单元3.7 关系的性质

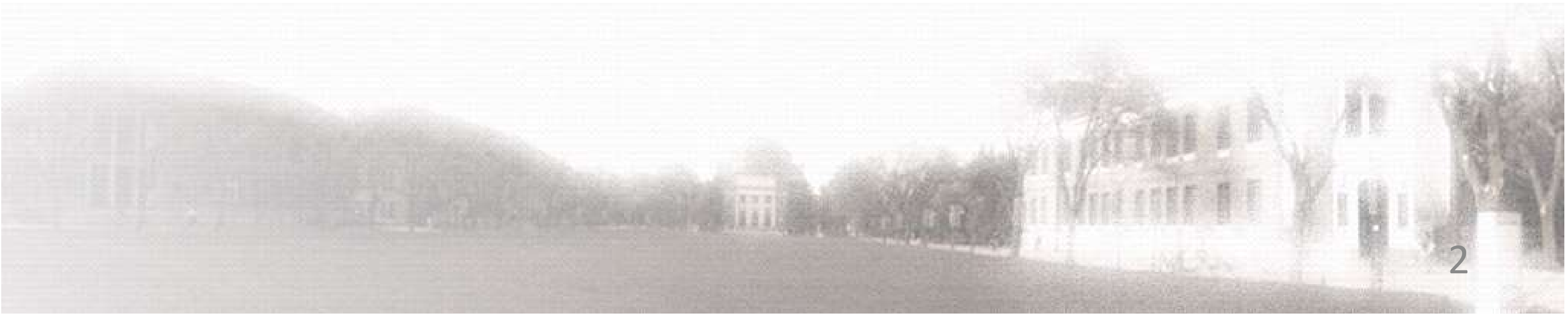
第七章 二元关系

7.4 关系的性质

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

- 关系的性质
  - 自反、反自反
  - 对称、反对称
  - 传递

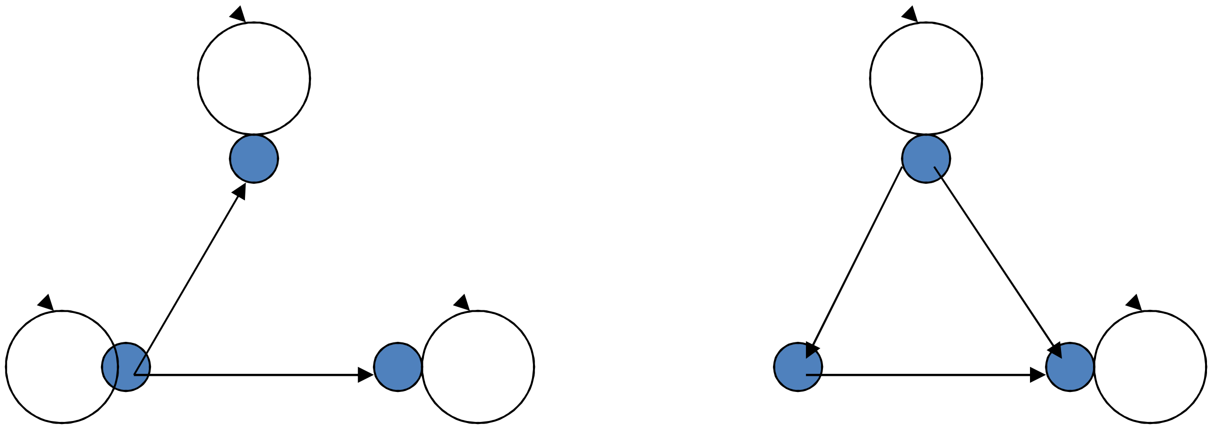


自反性(reflexivity)

- $R \subseteq A \times A$
- R是自反的 $\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow xRx) \Leftrightarrow (\forall x \in A)xRx$
- 例：非空集合上的恒等关系、全域关系，正整数集合上的整除关系、小于等于关系，集合的幂集上的包含关系和相等关系等

- R是非自反的 $\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \neg xRx)$

自反性举例



自反　　　　　　非自反

定理

- 定理:

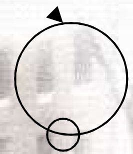
  R是自反的

  $\Leftrightarrow$ $I_A \subseteq R$

  $\Leftrightarrow$ R^{-1}是自反的

  $\Leftrightarrow$ M(R)主对角线上的元素全为1

  $\Leftrightarrow$ G(R)的每个顶点处均有环. #

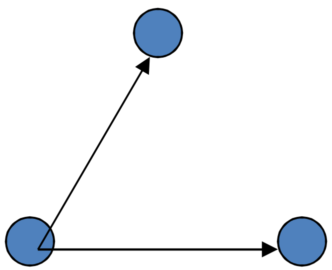


反自反性(irreflexivity)

