清華大學
Tsinghua University

单元3.11 函数

第八章 函数

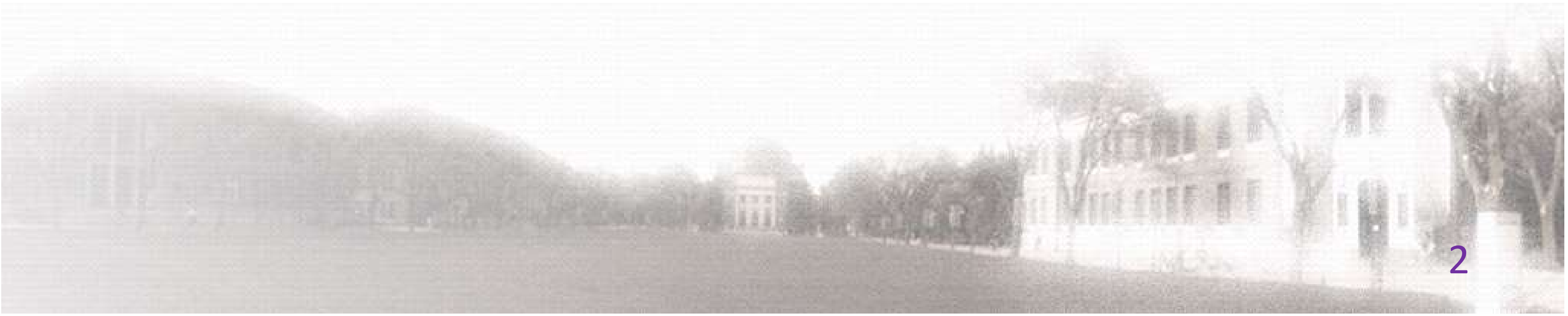
8.1 函数的定义与性质

8.2 函数的复合与反函数

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

- 函数的基本概念
- 函数性质：单射、满射、双射
- 函数合成
- 反函数

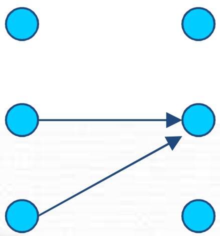


函数(映射)

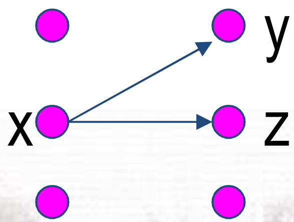
- 函数(**function**), 映射(**mapping**):
  单值的二元关系

- 单值：$\forall x \in domF, \forall y,z \in ranF,$

$$xFy \wedge xFz \rightarrow y=z$$



单值



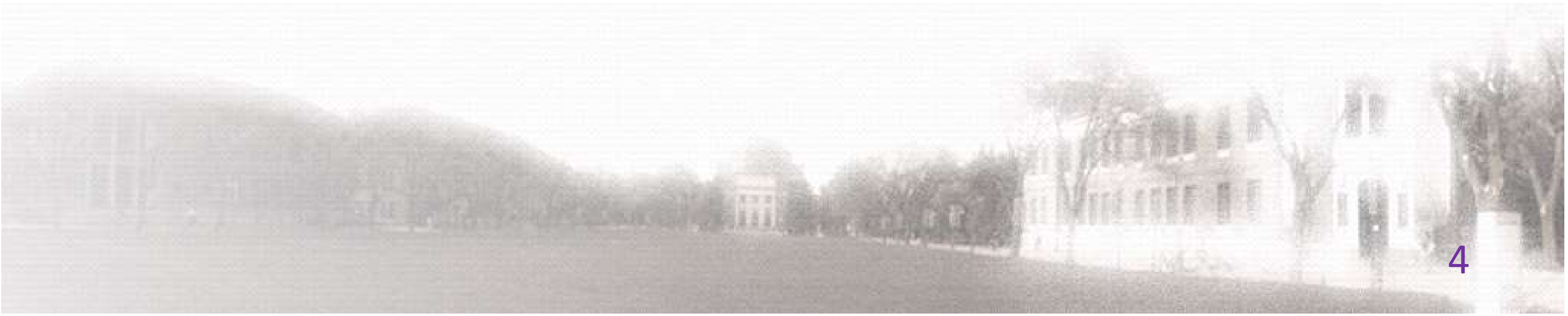
非单值

函数的记号

- $F(x)=y \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F \Leftrightarrow xFy$

