单元3.10 序关系

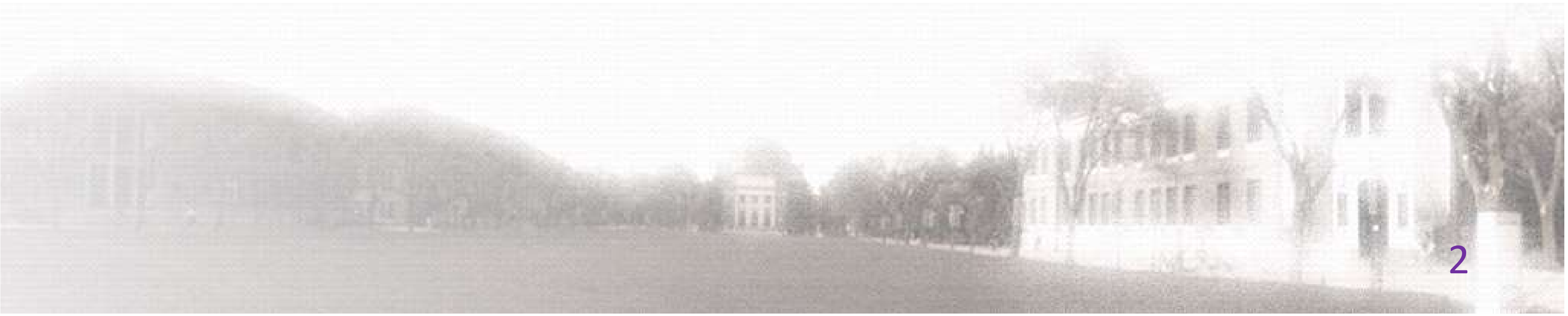
第七章 二元关系

7.7 偏序关系

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

- 偏序关系、偏序集、哈斯图；
- 全序关系、全序集
- 拟序关系、拟序集；
- 最大元、最小元、极大元、极小元、上界、下界、上确界、下确界



偏序关系、偏序集

定义 设 $A\neq\varnothing$，$R\subseteq A\times A$，若 R 是自反、反对称、 传递的，则称 R 为 A 上的**偏序关系**。常用 $\preccurlyeq$ 表示偏序关系，读作“小于等于”

$$<x,y>\in R \Leftrightarrow xRy \Leftrightarrow x\preccurlyeq y$$

定义 设 $\preccurlyeq$ 是 A 上偏序关系，称 $<A,\preccurlyeq>$ 为**偏序集**。

例

(1) $\varnothing \neq A \subseteq R$, $<A, \leq>$, $<A, \geq>$

$$\leq = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x \leq y \}$$

$$\geq = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x \geq y \}$$

(2) $\varnothing \neq A \subseteq Z_+ = \{x \mid x \in Z \wedge x > 0\}$, $<A, \mid>$

$$\mid = \{ <x,y> \mid x,y \in A \wedge x \mid y \}$$

例 $\langle\mathcal{A},\subseteq\rangle$

(3) $\mathcal{A}\subseteq P(A)$, $\subseteq=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in\mathcal{A}\wedge x\subseteq y\}$

$A=\{a,b\}$, $\mathcal{A}_1=\{\varnothing,\{a\},\{b\}\}$, $\mathcal{A}_2=\{\{a\},\{a,b\}\}$,

$\mathcal{A}_3=P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$\subseteq_1=I_{\mathcal{A}1}\cup\{\langle\varnothing,\{a\}\rangle,\langle\varnothing,\{b\}\rangle\}$

$\subseteq_2=I_{\mathcal{A}2}\cup\{\langle\{a\},\{a,b\}\rangle\}$

$\subseteq_3=I_{\mathcal{A}3}\cup\{\langle\varnothing,\{a\}\rangle,\langle\varnothing,\{b\}\rangle,\langle\varnothing,\{a,b\}\rangle,$

