单元1.5 图的矩阵表示

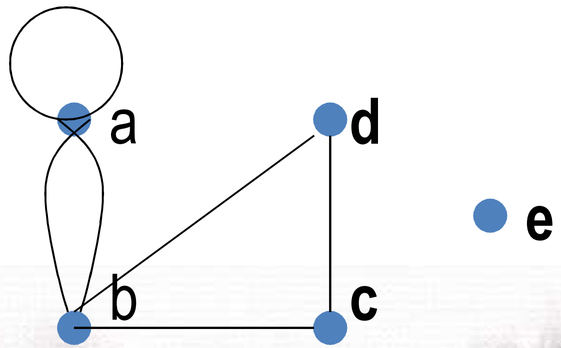
第14章 图的基本概念

14.4 图的矩阵表示

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

图的表示方法

- 集合：精确简练，但抽象不易理解
  G=<V,E>
  - V={a,b,c,d,e}
  - E={(a,a),(a,b),(a,b),(b,c),(c,d),(b,d)}
- 图形：形象直观，顶点数、
  边数较大时不方便，
  甚至不可行



- 矩阵：利于计算机处理
  需先标定顶点（边）

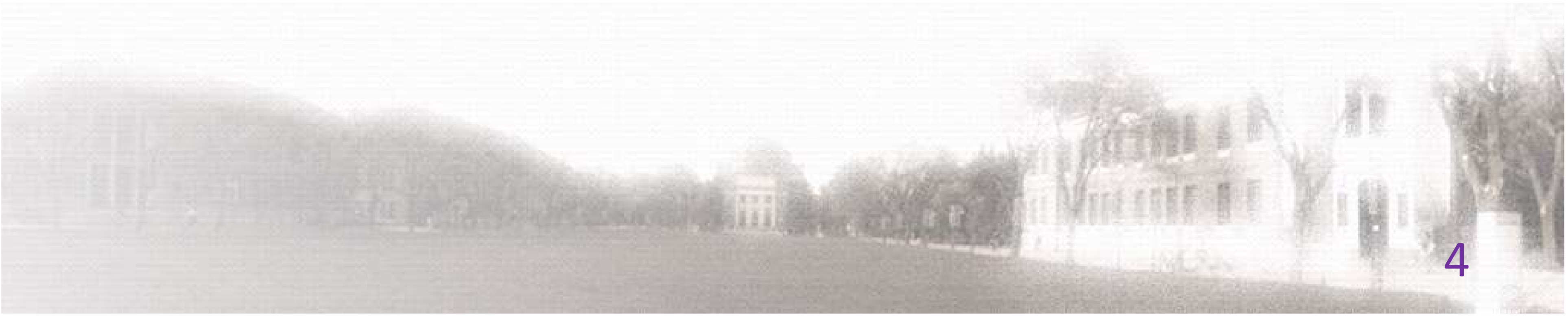
内容提要

- 关联矩阵
- 邻接矩阵
- 可达矩阵

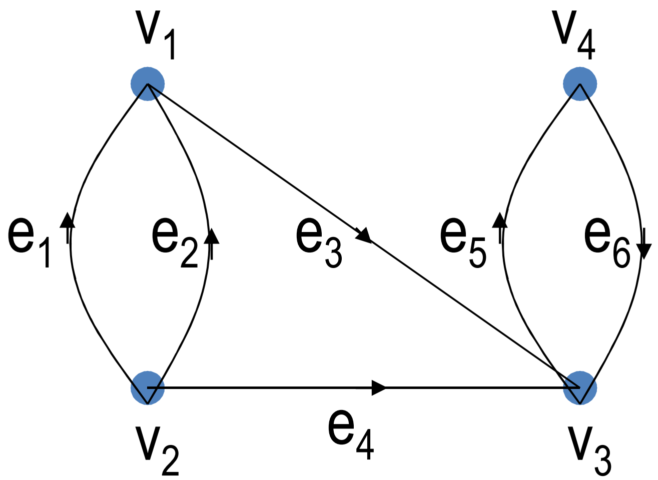
有向图关联矩阵

- 设$D=<V,E>$是无环有向标定图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$
- 关联矩阵(incidence matrix): $M(D)=[m_{ij}]_{n\times m}$,

