第 2 章　泊松过程及其推广

2.1　定义及其背景

泊松过程 (Poisson process) 最早是由法国人 Poisson 于 1837 年引入的，故得名.

定义 2.1.1　一随机过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 称为**时齐泊松过程**, 若满足:

(1) 是一计数过程，且 $N(0) = 0$;

(2) 是独立增量过程，即任取 $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$,

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \cdots, N(t_n) - N(t_{n-1})$$

相互独立;

(3) 增量平稳性，即 $\forall s, t \geqslant 0, n \geqslant 0, P[N(s+t) - N(s) = n] = P[N(t) = n]$;

(4) 对任意 $t > 0$ 和充分小的 $\Delta t > 0$, 有

$$\begin{cases} P[N(t+\Delta t) - N(t) = 1] = \lambda \Delta t + o(\Delta t), \\ P[N(t+\Delta t) - N(t) \geqslant 2] = o(\Delta t). \end{cases} \tag{2.1.1}$$

其中 $\lambda > 0$(称为强度常数), $o(\Delta t)$ 为高阶无穷小，即 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$.

时齐泊松过程 (有时简称为泊松流), 是一种既典型又简单的，应用极其广泛的随机过程. $N(t)$ 可表示在 $[0, t]$ 时间随机事件发生的个数，它可用于刻画 “顾客流”,“粒子流”, “信号流” 等的概率特性.

背景　考虑某电话交换台在 $[0, t]$ 内来的呼唤数，记为 $N(t)$. 显然它是一计数过程. 若它是一平稳独立增量过程, 且在一很短时间间隔 Δt 内来一次呼唤的概率与 Δt 成正比, 来一次以上呼唤的概率是 Δt 的高阶无穷小, 则 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 就是泊松过程. $N(t)$ 表示在 $[0, t]$ 内事件发生的个数. 有下面的重要定理.

定理 2.1.1　若 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为泊松过程，则 $\forall s, t \geqslant 0$, 有

$$P[N(s+t) - N(s) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{2.1.2}$$

即 $N(t+s) - N(s)$ 是参数为 λt 的泊松分布.

证明　由增量平稳性，记

$$P_n(t) = P(N(t) = n) = P(N(s+t) - N(s) = n).$$

先看 $n = 0$ 的情形．因

$$(N(t+h) = 0) = (N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0), \quad h > 0,$$

故

$$\begin{aligned}
P_0(t+h) =& P(N(t+h) = 0) = P(N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0)\\
=& P(N(t) = 0)P(N(t+h) - N(t) = 0) \qquad \text{(增量独立)}\\
=& P_0(t)P_0(h).
\end{aligned}$$

另一方面

$$P_0(h) = P(N(t+h) - N(t) = 0) = 1 - (\lambda h + o(h)),$$

代入上式，有

$$\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} = -\Big(\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}\Big).$$

令 $h \to 0$, 两边取极限，得

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t).$$

这是一阶线性常系数微分方程．由初始条件 $P_0(0) = P(N(0) = 0) = 1$, 可得

$$P_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

再看 $n > 0$ 的情形，因

$$\begin{aligned}
\{N(t+h) = n\} = \{N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0\} \bigcup \{N(t) = n-\\
1, N(t+h) - N(t) = 1\} \bigcup \Big\{ \bigcup_{l=2}^{n} (N(t) = n-l, N(t+h) - N(t) = l \Big\},
\end{aligned}$$

故

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1 - \lambda h - o(h)) + P_{n-1}(t)(\lambda h + o(h)) + o(h).$$

化简可得

$$\frac{P_n(t+h) - P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}.$$

令 $h \to 0$, 两边取极限，有

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t).$$

将上式两边乘以 $\mathrm{e}^{\lambda t}$, 移项后可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{\lambda t} P_n(t)] = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t} P_{n-1}(t),$$

且满足初始条件

$$P_n(0) = P(N(0) = n) = 0.$$

当 $n = 1$ 时

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{\lambda t} P_1(t)] = \lambda.$$

注意到初始条件 $P_1(0) = 0$, 可得

$$P_1(t) = (\lambda t)\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

再用归纳法即有

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}. \qquad \square$$

本定理的证明方法有典型意义.

为了应用方便，给出以下等价定义.

定义 2.1.2 一计数过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 称为参数是 λ 的时齐泊松过程，若满足:

(1) $N(0) = 0$;

(2) 是独立增量过程;

(3) $\forall s, t \geqslant 0, N(s+t) - N(s) \sim P(\lambda t)$, 即其增量是参数为 λt 的泊松分布.

证明留作读者练习.

2.2 相邻事件的时间间隔，泊松过程与指数分布的关系

本节用过程的样本函数的特性来刻画泊松过程，从而揭示它与指数分布之间的内在联系.

设 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是一**计数过程**,$N(t)$ 表示在 $[0, t]$ 内事件发生 (或 “顾客” 到达) 的个数. 令 $S_0 = 0, S_n$ 表示第 n 个事件发生的时刻 $(n \geqslant 1), X_n = S_n -$

S_{n-1} $(n \geqslant 1)$ 表示第 $n-1$ 个事件与第 n 个事件发生的时间间隔．用式子表示为

$$\begin{aligned} S_0 =& 0, \\ S_n =& \inf\{t\colon t > S_{n-1}, N(t) = n\},\ n \geqslant 1. \end{aligned}$$

注意，此时对 $t \geqslant 0$ ，下列事件等价：

$$(N(t) \geqslant n) = (S_n \leqslant t),$$

$$(N(t) = n) = (S_n \leqslant t < S_{n+1}) = (S_n \leqslant t) - (S_{n+1} \leqslant t).$$

这里 $\inf\{t\}$ 表示集合 $\{t\}$ 的下确界，即集合的最大下界，例如 $\inf\left\{\dfrac{1}{n}\colon n = 1, 2, \cdots\right\} = 0$. 于是 $\forall\, t \geqslant 0, n \geqslant 0$, 有 $\{S_n \leqslant t\} = \{N(t) \geqslant n\}, \{N(t) = n\} = \{S_n \leqslant t < S_{n+1}\}$.

因此，S_n 的分布函数为：当 $t < 0$ 时，$P(S_n \leqslant t) = 0$ ；当 $t \geqslant 0$ 时，有

$$P(S_n \leqslant t) = P(N(t) \geqslant n) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \tag{2.2.1}$$

S_n 的概率密度函数为

$$f_{S_n}(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda t} I_{(t \geqslant 0)}.$$

特别是当 $n = 1$ 时，有

$$P(X_1 \leqslant t) = P(S_1 \leqslant t) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}) I_{(t \geqslant 0)},$$

即 $X_1 \sim E(\lambda)$ 是参数为 λ 的指数分布．那么，$X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 又如何呢？它们之间的关系又会怎样呢？有如下漂亮的结果.

定理 2.2.1 计数过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是泊松过程的充分必要条件是 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是独立且参数同为 λ 的指数分布.

证明 先证必要性．步骤如下：

第一步，求 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 的联合概率密度．令 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$, 取充分小的 $h > 0$, 使

$$t_1 - \frac{h}{2} < t_1 < t_1 + \frac{h}{2} < t_2 - \frac{h}{2} < t_2 < t_2 + \frac{h}{2} < \cdots < t_{n-1} + \frac{h}{2} < t_n - \frac{h}{2} < t_n < t_n + \frac{h}{2},$$

由

$$\begin{aligned}&\Big\{t_1-\frac{h}{2}<S_1\leqslant t_1+\frac{h}{2}<t_2-\frac{h}{2}<S_2\leqslant t_2+\frac{h}{2}<\cdots<t_n-\frac{h}{2}<S_n\leqslant t_n+\frac{h}{2}\Big\}\\&\quad=\Big\{N\Big(t_1-\frac{h}{2}\Big)=0,N\Big(t_1+\frac{h}{2}\Big)-N\Big(t_1-\frac{h}{2}\Big)=1,N\Big(t_2-\frac{h}{2}\Big)-\\&\qquad N\Big(t_1+\frac{h}{2}\Big)=0,\cdots,N\Big(t_n+\frac{h}{2}\Big)-N\Big(t_n-\frac{h}{2}\Big)=1\Big\}\bigcup H_n,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}H_n=&\Big\{N\Big(t_1-\frac{h}{2}\Big)=0,N\Big(t_1+\frac{h}{2}\Big)-N\Big(t_1-\frac{h}{2}\Big)=\\&1,\cdots,N\Big(t_n+\frac{h}{2}\Big)-N\Big(t_n-\frac{h}{2}\Big)\geqslant 2\Big\},\end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned}&P\Big\{t_1-\frac{h}{2}\leqslant S_1\leqslant t_1+\frac{h}{2}<t_2-\frac{h}{2}\leqslant S_2\leqslant t_2+\frac{h}{2}<\cdots<t_n-\frac{h}{2}\leqslant S_n\leqslant t_n+\frac{h}{2}\Big\}\\&\qquad=(\lambda h)^n\mathrm{e}^{-\lambda(t_n+\frac{h}{2})}+o(h^n)=\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda t_n}h^n+o(h^n).\end{aligned}$$

所以 $(S_1,S_2,\cdots,S_n)$ 的联合概率密度函数为

$$g(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\begin{cases}\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda t_n}, & 0<t_1<t_2<\cdots<t_n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{2.2.2}$$

第二步, 求 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合概率密度. 注意到 $X_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geqslant 1)$, 令 $x_n=t_n-t_{n-1}$, 则变换的雅可比 (Jacobian) 行列式为

$$J=\frac{\partial(t_1,t_2,\cdots,t_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0\\1&1&0&\cdots&0\\1&1&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{vmatrix}=1,$$

于是 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合概率密度为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}\lambda^n\mathrm{e}^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)}, & x_i\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由上可得 X_k 的概率密度为 $f_k(x_k)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_k},x_k\geqslant 0,1\leqslant k\leqslant n.$ 于是

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} f_k(x_k),$$

即证明了 $(X_k, 1 \leqslant k \leqslant n)$ $(n \in \mathbb{N})$ 独立同指数分布．必要性证毕．

下面证明充分性．设 $\{X_k, k \geqslant 1\}$ 独立同指数分布．令 $S_0 = 0, S_1 = X_1, \cdots, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, 对 $\forall\, t > 0$, 定义 $N(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_{(S_n \leqslant t)}$. 由上定义可验证 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是计数过程．下面仍分三步证明它是泊松过程．

第一步求 $(S_1, S_2, \cdots, S_n)$ 的联合概率密度及 $N(t)$ 的分布．注意到证必要性第二步的逆过程仍成立，即由 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合概率密度

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x_k}, \quad x_k \geqslant 0, 1 \leqslant k \leqslant n,$$

