Tsinghua University

单元1.3 图的连通性

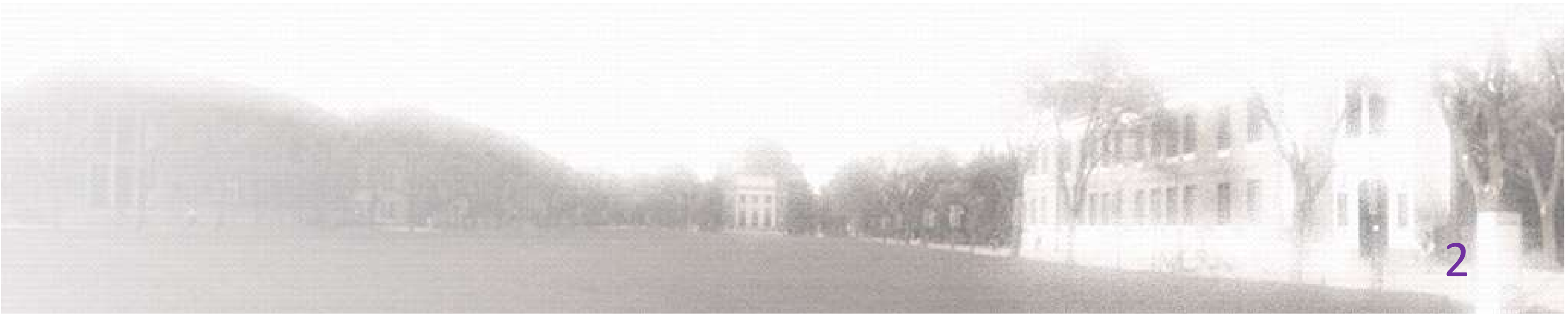
第14章 图的基本概念

14.3 图的连通性

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

- 连通, 连通分支, 连通分支数
- 二部图 ⇔ 无奇圈
- 强连通(双向),单向连通,弱连通

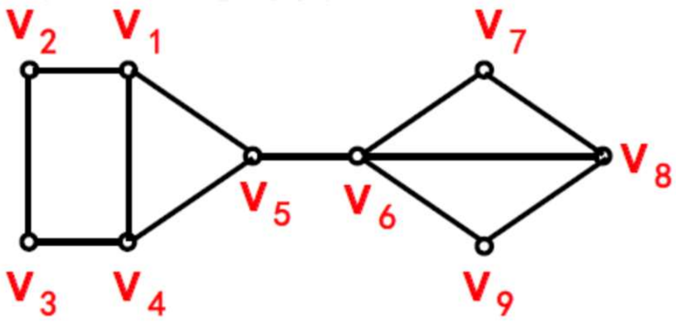


连通

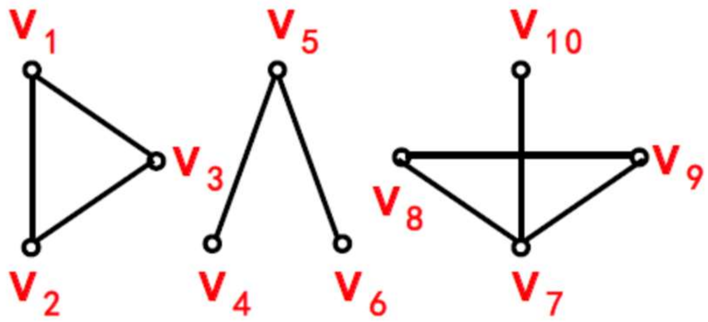
- 无向图$G=<V,E>$，$u \sim v \Leftrightarrow$ u与v之间有通路，规定$u \sim u$
- 连通关系~是等价关系
  - 自反: $u \sim u$
  - 对称: $u \sim v \Rightarrow v \sim u$
  - 传递: $u \sim v \wedge v \sim w \Rightarrow u \sim w$
- 连通分支: $G[V_i]$, $(i=1,\ldots,k)$
  - V_i: V关于顶点之间连通关系的一个等价类
  - 连通分支数: $p(G)$
- 连通图: $p(G)=1$;   非连通图(分离图): $p(G)>1$

连通、连通分支举例

- 判断下图的连通性，并求其连通分支数



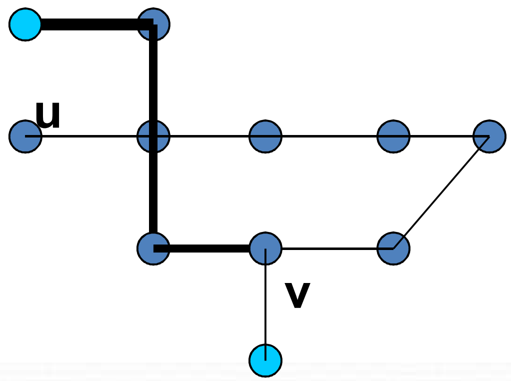
G_1



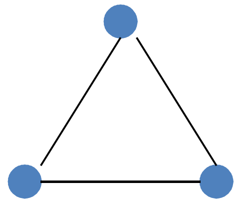
G_2

短程线(测地线)

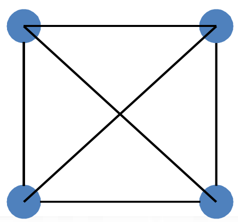
u,v之间长度最短的通路



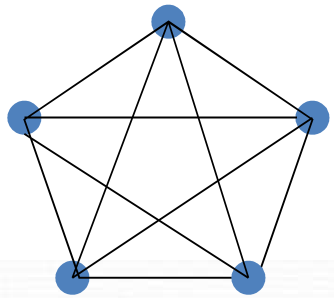
距离、直径



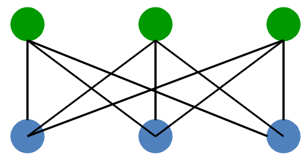
- 距离：$d_G(u,v) = u,v$之间短程线的长度(或∞)
- 直径：$d(G) = \max\{ d_G(u,v) \mid u,v \in V(G) \}$
- 例：$d(K_n)=1 (n\geq 2)$, $d(N_1)=0$, $d(N_n)=\infty\ (n\geq 2)$



