由 $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi P}$, 得

$$\begin{aligned} \pi_0 =& \frac{\pi_1}{2N}, \\ \pi_i =& \frac{2N-i+1}{2N}\pi_{i-1} + \frac{i+1}{2N}\pi_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2N-1, \\ \pi_{2N} =& \frac{\pi_{2N-1}}{2N}. \end{aligned}$$

解此方程组得

$$\pi_i = \mathrm{C}_{2N}^i\ \pi_0, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2N.$$

又因为 $\sum\limits_{i=0}^{2N} \pi_i = 1$, 因此 $\pi_0 = 2^{-2N}$, 于是有

$$\pi_i = \mathrm{C}_{2N}^i 2^{-2N}, \quad 1 \leqslant i \leqslant 2N.$$

再由 $\mu_i = \dfrac{1}{\pi_i}$ 得

$$\mu_i = 2^{2N}\frac{i!(2N-i)!}{(2N)!}, \quad 0 \leqslant i \leqslant 2N. \qquad \square$$

4. 求和 (积分) 与极限交换的原则

下面罗列几个关于求和 (积分) 与极限交换的重要定理，这些定理可以看成是实变函数理论中有关定理的推广. 为此，先介绍关于数列的上、下极限的概念.

对于一数列 $\{a_n, n \geqslant 1\}$, 称 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sup\limits_{k\geqslant n} a_k) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}(\inf\limits_{k\geqslant n} a_k) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ 分别为数列 $\{a_n, n \geqslant 1\}$ 的上极限和下极限. 有些文献中亦将 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ 分别记作 $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ 和 $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

显然，对任一个数列 $\{a_n, n \geqslant 1\}$, 定义

$$b_n = \sup_{k\geqslant n} a_k = \bigcup_{k\geqslant n} a_k, c_n = \inf_{k\geqslant n} a_k = \bigcap_{k\geqslant n} a_k,$$

则 $\{b_n, n \geqslant 1\}$ 与 $\{c_n, n \geqslant 1\}$ 均是单调数列. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ 总存在. 显然 $\forall n \geqslant 1, b_n \geqslant c_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n \geqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$. 由上述定义，易证数列 $\{a_n, n \geqslant 1\}$ 的极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在的充要条件是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$.

定理 3.5.9 (列维 (Levy) 单调收敛定理) 设 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i, i \in S)$ 是行向量, $\pi_i \geqslant 0, \forall i \in S$, 若列向量序列 $\{\boldsymbol{f}^{(n)}\}$, $\boldsymbol{f}^{(n)} = (f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_i^{(n)}, \cdots)^{\mathrm{T}}$, 满足 $\boldsymbol{0} \leqslant \boldsymbol{f}^{(1)} \leqslant \cdots \leqslant \boldsymbol{f}^{(n)} \leqslant \boldsymbol{f}^{(n+1)} \leqslant \cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{f}^{(n)} = \boldsymbol{f}$. 则

$$\boldsymbol{\pi f} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi f}^{(n)},$$

即

$$\sum_{i\in S} \pi_i \left(\lim_{n\to\infty} f_i^{(n)}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in S} \pi_i f_i^{(n)}.$$

定理 3.5.10 (法都 (Fatou) 定理) 设 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i, i \in S)$ 是行向量，$\pi_i \geqslant 0$, $\forall i \in S$, 若列向量序列 $\{\boldsymbol{f}^{(n)}\}$, $\boldsymbol{f}^{(n)} = (f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_i^{(n)}, \cdots)^{\mathrm{T}}$, 满足 $\boldsymbol{\pi}\left(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \boldsymbol{f}^{(n)}\right) \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \boldsymbol{\pi f}^{(n)}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{f}^{(n)} \triangleq \boldsymbol{f}$ 存在. 则

$$\boldsymbol{\pi f} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \boldsymbol{\pi f}^{(n)}.$$

定理 3.5.11 (勒贝格 (Lebesgue) 控制收敛定理) 设 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_i, i \in S)$ 是行向量, $\pi_i \geqslant 0, \forall i \in S$, 若列向量序列 $\{\boldsymbol{f}^{(n)}\}$, $\boldsymbol{f}^{(n)} = (f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots, f_i^{(n)}, \cdots)^{\mathrm{T}}$, 满

