单元3.8 关系的闭包

第七章 二元关系

7.5 关系的闭包

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

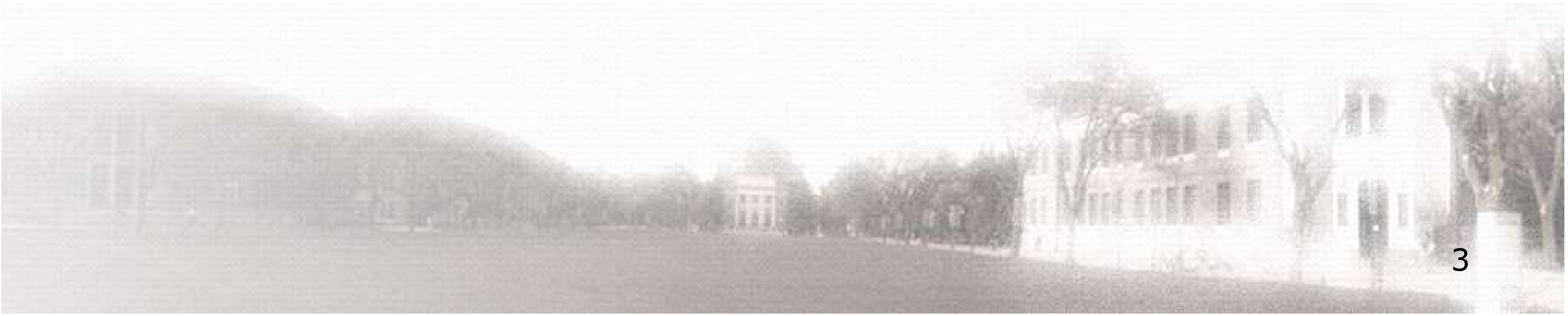
内容提要

- 关系的自反闭包
- 关系的对称闭包
- 关系的传递闭包
- 闭包的性质和反例
- 闭包的求法

关系的闭包

关系闭包：增加**最少**元素使其具备所需性质

- 自反闭包**r(R)**
- 对称闭包**s(R)**
- 传递闭包**t(R)**



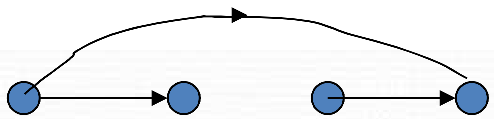
自反闭包

- 自反闭包**r(R)**

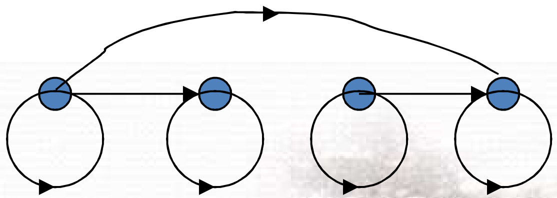
(1) $R \subseteq r(R)$

(2) r(R)是自反的

(3) $\forall S((R \subseteq S \wedge S$自反$) \rightarrow r(R) \subseteq S)$



G(R)



G(r(R))

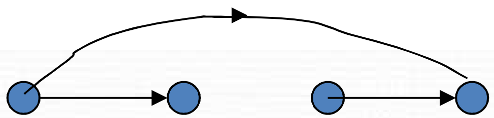
对称闭包

- 对称闭包**s(R)**

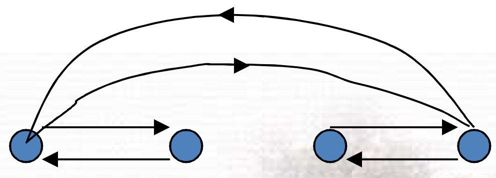
  (1) $R \subseteq s(R)$

  (2) $s(R)$是对称的

  (3) $\forall S(\ (R \subseteq S \wedge S\text{对称}) \rightarrow s(R) \subseteq S\ )$



G(R)



G(s(R))

