单元3.3 基本的集合恒等式

第六章 集合代数

6.4 集合恒等式

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

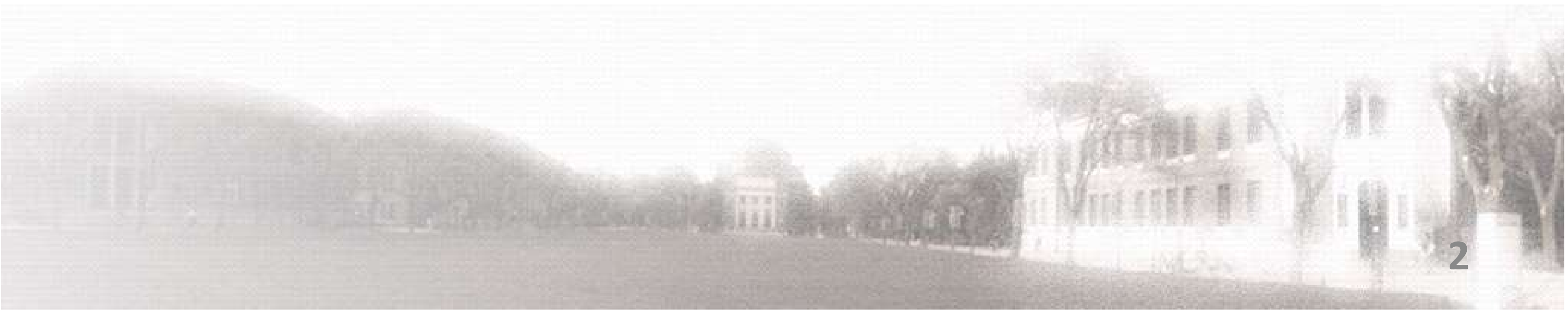
内容提要

(1) 集合恒等式

– 13组最基本的集合恒等式

(2) 半形式化方法

– 推导集合等式和包含式



集合恒等式(①~④)

设E是全集，A,B,C为E的任意子集。

① 幂等律　$A \cup A = A$, $A \cap A = A$

② 交换律　$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

③ 结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

④ 分配律　$A \cup (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

集合恒等式 (⑤~⑥)

⑤ 德•摩根律

绝对形式　$\sim(A\cup B) = \sim A\cap\sim B$

$\sim(A\cap B) = \sim A\cup\sim B$

相对形式　$E-(A\cup B) = (E-A)\cap(E-B)$

$E-(A\cap B) = (E-A)\cup(E-B)$

⑥ 吸收律　$A\cup(A\cap B) = A$，$A\cap(A\cup B) = A$

基本的等值式(⑦~⑬)

⑦ 零律　$A \cup E = E$，　$A \cap \varnothing = \varnothing$

⑧ 同一律　$A \cup \varnothing = A$，　$A \cap E = A$

⑨ 排中律　$A \cup \sim A = E$

⑩ 矛盾律　$A \cap \sim A = \varnothing$

⑪ 余补律　$\sim\varnothing = E$，　$\sim E = \varnothing$

⑫ 双重否定律　$\sim(\sim A) = A$

⑬ 补交转换律　$A - B = A \cap \sim B$　(消去差集运算符)

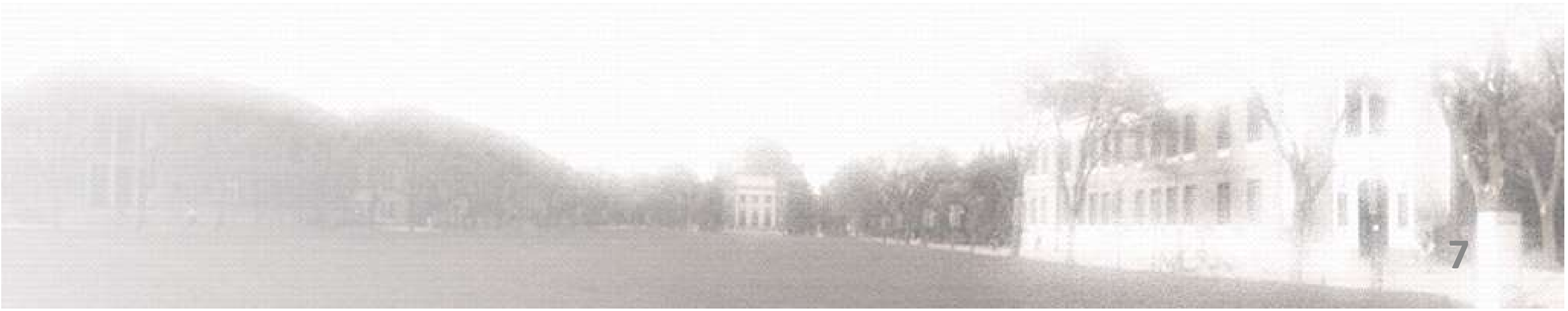
例

由定义证明下面的恒等式：

(1) 分配律： $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) 零律： $A \cap \varnothing = \varnothing$