足 $\boldsymbol{f}^{(n)} \geqslant \mathbf{0}$, $|\boldsymbol{f}^{(n)}| = (|f_1^{(n)}|, |f_2^{(n)}|, \cdots, |f_i^{(n)}|, \cdots)^{\mathrm{T}} \leqslant c\boldsymbol{e}$, 其中 $\boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots)^{\mathrm{T}}$, $c > 0$ 为常数，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{f}^{(n)} = \boldsymbol{f}$ 存在. 则

$$\boldsymbol{\pi f} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi f}^{(n)}.$$

3.6 离散时间的 Phase-Type 分布及其反问题

本节讨论离散时间的 Phase-Type 分布及其反问题，先给出它的定义.

定义 3.6.1 设 $\{X_n, n \geqslant 0\}$ 是马尔可夫链，状态空间 $\tilde{S} = S \bigcup S_0$ 有限，$S = \{1, 2, \cdots, p\}$ 为瞬时态集，$S_0 = \{0\}$ 为吸收态集. 一步转移概率矩阵

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \boldsymbol{P}_0 \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix},$$

其中，$\boldsymbol{P}$ 为瞬时态集的转移矩阵，$\boldsymbol{P}_0 = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ 为 p 维单位列向量，$\tau = \inf\{n\colon n \geqslant 0, X_n \in S_0\}$, 称 τ 为从瞬时态集到吸收态集的首达时间，称 τ 的分布为 Phase-Type 分布(简称 PH 分布).

令 $\boldsymbol{\pi}(0) = (\alpha_0, \boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$, $\alpha_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k\in\tilde{S}} \alpha_k = 1$. $g_k = P(\tau = k)$, $g_k(i) = P(\tau = k \big| X_0 = i)$, $\boldsymbol{g}_k = (g_k(i), i \in S)^{\mathrm{T}}$, $g(i, \lambda) = E(\lambda^\tau \big| X_0 = i)$, $\boldsymbol{g}(\lambda) = (g(i, \lambda), i \in S)$, $g(\lambda) = E(\lambda^\tau) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k \lambda^k$.

下面先求 τ 的分布 $\{g_k, k \geqslant 1\}$, τ 的条件分布向量 $\{\boldsymbol{g}_k, k \geqslant 1\}$ 及其生成函数. 有如下的定理:

定理 3.6.1 在上述记号下，有

(1) $g_0 = \alpha_0$,

$$\forall k \geqslant 1, g_k = \boldsymbol{\alpha P}^{k-1}\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{\alpha P}^{k-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{e}; \tag{3.6.1}$$

(2) $\boldsymbol{g}_0 = \mathbf{0}$, $\forall k \geqslant 1$, 有

$$\boldsymbol{g}_k = \boldsymbol{P}^{k-1}\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{P}^{k-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{e}; \tag{3.6.2}$$

(3) $\forall 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 有

$$g(\lambda) = \alpha_0 + \lambda\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{P})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{e}, \tag{3.6.3}$$

$$\boldsymbol{g}(\lambda) = \lambda(\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{P})^{-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{e}. \tag{3.6.4}$$

证明 (1) 用数学归纳法.

当 $k=0$ 时，有 $g_0=P(\tau=0)=P(X_0\in S_0)=\alpha_0$,

当 $k=1$ 时，有 $g_1=P(\tau=1)=P(X_0\in S,X_1=0)=\sum\limits_{i\in S}\alpha_i p_{i0}=\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{P}_0$,

当 $k=2$ 时，有

$$\begin{aligned}g_2=&P(\tau=2)=P(X_0\in S,X_1\in S,X_2\in S_0)\\=&\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}P(X_0=i,X_1=j,X_2=0)=\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}\alpha_i p_{ij}p_{j0}=\boldsymbol{\alpha}\ \boldsymbol{P}^{2-1}\ \boldsymbol{P}_0,\end{aligned}$$

假设 $k=n$ 时命题成立，即 $g_n=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{P}^{n-1}\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{P}^{n-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{e}$, 则当 $k=n+1$ 时，可以仿照上面作如下的事件分解：(1) 从初始状态 i 转移一步到 j; (2) 以 j 作为初始状态然后转移 n 步被吸收，则结合归纳假设

$$g_{n+1}=P(\tau=n+1)=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{n-1}\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{P}^{n}\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{P}^{(n+1)-1}\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{P}^{n}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{e},$$

知当 $k=n+1$ 时，命题成立.

