习题课 1 解答

1. 先证明下连续性。

设 $\{A_n\}$ 是 F 中一个单调不减的事件序列，即

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} A_n$$

若定义 $A_0 = \emptyset$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i - A_{i-1})$。由于 $A_{i-1} \subset A_i$ ，且 $(A_i - A_{i-1})$ 两两不交。由可列可加性得

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i - A_{i-1}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(A_i - A_{i-1}).$$

又由有限可加性

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i - A_{i-1}) = P(\bigcup_{i=1}^{n}(A_i - A_{i-1})) = P(\mathrm{A_n}).$$

所以

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

再证明上连续性。

设 $\{A_n\}$ 是 F 中一个单调不增的事件序列，则 $\{\mathrm{A_n}^{\mathrm{c}}\}$ 为单调不减的事件序列。由上面所证知

$$1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty}[1 - P(A_n)] = \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i).$$

至此，得

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i).$$

下面证明，有限可加性 + 下连续性 ⇔ 可数可加性。

充分性已证，下证必要性。

设 $\{B_n\}$ 是 F 中一个两两不相容的事件序列，由有限可加性知：

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i).$$

等式左边不超过 1，所以等式右边的级数收敛，即

$$\lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i).$$

记 $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$，则 $\{F_n\}$ 为单调不减的事件序列。由下连续性得

$$\lim_{n\to\infty} P(F_n) = P(\lim_{n\to\infty} F_n) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i).$$

得证。

2. 解：设事件 $A=\{$第一次取出的是合格品$\}$，$A_i=\{$第一次是从第 i 箱取出的$\}$，$i=1,2,3,4$。$B=\{$再从该箱中取出的是次品$\}$，$B_i=\{$第一次取出的合格品来自第 i 箱$\}$，$i=1,2,3,4$。

则有

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=0.25;$$

$$P(A\mid A_1)=0.9,\ P(A\mid A_2)=0.8,\ P(A\mid A_3)=0.7,\ P(A\mid A_4)=0.6;$$

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}(P(A_i)P(A\mid A_i))=0.75.$$

$$P(B_1)=P(A_1\mid A)=\frac{P(A_1)P(A\mid A_1)}{P(A)}=9/30;$$

$$P(B_2)=P(A_2\mid A)=\frac{P(A_2)P(A\mid A_2)}{P(A)}=8/30;$$

$$P(B_3)=P(A_3\mid A)=\frac{P(A_3)P(A\mid A_3)}{P(A)}=7/30;$$

$$P(B_4)=P(A_4\mid A)=\frac{P(A_4)P(A\mid A_4)}{P(A)}=6/30;$$

$$P(B\mid B_1)=0.1,P(B\mid B_2)=0.2,P(B\mid B_3)=0.3,P(B\mid B_4)=0.4.$$

故所求概率为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}(P(B_i)P(B\mid B_i))=7/30.$$

3. 解：记事件 $A=\{$甲乙之间恰有 k 个人$\}$。

（1）排成一行时：

首先从甲乙两人中选出一人，站在一个位置上，比如，排在第 i 位上, 则另一个人必须排在第 $i+k+1$ 位上，且 $i+k+1\leq n$ ，即 i $\leq n-k-1$ ，即选出的人有 $n-k-1$ 种排法。

最后，让余下的 $n-2$ 个人排在其余的 $n-2$ 个空位上，有 $(n-2)!$ 种排法。

由乘法原理知，甲乙之间恰有 k 个人的排法共有

$$2(n-k-1)(n-2)!$$

种排法，故

$$P(A)=\frac{2(n-k-1)(n-2)!}{n!}=\frac{2(n-k-1)}{n(n-1)}.$$

（2）排成环时：

解法 1：

排成环时共有（n-1)！种排法，而事件 A 的样本点个数为 $(n-2)$ ，故

$$P(A)=\frac{(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{1}{n-1}.$$

解法 2：

首先从甲乙二人中选出一人，比如甲排在某位上，然后让其余 $n-2$ 人排上，则剩余一个位置留给乙，其共有 $n-1$ 中可能站法。
而事件 A 要求乙只有一种站法，故

