第 1 周讲稿

第一章　概率与概率空间

§ 1 引言

1. 随机数学的研究对象
   确定性现象、随机现象
   研究对象：随机现象的统计规律性

2. 发展简史

概率论发展简史：

16 世纪 欧洲学者开始研究赌博中的一些简单问题（掷骰子、扑克等）；

17 世纪中叶 Pascal，Fermat 等基于排列组合（组合数学）研究一些较为复杂赌博问题（得分问题，破产问题等）；

1713 年第一个分水岭，J.Bernoulli（大数定律）$\overset{1716\text{年}}{\Rightarrow}$ $De\ Moivre$（中心极限定理）（在简单情形下，用他导出的 $n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ 首次说明了正态分布的重要性，其一般结论后由 Laplace 给出）

1812 年第二个分水岭，P.S. Laplace《概率的分析理论》（给出了概率的古典定义，运用了 Laplace 变换，母函数及差分方差的方法，完成了组合计算到分析方法的过渡）；其后的概率主流，是推广和发展大数定律和中心极限定理；Chebyshev(1866 年)⇒Liapunov（1901 年（特征函数方法））

20 世纪，Khintchine, Kolmogorov, Levy, Wiener 等，特别是 1933 年的 Kolmogorov 的概率公理化体系的提出。

随机过程发展简史：

1900 年（1905 年）Bachelier （Einstein）的 Brown 运动的提出；

1907 年 Markov 的 Markov 链（1931 年 Kolmogorov 的 Markov 过程）；

1923 年 Wiener 的 Brown 运动的数学定义；

1934 年 Khintchine 的平稳过程；

1938 年 Levy 的独立增量过程；

1951 年 Ito 的随机积分，1953 年 Doob 的随机过程一般理论和鞅论。

随机过程的研究方法：概率方法（轨道性质、停时、SDE 等）；分析方法（测度论、半群、函数论、微分方程等）

§ 2 随机事件及其概率

1. 一些基本概念：样本空间 Ω，事件，事件的运算与法则
   如何研究：随机试验（两个条件）
   ☆ 能正确写出恰当描述随机试验的样本空间；
   ☆ 样本点和样本空间的选取并不是唯一的（但不管选取哪个，事件的概率是唯一

的），要选择容易计算概率的那一个样本空间；

☆ 同一样本空间可以表示不同的随机试验.

附：事件的四种关系，三种运算及运算法则：

☆ $\omega \in A \Leftrightarrow$ 事件 ***A*** 发生

☆ 运算法则：着重注意对偶律（De Morgan 律）

（1） 事件之间的四种关系

关系	符号	概率论	集合论
包含关系	$A \subset B$	事件 ***A*** 发生则事件 ***B*** 必发生	***A*** 是 ***B*** 的子集
等价关系	$A = B$	事件 ***A*** 与事件 ***B*** 相等	***A*** 与 ***B*** 相等
对立关系	A^c	事件 ***A*** 的对立事件（或逆事件）	***A*** 的余集
互斥关系	$AB = \phi$	事件 ***A*** 与事件 ***B*** 不能同时发生(互不相容)	***A*** 与 ***B*** 无公共元素

（2） 事件之间的三种运算

运算	符号	概率论	集合论
事件的和（并）	$A \cup B$（或 $A + B$）	事件 ***A*** 与事件 ***B*** 至少有一个发生	***A*** 与 ***B*** 的并集
	$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$	事件 $A_1, \cdots, A_n$ 至少有一个发生	$A_1, \cdots, A_n$ 的并集
事件的积（交）	$A \cap B$（或 AB）	事件 ***A*** 与事件 ***B*** 同时发生	***A*** 与 ***B*** 的交集
	$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$	事件 $A_1, \cdots, A_n$ 同时发生	$A_1, \cdots, A_n$ 的交集
事件的差	$A - B$（或 $A \setminus B$）	事件 ***A*** 发生而事件 ***B*** 不发生	***A*** 与 ***B*** 的差集

（3） 事件的运算法则

交换律： $AB = BA; A \cup B = B \cup A$	结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$； $(AB)C = A(BC)$
分配律：$(A \cup B)C = AC \cup BC$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$	**对偶律(De Morgan 律):** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c; (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$； $(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$
补元律： $AA^c = \phi; A \cup A^c = \Omega$	还原律：$(A^c)^c = A$
蕴涵律：若 $AB = \phi$，则 $A \subset B^c, B \subset A^c$	分解律：若 $A \subset B$，则 $B = A \cup A^c B$

差积转换律： $A-B=AB^c=A-AB$	**吸收律：若** $A\subset B$ **，则** $AB=A; A\bigcup B=B$
矛盾律： $AA\ \ =\phi$	**排中律：** $A\bigcup A^c=\Omega$

2. 两类**等可能概型**：古典概型与几何概型

★ 古典概型的前提； **定义：** $P(A)=\dfrac{\#A}{\#\Omega}$ **,** $A\in\mathscr{F}$**；**

工具：排列和组合数数，要注意分子分母数数时的一致性

★ 几何概型的前提； **定义：设** Ω **为可测区域，** $A\in\mathscr{F}$**且可测，** $P(A)=\dfrac{L(A)}{L(\Omega)}$,

工具：微积分求区域面积、体积等

例 1（摸球问题、抽签问题）袋中装有 α 个白球及 β 个黑球，

（1）从袋中任取 $a+b$ 个球，试求所取的球恰含 a 个白球和 b 个黑球的概率（$a\le\alpha, b\le\beta$）.