K_4



K_5

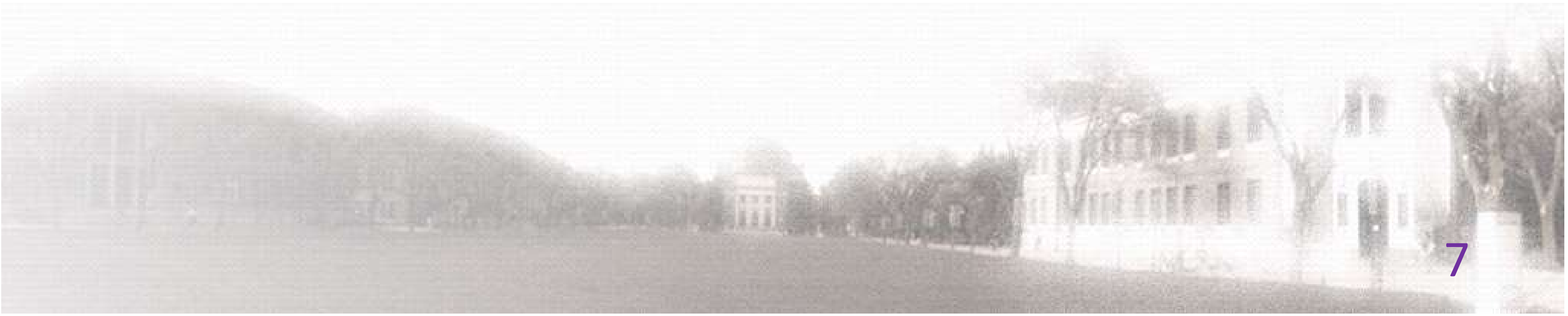


$K_{3,3}$

距离函数

- 非负性：$d(u,v) \geq 0$,

  $d(u,v)=0 \Leftrightarrow u=v$
- 对称性：　$d(u,v) = d(v,u)$
- Δ不等式：$d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$
- 任何函数只要满足上述三条性质，就可以当作距离函数使用



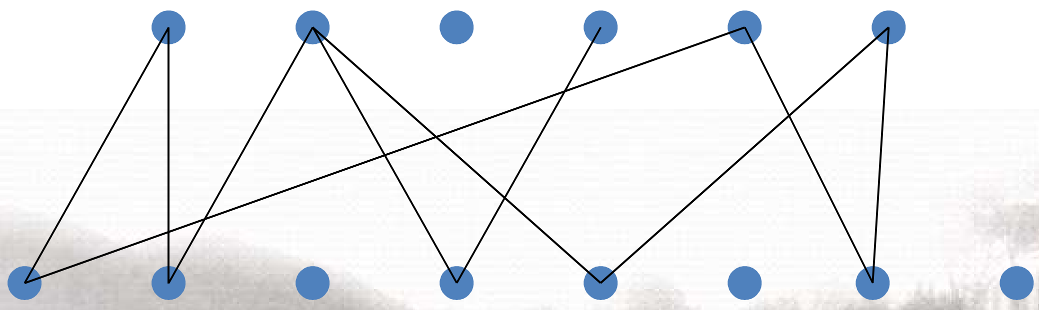
定理14.10

- 定理**14.10** G是二部图 $\Leftrightarrow$ G中无奇圈
- 证明: **(⇒)** 设$G=(V_1,V_2;E)$,

  设$C=v_1v_2\ldots v_{l-1}\,v_lv_1$是G中的任意圈, 设$v_1\in V_1$, 则

  $v_3,v_5,\ldots,v_{l-1}\in V_1$, $v_2,v_4,\ldots,v_l\in V_2$,

  于是$l=|C|$是偶数, C是偶圈.



定理14.10

- 证: (⇐) 设G连通(否则对每个连通分支进行讨论), 设$v \in V(G)$, 令

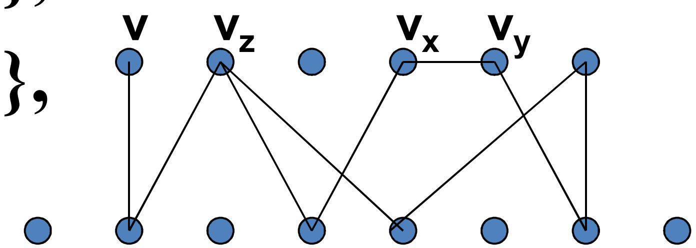
V_1={ $u \in V(G)$ | $d(u,v)$为偶数 },

V_2={ $u \in V(G)$ | $d(u,v)$为奇数 },

则 $V_1 \cup V_2 = V(G)$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.

下证 $E(G) \subseteq V_1 \& V_2$.

(反证)若存在$e=(v_x,v_y)$, $v_x,v_y \in V_1$, 设Γ_{vx}和Γ_{vy}是v到v_x和v_y的短程线. $|\Gamma_{vx}|$和$|\Gamma_{vy}|$都是偶数.设v_z是Γ_{vx}与Γ_{vy}的最后一个公共点, 若$v_z \in V_1$, 则$|\Gamma_{zx}|$和$|\Gamma_{zy}|$都是偶数;若$v_z \in V_2$, 则$|\Gamma_{zx}|$和$|\Gamma_{zy}|$都是奇数. 于是$\Gamma_{zx} \cup (v_x,v_y) \cup \Gamma_{zy}$是G中奇圈, 矛盾!



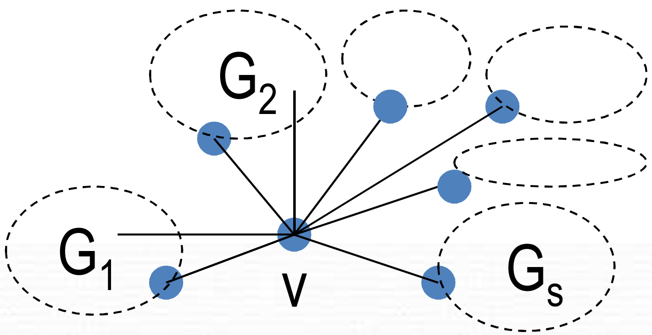
定理

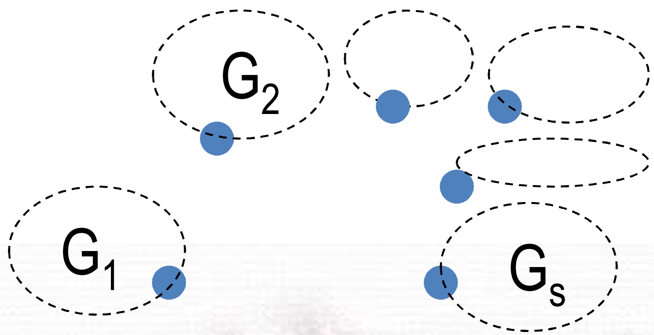
定理　若无向图**G**是连通的, 则**G**的边数**m≥n-1**

证明: (对**n**归纳) 不妨设**G**是简单图.