$\langle\{a\},\{a,b\}\rangle, \langle\{b\},\{a,b\}\rangle\}$

可比, 严格小于, 覆盖

定义　设<A,≼>是偏序集，x,y∈A。

若 $x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$，则称 x 与 y **可比**。

若 x 小于等于 y 且不相等，则说 x 严格小于 y，即

$$x \preccurlyeq y \wedge x \neq y \Leftrightarrow x \prec y$$

若 x 严格小于 y，且不存在 z，使得 x 严格小于 z、z 严格小于 y，则称 y **覆盖** x，即

$$x \prec y \wedge \neg \exists z (z \in A \wedge x \prec z \prec y)$$

$\forall x, y \in A$，下述几种情况发生其一且仅发生其一.
$x \prec y$, $y \prec x$, $x = y$, x与y不是可比的

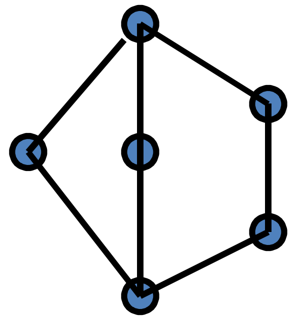
哈斯图

- 设<A,≼>是偏序集，x,y∈A。
- **哈斯图**：

  (1) 用顶点表示A中元素

  (2) 当且仅当y覆盖x时, y在x上方,

  在x与y之间画无向边



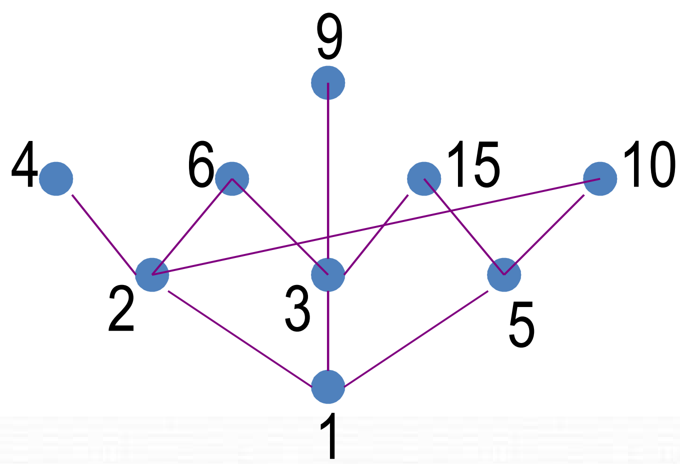
偏序关系自反性：舍去自圈；

偏序关系反对称性：定义边的方向及定义，省去箭头

偏序关系传递性：传递可得的有向边不画

例

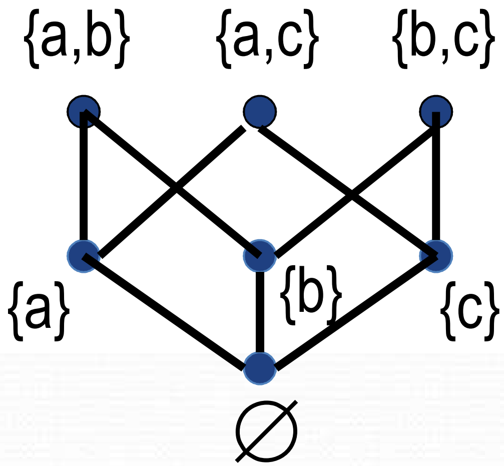
- **A={1,2,3,4,5,6,9,10,15}, <A,|>**



例

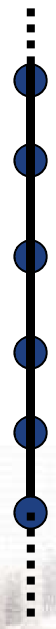
- $A=\{a,b,c\}$, $\mathcal{A}\subseteq P(A)$, $<\mathcal{A},\subseteq>$

  $\mathcal{A}=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$



全序关系(线序关系)

定义 设 $<A,\preccurlyeq>$ 是偏序集，若 A 中任意元素 x,y 都可比，则称 $\preccurlyeq$ 为 A 上的全序关系(线性关系)，称 $<A,\preccurlyeq>$ 为全序集(线序集)。