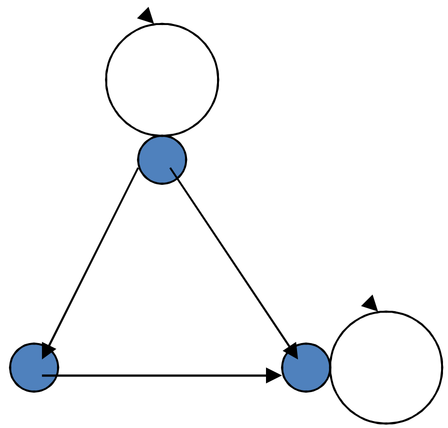
- $R \subseteq A \times A$
- R是反自反的 $\Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow \neg xRx) \Leftrightarrow (\forall x \in A)\neg xRx$
- 例：非空集合上的空关系，自然数集合上的小于关系，集合的幂集上的真包含关系

- R是非反自反的 $\Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge xRx)$

反自反性举例



反自反



非反自反

定理

- 定理:

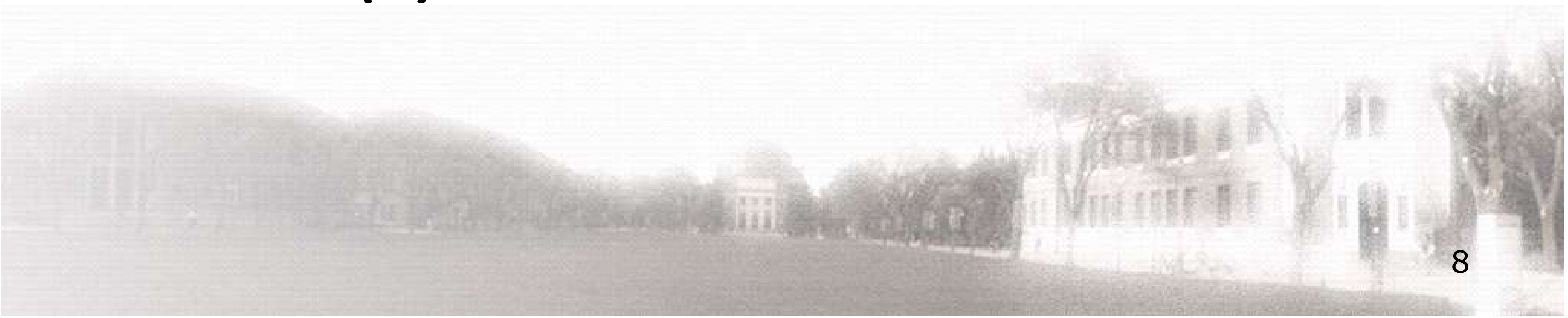
  R是反自反的

  $\Leftrightarrow$ $I_A \cap R = \varnothing$

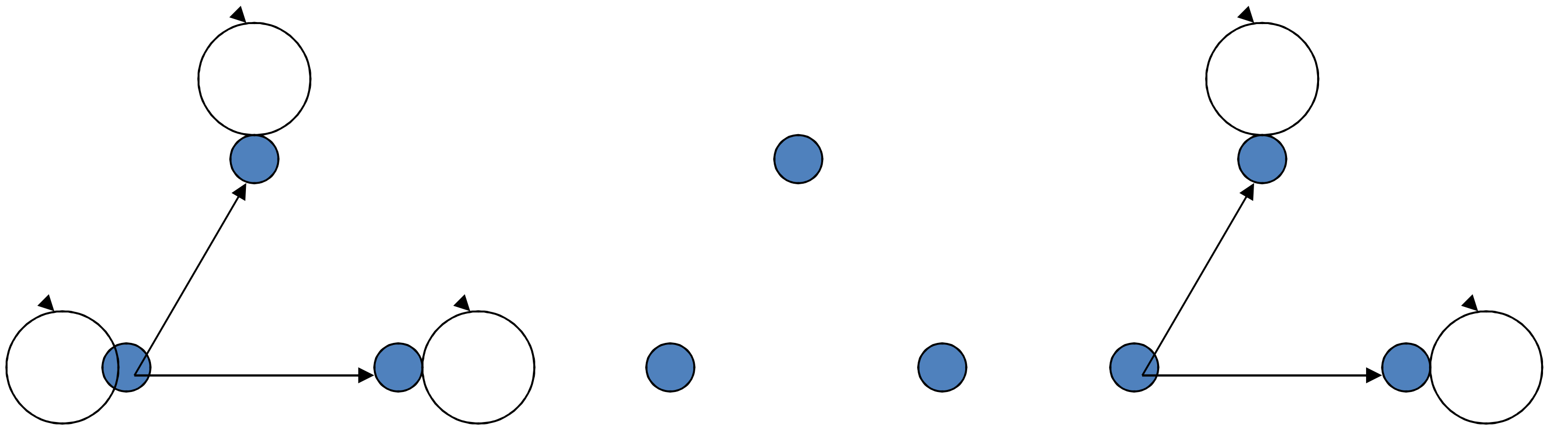
  $\Leftrightarrow$ R^{-1}是反自反的

  $\Leftrightarrow$ M(R)主对角线上的元素全为0

  $\Leftrightarrow$ G(R)的每个顶点处均无环. #



自反性与反自反性



自反　　　　反自反　　　　都不是

(自反且反自反: ∅上的空关系)

存在非自反且非反自反的关系：**R={<1,1>, <2,2>, <3,1>, <3,2>}**

对称性(symmetry)

- $R \subseteq A \times A$
- R是对称的 $\Leftrightarrow$

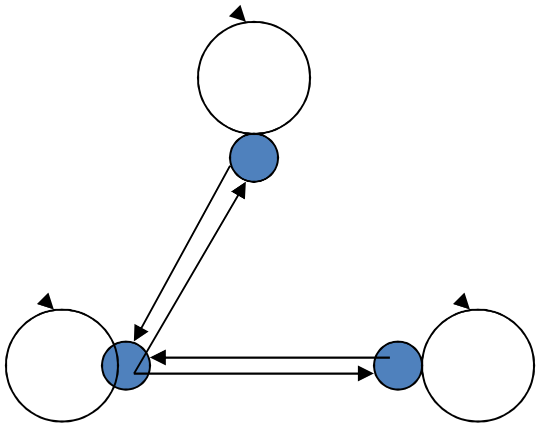
