自测题

注：下列各题为自测题，供参考。考试题目不从下列各题出。

1，设在时间区间$[0,t]$内到商店的顾客数 $N(t)$是强度为 λ 的泊松过程，每个顾客购买货物的概率为 p，不购买货物的概率为 $1-p$，且他们是否购买货物是相互独立的。令 $Y(t)$为$(0,t)$内购买货物的顾客数，证明：$\{Y(t),\ t\geq 0\}$是强度为 λp 的泊松过程。

证明：显然 $Y(0)=0$, $Y(t)$是独立增量过程和平稳增量过程。

$$P(Y(t)=k\}=\sum_{i=k}^{\infty}P\{N(t)=i\}P\{Y(t)=k\,|\,N(t)=i\}$$
$$=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}C_i^k p^k(1-p)^{i-k}$$
$$=\sum_{i=k}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}\lambda^{i-k}}{i!}\frac{i!}{k!(i-k)!}p^k(1-p)^{i-k}$$
$$=\sum_{i-k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}p^k}{k!}\frac{[\lambda(1-p)]^{i-k}}{(i-k)!}$$
$$=\frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!}e^{[\lambda(1-p)]}=\frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}$$

由上述可知，$\{Y(t),\ t\geq 0\}$是强度为 λp 的泊松过程。

也可以这样证明：对任一 t，有

$$P\{Y(t)=k\}=\sum_{n=0}^{\infty}P\{Y(t)=k\,|\,N(t)=k+n\}P\{N(t)=k+n\}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}C_{k+n}^k p(1-p)^n\frac{(\lambda t)^{k+n}}{(k+n)!}e^{-\lambda t}$$
$$=e^{-\lambda t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda pt)^k[\lambda(1-p)t]^n}{k!n!}$$
$$=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\lambda(1-p)t]^n}{n!}$$
$$=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)t}=e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^k}{k!}$$

所以，$\{Y(t),\ t\geq 0\}$是强度为 λp 的泊松过程。

2 设 X(t)是参数为 λ 的泊松过程，证明，X(t)的特征函数为$\varphi(v)=E[e^{jvX(t)}]$ $=e^{\lambda t(e^{jv}-1)}$；对 t2>t1 及两个整数 m 和 n，有

$$P\{X(t_1)=m, X(t_2)=m+n\}=e^{-\lambda t_2}\lambda^{m+n}\frac{(t_2-t_1)^n t_1^{\ m}}{m!n!}$$

证明：因为 $P\{X(t)=k\}=\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k=0,1,2,\ldots,$

所以

$$\begin{aligned}\varphi(v)=E[e^{jvX(t)}]&=\sum_{k=0}^{\infty}e^{jvk}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\\&=e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{jv}\lambda t)^k}{k!}\\&=e^{-\lambda t}e^{\lambda t e^{jv}}=e^{\lambda t(e^{jv}-1)}\end{aligned}$$

由于泊松过程是独立增量过程，故

$$\begin{aligned}&P\{X(t_1)=m, X(t_2)=m+n\}\\&=P\{X(t_1)=m, X(t_2)-X(t_1)=n\}\\&=P\{X(t_1)=m\}P\{X(t_2)-X(t_1)=n\}\\&=e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)^m}{m!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\frac{\lambda^n(t_2-t_1)^n}{n!}=e^{-\lambda t_2}\lambda^{m+n}\frac{(t_2-t_1)^n}{m!n!}t_1^{\ m}\end{aligned}$$

3 设 $X_1(t)$与 $X_2(t)$是两个参数分别为 λ_1 与 λ_2 的泊松过程，证明 $X(t)=X_1(t)+X_2(t)$是参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松过程，$X(t)=X_1(t)-X_2(t)$不是泊松过程。

证明： 因为

$$\begin{aligned}\varphi_{X_1}(v)=E[e^{jvX_1(t)}]=\mathrm{e}^{\lambda_1 t(e^{jv}-1)}\\\varphi_{X_2}(v)=E[e^{jvX_2(t)}]=\mathrm{e}^{\lambda_2 t(e^{jv}-1)}\end{aligned}$$

而 $X_1(t)$与 $X_2(t)$相互独立，所以

$$\varphi_X(v)=\varphi_{X_1}(v)\varphi_{X_2}(v)=e^{(\lambda_1+\lambda_2)t(e^{jv}-1)}$$

