清華大学 Tsinghua University

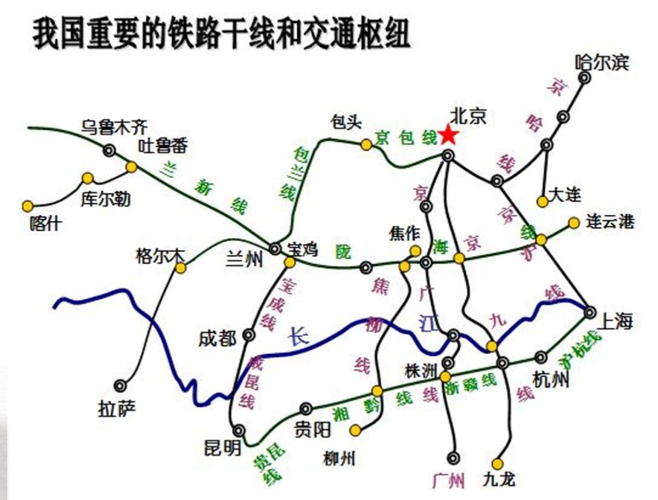
单元1.2 通路与回路

第14章 图的基本概念

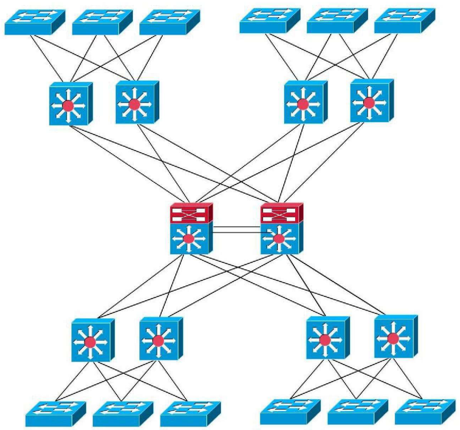
14.2 通路与回路

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

举例：交通网络



举例：计算机网络



举例：景点旅游路径规划

内容提要

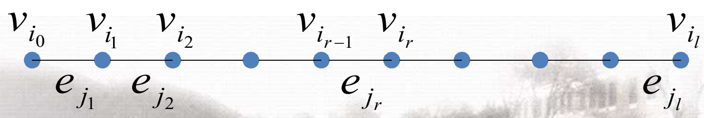
- 通路、简单通路、初级通路
- 回路、简单回路、初级回路
- 扩大路径法

通路(walk)

- 顶点与边的交替序列

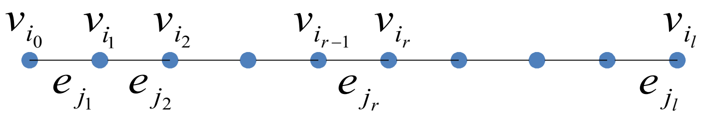
其中 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots v_{i_{l-1}} e_{j_l} v_{i_l}$

$$e_{j_r} = (v_{i_{r-1}}, v_{i_r}), r = 1, 2, \ldots, l$$



起点, 终点, 通路长度

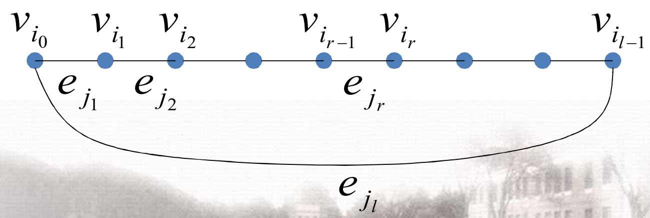
- 起点：v_{i_0}，终点: v_{i_l}
- 通路长度 $|\Gamma| = l$



回路(closed walk)

- 若 $v_{i_0} = v_{i_l}$

$$\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots v_{i_{l-1}} e_{j_l} v_{i_0}$$



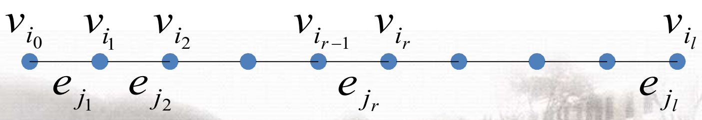
通(回)路的表示

- 可以只用边的序列来表示通(回)路

$$e_{j_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l}$$

- 简单图可以只用顶点的序列来表示通(回)路

$$v_{i_0} v_{i_1} \cdots v_{i_{l-1}} v_{i_l}$$

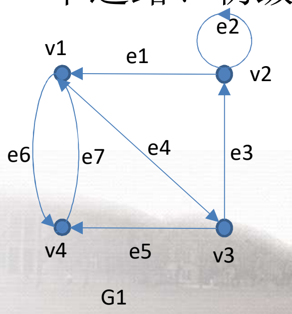


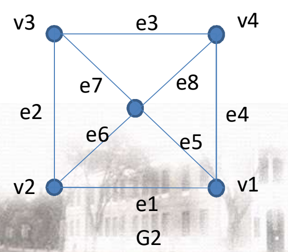
简单(复杂、初级)通(回)路

- 简单通路：没有重复边的通路
- 简单回路：没有重复边的回路
- 复杂通路：有重复边的通路
- 复杂回路：有重复边的回路
- 初级通路(路径)：没有重复顶点、没有重复边的通路
- 初级回路(圈)：没有重复顶点、没有重复边的回路

举例

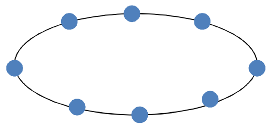
- 判断G1中e5e7e4e3e1e4、e3e2e1e4、e3e1e4是否为简单回路、初级回路？
- 判断G2中e5e7e2e6e8、e1e6e7e3是否为简单通路、初级通路？并求其长度。