$$\forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)[xRy \rightarrow yRx]$$

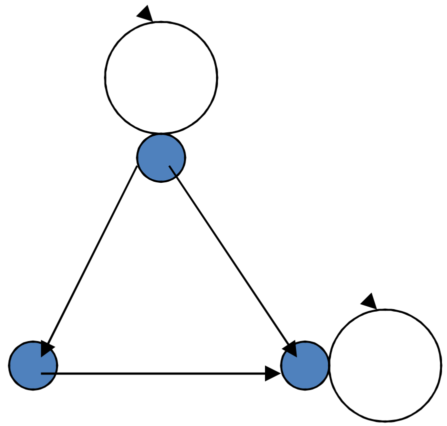
- 例：非空集合上的全域关系（对称、非反对称）、恒等关系
- R是非对称的 $\Leftrightarrow$

$\exists x \exists y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge \neg yRx)$

对称性举例



对称



非对称

定理

- 定理:

  R是对称的

  $\Leftrightarrow$ **R^{-1}=R**

  $\Leftrightarrow$ **R^{-1}**是对称的

  $\Leftrightarrow$ **M(R)**是对称的

  $\Leftrightarrow$ **G(R)**的任何两个相异顶点之间若有边,则必有两条方向相反的有向边. **#**

反对称性(anti-symmetry)

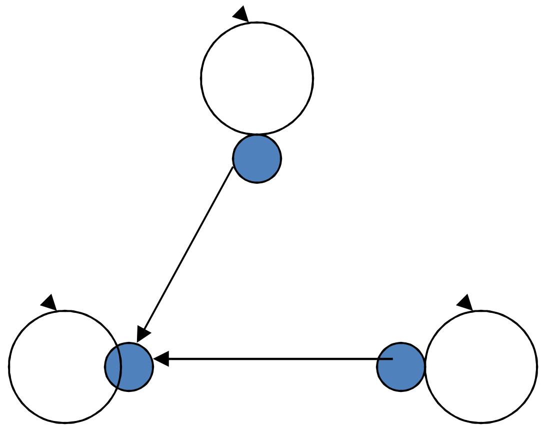
- **R⊆A×A**
- **R**是反对称的 ⇔

$$\forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$$

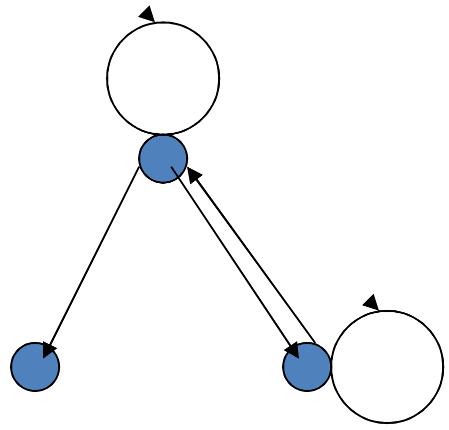
$$\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)[xRy \wedge yRx \rightarrow x=y]$$