经 $S_1 = X_1, \cdots, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$, 可得 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的联合概率密度为

$$g(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \begin{cases} \lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda t_n}, & 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \cdots \leqslant t_n, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由上可得 S_n 的分布为

$$P(S_n \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\Big(1 + \lambda t + \cdots + \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\Big),$$

故

$$P(N(t) = n) = P(S_n \leqslant t < S_{n+1}) = P(S_n \leqslant t) - P(S_{n+1} \leqslant t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

第二步证平稳性．这里只写出对 $n \geqslant 1$ 的证明．利用全概率公式，有

$$\begin{aligned} P(N(s+t) - N(s) = n) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N(s) = k, N(s+t) = k+n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k \leqslant s < S_{k+1} < S_{k+n} \leqslant s+t < S_{k+n+1}) \\ &= P(s < S_1 \leqslant S_n \leqslant s+t < S_{n+1}) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^s P\Big(S_k \leqslant s < S_k + X_{k+1} \leqslant \\ &\quad S_k + \sum_{i=1}^{n} X_{k+i} \leqslant s+t < S_k + \sum_{i=1}^{n+1} X_{k+i} \big| S_k = u\Big)\, \mathrm{d}P(S_k \leqslant u) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P(s < S_1 \leqslant S_n \leqslant s+t < S_{n+1}) + \\
&\quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^s P(s-u < S_1 \leqslant S_n \leqslant s+t-u < S_{n+1}) \, \mathrm{d}P(S_k \leqslant u).
\end{aligned}
$$

又由 $X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布，可得

$$
\begin{aligned}
P(s < S_1 \leqslant S_n \leqslant s+t < S_{n+1}) &= \int_s^{s+t} P\Big(\sum_{i=2}^{n} X_i \leqslant s+t-v < \\
&\qquad \sum_{i=2}^{n+1} X_i \big| X_1 = v \Big) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda v} \, \mathrm{d}v \\
&= \int_s^{s+t} P(S_{n-1} \leqslant s+t-v < S_n) \lambda \mathrm{e}^{-\lambda v} \, \mathrm{d}v \\
&= \int_s^{s+t} \frac{[\lambda(s+t-v)]^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{e}^{-\lambda(s+t-v)} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda v} \, \mathrm{d}v \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda(s+t)}.
\end{aligned}
$$

类似地，有 $P(s-u < S_1 \leqslant S_n \leqslant s+t-u < S_{n+1}) = \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda(s+t-u)}$, 故

$$
\begin{aligned}
P(N(s+t) - N(s) = n) &= \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda(s+t)} + \int_0^s \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda(s+t-u)} \lambda \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda(s+t)} + \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda(s+t)} (\mathrm{e}^{\lambda s} - 1) \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathrm{e}^{-\lambda t} \\
&= P(N(t) = n).
\end{aligned}
$$

(注：对 $n=0$ 情形类似证明，留作读者练习)

第三步证增量独立性. 为突出方法，这里仅证 $\forall s, t > 0, N(s)$ 与 $N(s+t) - N(s)$ 相互独立，即证 $\forall n, m \geqslant 0$ ，有 $P(N(s) = m, N(s+t) - N(s) = n) = P(N(s) = m) P(N(s+t) - N(s) = n)$. 只写出 $m \geqslant 1$ 与 $n \geqslant 1$ 的情形，其他可类似证之.

$$
\begin{aligned}
&P(N(S) = m, N(s+t) - N(s) = n) \\
&\quad = P(S_m \leqslant s < S_{m+1} \leqslant S_{m+n} \leqslant s+t < S_{m+n+1})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^s P\Big(s-u<X_{m+1}\leqslant\sum_1^n X_{m+i}\leqslant s+t-u\leqslant\\
&\qquad\sum_1^{n+1}X_{m+i}\big|S_m=u\Big)\,\mathrm{d}P(S_m\leqslant u)\\
&=\int_0^s P(s-u\leqslant S_1\leqslant S_n\leqslant s-u+t<S_{n+1})\,\mathrm{d}P(S_m\leqslant u)\\
&=\int_0^s \frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda(s-u+t)}\lambda\frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u\\
&=\frac{(\lambda s)^m}{m!}\mathrm{e}^{-\lambda s}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\\
&=P(N(s)=m)P(N(s+t)-N(s)=n).
\end{aligned}
$$

由泊松过程的定义知，$\forall t_2>t_1\geqslant 0, N(t_2)-N(t_1)\geqslant 0$, 即 $N(t_2)\geqslant N(t_1)$, 说明泊松过程的样本函数 $N(t)$ 是 t 的单调不减函数．由 $(N(t)=n)=(S_n\leqslant t<S_{n+1})$ 知 $N(t)$ 是跳跃函数，即当 $S_n\leqslant t<S_{n+1}$ 时 $N(t)=n$ 是一常数，而仅在 $t=S_n(n=1,2,\cdots)$ 处跳跃，且相邻的两次跳跃时间间隔 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 相互独立同指数分布 (参数为 $\lambda>0$)．这就为泊松过程的计算机模拟及其统计检验提供了理论基础与方法．泊松过程的样本函数如图 2.1 所示．

2.3 剩余寿命与年龄

本节再从不同的角度刻画泊松过程的若干重要特性.

设 $N(t)$ 表示在 $[0,t]$ 上事件发生的个数, S_n 表示第 n 个事件发生的时刻，那么，$S_{N(t)}$ 表示在 t 时刻前最后一个事件发生的时刻，$S_{N(t)+1}$ 表示 t 时刻后首次事件发生的时刻．注意这里 $S_{N(t)}$ 与 $S_{N(t)+1}$ 的下标 $N(t), N(t)+1$ 是随机变量．令

$$
\begin{aligned}
W(t)=&S_{N(t)+1}-t,\\
V(t)=&t-S_{N(t)},
\end{aligned}
$$

则 $W(t)$ 与 $V(t)$ 如图 2.2 所示.

为了解释 $W(t)$ 与 $V(t)$ 的具体意义，设一零件在 $t=0$ 时开始工作，若它失效，立即更换 (设更换所需的时间为零)．一个新零件重新开始工作，如此重复下去，记 S_n 为第 n 次更换时刻，则 $X_n=S_n-S_{n-1}$ 表示第 n 个零件的工作寿命．于是 $W(t)$ 表示观察者在时刻 t 所观察的正在工作的零件的剩余寿命；

$V(t)$ 表示正在工作的零件的工作时间，称为年龄．还可以有别的解释：若 S_n 表示第 n 辆汽车到站的时刻，某一乘客到达该站的时刻为 t, 则 $W(t)$ 表示该乘客等待上车的等待时间．若 S_n 表示某地第 n 次发生地震的时刻，则 $S_{N(t)+1}$ 表示 t 时刻以后直到首次地震的时刻, $W(t)$ 表示 t 时刻后直到首次地震之间的剩余时间，等等．故称 $W(t)$ 为**剩余寿命**或剩余时间；称 $V(t)$ 为**年龄**. 显然, 研究 $W(t), V(t)$ 的特性及它们的关系很有意义.

由定义知， $\forall t \geqslant 0, W(t) \geqslant 0, 0 \leqslant V(t) \leqslant t$.

定理 2.3.1　设 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程，则

(1) $W(t)$ 与 $(X_n, n \geqslant 1)$ 同分布，即 $P(W(t) \leqslant x) = 1 - \exp(-\lambda x),\quad x \geqslant 0$.

(2) $V(t)$ 是 "截尾" 的指数分布,即 $P(V(t) \leqslant x) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda x), & 0 \leqslant x < t, \\ 1, & t \leqslant x. \end{cases}$

证明　由 $\{W(t) > x\} = \{N(t+x) - N(t) = 0\}$, 及 $\{V(t) > x\} = \begin{cases} \{N(t) - N(t-x) = 0\}, & t > x, \\ \varnothing, & t \leqslant x. \end{cases}$

即得所要结论.

定理 2.3.2 若非负随机变量 $X_n(n \geqslant 1)$ 独立同分布，分布函数为 $F(x)$, 则对 $\forall x \geqslant 0, t \geqslant 0$, 有

$$P(W(t) > x) = 1 - F(x+t) + \int_0^t P(W(t-u) > x)\,\mathrm{d}F(u). \tag{2.3.3}$$

证明 由条件数学期望

$$P(W(t) > x) = \int_0^{+\infty} P(W(t) > x \big| X_1 = s)\,\mathrm{d}F(s). \tag{$*$}$$

下面讨论 $P(W(t) > x \big| X_1 = s)$, 由 $W(t)$ 的定义得

(1) 当 $s > t + x$ 时， $P(W(t) > x \big| X_1 = s) = 1;$

(2) 当 $t < s < x + t$ 时， $P(W(t) > x \big| X_1 = s) = 0;$

(3) 当 $s < t$ 时，由 $X_n(n \geqslant 1)$ 独立同分布，得

$$\begin{aligned}
P(W(t) > x \big| X_1 = s) =& P(S_{N(t)+1} - t > x \big| X_1 = s) \\
=& P\Big(\sum_{j=2}^{N(t)+1} X_j - (t-s) > x \big| X_1 = s\Big) \\
=& \sum_{m=1}^{\infty} P\Big(\sum_{j=2}^{m+1} X_j - (t-s) > x, N(t) = m \big| X_1 = s\Big) \\
=& \sum_{m=1}^{\infty} P\Big(\sum_{j=2}^{m+1} X_j - (t-s) > x, S_m \leqslant t < S_{m+1} \big| X_1 = s\Big) \\
=& \sum_{m=1}^{\infty} P\Big(\sum_{j=2}^{m+1} X_j - (t-s) > x, \sum_{j=2}^{m} X_j \leqslant t - s < \\
& \qquad \sum_{j=2}^{m+1} X_j \big| X_1 = s\Big) \\
=& \sum_{m=1}^{\infty} P\Big(\sum_{j=2}^{m+1} X_j - (t-s) > x, \sum_{j=2}^{m} X_j \leqslant t - s < \sum_{j=2}^{m+1} X_j\Big) \\
=& \sum_{m=1}^{\infty} P(S_m - (t-s) > x, S_{m-1} \leqslant t - s < S_m) \\
& \Big(\text{注意到} \sum_{j=2}^{m+1} X_j \text{ 与 } S_m, \sum_{j=2}^{m} X_j \text{ 与 } S_{m-1} \text{ 同分布}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{m=1}^{\infty} P(S_m-(t-s)>x, N(t-s)=m-1)\\
&=P(S_{N(t-s)+1}-(t-s)>x)\\
&=P(W(t-s)>x).
\end{aligned}
$$

将 (1),(2),(3) 代入 $(*)$ 即得 (2.3.3) 式. □

可以用 $W(t)$ 与 X_n 的关系来刻画泊松过程.

