清華大學
Tsinghua University

单元1.8 树

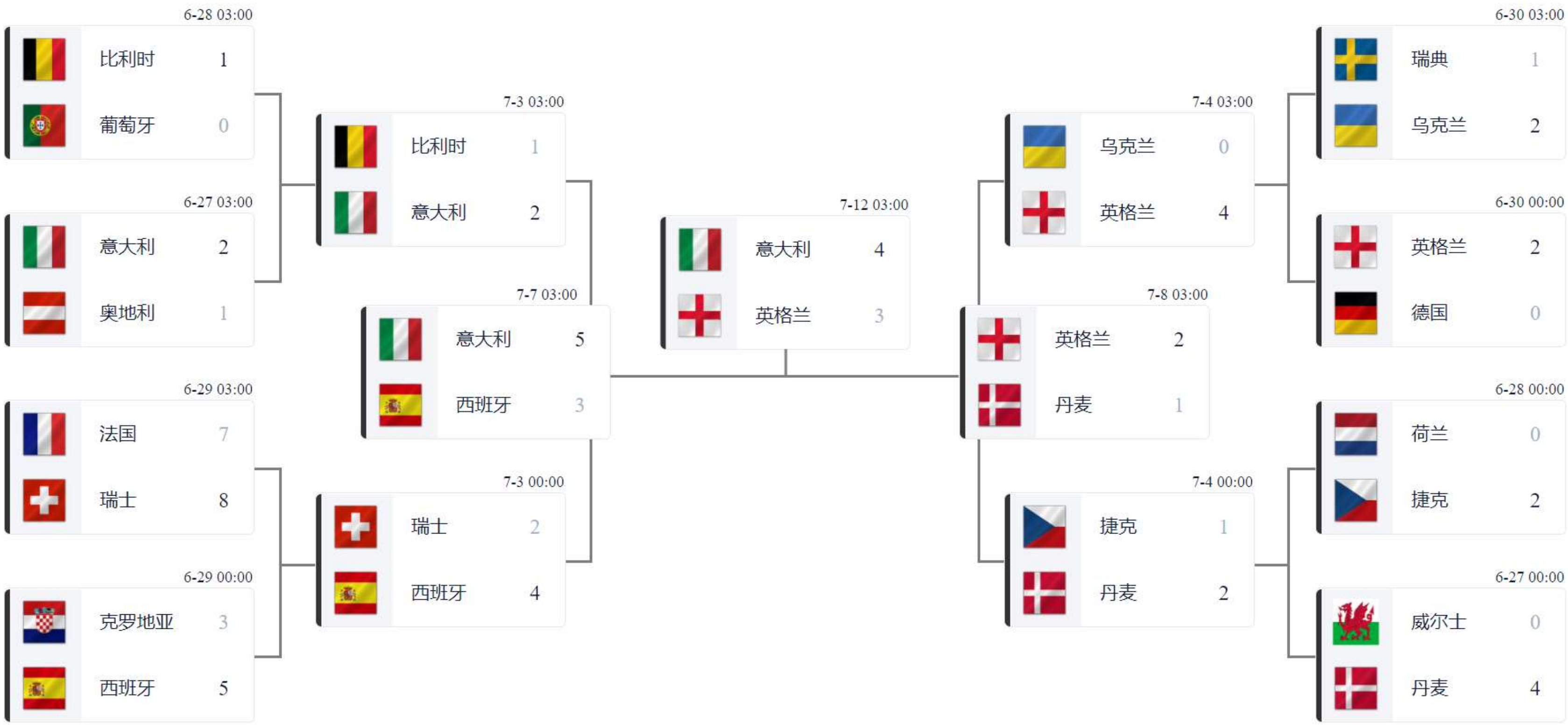
第16章 树

16.1 无向树及性质、16.2 生成树

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

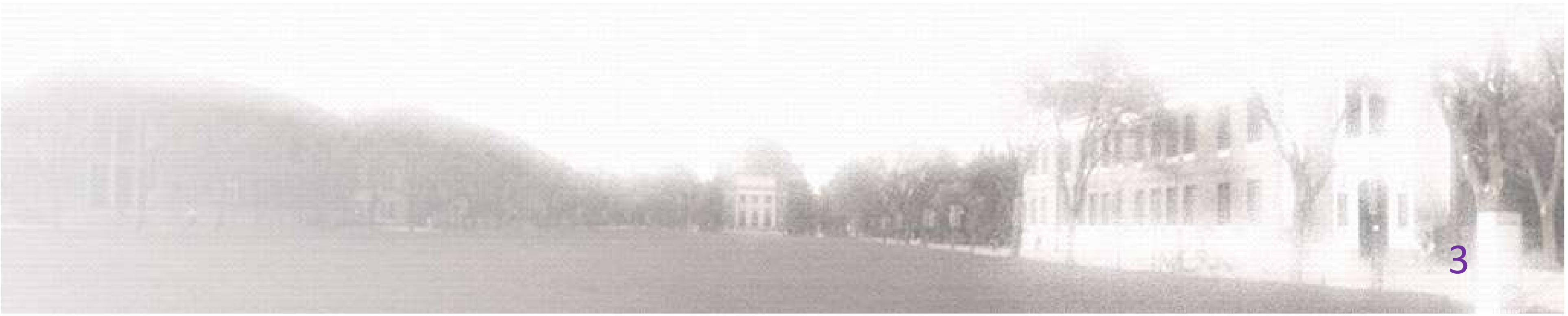
应用举例

- 磁盘目录系统
- **2021**年欧洲杯淘汰赛对阵图



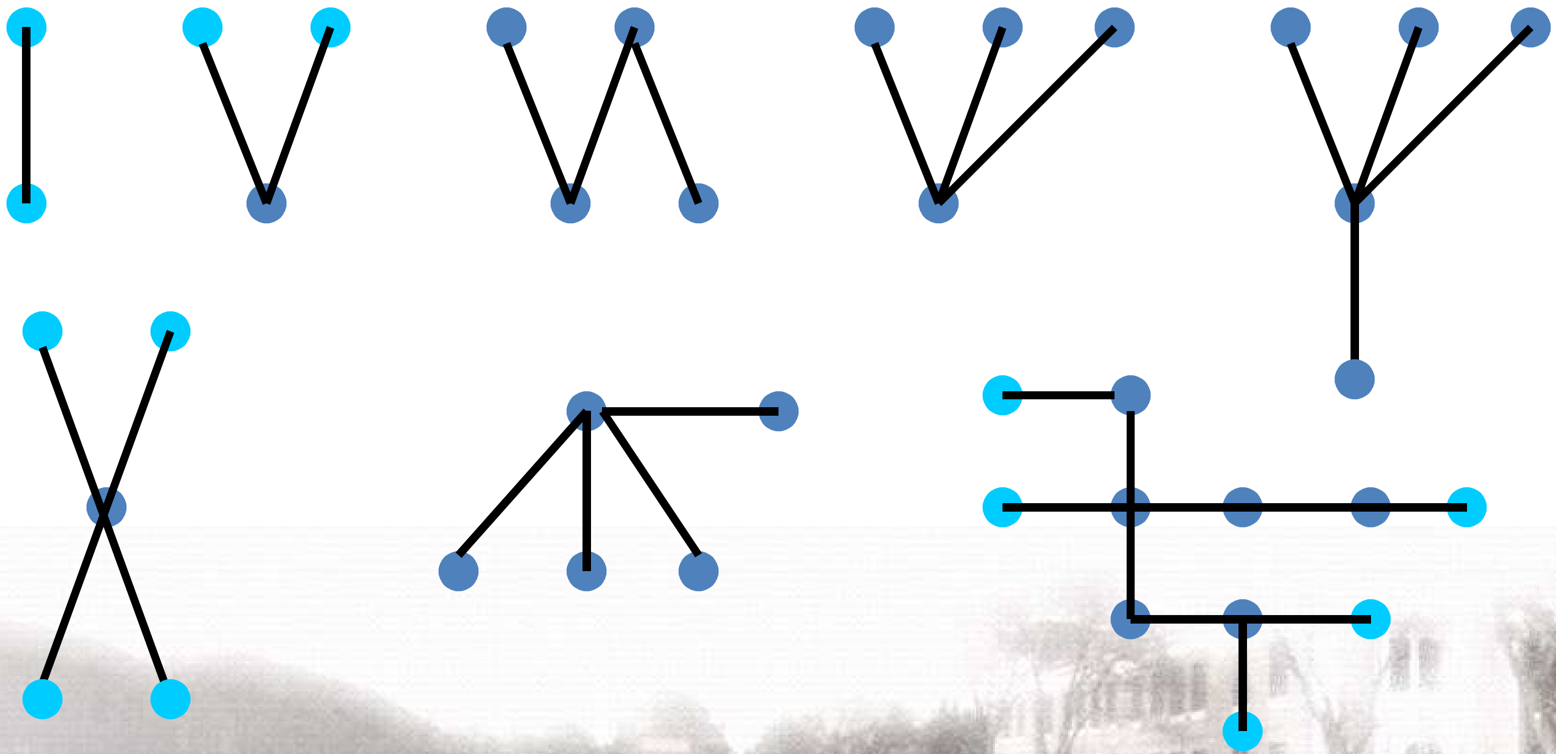
内容提要

- 无向树的定义与性质
- 生成树



无向树

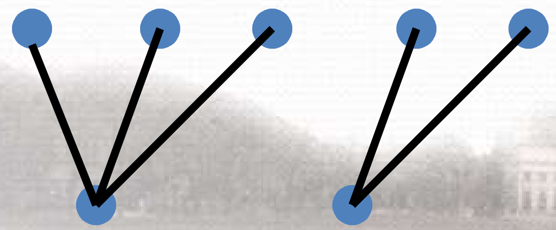
- 树: 连通无回图



无向树

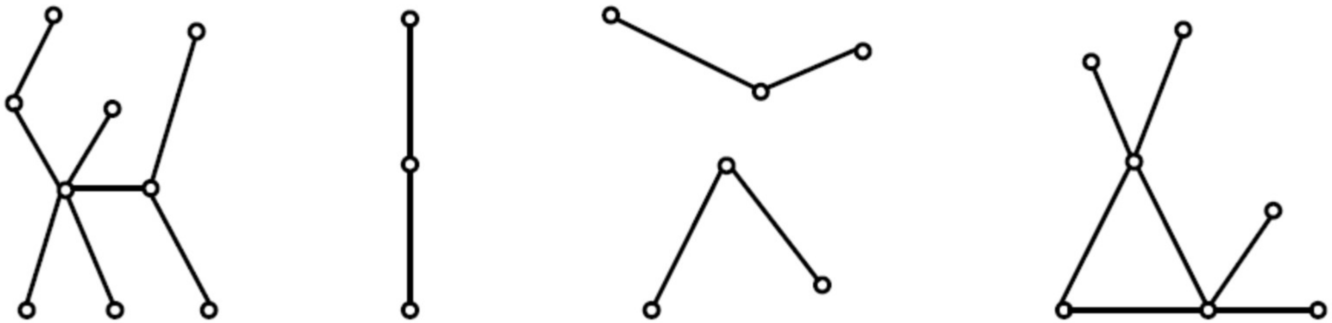
- 树(tree): 连通无回图, 常用T表示树
- 树叶(leaf): 树中1度顶点
- 分支点: 树中2度以上顶点
- 平凡树: 平凡图(无树叶,无分支点)

- 森林(forest): 无回图
- 森林的每个连通分支都是树



无向树

- 判断下图中哪些是树？



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

树的等价定义

- 定理16.1: 设G=<V,E>是n阶m边无向图,则

  (1) G是树(连通无回)

⇔ (2) G中任何2顶点之间有唯一路径

⇔ (3) G无圈 ∧ m=n-1

⇔ (4) G连通 ∧ m=n-1

⇔ (5) G极小连通: 连通 ∧ 所有边是桥

⇔ (6) G极大无回: 无圈 ∧ 增加任何新边产生唯一圈

定理16.1证明(1)⇒(2)

- 证明: (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(5)⇒(6)⇒(1)

(1) G是树(连通无回)

(2) G中任何2顶点之间有唯一路径

(1)⇒(2): $\forall u,v \in V$, G连通, u,v之间的短程线是路径. 如果u,v之间的路径不唯一, 则G中有回路, 矛盾!

定理16.1证明(2)$\Rightarrow$(3)

(2) G中任何**2**顶点之间有唯一路径

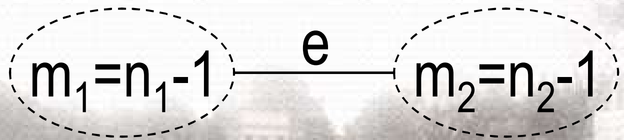
(3) G无圈 $\wedge$ **m=n-1**

