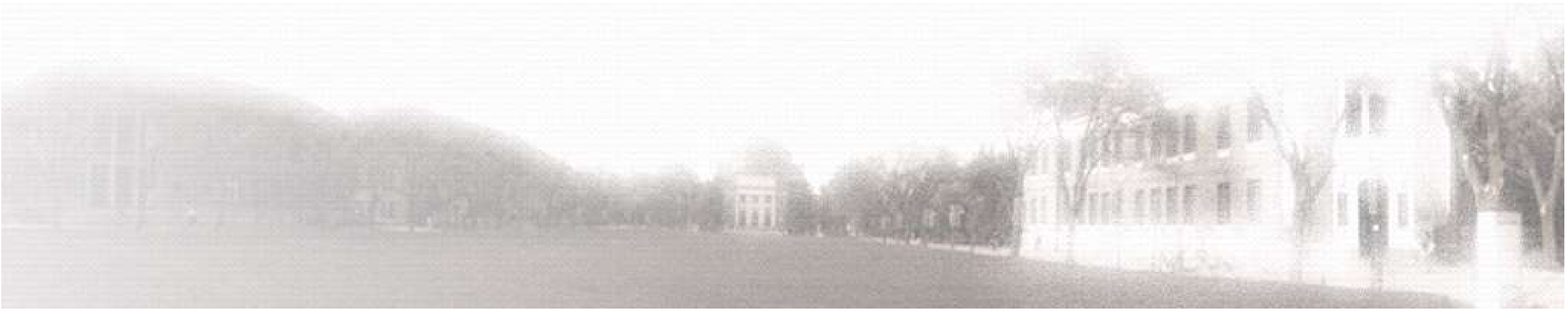
单元2.7 推理演算

第3章 命题逻辑的推理理论

3.2 自然推理系统P



推理演算

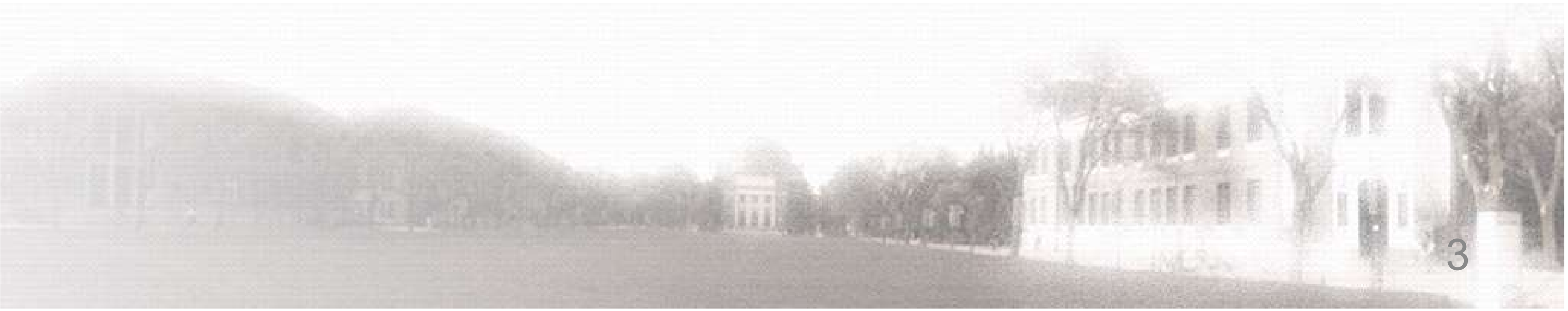
- 证明$\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$：
  - 从真值的角度进行解释或论证

    直观、看不出前提到结论的推理过程、不适用于命题变元数量多时
  - 推理演算：引入推理规则，使用推理规则和基本推理公式，逐步由前提推出结论

    推演层次清晰，近似于数学推理，易于推广

内容提要

- 自然推理系统**P**
- 推理规则
- 推理演算



自然推理系统P定义

- 字母表：
  - 命题变元符号：p, q, r, …
  - 联结词符号：¬,∨,∧,→,↔
  - 括号与逗号：（），
- 命题公式：定义1.6

(1)任何命题变元都是命题公式;

(2) 如果α是命题公式, 则(¬ α)也是命题公式;

