单元3.2 集合的运算

第六章 集合代数

6.2 集合的运算

6.3 有穷集的计数

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

- 集合的运算
- 文氏图
- 容斥原理

并集

定义 设**A,B**为二集合，称由**A**和**B**的所有元素组成的集合为**A**与**B**的并集，记作**A∪B**，称∪为并元算符，**A∪B**的描述法表示为**A∪B = { x | x∈A ∨ x∈B }**。集合的并运算可以推广到有限个或可数个集合(**初级并**)。

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为**n**个集合， $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$为可数个集合，则 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid \exists i (1 \le i \le n \wedge x \in A_i)\}$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \qquad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$$

并集的例子

(1) 设A={x∈N|5≤x≤10}， B={x∈N|x≤10∧为素数}，则

A∪B={2,3,5,6,7,8,9,10}。

(2) 设A_n={x∈R|n-1≤x≤n}，n=1,2,…,10，则

$$\bigcup_{n=1}^{10} A_n = \{x \in R \mid 0 \le x \le 10\} = [0,10]$$

(3) 设A_n={x∈R|0≤x≤1/n}，n=1,2,…，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in R \mid 0 \le x \le 1\} = [0,1]$$

交集

定义 设**A,B**为二集合，称由**A**和**B**的公共元素组成的集合为**A**与**B**的交集，记作**A∩B**，称∩为并元算符，**A∩B**的描述法表示为**A∩B = { x | x∈A ∧ x∈B }**。集合的交运算可以推广到有限个或可数个集合(**初级交**)。

设$A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$为可数个集合，则

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid \forall i(1 \le i \le n \to x \in A_i)\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

交集的例子

(1) 设A = { x∈N | x为奇数 ∧ 0≤x≤20 }，

B = { x∈N | x为素数 ∧ 0≤x≤20 }，则

A∩B = { 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 }。

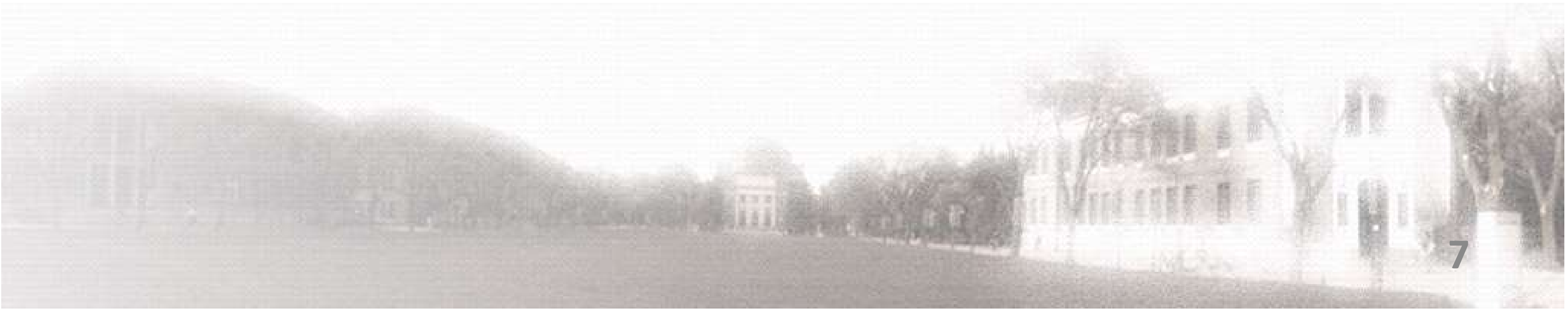
(2) 设A_n = {x∈R | 0≤x≤n}，n=1,2,…，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in R \mid 0 \le x \le 1\} = [0,1]$$

不相交

定义 设A,B为二集合，若$A\cap B=\varnothing$，则称A和B是不交的。设$A_1,A_2,\ldots$是可数多个集合，若对于任意的$i\neq j$，都有$A_i\cap A_j=\varnothing$，则称$A_1,A_2,\ldots$是互不相交的。

