单元3.4 有序对与卡氏积

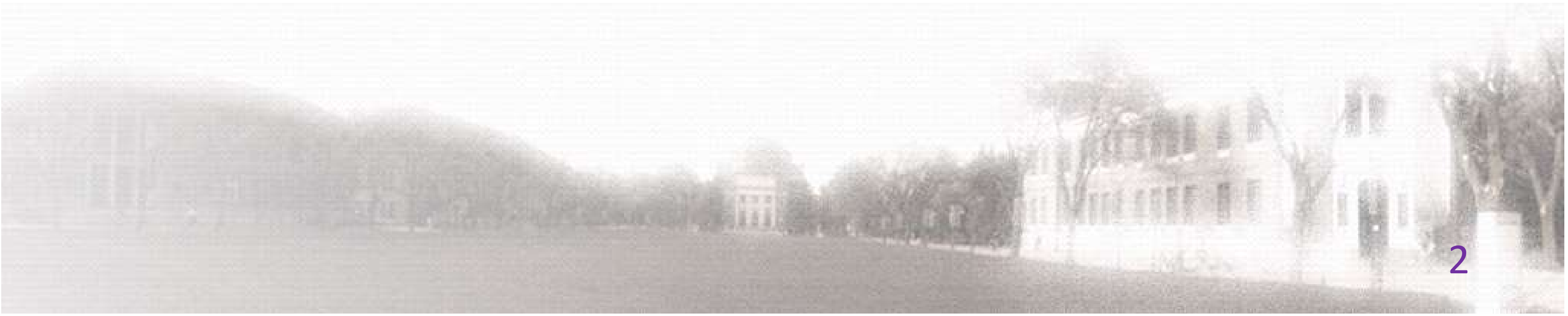
第七章 二元关系

7.1 有序对与笛卡尔积

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

- 有序对**(**有序二元组**)**
- 有序三元组**,** 有序**n**元组
- 卡氏积（笛卡尔积）
- 卡氏积性质



有序对

- 有序对： 由两个元素**a**和**b**（允许**a=b**）按照一定顺序排列成得二元组称为一个有序对。

$$\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

- **a**是第一元素, **b**是第二元素
- 例：**x-y**坐标，**<**中国**,** 北京**>**

引理1

引理1 $\{x,a\}=\{x,b\} \Leftrightarrow a=b$

证明 ($\Leftarrow$) 显然.

($\Rightarrow$) 分两种情况.

(1) $x=a$. $\{x,a\}=\{x,b\} \Rightarrow \{a,a\}=\{a,b\}$

$\Rightarrow \{a\}=\{a,b\} \Rightarrow a=b$.

(2) $x \neq a$. $a \in \{x,a\}=\{x,b\} \Rightarrow a=b$. #

引理2

引理2 设A、B为集族（集合的集合），若$\mathcal{A}=\mathcal{B}\neq\varnothing$, 则

(1) $\cup\mathcal{A}=\cup\mathcal{B}$

(2) $\cap\mathcal{A}=\cap\mathcal{B}$

证明 (1) $\forall x,\ x\in\cup\mathcal{A}\Leftrightarrow\exists z(z\in\mathcal{A}\wedge x\in z)$

$\Leftrightarrow\ \exists z(z\in\mathcal{B}\wedge x\in z)\ \Leftrightarrow x\in\cup\mathcal{B}.$

(2) $\forall x,\ x\in\cap\mathcal{A}\Leftrightarrow\forall z(\ z\in\mathcal{A}\to x\in z\ )$

$\Leftrightarrow\forall z(\ z\in\mathcal{B}\to x\in z\ )\Leftrightarrow x\in\cap\mathcal{B}.$ #

定理

定理 $<a,b>=<c,d> \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$

证明 ($\Leftarrow$) 显然.