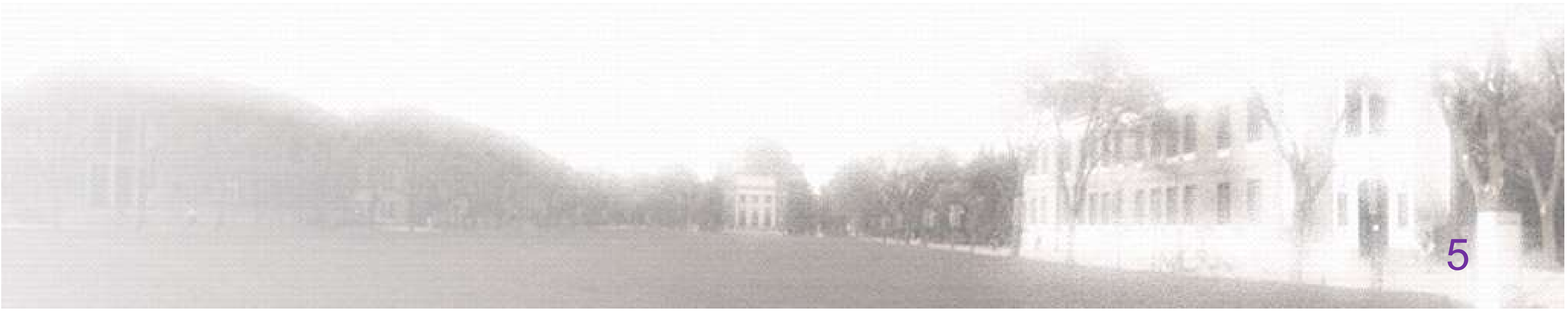
(3) 如果α、β是命题公式, 则(α ∨ β)、(α ∧ β)、(α→ β)和(α ↔ β)都是命题公式;

(4) 只有有限次地应用(1)—(3)构成的符号串才是命题公式.

自然推理系统P定义

- 推理规则

1) 前提引入规则：在证明的任何步骤都可以引入前提
2) 结论引入规则：在证明的任何步骤所得到的结论都可以作为后继证明的前提
3) 置换规则：在证明的任何步骤，命题公式的子公式都可以用等值的公式（L2-3 常用等值式）置换
4) 由推理定律（L2-6 重要的推理定律）和结论引入规则所导出的推理规则



推理规则

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{\begin{array}{c}A\to B\\ A\end{array}}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A\lor B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A\land B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{\begin{array}{c}A\to B\\ \neg B\end{array}}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\begin{array}{c}A\to B\\ B\to C\\ \therefore A\to C\end{array}$$

推理规则

(9) 析取三段论规则

$$\begin{array}{l} A \vee B \\ \neg B \\ \hline \therefore A \end{array}$$

(10)构造性二难推理规则

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ A \vee C \\ \hline \therefore B \vee D \end{array}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ C \rightarrow D \\ \neg B \vee \neg D \\ \hline \therefore \neg A \vee \neg C \end{array}$$

(12) 合取引入规则

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ \hline \therefore A \wedge B \end{array}$$

直接证明法

例 构造下面推理的证明:

前提: $p\vee q, q\rightarrow r, p\rightarrow s, \neg s$

结论: $r\wedge(p\vee q)$

证明 ①	$p\rightarrow s$	前提引入
②	$\neg s$	前提引入
③	$\neg p$	①②拒取式
④	$p\vee q$	前提引入
⑤	q	③④析取三段论
⑥	$q\rightarrow r$	前提引入
⑦	r	⑤⑥假言推理
⑧	$r\wedge(p\vee q)$	⑦④合取引入

推理正确, $r\wedge(p\vee q)$是有效结论

直接证明法

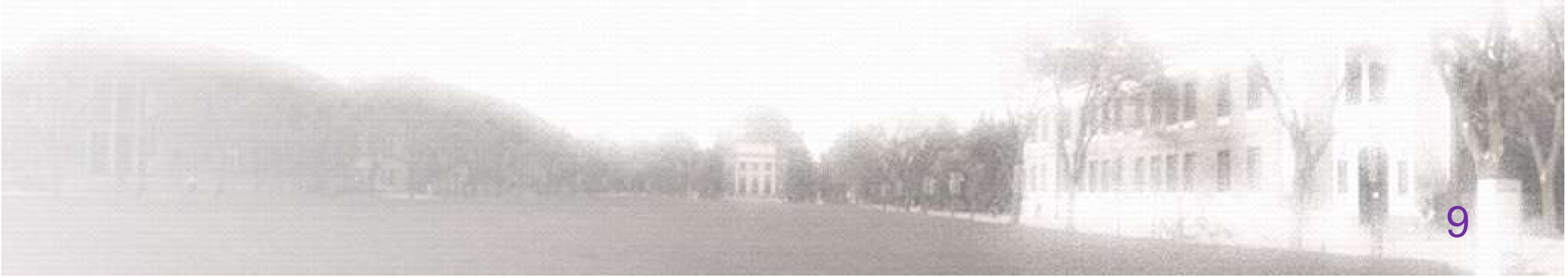
例 构造推理的证明：若明天是星期一或星期三，我就有课. 若有课，今天必需备课. 我今天下午没备课. 所以，明天不是星期一和星期三.