定理 2.3.3 若 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 独立同分布，又对 $\forall t\geqslant 0, W(t)$ 与 $X_n(n\geqslant 1)$ 同分布，分布函数为 $F(x)$, 且 $F(0)=0$, 则 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 为泊松过程.

证明 令 $G(x)=1-F(x)=P(W(t)>x)$, 由 (2.3.3) 式及 $F(0)=0$ 得，对 $\forall x\geqslant 0, t\geqslant 0$, 有

$$
G(x+t)=G(x)G(t). \tag{2.3.4}
$$

因为 $F(x)$ 是单调不减且右连续的函数，所以 $G(x)$ 是单调不增，右连续函数. 对 (2.3.4) 式两端对 x 求导，得

$$
G'_x(x+t)=G'_x(x)G(t).
$$

又 $G'_x(x+t)=G'_t(x+t)$, 所以

$$
G'_t(x+t)=G'_x(x)G(t).
$$

令 $x=0$, 则 $G'_t(t)=G'_x(0)G(t)$.

令 $\lambda=-G'_x(0)$. 由于 $G(x)$ 单调不增, 所以 $\lambda\geqslant 0$; 又因 $F(x)$ 为分布函数, 不可能为常数，从而 $\lambda\neq 0$; 再由 $G(0)=1-F(0)=1$, 得

$$
G(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t},
$$

即

$$
F(x)=P(X_n\leqslant x)=1-\mathrm{e}^{\lambda x} \quad (x\geqslant 0).
$$

再由定理 2.2.1 知 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 是泊松过程. □

该定理早在 1972 年由钟开莱 (K.L.Chung) 得到，说明 $W(t)$ 与 $X_n(n\geqslant 1)$ 同指数分布是泊松过程特有的性质. 本定理可应用于检验 $\{N(t), t\geqslant 0\}$ 是否为泊松过程.

类似地，可以用 $E[W(t)]$ 与 t 无关或 $(W(t), V(t))$ 的联合分布等来刻画泊松过程.

2.4 到达时间的条件分布

本节讨论在给定 $N(t)=n$ 的条件下，$S_1,S_2,\cdots,S_n$ 的条件分布、有关性质及其应用.

先看下面定理.

定理 2.4.1 设 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是泊松过程，则对 $\forall 0<s<t$, 有

$$P(X_1\leqslant s\big|N(t)=1)=\frac{s}{t}. \tag{2.4.1}$$

证明

$$\begin{aligned}P(X_1\leqslant s\big|N(t)=1)=&\frac{P(X_1\leqslant s,N(t)=1)}{P(N(t)=1)}\\=&\frac{P(N(s)=1,N(t)-N(s)=0)}{P(N(t)=1)}\\=&\frac{(\lambda s)\mathrm{e}^{-\lambda s}\mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}}{(\lambda t)\mathrm{e}^{-\lambda t}}=\frac{s}{t}.\end{aligned}$$ □

这个定理说明，由于泊松过程具有平稳独立增量性, 从而在已知 $[0,t]$ 上有一事件发生的条件下，事件发生的时间 X_1 在 $[0,t]$ 上是 “等可能性的”, 即它的条件分布是 $[0,t]$ 上的均匀分布. 自然，我们要问：(1) 这个性质是否可推广到 $N(t)=n,n\geqslant 1$ 的情形？(2) 这个性质是否是泊松过程特有的？换句话说：本定理的逆命题是否成立？为回答 (1), 先讨论顺序统计量的性质.

设 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 是独立同分布，非负的随机变量，密度函数为 $f(y)$, 记 $Y_{(1)}\leqslant Y_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant Y_{(n)}$ 为相应的顺序统计量，容易看到，对 $\forall 0<y_1<y_2<\cdots<y_n$, 取充分小的 $h>0$, 使

$$0<y_1<y_1+h<y_2<y_2+h<y_3<\cdots<y_{n-1}+h<y_n<y_n+h,$$

则

$$\begin{aligned}&\{y_1<Y_{(1)}\leqslant y_1+h,y_2<Y_{(2)}\leqslant y_2+h,\cdots,y_n<Y_{(n)}\leqslant y_n+h\}\\&\quad=\bigcup_{(i_1,i_2,\cdots,i_n)}\{y_1<Y_{i_1}\leqslant y_1+h,y_2<Y_{i_2}\leqslant y_2+h,\cdots,y_n<Y_{i_n}\leqslant y_n+h\}.\end{aligned}$$

等式右边各事件互不相容，得

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to 0}P(y_1<Y_{(1)}\leqslant y_1+h,y_2<Y_{(2)}\leqslant y_2+h,\cdots,y_n<Y_{(n)}\leqslant y_n+h)/h^n\\&\quad=\lim_{h\to 0}n!P(y_1<Y_{i_1}\leqslant y_1+h,y_2<Y_{i_2}\leqslant y_2+h,\cdots,y_n<Y_{i_n}\leqslant y_n+h)/h^n.\end{aligned}$$

由此可知顺序统计量 $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \cdots, Y_{(n)}$ 的联合概率密度为

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{cases} n!\prod_{i=1}^{n} f(y_i), & 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

若 $\{Y_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$ 在 $[0, t]$ 上独立同均匀分布，则其顺序统计量 $Y_{(1)}, \cdots, Y_{(n)}$ 的联合概率密度函数为

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{t^n}, & 0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n \leqslant t, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

对问题 (1), 有如下有用的定理：

定理 2.4.2 设 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为泊松过程，则在已给 $N(t) = n$ 时事件相继发生的时间 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的条件概率密度为

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{t^n}, & 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant t, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \tag{2.4.2}$$

证明 对 $\forall\, 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} = t$, 取 $h_0 = h_{n+1} = 0$ 及充分小的 h_i, 使 $t_i + h_i < t_{i+1}, 1 \leqslant i \leqslant n$, 则

$$\begin{aligned} & P(t_i < S_i \leqslant t_i + h_i, 1 \leqslant i \leqslant n \big| N(t) = n) \\ = & \frac{P(N(t_i + h_i) - N(t_i) = 1, 1 \leqslant i \leqslant n, N(t_{j+1}) - N(t_j + h_j) = 0, 1 \leqslant j \leqslant n)}{P(N(t) = n)} \\ = & \frac{(\lambda h_1)\mathrm{e}^{-\lambda h_1} \cdots (\lambda h_n)\mathrm{e}^{-\lambda h_n} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda(t - h_1 - h_2 - \cdots - h_n)}}{\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \frac{n!}{t^n} h_1 h_2 \cdots h_n, \end{aligned}$$

因此

$$\frac{P(t_i < S_i \leqslant t_i + h_i, 1 \leqslant i \leqslant n \big| N(t) = n)}{h_1 h_2 \cdots h_n} = \frac{n!}{t^n},$$

所以

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = \begin{cases} \dfrac{n!}{t^n}, & 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant t, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \qquad \square$$

本定理说明在 $N(t)=n$ 的条件下，$S_1,S_2,\cdots,S_n$ 的条件分布函数与 n 个在 $[0,t]$ 上相互独立同均匀分布的顺序统计量的分布函数相同.

对问题 (2), 即逆命题，有以下定理.

定理 2.4.3　设 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为计数过程，X_n 为第 n 个事件与第 $n-1$ 个事件的时间间隔，$\{X_n,n\geqslant 1\}$ 独立同分布且 $F(x)=P(X_n\leqslant x)$, 若 $F(0)=0$, 且对 $\forall 0\leqslant s\leqslant t$, 有

$$P(X_1\leqslant s\big|N(t)=1)=\frac{s}{t}\quad (0<t),$$

则 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为泊松过程.

证明　由题意有

$$P(X_1\leqslant s\big|N(s+x)=1)=\frac{s}{s+x},\quad P(X_1\leqslant x\big|N(s+x)=1)=\frac{x}{s+x},$$

所以

$$P(X_1\leqslant s\big|N(s+x)=1)+P(X_1\leqslant x\big|N(s+x)=1)=1. \tag{2.4.3}$$

又

$$P(X_1\leqslant s\big|N(s+x)=1)=\frac{P(X_1\leqslant s,X_1\leqslant s+x<X_1+X_2)}{P(X_1\leqslant s+x<X_1+X_2)},$$

利用全概率公式，得

$$\begin{aligned}P(X_1\leqslant s,X_1\leqslant s+x<X_1+X_2)&=\int_0^s(1-F(s+x-u))\,\mathrm{d}F(u),\\ P(X_1\leqslant s+x<X_1+X_2)&=\int_0^{s+x}(1-F(s+x-u))\,\mathrm{d}F(u).\end{aligned}$$

由 (2.4.3) 式得

$$\begin{aligned}\int_0^x(1-F(s+x-u))\,\mathrm{d}F(u)+&\int_0^s(1-F(s+x-u))\,\mathrm{d}F(u)\\ &=\int_0^{s+x}(1-F(s+x-u))\,\mathrm{d}F(u),\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^s(1-F(s+x-u))\,\mathrm{d}F(u)=\int_x^{x+s}(1-F(s+x-u))\,\mathrm{d}F(u).$$

化简上式，得 $F(s)+F(x)-F(s)F(x)=F(x+s)$, 所以

$$1-F(x+s)=(1-F(s))(1-F(x)),$$

令 $G(x)=1-F(x)$, 则

$$G(x+s)=G(x)G(s).$$

类似于定理 2.3.3 证明中 (2.3.4) 式以后的证明部分，即得结论. □

定理 2.4.4 设 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为计数过程，$\{X_n,n\geqslant 1\}$ 为相继事件发生的时间间隔，独立同分布且 $F(x)=P(X_n\leqslant x)$, 若 $EX_n<\infty, F(0)=0$, 且对 $\forall n\geqslant 1, 0\leqslant s\leqslant t$, 有

$$P(S_n\leqslant s\big|N(t)=n)=\left(\frac{s}{t}\right)^n \quad (0<t),$$

则 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 为泊松过程.

证明从略.

注 利用以上结果，检验泊松过程时不需要知道参数 λ.

以下为两个例子.

例 1 设到达火车站的顾客流遵照参数为 λ 的泊松流 $\{N(t),t\geqslant 0\}$, 火车 t 时刻离开车站，求在 $[0,t]$ 到达车站的顾客等待时间总和的期望值.