例：$\varnothing \neq A \subseteq R$ (实数) , $<A, \le>$, $<A, \ge>$

充要条件：哈斯图是一条“直线”

拟序关系

定义 设$A\neq\varnothing$，$R\subseteq A\times A$。若 R 是反自反、传递的，则称 R 为 A 上的拟序关系，常用 $\prec$ 表示拟序关系，称 $<A,\prec>$ 为拟序集。

说明：反自反性 与 传递性 蕴涵 反对称性

(反证) $x\prec y \wedge y\prec x \Rightarrow x\prec x$, 矛盾！

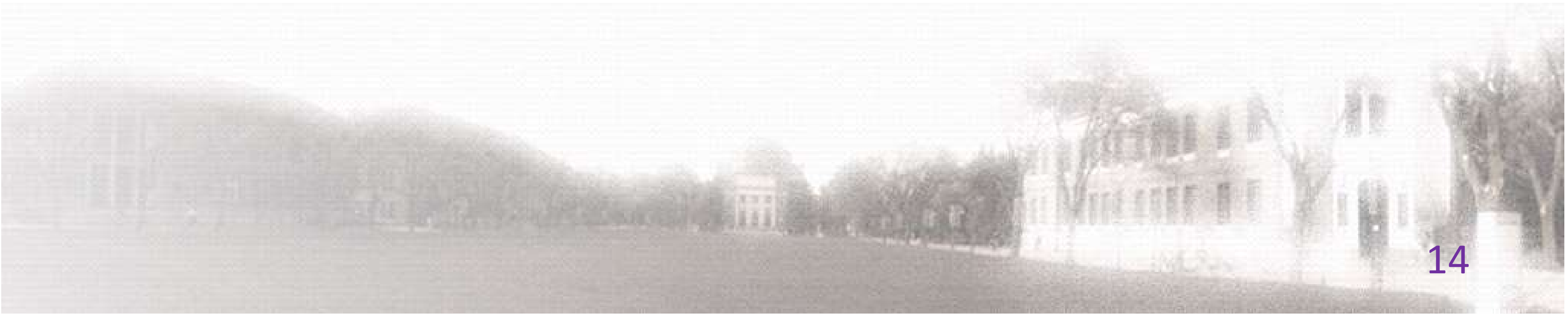
拟序关系举例

- 设$\varnothing \neq A \subseteq R$ (实数集), $\langle A, < \rangle$, $\langle A, > \rangle$

