单元3.5 二元关系

第七章 二元关系

7.2 二元关系

7.3 关系的运算

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

关系

- 关系理论历史悠久，与集合论、数理逻辑、组合学、图论和布尔代数都有密切的联系。
- 关系是日常生活以及数学中的一个基本概念，如：兄弟关系，师生关系，位置关系，大于关系，全等关系，包含关系等等。
- 关系理论广泛应用于数学领域及计算机领域：数据输入输出关系、以关系为核心的关系数据库、信息检索等。

内容提要

- n元关系
- 二元关系
- A到B的二元关系
- A上的二元关系
- 一些特殊关系
- 关系的表示方法

n元关系

- **n**元关系**:** 其元素全是有序**n**元组或为空集的集合.
- 例**1:** F_1**={<a,b,c,d>,<1,2,3,4>,**

  <物理**,**化学**,**生物**,**数学**>},**

  F_1是**4**元关系. **#**
- 例**2:** F_2**={<a,b,c>,<**α**,**β**,**γ**>,**

  <大李**,**小李**,**老李**>}**

  F_2是**3**元关系. **#**

二元关系

- **2元关系(关系):** 元素全是有序对或为空集的集合.
- 例: $R_1=\{\langle 1,2\rangle,\langle \alpha,\beta\rangle,\langle a,b\rangle\}$

  R_1是2元关系. #
- 例: $R_2=\{\langle 1,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle$白菜,小猫$\rangle\}$

  R_2是2元关系. #
- 例: $A=\{\langle a,b\rangle,\langle 1,2\rangle,a,\alpha,1\}$

  当$a,\alpha,1$不是有序对时, A不是关系. #

举例

(1) $R=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in \mathrm{N},\ x+y<3\}$

$=\{\langle 0,0\rangle, \langle 0,1\rangle, \langle 0,2\rangle, \langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,0\rangle\}$

(2) $C=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in \mathrm{R},\ x^2+y^2=1\}$，

C是直角坐标平面上点的横、纵坐标之间的关系，

C中的所有的点恰好构成坐标平面上的单位圆.

(3) $R=\{\langle x,y,z\rangle \mid x,y,z\in \mathrm{R},\ x+2y+z=3\}$，

R代表了空间直角坐标系中的一个平面.

举例

员工号	姓名	年龄	性别	工资
301	张　林	**50**	男	**1600**
302	王晓云	**43**	女	**1250**
303	李鹏宇	**47**	男	**1500**
304	赵　辉	**21**	男	**900**
…	**…**	**…**	**…**	**…**

5元组：

<301,张林,50,男,1600>，<302,王晓云,43,女,1250>

二元关系的记号

- 设**F**是二元关系, 则

  $\langle x,y\rangle \in F \Leftrightarrow x$与$y$具有$F$关系 $\Leftrightarrow xFy$

- 对比: xFy (中缀(infix)记号)

  $F(x,y)$, Fxy (前缀(prefix)记号)

  $\langle x,y\rangle \in F$, xyF (后缀(suffix)记号)

- 例如: $2<15 \Leftrightarrow <(2,15) \Leftrightarrow \langle 2,15\rangle \in <$.

A到B的二元关系

- A到B的二元关系：A×B的任意子集（含空集）.

  R是A到B的二元关系

  $\Leftrightarrow$ R$\subseteq$A×B $\Leftrightarrow$ R$\in$P(A×B)
- 若|A|=m,|B|=n, 则|A×B|=mn, 故

  $|P(A\times B)|=2^{mn}$

即A到B不同的二元关系共有2^{mn}个

A到B的二元关系举例

- 设 $A=\{a_1,a_2\}$, $B=\{b\}$,

  则A到B的二元关系共有4个:

  $R_1=\emptyset$, $R_2=\{<a_1,b>\}$, $R_3=\{<a_2,b>\}$,
  $R_4=\{<a_1,b>,<a_2,b>\}$.

