单元1.6 欧拉图

第15章 欧拉图与哈密顿图

15.1 欧拉图

讲义参考北京大学《离散数学》及电子科技大学《离散数学》讲义

内容提要

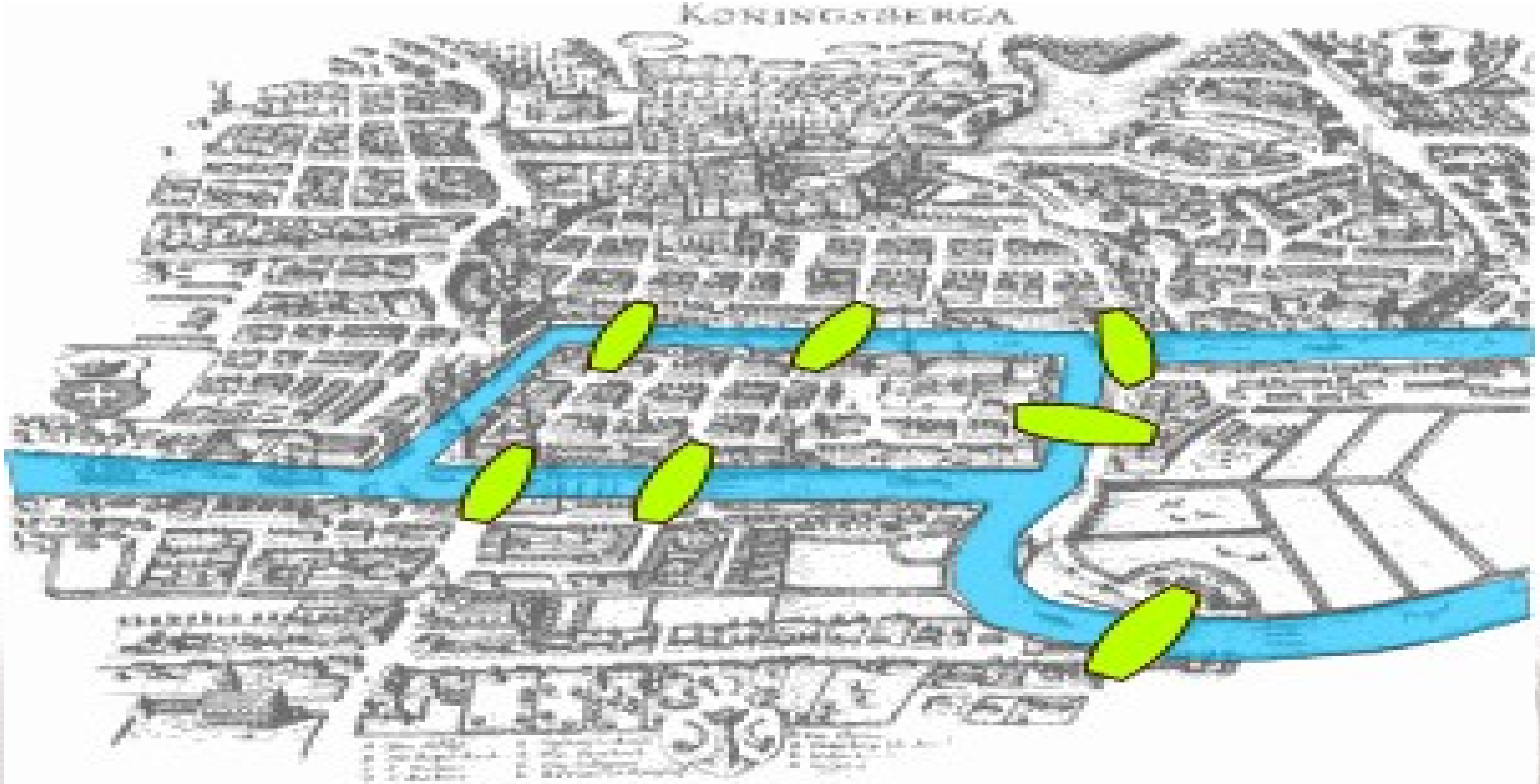
- 欧拉回路、欧拉通路
- 欧拉图、半欧拉图
- 有向欧拉图、有向半欧拉图
- 欧拉图、半欧拉图的充要条件
- 求欧拉回路的算法

七桥问题

- **Königsberg, River Pregel (Kaliningrad, Russia)**

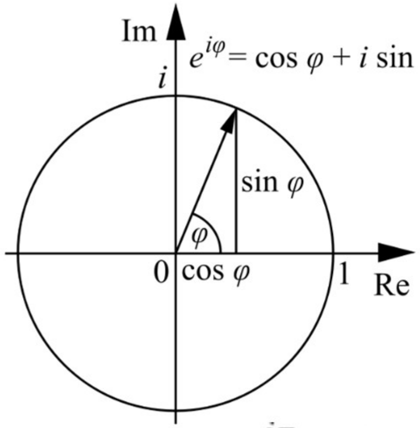
七桥问题

- **Königsberg, River Pregel (Kaliningrad, Russia)**



Leonhard Euler(1707~1783)