(3) 排中律： $A \cup \sim A = E$



分配律的证明

(1) 对于任意的x，

$x \in A \cup (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B \cap C)$

$\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C)$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C)$ (命题逻辑分配律)

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$，

因而，$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$。 □

零律的证明

(2) 对于任意的x，

$$x \in A \cap \varnothing$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \varnothing$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \qquad\qquad \text{(命题逻辑零律)}$$

$$\Leftrightarrow x \in \varnothing,$$

因而， $A \cap \varnothing = \varnothing$ 。□

排中律的证明

(3) 对于任意的x，

$$x \in A \cup \sim A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in \sim A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A$$

$$\Leftrightarrow x \in A \vee \neg(x \in A)$$

$\Leftrightarrow 1$ (命题逻辑排中律)

$\Leftrightarrow x \in E$， 因而，$A \cup \sim A = E$。□

差集的性质

集合差集运算具有下列性质：

(1) $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}-(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})$；

(2) $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}\cap\sim\mathbf{B}$ （补交转换律）

(3) $\mathbf{A}\cup(\mathbf{B}-\mathbf{A})=\mathbf{A}\cup\mathbf{B}$;

(4) $\mathbf{A}\cap(\mathbf{B}-\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cap\mathbf{B})-\mathbf{C}$

差集的性质

证 **(1):** $\mathbf{A-B=A-(A\cap B)}$；

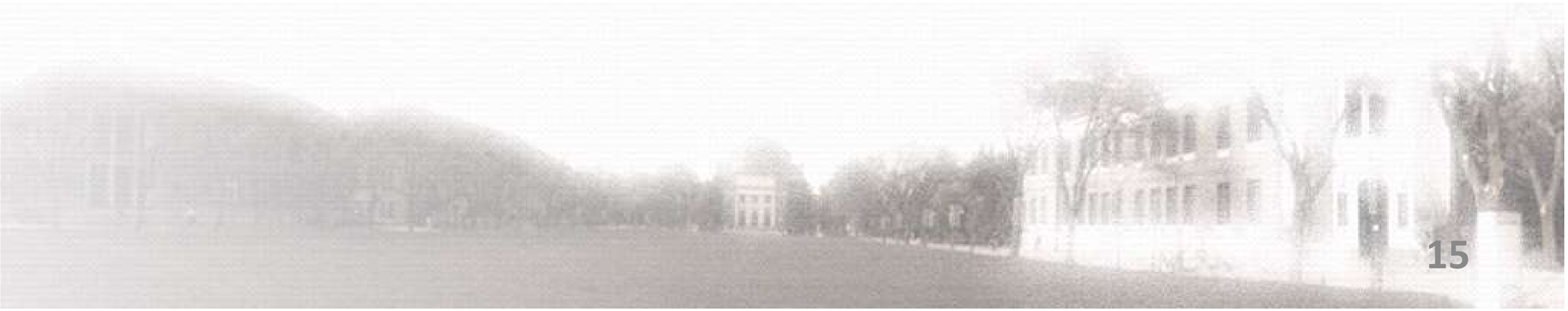
$$\forall x, x\in A-(A\cap B)\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B)$$

$$\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\notin A\vee x\notin B)$$

$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin A)\vee(x\in A\wedge x\notin B)$$

$$\Leftrightarrow x\in A-B$$



对称差的性质

集合对称差运算具有下列性质：

(1)交换律：$\boldsymbol{A \oplus B = B \oplus A}$；

(2)结合律：$\boldsymbol{(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)}$

(3)分配律：$\boldsymbol{A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)}$;

(4)同一律：$\boldsymbol{A \oplus \emptyset = A}$

(5)零律：$\boldsymbol{A \oplus A = \emptyset}$

(6) $\boldsymbol{A \oplus (A \oplus B) = B}$

对称差的性质

证明(3)分配律： $A\cap(B\oplus C)=(A\cap B)\oplus(A\cap C)$;

$$
\begin{aligned}
&A\cap(B\oplus C)\\
=&A\cap((B-C)\cup(C-B))\\
=&A\cap((B\cap\sim C)\cup(C\cap\sim B))\\
=&(A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap C\cap\sim B)\\
=&(A\cap B\cap\sim C)\cup(A\cap B\cap\sim A)\cup(A\cap C\cap\sim B)\cup(A\cap C\cap\sim A)\\
=&((A\cap B)\cap(\sim C\cup\sim A))\cup((A\cap C)\cap(\sim B\cup\sim A))\\
=&((A\cap B)\cup\sim(A\cap C))\cup((A\cap C)\cup\sim(A\cap B))\\
=&(A\cap B)\oplus(A\cap C)
\end{aligned}
$$

子集的性质

集合间的⊆具有下列性质：

(1) $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup C)$;

(2)$A \subseteq B \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

(3)$(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cup C) \subseteq (B \cup D)$;

(4)$(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap D)$;

(5)$(A \subseteq B) \wedge (C \subseteq D) \Rightarrow (A - C) \subseteq (B - D)$;