- 例：非空集合上的恒等关系、空关系，正整数集合上的整除关系小于等于关系、小于关系（反对称，但非对称）
- **R**非反对称 ⇔ $\exists x \exists y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \wedge x \neq y)$

反对称性举例



反对称



非反对称

定理

- 定理:

  R是反对称的

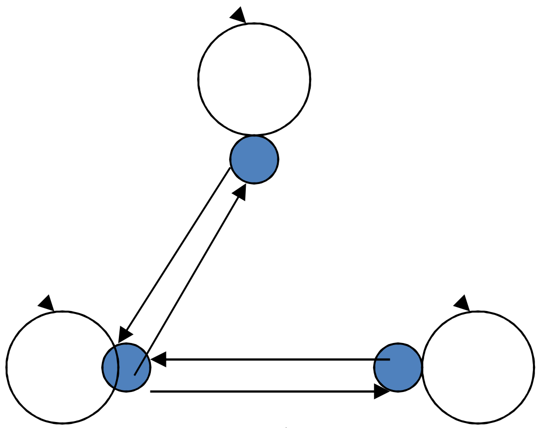
  $\Leftrightarrow R^{-1} \cap R \subseteq I_A$

  $\Leftrightarrow R^{-1}$是反对称的

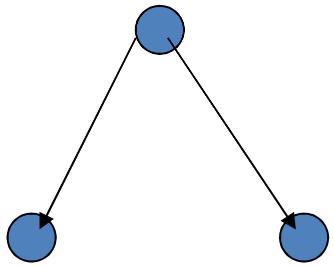
  $\Leftrightarrow$ 在M(R)中, $\forall i \forall j (i \neq j \wedge r_{ij}=1 \rightarrow r_{ji}=0)$

  $\Leftrightarrow$ 在G(R)中, $\forall a_i \forall a_j (i \neq j)$,若有有向边$\langle a_i, a_j \rangle$, 则必没有$\langle a_j, a_i \rangle$. #

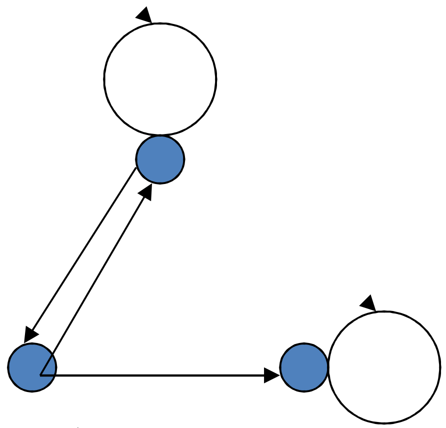
对称性与反对称性



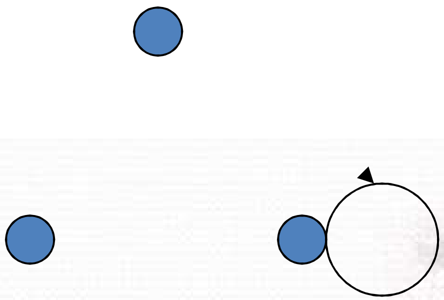
对称



反对称



都不是



对称且反对称

传递性(transitivity)

- $R \subseteq A \times A$
- R是传递的 $\Leftrightarrow$

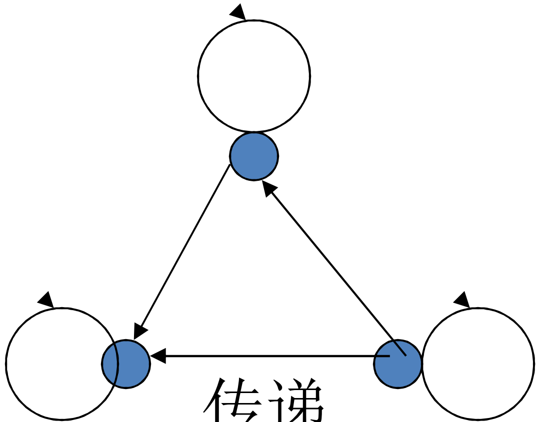
$$\forall x \forall y \forall z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)[xRy \wedge yRz \rightarrow xRz]$$