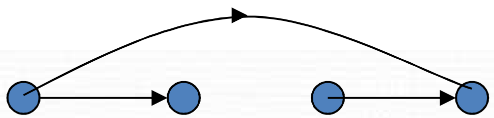
传递闭包

- 传递闭包**t(R)**

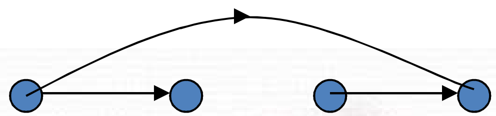
  (1) $R \subseteq t(R)$

  (2) $t(R)$是传递的

  (3) $\forall S(\,(R \subseteq S \wedge S$传递$) \rightarrow t(R) \subseteq S\,)$



G(R)



G(t(R))

例

设A={1,2,3}, R={<1,2>, <2,3>}是A上的关系。试判断下列关系是否是R的自反闭包、对称闭包、传递闭包。

R1={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,3>}

R2={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>,<2,3>,<1,3>}

R3={<1,2>,<2,1>,<2,3>,<3,2>}

R4 ={<1,1>, <2,2>, <3,3>, <1,2>, <2,1>, <2,3>, <3,2>, <1,3>, <3,1>}

定理

定理 设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \varnothing$, 则

(1) R自反 $\Leftrightarrow$ $r(R)=R$; (2) R对称 $\Leftrightarrow$ $s(R)=R$;

(3) R传递 $\Leftrightarrow$ $t(R)=R$. #

定理 设 $R_1 \subseteq R_2 \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) $r(R_1) \subseteq r(R_2)$; (2) $s(R_1) \subseteq s(R_2)$;

(3) $t(R_1) \subseteq t(R_2)$. #

(1)证: 由$R_1 \subseteq R_2$和$R_2 \subseteq r(R_2)$，有$R_1 \subseteq r(R_2)$。又$r(R_2)$）是自反的，根据$r(R_1)$为R_1自反闭包定义，必有$r(R_1) \subseteq r(R_2)$。

定理

定理 设 $R_1,R_2\subseteq A\times A$ 且 $A\neq\varnothing$, 则

(1) $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$; (2) $s(R_1\cup R_2)=s(R_1)\cup s(R_2)$;

(3) $t(R_1\cup R_2)\supseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

证明: (1) $\subseteq$: $R_1\cup R_2\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$. 由 $r(R_1)\cup r(R_2)$ 自反, 所以 $r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$.

$\supseteq$: 同时, $(R_1\subseteq R_1\cup R_2)\wedge(R_2\subseteq R_1\cup R_2)\Rightarrow r(R_1)\subseteq r(R_1\cup R_2)\wedge r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)\Rightarrow r(R_1)\cup r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)$. #

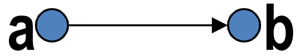
(2)可类似证明.

(3) $(R_1\subseteq R_1\cup R_2)\wedge(R_2\subseteq R_1\cup R_2)\Rightarrow t(R_1)\subseteq t(R_1\cup R_2)\wedge t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)\Rightarrow t(R_1)\cup t(R_2)\subseteq t(R_1\cup R_2)$. #

注意: $t(R_1)\cup t(R_2)$不一定传递, 请同学们举反例

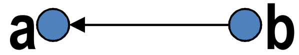
所以没有 $t(R_1\cup R_2)\subseteq t(R_1)\cup t(R_2)$.

