第 10 周讲稿

Brown 运动（续）

定义：Brown 运动定义为满足以下条件的一个随机过程 **B**=$\{B_t, t\ge 0\}$：

（1）**B** 是独立增量过程，即对任意互不相交的区间$(s_1,t_1],(s_2,t_2],\cdots,(s_n,t_n]$，其上的增量$B_{t_1}-B_{s_1}$, $B_{t_2}-B_{s_2}$,$\cdots$, $B_{t_n}-B_{s_n}$ 都相互独立；

（2）对于任意$s\ge 0, t>0$，增量$B_{s+t}-B_s \sim N(0,Dt)$（不依赖s）；

(3) 对每一个固定的ω， $B_t(\omega)$是 t 的连续函数.

特别，当 D=1 时，我们称之为**标准 Brown 运动**。以下研究的 Brown 运动均为**标准 Brown 运动。**

注：

（1）$B_t \sim N(0,t), EB_t=0, Cov(B_s,B_t)=E[B_sB_t]=s\wedge t(\triangleq \min(s,t))$，

转移概率 $p_t(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$ （如何理解？）

（2）**Markov 性：**已知现在B_s的条件下，过去B_u $(0\le u<s)$ 与将来B_{t+s}是相互独立的；即：

$$\begin{aligned}&P(B_{s+t}\le x\,|\,B_s=a, B_u\in A\,(0\le u<s))=P(B_{s+t}\le x\,|\,B_s=a)\\&=P(B_{s+t}-B_s\le x-a)\end{aligned}$$

（3）**B** 的任意有限维分布为：$\forall t_1<t_2<\cdots<t_n$，

$$P(\omega: B_{t_1}\le x_1,\cdots,B_{t_n}\le x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(u_1,u_2,\cdots,u_n)du_1\cdots du_n$$

$$=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}\frac{\exp\{-(\frac{u_1^2}{2t_1}+\frac{(u_2-u_1)^2}{2(t_2-t_1)}+\cdots+\frac{(u_n-u_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})})\}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\cdots(t_n-t_{n-1})}}du_1\cdots du_n$$

（4）Brown 运动是一个 Gauss 过程（密度函数中的$\frac{u_1^2}{2t_1}+\frac{(u_2-u_1)^2}{2(t_2-t_1)}+\cdots+\frac{(u_n-u_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})}$为正定二次型，即为正态分布）

注：由于$(B_{t_1}-B_0, B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$为 Gauss 分布（分量是独立的），而$(B_{t_1},B_{t_2},\cdots,B_{t_n})$ 是$(B_{t_1}-B_0, B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$的一个线性变换，于是

$(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n})$ 也是服从 Gauss 分布的，从而 Brown 运动是一个 Gauss 过程。

Gauss 过程的定义：一个实值连续时间过程 X 称为 **Gauss 过程**，如果每一有限维向量 $(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n))^T$ 均服从 Gauss 分布 $N(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{R}(\boldsymbol{t}))$，其中的均值向量 $\boldsymbol{\mu}$ 和协方差矩阵 $\boldsymbol{R}$ 均依赖于 $\boldsymbol{t}=(t_1, t_2, \cdots, t_n)$。

例：$\{B_t, t \geq 0\}$ 为标准 Brown 运动，$B_0 = 0$，则 $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_3 \\ B_8 \end{pmatrix} \sim N(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix})$，

故其相关的概率问题的计算，可以用三维正态分布的结果计算。

由于

$2B_1 - 3B_3 + B_8 = (2, -3, 1)\begin{pmatrix} B_1 \\ B_3 \\ B_8 \end{pmatrix}$ 也为 Gauss 分布，而

$$E(2B_1 - 3B_3 + B_8) = 0;$$
$$D(2B_1 - 3B_3 + B_8) = 4\times1 + 9\times3 + 8 - 12\times1 + 4\times1 - 6\times3 = 13$$

