单元3.6 关系的运算

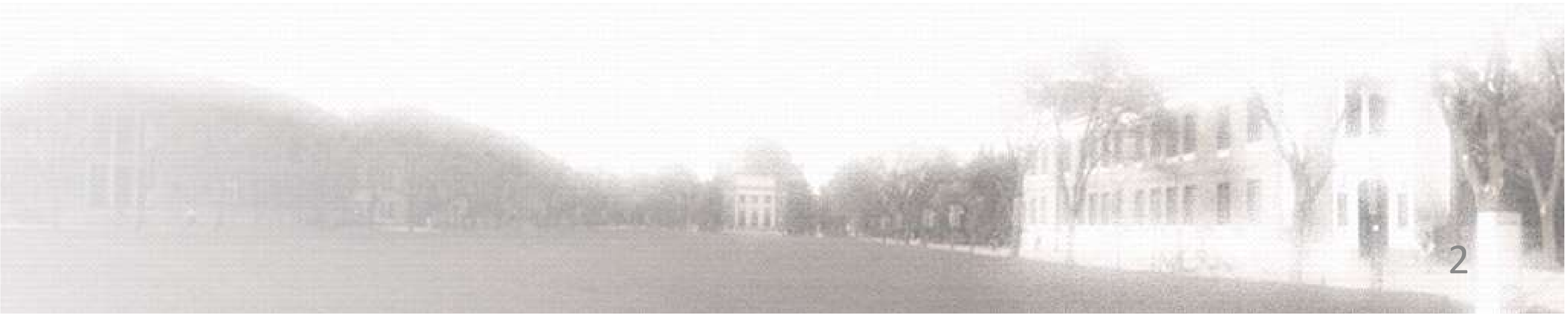
第七章 二元关系

7.3 关系的运算

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

- 逆关系、合成（复合）
- 定义域、值域、域
- 限制、像
- 基本运算的性质
- 幂运算及其性质



关系的运算

关系是以有序对为元素的特殊集合，可对其进行集合的所有基本运算。

设**R, S**为集合**A**到**B**的两个关系，则：

$$\boldsymbol{R \cup S = \{< x, y > | xRy \vee xSy\}};$$

$$\boldsymbol{R \cap S = \{< x, y > | xRy \wedge xSy\}};$$

$$\boldsymbol{R - S = \{< x, y > | xRy \cap x\not{S}y\}};$$

$$\boldsymbol{\sim R = A \times B - R};$$

（注：$\boldsymbol{A \times B}$是相对于**R**的全集。）

逆运算

对任意集合F,G，可以定义:

- 逆(inverse) :

$$F^{-1} = \{ <x,y> \mid yFx \}$$

- 若F为集合A到集合B的一个关系，则F^{-1}及~F均为关系：

$$\sim F = A \times B - F \subseteq A \times B$$
$$F^{-1} \subseteq B \times A$$

合成（复合）

- 合成(复合)(composite):

  $$F \circ G = \{ <x,y> \mid \exists z(xFz \wedge zGy) \}$$

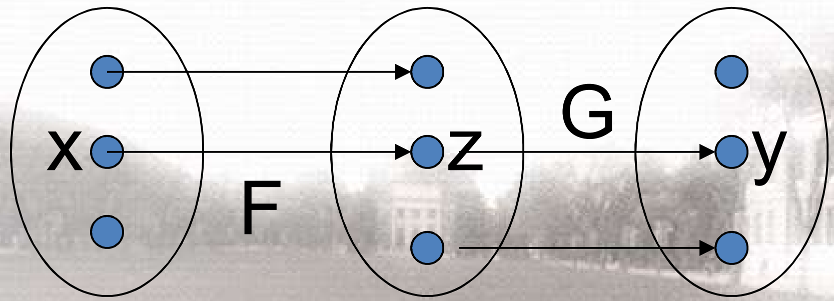
- 顺序合成(右合成):

  $$F \circ G = \{ <x,y> \mid \exists z(xFz \wedge zGy) \}$$

  课本所使用定义

- 逆序合成(左合成):