(1) G=N$_1$: n=1, m=0. 

(2) 设**n≤k**时命题成立,下证**n=k+1**时也成立.



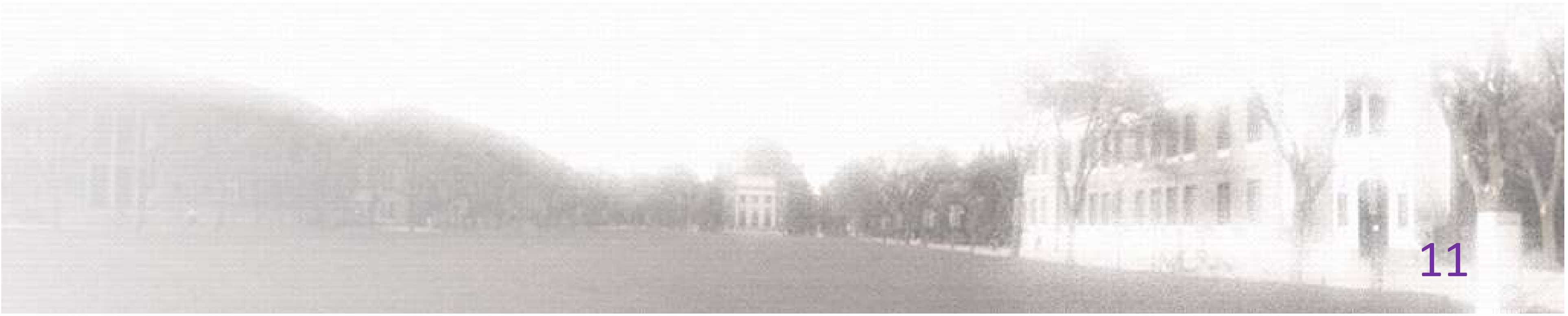


定理证明

- $\forall v \in V(G)$, 设$p(G-v)=s$, 则$d_G(v) \geq s$.

  对$G-v$的连通分支$G_1, G_2, \ldots, G_s$使用归纳假设,设
  $|V(G_i)|=n_i$, $|E(G_i)|=m_i$,则

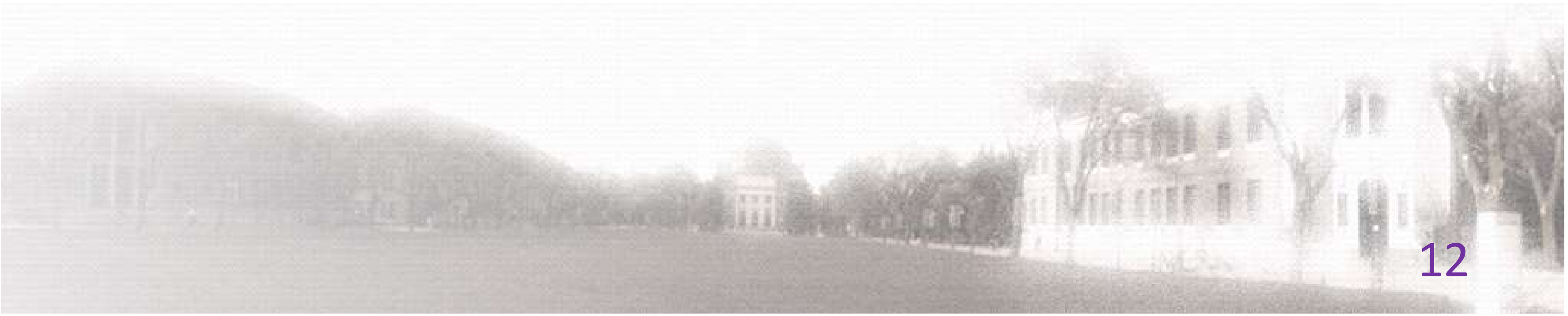
$$
\begin{aligned}
m &= m_1+m_2+\ldots+m_s+d_G(v) \\
&\geq (n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_s-1)+s \\
&= n_1+n_2+\ldots+n_s = n-1. \quad \#
\end{aligned}
$$



思考

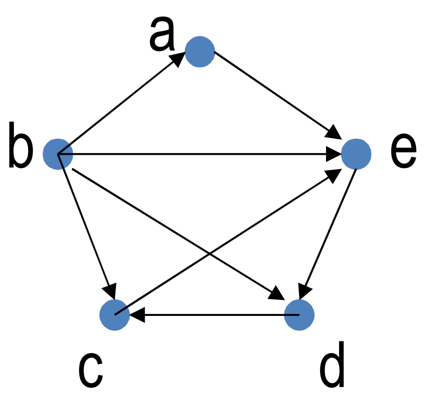
定理　若无向图G是连通的, 则G的边数$m \geq n-1$

若无向图G的边数满足$m \geq n-1$，则G是连通的？



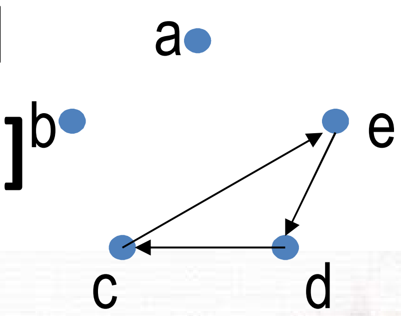
(双向)可达

- 有向图D=<V,E>， **u→v** ⇔ 从u到v有(有向)通路
  - 规定u→u，可达关系是自反, 传递的
- 有向图D=<V,E>，**u↔v** ⇔ u→v ∧ v→u
  - 双向可达关系是等价关系
  - 其等价类的**导出子图**称为强连通分支