反例



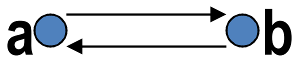
$G(R_1)=G(t(R_1))$

传递



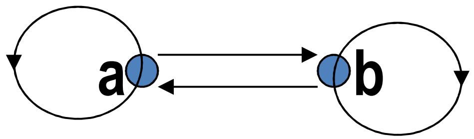
$G(R_2)=G(t(R_2))$

传递



$G(t(R_1)\cup t(R_2))$

非传递



$G(t(R_1\cup R_2))$

传递

闭包的求法

- 定理7.10 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

  $r(R)=R \cup I_A$

  $s(R)=R \cup R^{-1}$

  $t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

- 对比: R自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$

  R对称 $\Leftrightarrow R=R^{-1}$

  R传递 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$

定理

定理 $r(R)=R\cup I_A$

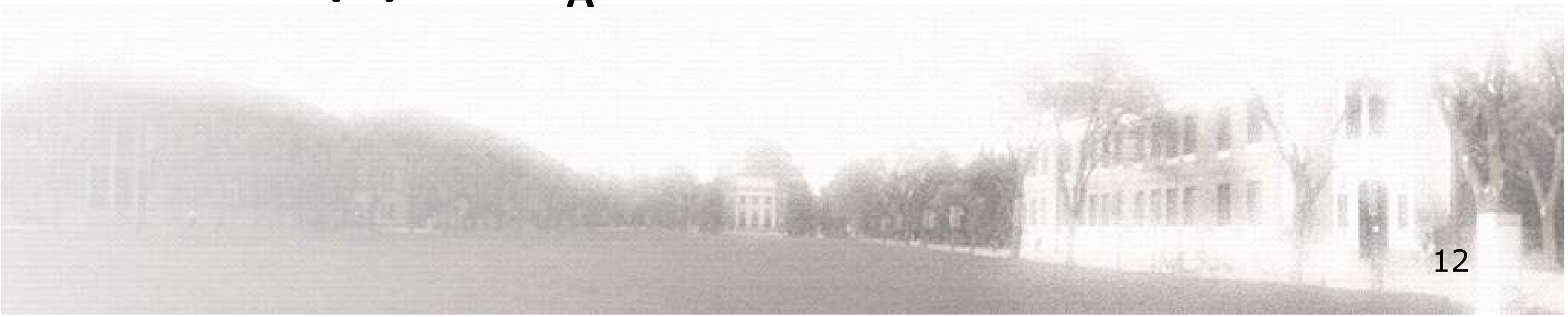
证明 (1) $R\subseteq R\cup I_A$

(2) $I_A\subseteq R\cup I_A \Leftrightarrow R\cup I_A$自反$\Rightarrow r(R)\subseteq R\cup I_A$

(3) $(R\subseteq r(R))\wedge(r(R)$自反$)$

$\Leftrightarrow R\subseteq r(R)\wedge I_A\subseteq r(R)\Rightarrow R\cup I_A\subseteq r(R)$

$\therefore r(R)=R\cup I_A$ #



定理

定理 $s(R)=R\cup R^{-1}$　　引理：$(R_1\cup R_2)^{-1}=R_1^{-1}\cup R_2^{-1}$

证明 (1) $(R\cup R^{-1})^{-1}=R\cup R^{-1}\Leftrightarrow R\cup R^{-1}$对称

(2) $R\subseteq R\cup R^{-1}\Rightarrow s(R)\subseteq s(R\cup R^{-1})\Rightarrow s(R)\subseteq R\cup R^{-1}$

(3) $(R\subseteq s(R))\wedge(s(R)$对称$)$

$\Rightarrow R\subseteq s(R)\wedge R^{-1}\subseteq s(R)\Rightarrow R\cup R^{-1}\subseteq s(R)$

$\therefore\ s(R)=R\cup R^{-1}$　　#

$R^{-1}\subseteq s(R)$: $\forall x,y\in A, <x,y>\in R^{-1}\Leftrightarrow <y,x>\in R$

$$\Rightarrow <y,x>\in s(R)\Rightarrow <x,y>\in s(R),$$

$$\therefore R^{-1}\subseteq s(R).$$

定理

定理 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

证明 (1) $R \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

(2) $(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)^2 = R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

$\Leftrightarrow$ $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$传递 $\Rightarrow t(R) \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$

(3) $R \subseteq t(R) \wedge t(R)$传递

$\Rightarrow R \subseteq t(R) \wedge (R \subseteq t(R) \wedge R^2 \subseteq t(R) \wedge R^3 \subseteq t(R) \wedge \ldots)$