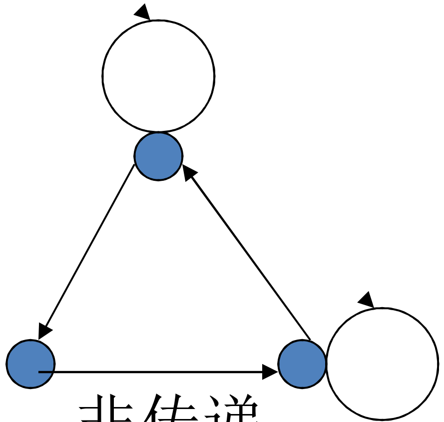
- R非传递 $\Leftrightarrow$

$$\exists x \exists y \exists z (x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \wedge \neg xRz)$$

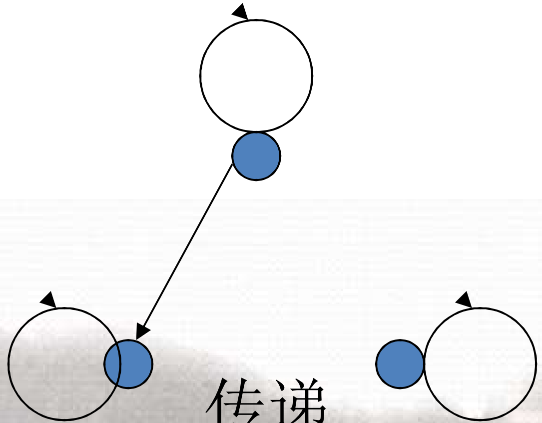
传递性举例



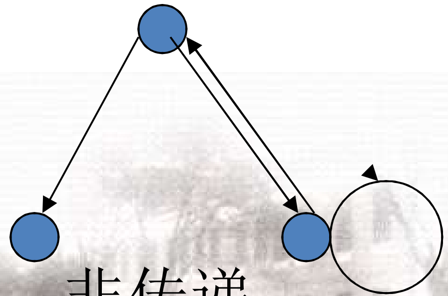
传递



非传递



传递



非传递

定理

- 定理:

  R是传递的

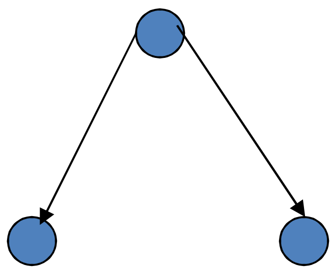
$\Leftrightarrow$ **RoR$\subseteq$R** $\Leftrightarrow$ R^{-1}是传递的

$\Leftrightarrow$ $\forall i \forall j$, M(RoR)(i,j)$\leq$M(R)(i,j)

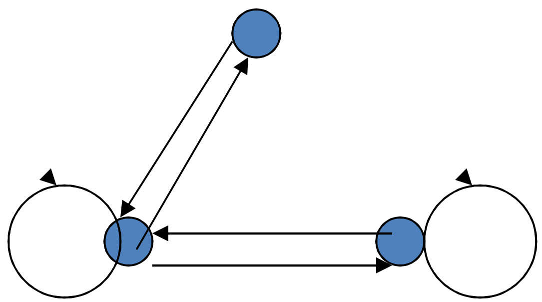
$\Leftrightarrow$ 在G(R)中, $\forall a_i \forall a_j \forall a_k$, 若有有向边$<a_i,a_j>$和$<a_j,a_k>$, 则必有有向边$<a_i,a_k>$.

#

传递性



传递



非传递

在N={0,1,2,…}上

- $\leq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\leq y\}$自反,反对称,传递
- $\geq=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x\geq y\}$自反,反对称,传递
- $<=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x<y\}$反自反,反对称,传递
- $>=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x>y\}$反自反,反对称,传递
- $D=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x|y\}$反对称,传递($\neg 0|0$)
- $I_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\wedge x=y\}$自反,对称,反对称,传递
- $E_N=\{<x,y>|x\in N\wedge y\in N\}=N\times N$自反,对称,传递.

