单元1.4 无向图的连通度

第14章 图的基本概念

14.3 图的连通性

参考书目：戴一奇等，《图论与代数结构》，清华大学出版社

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

网络鲁棒性量化分析

sina 新闻中心 综合

日本地震 震断全球供应链?

微博 微信 QQ空间

原标题：日本地震 震断全球供应链?

这是4月16日在日本熊本县益城拍摄的在地震中遭到破坏的房屋。新华

【深圳商报讯】日前，多起余震在位于日本南端的整个九州岛不断扩散。此前，一场里氏7.3级的地震导致41人丧生，并让该地区的高科技制造业陷入停顿。

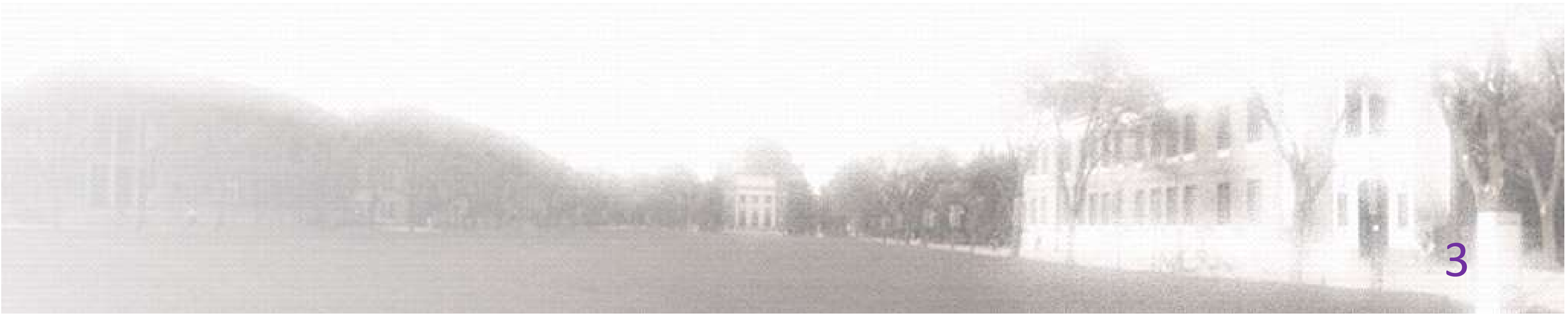
除了已确认的死亡情况外，还有逾1000人受伤，18.4万人被疏散至住房以外。长206米、1970年通车的单孔大桥阿苏大桥崩塌，坠入了下方黑川深邃的峡谷中，此次地震的破坏力可见一斑。

靠近震中的熊本市拥有庞大的半导体工业，索尼和本田等制造商也在该地区建有工厂。地震令各企业慌忙确认工厂受到的损害，引发了全球供应链被打断的担忧。九州岛配件供应短缺迫使丰田在全日本的汽车工厂启动了临时的停产措施。

上周四发生首次地震后，索尼暂停了熊本工厂的图像传感器生产，这种传感器被用于苹果的和其他智能手机的摄像头上。上周日，位于附近长崎和大分的另外两处图像传感器工厂的生产线已恢复运行。对于是否能通过把生产转移至其他工厂来弥补产能方面的损失，索尼拒绝置评。