故 $2B_1 - 3B_3 + B_8 \sim N(0, 13)$。

§ 4　Brown 运动的简单特性

性质 1：定理：设（轨道连续的）随机过程 $\{B_t : t \geq 0\}$ 满足 $B_0 = 0$. 那么 $\{B_t : t \geq 0\}$ 是 Brown 运动当且仅当它是 Gauss 过程,而且满足 $EB_t \equiv 0, E(B_s B_t) = \min(s, t)$。

证明：必要性：若 $\{B_t : t \geq 0\}$ 是 Brown 运动（$B_0 = 0$），则 $B_t \sim N(0, t)$，故 $EB_t = 0$。当 $s \leq t$ 时，我们有

$$Cov(B_s, B_t) = Cov(B_s, B_s + B_t - B_s)$$

$$= Cov(B_s, B_s) + Cov(B_s, B_t - B_s) = s\ .$$

可见一般地我们有

$$Cov(B_s, B_t) = E（B_s B_t）= s \wedge t \qquad (\text{即} \min(s, t)).$$

充分性：若 $\{B_t : t \geq 0\}$ 是 Gauss 过程,而且满足 $EB_t \equiv 0, E(B_s B_t) = \min(s, t)$，

则 $\forall s,t>0$，有 $E(B_t-B_s)=0$

$$E(B_t-B_s)^2=EB_t^2+EB_s^2-2E(B_tB_s)=t+s-2(s\wedge t)=|t-s|,$$

而 $\forall\quad 0\le s_1<t_1\le s_2<t_2$，有

$$\begin{aligned}&E[(B_{t_1}-B_{s_1})(B_{t_2}-B_{s_2})]=E(B_{t_1}B_{t_2})-E(B_{t_1}B_{s_2})-E(B_{s_1}B_{t_2})+E(B_{s_1}B_{s_2})\\&=t_1-t_1-s_1+s_1=0\end{aligned}$$

即它们的协方差为 0. 由于 Gauss 分布中分量相互独立等价于协方差为对角阵，故可知 $\{B_t:t\ge 0\}$ 为独立增量过程，且 $B_t-B_s\sim N(0,|t-s|)$，故 $\{B_t:t\ge 0\}$ 为 Brown 运动。

性质 2：设 $\{B_t:t\ge 0\}$ 为 Brown 运动，则

（1）（**平移不变性**）$\{B_{t+a}-B_a,t\ge 0\}$（$a\ge 0$ 为常数）为 Brown 运动；

（2）（**尺度不变性**）$\{\frac{B_{ct}}{\sqrt{c}},t\ge 0\}$（$c>0$ 为常数）也是 Brown 运动；

（3）$\{tB_{\frac{1}{t}},t\ge 0\}$（定义 $\{tB_{\frac{1}{t}}\}|_{t=0}=0$）为 Brown 运动。

证明：利用性质 1 证明。$\{B_t:t\ge 0\}$ 为 Brown 运动，从而为 Gauss 过程，因此 $\{B_{t+a}-B_a,t\ge 0\}$ 仍为 Gauss 过程，且 $B_{0+a}-B_a=0;\quad E(B_{t+a}-B_a)=0\quad \forall t>0$。而

$$\begin{aligned}&E[(B_{t+a}-B_a)(B_{s+a}-B_a)]=E(B_{t+a}B_{s+a})-a-a+a\\&=[(t+a)\wedge(s+a)]-a\\&=s\wedge t+a-a=s\wedge t\end{aligned}$$

故 $\{B_{t+a}-B_a,t\ge 0\}$（$a\ge 0$ 为常数）为 Brown 运动。

Brown 运动的变形

- **Brown 桥**

设 $\{B_t:t\ge 0\}$ 为（标准）Brown 运动，令

$$B_t^*=B_t-tB_1,\ 0\le t\le 1$$

则称过程 $\{B_t^*:t\ge 0\}$ 为 Brown 桥。（最简单形式）

显然，Brown 桥也是 Gauss 过程，且

$$EB_t^*=E(B_t-tB_1)=0,$$

$$Cov(B_s^*, B_t^*) = E(B_s^* B_t^*) = E[(B_s - sB_1)(B_t - tB_1)]$$
$$= s - st - st + st = s(1-t), \forall 0 \le s < t \le 1$$