综上有：$\forall k\in\mathbb{N}$, $g_0=\alpha_0$, $g_k=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{P}^{k-1}\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{P}^{k-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{e}$.

(2) 类似于 (1) 的证明，即得 (3.6.2) 式,

(3) 为了证明 (3) 先给出一个引理：

引理 3.6.1 设矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{Q}^n=\boldsymbol{0}$, 则 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}$ 存在，且

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{Q}^k, \tag{3.6.5}$$

其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵.

证明 因

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})\ (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}^2+\cdots+\boldsymbol{Q}^{n-1})=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}^n, \tag{3.6.6}$$

由已知有 $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{Q}^n=\boldsymbol{0}$, 故行列式 $|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}^n|\to 1(n\to\infty)$. 所以，当 n 充分大时，$|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}^n|\neq 0$, 从而

$$|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}|\cdot|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}^2+\cdots+\boldsymbol{Q}^{n-1}|\neq 0.$$

这只当上式左边两个行列式均不为 0 时才成立，于是 $\big|\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q}\big|\neq 0$, 即 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}$ 存在. 以 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{Q})^{-1}$ 左乘 (3.6.6) 式两边，并令 $n\to\infty$ 则得 (3.6.5) 式. □

以下证明 (3)：

将 g_k 与 $\boldsymbol{g}_k$ 的表达式分别代入 $g(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty} g_k\lambda^k$ 及 $\boldsymbol{g}(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{g}_k\lambda^k$ 中，并注意到 S 为瞬时态集，故 $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{P}^n=\boldsymbol{0}$, 用引理即可得 (3). □

在理论与实际应用中，常常感兴趣的问题是所谓 PH 分布的反问题，即已知以上马尔可夫链的首达时间的条件分布向量序列 $\{\boldsymbol{g}_k, k\geqslant 1\}$, 能否求其 $\boldsymbol{P}$ 与 $\boldsymbol{P}_0$? 下面给出肯定的回答：

记 $\boldsymbol{B}(k,p)=(\boldsymbol{g}_k,\boldsymbol{g}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{g}_{k+p-1})$ 为 $p\times p$ 矩阵，称为该马尔可夫链首达时间 τ 的条件分布向量矩阵. 有以下的定理.

定理 3.6.2 在上述记号下，有

(1) $\forall k\geqslant 2$, 有

$$\boldsymbol{g}_k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{g}_{k-1};\tag{3.6.7}$$

$$\boldsymbol{B}(k,p)=\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{B}(k-1,p);\tag{3.6.8}$$

(2) 若 $\mathrm{rank}\boldsymbol{B}(1,p)=p$, 则

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}(2,p)\boldsymbol{B}^{-1}(1,p);\tag{3.6.9}$$

$$\boldsymbol{P}_0=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}(2,p)\boldsymbol{B}^{-1}(1,p))\boldsymbol{e};\tag{3.6.10}$$

(3) 若 $\mathrm{rank}\boldsymbol{B}(1,p)=p$, 则

$$\boldsymbol{g}_k=\boldsymbol{B}(2,p)\boldsymbol{B}^{-1}(1,p)\boldsymbol{g}_{k-1}\qquad k\geqslant 2.\tag{3.6.11}$$

证明 (1) 由 (3.6.2) 式即得 (3.6.7) 式及 (3.6.8) 式;

(2) 当 $\mathrm{rank}\boldsymbol{B}(1,p)=p$ 时，由 (3.6.8) 式即得 (3.6.9) 式及 (3.6.10) 式.