  $$F \circ G = \{ <x,y> \mid \exists z(xGz \wedge zFy) \}$$



例

例 $R=\{<1,2>, <2,3>, <1,4>, <2,2>\}$

$S=\{<1,1>, <1,3>, <2,3>, <3,2>, <3,3>\}$

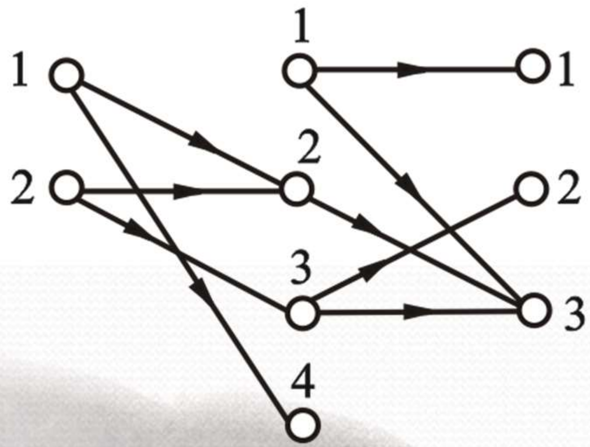
$R^{-1} = \{<2,1>, <3,2>, <4,1>, <2,2>\}$

$R \circ S = \{<1,3>, <2,2>, <2,3>\}$

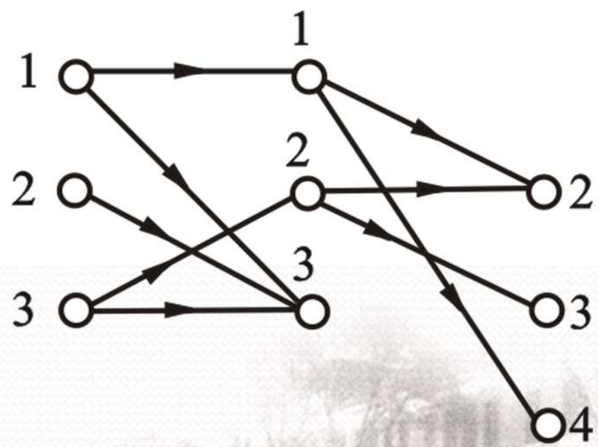
$S \circ R = \{<1,2>, <1,4>, <3,3>, <3, 2>\}$

合成运算的图示法

- 利用图示（不是关系图）方法求合成
- $R \circ S = \{\langle 1,3\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$
- $S \circ R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$



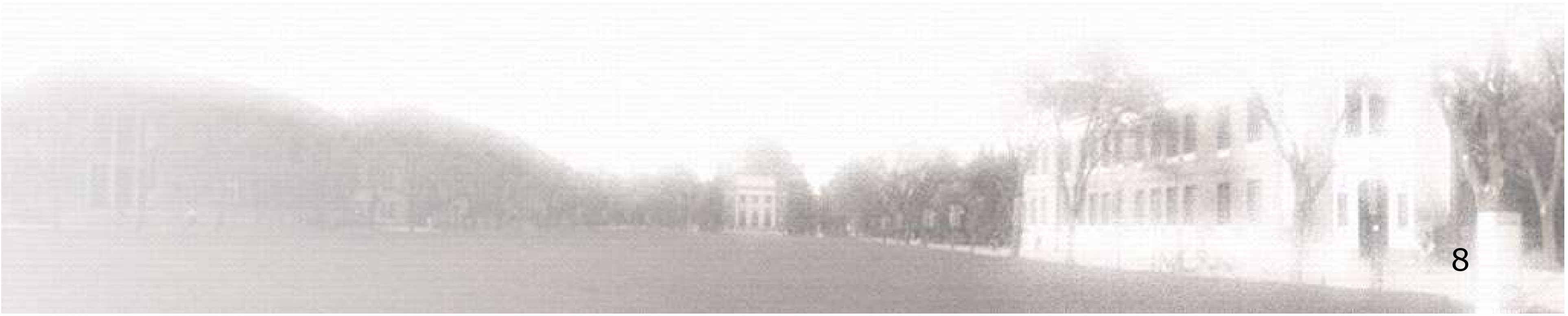
$R \circ S$



$S \circ R$

关系矩阵的性质

- 集合表达式与关系矩阵可唯一相互确定
- **$M(R^{-1})=(M(R))^T$**
  - ^{T}表示矩阵转置
- **$M(R_1 o R_2)=M(R_1) \bullet M(R_2)$**
  - $\bullet$表示矩阵的“逻辑乘”，加法用$\vee$, 乘法用$\wedge$



例

- **A={a,b,c}**

  $R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$

  $R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$

用$M(R_1)$, $M(R_2)$确定$M(R_1^{-1})$, $M(R_2^{-1})$, $M(R_1 \circ R_1)$, $M(R_1 \circ R_2)$, $M(R_2 \circ R_1)$, 从而求出它们的集合表达式.