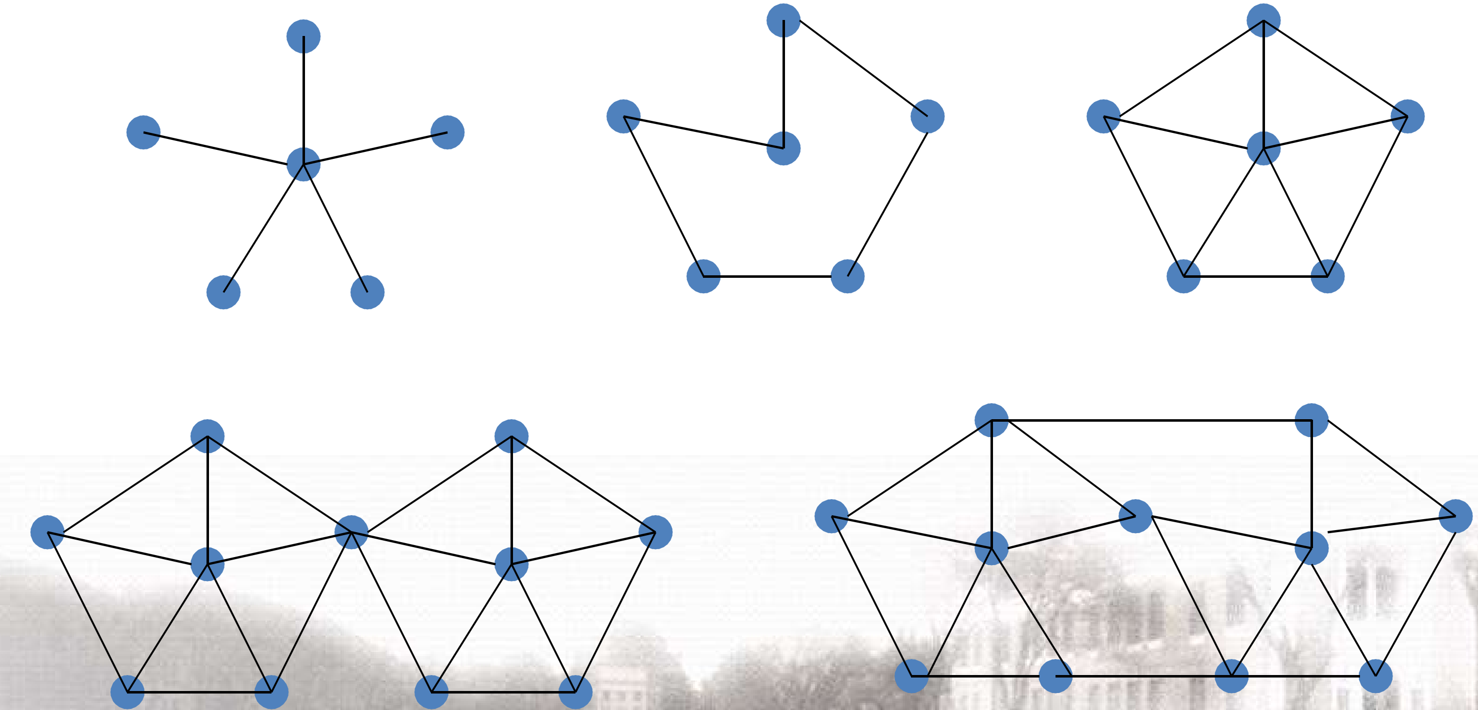
内容提要

- 点割集、点连通度
- 边割集、边连通度



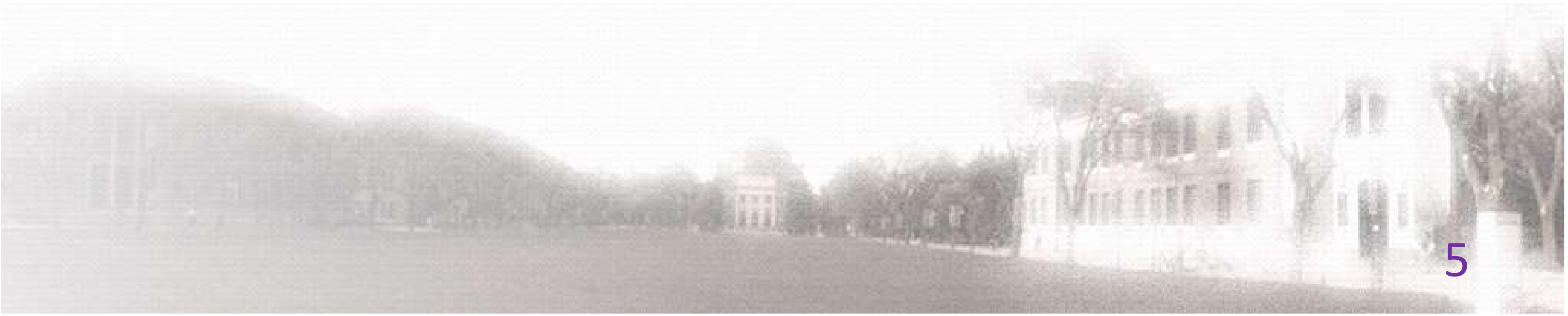
如何定量比较连通性?

- 如何定义一个图比另一个图的连通性更好?



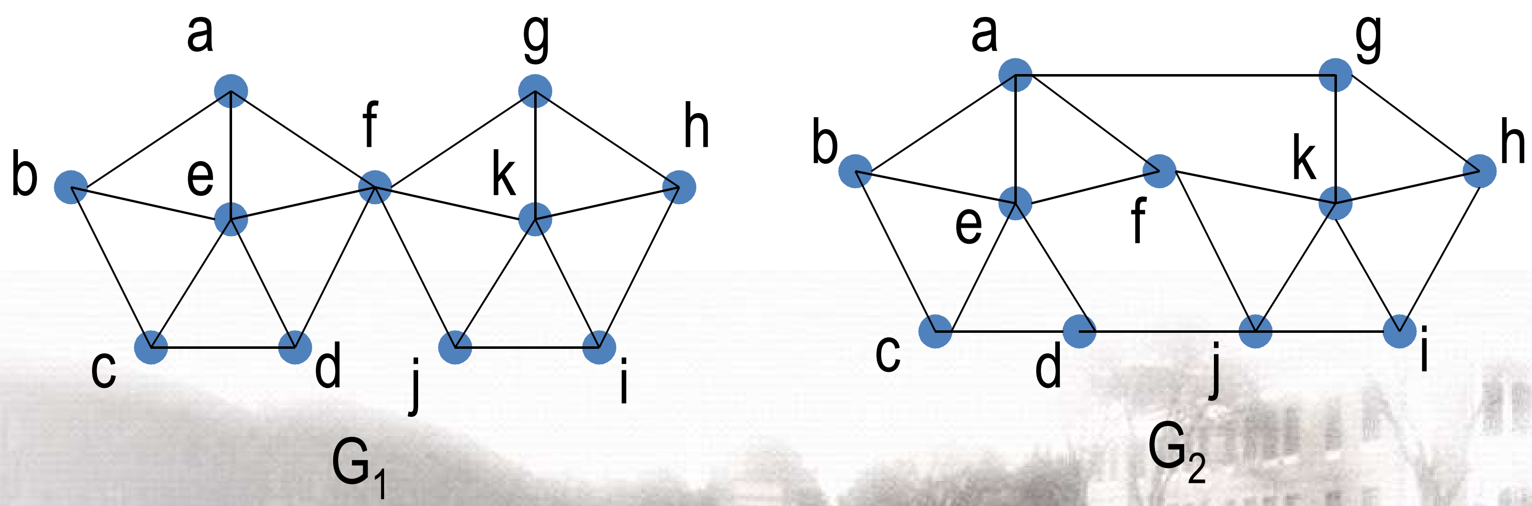
点连通度、边连通度

- 为了破坏连通性,至少需要删除多少个顶点?
- 为了破坏连通性,至少需要删除多少条边?
- “破坏”连通性:
  - p(G-V’) > p(G)
  - p(G-E’) > p(G)
  - 连通分支数增加