#

例

- $A=\{a,b,c\}$

$R_1=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle\}$,

$R_2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$,

$R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,$
$\langle c,c\rangle\}$,

$R_4=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

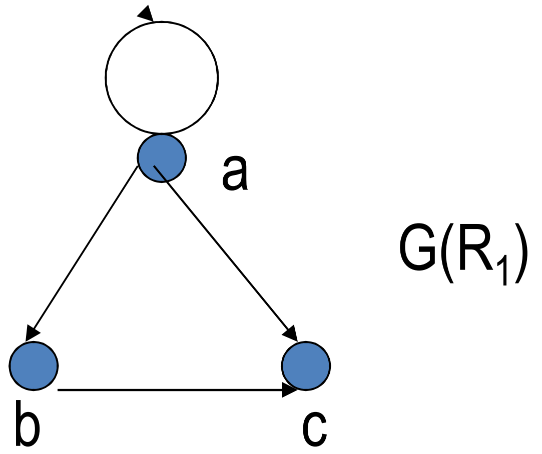
$R_5=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$,

$R_6=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle a,a\rangle\}$,

例

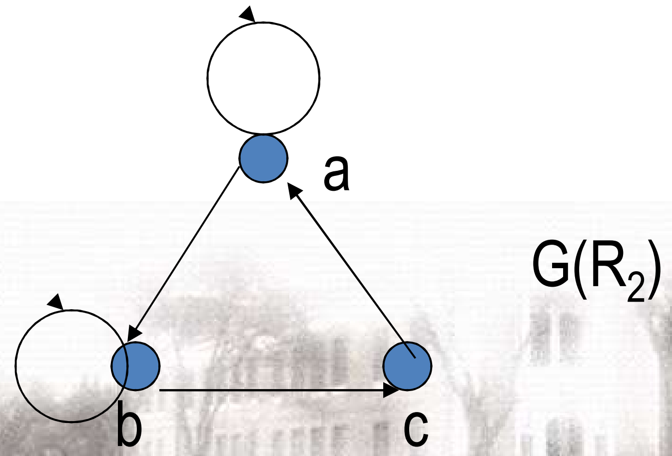
$R_1=\{<a,a>,<a,b>,$
$<b,c>,<a,c>\}$

反对称,传递



$R_2=\{<a,a>,<a,b>,$
$<b,c>,<c,a>\}$

反对称

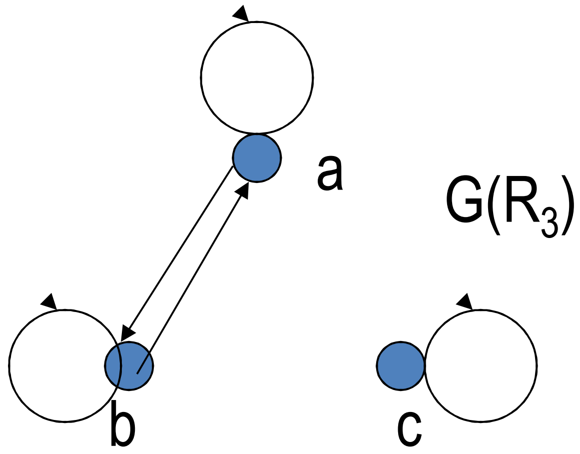


例

$R_3=\{\langle a,a\rangle,\langle b,b\rangle,$

$\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$

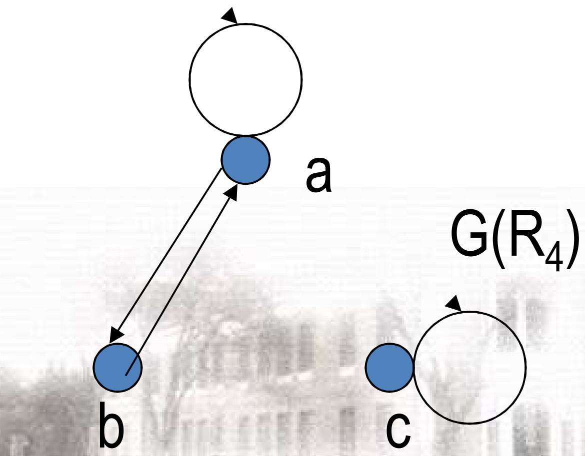
自反,对称,传递



$R_4=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,$

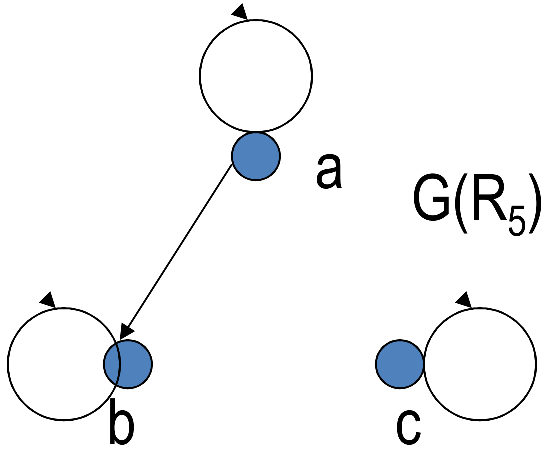
$\langle b,a\rangle,\langle c,c\rangle\}$