例

解: $R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$

$R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R_1^{-1})=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad M(R_2^{-1})=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

$R_1^{-1}=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<c,b>\}$

$R_2^{-1}=\{<b,a>,<c,a>,<c,b>\}$

例

$$M(R_1 \circ R_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R_1oR_1={<a,a>,<a,b>,<a,c>, <b,a>,<b,b>}.

$$M(R_1 \circ R_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R_1oR_2={<a,b>,<a,c>,<b,b>,<b,c>}

$$M(R_2 \circ R_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

R_2oR_1={<a,a>,<a,c>}

定义域,值域,域

对任意集合**A**到集合**B**的一个关系**R**, 可以定义:

- 定义域**(domain) :**

$$\mathrm{dom}\ R = \{\, x \mid \exists y(xRy) \,\}$$

- 值域**(range):**

$$\mathrm{ran}\ R = \{\, y \mid \exists x(xRy) \,\}$$

- 域**(field):**

$$\mathrm{fld}\ R = \mathrm{dom}\ R \cup \mathrm{ran}\ R$$

例

- R={<a,{b}>,<c,d>,<{a},{d}>,<d,{d}>}, 则

  dom$R$ = {a, c, {a}, d}, ran$R$ = { {b}, d, {d} }

  fld$R$ = {a, c, {a}, d, {b}, {d}}

- 求下列定义在整数集**Z**上的关系的定义域、值域和域。

(1) $R_1 = \{<x, y> | (x, y \in Z) \wedge (y = 2x)\}$

domR_1=Z, ranR_1=E（偶数集）**, fldR_1=Z**

(2) $R_2 = \{<x, y> | (x, y \in Z) \wedge (|x| = |y| = 7)\}$

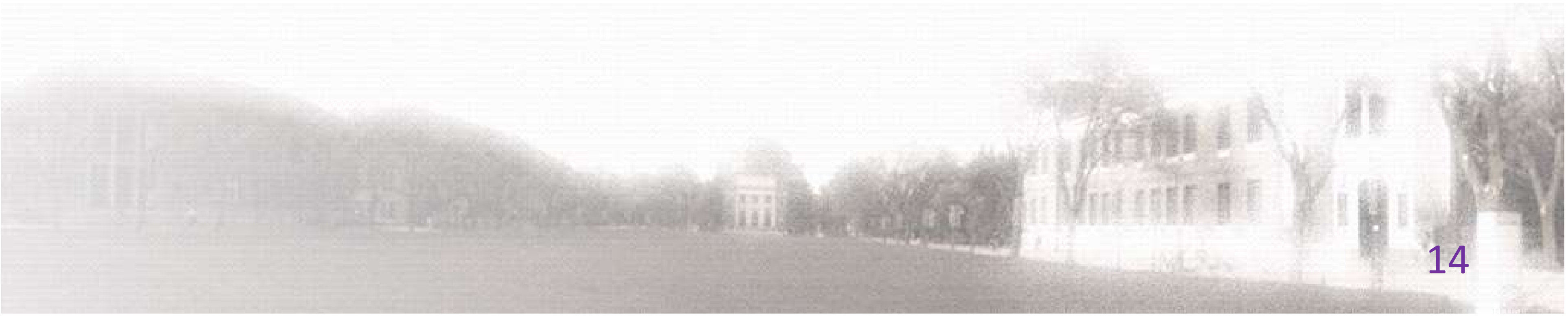
domR_2 = {7, -7}, ranR_2 = {7, -7}, fldR_2={7, -7}

例

- 设H={f, m, s, d}为一个家庭中父母子女四个人的集合，确定H上的一个长幼关系R，指出该关系的定义域、值域和域。

解：$\boldsymbol{R = \{<f,s>,<f,d>,<m,s>,<m,d>\}}$

dom*R* = {f, m}, ran*R* = {s, d}, fld*R* = {f, m, s, d}



限制、像

对二元关系**F**和**集合A**, 可以定义:

