



清华大学
Tsinghua University

单元3.9 等价关系与划分

第七章 二元关系 7.6 等价关系与划分

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

- 等价关系、等价类、商集
- 同余关系
- 划分、划分的块

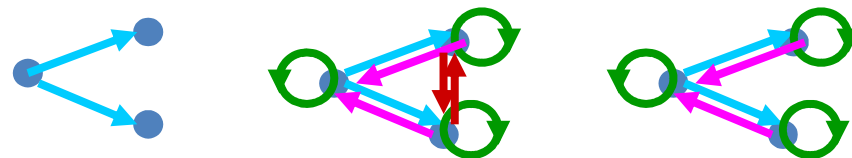


等价关系

定义2.14 设 $A \neq \emptyset$ 且 $R \subseteq A \times A$, 若 R 是**自反、对称、传递的**, 则说 R 是**等价关系**.

	关系	自反	对称	传递	等价关系
R_1	x 与 y 同年生	√	√	√	√
R_2	x 与 y 同姓	√	√	√	√
R_3	x 的年龄不比 y 小	√	×	√	×
R_4	x 与 y 选修同门课程	√	√	×	×
R_5	x 的体重比 y 重	×	×	√	×

例



例 设 $A \neq \emptyset$ 且 $R \subseteq A \times A$, 对 R 依次求三种闭包, 共有 6 种不同顺序, 其中哪些顺序一定导致等价关系? (说明: $\text{tsr}(R) = \text{t}(\text{s}(\text{r}(R)))$)

解 由于 $\text{sr}(R) = \text{rs}(R)$, $\text{tr}(R) = \text{rt}(R)$, $\text{st}(R) \subseteq \text{ts}(R)$, 所以 6 种顺序至多产生两种结果:

	$\text{tsr}(\mathbf{R}) = \text{trs}(\mathbf{R}) = \text{rts}(\mathbf{R})$	$\text{str}(\mathbf{R}) = \text{srt}(\mathbf{R}) = \text{rst}(\mathbf{R})$
自反	√	√
对称	√	√
传递	√	×
等价关系	√(等价闭包)	×

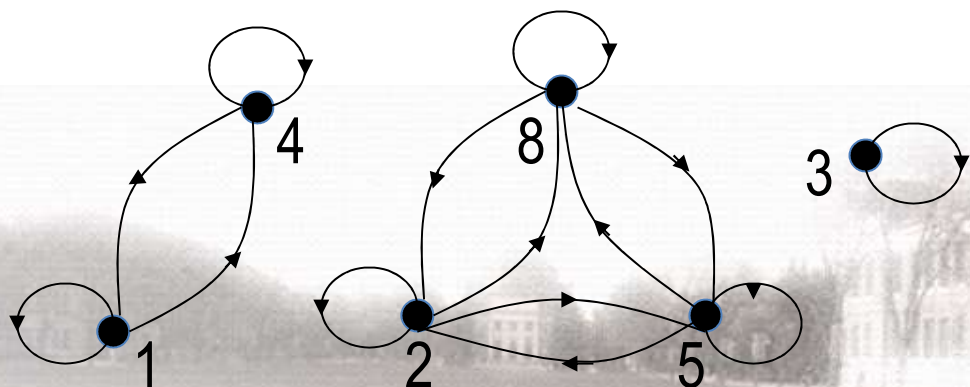
等价类

定义 设 R 是 $A \neq \emptyset$ 上等价关系, $\forall x \in A$, 则 x 关于 R 的等价类是 $[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge xRy \}$, 简称为 x 的等价类, 简记为 $[x]$ 。

例 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$, A 上模3同余关系

$R_3 = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y \pmod{3} \}$ 的等价类

$[1] = [4] = \{1, 4\}$, $[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}$, $[3] = \{3\}$



同余关系是等价关系

- 自反性

$$x-x=\mathbf{0}\cdot n$$

- 对称性

$$x-y=\mathbf{k}\cdot n \Rightarrow y-x=\mathbf{(-k)}\cdot n$$

- 传递性

$$x-y=\mathbf{k_1}\cdot n \wedge y-z=\mathbf{k_2}\cdot n \Rightarrow x-z=\mathbf{(k_1+k_2)}\cdot n$$

定理

定理 设 R 是 $A \neq \emptyset$ 上等价关系, 则 $\forall x, y \in A$,

(1) $[x]_R \neq \emptyset$; (2) $xRy \Rightarrow [x]_R = [y]_R$;

(3) $\neg xRy \Rightarrow [x]_R \cap [y]_R = \emptyset$; (4) $\cup\{[x]_R \mid x \in A\} = A$.

证明 (1) R 自反 $\Rightarrow xRx \Rightarrow x \in [x]_R \Rightarrow [x]_R \neq \emptyset$.

(2) $\forall z, z \in [x]_R \Rightarrow zRx \wedge xRy \Rightarrow zRy \Rightarrow z \in [y]_R$.

所以 $[x]_R \subseteq [y]_R$. 同理 $[x]_R \supseteq [y]_R$.

(3) (反证) 假设 $\exists z, z \in [x]_R \cap [y]_R$, 则 $z \in [x]_R \cap [y]_R \Rightarrow zRx \wedge zRy \Rightarrow xRz \wedge zRy \Rightarrow xRy$, 这与 $\neg xRy$ 矛盾!