从而知 X(t)服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松分布。

对于 $X(t)=X_1(t)-X_2(t)$，有

$$\begin{aligned}\varphi_X(v)&=E[e^{jvX(t)}]=E[e^{jv[X_1(t)-X_2(t)]}]\\&=E[e^{jvX_1(t)}]E[e^{-jvX_2(t)}]=\varphi_{X_1}(v)\varphi_{X_2}(-v)\\&=e^{\lambda_1 t(e^{jv}-1)}e^{\lambda_2 t(e^{jv}-1)}\\&=e^{\lambda_1 te^{jv}+\lambda_2 te^{-jv}-(\lambda_1+\lambda_2)t}\end{aligned}$$

故 $\varphi_X(v)$ 不是泊松过程的特征函数，及 $X(t)$不是泊松过程。

4，设有独立重复试验序列$\{X_n, n\geq 1\}$，以$X_n=1$记第n次试验时事件A发生，且$P\{X_n=1\}=p$；以$X_n=0$记第n次试验时事件A，且$P\{X_n=0\}=q=1-p$。若令$Y_n=\sum_{k=1}^{n}X_k, n\geq 1$，证明：$\{Y_n, n\geq 1\}$是齐次马尔可夫链，并求二步转移概率矩阵。

证明：因为$Y_1=X_1=i_i, Y_2=X_1+X_2,\ldots,Y_n=\sum_{k=1}^{n}X_k=i_n$，$Y_{n+1}=Y_n+X_{n+1}=i_{n+1}$，所以，$X_{n+1}=Y_{n+1}-Y_n=i_{n+1}-i_n$。由于$X_{n+1}$与$Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$相互独立，因此

$$
\begin{aligned}
&P\{Y_{n+1}=i_{n+1} \mid Y_n=i_n, Y_{n-1}=i_{n-1},\ldots,Y_1=i_1\}\\
&=P\{X_{n+1}=i_{n+1}-i_n \mid Y_n=i_n, Y_{n-1}=i_{n-1},\ldots,Y_1=i_1\}\\
&=P\{X_{n+1}=i_{n+1}-i_n\}
\end{aligned}
$$

同理 $P\{Y_{n+1}=i_{n+1} \mid Y_n=i_n\}=P\{X_{n+1}=i_{n+1}-i_n\}$

所以，$\{Y_n, n\geq 1\}$是马尔可夫链。由于$\{X_n, n\geq 1\}$是齐次马尔可夫链，故$\{Y_n, n\geq 1\}$也是齐次马尔可夫链。

$$
\begin{aligned}
p_{ij}&=P\{Y_{m+1}=j \mid Y_m=i\}=P\{X_{m+1}=j-i\}\\
&=\begin{cases} q, & j=i \\ p, & j=i+1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}
$$

故 $$P=\begin{bmatrix} q & p & & & \\ & q & p & & \\ & & q & p & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$P^{(2)}=PP=\begin{bmatrix} q^2 & 2pq & p^2 & & & \\ & q^2 & 2pq & p^2 & & \\ & & q^2 & 2pq & p^2 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

5，设 I ＝{1,2,3,4}，其一步转移概率矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

试对其状态进行分类，确定哪些状态是常返态，并确定其周期。

解：状态传递图（略）

因为对一切 $n \geq 1$， $f_{44}^{(n)} = 0$，所以 $f_{44} = 0 < 1$，从而知状态 4 是非常返态。又

$$f_{33}^{(1)} = \frac{2}{3}, f_{33}^{(n)} = 0 \ (n \geq 2)$$

所以 $f_{33} = \frac{2}{3} < 1$，从而知状态 3 也是非常返态。

而 $f_{11} = f_{11}^{(1)} + f_{11}^{(2)} = 1/2 + 1/2 = 1$， $f_{22} = f_{22}^{(1)} + f_{22}^{(2)} + \cdots = 0 + 1/2 + 1/2^2 + \ldots = 1$

所以状态 1 和状态 2 是常返态。又知

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 1 * \frac{1}{2} + 2 * \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < +\infty$$

$$\mu_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{22}^{(n)} = 1 * 0 + 2 * \frac{1}{2} + 3 * \frac{1}{2^2} + \ldots = 3 < +\infty$$

而其周期均为 1，故状态 1 与状态 2 是正常返，且为遍历态。

6 设马尔可夫链的状态空间为 I={1,2,3,4}，转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