- $\varnothing$是空函数

- 常用$F,G,H,\ldots,f,g,h,\ldots$表示函数.



偏函数（部分函数）

- 设**F**是函数
- **A**到**B**的偏函数**(partial function)**

  $$\mathbf{domF} \subseteq \mathbf{A} \wedge \mathbf{ranF} \subseteq \mathbf{B}$$

- **A**称为**F**的前域，**B**称为**F**的后域

偏函数的记号

- 从**A**到**B**的偏函数**F**记作

$$F:A \mathrel{+\!\!\!\!\rightarrow} B$$

- **A**到**B**的全体偏函数记为

$$A \mathrel{+\!\!\!\!\rightarrow} B = \{\, F \mid F:A \mathrel{+\!\!\!\!\rightarrow} B \,\}$$

- 显然 $A \mathrel{+\!\!\!\!\rightarrow} B \subseteq P(A\times B)$

例

- $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$.
- $|P(A\times B)|=2^4=16$. $f_0=\varnothing$,

  $f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$, $f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,

  $f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,

  $f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$, $f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

  $A \nrightarrow B = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$. #
- 非函数: $\{<a,1>,<a,2>\}$, $\{<a,1>,<a,2>,<b,1>\}$

全函数

- 全函数(total function) : domF=A
- 全函数记作 F:A→B
- A到B的全体全函数记为

$$B^A = A \to B = \{ F \mid F:A \to B \}$$

思考：全函数的关系矩阵、关系图具有什么特性？

关于B^A的说明

- $|B^A| = |B|^{|A|}$
- 当$A=\varnothing$时，$B^A=\{\varnothing\}$
  (A到B的全函数只有空函数)
- 当 $A\neq\varnothing \wedge B=\varnothing$ 时，
  $B^A=A\to B=\varnothing$. **(A到B无全函数)**

例

例 $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

解 $B=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,0\rangle\}$, $f_1=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$,

$f_2=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,0\rangle\}$, $f_3=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$,

$f_4=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,0\rangle\}$, $f_5=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,1\rangle\}$,

$f_6=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,0\rangle\}$, $f_7=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$.

例

- $A=\{a,b\}$, $B=\{1,2\}$,

  $f_0=\emptyset$,

  $f_1=\{<a,1>\}$, $f_2=\{<a,2>\}$, $f_3=\{<b,1>\}$, $f_4=\{<b,2>\}$,

  $f_5=\{<a,1>,<b,1>\}$, $f_6=\{<a,1>,<b,2>\}$,

  $f_7=\{<a,2>,<b,1>\}$, $f_8=\{<a,2>,<b,2>\}$.