对称



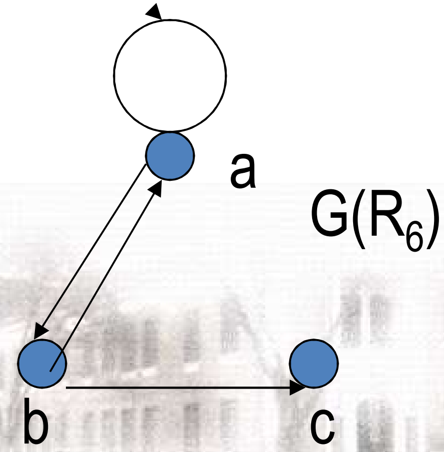
例

R_5={<a,a>,<a,b>,
<b,b>,<c,c>}
自反,反对称,传递



R_6={<a,b>,<b,a>,
<b,c>,<a,a>}.
无任何性质

#



关系性质判别

·	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
表达式	$I_A \subseteq R$	$R \cap I_A = \varnothing$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq I_A$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是1	主对角线元素全是0	矩阵是对称矩阵	若$r_{ij}=1$, 且$i \neq j$, 则$r_{ji}=0$	对M^2中1所在位置, M中相应位置都是1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 一定是一对方向相反的边(无单边)	如果两点之间有边, 一定是一条有向边(无双向边)	如果顶点x_i到x_j有边, x_j到x_k有边,则从x_i到X_k也有边

关系性质与关系运算

- 定理: **$R_1,R_2 \subseteq A \times A$**具有某些共同性质。经过运算后是否能保持原性质？

	自反	反自反	对称	反对称	传递
R_1^{-1}, R_2^{-1}	√	√	√	√(4)	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√		
$R_1 \cap R_2$	√	√(2)	√	√	√(5)
$R_1 o R_2$,$R_2 o R_1$	√(1)				
$R_1 - R_2$, $R_2 - R_1$		√	√(3)	√	
$\sim R_1, \sim R_2$			√(3')		

定理(1)证明

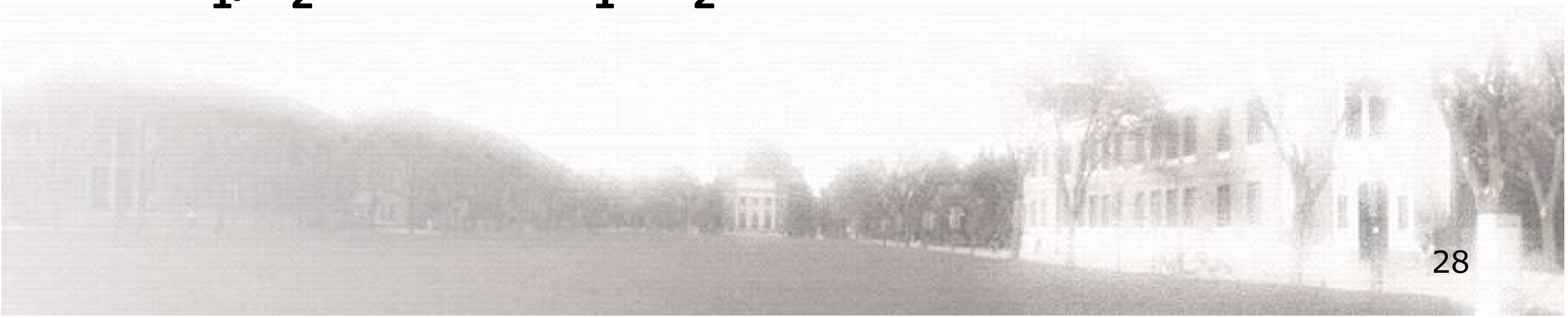
- **R_1,R_2自反 $\Rightarrow$ R_1oR_2自反**
- 证明: $\forall x$,

  $x \in A$

  $\Rightarrow xR_1x \wedge xR_2x$

  $\Rightarrow xR_1oR_2x$

$\therefore$ R_1,R_2自反 $\Rightarrow$ R_1oR_2自反.