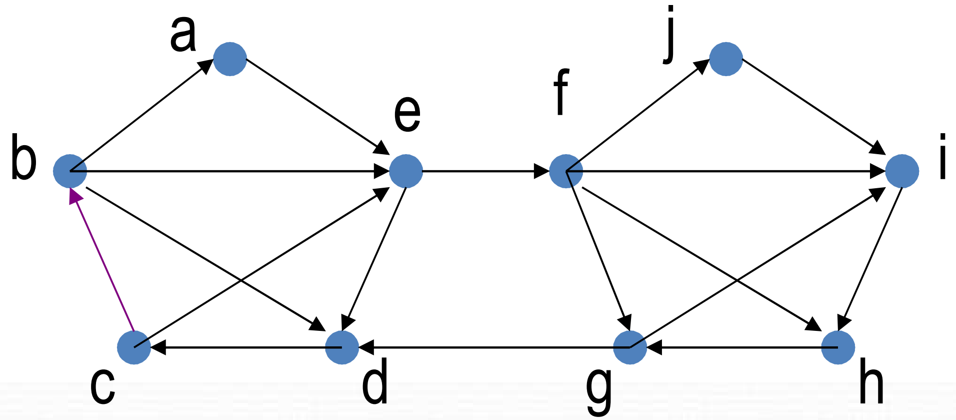
- 例: b→a→e→d→c, c→e→d, c↔e↔d

  强连通分支: **G[{a}],G[{b}]**,G[{c,e,d}]



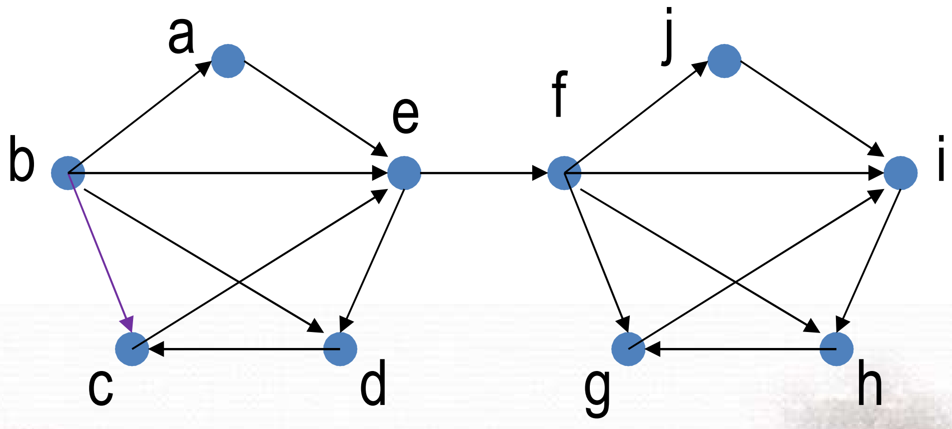
强连通

- 强连通(双向连通): 有向图的任何一对顶点之间都双向可达



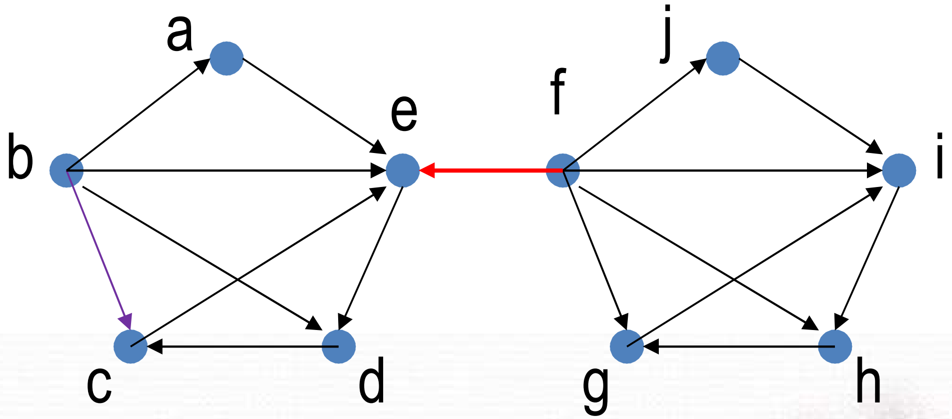
单向连通

- 有向图的任何一对顶点之间至少单向可达



弱连通

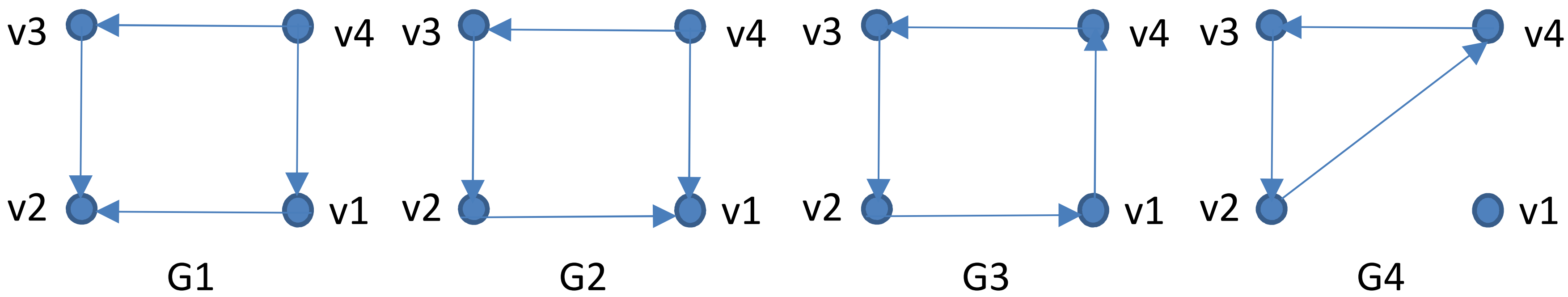
- 有向图的基图是连通图
- 弱连通关系是等价关系



Open Question Points: 10

Setting

判断下图连通性。

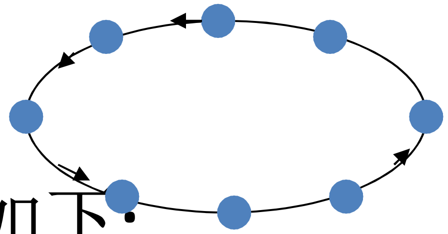


Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

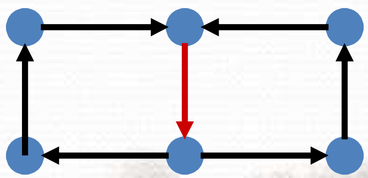
Answer

定理14.8

- 有向图D强连通 ⇔ D中有回路过每个顶点至少一次.