- 证明**(**续**): (2)**$\Rightarrow$**(3):** 任**2**点之间有唯一路径$\Rightarrow$无圈 **(**反证**:** 有圈$\Rightarrow$存在**2**点**,**它们之间有**2**条路径**.)**

m=n-1(归纳法**): n=1**时**,m=0.** 设**n**$\leq$**k**时成立**,**

当**n=k+1**时**,** 任选**1**边**e, G-e**有**2**个连通分支**,**

$m=m_1+m_2+1=(n_1-1)+(n_2-1)+1=n_1+n_2-1=n-1.$



定理16.1证明(3)⇒(4)

(3) G无圈 $\wedge$ m=n-1

(4) G连通 $\wedge$ m=n-1

- 证明(续): (3)⇒(4): G连通: 假设G有s个连通分支, 则每个连通分支都是树, 所以

$$m=m_1+m_2+\ldots+m_s=(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_s-1)$$
$$=n_1+n_2+\ldots+n_s-s=n-s=n-1$$, 所以s=1.

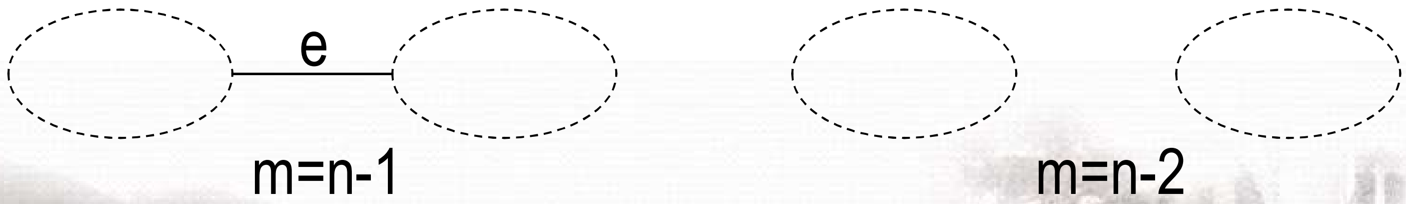
$m_1=n_1-1$ $m_2=n_2-1$ ------------ $m_s=n_s-1$

定理16.1证明(4)⇒(5)

(4) G连通 ∧ **m=n-1**

(5) G极小连通: 连通 ∧ 所有边是桥

- 证明**(**续**): (4)⇒(5):** 所有边是桥**:** ∀**e**∈**E, G-e**是**n**阶**(n-2)**边图**,** 一定不连通**(**连通⇒**m≥n-1),** 所以**e**是割边**.**

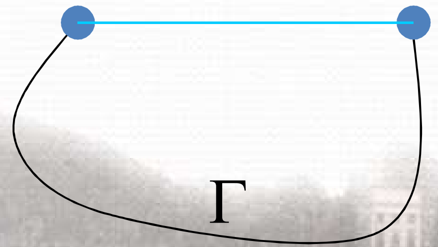


定理16.1证明(5)⇒(6)

(5) **G**极小连通: 连通 $\wedge$ 所有边是桥

(6) **G**极大无回: 无圈 $\wedge$ 增加任何新边得唯一圈

- 证明**(**续**): (5)⇒(6):** 所有边是桥⇒无圈. $\forall$**u,v**$\in$**V, G**连通**, u,v**之间有唯一路径Γ, 则 $\Gamma\cup$**(u,v)**是唯一的圈.

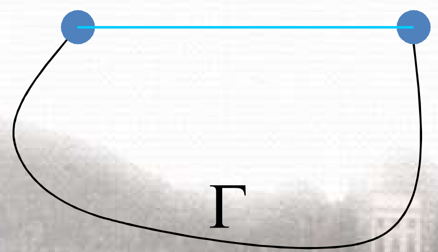


定理16.1证明(6)$\Rightarrow$(1)