圈的表示

- 画出的长度为l 的圈
  - 在同构意义下是唯一的
  - 如果是标定的，在定义意义下，若是有向图，则是l 个不同的圈；若是无向图，则是$2l$ 个不同的圈



定理14.5

- 定理14.5　在n阶(有向或无向)图G中,若从不同顶点v_i到v_j有通路, 则从v_i到v_j有长度小于等于n-1的通路
  证明：下一页

- 推论　在n阶图G中,若从不同顶点v_i到v_j有通路,则从v_i到v_j有长度小于等于n-1的路径(初级通路).　#

定理14.5证明

- 证: 设 $\Gamma = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots e_{j_l} v_{i_l}, v_{i_0} = v_i, v_{i_l} = v_j$,

若l>n-1, 则Γ上顶点数l+1>n, 必存在0≤s<k≤l, 使得$v_{i_s} = v_{i_k}$,于是Γ上有从 v_{i_s} 到自身的回路C_{sk}, 在Γ上删除C_{sk}的所有边和除 v_{i_s} 外的所有顶点,得

$$\Gamma' = v_{i_0} e_{j_1} v_{i_1} e_{j_2} \cdots v_{i_s} e_{j_{k+1}} v_{i_{k+1}} \cdots e_{j_l} v_{i_l}$$

则 |Γ’|<|Γ|,重复进行有限多步为止. #

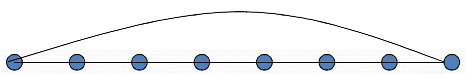
定理14.5推论

- 在n阶图G中,若从不同顶点v_i到v_j有通路,则从v_i到v_j有长度小于等于n-1的路径(初级通路).　#

定理14.6

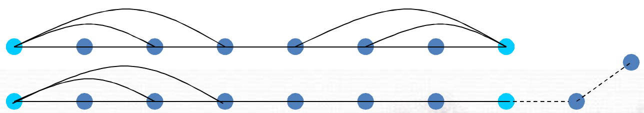
- 定理14.6　在n阶图G中,若有从顶点v_i到自身的回路,则有从v_i到自身长度小于等于n的回路.　#

- 推论　在n阶图G中,若有从顶点v_i到自身的简单回路, 则有从v_i到自身长度小于等于n的圈(初级回路).



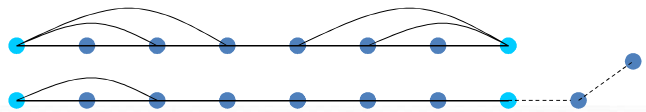
极大路径

- 在无向简单图中, 路径的两个端点不与路径本身以外的顶点相邻, 这样的路径称为极大路径
- 在有向图中, 路径起点的前驱,终点的后继,都在路径本身上



扩大路径法

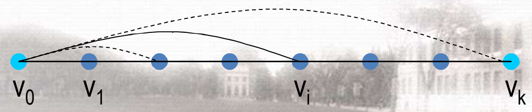
- 任何一条路径,只要不是极大路径,则至少有一个端点与路径本身以外的顶点相邻, 则路径还可以扩大, 直到变成极大路径为止



例

参考例14.8: 设G是$n(n\geq 3)$阶无向简单图, $\delta(G)\geq 2$. 证明 G中有长度$\geq\delta(G)+1$的圈

证明: $\forall u_0\in V(G)$, $\delta(G)\geq 2\Rightarrow\exists v_1\in N_G(v_0)$,
对$\Gamma_0=u_0u_1$采取扩大路径法,得到极大路径$\Gamma=v_0v_1\ldots v_k$. $d(v_k)\geq\delta(G)\Rightarrow k\geq\delta(G)$,
$d(v_0)\geq\delta(G)\Rightarrow\exists v_i\in N_G(v_0)$, $\delta(G)\leq i\leq k$.
于是 $v_0v_1\ldots v_i\, v_0$是长度$\geq\delta(G)+1$的圈. #



Open Question Points: 10 Setting

设G是无向简单图, $\delta(G)\geq 2$。证明 G中有长度$\geq\delta(G)+1$的圈。

命题中简单图的条件是否可以去掉？为什么？

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

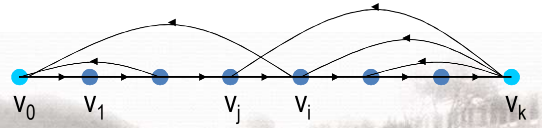
例(有向图的例子)

- D是有向简单图，
  $\delta(D)\geq 2$, $\delta^-(D)>0$, $\delta^+(D)>0$,
  证明D中有长度大于等于
  $\max\{\delta^-(D),\delta^+(D)\}+1$的圈

证明

- 证明: 分别考虑v_0,v_k:
  (1) $d^-(v_0)\geq\delta^-(D) \Rightarrow \exists v_i\in N_D^-(v_0)$, $\delta^-\leq i\leq k$.
  于是 $v_0v_1\ldots v_i v_0$是长度$\geq\delta^-+1$的圈.
  (2) $d^+(v_k)\geq\delta^+(D) \Rightarrow \exists v_j\in N_D^+(v_k)$, $0\leq j\leq k-\delta^+$.
  于是 $v_jv_{j+1}\ldots v_k v_j$是长度$\geq\delta^++1$的圈.

较长的就是D中长度$\geq\max\{\delta^-,\delta^+\}+1$的圈. #



小结

- 通路、简单通路、初级通路
- 回路、简单回路、初级回路
- 扩大路径法