故 Brown 桥不是 Brown 运动。

- 在原点反射的 Brown 运动：$\{|B_t|, t \ge 0\}$

  只给出一维分布：$\forall x > 0$，

$$P(|B_t| \le x) = P(-x \le B_t \le x) = P(-\frac{x}{\sqrt{t}} \le \frac{B_t}{\sqrt{t}} \le \frac{x}{\sqrt{t}})$$
$$= 2\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) - 1$$

- 几何 Brown 运动：$\{e^{B_t}, t \ge 0\} \triangleq \{X_t, t \ge 0\}$

  由于 $B_t \sim N(0,t)$，故其矩母函数为 $M_{B_t}(u) = E[e^{uB_t}] = e^{\frac{t}{2}u^2}$，从而

$$EX_t = E[e^{B_t}] = e^{\frac{t}{2}};$$
$$DX_t = EX_t^2 - (EX_t)^2 = E[e^{2B_t}] - [Ee^{B_t}]^2 = e^{2t} - e^t。$$

Brown 运动的轨道性质（上课略）：

性质 3： Brown 运动 $\{B_t, t \ge 0\}$ 的轨道处处连续处处不可导。（不要求严格证明）

性质 4：（Brown 运动的镜面对称性）

$$P(Brown\text{运动在}[0,\ t]\text{到达过}x, B_t \le x) = P(Brown\text{运动在}[0,\ t]\text{到达过}x, B_t \ge x)$$

性质 5： Brown 运动 $\{B_t, t \ge 0\}$ 的首达 a 的首达时 $T_a = \min\{t > 0 : B_t = a\}$ 的分布为

$$P(T_a \le t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{|a|}{\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2(1 - \Phi(\frac{|a|}{\sqrt{t}}))$$

从而，T_a 几乎处处有限（即 $P(T_a < \infty) = 1$）且 $ET_a = +\infty$。

性质 6： $\max\limits_{0 \le s \le t} B_s$ 的密度函数为 $f_{\max}(a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$，$a \ge 0$.

性质 7*：设$\{B_t^x, t\ge 0\}=\{B_t+x, t\ge 0\}$为始于$x$的 Brown，则$B_t^x$在$(0,t)$中至少有一个零点的概率为$\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t u^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{x^2}{2u}}du$。（有兴趣的同学自己证明一下）

（注意到 $P(B_t^x$ 在$(0,t)$中至少有一个零点$)=$ $P(\max\limits_{0\le s\le t} B_s^x \ge 0$）即可）

性质 8*：（反正弦律）$P(B_t^x$ 在(a,b)中没有零点$)=\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{a}{b}}$.（有兴趣的同学自己证一下）

第六章　极限定理

§1 大数定律与依概率收敛

1. 依概率收敛

定义　若随机变量序列$\{X_n\}$及随机变量X满足：:对任意$\varepsilon>0$有

$$\lim_{n\to\infty}P(|X_n-X|\ge \varepsilon)=0,$$

则称X_n**依概率收敛**于X，并记为　$X_n\xrightarrow{P}X$

例　设独立同分布的随机变量序列$\{\xi_n\}$均服从$[0,a]$上的均匀分布．则

$$\max(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)\xrightarrow{P}a.$$

2. 性质

性质 1（比较微积分的结论）：若$\xi_n\xrightarrow{P}\xi$，　$g(x)$是连续函数，则$g(\xi_n)\xrightarrow{P}g(\xi)$.

又若$\eta_n\xrightarrow{P}\eta$，$a,b$为常数，则

$$\xi_n+a\xrightarrow{P}\xi+a,\qquad a\xi_n\pm b\eta_n\xrightarrow{P}a\xi\pm b\eta,\qquad \xi_n\eta_n\xrightarrow{P}\xi\eta.$$

进一步，如果还有$\eta_n,\eta>0$，则 $\frac{\xi_n}{\eta_n}\xrightarrow{P}\frac{\xi}{\eta}$.