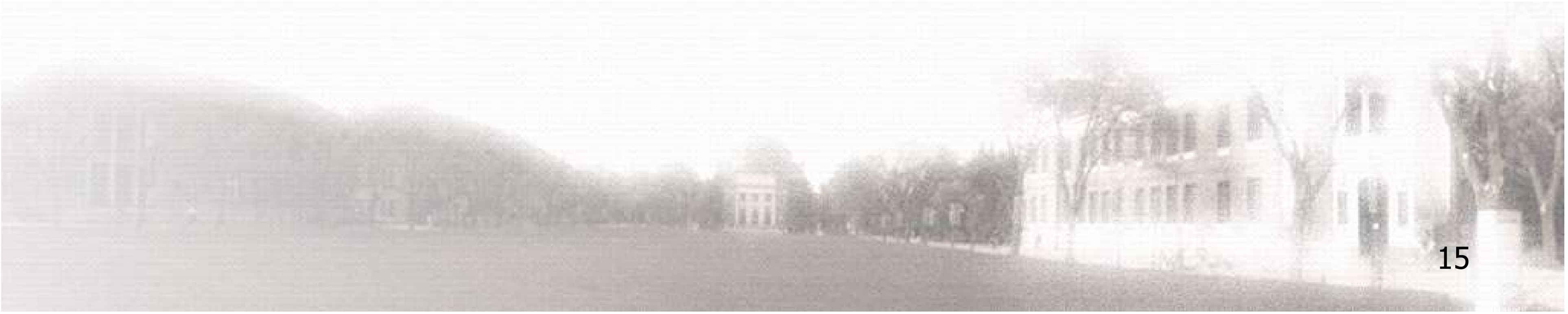
- 限制(restriction):

$$F{\uparrow}A = \{ \langle x,y \rangle \mid xFy \wedge x \in A \} \subseteq F$$

- 像(image):

$$F[A] = ran(F{\uparrow}A) \subseteq ran\ F$$

$$F[A] = \{ y \mid \exists x(x \in A \wedge xFy) \}$$



例

- 设 $B=\{\langle c,d\rangle\}$,

  $R=\{\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle\}$,

  $F=\{\langle a,b\rangle, \langle a,\{a\}\rangle, \langle \{a\},\{a,\{a\}\}\rangle\}$,

  $G=\{\langle b,e\rangle,\langle d,c\rangle\}$.

求: (1) B^{-1},R^{-1}.

(2) $R^{-1}oB$, BoG, RoG, GoR.

(3) $F\uparrow\{a\}$, $F\uparrow\{\{a\}\}$, $F\uparrow\{a,\{a\}\}$, $F^{-1}\uparrow\{\{a\}\}$.

(4) $F[\{a\}]$, $F[\{a,\{a\}\}]$, $F^{-1}[\{a\}]$, $F^{-1}[\{\{a\}\}]$.

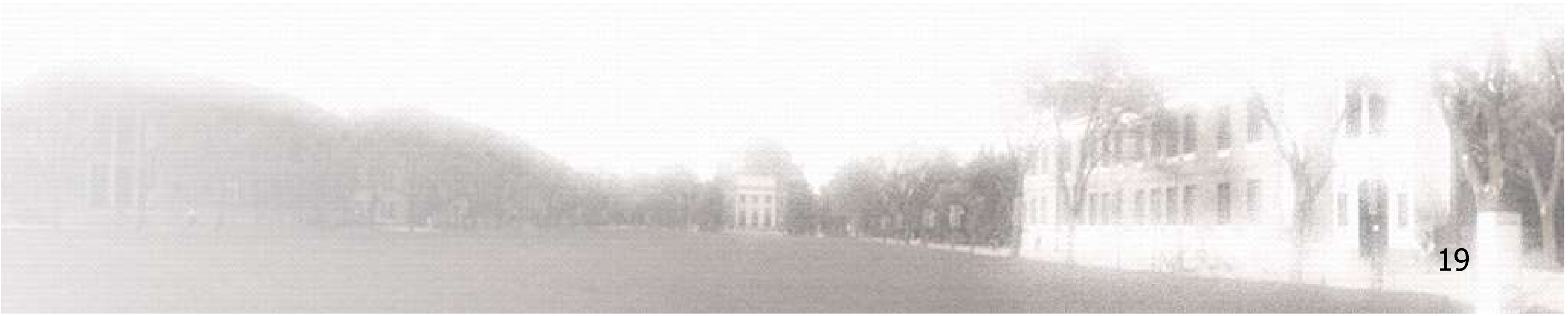
例(1)

- $B=\{\langle c,d\rangle\}$, $R=\{\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle\}$,

求: (1) B^{-1}, R^{-1}.