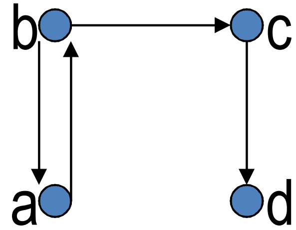
$\Rightarrow R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \subseteq t(R)$ $\quad \therefore\ t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots$ #

推论 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $0 < |A| < \infty$, 则$\exists \ell \in N$, 使得

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots \cup R^{\ell}. \quad \#$$

引理: $(A \cup B)^2 = A^2 \cup (A \circ B) \cup (B \circ A) \cup B^2$

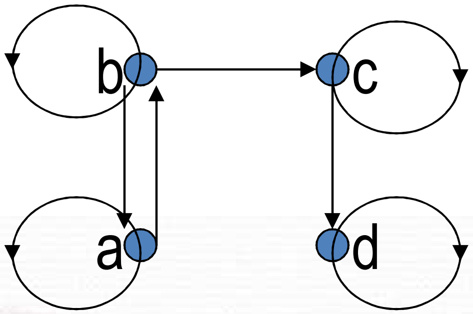
例

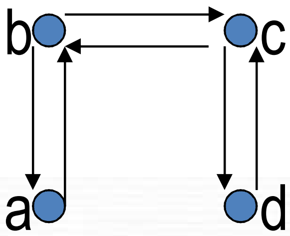


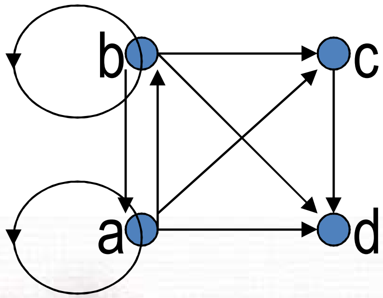
- **A={a,b,c,d},**

  R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>}.

  求 **r(R), s(R), t(R).**







例

- **R={<a,b>,<b,a>,<b,c>,<c,d>}**

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.\qquad M(r(R))=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

$$M(s(R))=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

例

$$M(R)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}. \quad M(R^2)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^3)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

$$M(R^4)=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=M(R^2).$$

例

$$M(t(R)) = M(R) \vee M(R^2) \vee M(R^3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \#$$

闭包运算与关系性质

- 定理**7.13** 若**R**具有某种性质，则其闭包是否满足该性质？

	自反性	对称性	传递性
r(R)	√ **(**定义**)**	√**(2)**	√**(3)**
s(R)	√**(1)**	√**(**定义**)**	×**(**反例**)**
t(R)	√**(1)**	√**(2)**	√**(**定义**)**

定理7.13(1)

定理7.13 （1）**R自反⇒ s(R)和t(R)自反**

证明 $I_A \subseteq R \cup R^{-1} = s(R)$

$\therefore$ **s(R)自反.**

$I_A \subseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = t(R)$

$\therefore$ **t(R)自反.**

定理7.13(2)

定理7. 13 R对称 $\Rightarrow$ r(R)和t(R)对称;

证明 $r(R)^{-1}=(I_A\cup R)^{-1}=I_A^{-1}\cup R^{-1}=I_A\cup R^{-1}=I_A\cup R=r(R)$

$\therefore$ r(R)对称.

$t(R)^{-1}=(R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots)^{-1}$

$=R^{-1}\cup(R^2)^{-1}\cup(R^3)^{-1}\cup\ldots$

$=R^{-1}\cup(R^{-1})^2\cup(R^{-1})^3\cup\ldots$ ($(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$)

$=R\cup R^2\cup R^3\cup\ldots$

$=t(R)$ $\therefore$ t(R)对称.