- $\varnothing \neq B \subseteq Z_+$ (正整数集), $\langle B, |' \rangle$,

  $$|' = \{ \langle x,y \rangle \mid x,y \in B \wedge x | y \wedge x \neq y \}$$

- $\langle \mathcal{A}, \subset \rangle$



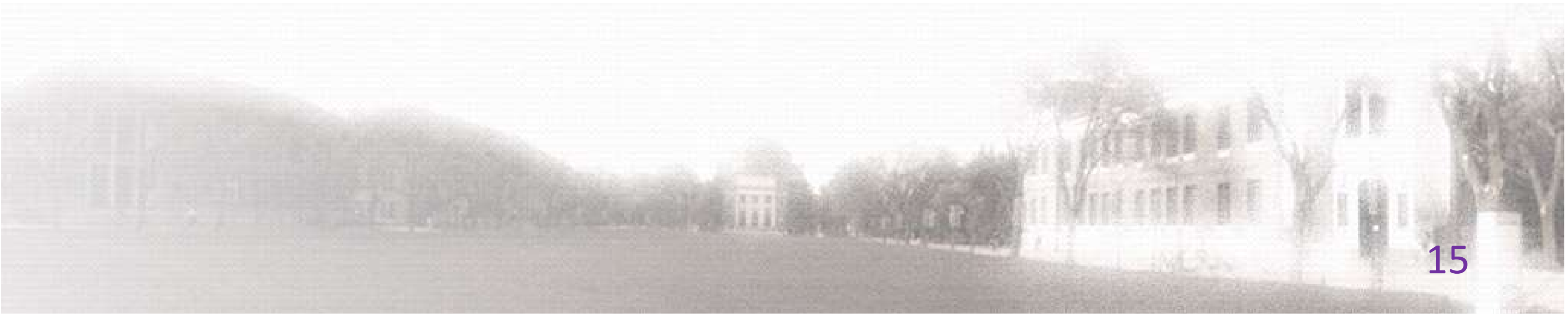
定理

定理 设 $\preccurlyeq$ 是非空集合 **A** 上偏序关系， $\prec$ 是 **A** 上拟序关系，则

(1) $\prec$ 是反对称的；

(2) $\preccurlyeq - I_A$ 是A上拟序关系；

(3) $\prec \cup I_A$ 是A上偏序关系。 #



定理

定理 设$\prec$是非空集合**A**上拟序关系**,** 则

(1) $x \prec y,\ x=y,\ y \prec x$中**至多**有一式成立

(2) $(x \prec y \vee x=y) \wedge (y \prec x \vee x=y) \Rightarrow x=y$

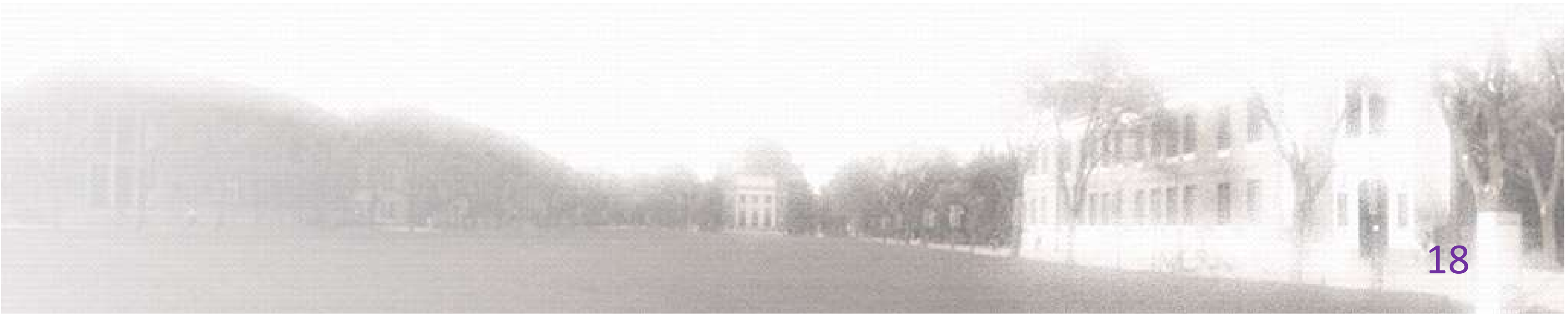
证明 **(1) (**反证**)** 两式以上成立导致 $x \prec x$**,** 矛盾**!**

(2) (反证**)** 由左端已知条件**,**

$x \neq y \Rightarrow (x \prec y) \wedge (y \prec x)$**,** 与**(1)**矛盾**!** **#**

偏序关系中的特殊元素

- 最大元, 最小元
- 极大元, 极小元
- 上界, 下界
- 最小上界(上确界), 最大下界(下确界)