解: (1) $B^{-1}=\{\langle d,c\rangle\}$,

$R^{-1}=\{\langle b,a\rangle,\langle d,c\rangle\}$.



例(2)

- $B=\{<c,d>\}$, $R=\{<a,b>,<c,d>\}$, $G=\{<b,e>,<d,c>\}$.

求: (2) $R^{-1}oB$, BoG, RoG, GoR.

解: (2) $R^{-1}oB=\{<d,d>\}$,

$BoG=\{<c,c>\}$,

$RoG=\{<a,e>,<c,c>\}$,

$GoR=\{<d,d>\}$.

例(3)

- $F=\{<a,b>,<a,\{a\}>,<\{a\},\{a,\{a\}\}>\}$,

求: (3) $F\uparrow\{a\}$, $F\uparrow\{\{a\}\}$, $F\uparrow\{a,\{a\}\}$, $F^{-1}\uparrow\{\{a\}\}$.

解: (3) $F\uparrow\{a\}=\{<a,b>,<a,\{a\}>\}$,

$F\uparrow\{\{a\}\}=\{<\{a\},\{a,\{a\}\}>\}$,

$F\uparrow\{a,\{a\}\} = F$,

$F^{-1}\uparrow\{\{a\}\}=\{<\{a\},a>\}$.

例(4)

- $F=\{<a,b>,<a,\{a\}>,<\{a\},\{a,\{a\}\}> \}$,

求: (4) $F[\{a\}]$, $F[\{a,\{a\}\}]$, $F^{-1}[\{a\}]$,

$F^{-1}[\{\{a\}\}]$.