(6) G极大无回**:** 无圈 $\wedge$ 增加任何新边得唯一圈

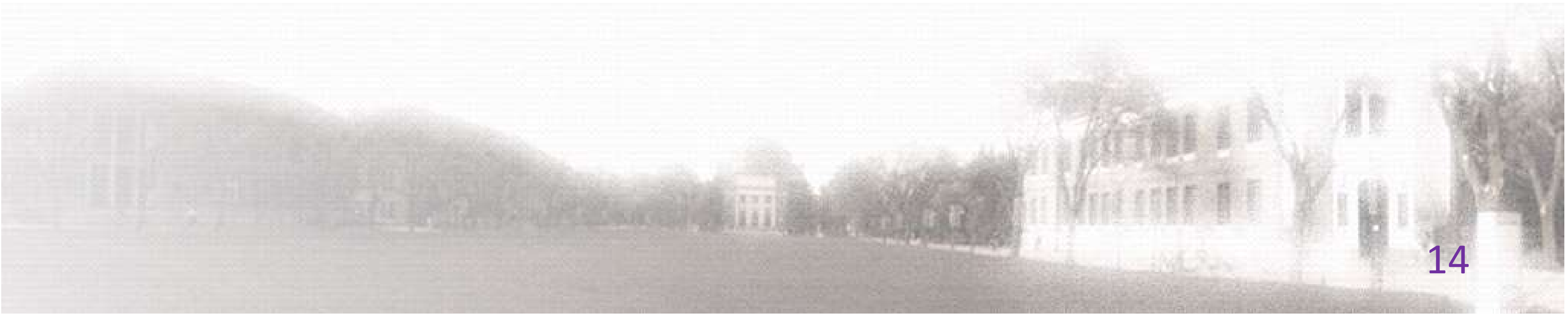
(1) G是树**(**连通无回**)**

- 证明**(**续**): (6)$\Rightarrow$(1): G**连通**:** $\forall$**u,v**$\in$**V, G**$\cup$**(u,v)** 有唯一的圈**C, C-(u,v)**是**u,v**之间的路径**. #**



树的特点

- 在结点给定的无向图中，
  - 树是边数最多的无回路图 （极大无回）
  - 树是边数最少的连通图 （极小连通）
- 由此可知，在无向图G (n阶m条边) 中，
  - 若$m < n-1$，则G 是不连通的
  - 若$m > n-1$，则G 必含回路



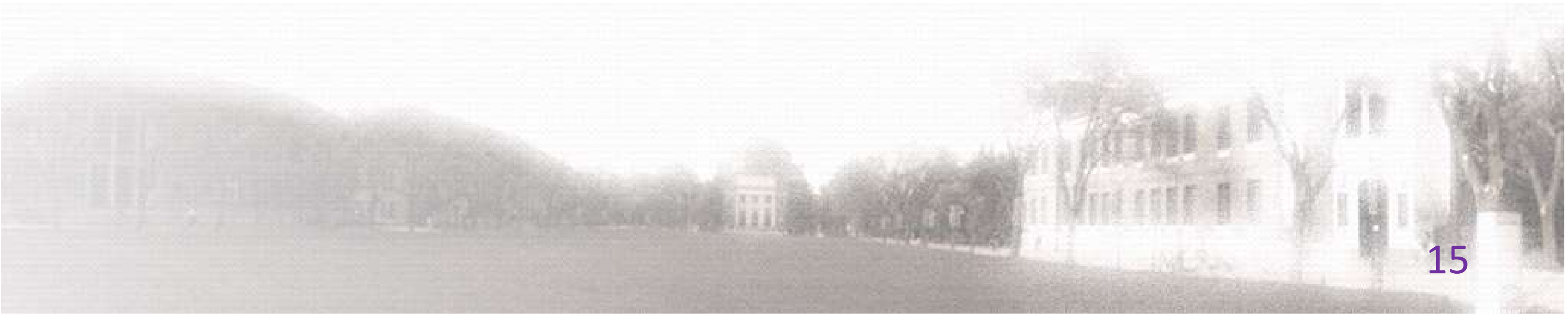
定理16.2

- 非平凡树至少有**2**个树叶
- 证明: 设**T**有**x**个树叶, 由定理**16.1**和握手定理,

$$2m = 2(n-1) = 2n-2 = \Sigma d(v)$$

$$= \Sigma_{v是树叶} d(v) + \Sigma_{v是分支点} d(v)$$

$$\geq x + 2(n-x) = 2n-x,\ 所以\ x \geq 2.\ \#$$



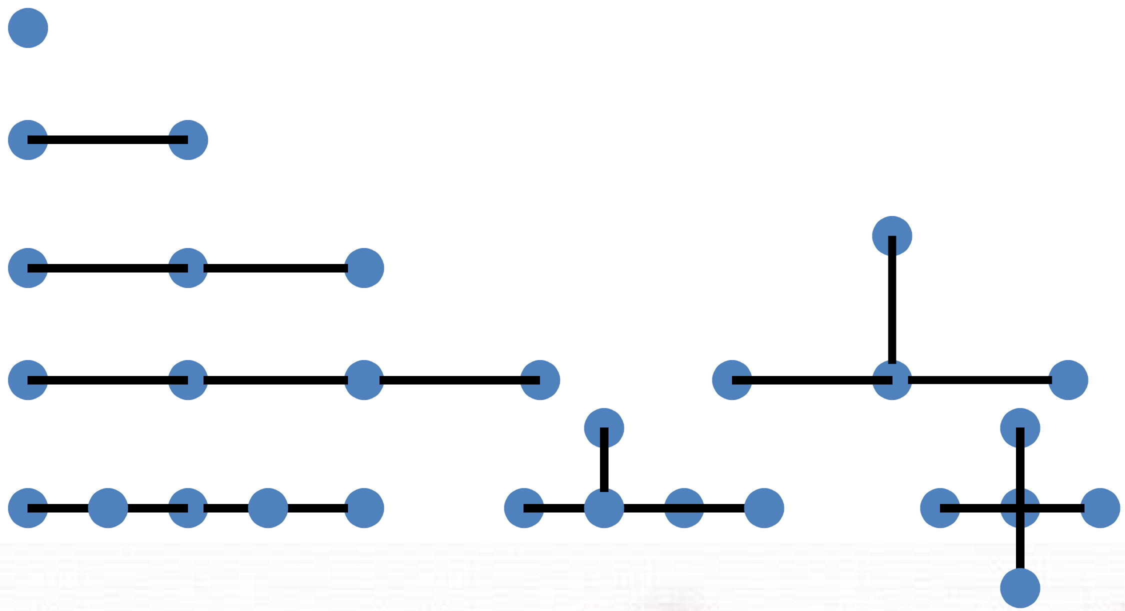
无向树的计数t_n

t_n: n(≥1)阶非同构无向树的个数

n	t_n	n	t_n	n	t_n	n	t_n
1	1	9	47	17	48,629	25	104,636,890
2	1	10	106	18	123,867	26	279,793,450
3	1	11	235	19	317,955	27	751,065,460
4	2	12	551	20	823,065	28	2,023,443,032
5	3	13	1,301	21	2,144,505	29	5,469,566,585
6	6	14	3,159	22	5,623,756	30	14,830,871,802
7	11	15	7,741	23	14,828,074	31	40,330,829,030
8	23	16	19,320	24	39,299,897	32	109,972,410,221