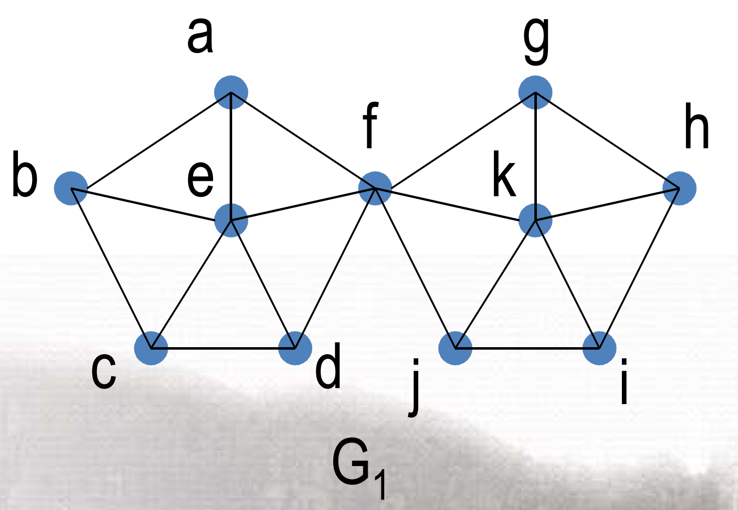
点割集

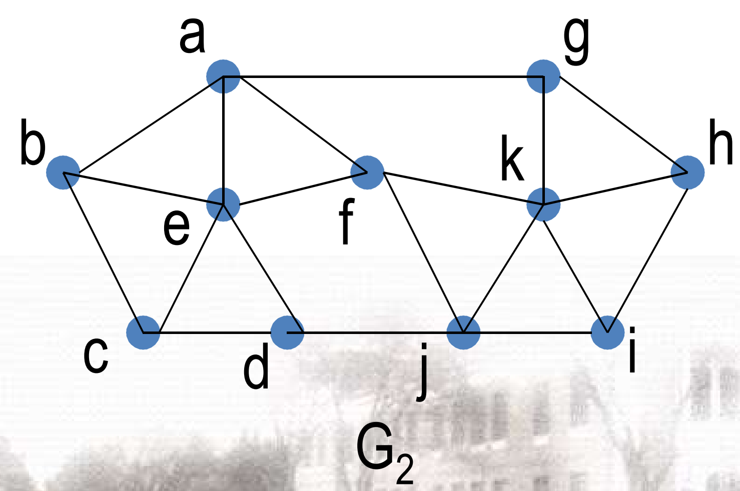
- 点割集： **G=<V,E>, ∅≠V'⊂V, (1) p(G-V')>p(G);**
  (2) ∀ V''⊂V', p(G-V'')=p(G) (极小性条件)
- 例 **G_1: {f},{a,e,c},{g,k,j}, {b,e,f,k,h}**不是
  G_2: {f}不是**,{a,e,c},{g,k,j},{b,e,f,k,h}**



割点

- v是割点 ⇔ {v}是割集
- 例: G_1中f是割点, G_2中无割点



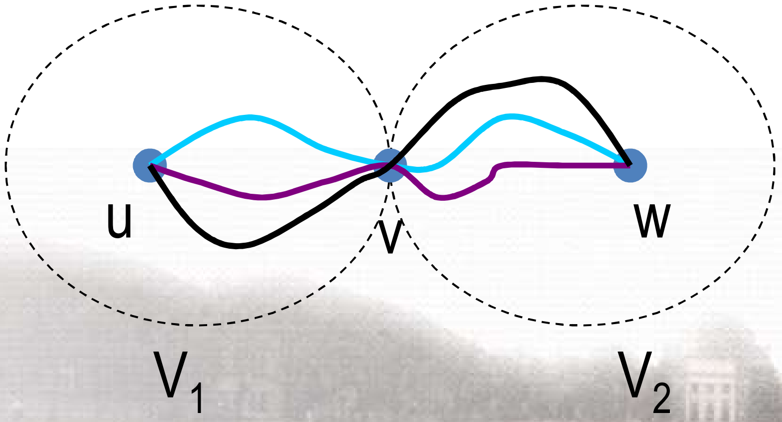


割点的充分必要条件

- 定理:

  无向连通图G中顶点v是割点

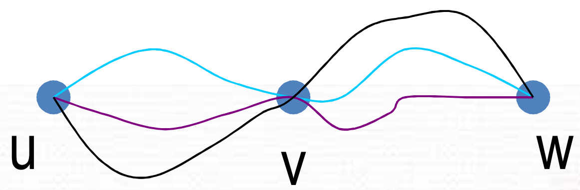
  ⇔ 可把V(G)-{v}划分成V_1与V_2, 使得从V_1中任意顶点u到V_2中任意顶点w的路径都要经过v.   #