解 设 p:明天是星期一，q:明天是星期三，

r:我有课，　　s:我备课

前提：$(p\vee q)\rightarrow r$，$r\rightarrow s$，$\neg s$

结论：$\neg p\wedge\neg q$



直接证明法

前提: $(p\vee q)\to r$, $r\to s$, $\neg s$

结论: $\neg p\wedge\neg q$

证明

① $r\to s$　　前提引入

② $\neg s$　　前提引入

③ $\neg r$　　①②拒取式

④ $(p\vee q)\to r$　　前提引入

⑤ $\neg(p\vee q)$　　③④拒取式

⑥ $\neg p\wedge\neg q$　　⑤德摩根律

结论有效, 即明天不是星期一和星期三

附加前提证明法

欲证明	等价地证明
前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k$	前提: $A_1, A_2, \ldots, A_k, C$
结论: $C \to B$	结论: B

理由: $(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \to (C \to B)$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee (\neg C \vee B)$$

$$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \vee B$$

$$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge C) \to B$$

附加前提证明法

例 构造下面推理的证明:

前提: $\neg p \lor q, \neg q \lor r, r \to s$

结论: $p \to s$

证明 ① p	附加前提引入
② $\neg p \lor q$	前提引入
③ q	①②析取三段论
④ $\neg q \lor r$	前提引入
⑤ r	③④析取三段论
⑥ $r \to s$	前提引入
⑦ s	⑤⑥假言推理

推理正确, $p \to s$是有效结论

归谬法（反证法）

欲证明

前提：$A_1, A_2, \ldots, A_k$

结论：B

将$\neg B$加入前提, 若推出矛盾, 则得证推理正确.

理由：　$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \rightarrow B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k) \vee B$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B)$

$\Leftrightarrow \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \vee 0$

$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k \wedge \neg B) \rightarrow R \wedge \neg R$, R为任意命题公式

归谬法

例 构造下面推理的证明

前提: $\neg(p\wedge q)\vee r$, $r\rightarrow s$, $\neg s$, p

结论: $\neg q$

证明 用归缪法

① q 结论否定引入

② $r\rightarrow s$ 前提引入

③ $\neg s$ 前提引入

④ $\neg r$ ②③拒取式

归谬法

⑤ $\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥ $\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦ $\neg p\vee\neg q$	⑥德摩根律
⑧ $\neg p$	①⑦析取三段论
⑨ p	前提引入
⑩ $\neg p\wedge p$	⑧⑨合取引入

推理正确, $\neg q$是有效结论

归谬法

例 用反证法证明$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$ (二难推论)

前提: $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R$

结论: R

证明 用归缪法

① $\neg R$	结论否定引入
② $P \rightarrow R$	前提引入
③ $\neg P$	①②拒取式
④ $Q \rightarrow R$	前提引入
⑤ $\neg Q$	① ④拒取式

归谬法

⑥ $P \vee Q$　　　　前提引入

⑦ P　　　　　　⑤⑥析取三段论

⑧ $P \wedge \neg P$　　　③⑦合取引入

推理正确, R是有效结论

三种证明方法之间的关系

$$
\begin{aligned}
& A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \wedge \neg B \Rightarrow R \wedge \neg R && \text{反证法} \\
\Leftrightarrow & A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow \neg B \rightarrow (R \wedge \neg R) && \text{附加前提} \\
\Leftrightarrow & A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow \neg\neg B \vee (R \wedge \neg R) && \text{证明法} \\
\Leftrightarrow & A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_k \Rightarrow B && \text{直接法}
\end{aligned}
$$

对于命题逻辑推理而言，任何一个问题的推理，都可以采取三种推理方法中的任何一种来证明，针对不同的问题选用不同的推理方法。

一般而言，对于结论是蕴涵式或析取式的，大多可以采取带附加前提的证明方法

消解证明法

归结规则

$$\begin{array}{r} A \vee B \\ \neg A \vee C \\ \hline \therefore B \vee C \end{array}$$

$$(A \to C) \wedge (\neg A \to B) \wedge (A \vee \neg A) \to (B \vee C)$$

理由 $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \to (B \vee C)$

$\Leftrightarrow \neg((A \vee B) \wedge (\neg A \vee C)) \vee (B \vee C)$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge \neg C) \vee B \vee C$

$\Leftrightarrow ((\neg A \wedge \neg B) \vee B) \vee ((A \wedge \neg C) \vee C)$