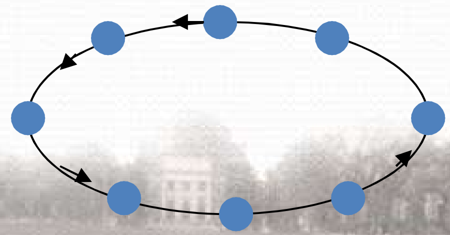
- 说明: 不一定有简单回路,反例如下:



定理14.8证明

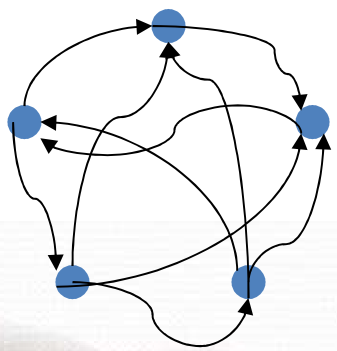
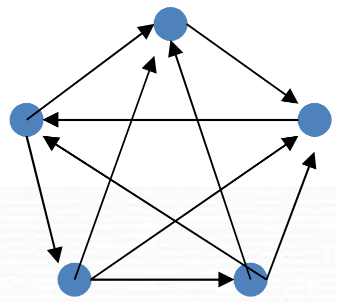
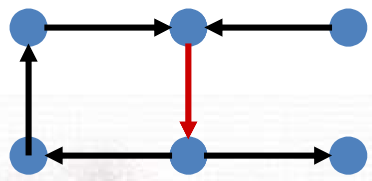
- 证明: (⇐) 显然

(⇒) 设V(D)={v_1,v_2,…,v_n}, 设$\Gamma_{i,j}$是从v_i到v_j的有向通路, 则$\Gamma_{1,2}+\Gamma_{2,3}+\ldots+\Gamma_{n-1,n}+\Gamma_{n,1}$是过每个顶点至少一次的回路. #

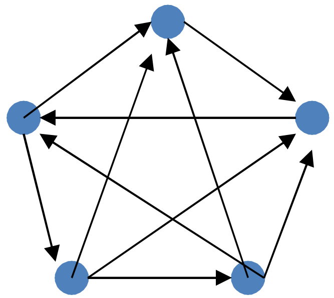


定理14.9

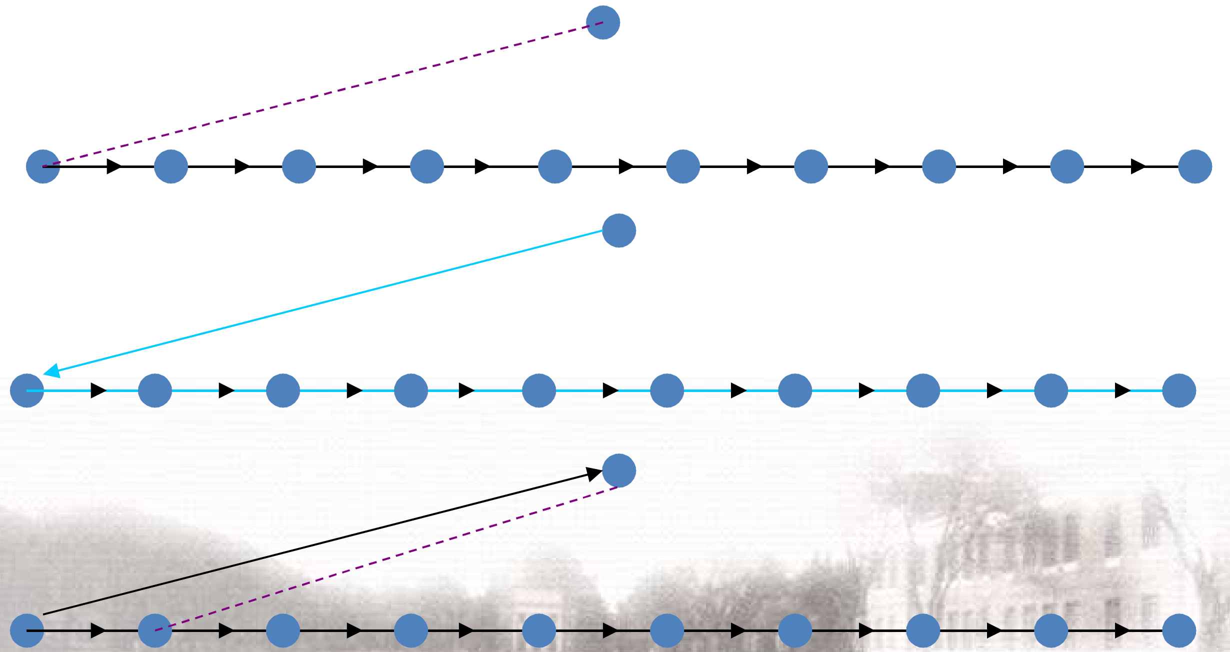
- 有向图D单向连通 ⇔ D中有通路过每个顶点至少一次. #
- 说明: 不一定有简单通路,反例如下:

命题

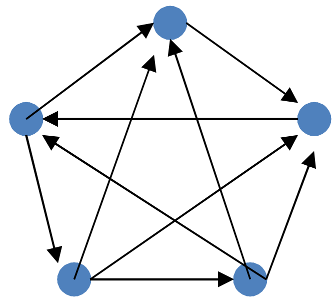


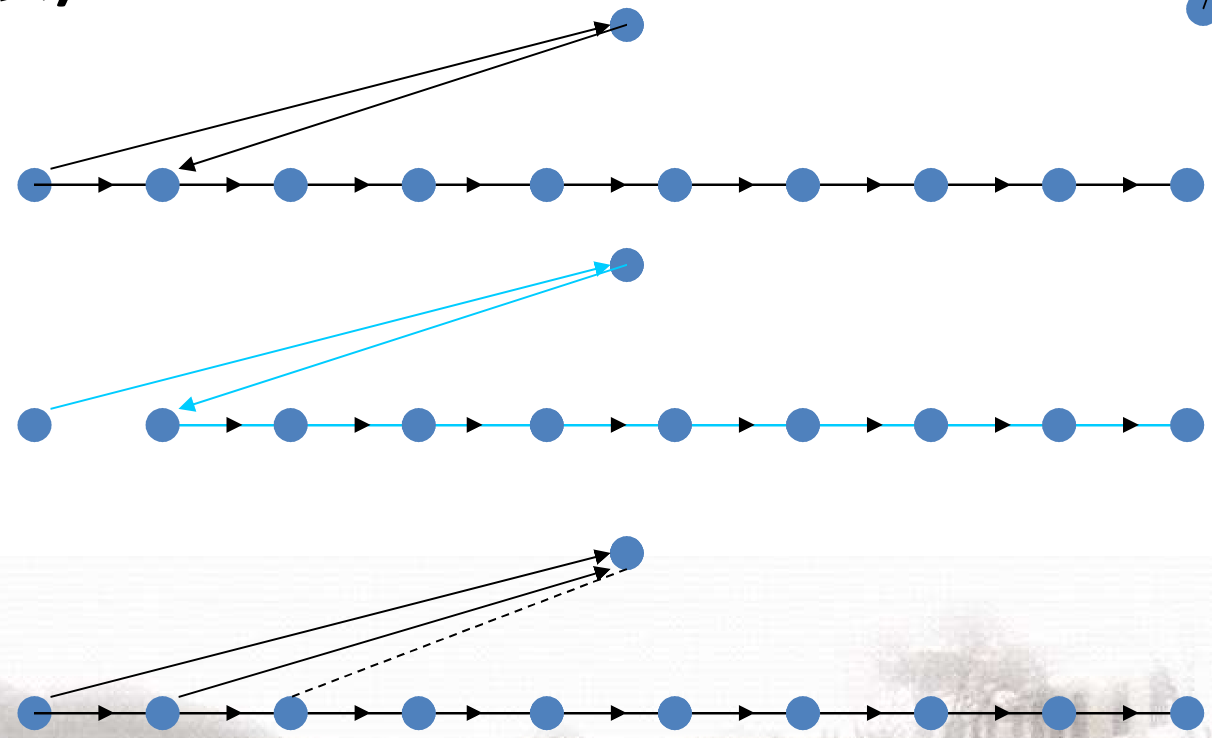
- 竞赛图一定有初级通路(路径)过每个顶点恰好一次（单项连通）
- 证明:



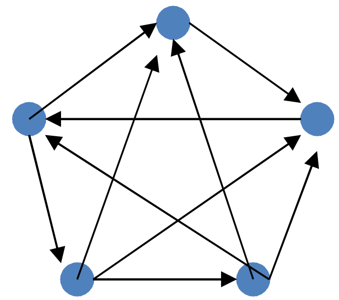
命题证明

- 证明(续):

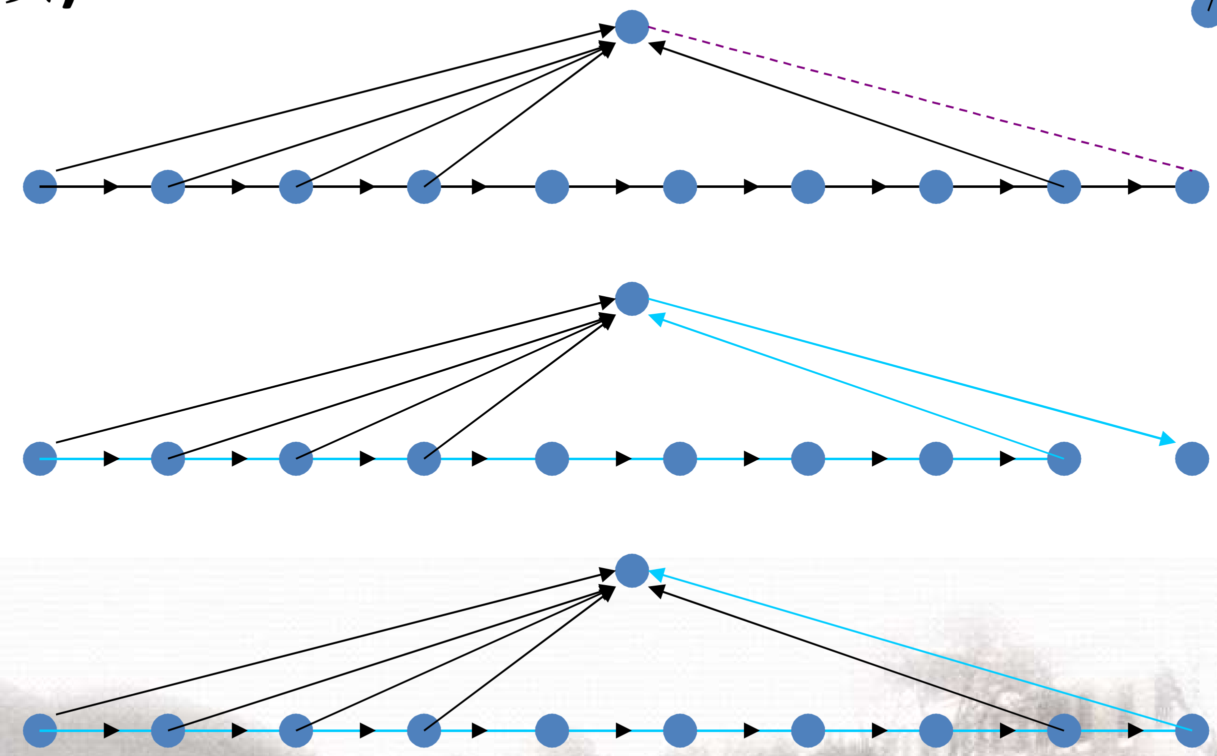




命题证明



- 证明(续):



Open Question Points: 10

Setting

设有向图D是单向连通的，但不是强连通图。在D中至少加几条边可以使得所得的新图成为强连通图?

