习题课 2 解答

1. 解:

问题一:

根据” 父母” 代的不同基因型用全概率公式分别计算:

P (子一代 AA 型) $=(u+v)^2; P$ 子一代 aa 型) $=(w+v)^2$ （可用对称性）;

P (子一代 Aa 型) $=2(u+v)(w+v)$ 。

若记 $\alpha=u+v; \beta=w+v$ ，则子一代中，这三种基因型式的比例为 $\alpha^2:2\alpha\beta:\beta^2$ 。

重复上面的过程计算：可得子二代中，这三种基因型式的比例也为 $\alpha^2:2\alpha\beta:\beta^2$ 。即从第二代开始，三种基因型式的比例不变。这就是著名的 Hardy-Weinberg 平衡原理。

问题二:

(a) P (带菌者 $\mid$ 成人) $=\frac{P(Aa)}{P(AA\cup Aa)}=\frac{2}{3}$;

(b) $P($ 子 $AA)=\frac{2}{3}-\frac{p}{3}; P($ 子 $Aa)=\frac{1}{3}+\frac{p}{6}; P($ 子 $aa)=\frac{p}{6}$ 。

2. 解：记

$U_i=\{$ 随机选取得一只盒子为第 i 号盒 $\}$,

$R_m=\{$ 取到的前 m 只球均为白球 $\}$,

$R=\{$ 取到的第 $m+1$ 只球是白球 $\}$, 问题要求的概率为 $P\left(R \mid R_m\right)$ 。

由于 R_m 和 R 关于 U_i 是条件独立的，即选定第 i 号盒 U_i 的条件下，R_m 和 R 是相互独立的，故

$$P\left(R \mid R_m U_i\right)=P\left(R \mid U_i\right)=\frac{i}{n}$$

于是由全概率公式得

$$P\left(R \mid R_m\right)=\sum_{i=0}^n P\left(R \mid R_m U_i\right) P\left(U_i \mid R_m\right)$$

而 $P\left(U_i \mid R_m\right)$ 可以由 Bayes 公式获得，即

$$P\left(U_i \mid R_m\right)=\frac{P\left(R_m \mid U_i\right) P\left(U_i\right)}{\sum_{j=0}^n P\left(R_m \mid U_j\right) P\left(U_j\right)}=\frac{\left(\frac{i}{n}\right)^m \frac{1}{n+1}}{\sum_{j=0}^n\left(\frac{j}{n}\right)^m \frac{1}{n+1}}=\frac{\left(\frac{i}{n}\right)^m}{\sum_{j=0}^n\left(\frac{j}{n}\right)^m}$$

因此,

$$P\left(R \mid R_m\right)=\sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \frac{\left(\frac{i}{n}\right)^m}{\sum_{j=1}^n\left(\frac{j}{n}\right)^m}=\frac{\sum_{i=1}^n\left(\frac{i}{n}\right)^{m+1}}{\sum_{j=1}^n\left(\frac{j}{n}\right)^m}$$

注: $P\left(R \mid R_m\right)=\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n\left(\frac{i}{n}\right)^{m+1}}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n\left(\frac{j}{n}\right)^m} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^1 x^{m+1} d x}{\int_0^1 x^m d x}=\frac{m+1}{m+2}$

3.

解法一（利用二项分布）:

在 m 次失败之前取得 n 次成功当且仅当前 $m+n-1$ 次试验中至少成功 n 次。

因为如果在前 $m+n-1$ 次试验中至少成功 n 次，则在前 $m+n-1$ 次试验中至多失败 $m-1$ 次，于是 n 次成功发生在 m 次失败之前;

另一方面, 如果在前 $m+n-1$ 次试验中成功的次数少于 n 次, 则在前 $m+n-1$ 次试验中失败次数至少为 m 次，这样就不可能在 m 次失败之前取得 n 次成功。所以,

$$p=P(X \geq n)=\sum_{k=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^k p^k q^{n+m-1-k} .$$

解法二（利用负二项分布（Pascal 分布））:

(直到第 r 次试验成功时，试验所需要的次数 Y 的分布是

$P(Y=n)=C_{n-1}^{r-1} p^r q^{n-r}, n=r, r+1, \cdots)$

在 m 次失败之前取得 n 次成功, 试验最多进行 $m+n-1$ 次; n 次成功发生在 m 次失败之前, 进行试验的次数可能是 $n, n+1, \ldots, n+m-1$ 。故所求概率为

$$p=P(Y \leq n+m-1)=\sum_{k=n}^{n+m-1} C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}$$

.

4. 解:

不放回情形: 直接用古典概型（多元超几何分布）

$$P\left(X_m=M\right)=\frac{C_{M-1}^{m-1} C_1^1 C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

放回情形:

$$P\left(X_m=M\right)=P\left(X_m \leq M\right)-P\left(X_m \leq M-1\right)$$

由于

$$P\left(X_m \le M\right) = \sum_{k=m}^{n} C_n^k \frac{M^k (N-M)^{n-k}}{N^n}$$

所以

$$\begin{aligned} &P\left(X_m = M\right) = P\left(X_m \le M\right) - P\left(X_m \le M-1\right) \\ &\sum_{k=m}^{n} C_n^k \frac{M^k (N-M)^{n-k}}{N^n} - \sum_{k=m}^{n} C_n^k \frac{(M-1)^k (N-M+1)^{n-k}}{N^n} \end{aligned}$$

5．

(1) $\forall m \ge 2$，有

$$P\left(X_1 + X_2 = m\right) = \sum_{k=1}^{m-1} P\left(X_1 = k\right) P\left(X_2 = m-k\right) = (m-1) p^2 q^{m-2}$$

(2)

$$M_{X_k}(u) = E\left(e^{uX}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{uk} p q^{k-1} = \frac{pe^u}{1-qe^u}$$

$$EX_k = M'_{X_k}(0) = \frac{1}{p}, \quad EX_k^2 = M''_{X_k}(0) = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\begin{aligned} E\left[\left(X_1 + X_2 + X_3\right)^2\right] &= \sum_{k=1}^{3} EX_k^2 + 2 \sum_{1 \le k < l \le 3} E\left(X_k X_l\right) \\ &= \frac{6-3p}{p^2} + \frac{6}{p^2} \\ &= \frac{12-3p}{p^2} \end{aligned}$$

6. 解:

$$\begin{aligned} &p_{i,j}(s, s+t) - p_{i,j}(s, s) = P\left(N_{s+t} = j \mid N_s = i\right) - \delta_{i,j} \\ &= \frac{P\left(N_{s+t} - N_s = j-i, N_s = i\right)}{P\left(N_s = i\right)} - \delta_{i,j} \\ &= P\left(N_{s+t} - N_s = j-i\right) - \delta_{i,j} \\ &= \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{j-i} e^{-\lambda t}}{(j-i)!} - \delta_{i,j} & j \ge i \\ 0 & j < i \end{cases} \end{aligned}$$

当 $i = j, \lim_{t \to 0^+} \frac{p_{i,j}(s,s+t) - p_{i,j}(s,s)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{e^{-\lambda t} - 1}{t} = -\lambda$

当 $j \geq i+1$ 时, $\lim_{t \to 0^+} \frac{p_{i,j}(s,s+t)-p_{i,j}(s,s)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} t^{j-i-1} = \begin{cases} \lambda & j=i+1 \\ 0 & j>i+1 \end{cases}$;

故

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{p_{i,j}(s,s+t)-p_{i,j}(s,s)}{t} = \begin{cases} -\lambda & j=i \\ \lambda & j=i+1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$