(3) 由 (2) 即得. □

上述定理说明：若 $\mathrm{rank}\boldsymbol{B}(1,p)=p$, 则 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}_0$ 可由 $\boldsymbol{B}(2,p)$ 唯一确定，且首达时间 τ 的条件分布向量序列由 $\boldsymbol{B}(2,p)$ 唯一确定.

问题 1, 当 $\mathrm{rank}\boldsymbol{B}(1,p)=r$, 而 $1\leqslant r<p$ 时，请有兴趣的读者作为练习研究并给出其答案.

在物理与工程技术管理中往往有这种问题，即某系统的内部参数未知 (例如 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{P}_0$ 未知)，但其外部的某些指标是可以观察到的 (例如 τ 的观测值). 如何由能观测到的外部指标的观测值估计其内部参数？这是有意义的理论与应用问题.

问题 2, 如何用 $\boldsymbol{B}(k,p)$ 来表示 $\boldsymbol{g}(\lambda)$? 请有兴趣的读者给出答案.

PH 分布有如下的一些性质:

性质 3.6.1 若 τ_1,τ_2 为 PH 分布, 则 $\tau_1+\tau_2,\tau_1\wedge\tau_2,\tau_1\vee\tau_2$ 均为 PH 分布.

性质 3.6.2 $\tau_1,\cdots,\tau_n$ 为 PH 分布, ξ 为离散随机变量且与 $\tau_1,\cdots,\tau_n$ 独立, 且 $P(\xi=k)=p_k, 1\leqslant k\leqslant n$. 则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\tau_k I_{(\xi=k)}$ 为 PH 分布.

性质 3.6.3 设 τ 为 PH 分布, F 为其分布函数, 对于 $0<r<1$, 则

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-r)r^{n-1}F^{(n)}$$

为 PH 分布, 其中 $F^{(n)}$ 为 F 的 n 重卷积.

以上性质的证明均留给读者作为练习.

由于 PH 分布便于上机计算与分析等特点, 它已在排队系统, 制造系统, 通信网络, 计算机网络等领域获得广泛的应用.

3.7 首达目标模型与其他模型的关系

本节考虑定义在状态空间 S 为有限集的马尔可夫链 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 上系统的总报酬 (或某个性能指标) 的矩与分布及其拉普拉斯变换问题. 设 $H\subset S$ 为目标集, $\overline{H}=S-H$ 为系统的工作集. 设 $r(i)$ 是定义在 S 上的非负有穷值函数, $r(i)$ 可理解为系统在 i 状态在单位时段的报酬 ($r(i)$ 亦可称为该系统的某个性能指标函数). 为方便且不失一般性, 当 $i\in H$ 时, 规定 $r(i)\equiv 0$.

令

$$\tau_H=\begin{cases}\min\{n\colon n\geqslant 0, X_n\in H\}, & \{n\colon n\geqslant 0, X_n\in H\}\neq\varnothing,\\ \infty, & \{n\colon n\geqslant 0, X_n\in H\}=\varnothing,\end{cases}$$

$$W_0=\sum_{n=0}^{\tau_H}r(X_n),\qquad W_1=\sum_{n=1}^{\tau_H}r(X_n).$$

于是 τ_H 表示首次到达目标集时间,W_0 表示从 0 时刻到进入目标集之前的总报酬 (或性能指标), 它是定义于 $\{X_n,n\geqslant 0\}$ 上的可加泛函. 由于 $r(X_n)\geqslant 0\,(n\geqslant 0)$, 故 W_0,W_1 均是非负随机变量. 记

$$\begin{aligned}\mu_i^{(k)}=&E(W_0^k\big|X_0=i),\quad k\geqslant 1, i\in\overline{H};\\ F_i(t)=&P(W_0\leqslant t\big|X_0=i),\quad t\geqslant 0, i\in\overline{H};\end{aligned}$$

$$\phi_i(\lambda)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}F_i(t),\quad \lambda\geqslant 0, i\in\overline{H}.$$

记 $r_i^{(0)}=\mu_i^{(0)}=1$, 令 $r_i=r_i^{(1)}=r(i)$, 而

$$r_i^{(k)}=\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k-1-l}\mathrm{C}_k^l r_i^{k-l}\mu_i^{(l)}\quad(k\geqslant 1).$$

以 $\boldsymbol{r}^{(k)},\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ 及 $\boldsymbol{\phi}(\lambda)$ 分别表示分量为 $r_i^{(k)},\mu_i^{(k)}$ 及 $\phi_i(\lambda)\,(i\in\overline{H})$ 的列向量. 则有如下定理.