解 设第 i 个顾客到达火车站的时刻为 S_i, 则 $[0,t]$ 到达车站的顾客等待时间总和为

$$S(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i).$$

因

$$\begin{aligned}E(S(t)\big|N(t)=n)=&E\Big\{\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\big|N(t)=n\Big\}\\=&E\Big\{\sum_{i=1}^{n}(t-S_i)\big|N(t)=n\Big\}=nt-E\Big\{\sum_{i=1}^{n}S_i\big|N(t)=n\Big\},\end{aligned}$$

仍记 $\{Y_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 为 $[0,t]$ 上独立同均匀分布的随机变量，则

$$\begin{aligned}E\Big\{\sum_{i=1}^{n}S_i\big|N(t)=n\Big\}=&E\Big(\sum_{i=1}^{n}Y_{(i)}\Big) \qquad (\text{由定理 } 2.4.2)\\=&E\Big(\sum_{i=1}^{n}Y_i\Big)=\frac{nt}{2},\end{aligned}$$

故

$$E\Big\{\sum_{i=1}^{n}(t-S_i)\big|N(t)=n\Big\}=\frac{nt}{2},$$

所以

$$\begin{aligned}E[S(t)]&=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(P\{N(t)=n\}E\Big\{\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\big|N(t)=n\Big\}\Big)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}P(N(t)=n)\frac{nt}{2}=\frac{t}{2}E(N(t))=\frac{\lambda}{2}t^2.\end{aligned}$$

例 2 设一系统在 $[0,t]$ 内承受的冲击数 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是参数为 λ 的泊松流，第 i 次受冲击的损失为 D_i. 设 $\{D_i,i\geqslant 1\}$ 独立同分布，而与 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 独立，且损失随时间按负指数衰减，即 $t=0$ 时损失为 D, 在 t 时损失为 $D\mathrm{e}^{-\alpha t},\alpha>0$. 设损失是可加的，那么在 t 时刻的损失之和为

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}D_i\mathrm{e}^{-\alpha(t-S_i)},$$

其中 S_i 为第 i 次冲击到达的时刻．试求 $E\xi(t)$.

解 先求条件期望

$$\begin{aligned}E\{\xi(t)\big|N(t)=n\}=&E\Big\{\sum_{i=1}^{N(t)}D_i\mathrm{e}^{-\alpha(t-S_i)}\big|N(t)=n\Big\}\\=&E\Big\{\sum_{i=1}^{n}D_i\mathrm{e}^{-\alpha(t-S_i)}\big|N(t)=n\Big\}\\=&\sum_{i=1}^{n}E\{D_i\big|N(t)=n\}E\big\{\mathrm{e}^{-\alpha(t-S_i)}\big|N(t)=n\}\\=&EDe^{-\alpha t}\sum_{i=1}^{n}E\big\{\mathrm{e}^{\alpha S_i}\big|N(t)=n\big\}.\end{aligned}$$

记 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为 $[0,t]$ 上独立同均匀分布的随机变量，则由定理 2.4.2, 有

$$\begin{aligned}E\Big\{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\alpha S_i}\big|N(t)=n\Big\}=&E\Big\{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\alpha Y_{(i)}}\Big\}=E\Big\{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{\alpha Y_i}\Big\}\\=&n\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha x}\frac{\mathrm{d}x}{t}=\frac{n}{\alpha t}\Big(\mathrm{e}^{\alpha t}-1\Big),\end{aligned}$$

所以

$$E\{\xi(t)\big|N(t)=n\}=\frac{n}{\alpha t}\Big(1-\mathrm{e}^{-\alpha t}\Big)ED,$$

即

$$E\{\xi(t)\big|N(t)\}=\frac{N(t)}{\alpha t}\Big(1-\mathrm{e}^{-\alpha t}\Big)ED,$$

故

$$E\{\xi(t)\}=E\{E(\xi(t)\big|N(t))\}=\frac{\lambda ED}{\alpha}\Big(1-\mathrm{e}^{-\alpha t}\Big).\qquad\square$$

关于到达时刻，有下面有用的定理.

定理 2.4.5 设 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是参数为 λ 的泊松过程，$S_k,k\geqslant 1$ 为其到达时刻，则对任意的 $[0,\infty)$ 上的可积函数 f, 有

$$E\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}f(S_n)\Big\}=\lambda\int_0^{\infty}f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.4.4}$$

证明 由 (2.2.1) 式，当 $t\geqslant 0$ 时，$S_n=\inf\{t\colon N(t)=n\}$, $\{S_n\leqslant t\}=\{N(t)\geqslant n\}$. 由此可得

$$P(S_n\leqslant t)=P(N(t)\geqslant n)=\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

因此 S_n 的概率密度为

$$f_{S_n}(t)=\sum_{j=n}^{\infty}\Big[\lambda\frac{(\lambda t)^{(j-1)}}{(j-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}-\lambda\frac{(\lambda t)^j}{j!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big]=\lambda\frac{(\lambda t)^{(n-1)}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}I_{(t\geqslant 0)}.$$

先设 f 非负，由上式得

$$\begin{aligned}E\{f(S_n)\}=&\lambda\int_0^{\infty}f(t)\frac{(\lambda t)^{(n-1)}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t,\\ E\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}f(S_n)\Big\}=&\lambda\int_0^{\infty}f(t)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{(n-1)}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=\lambda\int_0^{\infty}f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

对一般的 f, 将已证结果用于 $f^+=\max(f,0)$ 及 $f^-=\max(-f,0)$, 即可知 (2.4.4) 式对 $f=f^+-f^-$ 成立. $\square$

下面利用定理 2.4.5 提供上面例 2 结果的另一种求解方法.

若取

$$f(s)=I_{[0,t]}(s)\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)},$$

则

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}D_i\mathrm{e}^{-\alpha(t-S_i)}=\sum_{i=1}^{\infty}I_{\{S_i\leqslant t\}}D_i\mathrm{e}^{-\alpha(t-S_i)}=\sum_{i=1}^{\infty}D_if(S_i),$$

于是

$$\begin{aligned}E\{\xi(t)\}=&\sum_{i=1}^{\infty}E\{D_if(S_i)\}=E\{D\}E\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}f(S_i)\Big\}\\=&E\{D\}\lambda\int_0^{\infty}f(s)\,\mathrm{d}s=E\{D\}\lambda\int_0^{t}\mathrm{e}^{-\alpha(t-s)}\,\mathrm{d}s=\frac{\lambda E[D]}{\alpha}\Big(1-\mathrm{e}^{-\alpha t}\Big).\end{aligned}$$

2.5　泊松过程的模拟、检验及参数估计

1. 模拟

由前面讨论知，泊松过程的样本轨道是单调不减的跳跃函数，相邻两次的跳跃间隔 $X_n(n\geqslant 1)$ 独立同指数分布 (参数 $\lambda>0$). 因此，泊松过程的样本函数可用下述步骤模拟：

(1) 产生 $[0,1]$ 上均匀分布且相互独立的一串随机数，记为 $\{U_n,n\geqslant 1\}$. 这在计算机上是能够实现的.

(2) 令 $X_k=-\lambda^{-1}\ln U_k$ (λ 为已给参数), 易证 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是独立同指数分布随机变量. 并设 $S_0=0,S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k$.

(3) 定义 $N(t)$ 如下：如果 $0\leqslant t<S_1$, 则 $N(t)=0$; 如果 $S_n\leqslant t<S_{n+1}$, 则 $N(t)=n;\cdots$ 如此继续下去，即 $N(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}I_{(S_n\leqslant t)}$, 这样就得到 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 的一条轨道.

2. 检验

按照泊松过程性质，要检验 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是否是泊松过程，可转化为下面检验问题之一：

(1) 检验 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是否独立同指数分布;

(2) $\forall\, t>0$, 检验 $W(t)$ 与 $X_n(n\geqslant 1)$ 是否同分布;

(3) $\forall\, t>0$, 检验在 $N(t)=1$ 下 $S_1=X_1$ 是否是 $[0,t]$ 上的均匀分布;

(4) 给定 $T>0$, 检验在 $N(T)=n$ 下，$S_1,S_2,\cdots,S_n$ 的条件分布是否与 $[0,T]$ 上 n 个独立均匀分布的顺序统计量的分布相同.

这里仅讨论最后一种的具体检验方法.

提出统计假设 H_0: $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是泊松过程. 令 $\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n}S_k$ 当 H_0 成立，由定理 2.4.2 得

$$E\{\sigma_n\big|N(T)=n\}=E\Big\{\sum_{i=1}^{n}Y_{(i)}\Big\}=E\Big\{\sum_{i=1}^{n}Y_i\Big\}=\frac{nT}{2},$$

$$D\{\sigma_n\big|N(T)=n\}=D\Big\{\sum_{i=1}^{n}Y_{(i)}\Big\}=D\Big\{\sum_{i=1}^{n}Y_i\Big\}=\frac{nT^2}{12},$$

其中 $\{Y_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 独立同分布，$Y_i\sim U[0,t]$. $Y_{(1)},Y_{(2)},\cdots,Y_{(i)},\cdots,Y_{(n)}$ 为其顺序统计量. 利用独立同分布的中心极限定理，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sigma_n-\dfrac{n}{2}T}{T\sqrt{\dfrac{n}{12}}}\leqslant x\big|N(T)=n\right\}&=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i-\dfrac{n}{2}T}{\dfrac{nT^2}{12}}\leqslant x\right)\\&=\varPhi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

即对充分大的 n, 有

$$P\Big(\frac{\sigma_n}{T}\leqslant\frac{1}{2}\Big[n+x\Big(\frac{n}{3}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\big|N(T)=n\Big)\approx\varPhi(x).$$

若给定置信水平 $\alpha=0.05$, 则当

$$\frac{\sigma_n}{T}\in\frac{1}{2}\Big[n\pm 1.96\Big(\frac{n}{3}\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]$$

时，接受 H_0, 否则，拒绝 H_0. 此法优点在于不要求已知 λ.

3. 参数 λ 的估计

经上述检验后，如接受 H_0, 则认为 $\{N(t),t\geqslant 0\}$ 是泊松过程，进而求由已有数据如何估计参数 λ 的问题.

(1) 极大似然估计

设 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为泊松过程，给定 T, 若在 $[0,T]$ 上观察到 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 的取值 $t_1, t_2, \cdots, t_n \leqslant T$, 则似然函数为

$$L(t_1, t_2, \cdots, t_n, \lambda) = \lambda^n \mathrm{e}^{-\lambda T}.$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\lambda} = 0$, 即得 λ 的极大似然估计为

$$\hat{\lambda}_L = \frac{n}{T}.$$

注　给定 T 后，则落在 $[0,T]$ 上的个数 n 是随观察结果而定的.