解: (4) $F[\{a\}] = \{ b, \{a\} \}$,

$F[\{a,\{a\}\}] = \{ b, \{a\}, \{a,\{a\}\} \}$,

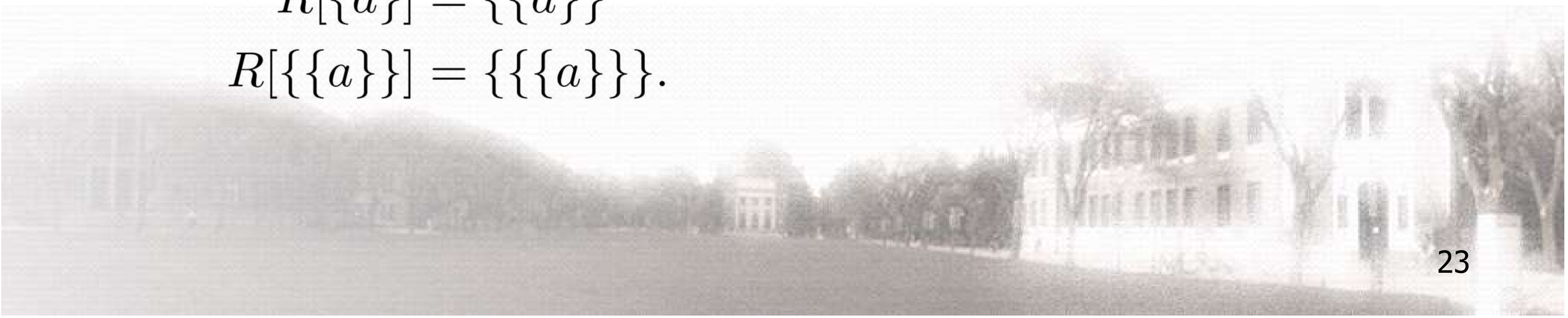
$F^{-1}[\{a\}] = \varnothing$,

$F^{-1}[\{\{a\}\}] = \{ a \}$.   #

例

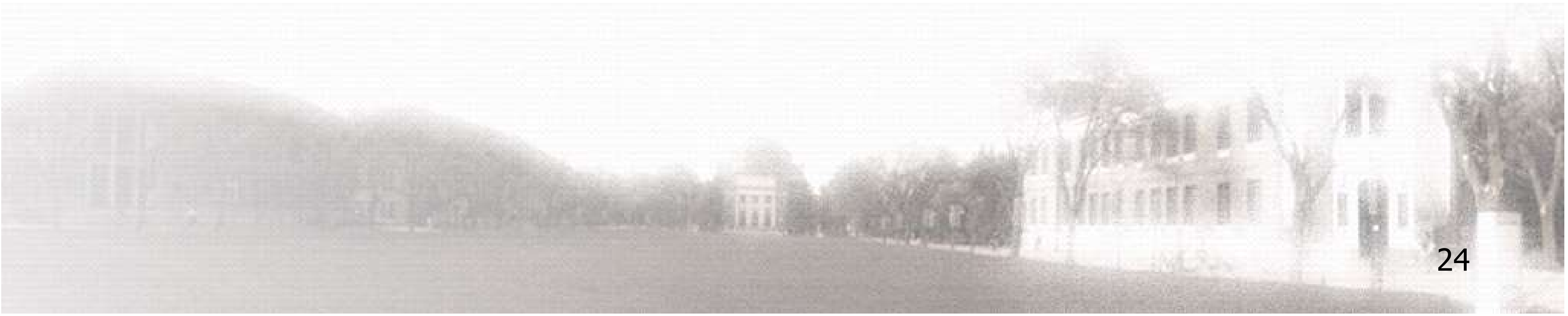
例 **A={ a, {a}, {{a}} }, R={<a,{a}>, <{a}, {{a}}>}**

$$
\begin{aligned}
R^{-1} &= \{< \{a\}, a >, < \{\{a\}\}, \{a\} >\} \\
R \circ R &= \{< a, \{\{a\}\} >\} \\
R \restriction \{a\} &= \{< a, \{a\} >\} \\
R \restriction \{\{a\}\} &= \{< \{a\}, \{\{a\}\} >\} \\
R^{-1} \restriction \{a\} &= \emptyset \\
R[\{a\}] &= \{\{a\}\} \\
R[\{\{a\}\}] &= \{\{\{a\}\}\}.
\end{aligned}
$$



关系运算的顺序

- 逆运算优先于其他运算
- 关系运算（逆、合成、限制、像）优先于集合运算（交并补、相对补、对称差等）
- 没有规定优先权的运算以括号决定运算顺序



基本运算的性质

定理7.1 设F是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) $\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$, $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$

证 (1) 任取$<x, y>$, 由逆的定义有

$$<x, y>\in(F^{-1})^{-1} \Leftrightarrow <y, x>\in F^{-1} \Leftrightarrow <x, y>\in F$$

所以有 $(F^{-1})^{-1}=F$

(2) 任取x, $x\in\mathrm{dom}F^{-1} \Leftrightarrow \exists y(<x, y>\in F^{-1})$

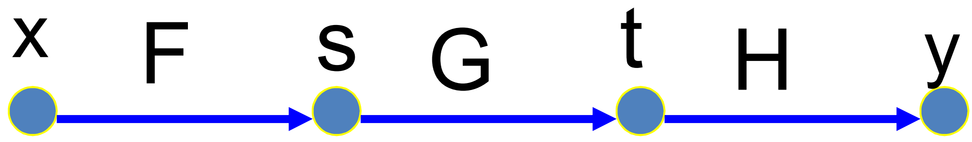
$$\Leftrightarrow \exists y(<y, x>\in F) \Leftrightarrow x\in\mathrm{ran}F$$

所以有$\mathrm{dom}F^{-1}=\mathrm{ran}F$. 同理可证 $\mathrm{ran}F^{-1}=\mathrm{dom}F$.

定理7.2(合成运算结合律)

定理　设F, G, H是任意的关系, 则

$$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$$



证明:任取$<x,y>$,

$$<x, y>\in(F\circ G)\circ H$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(<x, t>\in F\circ G \land <t, y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,(\exists s\,(<x, s>\in F \land <s, t>\in G) \land <t, y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\,\exists s\,(<x, s>\in F \land <s, t>\in G \land <t, y>\in H)$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(<x, s>\in F \land \exists t\,(<s, t>\in G \land <t, y>\in H))$$

$$\Leftrightarrow \exists s\,(<x, s>\in F \land <s, y>\in G\circ H)$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in F\circ(G\circ H)$$