讨论 $\lim\limits_{n \to \infty} p_{i1}^{(n)}$ 。

解：状态 1 和 2 都是吸收态，都是正常返非周期的基本常返闭集，而 N={3,4} 是非常返集，有

$$\begin{aligned} & p_{11}^{(n)} = 1, p_{21}^{(n)} = 0, p_{31}^{(n)} = 1/3 \\ & p_{41}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} f_{41}^{(l)} * p_{11}^{(n-l)} = \sum_{i=1}^{n} f_{41}^{(l)} \\ & \quad = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} * \frac{1}{4} + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} * \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} * \frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} \end{aligned}$$

说明 $\lim\limits_{n \to \infty} p_{i1}^{(n)}$ 存在，但与 i 有关。

7 设有齐次马尔可夫链的转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

讨论此马尔可夫链的遍历性，并求平稳分布。

解：马尔可夫链的状态空间为 I={1,2}，都是吸收态，状态空间可以分解为两个闭集之和，及 I={1}+{2}，故不死不可约的马尔可夫链。

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=PP...P=P^{n}=P^{(n)}$$

所以状态 1 和状态 2 都是非周期的，且有

$$\lim_{n\to\infty}p_{11}^{(n)}=1\neq\lim_{n\to\infty}p_{21}^{(n)}=0$$
$$\lim_{n\to\infty}p_{12}^{(n)}=0\neq\lim_{n\to\infty}p_{22}^{(n)}=1$$

故不是遍历链，但由$\pi=\pi P$，得

$$\pi=(\pi_1,\pi_2)，\quad \pi_1+\pi_2=1$$

故有$\begin{cases}\pi_1=\pi_1,\\ \pi_2=\pi_2,\end{cases}\quad \pi_1+\pi_2=1$

可见平稳分布是存在的，且有无穷多个。

$$\{p,q\},0\le p,0\le q,p+q=1$$

都是平稳分布。说明此齐次马尔可夫链不满足遍历链条件，但存在平稳分布，只是平稳分布不唯一。

8，证明马尔可夫过程$\{X(t),t\in[0,\infty)\}$的转移概率矩阵$P(t)=(p_{ij}(t),i,j\in I)$,满足

$$\mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}(s+t),\ s,t\geq 0$$

证明：任取$i,j\in I$，有

$$p_{ij}(s+t)=P\{X(s+t)=j\mid X(0)=i\}$$
$$=\frac{P\{X(s+t)=j,X(0)=i\}}{P\{X(0)=i\}}$$
$$=\sum_{k:P\{X(s)=k,X(0)=i\}>0}\frac{P\{X(s+t)=j,X(0)=i\}}{P\{X(0)=i\}}\times\frac{P\{X(s+t)=j,X(s)=k,X(0)=i\}}{P\{X(s+t)=j,X(0)=i\}}$$
$$=\sum_{k:P\{X(s)=k,X(0)=i\}>0}\frac{P\{X(s+t)=j\mid X(s)=k,X(0)=i\}}{P\{X(s)=k\mid X(0)=i\}}$$
$$=\sum_{k\in I}p_{ik}(s)p_{kj}(t)$$

即 $\mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}(s+t)$

9，设$\{X(t),t\ge 0\}$是以 I={0,1}为状态空间的马尔可夫过程，转移概率矩阵

$P(t)=\{p_{ij}(t),i,j\in I\}$为标准阵，且

$$\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(1-p_{00}(t))=q_0=\lambda, \lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}(1-p_{11}(t))=q_1=\mu$$

求(1) **P**(t), 在 $p_0=P(X(0)=0), 0<p_0<1$时

(2) E[X(t)], D[X(t)]

解：（1）设 P(t)的密度矩阵是 Q。由于 I 有限，知 Q 是保守阵，即

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu\end{bmatrix}$$

因为 P'(t)=P(t)Q, 即有方程组

$$\begin{cases}p'_{i0}(t)=-(\lambda+\mu)p_{i0}(t)+\mu \\ p'_{i1}(t)=-(\lambda+\mu)p_{i1}(t)+\lambda\end{cases} \quad i=0,1$$

解方程组可得

$$P(t)=\begin{bmatrix}\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\end{bmatrix}$$

且

$$\begin{aligned}E[X(t)]&=P(X(t)=1)\\&=p_0p_{01}(t)+(1-p_0)p_{11}(t)\\&=p_0[p_{01}(t)-p_{11}(t)]+p_{11}(t)\\&=-p_0e^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E[X(t)]&=E[X2(t)]-(E[X(t)])2=E[X(t)](1-E[X(t)])\\&=\left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}-p_0e^{-(\lambda+\mu)t}\right]\times\left[\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}+p_0e^{-(\lambda+\mu)t}\right]\end{aligned}$$