(2) 区间估计

仅讨论固定 n 的情形. 若 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是泊松过程，则由定理 2.2.1, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ 的概率密度函数为

$$f_n(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad (t \geqslant 0),$$

其中 $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ 为 Γ 函数，$\Gamma(n) = (n-1)!$. 因此，$2\lambda S_n$ 的概率密度函数为

$$g_n(t) = \frac{1}{2^{\frac{2n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{2n}{2}\right)} t^{\frac{2n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} \quad (t \geqslant 0),$$

这与 $\chi^2(2n)$ 的密度相同，故 $2\lambda S_n = \chi^2(2n)$. 取置信度 $1-\alpha$, 则

$$P\Big(\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n) \leqslant 2\lambda S_n \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)\Big) = 1-\alpha,$$

故置信度为 $1-\alpha$ 的 λ 的区间估计为

$$\Big[\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2S_n}, \frac{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)}{2S_n}\Big].$$

S_n 由数据得到，$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2n)$ 及 $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n)$ 可查表得到.

泊松过程的几种推广.

在前几节讨论中，我们看到泊松过程有许多独特的性质，这与它的定义中加了许多严格限制有关. 许多实际问题中并不都满足这些条件，因此，有必要讨论定义中某些条件放宽后的情形，这就是它的若干推广情形.

2.6 非时齐泊松过程

先看放宽 2.1 节定义中的平稳性限制，即 λ 是常数的限制.

定义 2.6.1 一计数过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$, 称它为具有强度函数 $\{\lambda(t) > 0, t \geqslant 0\}$ 的**非时齐泊松过程**, 若满足：

(1) $N(0) = 0$;

(2) $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是一独立增量过程;

(3) 对充分小的 $h > 0$, 有

$$P(N(t+h) - N(t) = 1) = \lambda(t)h + o(h), \quad P(N(t+h) - N(t) \geqslant 2) = o(h).$$

如令 $m(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s$, 其中 $\lambda(t) > 0$, 称 $\{\lambda(t), t \geqslant 0\}$ 为强度函数，则有以下定理.

定理 2.6.1 若 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是非时齐具有强度函数 $\{\lambda(t), t \geqslant 0\}$ 的泊松过程，则 $\forall\, s, t \geqslant 0$, 有

$$P(N(s+t) - N(s) = n) = \frac{[m(s+t) - m(s)]^n}{n!} \exp\{-[m(s+t) - m(s)]\} \quad (n \geqslant 0). \tag{2.6.1}$$

该定理的证明与定理 2.1.1 的证明类似，留给读者作为练习.

2.1 节定义的过程称为时齐 (homogeneous) 泊松过程. 显然，在定理 2.6.1 中，如令 $\lambda(s) = \lambda$ 即为定理 2.1.1. 事实上，非时齐泊松过程与时齐泊松过程也可通过变换进行互相转化.

定理 2.6.2

(1) 设 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是具有强度函数 $\{\lambda(s) > 0, s \geqslant 0\}$ 的非时齐泊松过程. 令 $m(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s$, $m^{-1}(t)$ 是 $m(t)$ 的反函数，即

$$m^{-1}(u) = \inf\{t\colon t > 0, m(t) \geqslant u, u \geqslant 0\},$$

记 $M(u) = N(m^{-1}(u))$, 则 $\{M(u), u \geqslant 0\}$ 是时齐泊松过程.

(2) 设 $\{M(u), u \geqslant 0\}$ 是时齐泊松过程，参数 $\lambda = 1$. 若给定强度函数 $\{\lambda(s) > 0, s \geqslant 0\}$, 令 $m(t) = \int_0^t \lambda(s)\,\mathrm{d}s$, $N(t) = M(m(t))$, 则 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是非时齐的具有强度函数 $\{\lambda(s), s \geqslant 0\}$ 的泊松过程.

证明留给读者作为练习.

2.7 复合泊松过程

定义 2.7.1 设 $\{Y_i, i \geqslant 1\}$ 是独立与 Y 同分布的随机变量序列,$\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为泊松过程，且 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 与 $\{Y_i, i \geqslant 1\}$ 独立，记

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

称 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 为**复合泊松过程**(compound Poisson process).

如 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 表示粒子流，$N(t)$ 表示 $[0, t]$ 到达的粒子数，Y_i 表示第 i 个到达粒子的能量，则 $X(t)$ 表示 $[0, t]$ 内到达粒子的总能量．若 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 表示一顾客流，Y_i 表示第 i 个顾客的行李重量，则 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 表示 $[0, t]$ 内到达的顾客行李总重量．又如某保险公司买了人寿保险的人在时刻 $S_1, S_2, \cdots$ 死亡，在时刻 S_n 死亡的人的保险金额是 Y_n, 在 $(0, t]$ 内死亡的人数记为 $N(t)$, 则 $X(t) = \sum\limits_{i=1}^{N(t)} Y_i$ 表示该公司在 $(0, t]$ 内需要支付的赔偿金总额.

为求 $X(t)$ 的矩，先求它的矩母函数

$$\begin{aligned}
\phi_t(u) =& E[\exp\{uX(t)\}] = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(t) = n\} E[\exp\{uX(t)\} \big| N(t) = n] \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) E[\exp\{u(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)\} \big| N(t) = n] \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) E[\exp\{u(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)\}] \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp(-\lambda t) \Big(E[\exp\{uY_1\}] \Big)^n.
\end{aligned}$$

令 $\phi_Y(u) = E\{\exp(uY)\}$ 为 Y 的矩母函数，则

$$\phi_t(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t \phi_Y(u))^n}{n!} \exp(-\lambda t) = \exp\{\lambda t(\phi_Y(u) - 1)\}. \tag{2.7.1}$$

对上式在 $u = 0$ 处求导，得

$$E\{X(t)\} = \phi_t'(0) = \lambda t \cdot EY, \tag{2.7.2}$$

及

$$D\{X(t)\} = \lambda t E(Y^2). \tag{2.7.3}$$

特殊情况：若 $\{\rho_i, i \geqslant 1\}$ 为独立同分布，取值为正整数的随机变量序列，且与泊松过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 独立，记

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \rho_i,$$

则称 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 为平稳无后效流.

容易理解，$X(t)$ 可描述成批到达的 "顾客流", 即每次同时到达的顾客数是随机的. 它在排队系统中大有用场.

由复合泊松过程的定义启发我们如何由一个简单的随机过程产生一个较为复杂的随机过程. 对简单的泊松过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 的每一点 S_n, 对应于一个辅助的随机变量 $Y_n, n \geqslant 1$, 通常称 Y_n 为对应于点 S_n 的标值. 当把对应于时间区间 $(0, t]$ 中所有点的辅助随机变量 Y_n(标值) 叠加就得到一个新的随机过程 $\{X(t), t \geqslant 0\}$. 如 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为一般点过程，而 $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ 为一般的随机序列，则称 $\{X(t), t \geqslant 0\}$ 为标准叠加过程.

2.8　条件泊松过程

把参数 λ 推广为一正的随机变量的情形，即为下面所述的条件泊松过程.

定义 2.8.1　设 $\varLambda$ 是一正的随机变量，分布函数为 $G(x), x \geqslant 0$, 设 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是一计数过程，且当给定 $\varLambda = \lambda$ 的条件下，$\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是一个泊松过程，即 $\forall s, t \geqslant 0, n \in \mathbb{N}_0, \lambda \geqslant 0$, 有

$$P\{N(s+t) - N(s) = n \big| \varLambda = \lambda\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\mathrm{e}^{-\lambda t}, \tag{2.8.1}$$

称 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 是**条件泊松过程**.

注　这里 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 不是增量独立的过程. 由全概率公式，可得

$$P\{N(s+t) - N(s) = n\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\,\mathrm{d}G(\lambda). \tag{2.8.2}$$

2.9　更 新 过 程

由定理 2.4.3 知，一个计数过程，若它们相邻事件到达的时间间隔 X_n 是指数分布，则此过程为泊松流. 现在考虑 X_n 是一般分布时的情形，这便是更新过程.

定义 2.9.1　设 $\{X_k, k \geqslant 1\}$ 是独立同分布，取值非负的随机变量，分布函数为 $F(x)$, 且 $F(0)<1$. 令 $S_0=0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, 对 $\forall\, t \geqslant 0$, 记

$$N(t)=\sup\{n\colon S_n \leqslant t\},$$

或者

$$N(t)=\sum_{n=1}^{\infty} I_{(S_n \leqslant t)},$$

称 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为**更新过程**.

显然，更新过程是一计数过程，并有

$$\{N(t) \geqslant n\}=\{S_n \leqslant t\}, \tag{2.9.1}$$

$$\{N(t)=n\}=\{S_n \leqslant t<S_{n+1}\}=\{S_n \leqslant t\}-\{S_{n+1} \leqslant t\}. \tag{2.9.2}$$

记 $F_n(x)$ 为 S_n 的分布函数，由 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, 易知

$$\begin{aligned}
F_1(x) &=F(x), \\
F_n(x) &=\int_0^x F_{n-1}(x-u)\, \mathrm{d} F(u) \quad (n \geqslant 2),
\end{aligned}$$

即 $F_n(x)$ 是 $F(x)$ 的 n 重卷积 (简记 $F_n=F_{n-1} * F$). 记 $m(t)=E\{N(t)\}$, 称 $m(t)$ 为**更新函数**.

定理 2.9.1　对 $\forall\, t \geqslant 0$, 有

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \tag{2.9.3}$$

证明

$$m(t)=\sum_{n=0}^{\infty} n P\{N(t)=n\}=\sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \geqslant n\}=\sum_{n=1}^{\infty} P(S_n \leqslant t),$$

即

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \qquad \square$$

推论　若对 $\forall t \geqslant 0, F(t) < 1$, 则

$$m(t) \leqslant F(t)(1-F(t))^{-1}. \tag{2.9.4}$$

证明　由归纳可得 $F_n(t) \leqslant (F(t))^n$, 再利用 (2.9.3) 式即得. □

定理 2.9.2　$\forall t \geqslant 0, m(t)$ 满足下列更新方程

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-u)\,\mathrm{d}F(u). \tag{2.9.5}$$

证明　由 (2.9.3) 式得

$$m(t) = F(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(t).$$

将下式

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-u)\,\mathrm{d}F(u)$$

代入即得 (2.9.5) 式. □

若令

$$\tilde{m}(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}m(t),$$
$$\tilde{F}(s) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}F(t).$$

从 (2.9.5) 式易得

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{F}(s)}, \tag{2.9.6}$$

$$\tilde{F}(s) = \frac{\tilde{m}(s)}{1+\tilde{m}(s)}. \tag{2.9.7}$$

由于拉普拉斯变换与其逆变换是一一对应的，从而可知 $F(t)$ 与 $m(t)$ 亦是一一对应的.