割点的充分必要条件

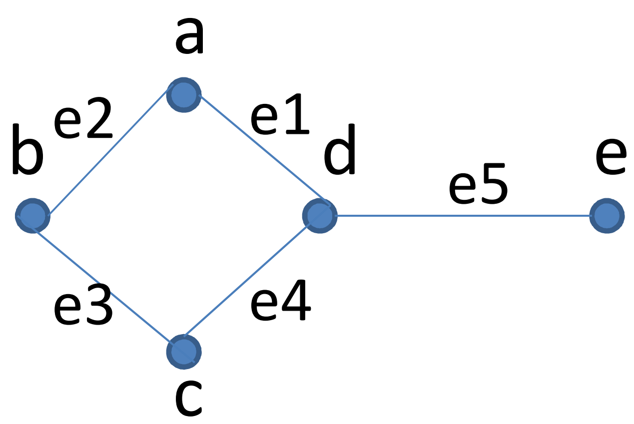
- 推论: 无向连通图G中顶点v是割点

⇔ 存在与v不同的顶点u和w,使得从顶点u到w的路径都要经过v. #



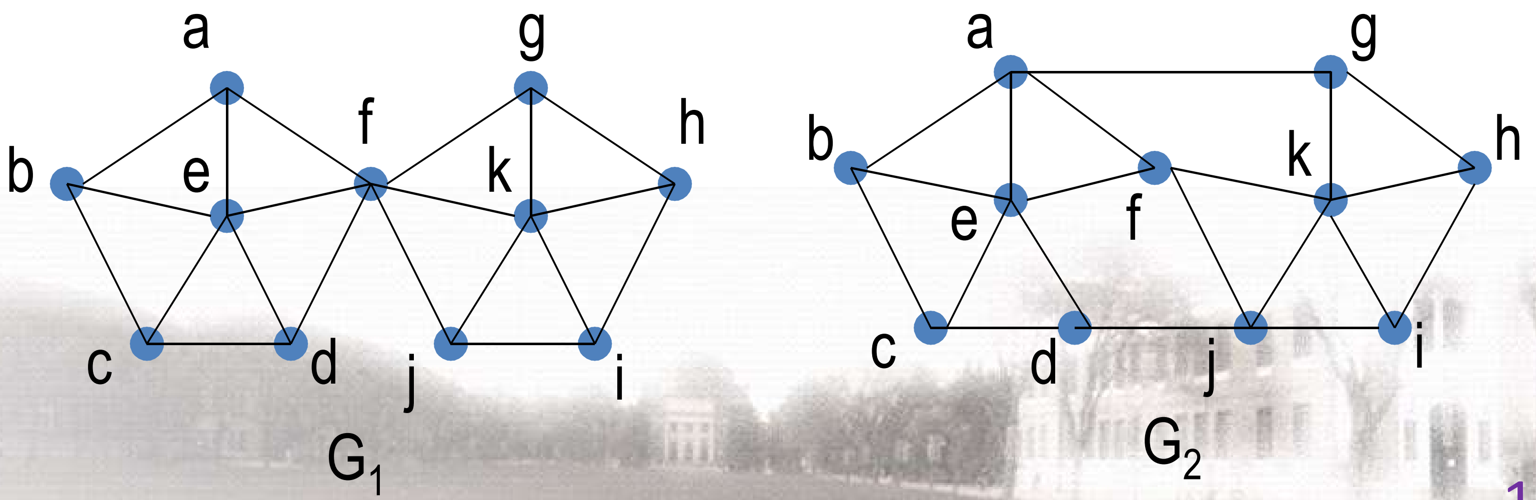
举例

- 求下图的全部点割集，并指出其中的割点。



边割集

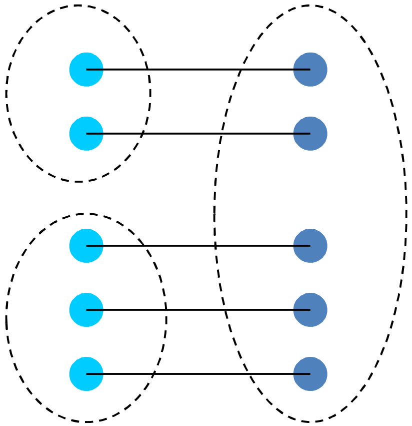
- 边割集： $G=\langle V,E\rangle$, $\varnothing\neq E'\subset E$, (1) $p(G-E')>p(G)$;
  (2) $\forall E''\subset E'$, $p(G-E'')=p(G)$ （极小性条件）
- 例： G_1: {(a,f),(e,f),(d,f)}, {(f,g),(f,k),(j,k),(j,i)},
  {(c,d)}不是， {(a,f),(e,f),(d,f),(f,g),(f,k),(f,j)}不是
  G_2: {(b,a),(b,e),(b,c)}



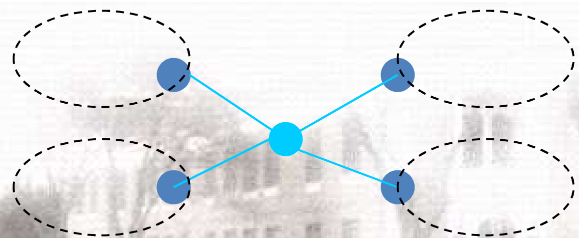
引理1

- 设E’是边割集,则p(G-E’)=p(G)+1.
- 证: 如果p(G-E’)>p(G)+1,

则E’不是边割集, 因为不满足定义中的极小性.　　#

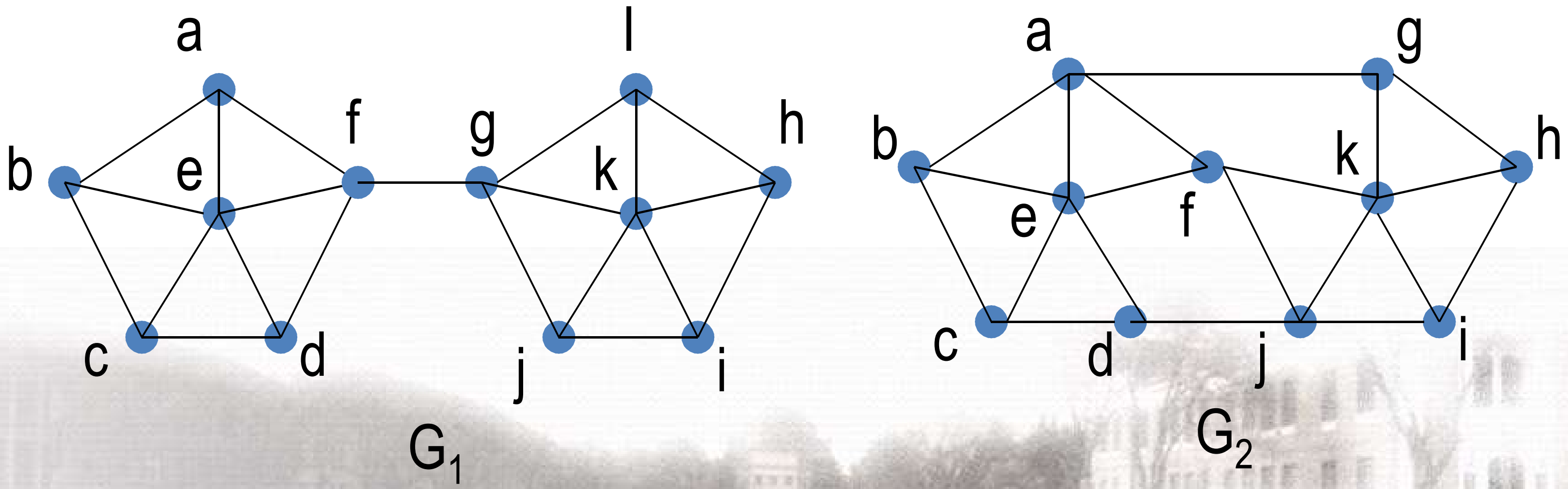


- 注: 点割集无此性质



割边 (桥)