定理7.13(3)

定理7.13（3） **R传递 $\Rightarrow$ r(R)传递**

证明: $r(R) \circ r(R) = (I_A \cup R) \circ (I_A \cup R)$

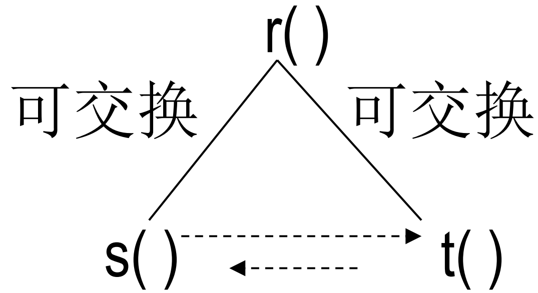
$= (I_A \circ I_A) \cup (I_A \circ R) \cup (R \circ I_A) \cup (R \circ R)$

$\subseteq I_A \cup R \cup R \cup R = I_A \cup R = r(R)$

$\therefore$ r(R)传递. #

反例 R传递, 但是s(R)非传递

定理



定理 设 $R \subseteq A \times A$ 且 $A \neq \varnothing$, 则

(1) $rs(R) = sr(R)$ (2) $rt(R) = tr(R)$ (3) $st(R) \subseteq ts(R)$

说明: **$rs(R)=r(s(R))$**

证明 (1) $rs(R) = r(s(R)) = r(R \cup R^{-1}) = I_A \cup (R \cup R^{-1})$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A^{-1} \cup R^{-1}) = (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R)^{-1}$

$= r(R) \cup r(R)^{-1} = s(r(R)) = sr(R).$

(2) $rt(R)=r(t(R)) = r(R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots) = I_A \cup (R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots)$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R \cup R^2) \cup (I_A \cup R \cup R^2 \cup R^3) \cup \ldots$

$= (I_A \cup R) \cup (I_A \cup R)^2 \cup (I_A \cup R)^3 \cup \ldots$

$= r(R) \cup r(R)^2 \cup r(R)^3 \cup \ldots = t(r(R))$

引理: $(R_1 \cup R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$,

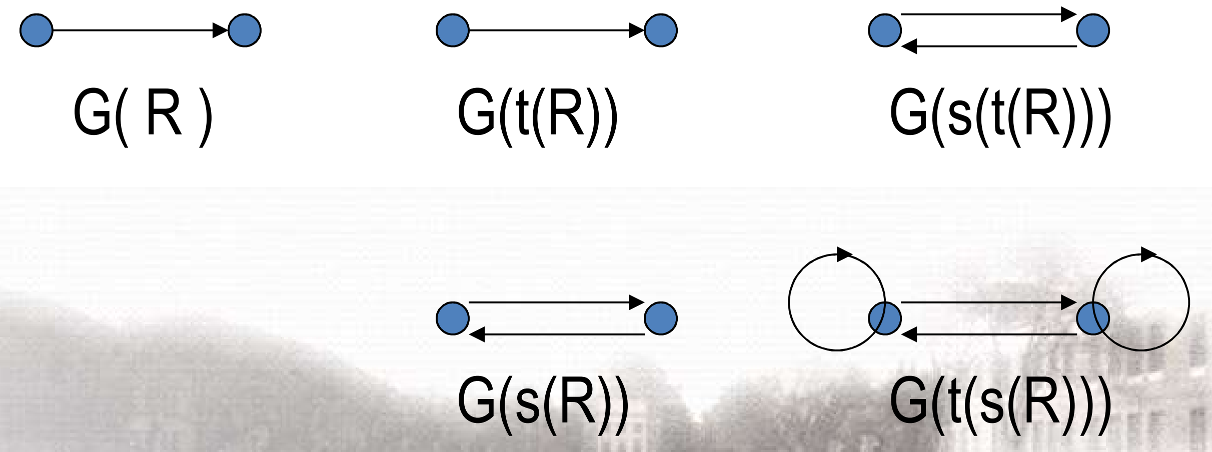
$(R \cup I_A)^n = I_A \cup R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n (n \geq 1)$

定理

证明 (3) $R \subseteq s(R) \Rightarrow st(R) \subseteq st(s(R)) = sts(R) = s(ts(R)) = ts(R)$

($ts(R)$对称, 定理7.13(2)). #

反例 $st(R) \subset ts(R)$



小结

- r(R), s(R), t(R)
- 反例