性质 2：如果$X_n\xrightarrow{P}X$，那么它也是依分布收敛的，即$X_n\xrightarrow{D}X$（证明不做要求）

性质 3：　$X_n\xrightarrow{P}a$（常数）当且仅当$X_n\xrightarrow{D}a$（或F_a）；

所以也当且仅当特征函数$\varphi_{X_n}(\theta)\to e^{ia\theta}$。

➢ Slutsky 定理：

依分布收敛 $X_n \xrightarrow{D} X$ （茆诗松教材中记号 $X_n \xrightarrow{L} X$ ）

例（Slutsky 定理）：$X_n \xrightarrow{D} X, Y_n \xrightarrow{P} a$,则 $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X + a$.（从而有 $X_n Y_n \xrightarrow{D} aX$ ；$\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{D} \frac{X}{a} (a \neq 0)$ ）

证明：只需证明 $X_n \xrightarrow{D} X, Y_n \xrightarrow{P} 0$,则 $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$.

法一（定义）$\forall x \in R$，$\forall \varepsilon > 0$，

$$\begin{aligned} F_{X_n+Y_n}(x) &= P(X_n + Y_n \le x) = P(X_n + Y_n \le x, |Y_n| \le \varepsilon) + P(X_n + Y_n \le x, |Y_n| > \varepsilon) \\ &\le P(X_n + Y_n \le x, |Y_n| \le \varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon) \\ &\le P(X_n \le x + \varepsilon) + P(|Y_n| > \varepsilon) \end{aligned} \tag{1}$$

同理

$$\begin{aligned} P(X_n \le x - \varepsilon) &= P(X_n \le x - \varepsilon, |Y_n| \le \varepsilon) + P(X_n \le x - \varepsilon, |Y_n| > \varepsilon) \\ &\le P(X_n + Y_n \le x) + P(|Y_n| > \varepsilon) \end{aligned} \tag{2}$$

由（1）式得，$\overline{\lim_{n\to\infty}} F_{X_n+Y_n}(x) \le F_X(x+\varepsilon)$，

由（2）式得，$\underline{\lim}_{n\to\infty} F_{X_n+Y_n}(x) \ge F_X(x-\varepsilon)$

令 $\varepsilon \downarrow 0$，则对 F_X 的连续点 x，有 $F_{X_n+Y_n}(x) \to F_X(x)$，即 $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$ 。

法二（特征函数）由于 $Y_n \xrightarrow{P} 0 \Leftrightarrow Y_n \xrightarrow{D} 0$，故 $Ee^{i\theta Y_n} \to 1$，从而

$$|E[e^{i\theta X_n}(e^{i\theta Y_n} - 1)]| \le E[|e^{i\theta Y_n} - 1|] \to 0$$

故 $\varphi_{X_n+Y_n}(\theta) = Ee^{i\theta(X_n+Y_n)} = Ee^{i\theta X_n} + E[e^{i\theta X_n}(e^{i\theta Y_n} - 1)] \to Ee^{i\theta X} = \varphi_X(\theta)$

即 $X_n + Y_n \xrightarrow{D} X$ 。

作为 Slutsky 定理的应用，下面的 Delta 方法是统计中求渐近分布的一种重要的方法。

定理（Delta 方法）：随机变量序列 X_n 满足 $\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{D} N(0, \sigma^2)$ θ, σ^2 均为有限常数，若 $g'(\theta)$ 存在且取值不为零，则 $\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{D} N(0, [g'(\theta)]^2 \sigma^2)$ 。

证明：Taylor 展开

$$g(X_n) = g(\theta) + g'(\theta)(X_n - \theta) + o_p(X_n - \theta)$$

这里 $X_n - \theta \xrightarrow{P} 0$，故有 Slutsky 定理知，

$$\sqrt{n}(g(X_n)-g(\theta))\xrightarrow{D}N(0,[g'(\theta)]^2\sigma^2)$$

★　注：记号：$Y_n=o_p(X_n)\Leftrightarrow\frac{Y_n}{X_n}\xrightarrow{P}0$；$Y_n=O_p(X_n)\Leftrightarrow\frac{Y_n}{X_n}$依概率有界。