- (u,v)是割边 ⇔ {(u,v)}是边割集
- 例: G_1中(f,g)是桥, G_2中无桥

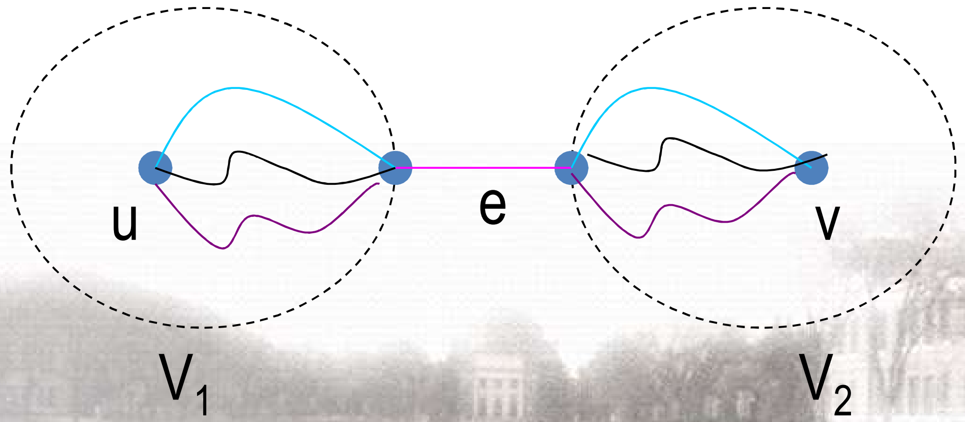


桥的充分必要条件

- 定理: 无向连通图G中边e是桥

⇔ G的任何圈都不经过e

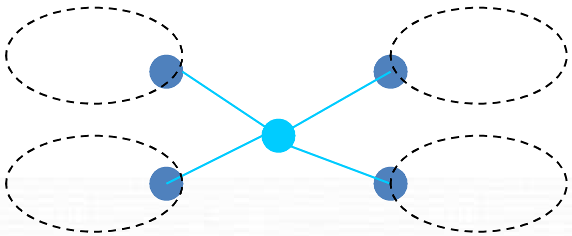
⇔ 可把V(G)划分成V_1与V_2, 使得从V_1中 任意顶点u到V_2中任意顶点v的路径都要经过e. #



扇形割集

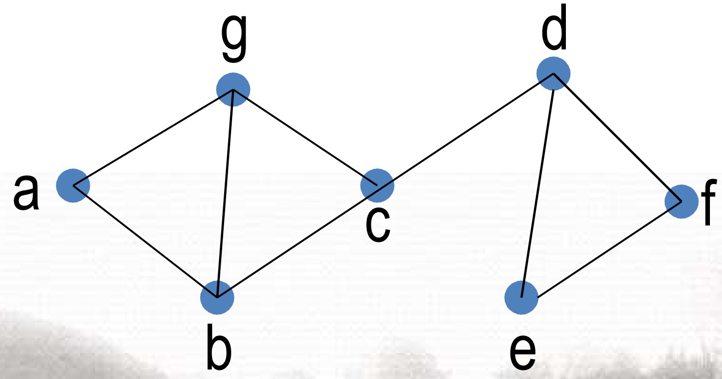
- **E'**为扇形割集**:** 边割集**E'**$\subseteq$ **v**的关联集I_G**(v)**

- I_G**(v)**不一定是边割集**(**不一定极小**)**
- I_G**(v)**是边割集 $\Leftrightarrow$ **v**不是割点



扇形割集举例

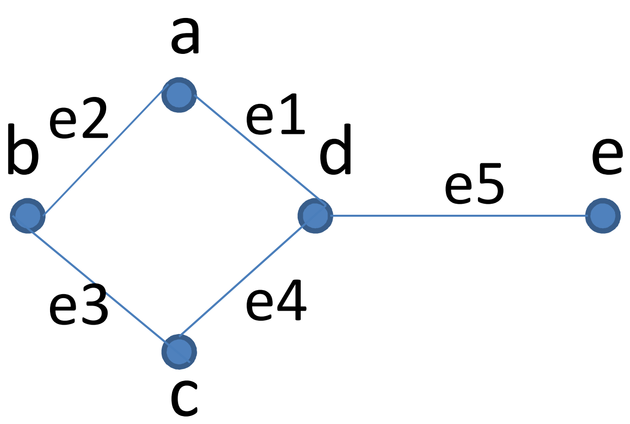
- **{(a,g),(a,b)},{(g,a),(g,b),(g,c)},**
- **{(c,d)}, {(d,e),(d,f)}**
- **{(d,c),(d,e),(d,f)}**不是



Open Question Points: 10

Setting

求下图的全部边割集，并指出其中的桥。



Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

点连通度

- G是无向连通非完全图,

  $\kappa(G) = \min\{\ |V'|\ \mid V'$是G的点割集$\ \}$

- 规定: $\kappa(K_n) = n-1$

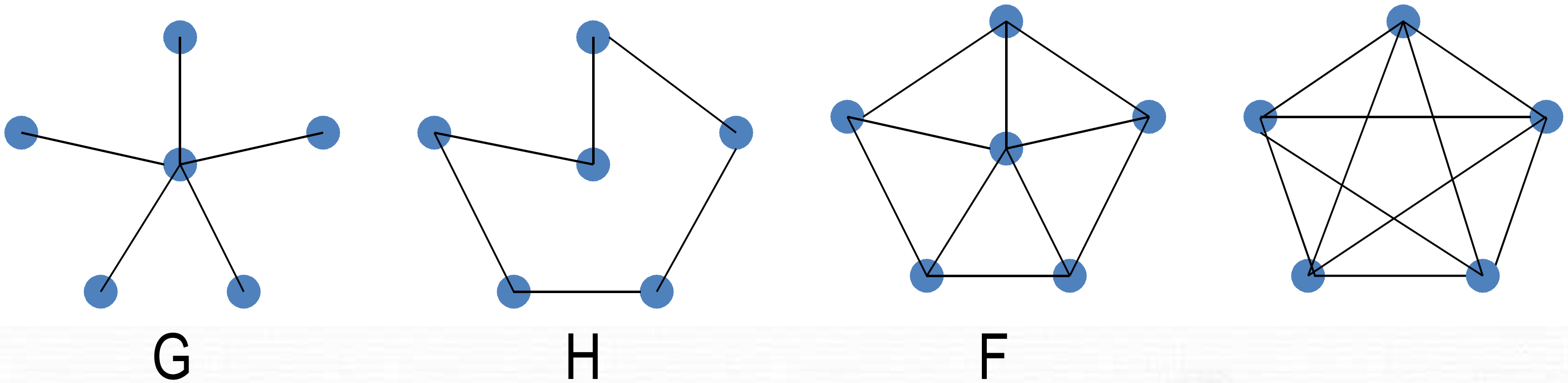
  非完全图点连通度最多n-2

  G非连通: $\kappa(G)=0$

  (平凡图N_1连通, 但$\kappa(N_1) = \kappa(K_1) = 0$)