最大元, 最小元

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$

- y是B的最大元(maximum/greatest element) $\Leftrightarrow$

  $$\forall x(\ x\in B \rightarrow x\preccurlyeq y\ )$$

- y是B的最小元(minimum/least element) $\Leftrightarrow$

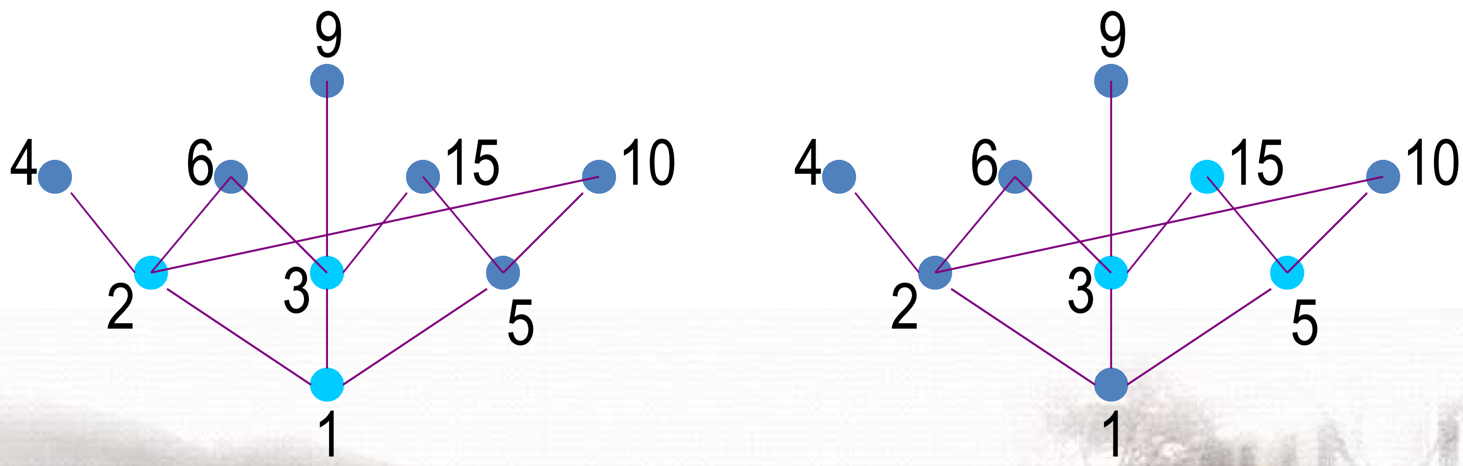
  $$\forall x(\ x\in B \rightarrow y\preccurlyeq x\ )$$

最大元, 最小元举例

- B_1={1,2,3}, B_2={3,5,15}, B_3=A

  最大元: B_1 无， B_2 15, B_3 无

  最小元: B_1 1, B_2 无, B_3 1



极大元, 极小元

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B\subseteq A$, $y\in B$

- y是B的极大元(maximal element) $\Leftrightarrow$

  $$\forall x(\ x\in B \wedge y\preccurlyeq x \rightarrow x=y\ )$$

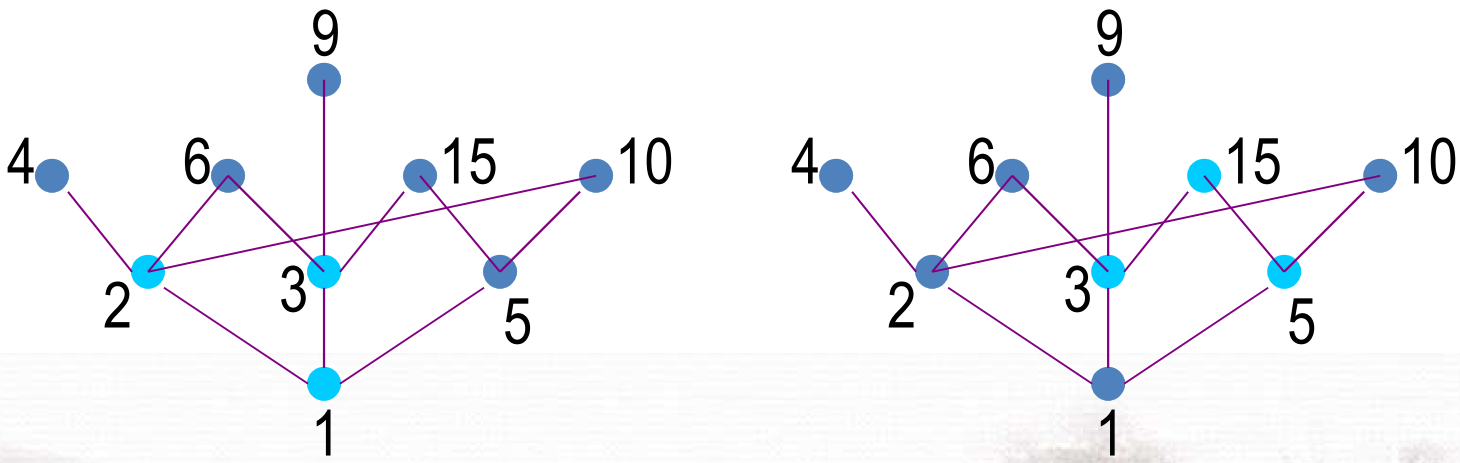
- y是B的极小元(minimal element) $\Leftrightarrow$