  B到A的二元关系也有4个:

  $R_5=\emptyset$, $R_6=\{<b,a_1>\}$, $R_7=\{<b,a_2>\}$,
  $R_8=\{<b,a_1>,<b,a_2>\}$. #

A上的二元关系

- **A**上的二元关系**:** 是**A×A**的任意子集

  R是**A**上的二元关系

  $\Leftrightarrow$ **R⊆A×A** $\Leftrightarrow$ **R∈P(A×A)**

- 若**|A|=m,** 则**|A×A|=m²,** 故

  |P(A×A)|= 2^{m^2}

即**A**上不同的二元关系共有 2^{m^2} 个

- **m=3?**

A上的二元关系(例1)

- 例**1:** 设 $A=\{a_1,a_2\}$,

  则**A**上的二元关系共有**16**个:

  $R_1 = \varnothing$,

  $R_2 = \{<a_1,a_1>\}$,

  $R_3 = \{<a_1,a_2>\}$,

  $R_4 = \{<a_2,a_1>\}$,

  $R_5 = \{<a_2,a_2>\}$,

A上的二元关系(例1)

$R_6 = \{ \langle a_1,a_1 \rangle, \langle a_1,a_2 \rangle \},$

$R_7 = \{ \langle a_1,a_1 \rangle, \langle a_2,a_1 \rangle \},$

$R_8 = \{ \langle a_1,a_1 \rangle, \langle a_2,a_2 \rangle \},$

$R_9 = \{ \langle a_1,a_2 \rangle, \langle a_2,a_1 \rangle \},$

$R_{10} = \{ \langle a_1,a_2 \rangle, \langle a_2,a_2 \rangle \},$

$R_{11} = \{ \langle a_2,a_1 \rangle, \langle a_2,a_2 \rangle \},$

A上的二元关系(例1)

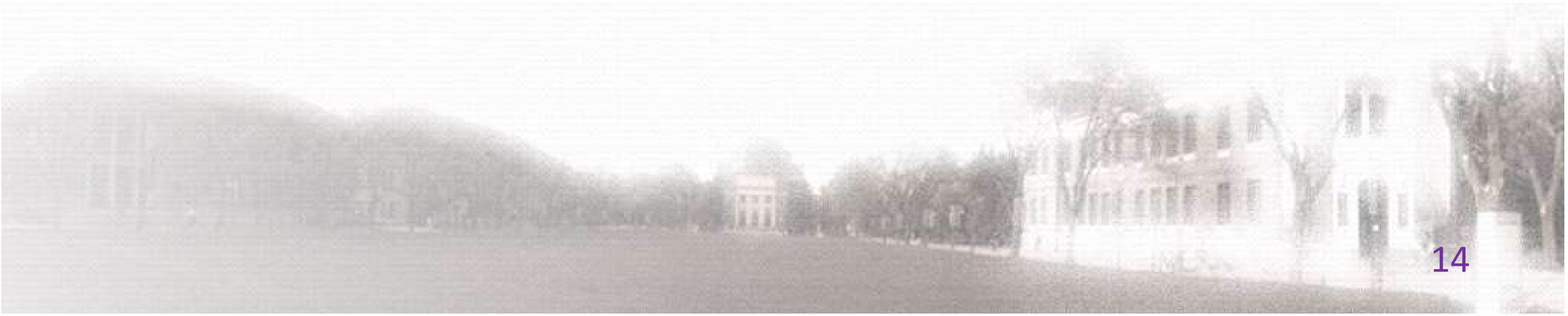
$R_{12} = \{ \langle a_1,a_1 \rangle,\langle a_1,a_2 \rangle,\langle a_2,a_1 \rangle \}$

$R_{13} = \{ \langle a_1,a_1 \rangle,\langle a_1,a_2 \rangle, \langle a_2,a_2 \rangle \}$

$R_{14} = \{ \langle a_1,a_1 \rangle, \langle a_2,a_1 \rangle,\langle a_2,a_2 \rangle \}$

$R_{15} = \{ \langle a_1,a_2 \rangle,\langle a_2,a_1 \rangle,\langle a_2,a_2 \rangle \}$

$R_{16} = \{\langle a_1,a_1 \rangle,\langle a_1,a_2 \rangle,\langle a_2,a_1 \rangle,\langle a_2,a_2 \rangle\}$. #