点连通度举例

- $\kappa(G)=1$, $\kappa(H)=2$, $\kappa(F)=3$, $\kappa(K_5)=4$

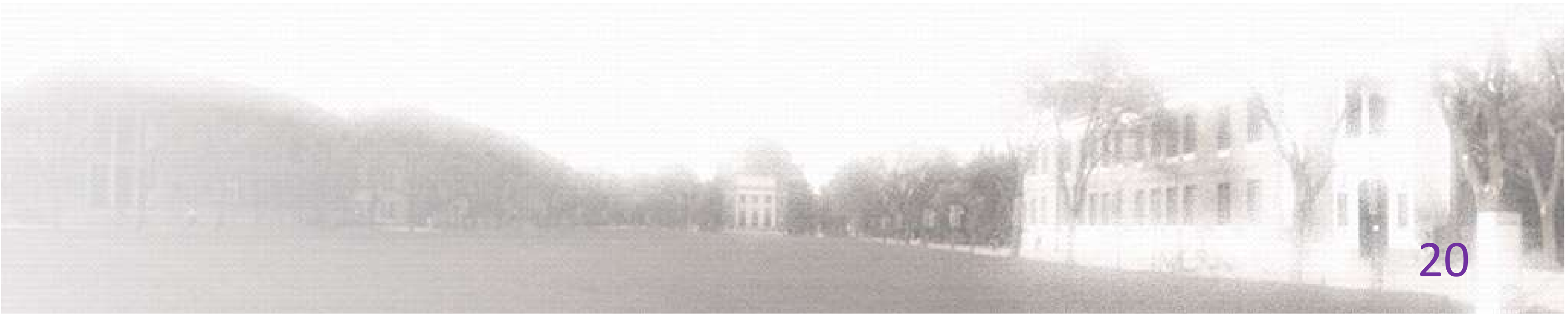


边连通度

- **G**是无向连通图**,**

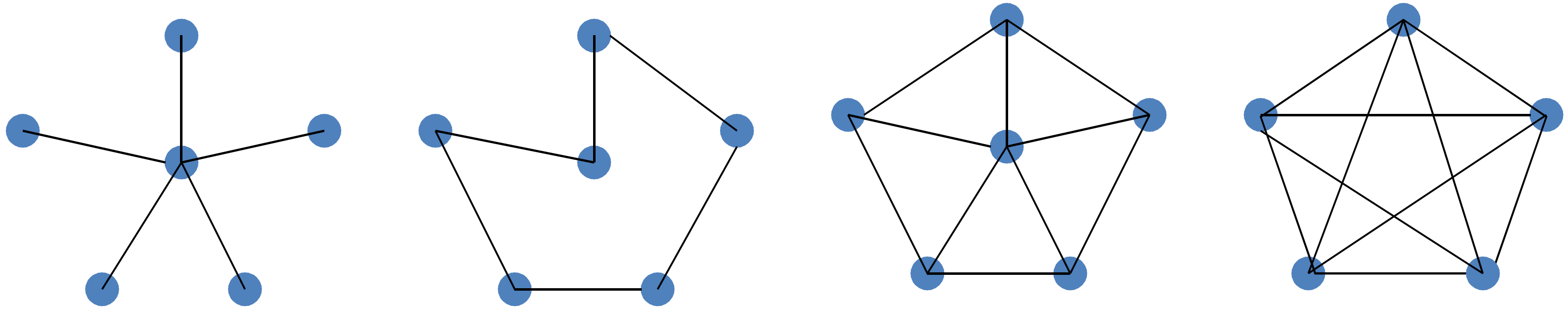
  λ**(G) = min{ |E'| | E'**是**G**的边割集 **}**

- 规定**: G**非连通**:** λ**(G)=0**



边连通度举例

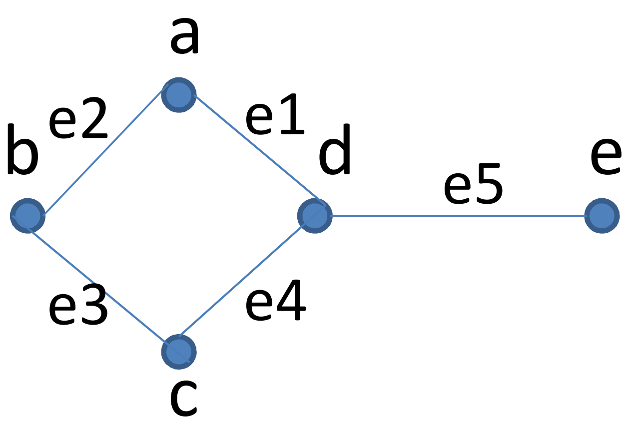
- $\lambda(G)=1, \lambda(H)=2, \lambda(F)=3, \lambda(K_5)=4$



G H F

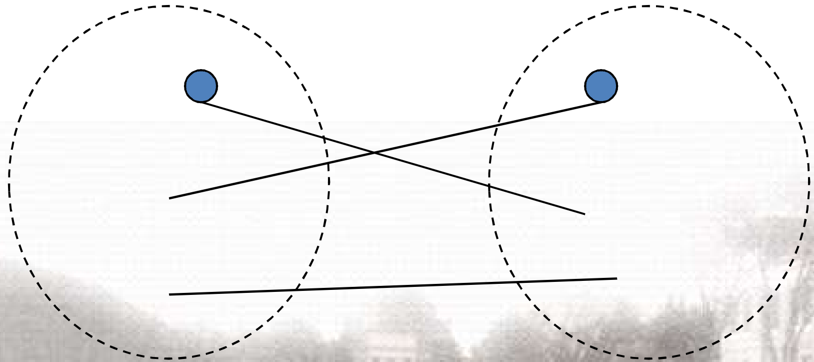
举例

- 求下图的点连通度和边连通度。



引理2

- 设**E'**是非完全连通图**G**的最小边割集，
  G-E'的两个(引理1)连通分支是G_1,G_2,
  则存在$u \in V(G_1)$, $v \in V(G_2)$, 使得$(u,v) \notin E(G)$.