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{是}e_j\text{的起点}\\ 0, & v_i\text{与}e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{是}e_j\text{的终点}\end{cases}$$



有向图关联矩阵举例



$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
M(D)=\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

有向图关联矩阵性质

- 每列和为零: $\Sigma^{n}_{i=1} m_{ij}=0$
- 每行绝对值和为d(v): $d(v_i)=\Sigma^{m}_{j=1}|m_{ij}|$,

  其中 1的个数为$d^{+}(v)$,

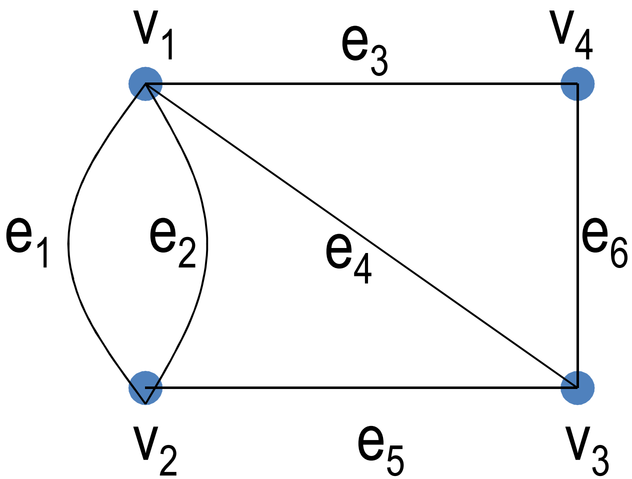
  -1的个数为$d^{-}(v)$
- 握手定理: $\Sigma^{n}_{i=1}\Sigma^{m}_{j=1} m_{ij}=0$
- 平行边: 相同两列

无向图关联矩阵

- 设G=<V,E>是无环无向标定图, $V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$
- 关联矩阵(incidence matrix): $M(G)=[m_{ij}]_{n\times m}$,

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}e_j\text{关联}\\ 0, & v_i\text{不与}e_j\text{关联}\end{cases}$$