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

有向图的连通分支

- 强连通分支: 极大强连通子图
- 单向连通分支: 极大单向连通子图
- 弱连通分支: 极大弱连通子图

在有向图D=<V,E>中，设D’是D的子图，如果:

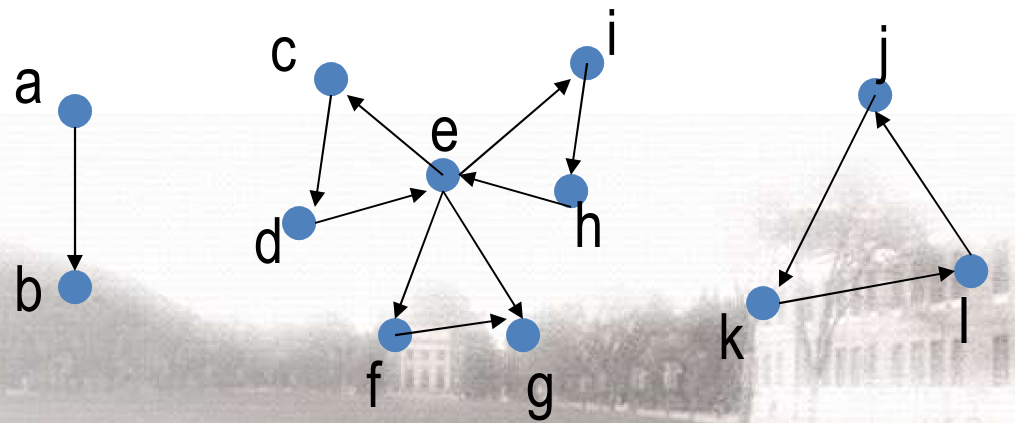
1）D’是强连通的（单向连通的、弱连通的）；

2）$\forall D'' \subseteq D$, 若$D' \subset D''$, 则D’’不是强连通的（单项连通的、弱连通的），

则称D’是D的强连通分支（单向连通分支、弱连通分支）。

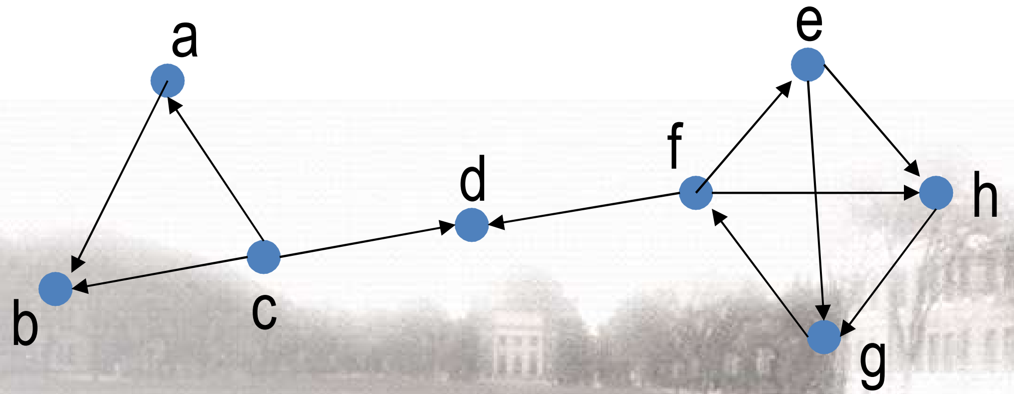
有向图的连通分支

- 强连通分支: **G[{a}], G[{b}], G[{c,d,e,h,i}], G[{f}],G[{g}],G[{j,k,l}]**
- 单向连通分支: **G[{a,b}],G[{c,d,e,h,i,f,g}], G[{j,k,l}]**
- **(弱)**连通分支: 与单向连通分支相同



有向图的连通分支

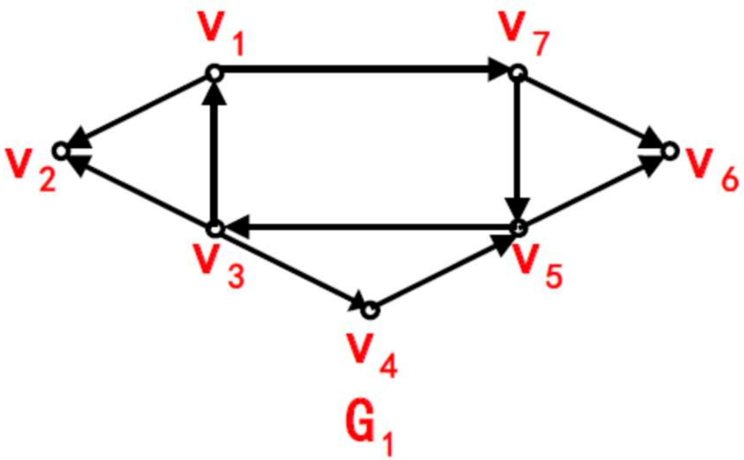
- 强连通分支: **G[{a}], G[{b}], G[{c}], G[{d}], G[{e,f,g,h}]**
- 单向连通分支: **G[{a,b,c}], G[{c,d}], G[{d,e,f,g,h}]**
- **(**弱**)**连通分支: **G**

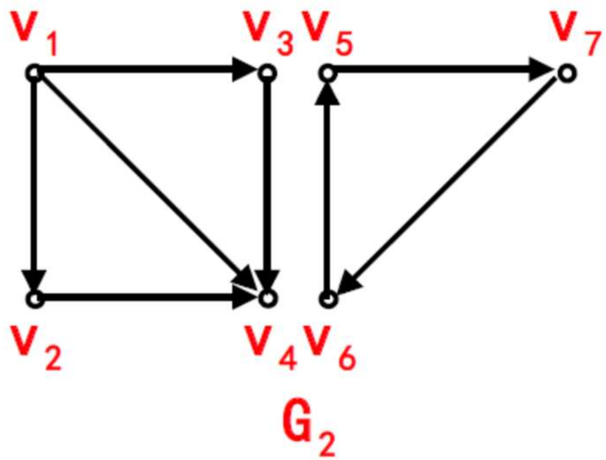


Open Question Points: 10

Setting

求下面两个图所有的强、单向、弱连通分支





Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

连通分支

- 在有向图**G = <V, E>** 中，它的每一个结点位于且仅位于一个强（弱）连通分支中。
- 在有向图**G = <V, E>** 中，它的每一个结点至少位于一个单向连通分支中。
- 在有向图**G = <V, E>** 中，它的每一条边至多在一个强连通分支中；至少在一个单向连通分支中；在且仅在一个弱连通分支中。

