矩母函数补充阅读

本质上是 Laplace 变换在概率论中的应用。

定义：随机变量 X 的矩母函数定义为 $m_X(u)=E(e^{uX}),\quad u\in R$（如果后者的期望存在的话）

由 LOTUS 定理

$$m_X(u)=E(e^{uX})=\begin{cases}\sum_i e^{ux_i}p_i, & X\sim\{p_i\}\\ \int_{-\infty}^{\infty}e^{ux}f_X(x)dx, & X\sim f_X(x)\end{cases},$$

显然，$m_X(0)=1$ 永远存在。

定理：矩母函数 $m_X(u)$ 具有如下性质：

（1） 若 X 的矩母函数 $m_X(u)$ 在 $u=0$ 的某一开领域内存在，则

$E(X^n)=m_X^{(n)}(0),\forall n\in N$；

（2） $m_{aX+b}(u)=e^{bu}M_X(au)$；

（3） 若随机变量 X 与 Y 独立，则 $m_{X+Y}(u)=m_X(u)m_Y(u)$；

（4） 当矩母函数存在时，它可以唯一决定随机变量的分布。

Hint：若 $m_X(u)$ 在 $u=0$ 的某一开领域 $(-\delta,\delta)$ 内存在，则 $\forall n\in N$，存在 s，使得 $0<ns<\delta$，

由于 $s|X|\le e^{s|X|}$，故 $s^n|X|^n\le e^{sn|X|}\le e^{snX}+e^{-snX}$

$$E(|X|^n)\le E[\frac{e^{snX}+e^{-snX}}{s^n}]=s^{-n}[m_X(sn)+m_X(-sn)]<\infty$$

$$\frac{d^n}{du^n}m_X(u)=\frac{d^n}{du^n}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ux}f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^n}{du^n}[e^{ux}f_X(x)]dx=\int_{-\infty}^{\infty}x^ne^{ux}f_X(x)dx$$

$$\frac{d^n}{du^n}m_X(u)|_{u=0}=\int_{-\infty}^{\infty}x^nf_X(x)dx=EX^n$$

例 1： $X\sim P(\lambda)$，则

$$m_X(u)=Ee^{uX}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{uk}P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{uk}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$
$$=e^{\lambda(e^u-1)}$$

从而 $EX=m_X'(0)=\lambda$； $EX^2=m_X''(0)=\lambda+\lambda^2$，故 $DX=\lambda$。

例 2： $X\sim Gamma(\alpha,\lambda)$，即 $f_X(x)=\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}1_{\{x>0\}}$

若 $u<\lambda$ ， $m_X(u)=E(e^{uX})=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ux}\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}1_{\{x>0\}}dx=(\dfrac{\lambda}{\lambda-u})^\alpha$,

若 $u\ge\lambda$ ， $m_X(u)=E(e^{uX})=\infty$

$$E(X^n)=m_X^{(n)}(0)=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\lambda^{-n},\forall n\in N$$

例 3：复合 Poisson 过程的矩母函数：设 Y_i 的矩母函数为 $m_Y(u)$，则

$$M_t(u)=E(e^{uX_t})=\sum_{n=0}^{\infty}E(e^{uX_t}\mid N_t=n)P(N_t=n)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}E(e^{u(Y_1+\cdots+Y_n)}\mid N_t=n)P(N_t=n)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}E(e^{u(Y_1+\cdots+Y_n)})e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(m_Y(u))^n e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$
$$=e^{\lambda t(m_Y(u)-1)}$$

故可推得 $EX_t=\lambda tEY_1$， $DX_t=\lambda tEY_1^2$

注：是否存在两个不同的分布，但其所有的 n 阶矩都相同

例：

$$X_1\sim f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}1_{\{x>0\}};$$
$$X_2\sim f_2(x)=f_1(x)[1+\sin(2\pi\ln x)]1_{\{x>0\}};$$

X_1 为对数正态分布，它具有任意 n 阶矩，即 $\forall n\in N$，有

$$E(X_1^n)=\int_0^{\infty}x^n\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}dx\overset{y=\ln x}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ny-\frac{y^2}{2}}dy=e^{\frac{n^2}{2}};$$

$$E(X_2^n)=\int_0^{\infty} x^n f_1(x)[1+\sin(2\pi\ln x)]dx = E(X_1^n)+\int_0^{\infty} x^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{\ln^2 x}{2}} \sin(2\pi\ln x)dx$$

$$\overset{y=\ln x}{=} E(X_1^n)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ny-\frac{y^2}{2}}\sin(2\pi y)dy \overset{s=y-n}{=} E(X_1^n)+\frac{e^{\frac{n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\sin(2\pi(s+n))dy$$

$$=E(X_1^n)+\frac{e^{\frac{n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}}\sin(2\pi s)dy = E(X_1^n)$$

定理：设 X,Y 的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(x)$，

（1） 若 X,Y 均有界，则 $F_X(x)=F_Y(x),\forall x\in R$ 当且仅当 $E(X^n)=E(Y^n),\forall n\in N$ ；

（2） 若 $m_X(u),m_Y(u)$ 均在 $u=0$ 的某一开领域内存在，且 $m_X(u)=m_Y(u),\forall u\in R$，则 $F_X(x)=F_Y(x),\forall x\in R$

例：$X \sim f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}1_{\{x>0\}};\Leftrightarrow \ln X \sim N(0,1)$

若 $u>0$ ，

$$m_X(u)=E(e^{uX})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ux}\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}1_{\{x>0\}}dx=\infty,(\because \lim_{x\to+\infty} e^{ux}\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}=\infty)$$

若 $u<0$ ，

$$m_X(u)=E(e^{uX})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ux}\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}1_{\{x>0\}}dx \le \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}dx=1$$