【$\frac{C_\alpha^a C_\beta^b}{C_{\alpha+\beta}^{a+b}}$】

（2）从袋中任意地接连取出 $k+1(k+1\le\alpha+\beta)$ 个球，如果每球被取后不放回，试求最后取出的球是白球的概率。 【$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$】

例 2（约会问题） 两人相约于晚 7 点到 8 点间在某地会面，先到者等足 20 分钟便立即离去. 设两人的到达时刻在 7 点到 8 点间都是随机且等可能的. 求两人能会面的概率 p. 【$\frac{5}{9}$】

例 3（Buffon 问题） 平面上画有一族相距为 a 的平行线. 向此平面投一长为 $l\,(<a)$的针. 求针与平行线相交的概率 p. 【$\frac{2l}{a\pi}$】

存在的问题：

☆Bertrand 悖论 （在圆内任意作一弦，求其长超过圆内接正三角形边长的概率？）

问题的提法不确定，这里的“任意”至少有 3 种解释，相对于各自的解释，每种解法都正确。原因：当随机试验有无穷多个可能结果时，有时很难规定“等可能”这一概念。

☆抛硬币之例（书中例子介绍例 1.3；例 1.4，例 1.5）；

☆有限样本空间的非古典概型例子。

§ 3 概率空间及概率的计算

1. 事件域的引入

定义：事件族(Ω 的子集族)$\mathcal{F}$ 称为σ**-域**(也称为σ**-代数**或**事件体**), 如果它满足下列条件：

i) $\Omega \in \mathcal{F}$ ；

ii) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $A^c \in \mathcal{F}$;

iii) 若 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$,

几个特殊的 σ -域介绍（例子）。

2. 概率的公理化定义

定义：概率（也称为**概率测度**）P 为 $\mathcal{F}$ 上的非负值函数，即对每一事件 $A \in \mathcal{F}$，都可定义一个数 $P(A)$，满足下列条件：

(1) 非负性： 对一切 $A \in \mathcal{F}$，有 $P(A) \ge 0$ (1.2)

(2) 规范性： $P(\Omega) = 1.$ (1.3)

(3) 可数可加性： 若 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ 为一列两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) \tag{1.4}$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率。试验的样本空间 Ω 、事件 σ -域 $\mathcal{F}$ 及定义在 $\mathcal{F}$ 上的概率 P 所构成的三元组(Ω , $\mathcal{F}$, P), 称为描述该随机试验的概率空间.

注 1) 如果 Ω 只包含 n 个点，则每个单点集 $\left\{\omega_j\right\}$ $j=1,2,\cdots,n$ 是一个基本事件，取 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的所有子集的全体, 则对每个 $\left\{\omega_j\right\}$ 指定概率就足够了。因为对任意 $A \in \mathcal{F}$, 我们有 $P\left(A\right) = \sum_{\omega \in A} P\left(\omega\right)$。当基本事件都是等可能的情况下，我们进一步可推得

$$P\left(\left\{\omega_j\right\}\right) = \frac{1}{n} \qquad j=1,2,\cdots.n,$$

此时, $P(A) = \frac{\# A}{n}$ （$A \in \mathcal{F}$）。由此可见古典概型仅仅是 Kolmogorov 模型中的一个非常小的子模型.

例（有限概率空间，但不等可能）从 $1,2,\cdots,100$ 中选取一数，取到不超过 50 的数的概率为 p，取到不超过 50 的数的概率为 3p，求取一数它为平方数的概率？ 【 $\frac{16}{200}$ 】

2) 如果 Ω 包含可数个点，我们就不能对基本事件做等可能的假设，但仍然可以通过对每个基本事件 $\left\{\omega\right\}$ 指定概率，而得到概率 P。因为对任意 $A \in \mathcal{F}$ (其中 $\mathcal{F}$ 为 Ω 的所有子集的全体)，令 $P\left(A\right) = \sum_{\omega \in A} P\left(\omega\right)$，就得到满足概率公理的概率测度 P 。

3) 如果 Ω 包含不可数多个点，每个单点集是一基本事件, 虽然这时各单点集可能完全对称,它们出现的可能性也相同，但是这时我们不能简单地指定每个基本事件的概率，因为

这个值为零。更深层的原因是：此时 $\mathcal{F}$ 一般不能取 Ω 的所有子集的全体，这相当于实分析中“难测度问题”。

3. 概率的简单性质

性质 1（求逆公式） 如果 $A\in\mathscr{F}$，则 $P(A^c)=1-P(A)$.