($\Rightarrow$) 由引理2, $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \cap\{\{a\},\{a,b\}\}=\cap\{\{c\},\{c,d\}\} \Rightarrow \{a\}=\{c\} \Leftrightarrow a=c.$

又 $<a,b>=<c,d> \Leftrightarrow \{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$

$\Rightarrow \cup\{\{a\},\{a,b\}\}=\cup\{\{c\},\{c,d\}\} \Rightarrow \{a,b\}=\{c,d\}.$

再由引理1, 得$b=d$. #

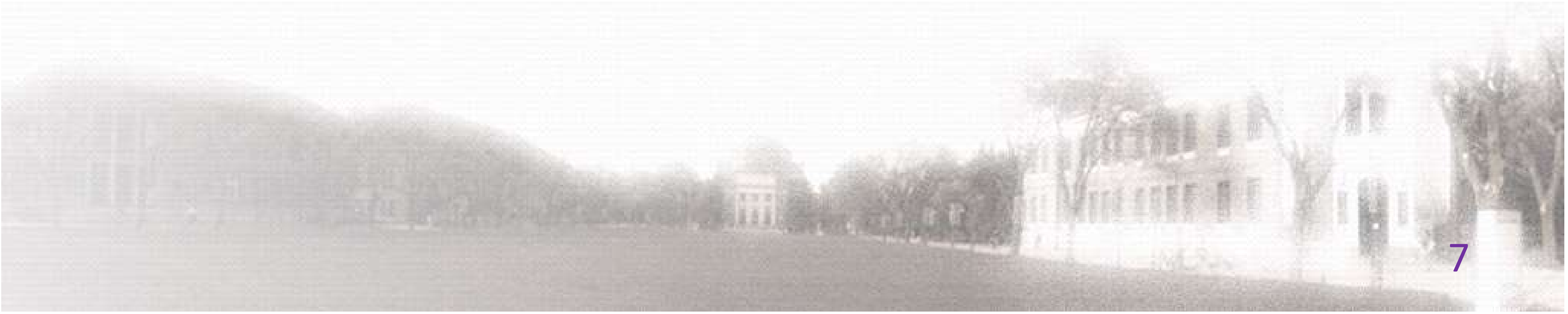
推论

推论 $a\neq b \Rightarrow \langle a,b\rangle \neq \langle b,a\rangle$

证明 (反证)

$$\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle \Leftrightarrow a=b,$$

与 $a\neq b$ 矛盾.　　#



有序三元组

- 有序三元组:

$$\langle a,b,c\rangle = \langle\langle a,b\rangle,c\rangle$$

- 有序n(n≥2)元组:

$$\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle = \langle\langle a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\rangle,a_n\rangle$$

- 定理2 $\langle a_1,a_2,\ldots,a_n\rangle = \langle b_1,b_2,\ldots,b_n\rangle$

$$\Leftrightarrow a_i = b_i\ ,\ \ i=1,2,\ldots,n. \quad \#$$

例：n维空间坐标，n维向量

例

- 用有序n元组描述下列语句

（1）中国北京清华大学自动化系

（2）2021年11月30日10点30分0 秒

解：

（1）<中国，北京，清华大学，自动化系>

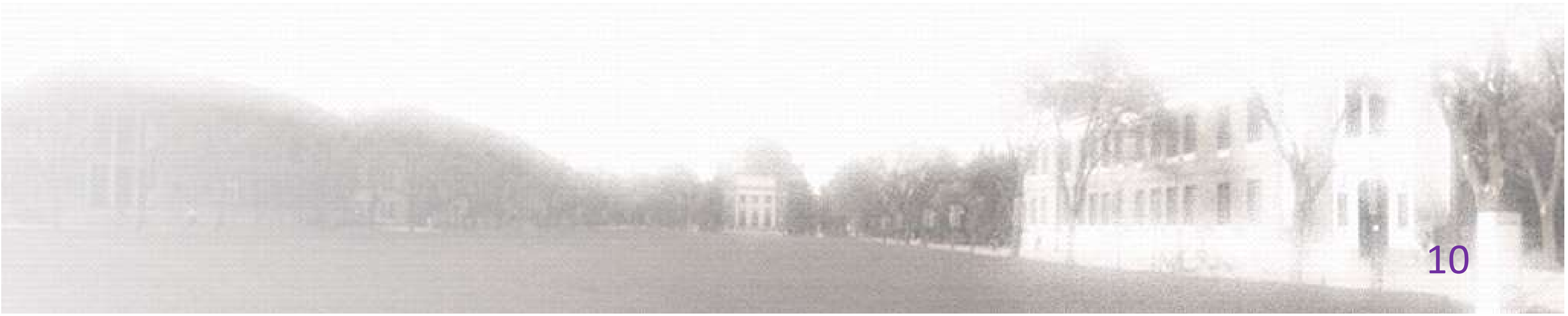
（2）<2021，11，30，10，30，0>

卡氏积（笛卡尔积）

- 卡氏积: 设**A**、**B**为集合，

$$A\times B = \{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B \},$$

是与原集合层次不同的集合。



例

设 $A=\{\varnothing,a\}$, $B=\{1,2,3\}$.