结论（上课略）：$Y_n=o_p(X_n)$，且X_n依概率有界，则$Y_n\xrightarrow{P}0$。

证明：$\forall 1>\varepsilon>0$，由于X_n依概率有界，故存在常数$N_\varepsilon,B_\varepsilon>0$，使得当$n>N_\varepsilon$时，有$P(|X_n|>B_\varepsilon)<\varepsilon$。因为$Y_n=o_p(X_n)$，故

$$P(|Y_n|\ge\varepsilon)=P(|Y_n|\ge\varepsilon,|X_n|>B_\varepsilon)+P(|Y_n|\ge\varepsilon,|X_n|\le B_\varepsilon)$$

$$\le P(|X_n|>B_\varepsilon)+P(|\frac{Y_n}{X_n}|\ge\frac{\varepsilon}{B_\varepsilon})$$

$$\to 0$$

3.　**大数定律（LLN：Law of Large Number）**

何谓大数定律？

$\{X_n\}$满足**大数定律**：$\forall\varepsilon>0$，有$\lim\limits_{n\to\infty}P(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i|<\varepsilon)=1$

i.e. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i\xrightarrow{P}0$

上课即为$\{X_n\}\sim LLN$。

（A）Chebyshev 大数定律与 Chebyshev 不等式：

定理：（Chebyshev 大数定律）若$\{X_n\}$满足两两不相关，且方差一致有界（*i.e.* $D(X_i)\le C<+\infty,\forall i$），则$\{X_n\}$满足**大数定律**。

引理：**（Chebyshev 不等式）**对具有有限方差的随机变量 X，及任意的$\varepsilon>0$有

$$P(|X-EX|\ge\varepsilon)\le\frac{DX}{\varepsilon^2}。$$

Chebyshev 不等式证明与应用

例. 设随机变量 X 和 Y 的数学期望分别为 –2 和 2, 方差分别为 1 和 4, 而相关系数为–0.5, 则根据切比雪夫（Chebyshev）不等式$P(|X+Y|\ge 6)\le$____ **.**

【解】因为$E(X+Y)=2-2=0$，**故由切比雪夫不等式知，**

$$P(|X+Y|\ge 6)=P(|(X+Y)-E(X+Y)|\ge 6)\le\frac{D(X+Y)}{6^2}=\frac{D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)}{6^2}$$

$$=\frac{D(X)+D(Y)+2\rho_{XY}\sqrt{D(X)D(Y)}}{36}=\frac{1+4+2\times(-0.5)\sqrt{4}}{36}=\frac{1}{12}.$$

（B）Khintchine 大数定律及其应用

定理（Khintchine 大数定律）　设$\{X_n\}$是相互独立同分布的随机变量序列，且其数学期望为μ，则$\{X_n\}$**服从大数定律**，即 $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\xrightarrow{P}\mu \quad (n\to\infty)$.

证明　利用独立同分布性质，对于特征函数我们有

$$\varphi_{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}}(\theta)=\varphi_{X_1+\cdots+X_n}(\frac{\theta}{n})=[\varphi_{X_1}(\frac{\theta}{n})]^n$$

$$=[1+i\mu\frac{\theta}{n}+o(\frac{\theta}{n})]^n\to e^{i\mu\theta}.$$

应用举例（在统计中）。

（B）Bernoulli 大数定律

推论（**Bernoulli 大数定律**）　在事件 A 发生的概率为 p 的 n 次重复独立试验的 Bernoulli 概型中，令μ_n为 n 次重复中试验 A 发生的次数．我们有：$\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p$.