性质 2（减法公式） 如果 $A,B \in \mathscr{F}$, 则 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$；

特别地，当 $A\supset B$ 时，有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$，从而 $P(A)\geq P(B)$ **（单调性）**.

性质 3（一般的加法公式） 如果 $A,B\in \mathscr{F}$，则

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\leq P(A)+P(B)$$

一般地，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n \in \mathscr{F}$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_i P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)$$

例（匹配数问题）

解：设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ **表示“第 i 个人拿到自己的作业”，则匹配数为 0 的概率** q_0 **为**

$q_0=1-P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)$，由于

$$P(A_i)=\frac{1}{n},\forall i,\quad P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1},\forall i\neq j,$$

$$P(A_iA_jA_k)=\frac{(n-3)!}{n!}=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{n-2},\forall i,j,k\text{互不相同}，\ldots\ldots，P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\frac{1}{n!}；$$

故

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_i P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)$$

$$=C_n^1\frac{1}{n}-C_n^2\frac{(n-2)!}{n!}+C_n^3\frac{(n-3)!}{n!}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

$$=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}$$

从而，$q_0=1-P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\to e^{-1}$

思考：匹配数为 r 的概率为 $\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}$ 。

性质 4（有限可加性）若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ 为一列两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$$

注：可数可加性 $\Rightarrow$ 有限可加性；可数可加性与加法公式区别.

性质 5（概率的下（上）连续性）设 $\left\{A_n\right\}$ 是 $\mathcal{F}$ 中的非减（或非增）事件序列(即 $A_n \in \mathcal{F}$, 并且 $A_n \subset A_{n+1}(\text{或} A_n \supset A_{n+1}), n = 1,2,\cdots$) ，则

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \qquad （\text{或} \lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)）$$

注：可数可加性 $\Leftrightarrow$ 有限可加性 + 概率的连续性（思考）

例 从 $(0,1)$ 中任取一数，它为 $\frac{1}{3}$ 的概率等于 0.

提示：记 A_n ={ (0,1) 中任取一数，它的前 n 位小数为 $\underbrace{33\cdots3}_{n}$ }，$A_n \downarrow A = \{\frac{1}{3}\}$，$P(A_n) = \frac{1}{10^n}$

补充：事件序列的极限

设 $\{A_n\}$ 为样本空间 Ω 中的事件序列，

定义 $\{A_n\}$ 的上极限为：$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \{\omega : \forall n \in N, \exists k \geq n, s.t. \omega \in A_k\}$；

$\{A_n\}$ 的下极限为：$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

如果 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，则称事件序列 $\{A_n\}$ 的极限存在，记为 $\lim_{n\to\infty} A_n$，即

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

结论：

（1）$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{\omega : \omega \text{属于无穷多个} A_n\}$;(即当且仅当有无穷个 A_n 发生)

$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \{\omega : \omega \text{属于几乎一切} A_n\} = \{\omega : \omega \text{不属于} A_n \text{中的有限个}\}$；(即当且仅当至多有有限个 A_n 不发生)

（2）$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$；

（3）$(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n)^c = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c$，$(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)^c = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n^c$；

（4）$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \begin{cases} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n, & 若\{A_n\}单调增; \\ \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n, & 若\{A_n\}单调减. \end{cases}$

例：设 $A_n = \begin{cases} B, & 若n = even; \\ C, & 若n = odd. \end{cases}$ 求集列$\{A_n\}$的上极限和下极限。

概率的连续性问题：

结论：设 P 为定义在事件域 $\mathscr{F}$ 上的满足 $P(\Omega)=1$ 且具有有限可加性的非负实值集合函数，则下列条件等价：

（1）P 具有可数可加性（即 P 为概率测度）；

（2）P 具有上连续性（见教材）；

（3）P 具有下连续性（见教材）；

（4）P 在 ϕ 处连续，即若 $A_n \in \mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$，$A_n \supset A_{n+1}$ 且 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = 0$；

（5）P 具有连续性，即若 $A_n \in \mathscr{F}$，$n=1,2,\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim\limits_{n\to\infty} A_n)$.

复习：有关排列组合的基本问题：

公式 1：n 个不同元素取 m 个的排列数为 A_n^m.

公式 2：n 个不同元素取 m 个的组合数为 C_n^m.

公式 3：{ k_1个a_1，k_2个$a_2,\cdots$，k_r个a_r 共 n 个元素所作的排列数}

={n 个不同的元素分成各含 k_1个，k_2个,$\cdots$，k_r个 的 r 个有序组的组合数}=$\dfrac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}$.

公式 4：{m 个不同的元素分成 n 个有序组（每组数目不限）的组合数}

={n 种元素允许任意重复取 m 个的排列数}=n^m.

公式 5：{m 个同样的元素分成 n 个有序组（每组数目不限）的组合数}

={n 种元素允许任意重复取 m 个的组合数}={不定方程 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = m$ 的非负整数解的数目}

$= C_{m+n-1}^{n-1} = C_{m+n-1}^{m}$.

公式 6：n 个不同元素取 m 个的圆排列数为 $\dfrac{A_n^m}{m}$.