  $$\forall x(\ x\in B \wedge x\preccurlyeq y \rightarrow x=y\ )$$

极大元, 极小元举例

- 极大元: B_1 2,3, B_2 15, B_3 4,6,9,15,10,

  极小元: B_1 1, B_2 3,5, B_3 1



最大/最小与极大/极小

- 最小元：子集B中最小的元素，与B中其他元素都可比 $\forall x(x\in B \to y\preccurlyeq x)$
- 极小元：不一定与B中所有其他元素可比，只要没有比它小的，它就是极小元。

$$\forall x(x\in B \wedge x\preccurlyeq y \to x=y)$$

- 有穷集B:
  - 最小元不一定存在，若存在一定唯一
  - 极小元一定存在，可能有多个。若唯一，则为最小元

上界, 下界

- 设$<A,\preccurlyeq>$为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in A$

- y是B的上界(upper bound) $\Leftrightarrow$

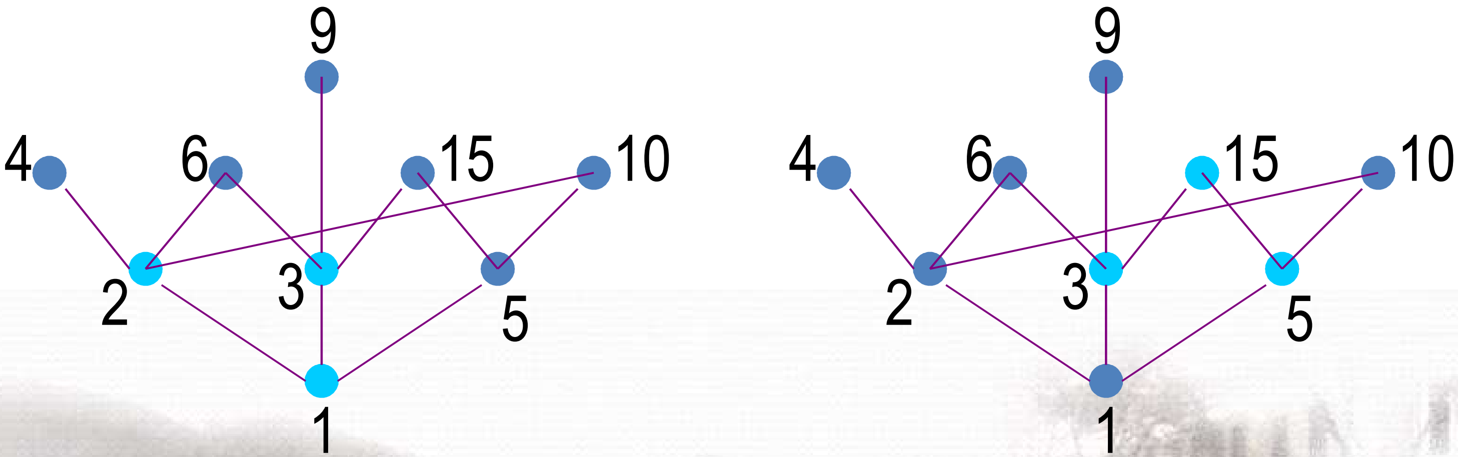
$$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$$