则 $A\times B = \{\langle\varnothing,1\rangle,\langle\varnothing,2\rangle,\langle\varnothing,3\rangle,\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle\}$.

$B\times A = \{\langle 1,\varnothing\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 2,\varnothing\rangle,\langle 2,a\rangle, \langle 3,\varnothing\rangle,\langle 3,a\rangle\}$.

$A\times A = \{\langle\varnothing,\varnothing\rangle,\langle\varnothing,a\rangle,\langle a,\varnothing\rangle,\langle a,a\rangle\}$.

$B\times B = \{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,$

$\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,3\rangle \}$.

卡氏积的性质

- 非交换: $A\times B \neq B\times A$

  (除非 $A=B \vee A=\varnothing \vee B=\varnothing$)

- 非结合: $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$

  (除非 $A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$)

- 分配律: $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$ 等

- 其他: $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing$ 等

  A、B有限集: $|A\times B|=|B\times A|=|B|\mathrm{x}|A|$,

  （$|A|$:集合A元素个数）

卡氏积非交换性

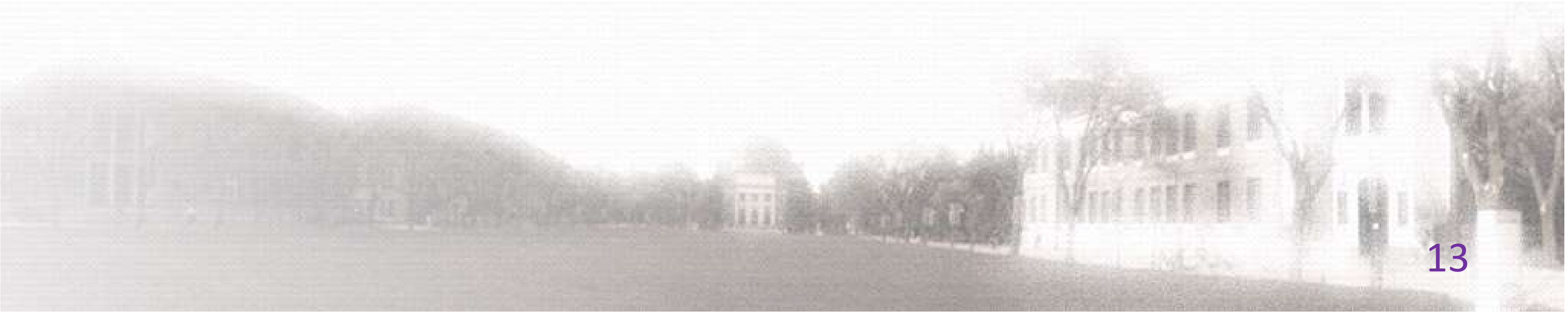
- 非交换:　　$A\times B \neq B\times A$

  (除非 $A=B \lor A=\varnothing \lor B=\varnothing$)