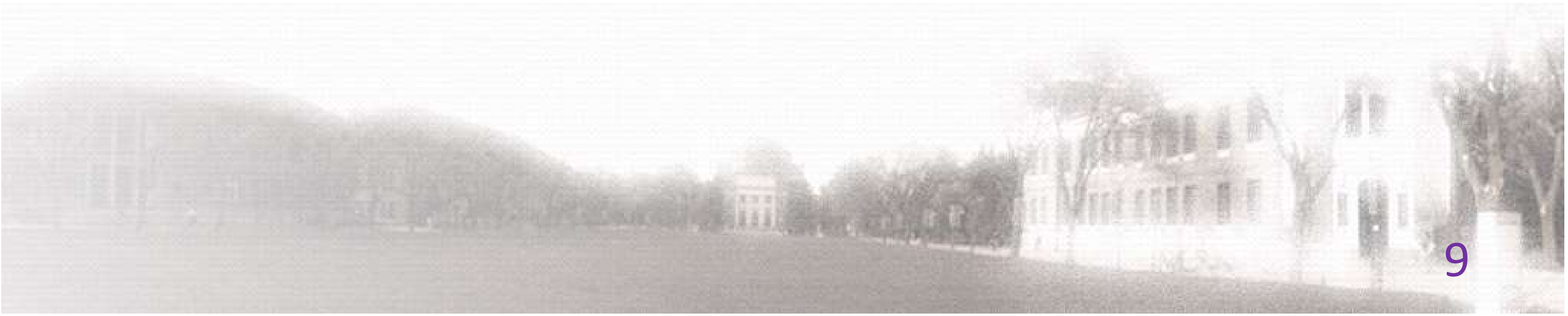
无向图关联矩阵举例



$$
M(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

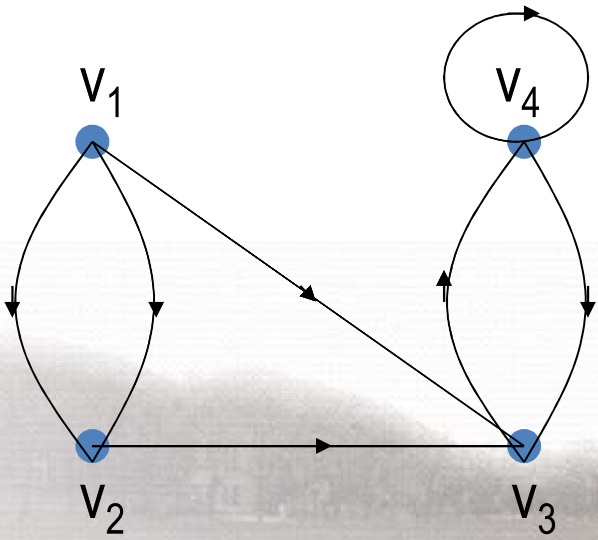
无向图关联矩阵性质

- 每列和为**2**: $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=2$ ($\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}=2m$)
- 每行和为**d(v)**: $d(v_i)=\sum_{j=1}^{m} m_{ij}$
- $\sum_{j=1}^{m} m_{ij}=0$ 当且仅当v_i为孤立点
- 第**i**行所有**1**对应的边构成v_i的关联集
- 平行边**:** 相同两列



有向图邻接矩阵

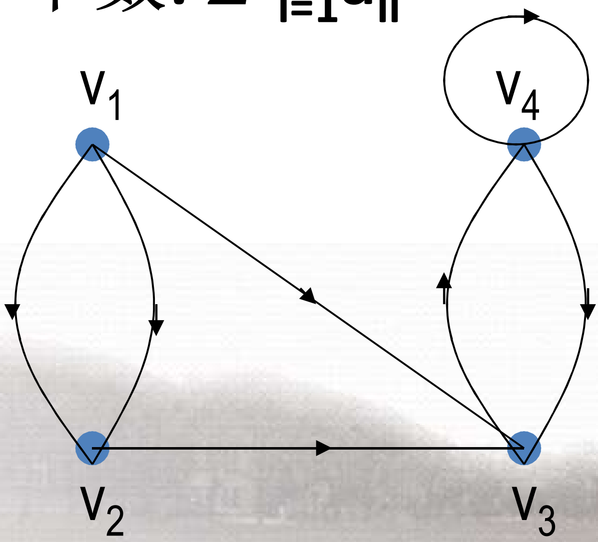
- 设D=<V,E>是有向图,V={v_1,v_2,…,v_n}
- 邻接矩阵(adjacency matrix): A(D)=$[a_{ij}]_{n\times n}$,
  a_{ij} = 从v_i到v_j的长度为1的边数/通路



$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} \end{bmatrix} \end{array}$$

有向图邻接矩阵(性质)

- 每行和为出度: $\Sigma^n_{j=1}a_{ij}=d^+(v_i)$
- 每列和为入度: $\Sigma^n_{i=1}a_{ij}=d^-(v_j)$
- 握手定理: $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}a_{ij}=\Sigma^n_{i=1}d^-(v_j) =\Sigma^n_{i=1}d^+(v_j)=m$
- 环个数: $\Sigma^n_{i=1}a_{ii}$



$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

邻接矩阵与通路数

- 设$A(D)=A=[a_{ij}]_{n\times n}$, $A^r=A^{r-1}\bullet A,(r\geq 2)$, $A^r=[a^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$, $B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$
- **定理14.11**: $a^{(r)}_{ij}$=从v_i到v_j长度为r的通路总数