- y是B的下界(lower bound) $\Leftrightarrow$

$$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$$

上界,下界举例

- 上界: B_1 6, B_2 15, B_3 无
- 下界: B_1 1, B_2 1, B_3 1

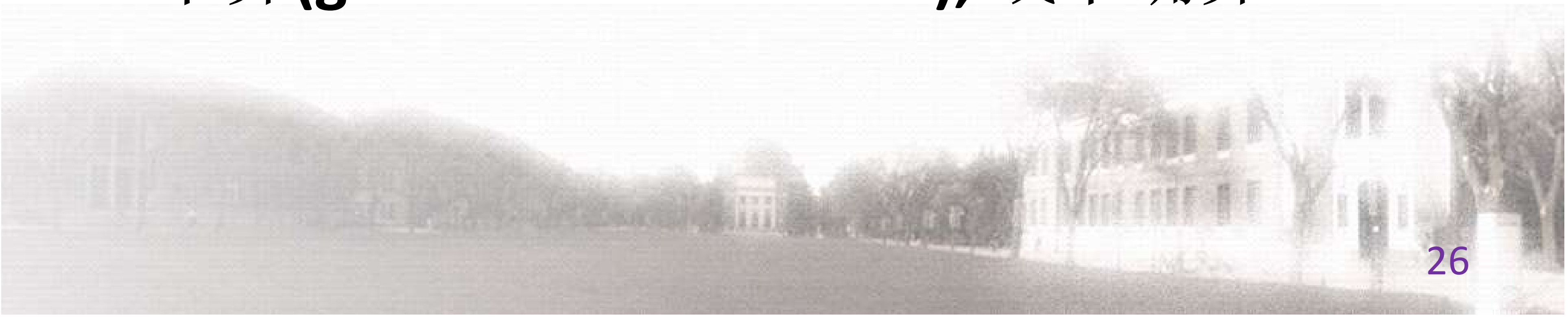


最小上界, 最大下界

- 设**<A,≼>**为偏序集, **B⊆A**

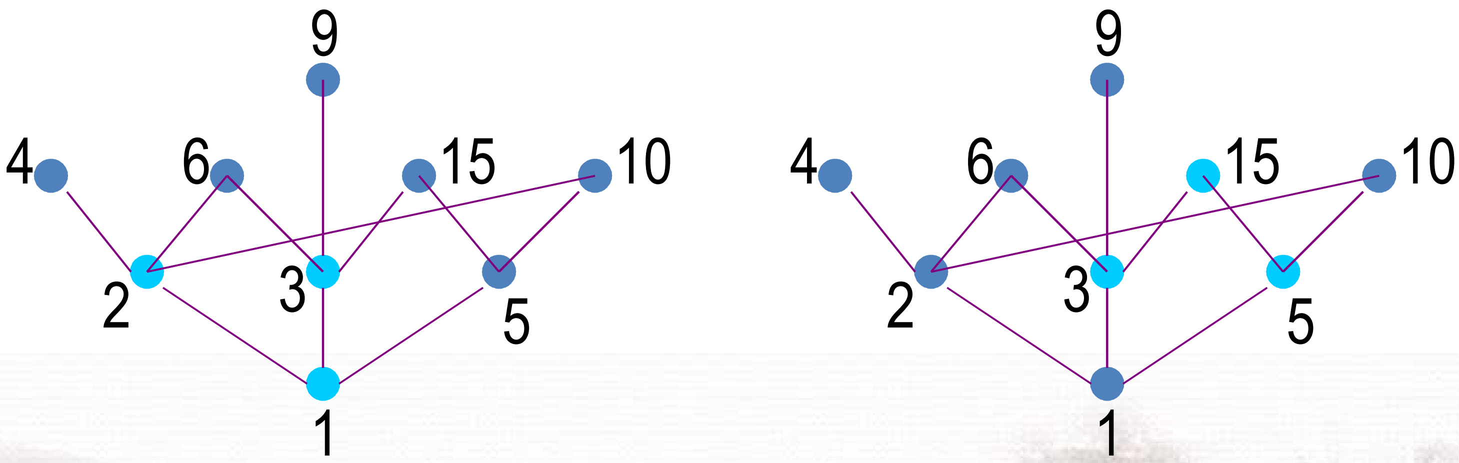
- **C={y|y**是**B**的上界**}, C**的最小元称为**B**的最小上界**(least upper bound),** 或上确界