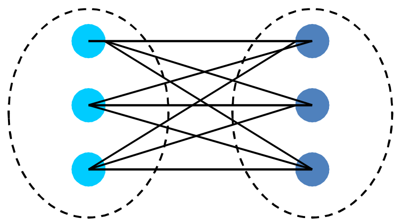
引理2证明

- 证: (反证) 否则

  $\lambda(G) = |E'| = |V(G_1)|\times|V(G_2)|$

  $\geq |V(G_1)|+|V(G_2)|-1=n-1$,

  与G非完全图相矛盾! #



- $a\geq 1 \wedge b\geq 1 \Rightarrow (a-1)(b-1)\geq 0$

  $\Leftrightarrow ab-a-b+1\geq 0 \Leftrightarrow ab\geq a+b-1.$

k-(边)连通图

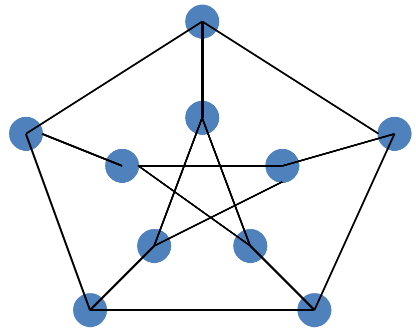
- **k**-连通图： κ(**G**) $\geq$ **k**
- **K**-边连通图：λ(**G**) $\geq$ **k**
- 例：彼得森图：κ**=3**, λ**=3**

  它是**1-**连通图**, 2-**连通图**,3-**连通图**,**

  但不是**4-**连通图

  它是**1-**边连通图**, 2-**边连通图**, 3-**边连通图**,**

  但不是**4-**边连通图

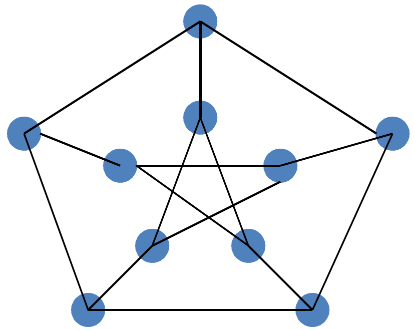


定理

- 定理：对3-正则图G,

$$\kappa(G) = \lambda(G).$$

- 彼得森图: $\kappa=3$, $\lambda=3$



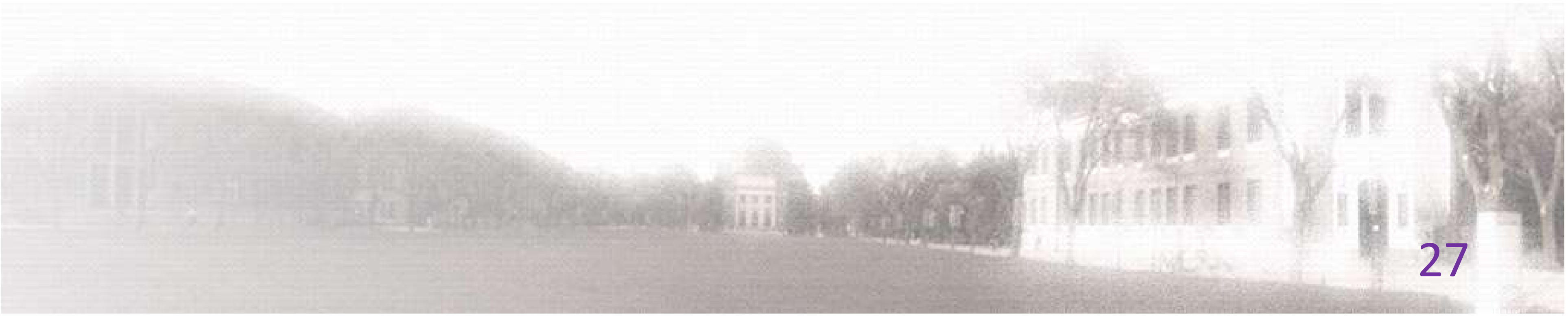
https://blog.csdn.net/mygodhome/article/details/6000896

Whitney定理

- 定理7.10(Whitney不等式): 任意G,

$$\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G).$$

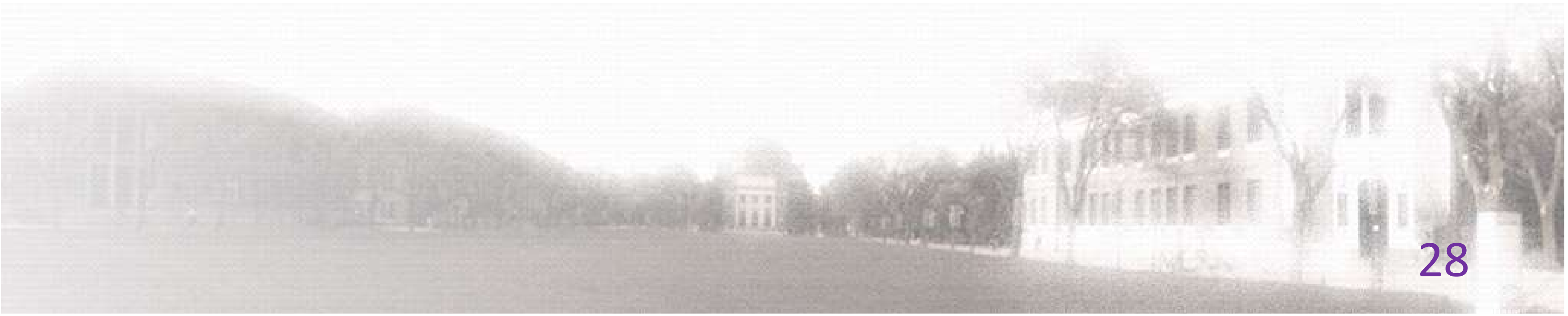
- 推论: k-连通图一定是k-边连通图. #



Whitney定理证明

- 目标: $\kappa \leq \lambda \leq \delta$.