所以 $(F\circ G)\circ H = F\circ(G\circ H)$

定理7.2

定理 设F,G为任意关系, 则 **$(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$**

证明： 任取$<x, y>$,

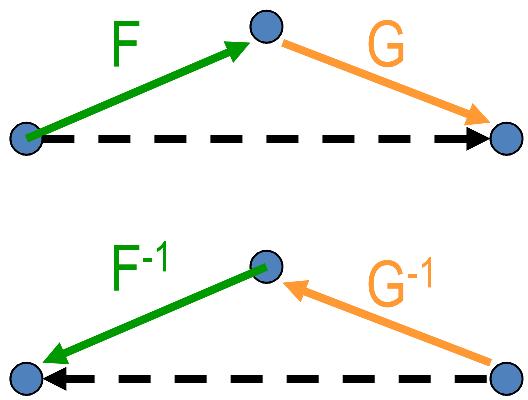
$$<x, y>\in(F\circ G)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow <y, x>\in F\circ G$$

$$\Leftrightarrow \exists t\ (<y, t>\in F \wedge (t, x)\in G)$$

$$\Leftrightarrow \exists t\ (<x, t>\in G^{-1} \wedge (t, y)\in F^{-1})$$

$$\Leftrightarrow <x, y>\in G^{-1}\circ F^{-1}$$



所以 $(F\circ G)^{-1} = G^{-1}\circ F^{-1}$

定理7.3

定理7.3 设 R 为 A上的关系, I_A为A上恒等关系，则 $R \circ I_A = I_A \circ R = R$

证明：任取$<x, y>$

$$
\begin{aligned}
& <x, y> \in R \circ I_A \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x, t> \in R \wedge <t, y> \in I_A) \\
\Leftrightarrow\ & \exists t\,(<x, t> \in R \wedge t=y \wedge y \in A) \\
\Leftrightarrow\ & <x, y> \in R
\end{aligned}
$$

从而有$R \circ I_A = R$.

同理可证 $I_A \circ R = R$.

定理7.4

定理7.4 设 ***F*, *G*, *H***为任意的关系，则

1) $F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$

2) $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$

3) $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$

4) $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$

注意各关系的定义域与值域。

证明：见课本，略。

上述结论对于有限个关系的并和交也成立。

定理7.4

试证明下列包含关系不一定成立

(5) $F \circ G \cap F \circ H \subseteq F \circ (G \cap H)$

(6) $G \circ F \cap H \circ F \subseteq (G \cap H) \circ F$

证：反证法。

(5): A={1,2,3}, B={1,2}, C={2,3}, A到B的关系 F={<2,2>,<2,1>}, B到C的关系G={<1,2>,<2,3>}, H={<2,2>,<1,3>}

$$F \circ G \cap F \circ H = \{<2,3>,<2,2>\}$$

$$F \circ (G \cap H) = F \circ \emptyset = \emptyset$$

$\therefore F \circ G \cap F \circ H \nsubseteq F \circ (G \cap H)$

定理7.5

定理7.5 设 F为任意的关系，A，B为集合，则

1) $F\uparrow(A\cup B)=F\uparrow A\cup F\uparrow B$

2) $F[A\cup B]=F[A]\cup F[B]$

3) $F\uparrow(A\cap B)=F\uparrow A\cap F\uparrow B$

4) $F[A\cap B]\subseteq F[A]\cap F[B]$

5) $F[A]-F[B]\subseteq F[A-B]$

注意各关系的定义域与值域。

证明：1)-4)证明见课本，略。

例

例 设**A={0,1,2}, B={0,-1,-2},**

$$F = \{<x, y> \mid x, y \in Z \wedge y = |x|\}$$

$$F[A \cap B] = F[\{0\}] = \{0\}$$

$$F[A] \cap F[B] = \{0, 1, 2\} \cap \{0, 1, 2\} = \{0, 1, 2\}$$

$$F[A \cap B] \subset F[A] \cap F[B]$$

$$F[A - B] = F[\{1, 2\}] = \{1, 2\}$$

$$F[A] - F[B] = \{0, 1, 2\} - \{0, 1, 2\} = \emptyset$$

$$F[A] - F[B] \subset F[A - B]$$

幂运算

定义 设R为A上的关系, n为自然数, 则 R 的 n次幂是

(1) $R^0 = \{<x,x> \mid x \in A\} = I_A$

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$

注意：对于A上的任何关系R_1和R_2都有 $R_1{}^0 = R_2{}^0 = I_A$，对于A上的任何关系 R 都有 $R^1 = R$

对于集合表示的关系R，计算R^n 就是 n 个 R 合成 .