- **D={y|y**是**B**的下界**}, D**的最大元称为**B**的最大下界**(greatest lower bound),** 或下确界



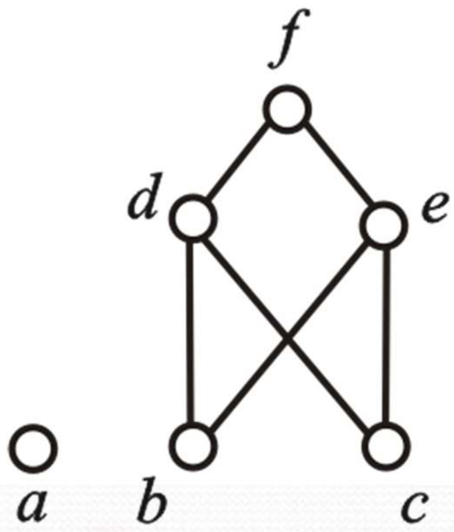
最小上界,最大下界举例

- 最小上界: B_1 6, B_2 15, B_3 无
- 最大下界: B_1 1, B_2 1, B_3 1



例

- 设偏序集$<A,\preccurlyeq>$如下图所示，求A的极小元、最小元、极大元、最大元. 设$B=\{b,c,d\}$, 求B的下界、上界、下确界、上确界.



解：极小元：a, b, c;

极大元：a, f;

没有最小元与最大元.

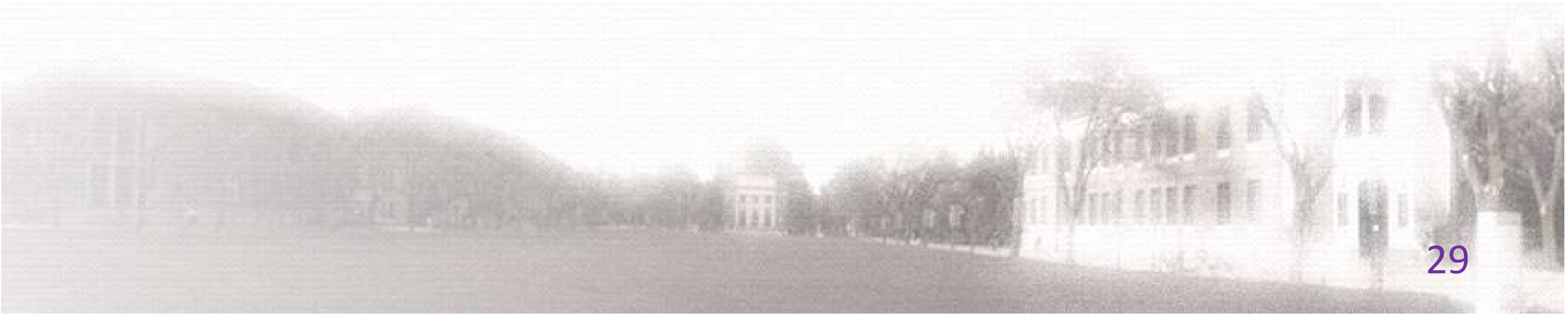
B的下界和最大下界不存在,

上界有d和f, 最小上界为d.

哈斯图中孤立点一定既是极小元也是极大元。

(最小)上界/(最大)下界的性质

- 下界、上界、下确界、上确界不一定存在
- 下界、上界若存在不一定唯一
- 下确界、上确界如果存在，则唯一
- 集合的最小元就是它的下确界，最大元就是它的上确界；反之不对.



小结

- $\preccurlyeq$ 偏序关系(自反、反对称、传递)
  - 哈斯图
  - 特殊元素
  - 线序
- $\prec$拟序(反自反、反对称、传递)