更新过程的最初物理原型是零件的连续更换，一个零件在零时刻开始工作，在 X_1 时失效，然后马上被第二个更换，一般地，第 n 个零件在 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 时失效，随之马上换一新零件．通常假定各零件寿命是独立同分布的，即 $P(X_n \leqslant x) = F(x)$, 显然这一更换过程中 $N(t)$ 表示在 $[0,t]$ 的更新数目．现在，更新过

程在生物遗传、排水系统、可靠性工程、人口增长，以及经济管理等领域有着广泛应用.

2.10　若干极限定理与基本更新定理

本节讨论更新过程中的若干极限性态, 记号同上节. 令 $\mu = EX_n$, 由 $F(0) < 1$ 易证 $\mu > 0$, 从而有下面的命题.

命题 2.10.1

$$P\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu\Big)=1, \tag{2.10.1}$$

或记为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu \quad \text{(a.s.)}.$$

证明　由强大数定律即得. □

推论 1

$$P\Big(\lim_{n\to\infty}S_n=\infty\Big)=1. \tag{2.10.1a}$$

证明　由 $X_n \geqslant 0$ 有 $n\uparrow$ 时 $S_n\uparrow$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在. 下面证 $P\Big(\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty\Big)=1$. 用反证法，若不然，存在 $M>0$, 有 $P\Big(\lim\limits_{n\to\infty}S_n\leqslant M\Big)=\alpha>0$, 于是得 $P\Big(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}=0\Big)\geqslant\alpha>0$, 从而 $P\Big(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}\neq\mu\Big)\geqslant\alpha>0$, 这与 $P\Big(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}=\mu>0\Big)=1$ 相矛盾，因此 (2.10.1a) 式得证. □

推论 2　$\forall\, t\geqslant 0$,

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)<\infty.$$

证明　当 $t=0$ 时，有

$$m(0)\leqslant\frac{F(0)}{1-F(0)}<\infty.$$

下面考虑 $t>0$, 由 $F_k(t)$ 的单调性，易知 $F_{n+m}(t)\leqslant F_n(t)F_m(t)$, 从而有

$$F_{nr+m}(t)\leqslant(F_r(t))^nF_m(t),\quad 1\leqslant m\leqslant r-1.$$

又由 $P\Big(\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty\Big)=1$ 知，对 $\forall\, t>0$, 存在充分大的 $r\geqslant 1$, 使 $P(S_r>t)=\beta>0$, 即 $F_r(t)=P(S_r\leqslant t)=1-\beta<1$. 于是

$$m(t)=\sum_{K=1}^{\infty}F_k(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{r}F_{nr+m}(t)\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}r(F_r(t))^nF(t)=\frac{rF(t)}{1-F_r(t)}<\infty.$$ □

记 $N(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}N(t)$, 则有下面的结果.

命题 2.10.2

$$P(N(\infty)=\infty)=1. \tag{2.10.2}$$

证明　因

$$\{N(\infty)<\infty\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{S_n=\infty\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{X_n=\infty\},$$

故

$$0\leqslant P(N(\infty)<\infty)=P\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n=\infty)\Big)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P(X_n=\infty)=0,$$

命题得证. □

命题 2.10.3

$$P\Big(\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}\Big)=1. \tag{2.10.3}$$

证明　记

$$\begin{aligned}A=&\{\omega\text{: }N(\infty)=\infty\},\\ B=&\Big\{\omega\text{: }\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\mu\Big\},\\ C=&\Big\{\omega\text{: }\lim_{t\to\infty}\frac{S_{N(t)}}{N(t)}=\mu\Big\},\end{aligned}$$

则由 $P(A)=P(B)=1$ (命题 2.10.1 及 2.10.2) 易得 $P(AB)=1$, 又 $AB\subset C$, 得 $P(C)=1$. 再由

$$S_{N(t)}\leqslant t<S_{N(t)+1},$$

得

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\leqslant\frac{t}{N(t)}<\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\cdot\frac{N(t)+1}{N(t)}.$$

令 $D=\{\omega\text{: }\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{N(t)}{t}=\dfrac{1}{\mu}\}$, 则对 $\forall\,\omega\in C$, 有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_{N(t)}}{N(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{N(t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\cdot\frac{N(t)+1}{N(t)}=\mu,$$

得 $\omega\in D$, 即 $C\subset D$, 于是得 $1=P(C)\leqslant P(D)\leqslant 1$. 故 $P(D)=1$, 命题得证.

□

为了讨论瓦尔德 (Wald) 等式，先引出停时的概念.

定义 2.10.1 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 为随机序列，T 为取非负整数的随机变量，若对任一 $n \in \{0,1,2,\cdots\}$，事件 $\{T=n\}$ 仅依赖于 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 而与 $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$ 独立，则称 T 关于 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是**停时**(stopping time), 或称马尔可夫时 (Markov time).

直观意义是：当我们依次观察诸 X_n, 以 N 表示在停止观察之前所观察的次数，如果 $N=n$, 那么我们是在已经观察 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 后，还未观察 $X_{n+1}, X_{n+2}, \cdots$ 前停止观察的.

定理 2.10.1(瓦尔德等式) 设 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 独立同分布, $\mu = EX_n < \infty, X_n$ 与 X 同分布， T 关于 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是停时，且 $ET < \infty$, 则

$$E\Big\{\sum_{n=1}^{T} X_n\Big\} = (EX)(ET). \tag{2.10.4}$$

证明 令

$$I_n = \begin{cases} 1, & T \geqslant n, \\ 0, & T < n, \end{cases}$$

则

$$\sum_{n=1}^{T} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n.$$

由于 $\{I_n = 0\} = \{T < n\} = \bigcup_{k=1}^{n-1}\{T = k\}$ 仅依赖于 $X_1, X_2, \cdots, X_{n-1}$ 而与 $X_n, X_{n+1}, \cdots$ 独立，且 $\{I_n = 1\} = \Big\{\bigcup_{k=1}^{n-1}(T=k)\Big\}^C$ 也与 $X_n, X_{n+1}, \cdots$ 独立，因此 I_n 与 X_n 独立，于是

$$E\{I_n X_n\} = (EX_n)\{EI_n\},$$

故

$$\begin{aligned} E\Big\{\sum_{n=1}^{T} X_n\Big\} &= E\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n\Big\} = \sum_{n=1}^{\infty}(EX_n)(EI_n) \\ &= EX \sum_{n=1}^{\infty}(EI_n) = EX \sum_{n=1}^{\infty} P(T \geqslant n) = (EX)(ET). \end{aligned}$$

□

例 1 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 独立同分布，且 $P(X_n=1)=P(X_n=0)=1/2$, 记

$$T=\min\left\{n\colon \sum_{i=1}^{n} X_i = 10\right\},$$

可验证 T 关于 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是停时，若 $X_n=1$ 表示第 n 次试验成功，则 T 可看作是取得 10 次成功的试验停止时间，由 (2.10.4) 式得 $E\left\{\sum\limits_{n=1}^{T} X_n\right\} = \dfrac{1}{2}ET$. 但由 T 的定义知 $X_1+X_2+\cdots+X_n=10$, 故 $ET=20$. □

例 2 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 独立同分布，且 $P(X_n=1)=p, P(X_n=-1)=1-p=q \geqslant 0$, 记

$$T=\min\left\{n\colon \sum_{i=1}^{n} X_i = 1\right\}.$$

易验证 T 关于 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是停时. 它可看作是一个赌徒的停时，他在每局赌博中赢一元或输掉一元的概率分别为 p 与 $q(p+q=1)$, 且决定一旦赢一元就罢手.

当 $p>q$ 时，由第 3 章可以证明 $ET<\infty$. 此时应用 Wald 等式得

$$(p-q)ET=E(X_1+\cdots+X_T)=1,$$

从而 $ET=(p-q)^{-1}$.

当 $p=q=1/2$ 时，若应用 Wald 等式，有 $E(X_1+\cdots+X_T)=(EX)(ET)$, 然而，$EX=0, X_1+\cdots+X_T \equiv 1$. 从而得出矛盾，所以当 $p=q=1/2$ 时，Wald 等式不再成立. 这就得出结论：$ET=\infty$. □

现在转到更新过程 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 及 $N(t)=\sup\left\{n\colon \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \leqslant t\right\}$. 可以证明：$N(t)+1$ 关于 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 是停时. 事实上，$\{N(t)+1=n\}=\{N(t)=n-1\}=\{S_{n-1} \leqslant t < S_n\}$ 仅依赖于 $X_1, \cdots, X_n$ 且独立于 $X_{n+1}, \cdots$ 故由 Wald 等式可推得以下推论.

推论 当 $EX_n=\mu<\infty$ 时

$$E[S_{N(t)+1}]=\mu[m(t)+1]. \tag{2.10.5}$$

现在可以证明以下定理.

定理 2.10.2(基本更新定理)(The elementary renewal theory)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu}\ \left(\text{其中}\frac{1}{\infty}=0\right). \tag{2.10.6}$$

证明 先设 $\mu<\infty$, 由 $S_{N(t)+1}>t$, 知 $\mu[m(t)+1]>t$, 得

$$\underline{\lim}_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\geqslant\frac{1}{\mu}. \tag{2.10.6a}$$

另一方面，任意给定一常数 M, 令

$$\overline{X}_n=\begin{cases}X_n, & X_n\leqslant M,\\ M, & X_n>M,\end{cases}\qquad n\in\mathbb{N}_0,$$

$$\begin{aligned}\overline{S}_0&=0,\\ \overline{S}_n&=\sum_{i=1}^{n}\overline{X}_i,\\ \overline{N}(t)&=\sup\{n\colon n\geqslant 0,\overline{S}_n\leqslant t\},\\ \overline{m}(t)&=E\{\overline{N}(t)\}.\end{aligned}$$

显然 $\mu_M=E\overline{X}_n\leqslant\mu,\overline{S}_n\leqslant S_n,\overline{N}(t)\geqslant N(t),\overline{m}(t)\geqslant m(t),\overline{S}_{N(t)+1}\leqslant t+M$, 从而得

$$\mu_M(1+m(t))\leqslant t+M,$$

即

$$\frac{m(t)}{t}\leqslant\frac{1}{\mu_M}+\frac{1}{t}\Big(\frac{M}{\mu_M}-1\Big),$$

故

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\leqslant\frac{1}{\mu_M}\qquad(\forall\, M>0).$$

又

$$\mu_M=\int_0^M[1-F(x)]\,\mathrm{d}x.$$

令 $M\to\infty$, 有

$$\lim_{M\to\infty}\mu_M=\lim_{M\to\infty}\int_0^M[1-F(x)]\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty[1-F(x)]\,\mathrm{d}x=\mu,$$

故当 $M\to\infty$ 时

$$\overline{\lim}_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\leqslant\frac{1}{\mu}. \tag{2.10.6b}$$

综合 (2.10.6a) 式及 (2.10.6b) 式知 $\mu<\infty$ 时 (2.10.6) 式成立．如 $\mu=\infty$, 那么由 $\mu_M<\infty$, 对截尾过程应用上述结论有

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\leqslant\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\overline{m}(t)}{t}=\frac{1}{\mu_M}\geqslant 0\qquad(\forall\, M>0),$$

令 $M\to\infty$, 得

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}\leqslant\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\mu_M}=0.$$

从而结论成立. □

2.11　更新方程与关键更新定理

在定理 2.9.2 中，已证明了更新函数 $m(t)$ 满足更新方程 (2.9.5) , 本节讨论更为一般的更新方程及其解.