例

设$A = \{a, b, c, d\}$, $R = \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$,

求R的各次幂, 分别用矩阵和关系图表示.

$$M^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

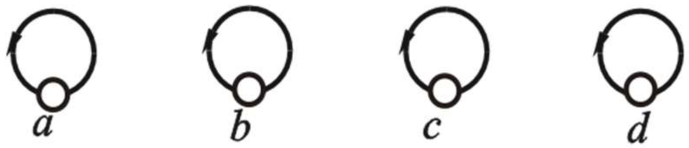
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

注意到$M^4 = M^2$, 即$R^4 = R^2$. 因此可以得到

$$R^2 = R^4 = R^6 = \ldots, \quad R^3 = R^5 = R^7 = \ldots$$

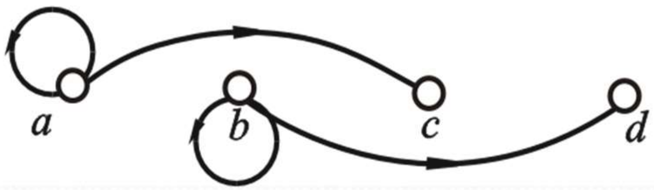
例

$\boldsymbol{R^0, R^1, R^2, R^3,\ldots}$的关系图如下图所示



R^0

$R^1=R$



$R^2=R^4$

$R^3=R^5$

幂运算的性质

定理7.6 设 A 为 n 元集, R是A上的关系, 则存在自然数 s 和 t, 使得 $R^s = R^t$.

证 R 为A上的关系, 由于$|A| = n$, A上的不同关系只有2^{n^2}个. 列出 R 的各次幂

$$R^0, R^1, R^2, \ldots, , \ldots,$$

必存在自然数 s 和 t 使得 $R^s = R^t$.

幂运算的性质

定理7.7 设 R 是 A 上的关系, $m, n \in \mathbf{N}$, 则

(1) $R^m \circ R^n = R^{m+n}$

(2) $(R^m)^n = R^{mn}$

证 用归纳法

(1) 对于任意给定的 $m \in \mathbf{N}$, 施归纳于 n.

若$n=0$, 则有 $R^m \circ R^0 = R^m \circ I_A = R^m = R^{m+0}$

假设 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, 则有

$$R^m \circ R^{n+1} = R^m \circ (R^n \circ R) = (R^m \circ R^n) \circ R = R^{m+n+1},$$

所以对一切 $m, n \in \mathbf{N}$ 有 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$.

幂运算的性质

(2) 对于任意给定的 $m \in \mathrm{N}$, 施归纳于 n.

若 $n = 0$, 则有

$$(R^m)^0 = I_A = R^0 = R^{m\times 0}$$

假设 $(R^m)^n = R^{mn}$, 则有

$$(R^m)^{n+1} = (R^m)^n \circ R^m = (R^{mn}) \circ R^m = R^{mn+m} = R^{m(n+1)}$$

所以对一切 $m, n \in \mathrm{N}$ 有 $(R^m)^n = R^{mn}$.

幂运算的性质

定理7.8 设R 是A上的关系, 若存在自然数 s, t ($s<t$) 使得$R^s = R^t$, 则

(1) 对任何 $k\in N$ 有 $R^{s+k} = R^{t+k}$

(2) 对任何 $k, i\in N$ 有$R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$p = t-s$

(3) 令$S=\{R^0,R^1, \ldots, R^{t-1}\}$, 则对于任意的 $q\in N$有 $R^q\in S$

证明 (1) $R^{s+k} = R^s\circ R^k = R^t\circ R^k = R^{t+k}$

（2）对 k 归纳. 若$k=0$, 则有

$$R^{s+0p+i} = R^{s+i}$$

假设 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$, 其中$p = t-s$, 则

$$R^{s+(k+1)p+i} = R^{s+kp+i+p} = R^{s+kp+i}\circ R^p$$

$$= R^{s+i}\circ R^p = R^{s+p+i} = R^{s+t-s+i} = R^{t+i} = R^{s+i}$$

由归纳法命题得证.

幂运算的性质

(3) 任取 $q \in N$, 若$q<t$, 显然有 $R^q \in S$.

若 $q \ge t$, 则存在自然数 k 和 i 使得

$$q = s+kp+i，\text{其中} 0 \le i \le p-1.$$

于是

$$R^q = R^{s+kp+i} = R^{s+i}$$

而 $$s+i \le s+p-1 = s+t-s-1 = t-1$$

这就证明了 $R^q \in S$.

小结

- 逆关系、合成（复合）
- **dom(R), ran(R), fld(R);**
- 限制、像
- 基本运算的性质
- 幂运算及其性质