(6) $C \subseteq D \Rightarrow (A - D) \subseteq (A - C)$

例

证明：$(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}\Leftrightarrow(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\Leftrightarrow$
$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\emptyset$

设命题1：$(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}$，命题2： $\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$，命题3：$(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}$，命题4：$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\emptyset$

1 $\Rightarrow$ 2: 已知$(\boldsymbol{A}\cup\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}$，任取**x**，

$$x\in A\Rightarrow x\in A\vee x\in B\Leftrightarrow x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in B$$

所以$\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$。

2 $\Rightarrow$ 3: 已知$\boldsymbol{A}\subseteq\boldsymbol{B}$，则$\forall$**x, x$\in$A $\Rightarrow$ x$\in$B**

$$x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B\Leftrightarrow x\in A,$$

$$x\in A\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in A\Rightarrow x\in A\wedge x\in B\Leftrightarrow x\in A\cap B.$$

所以$(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}$。

例

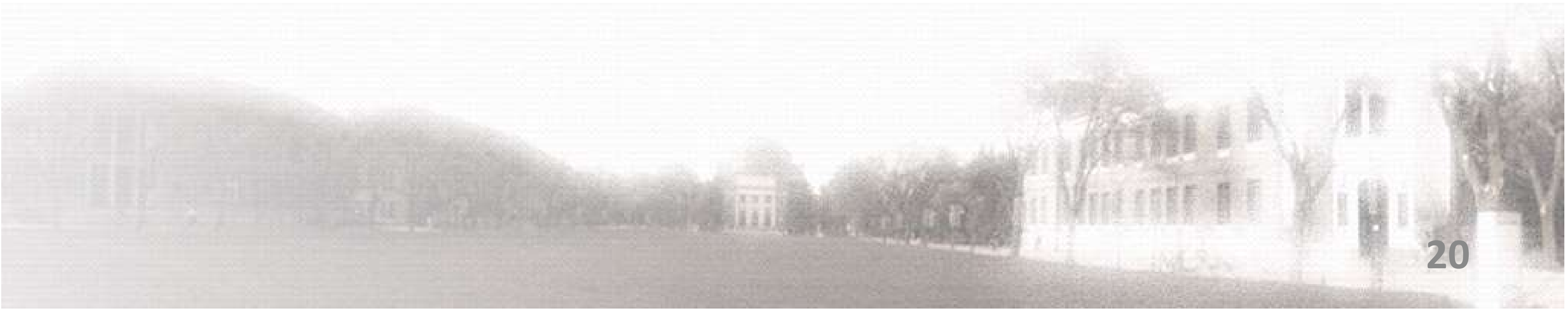
3 ⇒ 4: 已知$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$，

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cap \sim\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A} \cap \mathrm{B}) \cap \sim\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \sim\boldsymbol{B}) = \emptyset$$

4 ⇒ 1: 已知$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \emptyset$，

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \cup (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B} \cup \emptyset = \boldsymbol{B}$$

其中， $\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \cup (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$见差集运算性质**(3)**。



例

已知$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C}, \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C}$，证明**B=C**。

证明**1**：

$$
\begin{aligned}
B = B \cap (A \cup B) &= B \cap (A \cup C) \\
&= (B \cap A) \cup (B \cap C) \\
&= (A \cap C) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C \\
&= (A \cup C) \cap C = C
\end{aligned}
$$

证明**2**：反证法。请同学自己尝试。

幂集的性质

集合幂集运算具有下列性质：

1) $A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$；

2) $A = B \Leftrightarrow P(A) = P(B)$;

3) $P(A) \in P(B) \Rightarrow A \in B$;

4) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$;

5) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$;

6) $P(A-B) \subseteq (P(A)-P(B)) \cup \{\varnothing\}$。

幂集性质(1)的证明

(1) 先证必要性。

对于任意的x，

$x \in P(A)$

$\Leftrightarrow x \subseteq A$

$\Rightarrow x \subseteq B$ $(A \subseteq B)$

$\Leftrightarrow x \in P(B)$，

故有 $P(A) \subseteq P(B)$。

再证充分性。

对于任意的y，

$y \in A$

$\Leftrightarrow \{y\} \in P(A)$

$\Rightarrow \{y\} \in P(B)$ $(P(A) \subseteq P(B))$

$\Leftrightarrow y \in B$

所以，$A \subseteq B$。

幂集性质(6)的证明

对于任意的集合**x**，

若$x=\varnothing$，$x\in P(A)\cup P(B)$ 且$x\in (P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}$。若$x\neq\varnothing$，

$x\in P(A-B)$

$$\Leftrightarrow x\subseteq A-B \Rightarrow x\subseteq A \wedge x\not\subseteq B$$

$$\Leftrightarrow x\in P(A) \wedge x\notin P(B)$$

$$\Leftrightarrow x\in (P(A)-P(B))$$

综上所述，可知 $P(A-B)\subseteq (P(A)-P(B))\cup\{\varnothing\}$。

小结

(1) 集合恒等式

- **13**组最基本的集合恒等式

(2) 半形式化方法

- 推导集合等式和包含式