§ 2　中心极限定理（CLT）

何谓中心极限定理？

$\{X_n\}$满足**中心极限定理**：$\lim_{n\to\infty}P(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}EX_i}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^{n}X_i)}}<x)=\Phi(x)\quad \forall x\in R$

$$i.e.\quad S_n^*=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\sum_{i=1}^{n}EX_i}{\sqrt{D(\sum_{i=1}^{n}X_i)}}\xrightarrow{D}N(0,1)$$

$\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从正态分布。

（A）Levy- Lindeberg 中心极限定理

定理（**Levy- Lindeberg 中心极限定理**）　设独立同分布随机变量序列$\{X_n\}$具有有限的数学期望$EX_i=\mu$和方差$DX_i=\sigma^2\neq 0$，则$\{X_n\}$满足中心极限定理，即当$n\to\infty$时有$S_n^*\xrightarrow{D}N(0,1)$。

（应用于独立和的近似计算）

注：**1（Polya 定理）** 设随机变量 X 分布函数 $F_X(x)$ 是连续函数，又随机变量序列 $X_n \xrightarrow{D} F_X$．那么分布函数 $F_{X_n}(x)$ 一致收敛到 $F_X(x)$.（不需要证明）

2. 若随机变量序列 X_n 为独立同分布， $EX_n=\mu$ 且 $DX_n=\sigma^2 (n=1,2,\cdots)$，则

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |P(X_1+\cdots+X_n\le x)-\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi\cdot n}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(u-n\mu)^2}{2n\sigma^2}}du| \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

（B）De Moivre-Laplace 定理

推论（**De Moivre-Laplace**）设 n 次独立的重复试验中，事件 A 在每次试验中出现的概率 p（$0<p<1$），随机变量 μ_A 为此 n 次试验中事件 A 出现的次数（即 $\mu_A \sim B(n,p)$）．那么，对于任意 $x\in \boldsymbol{R}$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{\mu_A-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le x)=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}}dz,$$

而且对于 x 是一致收敛.

应用于二项分布的近似计算（注意与 Poisson 定理的区别）。

例：已知 n 重贝努利试验中参数 $p=0.75$，问至少应该做多少次试验，才能使试验成功的频率在 0.74 和 0.76 之间的概率不低于 0.95？

【解】 由题设,求 n 使

$$P(0.74<\frac{\mu_n}{n}<0.76)=P(|\frac{\mu_n}{n}-0.75|<0.01)\ge 0.95$$

注意 μ_n~B（n， p），故由 De Moivre-Laplace 定理得

$$P(|\frac{\mu_n}{n}-0.75|<0.01)\approx 2\Phi(0.01\sqrt{\frac{n}{0.75(0.25)}})-1\ge 0.95$$

即求 n 使

$$2\Phi(0.01\sqrt{\frac{n}{0.75(0.25)}})\ge 0.975$$

即至少应该取 n 使

$$0.01\sqrt{\frac{n}{0.75(0.25)}} \approx 1.96$$

解得 $n = 1.96^2 \times 0.1875 \approx 7203.$

（C）Liapunov 定理

定理（Liapunov 定理） 设独立随机变量序列$\{X_n\}$的数学期望和方差分别为$EX_i = \mu_i$和$DX_i = \sigma_i^{\ 2}$（$i = 1,2,\cdots$），记$B_n^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{\ 2}$，如果满足以下的 Liapunov 条件：存在$\delta > 0$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{\ 2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E(|X_i - \mu_i|)^{2+\delta} = 0，$$

则对任意的$x \in \boldsymbol{R}$有

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz .$$

注：实际上有更一般的结果

定理（**Lindeberg 中心极限定理**）设独立随机变量序列$\{X_n\}, X_n \sim f_{X_n}(x)$的数学期望和方差分别为$EX_i = \mu_i$和$DX_i = \sigma_i^{\ 2}$（$i = 1,2,\cdots$），记$B_n^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^{\ 2}$，如果$\{X_n\}$满足以下的 Lindeberg 条件：$\forall \tau > 0$有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^{\ 2}} \sum_{i=1}^{n} \int_{|x-\mu_i|>\tau B_n} (x-\mu_i)^2 f_{X_i}(x) dx = 0，$$

则对任意的$x \in \boldsymbol{R}$有

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{1}{B_n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_i) \le x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{z^2}{2}} dz .$$

（应用说明正态分布的广泛存在性）

例 (随机模拟算法（Monte Carlo 方法）见教材。