  且 $\sum^n_{i=1}\sum^n_{j=1}a^{(r)}_{ij}$=长度为r的通路总数

  且 $\sum^n_{i=1}a^{(r)}_{ii}$=长度为r的回路总数
- **推论**: $b^{(r)}_{ij}$=从v_i到v_j长度≤r的通路总数

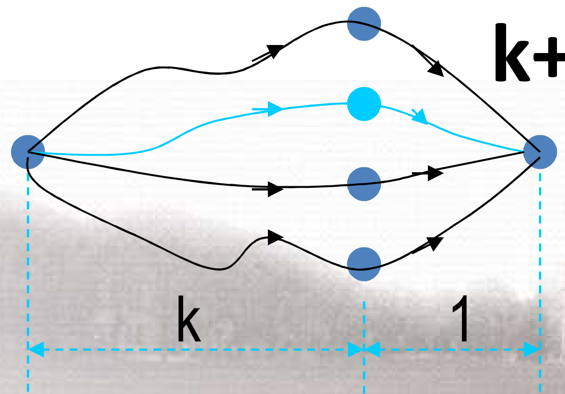
  且 $\sum^n_{i=1}\sum^n_{j=1}b^{(r)}_{ij}$=长度≤r的通路总数

  且 $\sum^n_{i=1}b^{(r)}_{ii}$=长度≤r的回路总数. #

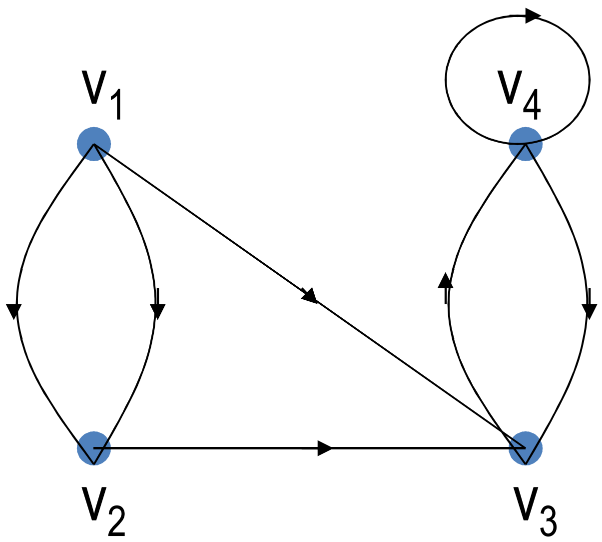
注：定义意义下的通路/回路

定理14.11证明

- 证明: (归纳法) (1)$r=1$: $a^{(1)}_{ij}=a_{ij}$, 结论显然.
  (2) 设$r\le k$时结论成立, 当$r=k+1$时,
  $a^{(k)}_{it}\bullet a^{(1)}_{tj}$=从$v_i$到$v_j$最后经过$v_t$的长度为 $k+1$的通路总数,
  $a^{(k+1)}_{ij}=\sum^{n}_{t=1}a^{(k)}_{it}\bullet a^{(1)}_{tj}$=从$v_i$到$v_j$的长度为 $k+1$的通路总数. #



用邻接矩阵求通路数举例



$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B^3=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^4=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

用邻接矩阵求通路数举例

- v_2到v_4长度为3和4的通路数: **1, 2**
- v_2到v_4长度≤4的通路数: **4**
- v_4到v_4长度为4的回路数: **5**
- v_4到v_4长度≤4的回路数: **11**

$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & \boxed{5} \end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B^3=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^4=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & \boxed{4} \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & \boxed{11} \end{bmatrix}$$