设$A_n=\{x\in R\mid n-1<x<n\}$，$n=1,2,\ldots$，则$A_1, A_2,\ldots$是互不相交的。

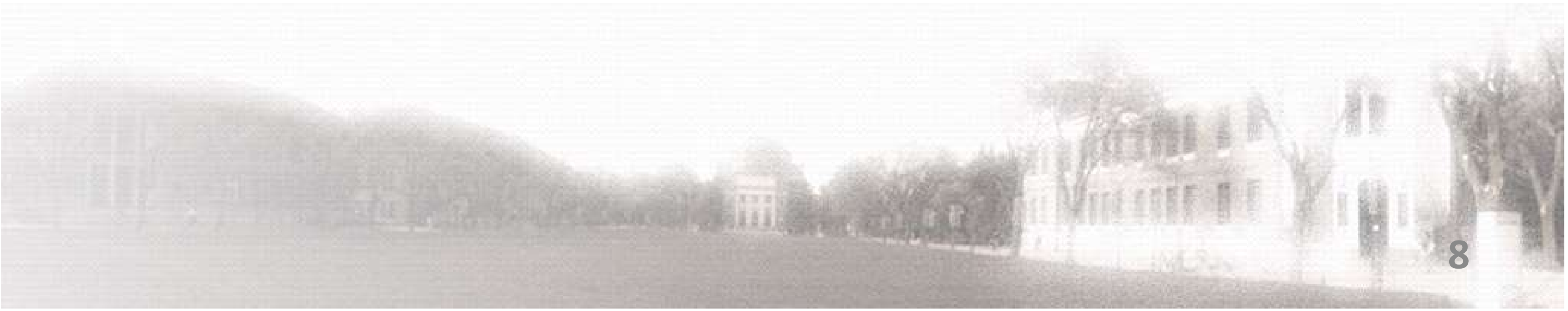


相对补集

定义 设A,B为二集合，称属于A而不属于B的全体元素组成的集合为B对A的相对补集，记作A-B。

A-B的描述法表示为

$$A-B=\{\,x\mid x\in A\wedge x\notin B\,\}=A\cap\sim B。$$



对称差

定义 设A,B为二集合，称属于A而不属于B，或属于B而不属于A的全体元素组成的集合为A与B的对称差，记作A⊕B。A⊕B的描述法表示为

$$A\oplus B = \{x \mid (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\notin A\wedge x\in B)\}$$

容易看出

$$A\oplus B = (A-B)\cup(B-A) = (A\cup B)-(A\cap B)$$

绝对补集

定义 设E为全集，$A \subseteq E$，称A对E的相对补集为A的绝对补集，记作~A。

~A的描述法表示为

$$\sim A = \{ x \mid x \in E \wedge x \notin A \}。$$

因为E是全集，所以$x \in E$是真命题，于是

$$\sim A = \{ x \mid x \notin A \}。$$

广义并集

定义 设集合A中的元素都为集合（集族），称由A中全体元素的元素组成的集合为A的广义并， 记作∪A （“ 大并A”）。 ∪A的描述法表示为

$$\cup A = \{ x \mid \exists z (x \in z \wedge z \in A) \}$$

设A ={{a,b},{c,d},{d,e,f}}，则∪A ={a,b,c,d,e,f}.

若$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, 则 $\cup A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$

Q: 如何区分初级并与广义并?

广义交集

定义 设集合A中的元素都为集合且A非空，称由A中全体元素的公共元素组成的集合为A的广义交， 记作$\cap A$ 。 $\cap A$的描述法表示为

$$\cap A = \{ x \mid \forall z (z \in A \rightarrow x \in z) \}$$

设$A = \{\{1,2,3\},\{1,a,b\},\{1,6,7\}\}$，则$\cap A = \{1\}$。

若$A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$, 则$\cap A = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$

注意： 当$A=\varnothing$ 时，$\cap\varnothing$无意义。(为什么?)

例子

给定 $A_1=\{a,b,\{c,d\}\}$， $A_2=\{\{a,b\}\}$， $A_3=\{a\}$， $A_4=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$，

$A_5=a$（$a\neq\varnothing$）， $A_6=\varnothing$，则

$\cup A_1= a\cup b\cup\{c,d\}$， $\cap A_1= a\cap b\cap\{c,d\}$，

$\cup A_2=\{a,b\}$，$\cap A_2=\{a,b\}$，$\cup A_3=a$，$\cap A_3=a$，

$\cup A_4=\{\varnothing\}$，$\cap A_4=\varnothing$，$\cup A_5= \cup a$，$\cap A_5= \cap a$，