$A\rightarrow B = \{f_5, f_6, f_7, f_8\}$

以下只讨论全函数

全函数性质

- 设 $F:A\to B$

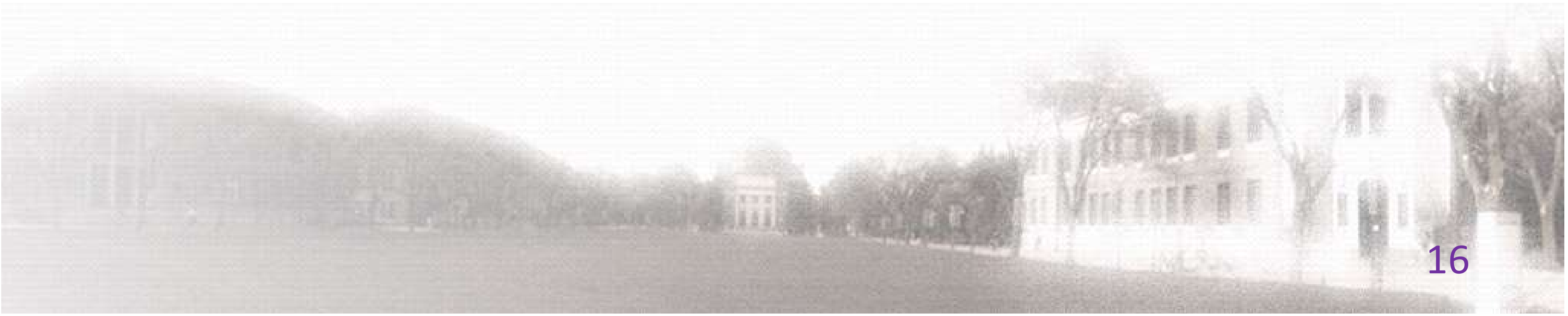
- 单射(injection): **F**是单根的（任取$y\in ranF$，存在唯一的$x\in domF$满足$f(x)=y$）
- 满射(surjection, onto): $ranF=B$
- 双射(bijection), 一一对应(1-1 mapping) :

  F既是单射又是满射

例

- $A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$
- $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$
- $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$

- 求$A_1\rightarrow B_1$, $A_2\rightarrow B_2$, $A_3\rightarrow B_3$中的单射,满射,双射.



例 (1)

- $A_1=\{a,b\}$, $B_1=\{1,2,3\}$

- $A_1 \to B_1$中无满射, 无双射, 单射6个:

  $f_1=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$, $f_2=\{\langle a,1\rangle,\langle b,3\rangle\}$,

  $f_3=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle\}$, $f_4=\{\langle a,2\rangle,\langle b,3\rangle\}$,

  $f_5=\{\langle a,3\rangle,\langle b,1\rangle\}$, $f_6=\{\langle a,3\rangle,\langle b,2\rangle\}$.

例 (2)

- $A_2=\{a,b,c\}$, $B_2=\{1,2\}$

- $A_2 \to B_2$中无单射, 无双射, 满射6个:

$f_1=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$, $f_2=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$,

$f_3=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$, $f_4=\{\langle a,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,2\rangle\}$,

$f_5=\{\langle a,2\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,2\rangle\}$, $f_6=\{\langle a,2\rangle,\langle b,2\rangle,\langle c,1\rangle\}$.

例 (3)

- $A_3=\{a,b,c\}$, $B_3=\{1,2,3\}$,

- $A_2 \rightarrow B_2$中双射6个:

$f_1=\{<a,1>,<b,2>,<c,3>\}$, $f_2=\{<a,1>,<b,3>,<c,2>\}$

$f_3=\{<a,2>,<b,1>,<c,3>\}$, $f_4=\{<a,2>,<b,3>,<c,1>\}$

$f_5=\{<a,3>,<b,1>,<c,2>\}$, $f_6=\{<a,3>,<b,2>,<c,1>\}$

#

有多少个单射,满射,双射?

- 设|A|=n, |B|=m

- $n<m$时, $A\rightarrow B$中无满射, 无双射, 单射个数为 $m(m-1)\ldots(m-n+1)$
- $n>m$时, $A\rightarrow B$中无单射, 无双射, 满射个数为

$$m!\left\{ n \atop m \right\}.$$

- $n=m$时, $A\rightarrow B$中双射个数为 $n!$

例

- 判断下面函数是否为单射, 满射, 双射的, 为什么?