用邻接矩阵求通路数举例

- 长度=4的通路(不含回路)数: 16
- 长度≤4的通路和回路数: 53, 15

$$A^2=\begin{bmatrix}0&0&2&1\\0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&1&3\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}0&\boxed{0}&\boxed{3}&\boxed{4}\\\boxed{0}&0&\boxed{1}&\boxed{2}\\\boxed{0}&\boxed{0}&2&\boxed{3}\\\boxed{0}&\boxed{0}&\boxed{3}&5\end{bmatrix}$$

$$B^2=\begin{bmatrix}0&2&3&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\\0&0&2&3\end{bmatrix}\quad B^3=\begin{bmatrix}0&2&4&4\\0&0&2&2\\0&0&2&4\\0&0&4&6\end{bmatrix}\quad B^4=\boxed{\begin{bmatrix}\boxed{0}&2&7&8\\0&\boxed{0}&3&4\\0&0&\boxed{4}&7\\0&0&7&\boxed{11}\end{bmatrix}}$$

可达矩阵

- 设$D=<V,E>$是有向图,$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$,
- 可达矩阵：$P(D)=[p_{ij}]_{n\times n}$,

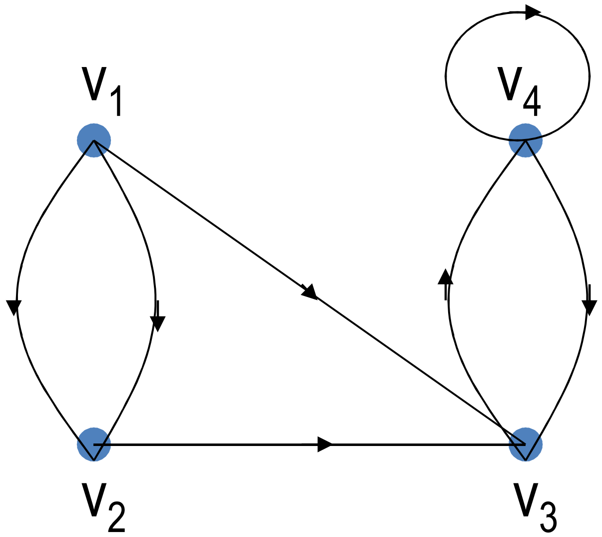
$$p_{ij}=\begin{cases}1, & \text{从}v_i\text{可达}v_j\\ 0, & \text{从}v_i\text{不可达}v_j\end{cases}$$

可达矩阵性质

- 主对角线元素都是**1**: $\forall$**v**$_\mathbf{i}\in$**V,** 从**v**$_\mathbf{i}$可达**v**$_\mathbf{i}$
- 强连通图: 所有元素都是**1**
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的可达矩阵
- $\forall i \neq j,\ p_{ij}=1 \Leftrightarrow b^{(n-1)}_{ij} > 0$

$$P(D)=\begin{bmatrix} P(D_1) & & & \\ & P(D_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(D_k) \end{bmatrix}$$

可达矩阵举例



$$A(D)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A^4=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

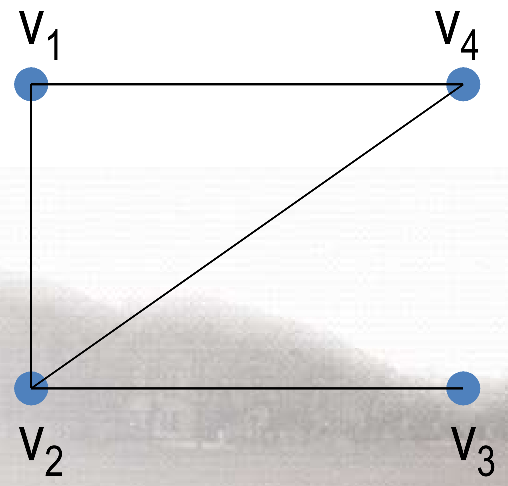
$$B^2=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad B^3=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^4=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 11 \end{bmatrix}$$

无向图邻接矩阵

- 设$G=<V,E>$是无向简单图,$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$
- 邻接矩阵(adjacency matrix): $A(G)=[a_{ij}]_{n\times n}$,