$\cup A_6=\varnothing$，$\cap A_6$ 无意义。

集合运算的优先级

第一类运算（一元运算）：

绝对补、幂集、广义交、广义并等。

第一类运算按照从右向左的顺序运算。

第二类运算（二元运算）：

初级并、初级交、相对补、对称差等。

第二类运算按照括号决定的顺序运算，多个括号并排或没有括号的部分按照从左向右的顺序运算。

第一类运算优先于第二类运算

例子

给定 **A={{a}, {a,b}}**，求**∪∪A, ∩∩A, ∩∪A ∪ (∪∪A- ∪∩A)**

解： $\cup A=\{a,b\}$,$\cap A=\{a\}$,

$\cup\cup \boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b}$,$\cap\cap \boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}$

$\cap\cup \boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}\cap\boldsymbol{b}$,$\cup\cap \boldsymbol{A}=\boldsymbol{a}$

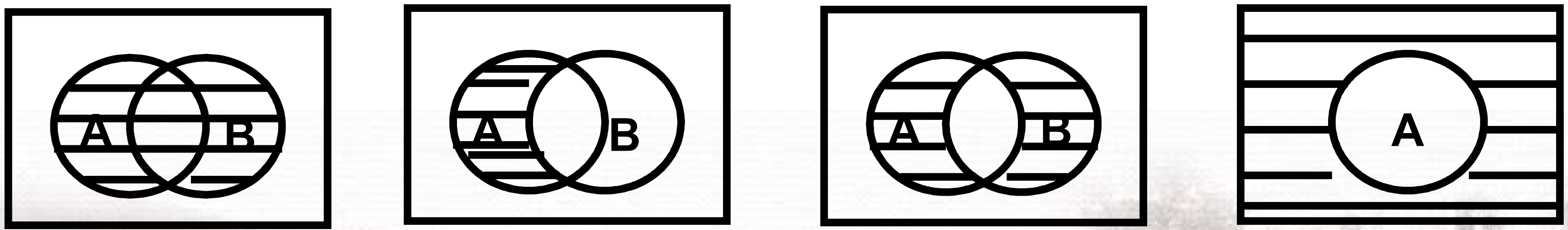
$$\cap\cup \boldsymbol{A}\cup(\cup\cup \boldsymbol{A}-\cup\cap \boldsymbol{A})$$

$$=(\boldsymbol{a}\cap\boldsymbol{b})\cup\left((\boldsymbol{a}\cup\boldsymbol{b})-\boldsymbol{a}\right)$$

$$=(\boldsymbol{a}\cap\boldsymbol{b})\cup(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}$$

文氏图

集合与集合之间的关系以及一些运算的结果可以用文氏图给予直观的表示。在文氏图中，用矩形代表全集，用圆或其他闭曲线的内部代表 **E** 的子集，并将运算结果得到的集合用阴影部分表示。

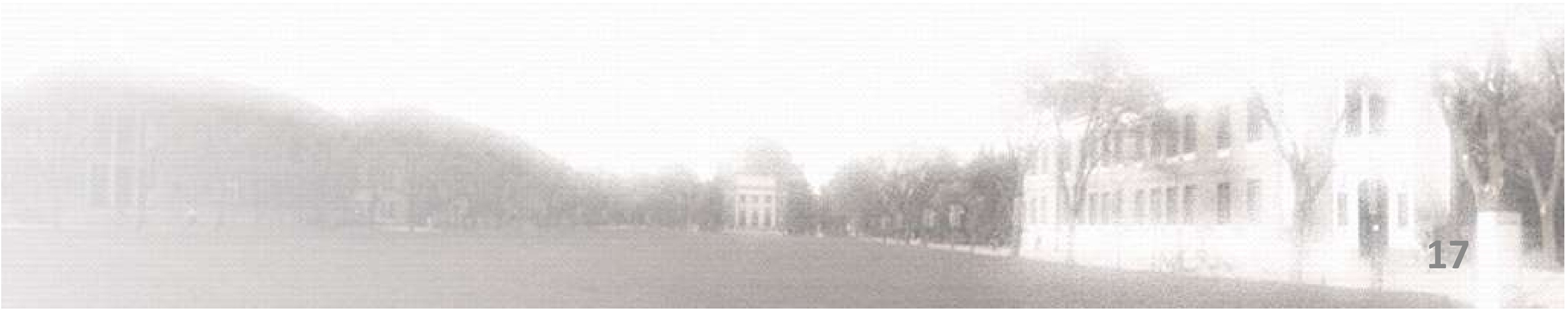


$A \cup B$　　$A-B$　　$A \oplus B$　　$\sim A$

容斥原理(包含排斥原理)

定理1.3 设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为 n 个集合，则

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$



例1

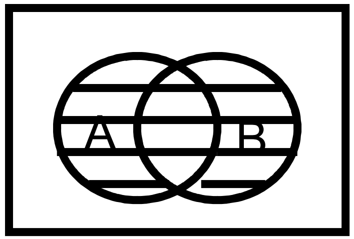
在1到10000之间既不是某个整数的平方，也不是某个整数的立方的数有多少?