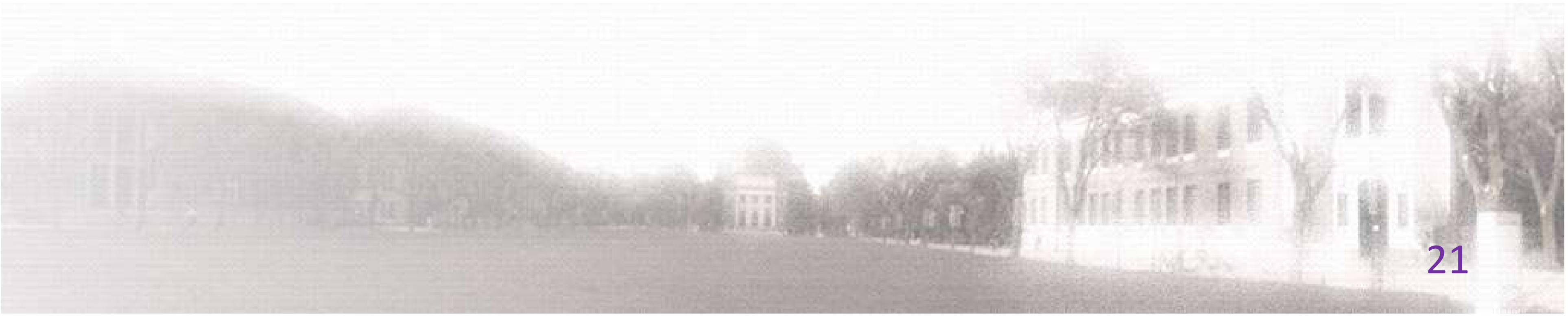
  （1）$f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)= -x^2+2x-1$

  （2）$f: \mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}$, $f(x)=\ln x$, $\mathbf{Z}^+$为正整数集

  （3）$f: \mathbf{R}\to\mathbf{Z}$, $f(x)=\lfloor x\rfloor$（向下取整）

  （4）$f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2x+1$

  （5）$f: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+$, $f(x)=(x^2+1)/x$, 其中$\mathbf{R}^+$为正实数集.



例

解 (1) $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)= -x^2+2x-1$

在x=1取得极大值0. 既不是单射也不是满射的.

(2) $f: \mathbf{Z}^+\to\mathbf{R}, f(x)=\ln x$

单调上升, 是单射的. 但不满射, ran$f$={ln1, ln2, …}.

(3) $f: \mathbf{R}\to\mathbf{Z}, f(x)=\lfloor x\rfloor$

是满射的, 但不是单射的, 例如 $f(1.5)=f(1.2)=1$.

(4) $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=2x+1$

是满射、单射、双射的, 因为它是单调函数并且ran$f$=R.

(5) $f: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}^+, f(x)=(x^2+1)/x$

有极小值$f(1)=2$. 该函数既不是单射的也不是满射的.

构造A到B的双射函数

有穷集之间的构造

例　$A=P(\{1,2,3\})$, $B=\{0,1\}^{\{1,2,3\}}$

解　$A=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

$B=\{f_0, f_1, \ldots, f_7\}$, 其中

$f_0=\{<1,0>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_1=\{<1,0>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_2=\{<1,0>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_3=\{<1,0>,<2,1>,<3,1>\}$,

$f_4=\{<1,1>,<2,0>,<3,0>\}$, $f_5=\{<1,1>,<2,0>,<3,1>\}$,

$f_6=\{<1,1>,<2,1>,<3,0>\}$, $f_7=\{<1,1>,<2,1>,<3,1>\}$.