$a_{ii}=0$,

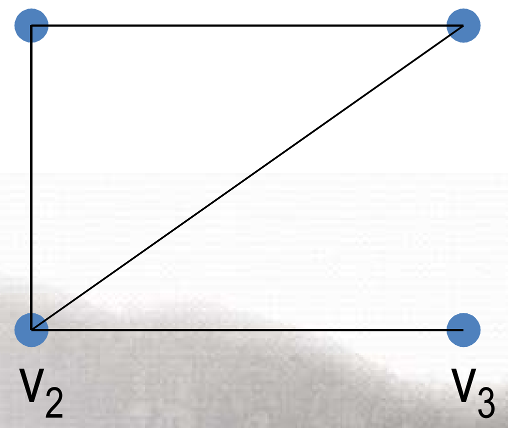
$$a_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{与}v_j\text{相邻},\ i\neq j\\ 0, & v_i\text{与}v_j\text{不相邻}\end{cases}$$



$$A(G)=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\1&1&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

无向图邻接矩阵性质

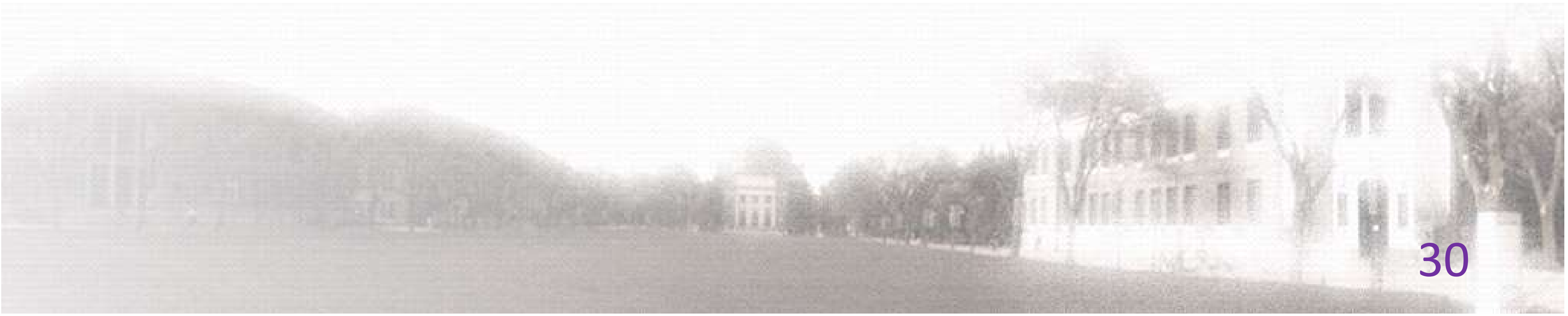
- **A(G)对称: $a_{ij}=a_{ji}$**
- **每行(列)和为顶点度: $\Sigma^n_{i=1}a_{ij}=d(v_j)$**
- **握手定理: $\Sigma^n_{i=1}\Sigma^n_{j=1}a_{ij}=\Sigma^n_{i=1}d(v_j)=2m$**



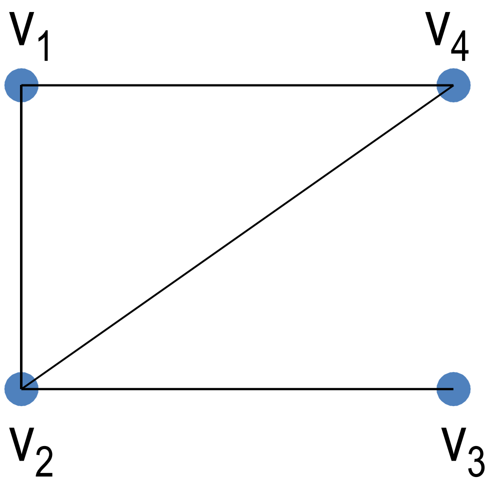
$$A(G)=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