设已知函数 $a(t)$ 及分布函数 $F(t)$, 若未知函数 $A(t)$ 满足积分方程

$$A(t)=a(t)+\int_0^t A(t-x)\,\mathrm{d}F(x),\tag{2.11.1}$$

则称 (2.11.1) 式为**更新方程**.

更新方程在什么条件下，解存在且唯一？有何性质？

定理 2.11.1　设 $a(t)$ 为一有界函数，$F(t)$ 为分布函数，则满足更新方程 (2.11.1) 的解存在且唯一，其解在有限区间上有界，且其解 $A(t)$ 可表为

$$A(t)=a(t)+\int_0^t a(t-x)\,\mathrm{d}m(x),\tag{2.11.2}$$

其中 $m(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}F_n(t), F_1(t)=F(t), F_n(t)=\int_0^t F_{n-1}(t-x)\,\mathrm{d}F(x)$.

证明　先证 $A(t)$ 在任一有限区间上有界．对 $\forall\, s>0$, 由 $a(t)$ 有界及命题 2.10.1 的推论 2 知 $m(t)$ 有界，故若 $A(t)$ 用 (2.11.2) 式表示，则

$$\begin{aligned}\sup_{0\leqslant t\leqslant s}|A(t)|&\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant s}|a(t)|+\int_0^s\sup_{0\leqslant t\leqslant s}|a(t)|\,\mathrm{d}m(x)\\&\leqslant\sup_{0\leqslant t\leqslant s}|a(t)|[1+m(s)]<\infty.\end{aligned}$$

其次证明由 (2.11.2) 式表示的 $A(t)$ 满足方程 (2.11.1).

$$
\begin{aligned}
A(t) =& a(t) + m * a(t) = a(t) + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} F_n\Big) * a(t) \\
=& a(t) + F * a(t) + \Big(\sum_{n=2}^{\infty} F_n\Big) * a(t) \\
=& a(t) + F * \Big[a(t) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n * a(t)\Big] \\
=& a(t) + F * A(t).
\end{aligned}
$$

最后证解的唯一性，即证明任何满足 (2.11.1) 式且在有限区间上有界的解 $A(t)$ 总可以用 (2.11.2) 式表示．注意到用 (2.11.1) 式 $A(t)$ 的表达式重复代入 (2.11.1) 式右边作为 $A(t)$ 的逐步逼近，即用 $A = a + F * A$ 代入它的右边，得

$$
\begin{aligned}
A =& a + F * (a + F * A) = a + F * a + F * (F * A) && (\text{记} F_2 = F * F) \\
=& a + F * a + F_2 * A = a + F * a + F_2 * (a + F * A) && (\text{记} F_3 = F_2 * F) \\
=& a + F * a + F_2 * a + F_3 * A \\
=& \cdots && (\text{记} F_n = F_{n-1} * F) \\
=& a + \sum_{k=1}^{n-1} (F_k * a + F_n * A).
\end{aligned}
$$

由命题 2.10.1 的推论 2 知，$\forall\, t > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} F_n(t) = 0$, 故

$$
|F_n * A(t)| \leqslant \sup_{0 \leqslant x \leqslant t} \{|A(t-x)| F_n(t)\} \to 0 \quad (A(t)\text{有界，对}\forall\, t \geqslant 0).
$$

类似地由 $a(t)$ 有界，$m(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} F_n(t) < \infty$, 得

$$
\lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n-1} F_k\Big) * a(t) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} F_k\Big) * a(t) = m * a(t),
$$

于是

$$
A(t) = \lim_{n\to\infty} \Big[a(t) + \Big(\sum_{k=1}^{n-1} F_k\Big) * a(t) + F_n * A(t)\Big] = a(t) + m * a(t).
$$

因而方程 (2.11.1) 的一般解 $A(t)$ 就是 (2.11.2) 式，唯一性得证. □

为叙述关键更新定理，引入若干名词概念.

非负随机变量 X 称为**格点的**(lattice), 若存在 $d \geqslant 0$, 满足 $\sum_{n=0}^{\infty} P(X=nd)=1$. 即 X 是格点的，意指 X 只取某个非负数 d 的整数倍. 具有这种性质的最大的 d, 称为 X 的周期. 若 F 是 X 的分布函数且 X 是格点的，则称 F 是格点的.

定理 2.11.2 (Blackwell 定理) 设 $F(x)$ 为非负随机变量的分布函数，$F_n=F_{n-1}*F, F_1=F, m(t)=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$.

(1) 如 F 是非格点的，则对 $\forall a \geqslant 0$, 有

$$\lim_{t\to\infty}[m(t+a)-m(t)]=\frac{a}{\mu}. \tag{2.11.3}$$

(2) 如 F 是格点的，周期为 d, 则

$$\lim_{n\to\infty}[m((n+1)d)-m(nd)]=\frac{d}{\mu}. \tag{2.11.4}$$

证明略 (可参见 [23]).

本定理说明：如 F 是非格点的，随着时间远离原点，原先的影响逐渐消失，那么在远离原点，长为 a 的区间内更新的期望次数趋于 a/μ. 这与直觉相吻合. 如 F 是周期为 d 的格点的，此时更新只发生在形如 nd 的时刻上，因而 (2.11.4) 式成立.

设 $h(t)$ 是定义在 $[0,\infty)$ 上的函数，对任意 $\delta>0$, 记 $\underline{m}_n(\delta), \overline{m}_n(\delta)$ 分别表示 $h(t)$ 在区间 $(n-1)\delta \leqslant t \leqslant n\delta$ 上的下、上确界，若它满足：对 $\forall \delta > 0, \sum_{n=1}^{\infty} \underline{m}_n(\delta), \sum_{n=1}^{\infty} \overline{m}_n(\delta)$ 有限，且

$$\lim_{\delta\to 0}\delta\sum_{n=1}^{\infty}\overline{m}_n(\delta)=\lim_{\delta\to 0}\delta\sum_{n=1}^{\infty}\underline{m}_n(\delta),$$

就称 $h(t)$ 是直接黎曼 (Riemann) 可积的.

易证每一个单调且绝对可积函数 $g(t)\left(\text{即 } \int_0^{\infty}|g(t)|\,\mathrm{d}t<\infty\right)$ 必是直接黎曼可积的.

定理 2.11.3 (关键更新定理) 设 F 是均值为 μ 的非负随机变量的分布函

数，$F(0)<1$, $a(t)$ 是直接黎曼可积的，则

$$A(t)=a(t)+\int_0^t A(t-x)\,\mathrm{d}F(x)$$

是更新方程的解.

(1) 若 F 是非格点的，则

$$\lim_{t\to\infty} A(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_0^\infty a(t)\,\mathrm{d}t, & \mu<\infty,\\ 0, & \mu=\infty.\end{cases} \tag{2.11.5}$$

(2) 若 F 是周期为 d 的格点的，$\forall\, c>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} A(c+nd)=\begin{cases}\dfrac{d}{\mu}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a(c+nd), & \mu<\infty,\\ 0, & \mu=\infty.\end{cases} \tag{2.11.6}$$

证明从略，可参见 [23].

关键更新定理是一个非常重要且十分有用的结果. 如在计算 t 时刻的概率，期望的极限性态时，常要用到它，下面举例说明.

例 1 剩余寿命的极限分布

记 $r_t=S_{N(t)+1}-t$, 表示 t 时刻的剩余寿命，对任意固定 $z>0$, 令 $A_z(t)=P(r_t>z)$. 为求 $\lim\limits_{t\to\infty} A_z(t)$, 先证 $A_z(t)$ 满足更新方程

$$A_z(t)=1-F(t+z)+\int_0^t A_z(t-x)\,\mathrm{d}F(x). \tag{2.11.7}$$

易知

$$P(r_t>z\big|X_1=x)=\begin{cases}1, & x>t+z,\\ 0, & t+z\geqslant x>t,\\ A_z(t-x), & t\geqslant x>0.\end{cases}$$

由全概率公式

$$\begin{aligned}A_z(t)&=\int_0^\infty P(r_t>z\big|X_1=x)\,\mathrm{d}F(x)\\&=\int_0^t A_z(t-x)\,\mathrm{d}F(x)+\int_t^{t+z} 0\times\,\mathrm{d}F(x)+\int_{t+z}^\infty \mathrm{d}F(x)\\&=\int_0^t A_z(t-x)\,\mathrm{d}F(x)+[1-F(t+z)].\end{aligned}$$

因此 (2.11.7) 式得证. 设

$$\mu = EX_1 = \int_0^\infty [1-F(x)]\,\mathrm{d}x < \infty,$$
$$a(t) = 1 - F(t+z).$$

由

$$\int_0^\infty [1-F(t+z)]\,\mathrm{d}t = \int_z^\infty [1-F(y)]\,\mathrm{d}y < \mu < \infty.$$

且 $a(t) = 1-F(t+z)$ 单调, 故 $a(t)$ 直接黎曼可积, 应用 (2.11.5) 式, 得

$$\lim_{t\to\infty} P(r_t > z) = \lim_{t\to\infty} A_z(t) = \mu^{-1}\int_x^\infty [1-F(y)]\,\mathrm{d}y \quad (\forall\, z > 0).$$

这就是 r_t 的极限分布.

例 2　交错更新过程的极限分布

考虑只有两个状态的系统: 开 (用 "1" 表示) 或关 (用 "0" 表示), 系统在 $t=0$ 时是开的且持续开的时间为 Z_1; 接着关闭且持续时间为 Y_1; 之后又开着持续时间为 Z_2, 又关闭时间为 Y_2, 如此开关交替重复下去. 设 $\{(Z_n, Y_n), n \geqslant 1\}$ 为独立同分布随机向量序列 (则 $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 独立同分布, $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ 独立同分布, 但允许 Z_n 与 Y_n 相依). 记 $X_n = Z_n + Y_n, S_0 = 0, S_n = \sum\limits_{i=1}^n X_i, N(t) = \sup\{n\colon n \geqslant 0, S_n \leqslant t\}$, 则 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 为更新过程. 记

$$\zeta_t = \begin{cases} 1, & S_n \leqslant t < S_n + Z_{n+1}, \\ 0, & S_n + Z_{n+1} \leqslant t < S_{n+1}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

称 $\{\zeta_t, t \geqslant 0\}$ 为**交错更新过程**.