- 反例:　　$A=\{1\},\ B=\{2\}.$

  $A\times B = \{\langle 1,2\rangle\},$

  $B\times A = \{\langle 2,1\rangle\}.$



卡氏积非结合性

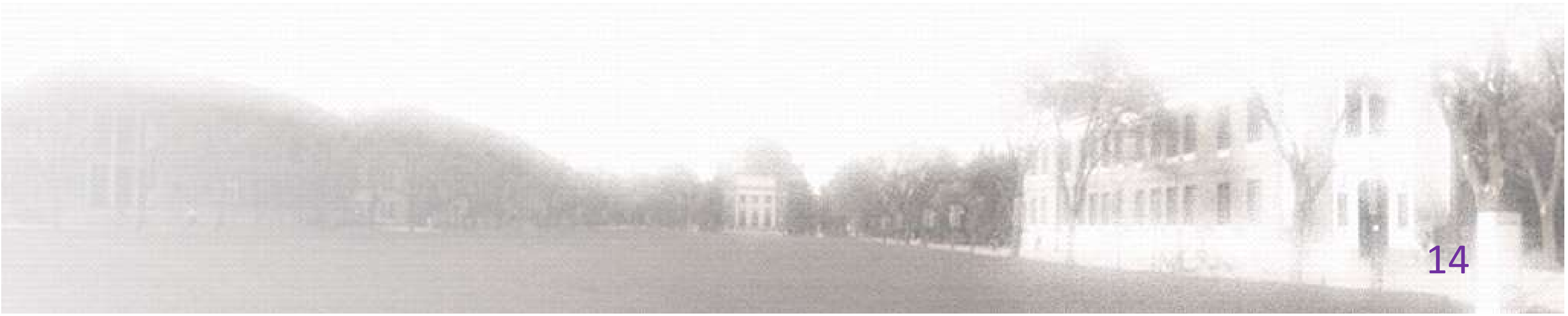
- 非结合: $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$

  (除非 $A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$)

- 反例: $A=B=C=\{1\}$.

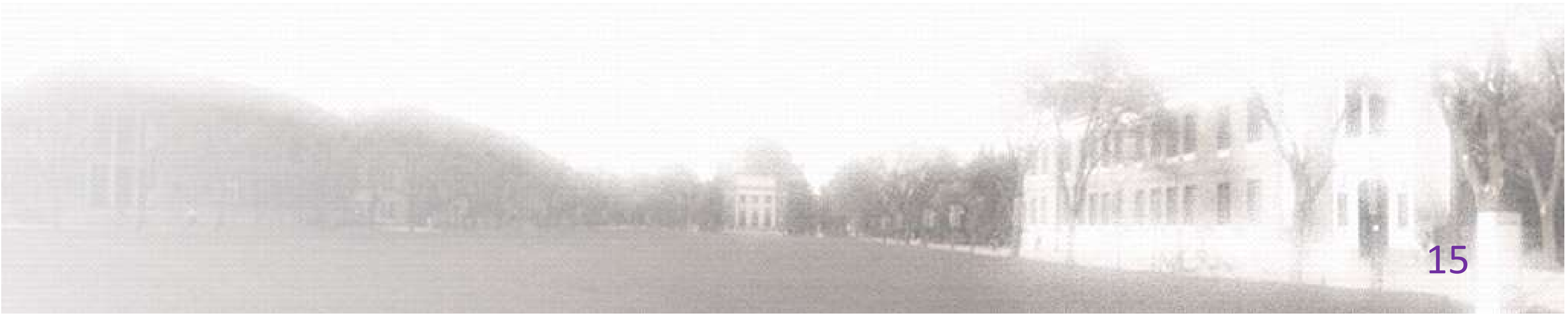
  $(A\times B)\times C = \{<<1,1>,1>\}$,

  $A\times(B\times C) = \{<1,<1,1>>\}$.