令　$f: A\to B$,

$f(\varnothing)=f_0$, $f(\{1\})=f_1$, $f(\{2\})=f_2$, $f(\{3\})=f_3$,

$f(\{1,2\})=f_4$, $f(\{1,3\})=f_5$, $f(\{2,3\})=f_6$, $f(\{1,2,3\})=f_7$

构造A到B的双射函数

实数区间之间构造双射

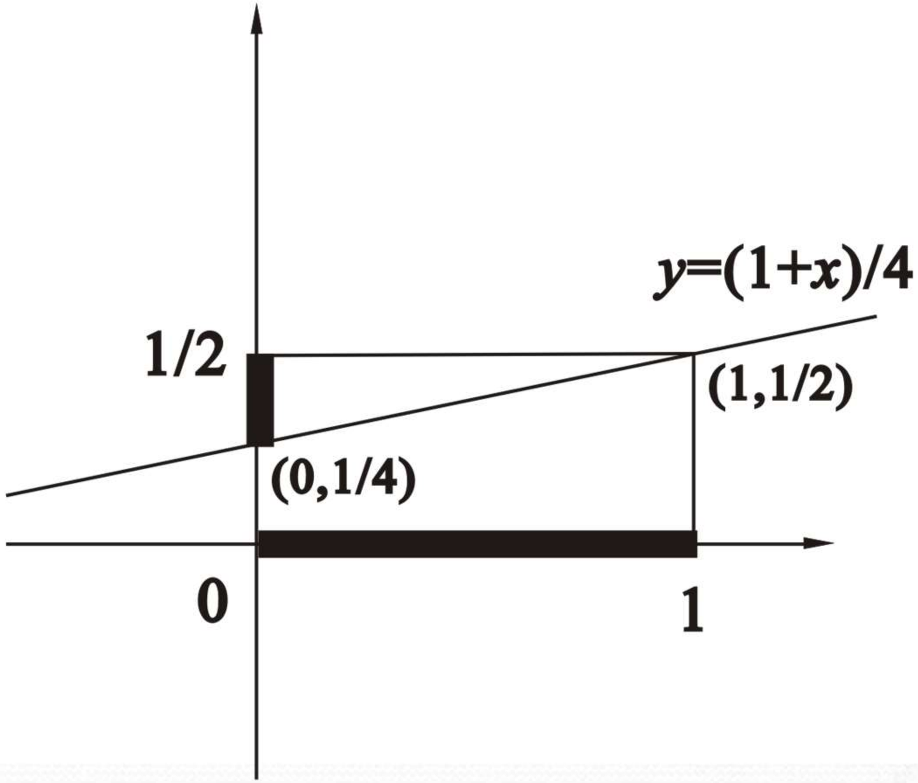
例 $A=[0,1]$

$B=[1/4,1/2]$

构造双射 $f: A\to B$

解 令 $f: [0,1]\to[1/4,1/2]$

$f(x)=(x+1)/4$



构造A到B的双射函数

***A*与自然数集合之间构造双射**

方法：将A中元素排成有序图形，然后从第一个元素开始

按照次序与自然数对应

例　A=Z, B=N，构造双射 $f: A\to B$

将Z中元素以下列顺序排列并与N中元素对应：

$$\begin{array}{lccccccc}
\text{Z:} & 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & -3 & 3\ \ldots \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\text{N:} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\ \ldots
\end{array}$$

则这种对应所表示的函数是：

$$f: \mathrm{Z} \to \mathrm{N}, f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x-1 & x < 0 \end{cases}$$

特殊函数

- 常数函数:

$$f:A\to B,\ \exists b\in B,\ \forall x\in A, f(x)=b$$

- 恒等函数:

$$I_A:A\to A,\ I_A(x)=x$$

- 特征函数:

$$\chi_A:E\to\{0,1\},\ \chi_A(x)=1\Leftrightarrow x\in A$$

- 当 $\varnothing\subset A\subset E$时, χ_A是满射

单调函数

- 设$f:A\to B$, $<A,\leq_A>$, $<B,\leq_B>$是偏序集
- 单调增:

$$\forall x,y\in A,\ x\leq_A y \Rightarrow f(x)\leq_B f(y)$$

- 单调减:

$$\forall x,y\in A,\ x\leq_A y \Rightarrow f(y)\leq_B f(x)$$

- 严格单调: 把≤换成<, 是单射

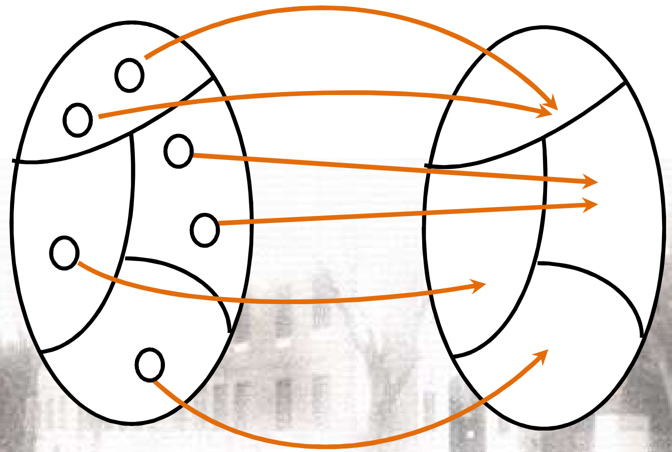
自然映射

- 设**R**为**A**上等价关系

- 自然映射, 典型映射:

$$f:A\rightarrow A/R,\quad f(x)=[x]_R$$

- 当$R=I_A$时, f是单射.



自然映射(举例)

- $A=\{a,b,c,d\}$, $A/R=\{\{a,b\},\{c\},\{d\}\}$
- $F:A\rightarrow A/R$, $F(x)=[x]$

$F(a)=\{a,b\}$,

$F(b)=\{a,b\}$,

$F(c)=\{c\}$,

$F(d)=\{d\}$

定理8.1

定理8. 1　设 $f:A\rightarrow B$, $g:B\rightarrow C$, 则

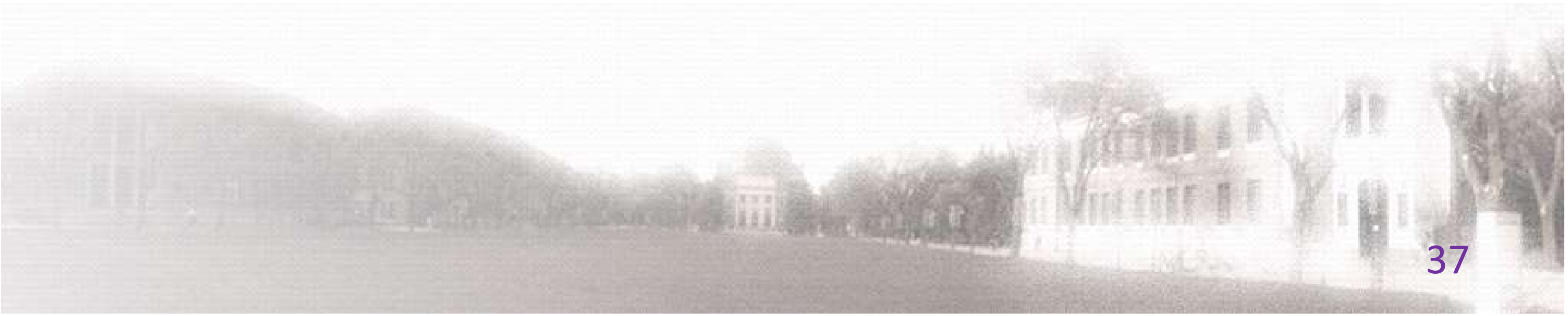
$$fog:A\rightarrow C,\quad fog(x)=g(f(x))$$

证明思路

(1) fog单值 (即fog是函数)

(2) dom fog = A, ran fog $\subseteq$ C

(3) $fog(x)=g(f(x))$



定理8.1证明(1)

证fog是单值的, 即fog是函数.