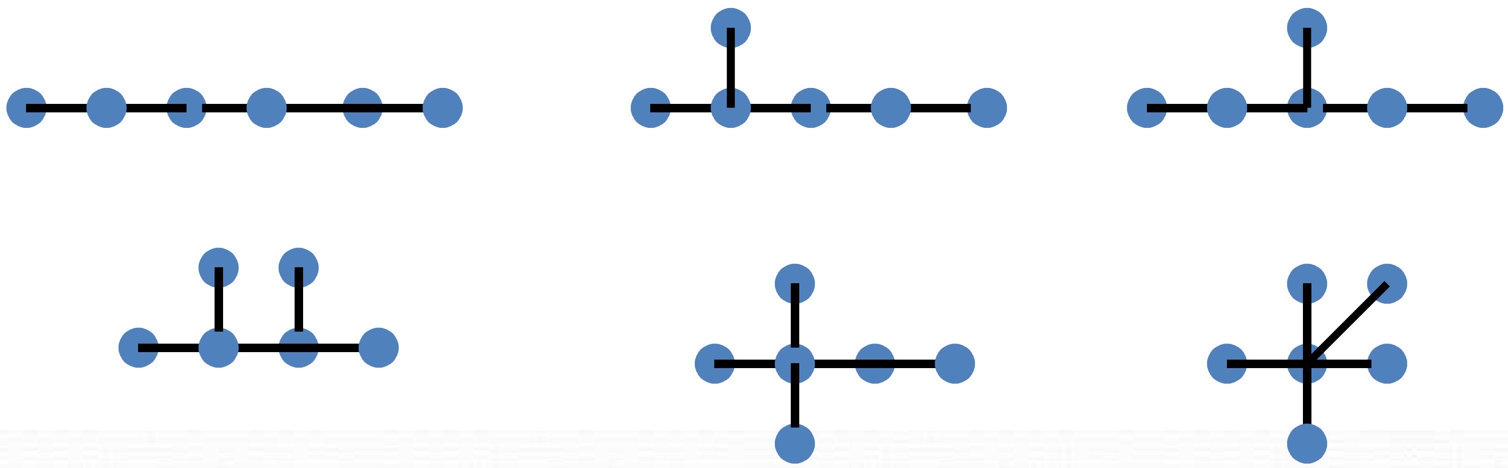
无向树的枚举

- 画出所有非同构的**n**阶无向树
- **n=1:**
- **n=2:**
- **n=3:**
- **n=4:**
- **n=5:**



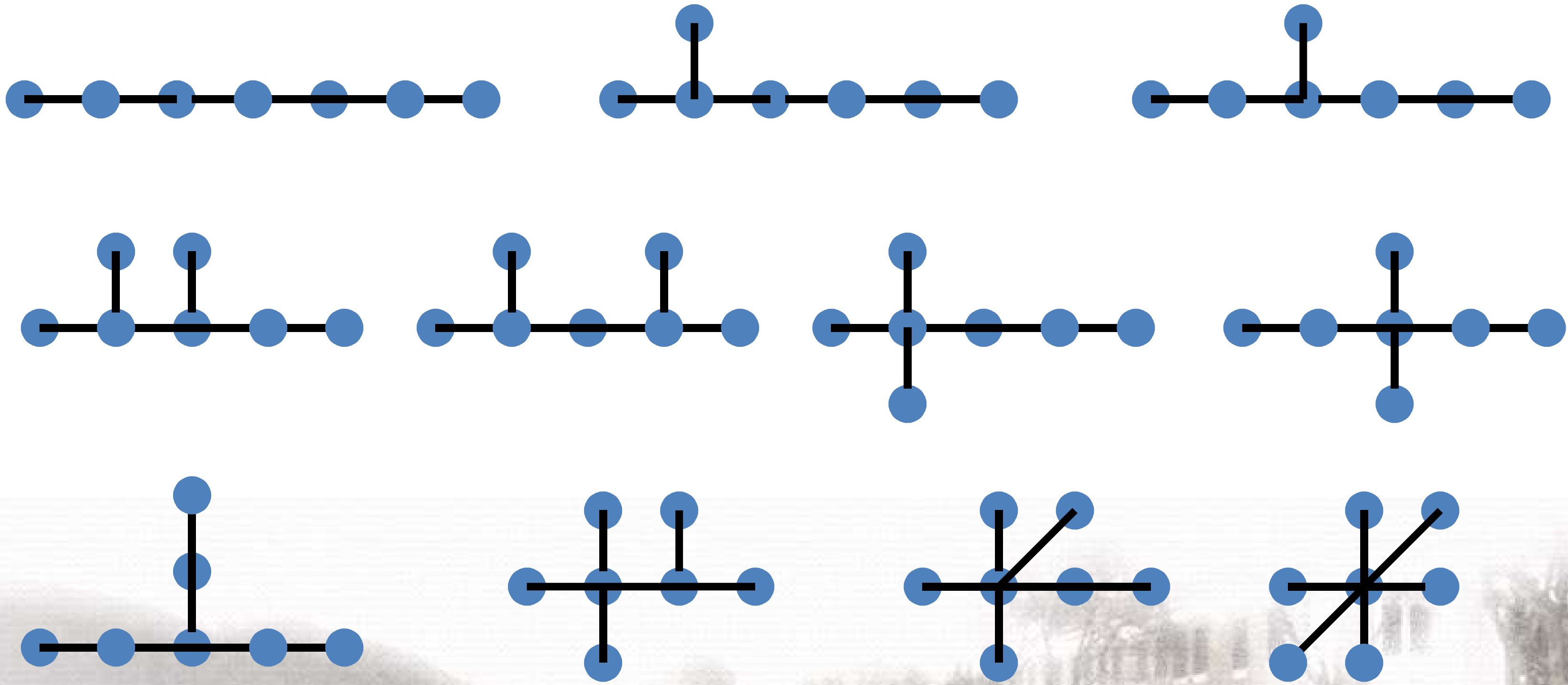
6阶非同构无向树

- **n=6: t_6=6**



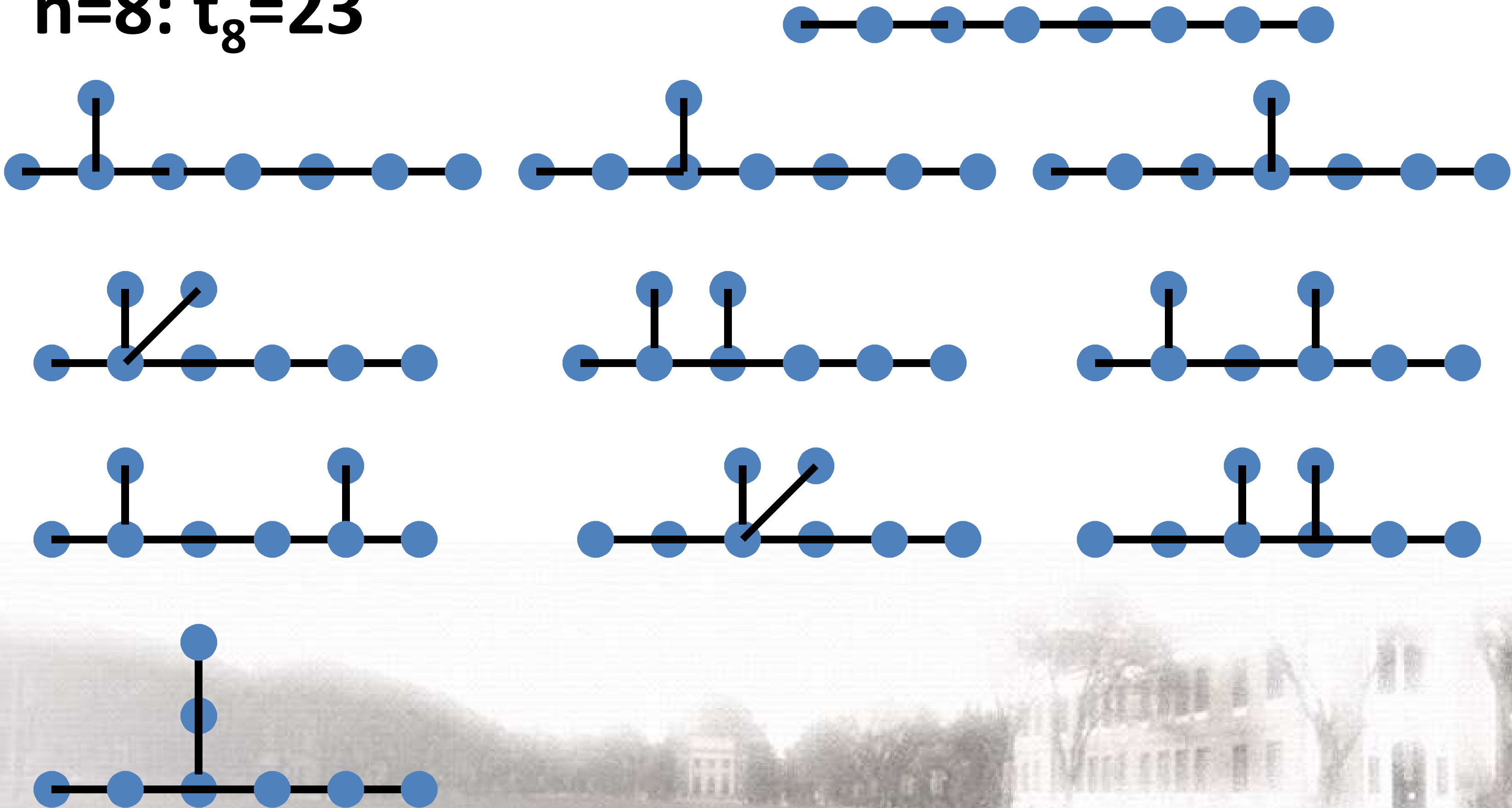
7阶非同构无向树

- **n=7: t_7=11**



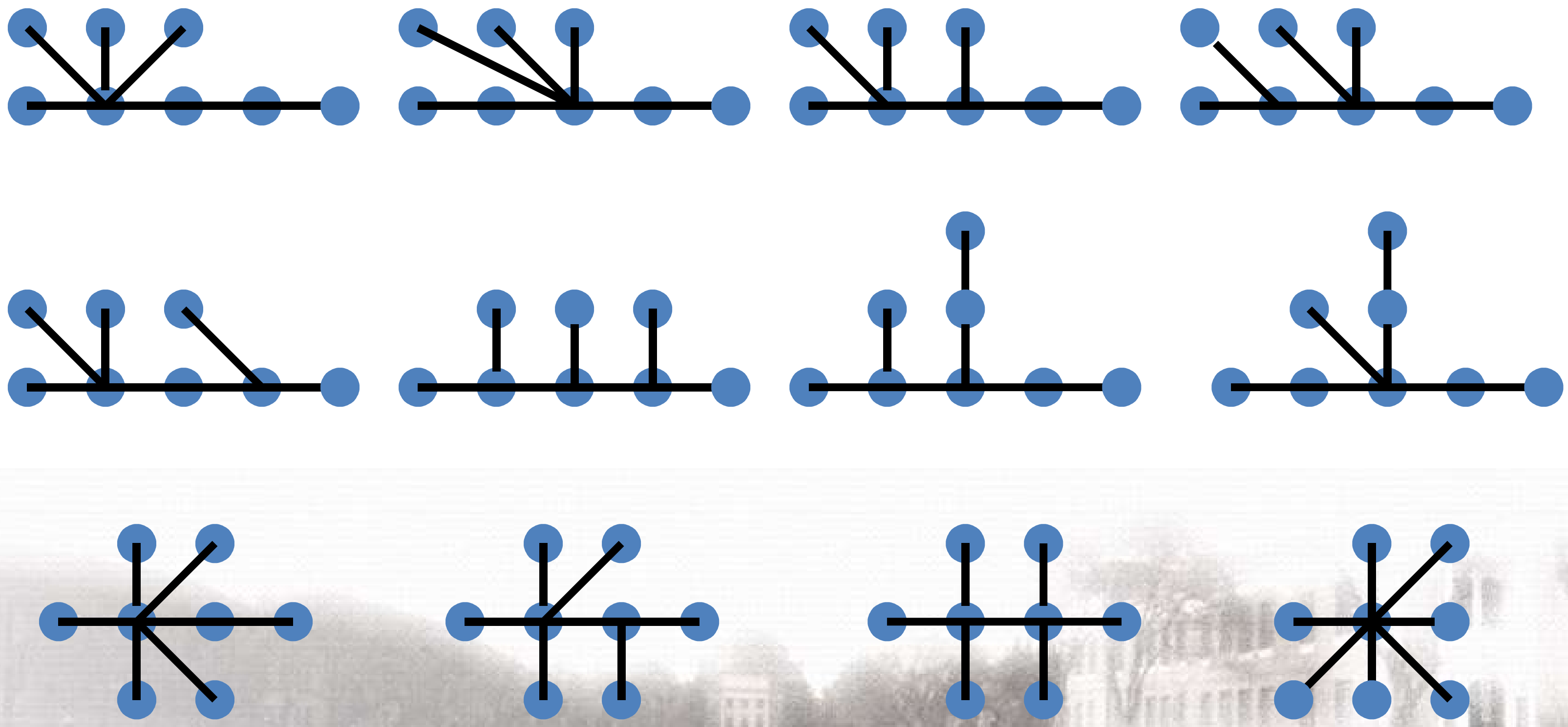
8阶非同构无向树

- **n=8: t_8=23**



8阶非同构无向树(续)

- **n=8: t_8=23**



8阶非同构无向树(解法2)