解 设 $E=\{x \in N | 1 \le x \le 10000\}$，$|E|=10000$，

$A=\{x \in E | x=k^2 \wedge k \in Z\}$，$|A|=100$，

$B=\{x \in E | x=k^3 \wedge k \in Z\}$，$|B|=21$，

$A \cap B= \{x \in E | x=k^6 \wedge k \in Z\}$，$|A \cap B|=4$，



A∪B

则 $|\sim(A \cup B)|=|E|-|A \cup B| =|E|-(|A|+|B|-|A \cap B|)$

$=10000-100-21+4=9883$。□

例2

在24名科技人员中，会说英、日、德、法语的人数分别为13、 5、 10、和9， 其中同时会说英语、日语的人数为2，同时会说英语、德语， 或同时会说英语、法语， 或同时会说德语、法语两种语言的人数均为4。会说日语的人既不会说法语也不会说德语。试求只会说一种语言的人数各为多少？又同时会说英、德、法语的人数有多少？

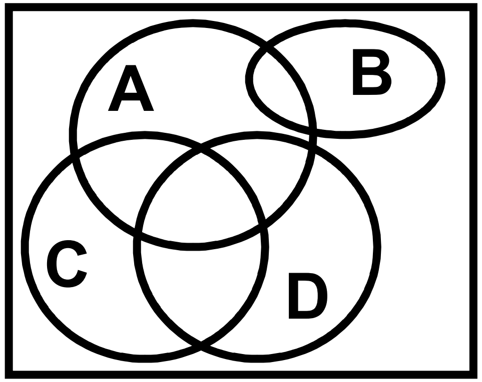
解答

设A、B、C、D分别为会说英、日、德、法语的集合。

由已知条件可知，$|A|=13$，$|B|=5$，$|C|=10$，$|D|=9$，$|A\cap B|=2$，

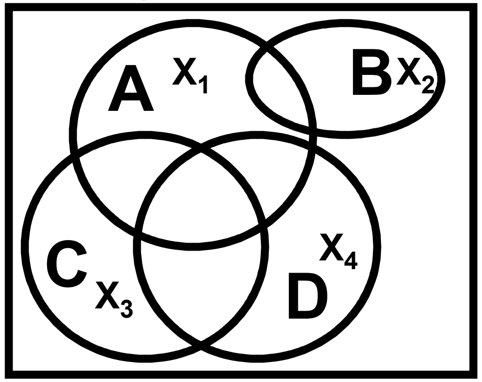
而 $|A\cap C|=|A\cap D|=|C\cap D|=4$，

$|B\cap C|=|B\cap D|=|A\cap B\cap C|=|A\cap B\cap D|=|A\cap B\cap C\cap D|=0$，$|A\cup B\cup C\cup D|=24$ 。



解答(续)

对集合A、B、C、D应用容斥原理，并代入已知条件得方程 $24=37-14+|A\cap C\cap D|$，于是，$|A\cap C\cap D|=1$，即同时会说英、法、德语只有1人。



设只会说英、日、法、德语的人数为 x_1、x_2、x_3、x_4，则

$x_1=|A|-|(B\cup C\cup D)\cap A|=|A|-|(B\cap A)\cup(C\cap A)\cup(D\cap A)|$，对 $B\cap A$、$C\cap A$、$D\cap A$用容斥原理，得$x_1=1$，类似可求出$x_2=3$，$x_3=3$，$x_4=2$。 □

小结

- 集合的概念、集合之间的关系
  - 集合、集合的表示、文氏图
  - 子集、相等、真子集、空集、全集
  - 幂集
  - 集合的元素个数、容斥原理
- 集合的运算、集合运算的优先级
  - 并、初级并、广义并
  - 交、初级交、广义交
  - 相对补、对称差、绝对补