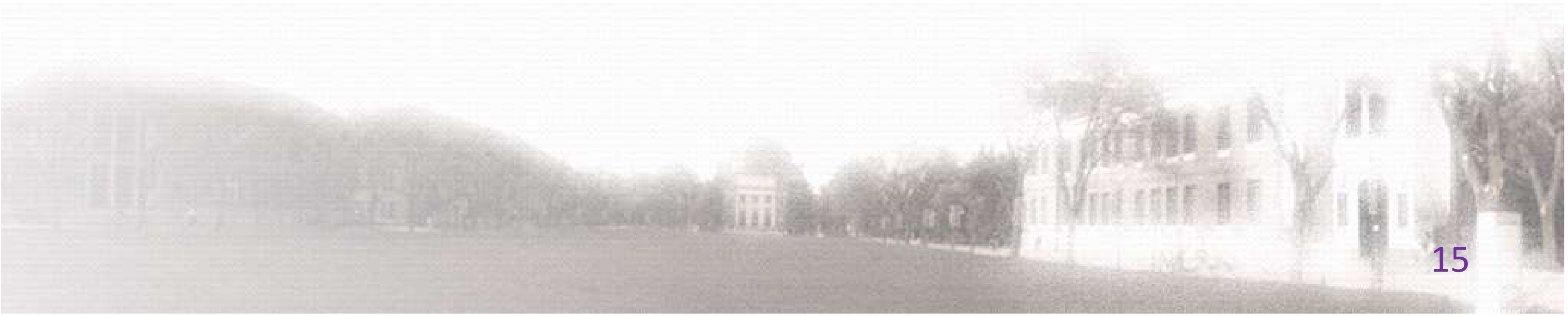


A上的二元关系(例2)

- 例2: 设 B={b},

  则B上的二元关系共有2个:

  $R_1=\varnothing$,　$R_2=\{<b,b>\}$.　#



一些特殊关系

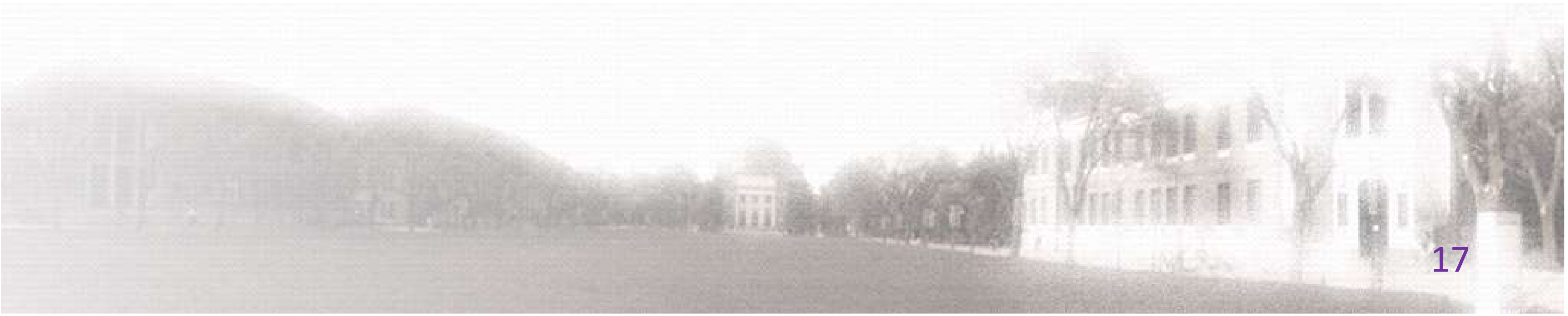
- 空关系
- 恒等关系
- 全域关系
- 整除关系
- 小于等于关系,…
- 包含关系,
- 真包含关系

特殊关系

设**A**是任意集合, 则可以定义**A**上的:

- 空关系:　$\varnothing$
- 恒等关系:　$I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$
- 全域关系:

$$E_A=A\times A=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in A\}$$



特殊关系

设$A\subseteq Z^+$, 则可以定义A上的:

- 整除关系:

$$D_A = \{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \land y\in A \land x|y \}$$

- 例: A={1,2,3,4,5,6}, 则

D_A={$\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,$
$\langle 1,5\rangle,\langle 1,6\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 2,6\rangle,$
$\langle 3,3\rangle,\langle 3,6\rangle,\langle 4,4\rangle,\langle 5,5\rangle,\langle 6,6\rangle$}.#

特殊关系

设**$A \subseteq R$**, 则可以定义**A**上的:

- 小于等于(**less than or equal to**)关系:

$$LE_A = \{ \langle x,y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x \le y \}$$

- 小于(**less than**)关系,

$$L_A = \{ \langle x,y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \wedge x < y \}$$

- 大于等于(**greater than or equal to**)关系
- 大于(**great than**)关系,...

特殊关系

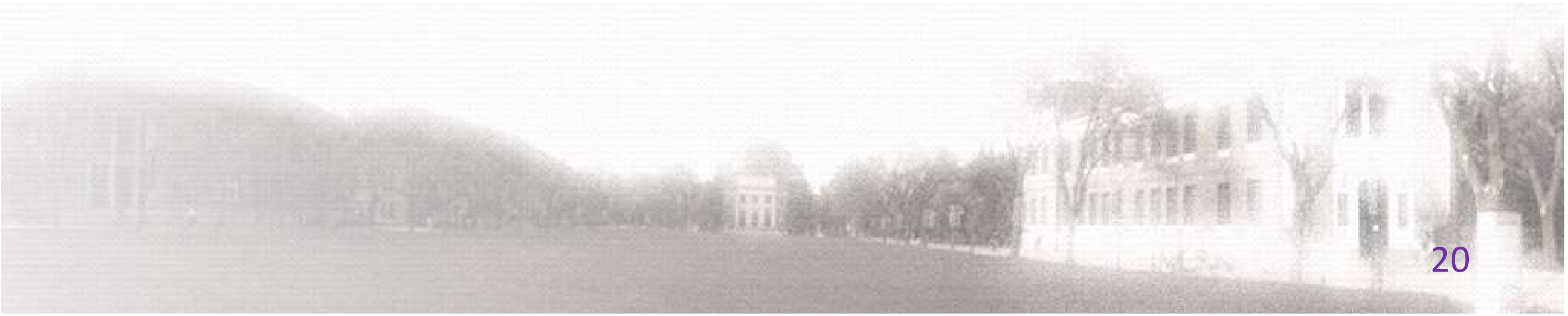
设A为任意集合, 则可以定义P(A)上的:

- 包含关系:

$$\subseteq_A = \{ \langle x,y \rangle \mid x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subseteq y \}$$

- 真包含关系:

$$\subset_A = \{ \langle x,y \rangle \mid x \subseteq A \wedge y \subseteq A \wedge x \subset y \}$$



举例

例如, $A=\{1,2\}$, 则

$E_A=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>\}$

$I_A=\{<1,1>,<2,2>\}$

例如 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, 则

$LE_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>\}$

$D_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$

$C=P(B)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$, 则$C$上的包含关系是

$R_{\subseteq}=\{<\varnothing,\varnothing>,<\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,<\varnothing,\{a,b\}>,<\{a\},\{a\}>,$

$<\{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{b\}>,<\{b\},\{a,b\}>,<\{a,b\},\{a,b\}>\}$

关系的表示法

- 关系的表示
  - 集合
  - 关系矩阵
  - 关系图

关系矩阵

- $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, $R \subseteq A \times A$
- R的关系矩阵

$$M(R)=(r_{ij})_{n \times n} \qquad M(R)(i,\ j) = r_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i R a_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

- 若$A=\{x_1, x_2, ..., x_m\}$，$B=\{y_1, y_2, ..., y_n\}$，R是从A到B的关系，R的关系矩阵是布尔矩阵$M_R = [\ r_{ij}\ ]_{m \times n}$, 其中 $r_{ij} = 1 \Leftrightarrow \langle x_i, y_j \rangle \in R$.