设 $H(t) = P(Z_n \leqslant t), G(t) = P(Y_n \leqslant t), F(t) = P(X_n \leqslant t)$, 并记 $P(t) = P(\zeta_t = 1), Q(t) = P(\zeta_t = 0)$, 则有以下定理.

定理 2.11.4　若 $EX_n < \infty$, 且 F 为非格点的, 则

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{EZ_1}{EZ_1 + EY_1},$$
$$\lim_{t\to\infty} Q(t) = \frac{EY_1}{EZ_1 + EY_1}.$$

证明　注意

$$\{\zeta_t = 1\} = \{S_{N(t)} \leqslant t < S_{N(t)} + Z_{N(t)+1}\} = \bigcup_{n=0}^\infty \{S_n \leqslant t < S_n + Z_{n+1}\}.$$

由全概率公式得

$$\begin{aligned}
P(t) =& P\{S_{N(t)} \leqslant t < S_{N(t)} + Z_{N(t)+1}\} = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n \leqslant t < S_n + Z_{n+1}) \\
=& P(Z_1 > t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P\Big[\sum_{i=2}^{n} X_i \leqslant t - x < \sum_{i=2}^{n} X_i + Z_{n+1}\Big] \mathrm{d}F(x) \\
=& 1 - H(t) + \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} P[S'_{n-1} \leqslant t - x < S'_{n-1} + Z'_n] \,\mathrm{d}F(x) \\
& \Big(\text{其中} S'_0 = 0, S'_{n-1} = \sum_{i=2}^{n} X_i \quad (n \geqslant 2), Z'_n = Z_{n+1}\Big) \\
=& 1 - H(t) + \int_0^t P(t-x)\,\mathrm{d}F(x),
\end{aligned}$$

即 $P(t)$ 满足更新方程 (2.11.1), 此时 $a(t) = 1 - H(t)$. 由 $EX_n < \infty, Z_n \geqslant 0, Y_n \geqslant 0$, 故

$$EZ_1 = \int_0^{\infty} (1 - H(t))\,\mathrm{d}t \leqslant EX_1 < \infty.$$

又 $1 - H(t)$ 单调，得 $1 - H(t)$ 直接黎曼可积，这样应用定理 2.11.3 得

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \frac{1}{EX_1}\int_0^{\infty} (1 - H(t))\,\mathrm{d}t = \frac{EZ_1}{EZ_1 + EY_1}.$$

类似可证 $\lim\limits_{t\to\infty} Q(t)$ 的结果. □

例 3 更新报酬过程

有许多概率模型是下列更新报酬模型的特殊情形. 考虑更新过程 $\{N(t), t \geqslant 0\}$ 有着时间间隔 $X_n (n \geqslant 1)$, 其分布为 F, 设每当一个更新发生时我们得到一个报酬，用 R_n 表示第 n 次更新收到的报酬. 设 $\{R_n, n \geqslant 1\}$ 独立同分布，并设随机向量 $\{(X_n, R_n) n \geqslant 1\}$ 独立同分布，然而允许 R_n 依赖于 X_n. 令 $R(t) = \sum\limits_{n=1}^{N(t)} R_n, R(t)$ 表示到 t 时为止的总报酬. 称 $\{R(t), t \geqslant 0\}$ 为更新报酬过程. 令 $ER_n = ER, EX = EX_n = \mu$, 则有下面的定理.

定理 2.11.5 若 $ER < \infty, EX = \mu < \infty$, 那么

(1) $$P\Big(\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{ER}{EX}\Big) = 1,$$

或记

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{ER}{EX} \quad \text{a.s..}$$

(2) $$\lim_{t\to\infty}\frac{E(R(t))}{t}=\frac{ER}{EX}.$$

证明 由于

$$\frac{R(t)}{t}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{N(t)}R_n}{t}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{N(t)}R_n}{N(t)}\frac{N(t)}{t},$$

故由强大数定律及更新过程强大数定律，有

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sum\limits_{n=1}^{N(t)}R_n}{N(t)}=ER\quad \text{a.s.},$$

及

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{EX}\quad \text{a.s.},$$

故知 (1) 成立.

为证 (2), 首先注意 $(N(t)+1)$ 关于 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是停时，因而也是 $\{R_n,n\geqslant 1\}$ 的停时. 由 Wald 等式

$$E\Big[\sum_{n=1}^{N(t)}R_n\Big]=E\Big[\sum_{n=1}^{N(t)+1}R_n\Big]-E[R_{N(t)+1}]=[m(t)+1]ER-E[R_{N(t)+1}],$$

故

$$\frac{ER(t)}{t}=\frac{m(t)+1}{t}ER-\frac{E[R_{N(t)+1}]}{t}.$$

如果能证明：当 $t\to\infty$ 时, $\dfrac{E[R_{N(t)+1}]}{t}\to 0$, 那么，由基本更新定理即可证 (2) 成立. 为此，令 $g(t)=E[R_{N(t)+1}]$, 用 "更新技巧":

$$E(R_{N(t)+1}|X_1=x)=\begin{cases}E(R_1|X_1=x), & x>t;\\ g(t-x), & x\leqslant t.\end{cases}$$

因为 $X_1=x>t$ 时, $N(t)=0$; 而 $x\leqslant t$ 时, 将时间原点移至 x, 过程重新开始. 所以

$$g(t)=\int_0^{\infty}E(R_{N(t)+1}|X_1=x)\,\mathrm{d}F(x)=h(t)+\int_0^t g(t-x)\,\mathrm{d}F(x),$$

其中 $h(t)=\int_t^{\infty} E(R_1 \big| X_1=x)\,\mathrm{d}F(x)$. 事实上，对一切 t, 有

$$\begin{aligned}|h(t)| &\leqslant \int_t^{\infty} |E(R_1 \big| X_1=x)|\,\mathrm{d}F(x) \leqslant \int_t^{\infty} E(|R_1| \big| X_1=x)\,\mathrm{d}F(x)\\ &\leqslant \int_0^{\infty} E(R_1 \big| X_1=x)\,\mathrm{d}F(x)=E|R_1|<\infty,\end{aligned}$$

从而得 $t\to\infty, h(t)\to 0$, 且对所有 $t\geqslant 0, h(t)\leqslant E|R_1|$. 因此, $\forall\varepsilon>0$ 存在 T, 当 $t>T$ 时 $|h(t)|<\varepsilon$. 由定理 2.11.1 有

$$g(t)=h(t)+\int_0^t h(t-x)\,\mathrm{d}m(x).$$

利用基本更新定理有

$$\begin{aligned}\frac{g(t)}{t} &\leqslant \frac{|h(t)|}{t}+\int_0^{t-T}\frac{|h(t-x)|\,\mathrm{d}m(x)}{t}+\int_{t-T}^{t}\frac{|h(t-x)|\,\mathrm{d}m(x)}{t}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{t}+\frac{\varepsilon m(t-T)}{t}+ER_1\frac{m(t)-m(t-T)}{t}\quad(t>T)\\ &\to \frac{\varepsilon}{EX}\quad(t\to\infty).\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，得 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{g(t)}{t}=0$. 于是 (2) 成立. □

注 定理说明，对于长时间运行后求得的期望平均报酬，等于一个周期内得到的期望报酬除以一个周期的期望时间.

例 4 计数模型

这里指的计数器是一种用于检测与记录瞬时脉冲信号的装置. 例如，常见的 Geiger-Muller 计数器及电子放大器等. 所有具体的物理计数器都有缺点：它不能检测到所有进入检测区域的信号. 在记录一个粒子或一个信号后，计数器必须恢复或更新自己后才能接收下一个信号, 在调整期 (或称为锁住期、不接收期) 内到达信号会丢失, 我们必须区分到达粒子 (信号) 和记录粒子 (信号). 实验者通过该计数器只能观察到记录粒子信号，希望由此发现到达过程的性质. 假定信号按时间间隔 $\{X_n, n\geqslant 1\}$ 的更新过程到达, $F(x)=P(X_n\leqslant x)$. 计数模型按其锁住期加以区分，这里只讨论一类常见的 I 型计数器. 设 $t=0$ 时一个信号到达计数器，在 Y_1 锁住期内不接收到达的信号，记录的第一个信号是 Y_1 后到达的信号，由于这个信号的记录，计数器又有一个锁住期 Y_2, 下一个记录的信号是计数器恢复工作后第一个到达的信号，如此重复进行，其中锁住期依次

记为 $Y_1, Y_2, \cdots$, 设其独立同分布, 分布函数为 $G(y) = P(Y_n \leqslant y)$ 且 $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ 与 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 独立. 设 Z_1 表示第一个信号记录的时间间隔 (不包括原点), 因为这个过程在每次记录之后开始恢复, $Z_n(n = 2, 3, \cdots)$ 为 $n-1$ 次和 n 次记录的时间间隔, 知 $\{Z_n, n \geqslant 1\}$ 构成一更新过程, 如图 2.3 所示. 设 $S_0 = 0, S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i, N(t) = \sup\{n{:}\, n \geqslant 0, S_n \leqslant t\}, \gamma_t = S_{N(t)+1} - t, A_x(t) = P(\gamma_t > x)$. 由 $\{X_n, n \geqslant 1\}$ 与 $\{Y_n, n \geqslant 1\}$ 独立并注意到 $Z_1 = Y_1 + \gamma_{y_1} = S_{N(y_1)+1}$, 故 Z_1 的分布为

$$P(Z_1 \leqslant z) = \int_0^z P(y + \gamma_y \leqslant z \big| Y_1 = y)\,\mathrm{d}G(y) = \int_0^z \{1 - A_{z-y}(y)\}\,\mathrm{d}G(y).$$

$A_z(t)$ 由 (2.11.7) 式求得，这样 I 型计数器计数信号间的时间间隔分布就完全确定了. 进一步应用更新定理，不难求得长期检测时，每单位时间平均记录信号数是 $1/EZ_1$. 应用关键更新定理可以证明，当 $t \to \infty$ 时，记录的信号与到达信号数的比例是 EX_1/EZ_1.

当到达信号是参数为 λ 的泊松流，即 $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}(x \geqslant 0)$ 时，γ_t 服从参数为 λ 的指数分布, Z_1 的分布变为

$$P(Z_1 \leqslant z) = \int_0^z G(z-y)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\,\mathrm{d}y.$$