- 证明: 不妨设**G**是 **3**阶以上 连通 非完全 简单图.
  (否则可直接验证结论成立).



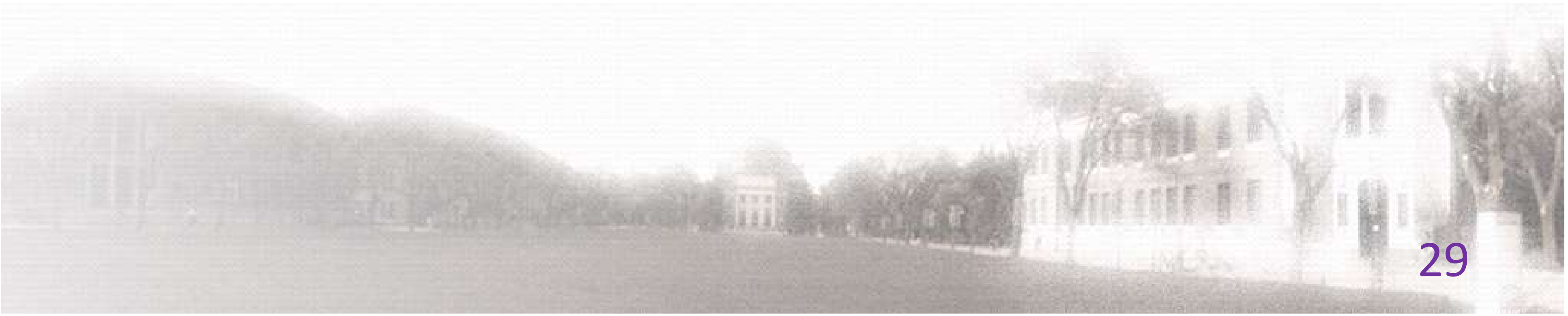
Whitney定理证明

- 第一部分: $\lambda \leq \delta$
- 证明: 设 $d_G(v) = \delta$.

  $I_G(v) = \{ (u,v) \mid (u,v) \in E(G) \}$

  则必有扇形边割集 $S \subseteq I_G(v)$,

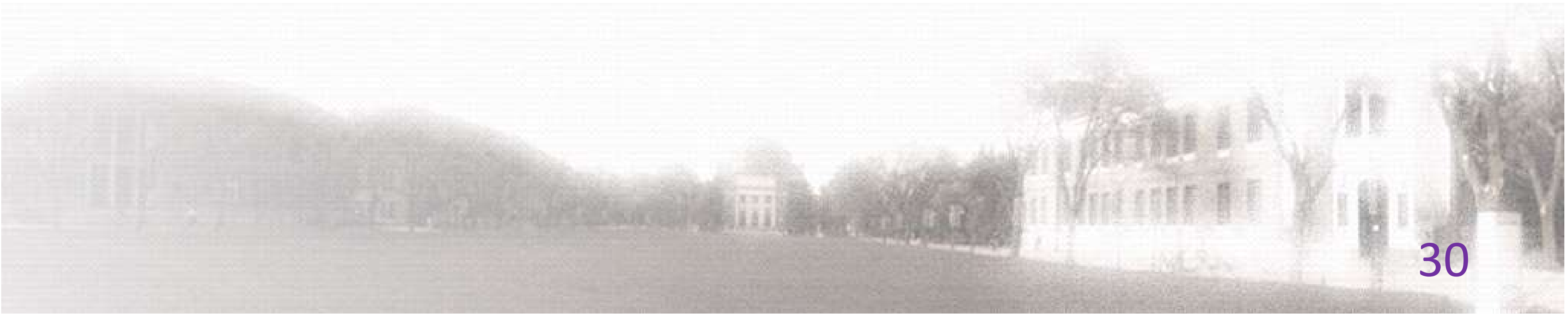
  所以, $\lambda \leq |S| \leq |I_G(v)| = \delta$.



Whitney定理证明

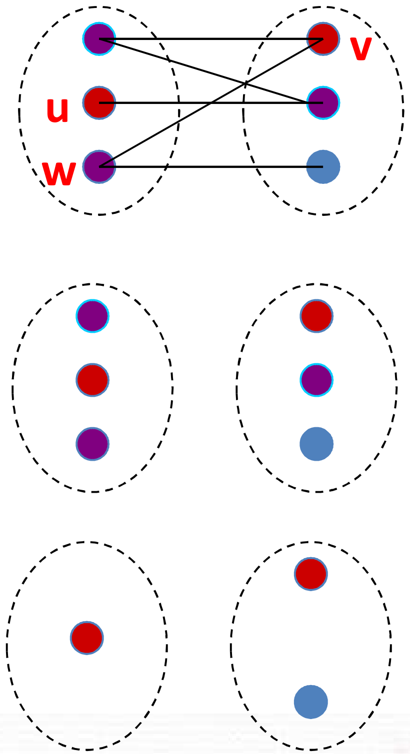
- 第二部分: $\kappa \le \lambda$

- 证明: 设边割集E'满足$|E'|=\lambda$.
  根据引理1和引理2,
  设$G-E'$的两个连通分支是G_1和G_2,
  设$u \in V(G_1)$,$v \in V(G_2)$,使得$(u,v) \notin E(G)$.



Whitney定理证明

- 如下构造V”：对任何e∈E’，
选择e的异于u,v的一个端点放入V”.
则 $u,v \in G-V'' \subseteq G-E' = G_1 \cup G_2$,
所以 V”中含有点割集V’.
故 $\kappa \le |V'| \le |V''| \le |E'| = \lambda$. #



Open Question Points: 10

Setting

1）已知无向图G是k-连通图，$k \geq 1$。能确定G的点连通度吗?

2）已知无向图G满足$\kappa(G) = \delta(G)$，试确定其边连通度$\lambda(G)$。

3）已知无向图G既有割点又有桥，试确定其点连通度及边连通度。由已知条件能确定G的最小度$\delta(G)$吗?

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

小结

- 点割集, 边割集, 点(边)连通度κ(λ);
- κ, λ, δ之间关系, **Whitney**定理 等
- 割点,桥的充要条件