邻接矩阵与通路数

- 设$A^r=A^{r-1}\bullet A,(r\geq 2)$, $A^r=[a^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$,
  $B_r=A+A^2+\ldots+A^r=[b^{(r)}_{ij}]_{n\times n}$
- 定理: $a^{(r)}_{ij}$=从v_i到v_j长度为r的通路总数且
  $\Sigma^n_{i=1}a^{(r)}_{ii}$=长度为$r$的回路总数. #
- 推论1: $a^{(2)}_{ii}=d(v_i)$. #
- 推论2: G连通$\Rightarrow$距离$d(v_i,v_j)=\min\{r\,|\,a^{(r)}_{ij}\neq 0\}$. #



用邻接矩阵求通路数举例



$$A(G)=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^2=\begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^3=\begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad A^4=\begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 11 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

用邻接矩阵求通路数举例

- v_1到v_2长度为4的通路数: **6**

14142,14242,14232,12412,14212,12142

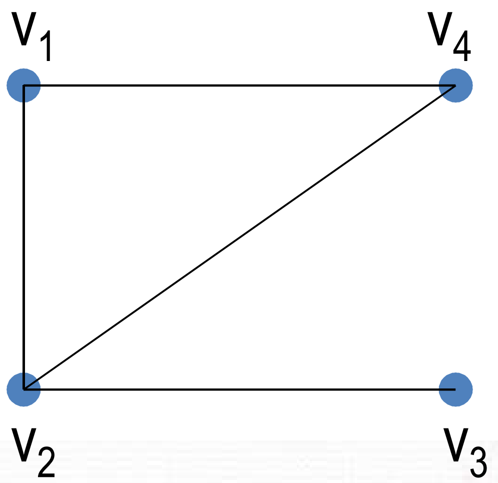
- v_1到v_3长度为4的通路数: **4**

12423,12323,14123,12123

- v_1到v_1长度为4的回路数: **7**

14141,14241,14121,12121,

12421,12321,12141,



$$A^2=\begin{bmatrix}2&1&1&1\\1&3&0&1\\1&0&1&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}\quad A^3=\begin{bmatrix}2&4&1&3\\4&2&3&4\\1&3&0&1\\2&4&1&2\end{bmatrix}\quad A^4=\begin{bmatrix}\boxed{7}&\boxed{6}&\boxed{4}&6\\6&11&2&6\\4&2&3&4\\6&6&4&7\end{bmatrix}$$

可达矩阵

- 设$G=<V,E>$是无向简单图，$V=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$，
- 可达矩阵：$P(G)=[p_{ij}]_{n\times n}$，

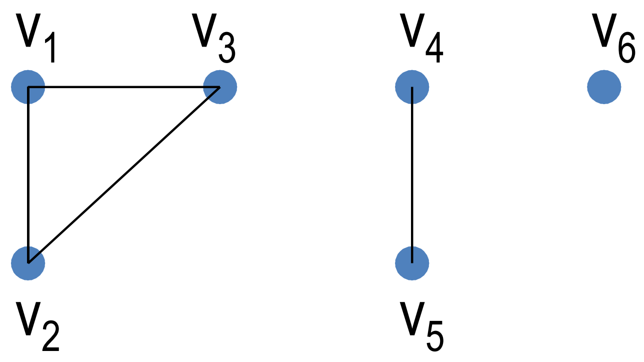
$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{若} v_i \text{与} v_j \text{连通} \\ 0, & \text{若} v_i \text{与} v_j \text{不连通} \end{cases}$$

可达矩阵性质

- 主对角线元素都是**1**: $\forall v_i \in V$, v_i与v_i连通
- 连通图: 所有元素都是**1**
- 伪对角阵: 对角块是连通分支的连通矩阵
- 设$B_r = A + A^2 + \ldots + A^r = [b^{(r)}_{ij}]_{n \times n}$, 则$\forall i \neq j$, $p_{ij} = 1 \Leftrightarrow b^{(n-1)}_{ij} > 0$

$$P(G) = \begin{bmatrix} P(G_1) & & & \\ & P(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & P(G_k) \end{bmatrix}$$