- **n=8:** 度数列有**11**种**:**

(1)^{1} 1 1 1 1 1 1 1 7

(2)^{1} 1 1 1 1 1 1 2 6

(3)^{1} 1 1 1 1 1 1 3 5

(4)^{1} 1 1 1 1 1 1 4 4

(5)^{2} 1 1 1 1 1 2 2 5

(6)^{3} 1 1 1 1 1 2 3 4

(7)^{1} 1 1 1 1 1 3 3 3

(8)^{5} 1 1 1 1 2 2 3 3

(9)^{3} 1 1 1 1 2 2 2 4

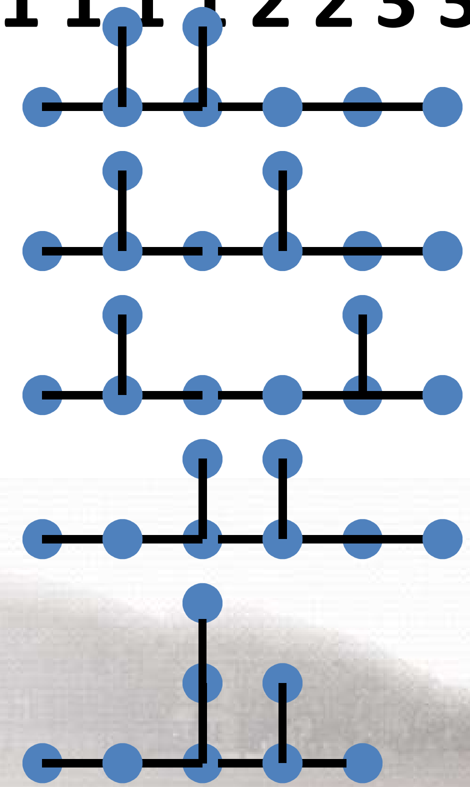
(10)^{4} 1 1 1 2 2 2 2 3

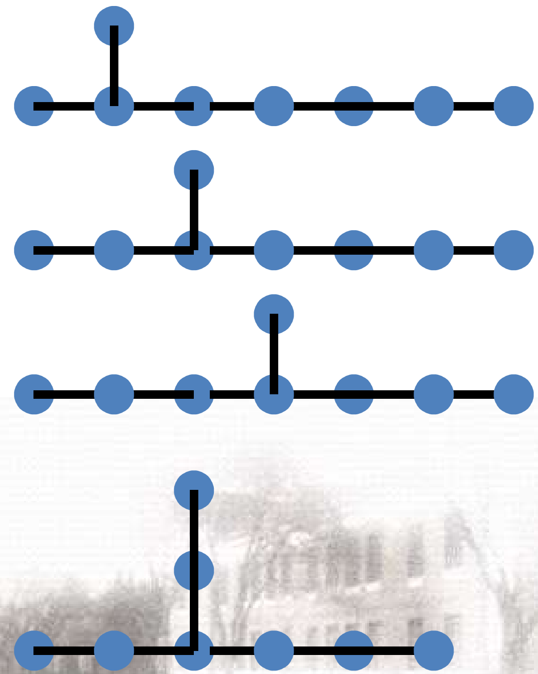
(11)^{1} 1 1 2 2 2 2 2 2

8阶非同构无向树(解法2)