定理 3.7.1 对任意 $k\geqslant 1,\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ 满足方程组

$$\boldsymbol{\mu}^{(k)}=\boldsymbol{r}^{(k)}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{\mu}^{(k)},\tag{3.7.1}$$

其中 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})_{\overline{H}\times\overline{H}},i,j\in\overline{H}$.

证明 注意到当 $X_0,X_1\in S$ 时 $W_0^k=\sum\limits_{l=0}^{k-1}\mathrm{C}_k^l r_i^{k-l}W_1^l+W_1^k$, 然后应用全概率公式及马尔可夫性即可得 (3.7.1) 式. □

设 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_p)^{\mathrm{T}}$ 为 $\overline{H}$ 上的未知列向量，有如下定理.

定理 3.7.2 若 $\overline{H}$ 为瞬时态集，则 $\boldsymbol{\mu}^{(k)}(k\geqslant 1)$ 是下列方程组

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{r}^{(k)}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}\tag{3.7.2}$$

的唯一非负有界解，且

$$\boldsymbol{\mu}^{(k)}=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{P}^{(n)}\ \boldsymbol{r}^{(k)}.\tag{3.7.3}$$

证明 由 (3.7.1) 式知 $\boldsymbol{\mu}^{(k)}$ 是 (3.7.2) 式的一个非负有界解，以下只需证唯一性.

设 $\boldsymbol{v}^{(k)}$ 是 (3.7.2) 式的另一非负有界解，即

$$\boldsymbol{v}^{(k)}=\boldsymbol{r}^{(k)}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}^{(k)}.$$

由上式及 (3.7.1) 式，有

$$\boldsymbol{v}^{(k)}-\boldsymbol{\mu}^{(k)}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{v}^{(k)}-\boldsymbol{\mu}^{(k)}).\tag{3.7.4}$$

重复利用 (3.7.4) 式，有

$$\boldsymbol{v}^{(k)}-\boldsymbol{\mu}^{(k)}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{v}^{(k)}-\boldsymbol{\mu}^{(k)})=\boldsymbol{P}^{(2)}(\boldsymbol{v}^{(k)}-\boldsymbol{\mu}^{(k)})=\cdots=\boldsymbol{P}^{(n)}(\boldsymbol{v}^{(k)}-\boldsymbol{\mu}^{(k)}).$$

因 $\overline{H}$ 为瞬时态集，故 $\forall i, j \in \overline{H}$, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$, 即 $\boldsymbol{P}^{(n)} \to \boldsymbol{0}$. 故

$$\boldsymbol{v}^{(k)} - \boldsymbol{\mu}^{(k)} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}^{(n)}(\boldsymbol{v}^{(k)} - \boldsymbol{\mu}^{(k)}) = \boldsymbol{0}.$$

所以 $\boldsymbol{v}^{(k)} = \boldsymbol{\mu}^{(k)}$, 且

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{P}^{(n)}$$

存在，于是由 (3.7.1) 式可得 (3.7.3) 式. □

推论 记 $\|\boldsymbol{\mu}^{(1)}\| = \max\limits_i |\mu_i^{(1)}|$, $\|\boldsymbol{r}\| = \max\limits_i |r_i|$, 则当 $\rho < 1$ 时，有

$$\|\boldsymbol{\mu}^{(1)}\| \leqslant \frac{1}{1-\rho}\|\boldsymbol{r}\|,$$

其中 ρ 为矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的谱半径.

记

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_\lambda &= (p_{ij}\exp(-\lambda r_i)), \quad i, j \in \overline{H}, \\ b_i(\lambda) &= \sum_{j\in H} p_{ij}\exp(-\lambda r_i), \\ \boldsymbol{b}(\lambda) &= (b_1(\lambda), b_2(\lambda), \cdots, b_p(\lambda))^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

则有如下定理.