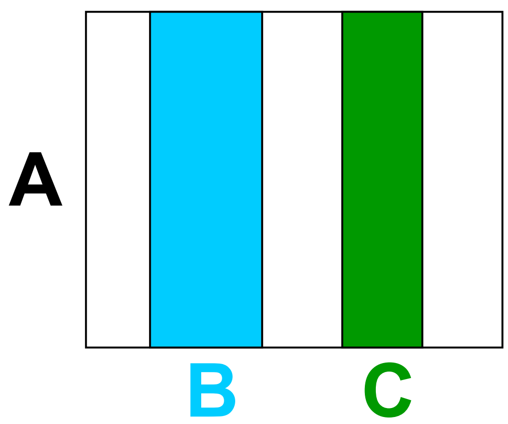


卡氏积分配律

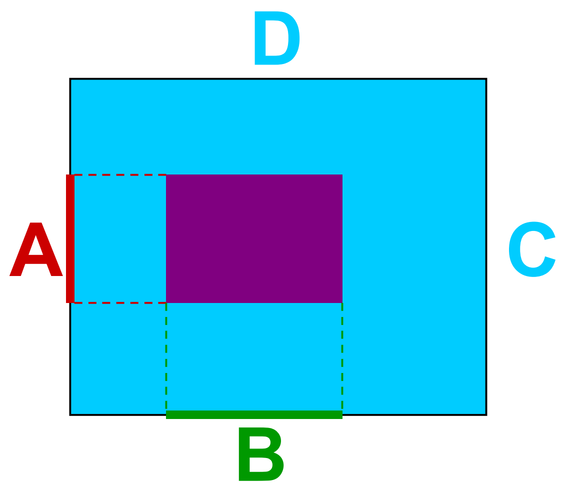
- 1. $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$
- 2. $A\times(B\cap C) = (A\times B)\cap(A\times C)$
- 3. $(B\cup C)\times A = (B\times A)\cup(C\times A)$
- 4. $(B\cap C)\times A = (B\times A)\cap(C\times A)$



卡氏积图示



$A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$



$A\subseteq C\wedge B\subseteq D\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$

卡氏积分配律的证明

- $A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$.

证明：$\forall <x,y>$，$<x,y>\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cup C) \Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow (x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

$\Leftrightarrow (<x,y>\in A\times B)\vee(<x,y>\in A\times C)$

$\Leftrightarrow <x,y>\in(A\times B)\cup(A\times C)$

$\therefore\ A\times(B\cup C) = (A\times B)\cup(A\times C)$. #

例

例 设 **A, B, C, D** 是任意集合,

(1) $A\times B=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing$

(2) 若$A\neq\varnothing$, 则 $A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\subseteq C$.

(3) $A\subseteq C \wedge B\subseteq D \Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$,

并且当$(A=B=\varnothing)\vee(A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing)$时,

$A\times B\subseteq C\times D \Rightarrow A\subseteq C\wedge B\subseteq D$.

例(2)证明

(2) 若$A\neq\varnothing$, 则$A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\subseteq C$.

证明 ($\Rightarrow$) 若 $B=\varnothing$, 则 $B\subseteq C$.

设 $B\neq\varnothing$, 由$A\neq\varnothing$, 设$x\in A$.

$\forall y,\ \ y\in B \Rightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in A\times C$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in C \Rightarrow y\in C$.

$\therefore\ B\subseteq C$.

例(2)证明

(2) 若$A\neq\varnothing$, 则$A\times B\subseteq A\times C \Leftrightarrow B\subseteq C$.

证明 ($\Leftarrow$) 若$B=\varnothing$, 则$A\times B=\varnothing\subseteq A\times C$.

设$B\neq\varnothing$. $\forall\langle x,y\rangle$, $\langle x,y\rangle\in A\times B$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$

$\Rightarrow x\in A\wedge y\in C \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times C$

$\therefore A\times B\subseteq A\times C$. #

讨论：在($\Leftarrow$)中不需要条件 $A\neq\varnothing$.

n维卡氏积

- n维卡氏积:

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n = \{\ <x_1,x_2,\ldots,x_n>\ |\ x_1\in A_1\wedge x_2\in A_2\wedge\ldots\wedge x_n\in A_n\ \}$$

- $A^n = A\times A\times\ldots\times A$
- $|A_i|=n_i, i=1,2,\ldots,n \Rightarrow$

$$|A_1\times A_2\times\ldots\times A_n| = n_1\times n_2\times\ldots\times n_n.$$

- n维卡氏积性质与2维卡氏积类似.

n维卡氏积的性质

- 非交换: $A\times B\times C\neq B\times C\times A$

  (要求A,B,C均非空,且互不相等)

- 非结合: (非2元运算)
- 分配律: 例如

  $$A\times B\times (C\cup D)=(A\times B\times C)\cup (A\times B\times D)$$

- 其他: 如 $A\times B\times C=\varnothing \Leftrightarrow A=\varnothing \vee B=\varnothing \vee C=\varnothing$.

小结

- 有序对**(**有序二元组**)** $\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$
- 有序三元组**,** 有序**n**元组
- 卡氏积 $A\times B = \{ \langle x,y\rangle \mid x\in A \wedge y\in B \}$
- 卡氏积性质：非结合、非交换、分配律等