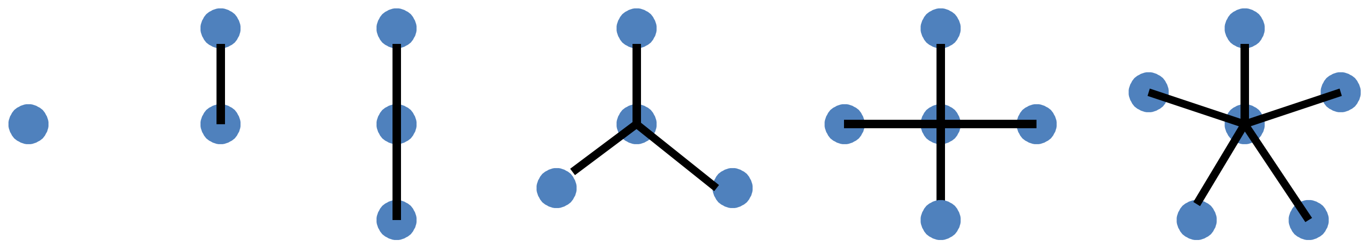
- **n=8:** 度数列有**11**种**:**

(8)[5] **1 1 1 1 2 2 3 3** **(10)**[4] **1 1 1 2 2 2 2 3**





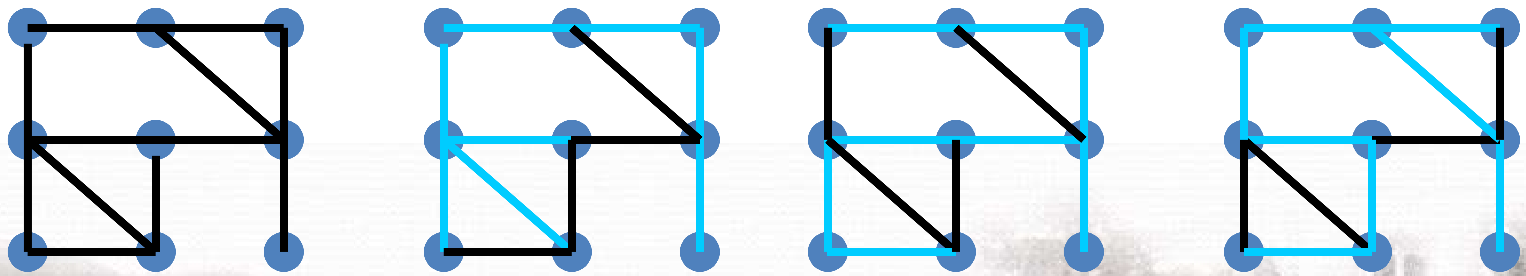
星: $S_n = K_{1,n-1}$



S_1 S_2 S_3 S_4 S_5 S_6

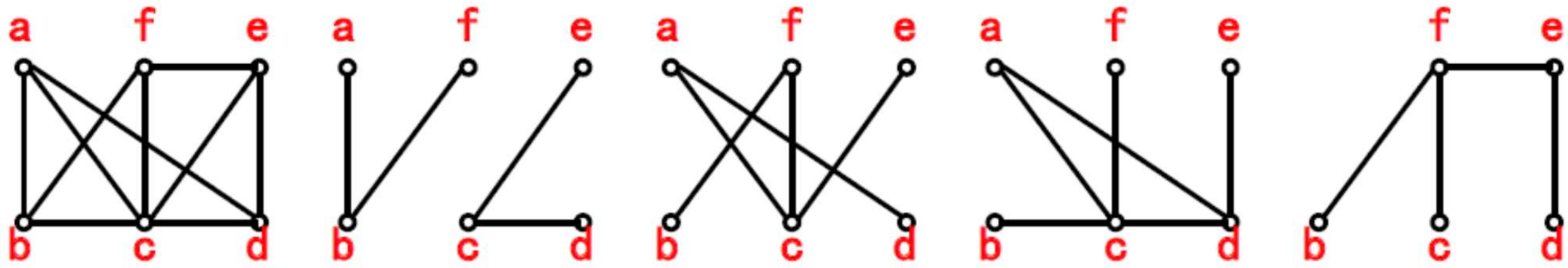
生成树

- 生成树: $T \subseteq G \wedge V(T)=V(G) \wedge T$是树
- 树枝(tree edge): $e \in E(T)$, n-1条
- 弦(chord): $e \in E(G)-E(T)$, m-n+1条
- 余树: $G[E(G)-E(T)] = \overline{T}$



生成树

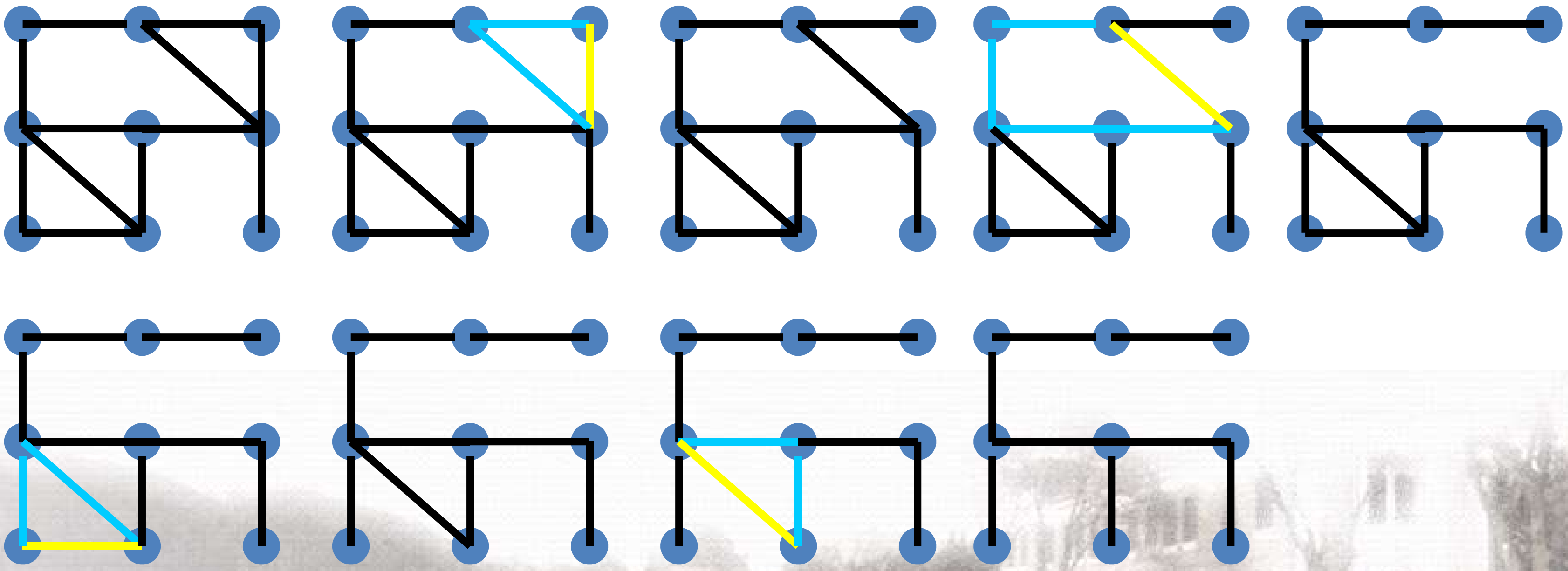
- 判断下图是否为(a)的生成树



(a) (b) (c) (d) (e)

定理16.3

- 无向图G连通 ⇔ G有生成树
- 证明: (⇐) 显然. (⇒) 破圈法. #



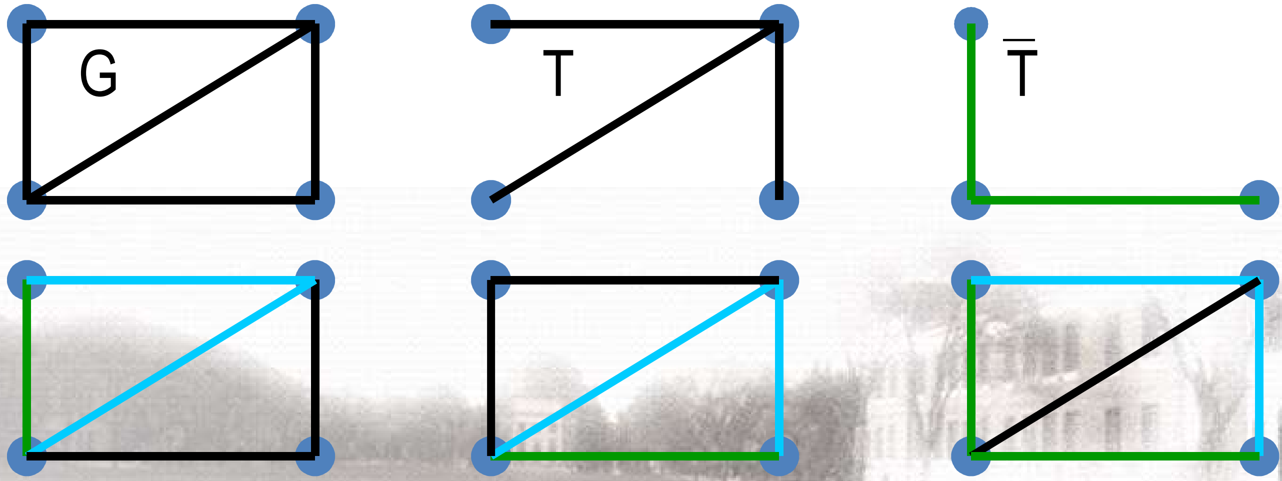
三个推论和一个定理

- 推论1: G是n阶m边无向连通图⇒m≥n-1. #
- 推论2: T是n阶m边无向连通图G的生成树 ⇒ $|E(\overline{T})|=m-n+1$. #
- 推论3: T是无向连通图G的生成树, C是G中的圈 ⇒ $|E(\overline{T})|\cap|E(C)|\neq\varnothing$. （弦，圈）
- 定理: 设T是连通图G的生成树, S是G中的割集, 则$E(T)\cap S\neq\varnothing$. （树枝，割集）

连通	弦	回路
⇕	⇕	⇕
无回	树枝	割集

推论3

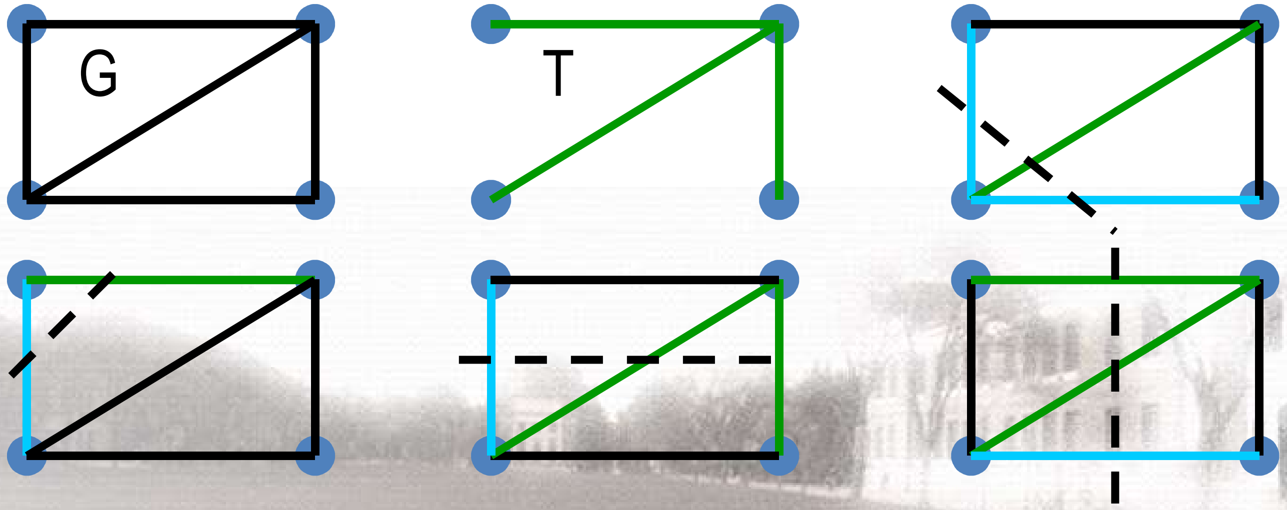
- 设T是连通图G的生成树, C是G中的圈, 则 $E(\overline{T})\cap E(C)\neq\varnothing$.
- 证明: (反证) 若$E(\overline{T})\cap E(C)=\varnothing$, 则 $E(C)\subseteq E(T)$, T中有回路C, T是树, 矛盾! #