- $\forall x \in dom(fog)$, 若$\exists z_1,z_2 \in ran(fog)$, 使得 $x(fog)z_1 \wedge x(fog)z_2$, 则

$x(fog)z_1 \wedge x(fog)z_2$

$\Leftrightarrow \exists y_1(y_1 \in B \wedge xfy_1 \wedge y_1gz_1) \wedge \exists y_2(y_2 \in B \wedge xfy_2 \wedge y_2gz_2)$

$\Leftrightarrow \exists y_1 \exists y_2(y_1 \in B \wedge y_2 \in B \wedge xfy_1 \wedge xfy_2 \wedge y_1gz_1 \wedge y_2gz_2)$

$\Rightarrow \exists y(y \in B \wedge ygz_1 \wedge ygz_2) \Rightarrow z_1=z_2$

定理8.1证明(2)

证dom(fog) = A, ran(fog)$\subseteq$C.

- 显然dom(fog)$\subseteq$A, ran(fog)$\subseteq$C.

  下证A$\subseteq$dom(fog), $\forall$x,

  $x\in A \Rightarrow \exists! y(y\in B \wedge xfy)$

  $\Rightarrow \exists! y \exists! z(y\in B \wedge z\in C \wedge xfy \wedge ygz)$

  $\Rightarrow \exists! z(z\in C \wedge x(fog)z)$

  $\Rightarrow x\in dom(fog)$.

$\exists!$: “存在唯一的”

定理8.1证明(3)

证$fog(x)=g(f(x))$.

- $\forall x$,

  $x \in A$

  $\Rightarrow \exists!z(z \in C \wedge z=fog(x))$

  $\Leftrightarrow \exists!z\exists!y(z \in C \wedge y \in B \wedge xfy \wedge ygz)$

  $\Leftrightarrow \exists!z\exists!y(z \in C \wedge y \in B \wedge y=f(x) \wedge z=g(y))$

  $\Leftrightarrow \exists!z(z \in C \wedge z=g(f(x)))$

  所以对任意$x \in A$，有$fog(x)=g(f(x))$. #

定理8.2

定理8.2 设 $f:A\to B$, $g:B\to C$, $f\circ g:A\to C$,则

(1) 若 f,g 均为满射, 则 $f\circ g$ 也是满射.

(2) 若 f,g 均为单射, 则 $f\circ g$ 也是单射.

(3) 若 f,g 均为双射, 则 $f\circ g$ 也是双射. #

推论 设 $f:A\to B$, $g:B\to C$, 则

(1) 若 $f\circ g$ 为满射, 则 g 是满射.

(2) 若 $f\circ g$ 为单射, 则 f 是单射.

(3) 若 $f\circ g$ 为双射, 则 f 是单射, g 是满射. #

定理8.2证明

(1) 任取 $c\in C$, 由$g: B\to C$的满射性, $\exists b\in B$ 使得 $g(b)=c$.对于这个b, 由 $f: A\to B$ 的满射性，$\exists a\in A$ 使得 $f(a)=b$. 由定理8.1, $f\circ g(a) = g(f(a)) = g(b) = c$.从而证明了$f\circ g: A\to C$是满射的.

(2) 假设存在 $x_1, x_2\in A$使得$f\circ g(x_1) = f\circ g(x_2)$,由合成定理有 $g(f(x_1))=g(f(x_2))$.因为 $g: B\to C$是单射的, 故 $f(x_1) = f(x_2)$. 又由于$f: A\to B$也是单射的, 所以 $x_1=x_2$. 从而证明$f\circ g: A\to C$是单射的.