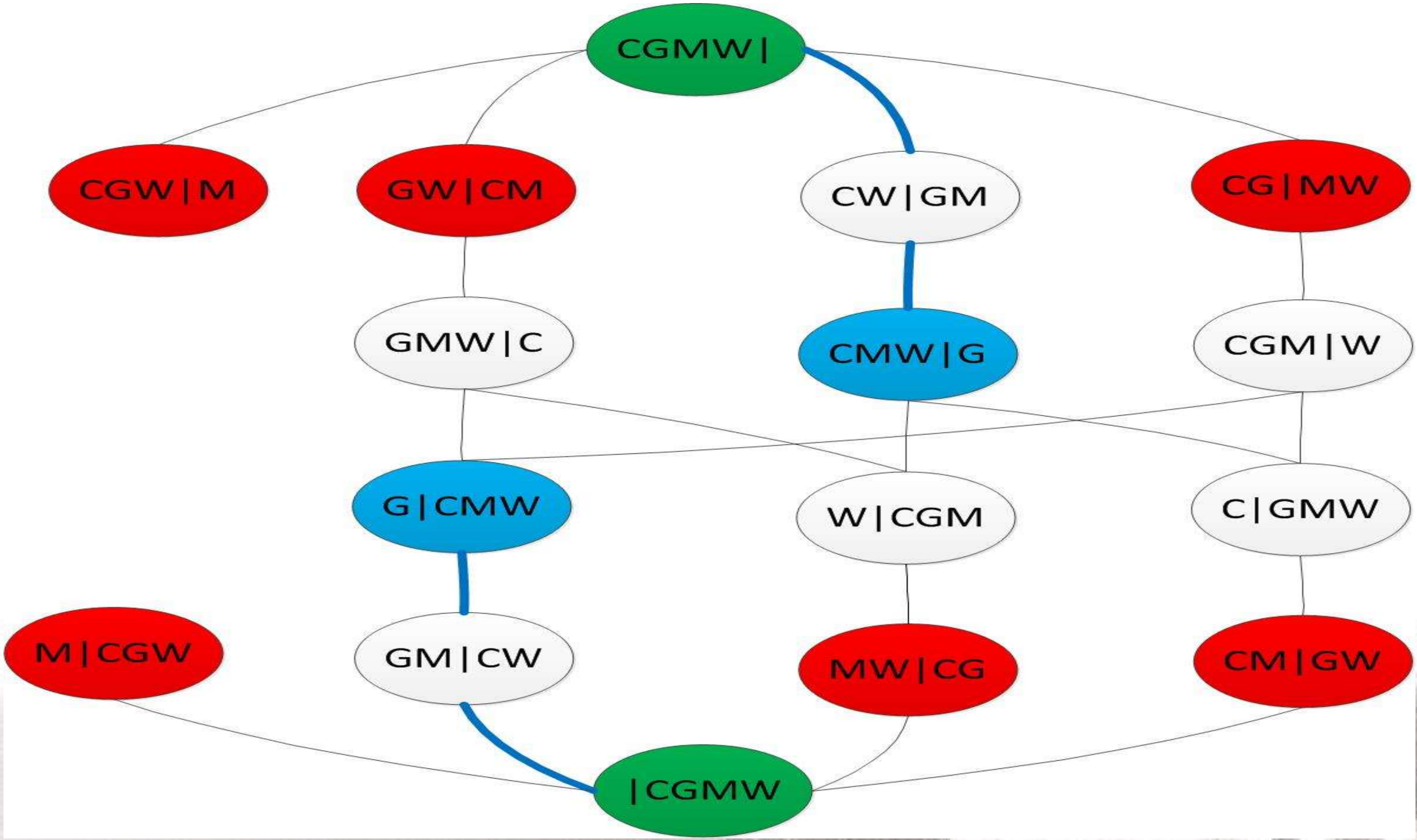
应用：过河问题

- 一个人带着一只狼、一只羊、一棵白菜要过河，小船一次只能容下一个人和一样动植物。人不在场的时候，狼要吃掉羊、羊要吃掉白菜。问应当如何渡河？

过河问题

- 狼=W， 羊=G， 白菜=C， 人=M
- 共16种状态: (CGMW|) , (CGM|W) , (CGW|M), (CMW|G), (GMW|C) ,(CG|MW), (CM|GW), (CW|GM), (GM|CW), (GW|CM), (MW|CG), (C|GMW), (G|CMW), (M|CGW), (W|CGM), (|CGMW)

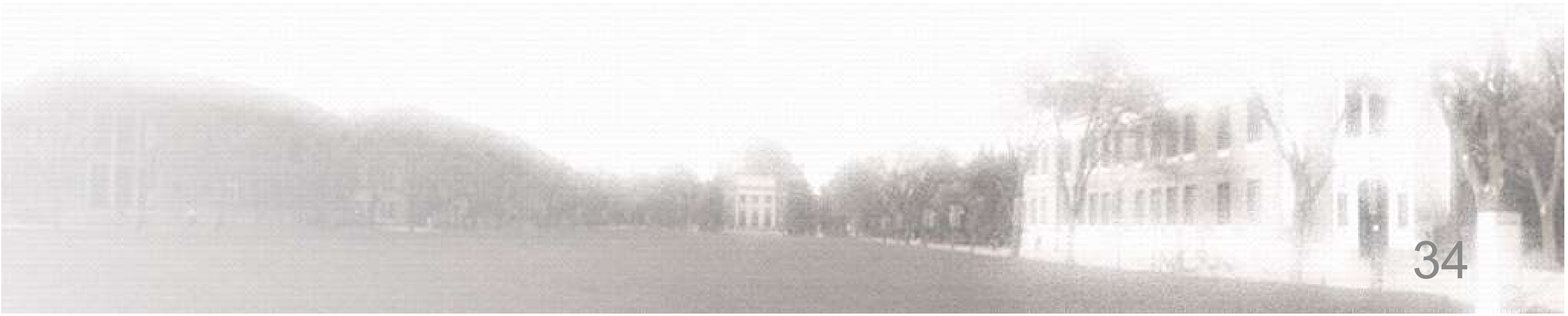
用图来表示问题



CGMW|
CGW|M
GW|CM
CW|GM
CG|MW
GMW|C
CMW|G
CGM|W
G|CMW
W|CGM
C|GMW
M|CGW
GM|CW
MW|CG
CM|GW
|CGMW

应用：均分问题

- 作业题：有3 个没有刻度的桶a 、b 和c ， 其容积分别为8 升、5 升和3 升。假定桶a 装满了酒，现要把酒均分成两份。除3 个桶之外，没有任何其它测量工具，试问怎样均分？



小结

- 连通, 连通分支, 连通分支数
- 二部图 ⇔ 无奇圈
- 强连通(双向),单向连通,弱连通