定理 3.7.3 对 $\lambda \geqslant 0, \boldsymbol{\phi}(\lambda)$ 是下列方程组

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}(\lambda) + \boldsymbol{P}_\lambda \boldsymbol{y} \tag{3.7.5}$$

唯一的非负有界解.

证明 先证 $\boldsymbol{\phi}(\lambda)$ 是方程 (3.7.5) 的解. 因

$$\begin{aligned} F_i(t) &= P(W_0 \leqslant t \big| X_0 = i) \\ &= \sum_{j\in\overline{H}} p_{ij} P(W_1 \leqslant t - r_i \big| X_1 = j) + \sum_{j\in H} p_{ij} P(r_i \leqslant t \big| X_1 = j), \end{aligned}$$

故

$$F_i(t) = \sum_{j\in\overline{H}} p_{ij} F_j(t - r_i) + \sum_{j\in H} p_{ij} P(r_i \leqslant t \big| X_1 = j). \tag{3.7.6}$$

从而

$$\phi_i(\lambda)=\sum_{j\in\overline{H}}p_{ij}\exp(-\lambda r_i)\phi_j(\lambda)+\sum_{j\in H}p_{ij}\exp(-\lambda r_i)\quad(i\in\overline{H}),\tag{3.7.7}$$

即

$$\boldsymbol{\phi}(\lambda)=\ \boldsymbol{b}(\lambda)+\boldsymbol{P}_\lambda\boldsymbol{\phi}(\lambda).\tag{3.7.8}$$

下面证明唯一性，只要注意到 $\rho(\boldsymbol{P}_\lambda)<\sum\limits_{j\in\overline{H}}p_{ij}\exp(-\lambda r_i)<1$, 再用类似于定理 3.7.2 的唯一性证明过程，便知 $\phi(\lambda)$ 是方程 (3.7.5) 唯一的非负有界解. □

因为 $0<\phi_i(\lambda)<1$, 显然有下述结果：

推论 对 $\lambda\geqslant0$, 有

$$\boldsymbol{\phi}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\boldsymbol{P}_\lambda^n\boldsymbol{b}(\lambda).\tag{3.7.9}$$

首达目标模型不仅有广泛的应用背景，同时它在理论上是最重要的基本模型之一，因为其他许多模型均可化为该模型来处理. 下面着重以折扣依赖于历史模型为例.

马尔可夫链折扣依赖于历史的 (可加泛函) 模型

设 $X=\{X_n,n\geqslant0\}$ 为马尔可夫链，状态空间为 $S=\{1,2,\cdots,m\}$, 一步转移概率矩阵为 $\boldsymbol{P}=(p_{ij})$.

令 $r\colon S\to\mathbb{R}^+$, $r(i)$ 表示系统在 i 状态的性能指标. 折扣因子 $\beta\colon S\to[0,1)$, $\beta(i)$ 与状态有关. 记 $\beta(i)=\exp\{-\overline{\beta}(i)\}$, 其中 $\overline{\beta}(i)>0,\forall i\in S$. 考虑折扣依赖于历史的可加性能泛函

$$\begin{cases}\xi_k=\displaystyle\sum_{n=k}^{\infty}\Big(\prod_{l=k}^{n-1}\beta(X_l)\Big)r(X_n)=\sum_{n=k}^{\infty}\Big(\exp\Big\{-\sum_{l=k}^{n-1}\overline{\beta}(X_l)\Big\}\Big)r(X_n),\\ m_k(i)=E(\xi_0^k\big|X_0=i),\ r_1(i)=r(i),\ r_k(i)=\displaystyle\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k+1-l}\mathrm{C}_k^l r^{k-l}(i)m_l(i),\\ p_{ij}(k)=\beta^k(i)p_{ij},\ i,j\in S,k\geqslant1,\\ \boldsymbol{m}_k=(m_k(i),i\in S)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{r}_k=(r_k(i),i\in S)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{P}(k)=(p_{ij}(k))_{i,j\in S}.\end{cases}\tag{3.7.10}$$

式中约定$\prod\limits_{l=0}^{-1}\beta(X_l)=1$.