定理

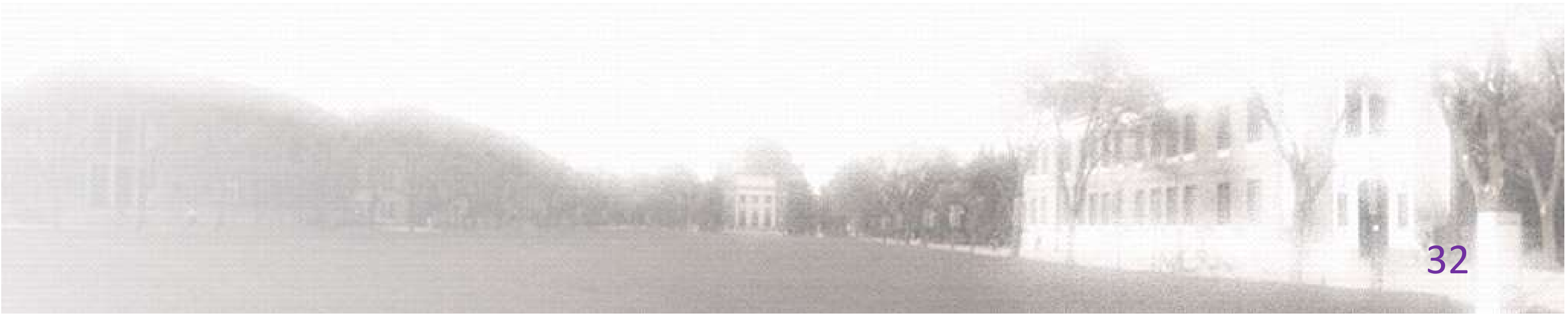
- 设T是连通图G的生成树, S是G中的割集, 则 $E(T)\cap S\neq\varnothing$.
- 证明: (反证) 若$E(T)\cap S=\varnothing$, 则

$T\subseteq G-S$,则G-S连通, S是割集, 矛盾! #



定理16.4

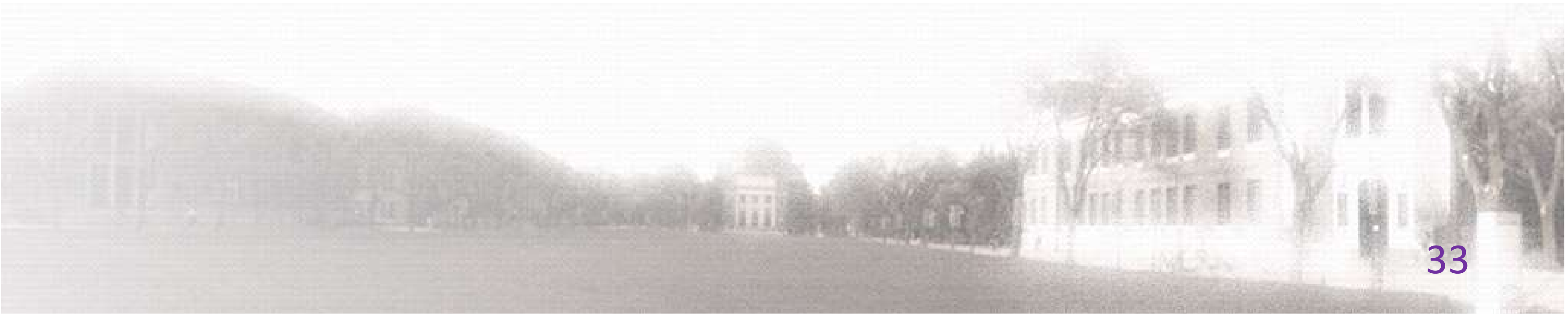
- 设**G**是连通图**, T**是**G**的生成树**, e**是**T**的弦**,** 则**T**∪**e**中存在由弦**e**和其他树枝组成的圈**,** 并且不同的弦对应不同的圈**.**



定理16.4证明

- 证明: 设$e=(u,v)$, 设$P(u,v)$是u与v之间在T中的唯一路径, 则$P(u,v)\cup e$是由弦e和其他树枝组成的圈.

  设e_1,e_2是不同的弦,对应的圈是C_{e1},C_{e2}, 则$e_1\in E(C_{e1})-E(C_{e2})$, $e_2\in E(C_{e2})-E(C_{e1})$, 所以$C_{e1}\neq C_{e2}$. #

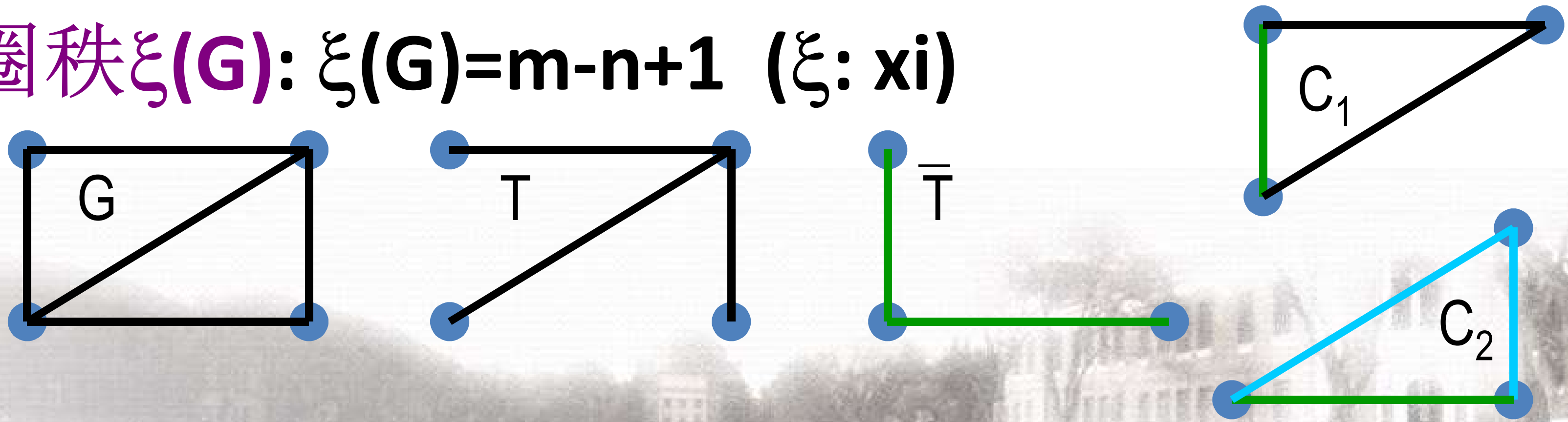


定理(破圈法)

- 设G是无向连通图, $G' \subseteq G$, G'无圈, 则G中存在生成树T, $G' \subseteq T \subseteq G$.
- 证明: 不妨设G有圈C_1(否则G是树, T=G). 则$\exists e_1 \in E(C_1) - E(G')$, 令$G_1 = G - \{e_1\}$.
  若G_1还有圈C_2, 则$\exists e_2 \in E(C_2) - E(G')$,
  令$G_2 = G_1 - \{e_2\} = G - \{e_1, e_2\}$. 重复进行,
  直到$G_k = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$无圈为止, $T = G_k$. #