定理8.2推论证明

(1) 对于任意的**z**，

$$
\begin{aligned}
& z \in C \\
\Rightarrow & \exists x(x \in A \wedge x(f \circ g)z) \\
\Rightarrow & \exists x \exists y(x \in A \wedge y \in \operatorname{ran} f \wedge xfy \wedge ygz) \\
\Rightarrow & \exists x \exists y(x \in A \wedge y \in B \wedge y = f(x) \wedge z = g(y)) \\
\Rightarrow & \exists y(y \in B \wedge z = g(y))
\end{aligned}
$$

(2) 若$\exists\, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{ran\, f} \subseteq \boldsymbol{B}, \exists \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \boldsymbol{A}$使得

$$
\begin{aligned}
& x_1 f y \wedge x_2 f y \\
\Rightarrow & \exists z(z \in \operatorname{ran} g \subseteq C \wedge ygz \wedge x_1 f y \wedge x_2 f y) \\
\Rightarrow & \exists z(z \in C \wedge x_1(f \circ g)z \wedge x_2(f \circ g)z) \\
\Rightarrow & x_1 = x_2
\end{aligned}
$$

(3) 由**(1) (2)**可得**(3)**

定理8.3

定理8. 3 设 $f:A\to B$, 则 $f=f\circ I_A=I_B\circ f$. #

定理 设 $f:R\to R$, $g:R\to R$, 且f,g按≤都是单调增的, 则 $f\circ g$ 也是单调增的.

证明 $x\le y \Rightarrow f(x)\le f(y) \Rightarrow g(f(x))\le g(f(y))$. #

- 若f,g都是单调减的, 则 $f\circ g$ 也是单调增的

反函数

定理8. 4 设 **f:A→B**，且**f**为双射，则

f^{-1} :B→A，且**f^{-1}**也为双射. **#**

定义 若 **f: A→B** 为双射，则 **f^{-1}: B→A** 称为 **f** 的**反函数**。

定理8.4证明

证　因为 f 是函数, 所以 f^{-1}是关系, 且 $\mathrm{dom}\, f^{-1}=\mathrm{ran} f=B$, $\mathrm{ran}\, f^{-1}=\mathrm{dom} f=A$, 对于任意的 $x\in B$, 假设有 $y_1, y_2\in A$ 使得 $<x,y_1>\in f^{-1}\wedge<x,y_2>\in f^{-1}$ 成立, 则由逆的定义有$<y_1,x>\in f\wedge<y_2,x>\in f$. 根据 f 的单射性可得 $y_1=y_2$, 从而证明了f^{-1}是函数，且是满射的.

若存在 $x_1, x_2\in B$使得 $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)=y$, 从而有 $<x_1,y>\in f^{-1}\wedge<x_2,y>\in f^{-1} \Rightarrow <y,x_1>\in f\wedge<y,x_2>\in f \Rightarrow x_1=x_2$ 因为 f 是函数), 从而证明了f^{-1}的单射性.

例

例 设 $\cdot f: \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\ge 3 \\ -2 & x<3 \end{cases}$$

$$g(x)=x+2$$

求 $f\circ g, g\circ f$. 如果 f 和 g 存在反函数, 求f, g的反函数.

解 $f\circ g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$　　　$g\circ f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$f\circ g(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\ge 3 \\ 0 & x<3 \end{cases}\qquad g\circ f(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & x\ge 1 \\ -2 & x<1 \end{cases}$$

$f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$不存在反函数; $g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$的反函数是

$g^{-1}: \mathbf{R}\to\mathbf{R},\ g^{-1}(x)=x-2$

定理8.5

定理8. 5 设 **f:A→B**，且**f**为双射，则

$$f^{-1}\circ f = I_B,\ \ f\circ f^{-1} = I_A$$

证 根据定理**8.4**可知 f^{-1}: $B\to A$也是双射的.
由定理**8.1** 可知 $f^{-1}\circ f$: $B\to B$, $f\circ f^{-1}$: $A\to A$，且它们都是恒等函数.

对于双射函数 **f : A→A,** 根据上述定理有

$$f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = I_A.$$

小结

- 函数,偏函数,全函数
- 单射, 满射, 双射, 计数
- 常值函数,恒等函数,特征函数,单调函数,自然映射
- 合成函数,构造双射
- 反函数