定理 3.7.4 $\forall k \geqslant 1$, $\boldsymbol{m}_k$ 满足

$$\boldsymbol{m}_k = \boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{m}_k. \tag{3.7.11}$$

证明 类似于定理 3.7.1 的证明. □

注意到当 $\beta(i) < 1, \forall i \in S$ 时，有以下推论：

推论 $\boldsymbol{m}_k$ 是下列非负方程 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{x}$ 的唯一非负最小解，且

$$\boldsymbol{m}_k = \sum_{n=0}^{\infty} \boldsymbol{P}^n(k)\boldsymbol{r}_k. \tag{3.7.12}$$

由上面讨论可知，只要已知 r, β 与 $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$. 可由 (3.7.12) 式逐次求得 $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{m}_k$, $\boldsymbol{r}_k, \cdots$.

从方程 (3.7.1) 和方程 (3.7.11) 可以看出，首达目标模型的 k 阶矩 μ_k 与折扣依赖于历史模型中的 k 阶矩所满足的方程组极为相似. 自然要问：对于给定的马尔可夫链的折扣依赖于历史模型的 $k(k \geqslant 1)$ 阶矩问题，能否构造一马尔可夫链，使其首达目标的一阶矩恰好等于前者的 k 阶矩？回答是肯定的.

定理 3.7.5 对于由 (3.7.10) 式给出的折扣依赖于历史模型的 k 阶矩向量 $\boldsymbol{m}_k(k \geqslant 1)$ 必可构造一相应的首达目标模型，使得该模型的一阶矩向量恰好等于 $\boldsymbol{m}_k$.

证明 构造相应的首达目标模型. 设新马尔可夫链为 $\tilde{X} = \{\tilde{X}_n, n \geqslant 0\}$, 其状态空间为 $\tilde{S} = S \bigcup \{\delta\}$, 一步转移概率矩阵为 $\tilde{\boldsymbol{P}}(k) = (\tilde{p}_{ij}(k))$, $i, j \in \tilde{S}$, 指标函数为 $\tilde{r}_k$: $\tilde{S} \to \mathbb{R}^+$, 其中

$$\begin{cases} \tilde{p}_{ij}(k) = \begin{cases} \beta^k(i)p_{ij}, & i, j \in S, \\ 1 - \sum\limits_{j \in S} \tilde{p}_{ij}(k), & i \in S, j = \delta, \\ 1, & i = j = \delta, \\ 0, & i = \delta, j \in S. \end{cases} \\ \tilde{r}_k(i) = \begin{cases} r_k(i), & i \in S, \\ 0, & i = \delta. \end{cases} \\ \tilde{T}_\delta = \inf\{n\colon n \geqslant 0, \tilde{X}_n = \delta\}, \\ \tilde{\xi}_0(k) = \sum\limits_{n=0}^{\tilde{T}_\delta} \tilde{r}_k(\tilde{X}_n), \qquad \tilde{\mu}_1(i,k) = E(\tilde{\xi}_0(k) \big| \tilde{X}_0 = i), \quad i \in S, \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_1(k) = (\tilde{\mu}_1(i,k), i \in S). \end{cases} \tag{3.7.13}$$

式中 $\tilde{T}_\delta$ 表示首达 δ 的时间,$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1(k)$ 表示首达目标一阶矩向量. 因 $\tilde{p}_{i\delta}(k) > 0, \forall i \in S$ 且 $\tilde{p}_{\delta\delta}(k) = 1$, 从而 S 与 δ 对 $\tilde{X} = \{\tilde{X}_n, n \geqslant 0\}$ 而言分别是瞬时态集与吸收态. 不难验证

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1(k) = \boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{P}(k)\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1(k),$$

且是方程组 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}_k + \boldsymbol{P}(k)\boldsymbol{x}$ 的唯一非负最小解, 故

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_1(k) = \boldsymbol{m}_k.$$

这说明由 (3.7.10) 式定义的折扣依赖于历史模型的 k 阶矩 ($k \geqslant 1$ 任意固定) 与由 (3.7.13) 式定义的首达目标模型的一阶矩相等. □