(4) \supseteq : $\forall x \in A, x \in [x]_R \subseteq \cup\{[x]_R \mid x \in A\} \Rightarrow A \subseteq \cup\{[x]_R \mid x \in A\}$. \subseteq : $\forall x \in A, [x]_R \subseteq A \Rightarrow \cup\{[x]_R \mid x \in A\} \subseteq A$. #

商集

定义 设 R 是 $A \neq \emptyset$ 上等价关系， A 关于 R 的商集（简称 A 的商集）是 $A/R = \{ [x]_R \mid x \in A \}$ 。

• 显然 $\cup A/R = A$

• 例: 设 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$, A 上模3同余关系

$$A/R_3 = \{ [1]_R, [2]_R, [3]_R \} = \{ \{1, 4\}, \{2, 5, 8\}, \{3\} \}$$

例

- $A=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 上等价关系有: $I_A, E_A,$
 $R_{ij}=I_A \cup \{ \langle a_i, a_j \rangle, \langle a_j, a_i \rangle \}, a_i, a_j \in A, i \neq j.$
 $A/I_A = \{ \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_n\} \}$
 $A/E_A = \{ \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \}$
 $A/R_{ij} = (A/I_A) \cup \{ \{a_i, a_j\} \} - \{ \{a_i\}, \{a_j\} \}$
 $= \{ \{a_1\}, \dots, \{a_{i-1}\}, \{a_{i+1}\}, \dots, \{a_{j-1}\}, \{a_{j+1}\}, \dots, \{a_n\},$
 $\quad \{a_i, a_j\} \}$

空关系 \emptyset 不是 A 上等价关系(非自反)

例

- $A=\{a,b,c\}$ 上全体等价关系共有**5**种

$$R_1=I_A, \quad R_2=E_A, \quad R_3=I_A \cup \{<b,c><c,b>\},$$

$$R_4=I_A \cup \{<a,c><c,a>\}, \quad R_5=I_A \cup \{<a,b><b,a>\}$$

- 商集: $\{\{a\},\{b\},\{c\}\}, \{\{a,b,c\}\}, \{\{a\},\{b,c\}\},$
 $\{\{a,c\},\{b\}\}, \{\{a,b\},\{c\}\}$

还有其余的等价关系吗? (A 上关系数 $2^{3^2} = 2^9 = 512$)

划分

定义 $A \neq \emptyset$ 的一个划分是 $\mathcal{A} \subseteq P(A)$ 满足

(1) $\emptyset \notin \mathcal{A}$

(2) $\forall x, y (x, y \in \mathcal{A} \wedge x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset)$

(3) $\cup \mathcal{A} = A$

\mathcal{A} 中元素称为划分块(block).



定理

- 设 $A \neq \emptyset$, 则

(1) R 是 A 上等价关系 \Rightarrow 商集 A/R 是 A 的划分

(2) \mathcal{A} 是 A 的划分 \Rightarrow 同块关系 $R_{\mathcal{A}}$

$$xR_{\mathcal{A}}y \Leftrightarrow \exists z(z \in \mathcal{A} \wedge x \in z \wedge y \in z)$$

是 A 上等价关系. #

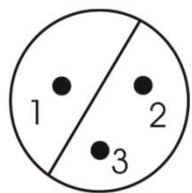
- $R_{\mathcal{A}}$ 称为由划分 \mathcal{A} 所定义的等价关系

非空集合的等价关系与划分一一对应。

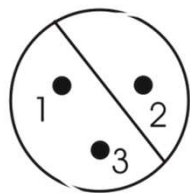
例

例 给出 $A=\{1,2,3\}$ 上所有的等价关系

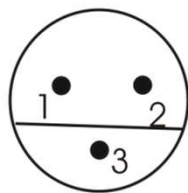
求解思路：先做出 A 的所有划分, 然后根据划分写出对应的等价关系.



π_1



π_2



π_3

π_4 对应于全域关系 E_A

π_5 对应于恒等关系 I_A

π_1 , π_2 和 π_3 分别对应于等价关系

$$R_1 = \{ \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle \} \cup I_A$$

$$R_2 = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle \} \cup I_A$$

$$R_3 = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle \} \cup I_A$$

例

例5 设 $A=\{1,2,3,4\}$, 在 $A\times A$ 上定义二元关系

$R: \langle \langle x, y \rangle, \langle u, v \rangle \rangle \in R \Leftrightarrow x+y = u+v,$

求 R 导出的划分.

解 $A\times A = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle\}$
 $|A\times A|=16$

根据有序对 $\langle x,y \rangle$ 的 $x+y=2,3,4,5,6,7,8$ 将 $A\times A$ 划分.

$(A\times A)/R = \{\{\langle 1,1 \rangle\}, \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}, \{\langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}, \{\langle 1,4 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 4,1 \rangle\}, \{\langle 2,4 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,2 \rangle\}, \{\langle 3,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle\}, \{\langle 4,4 \rangle\}\}$

Stirling子集数

- 把n个不同球放到k个相同盒子, 要求无空盒, 不同放法的总数

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

称为Stirling子集数。

- 把n元集分成k个非空子集的分法总数
(课本P282)

Stirling子集数递推公式

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0, \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1, \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1, \left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = C_n^2, \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1.$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}.$$

先把**n-1**个元素分成**k**个子集, 再加入第**n**个元素到其中之一

先把**n-1**个元素分成**k-1**个子集, 再让第**n**个元素自成一子集

例

- **$A=\{a,b,c\}$ 上有5种等价关系**

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 3 \end{Bmatrix} = 1 + 2^2 - 1 + 1 = 5$$

- **$A=\{a,b,c,d\}$ 上有15种等价关系**

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \end{Bmatrix} = 1 + (2^3 - 1) + C_4^2 + 1 = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$$

小结

- \sim 等价关系(自反, 对称, 传递)
 - 等价类 $[x]$, 商集 A/R
 - 同余关系
- 划分, 块