$\Leftrightarrow (\neg A \vee B) \vee (A \vee C)$

$\Leftrightarrow 1$

消解证明法

1. 将每一个前提化成等值的合取范式, 设所有合取范式的全部简单析取式为$A_1, A_2, \ldots, A_t$

2. 将结论的否定化成等值的合取范式$B_1 \wedge B_2 \wedge \ldots \wedge B_s$, 其中每个$B_j$是简单析取式

3. 以$A_1, A_2, \ldots, A_t$和$B_1, B_2, \ldots, B_s$为前提, 使用归结规则推出0

除前提引入规则外, 只使用归结规则

消解证明法

例 用消解证明法构造下面推理的证明:

前提: $(p\to q)\to r,\ r\to s,\ \neg s$

结论: $p\wedge\neg q$

解 $(p\to q)\to r \Leftrightarrow \neg(\neg p\vee q)\vee r \Leftrightarrow (p\wedge\neg q)\vee r \Leftrightarrow$
$(p\vee r)\wedge(\neg q\vee r)$

$r\to s \Leftrightarrow \neg r\vee s$

$\neg(p\wedge\neg q) \Leftrightarrow \neg p\vee q$

把推理的前提改写成

前提: $p\vee r,\ \neg q\vee r,\ \neg r\vee s,\ \neg s,\ \neg p\vee q$

(结论均为0, 不必写出)

消解证明法

前提: $p \vee r, \neg q \vee r, \neg r \vee s, \neg s, \neg p \vee q$

证明 ①	$p \vee r$	前提引入
②	$\neg p \vee q$	前提引入
③	$q \vee r$	①②归结
④	$\neg q \vee r$	前提引入
⑤	r	③④归结
⑥	$\neg r \vee s$	前提引入
⑦	s	⑤⑥归结
⑧	$\neg s$	前提引入
⑨	0	⑦⑧合取引入

命题逻辑推理的应用

- 举例：符号化下面的语句，并用演绎法证明结论是否有效。
- 或者下午是天晴，或者是下雨；如果下午是天晴，则我将去看电影；如果下午我去看电影，我就不看书。所以：如果我下午看书，则下午天在下雨。

设：P：下午天晴；Q：下午下雨；R：下午去看电影；S：下午看书

前提：$P \overline{\vee} Q, P \rightarrow R, R \rightarrow \neg S$

结论：$S \rightarrow Q$

命题逻辑推理的应用

前提：$P \bar{\vee} Q, P \rightarrow R, R \rightarrow \neg S$

结论：$S \rightarrow Q$

证明 ① $\boldsymbol{S}$　　附加前提引入

② $R \rightarrow \neg S$　　前提引入

③ $\neg \boldsymbol{R}$　　①②拒取式

④ $P \rightarrow R$　　前提引入

⑤ $\neg \boldsymbol{P}$　　③④拒取式

⑥ $P \bar{\vee} Q$　　前提引入

⑦ $\boldsymbol{Q}$　　⑤⑥析取三段论

推理正确, $S \rightarrow Q$是有效结论

命题逻辑推理的应用

- 例：符号化下面的语句，并用演绎法证明结论是否有效。

一个公安人员审查一件盗窃案，已知的事实如下

A 或B 盗窃了x；若A盗窃了x，则作案时间不能发生在午夜前；若B 证词正确，则在午夜时屋里灯光未灭；若B 证词不正确，则作案时间发生在午夜前；午夜时屋里灯光灭了。

所以：B盗窃了x。

- 设：P:A盗窃了x；Q:B盗窃了x；R:作案时间在午夜前；S:B证词正确；T:午夜时灯光灭了。

前提：$P \vee Q, P \to \neg R; S \to \neg T, \neg S \to R, T$

结论：Q

命题逻辑推理的应用

前提：$P \vee Q, P \rightarrow \neg R; S \rightarrow \neg T, \neg S \rightarrow R, T$

结论：Q

证明：直接法（反证法请同学们自行完成）：

①$\boldsymbol{T}$　　前提引入

②$S \rightarrow \neg T$　　前提引入

③$\neg \boldsymbol{S}$　　①②拒取式

④$\neg S \rightarrow R$　　前提引入

⑤$\boldsymbol{R}$　　③④假言推理

⑥$P \rightarrow \neg R$　　前提引入

⑦$\neg \boldsymbol{P}$　　⑤⑥拒取式

⑧$P \vee Q$　　前提引入

⑨**Q**　　⑦⑧析取三段论

推理正确，Q是有效结论

Open Question Points: 10

Setting

符号化下面的语句，并用演绎法证明结论是否有效。

如果马会飞或者羊吃草，则母鸡是飞鸟；如果母鸡是飞鸟，那么烤熟的鸭子就会跑；烤熟的鸭子不会跑。所以：羊不吃草。

Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

Answer

小结

- 自然推理系统P
- 推理规则
- 推理演算