定理(2)证明

- R_1,R_2反自反 $\Rightarrow R_1\cap R_2$反自反
- 证明: (反证) 若$R_1\cap R_2$非反自反, 则 $\exists x\in A$,

$$x(R_1\cap R_2)x$$

$$\Leftrightarrow xR_1x \wedge xR_2x$$

与R_1,R_2反自反矛盾!

$\therefore R_1,R_2$反自反 $\Rightarrow R_1\cap R_2$反自反. #

定理(3)证明

- R_1,R_2对称 $\Rightarrow$ R_1-R_2对称
- 证明: $\forall x,y \in A$,

$$x(R_1-R_2)y$$

$$\Leftrightarrow xR_1y \wedge \neg xR_2y$$

$$\Rightarrow yR_1x \wedge \neg yR_2x \qquad （R_1,R_2\text{对称}）$$

$$\Leftrightarrow y(R_1-R_2)x$$

$\therefore$ R_1,R_2对称 $\Rightarrow$ R_1-R_2对称. #

定理(3’)证明

- R_1对称 $\Rightarrow$ $\sim R_1$对称
- 证明: $\forall x,y \in A$,

$$
\begin{aligned}
& x(\sim R_1)y \\
\Leftrightarrow\ & x(E_A - R_1)y \Leftrightarrow xE_Ay \wedge \neg xR_1y \\
\Rightarrow\ & yE_Ax \wedge \neg yR_1x \Leftrightarrow y(E_A - R_1)x \quad （E_A, R_1\text{对称}） \\
\Leftrightarrow\ & y(\sim R_1)x
\end{aligned}
$$

$\therefore$ R_1对称 $\Rightarrow$ $\sim R_1$对称. #

定理(4)证明

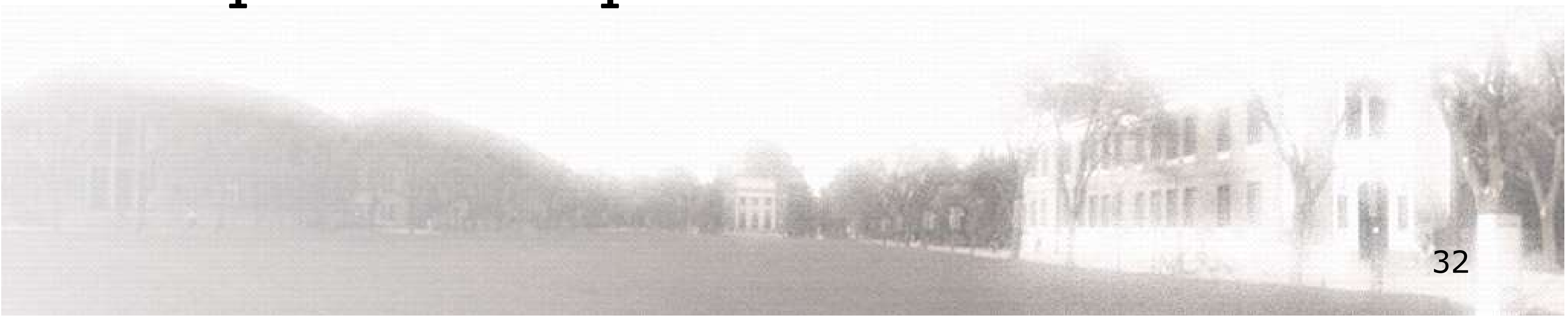
- **R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称**
- 证明: (反证) 若R_1^{-1}非反对称, 则$\exists x,y\in A$,

$$xR_1^{-1}y \wedge yR_1^{-1}x \wedge x\neq y$$

$$\Leftrightarrow yR_1x \wedge xR_1y \wedge x\neq y$$

与R_1反对称矛盾!

$\therefore$ R_1反对称 $\Rightarrow$ R_1^{-1}反对称. #



定理(5)证明

- R_1,R_2传递 $\Rightarrow R_1\cap R_2$传递
- 证明：$\forall x,y,z\in A$,

$$x(R_1\cap R_2)y \wedge y(R_1\cap R_2)z$$

$$\Leftrightarrow (xR_1y\wedge xR_2y)\wedge(yR_1z\wedge yR_2z)$$

$$\Leftrightarrow (xR_1y\wedge yR_1z)\wedge(xR_2y\wedge yR_2z)$$

$$\Rightarrow\ xR_1z\wedge xR_2z\ \Leftrightarrow x(R_1\cap R_2)z$$

$\therefore$ R_1,R_2传递 $\Rightarrow R_1\cap R_2$传递. #

小结

- 自反, 反自反, 对称, 反对称, 传递