$$P(A)=\frac{1}{n-1}.$$

解法 3：
对这 n 个位置编号 $1,2,\cdots,n$，所以共有 $n!$ 种排法。
首先从甲乙二人中选出一人，比如甲排在某位上，共有 n 种选择，因为顺时针要求，乙的位置便定了，然后让其余 $n-2$ 人排上，共有 $(n-2)!$ 种选择，所以

$$P(A)=\frac{n(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n-1}.$$

4. 解：设事件 $A=\{$取出的 n 个数中最大的是 $k\}$，$B=\{$取出的 n 个数中最大的不超过 $m\}$，$1\leq m\leq 10$。易知

$$P(B_m)=\frac{C_m^n}{C_{10}^n}.$$

而 $A=B_k-B_{k-1}$ ，且 $B_k\supset B_{k-1}$ ，得

$$P(A)=P(B_k-B_{\mathrm{k}-1})=P(B_k)-P(B_{\mathrm{k}-1})=\frac{C_k^n-C_{k-1}^n}{C_{10}^n}.$$

5. 解：设 $A_i=\{i$ 次交换后黑球出现在甲袋中$\}$，$i=1,2,3$。
记 $p_i=P(A_i)$ ，则由末步分析法得

$$p_i=0.9p_{i-1}+0.1(1-p_{i-1})$$

由于 $p_1=0.9$ ，可得 $p_2=0.82,\ p_3=0.756.$

6. 解：$A_i=$\{第 i 次摸得白球\}，显然 $P(A_1)=\frac{a}{a+b}$。
用首步分析法归纳证明，$P(A_i)=\frac{a}{a+b}$. 只要注意到 $P(A_{i+1}\mid A_1)$ 就是表示在 $a-1$ 个白球与 b 个黑球的袋中第 i 次摸得白球的概率，就容易解决了。

7. 解：设 p_i 为从第 i 个袋中取出黑球的概率，则对 $i=2,\cdots,N$ ，有

$$\begin{aligned}p_i&=p_{i-1}\frac{a+1}{a+b+1}+(1-p_{i-1})\frac{a}{a+b+1}\\&=\frac{1}{a+b+1}p_{i-1}+\frac{a}{a+b+1},\end{aligned}$$

由于 $p_1 = \frac{a}{a+b}$ ，故

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_N = \frac{a}{a+b}.$$

8. 解：假定第 15 排的座位依次编号为 1∼20 号，设事件
$A_i =$\{甲坐第 i 号座位\}，$i = 1, 2, \cdots, 20$，$B =$\{甲乙两人相邻而坐\}，则有

$$P(A_i) = \frac{1}{20},\ \ i = 1, 2, \cdots, 20.$$

当甲坐第 1（或 20）号座位时，乙可坐在甲的左边或右边就能与甲相邻，所以

$$P(B \mid A_1) = P(B \mid A_{20}) = \frac{1}{19}.$$

而当甲坐第 i $(i = 2, 3, \cdots, 19)$ 号座位时，乙只有坐第 2（或 19）号座位才能与甲相邻，所以

$$P(B \mid A_i) = \frac{2}{19},\ i = 2, 3, \cdots, 19.$$

于是，由全概率公式得

$$P(B) = \sum_{i=1}^{20} P(A_i) P(B \mid A_i) = \frac{1}{20}(\frac{1}{19} + 18 \times \frac{2}{19} + \frac{1}{19}) = \frac{1}{10}.$$

9. 解：设 $A =$\{摸到的两球都是白球\}，$B =$\{丢失的是白球\}，则由 Bayes 公式

$$P(B) = \frac{m}{m+n},\ P(B^c) = \frac{n}{m+n};\ \text{且}\ P(A \mid B) = \frac{C_{m-1}^2}{C_{m+n-1}^2},\ P(A \mid B^c) = \frac{C_m^2}{C_{m+n-1}^2}.$$

则有

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A \mid B)P(B) + P(A \mid B^c)P(B^c)} = \frac{m-2}{m+n-2}.$$