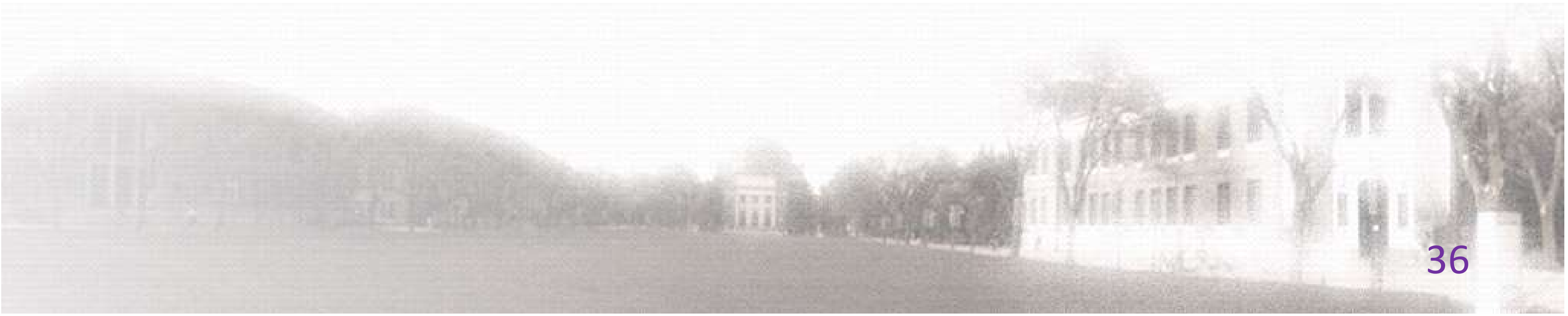
基本回路

- 设G是n阶m边无向连通图, T是G的生成树, $\overline{T}=\{e'_1,e'_2,\ldots,e'_{m-n+1}\}$
- 基本回路: $T\cup e'_r$中的唯一回路C_r
- 基本回路系统: $\{C_1,C_2,\ldots,C_{m-n+1}\}$
- 圈秩ξ(G): $\xi(G)=m-n+1$ (ξ: xi)



定理16.5

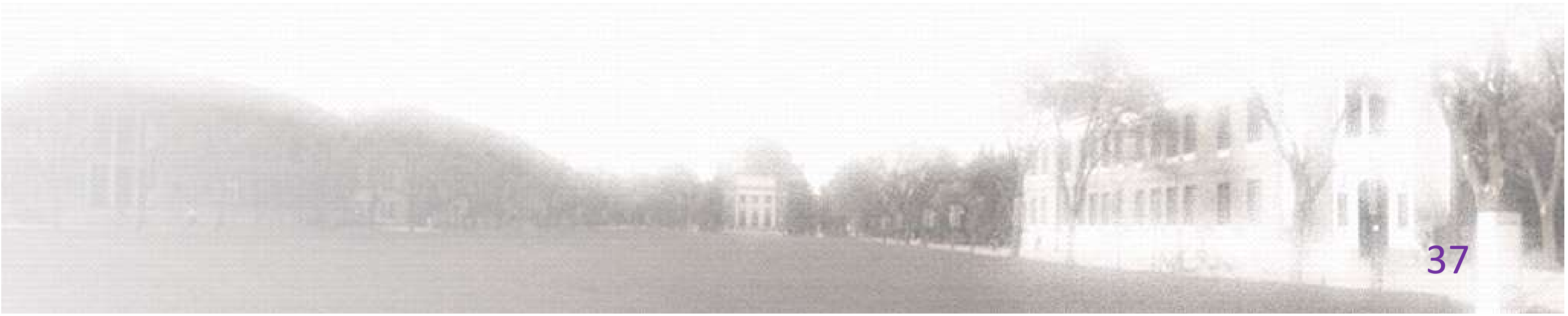
- 设G是连通图, T是G的生成树, e是T的树枝, 则G中存在由树枝e和其他弦组成的割集, 并且不同的树枝对应不同的割集.



定理16.5证明

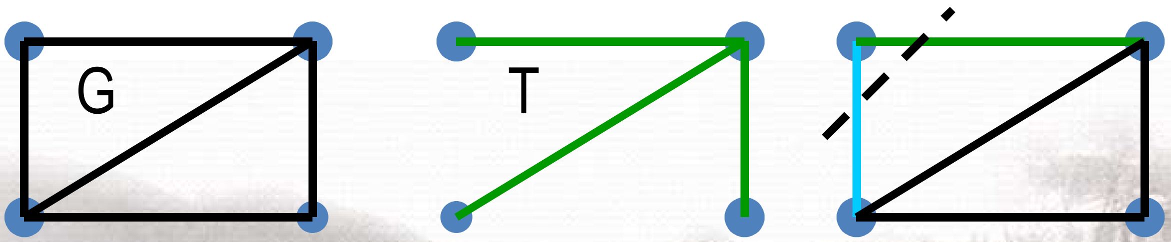
- 证明: e是T的桥, 设T-e的两个连通分支是T_1与T_2, 则$E(G)\cap(V(T_1)\&V(T_2))$是由树枝e和其他弦组成的割集.

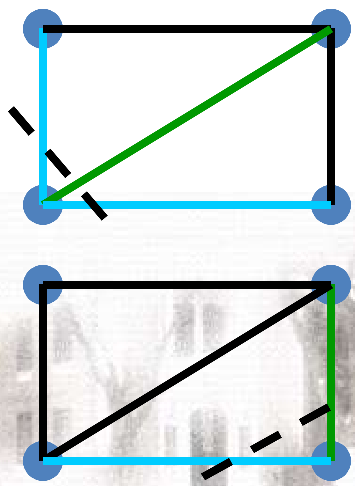
  设e_1,e_2是不同的树枝,对应的割集是S_{e1},S_{e2}, 则$e_1\in S_{e1}-S_{e2}$, $e_2\in S_{e2}-S_{e1}$, 所以$S_{e1} \neq S_{e2}$. #



基本割集

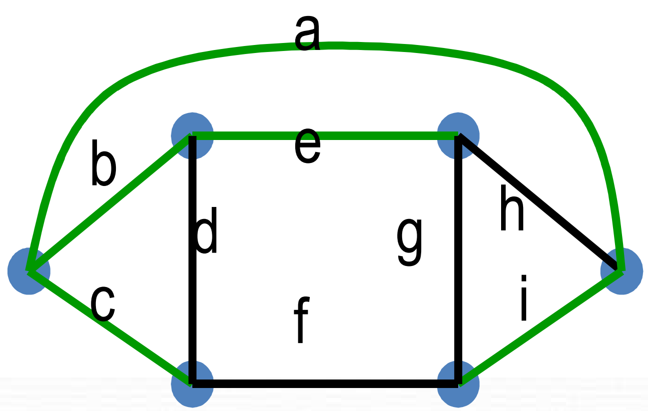
- 设**G**是**n**阶**m**边无向连通图**, T**是**G**的生成树**,** $T=\{e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}\}$
- 基本割集**:** e_r对应的唯一割集S_r
- 基本割集系统**:** $\{S_1,S_2,\ldots,S_{n-1}\}$
- 割集秩η**(G):** $\eta(G)=n-1$ **(**η**: eta)**





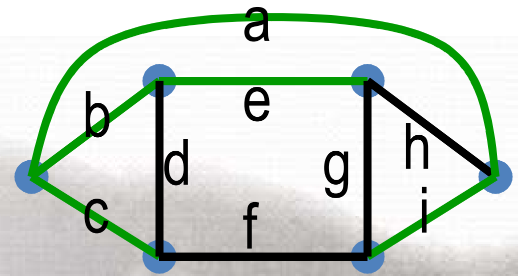
例

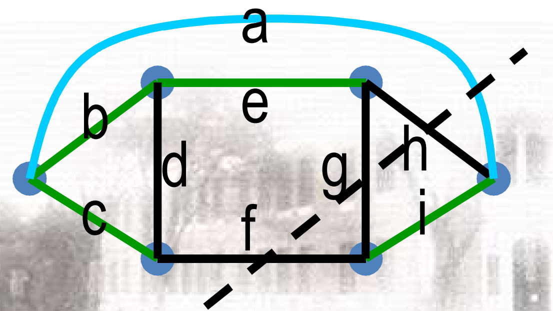
- **G**如图,**T={a,b,c,e,i}**是**G**的生成树,**求对应T**的基本回路系统和基本割集系统.



解

- 解: $\overline{T}=\{d,f,g,h\}$, 基本回路: $C_d=dcb$, $C_f=fcai$, $C_g=gebai$, $C_h=heba$, 基本回路系统: $\{C_d,C_f,C_g,C_h\}$. 基本割集: $S_a=\{a,h,g,f\}$, $S_b=\{b,d,g,h\}$, $S_c=\{c,d,f\}$, $S_e=\{e,g,h\}$, $S_i=\{i,g,f\}$, 基本割集系统: $\{S_a,S_b,S_c,S_e,S_i\}$. #





设e为无向连通图G中一边：

1) 若e在G的任何生成树中，e应满足什么性质？

2) 若e不在G的任何生成树中，e应满足什么性质？

Answer

小结

- 无向树
  - 等价定义与性质
  - 非同构无向树的枚举(利用度数列)
- 生成树
  - 基本割集系统, 基本回路系统