可达矩阵举例



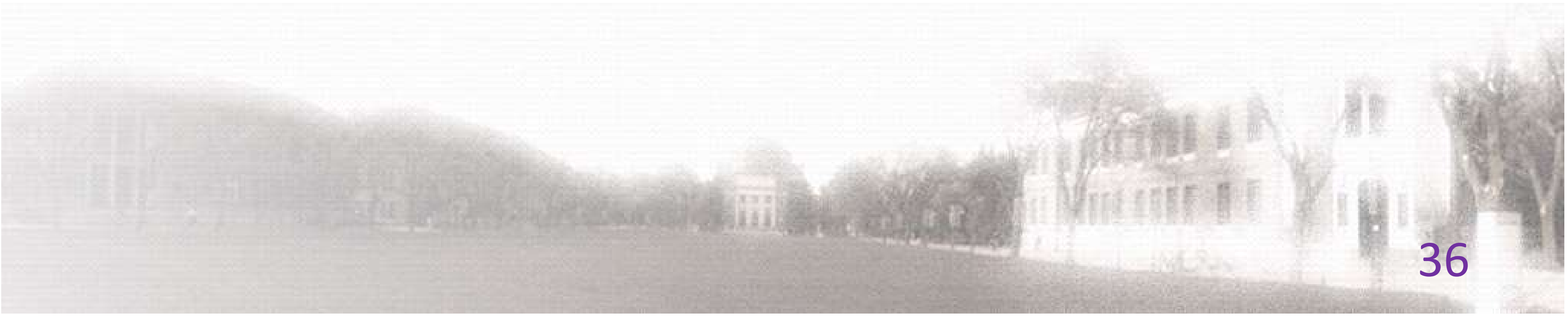
$$P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A与P的关系

- G为n阶有向/无向简单图，设A、P为G的邻接矩阵及可达矩阵，则

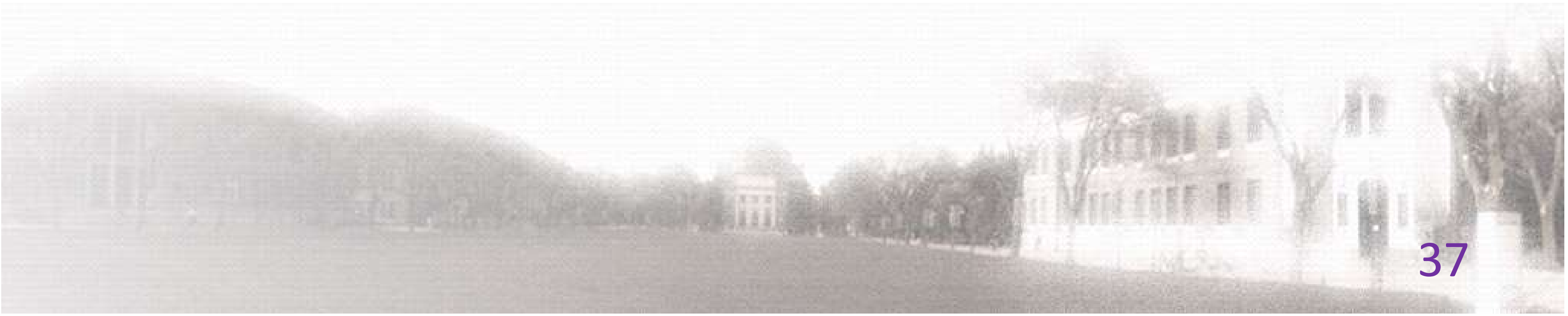
$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{A}^2 \vee \cdots \vee \boldsymbol{A}^{n-1} \vee \boldsymbol{I}$$

这里，$\boldsymbol{A}^i$表示做矩阵布尔乘法的i次幂，I为单位阵。



思考题

- 有向简单图的单向连通性与弱连通性如何通过**A**、**P**矩阵进行判断？



小结

- **1.** 关联矩阵**M(D), M(G)**
- **2.** 邻接矩阵**A(D), A(G)**
- **3.** 用**A**的幂求不同长度通路**(**回路**)**总数
- **4.** 可达矩阵**P(D), P(G)**