例

- **A={a,b,c}**

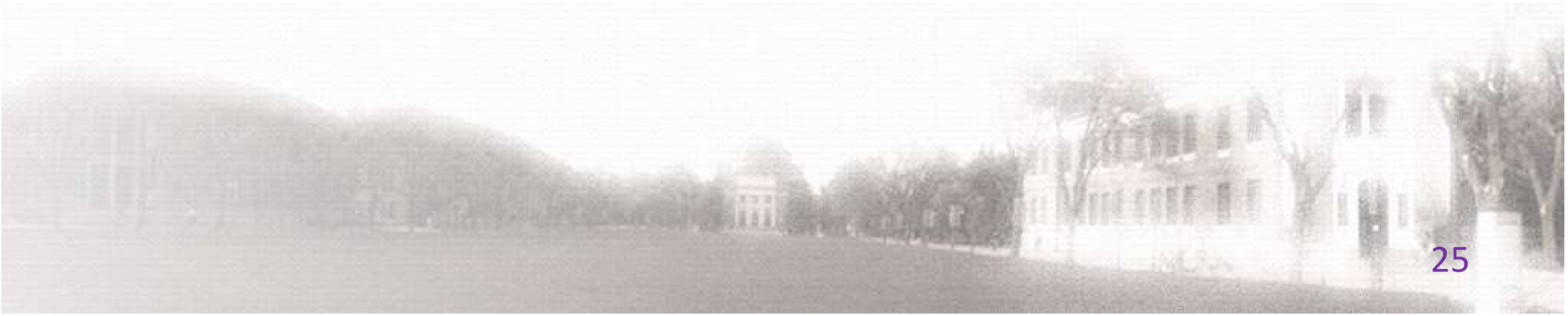
R_1={<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>}

R_2={<a,b>,<a,c>,<b,c>}

$$M(R_1)=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\quad M(R_2)=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

关系图

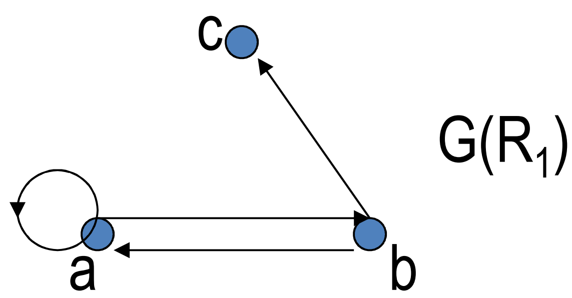
- $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$, $R\subseteq A\times A$
- R的关系图 G(R)
  - 以“o”表示A中元素(称为顶点), 以“→”表示R中元素(称为有向边)
  - 若a_iRa_j, 则从顶点a_i向顶点a_j引有向边$<a_i,a_j>$



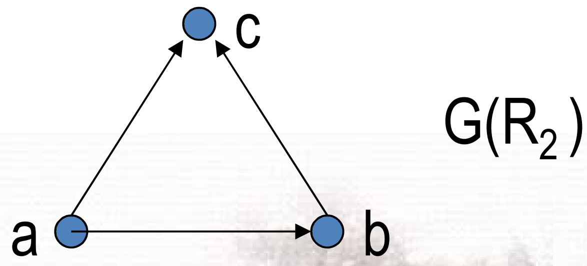
例

- **A={a,b,c}**

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,c>\}$



$R_2=\{<a,b>,<a,c>,<b,c>\}$



讨论

- 当**A**中元素标定次序后, 对于$R \subseteq A \times A$
  - **G(R)**与**R**的集合表达式可唯一互相确定
  - **R**的集合表达式,关系矩阵,关系图三者均可唯一互相确定
- 对于$R \subseteq A \times B$
  - $|A|=n, |B|=m$,关系矩阵**M(R)**是$n \times m$阶
  - **G(R)**中边都是从**A**中元素指向**B**中元素

小结

- $R \subseteq A \times B$, $R \subseteq A \times A$; xRy
- $\varnothing$, I_A, E_A;
- $M(R)$, $G(R)$