- 瑞士数学家, 最多产的数学家
  - ≥1100书籍论文
  - 全集≥75卷
  - 13个孩子
  - 最后17年失明

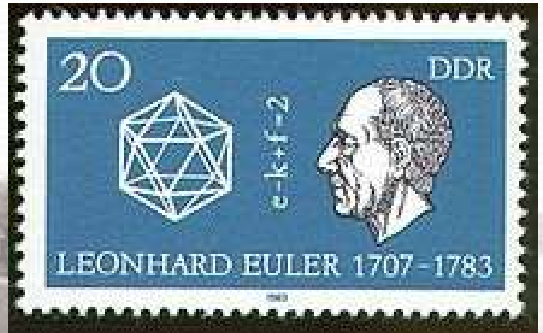


$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right).$$

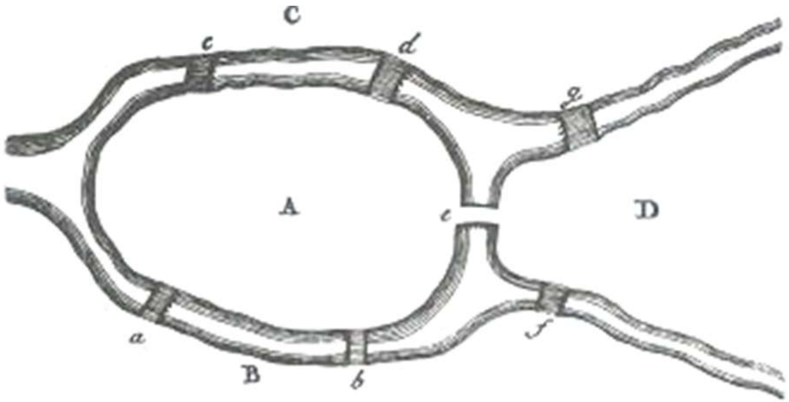
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

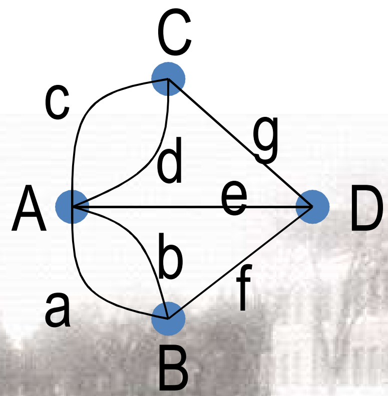
$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right).$$



Euler的解法

- **1736年,** 图论和拓扑学诞生





欧拉通(回)路、(半)欧拉图

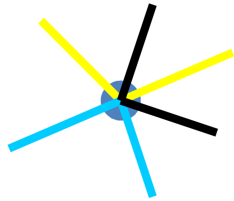
- 欧拉通路：经过图中所有边的简单通路
- 半欧拉图：有欧拉通路的图

- 欧拉回路：经过图中所有边的简单回路
- 欧拉图：有欧拉回路的图
（定义平凡图为欧拉图）

- 如果仅用边来描述，欧拉通路和欧拉回路就是图中所有边的一种全排列。

无向欧拉图的充分必要条件

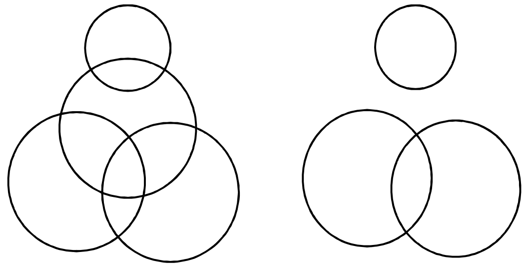
定理15.1， 15.5: 设G是无向连通图,则



G是欧拉图 (1)

⇔ G中所有顶点都是偶数度 (2)

⇔ G是若干个边不交的圈的并(3)

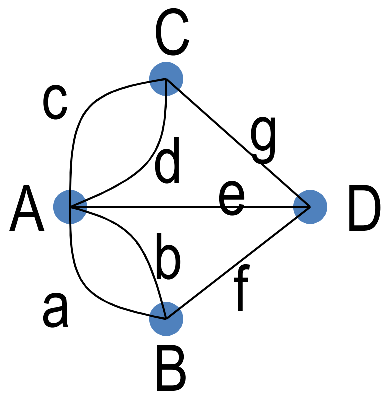


证明 (1)⇒(2) 若欧拉回路总共k次经过顶点v, 则 d(v)=2k. (2)⇒(3)若删除任意1个圈上的边,则所有顶点的度还是偶数, 但是不一定连通了. 对每个连通分支重复进行. (3)⇒(1)有公共点但边不交的简单回路, 总可以拼接成欧拉回路: 在交点处,走完第1个回路后再走第2个回路. #

Open Question Points: 10

Setting

哥尼斯堡七桥问题中，至少需要再架几座桥，游人就可以从陆地某一点出发经过每座桥一次且仅一次，最后回到出发点?



Open Question is only supported on Version 2.0 or newer.

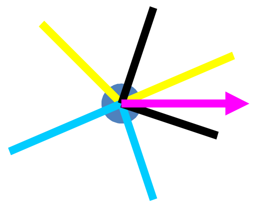
Answer

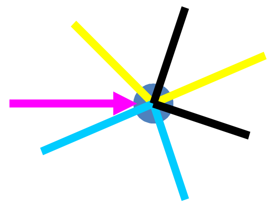
无向半欧拉图的充分必要条件

- 定理**15.2:** 设**G**是无向连通图**,**则

  (1) G是半欧拉图

$\Leftrightarrow$ **(2) G**中恰有**2**个奇度顶点 **#**





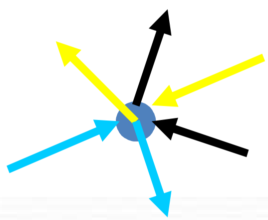
有向欧拉图的充分必要条件

- **定理15.3:** 设**D**是有向强连通图**,**则

  D是欧拉图

$\Leftrightarrow$ $\forall$**v**$\in$**V(D), d**$^{+}$**(v)=d**$^{-}$**(v)**

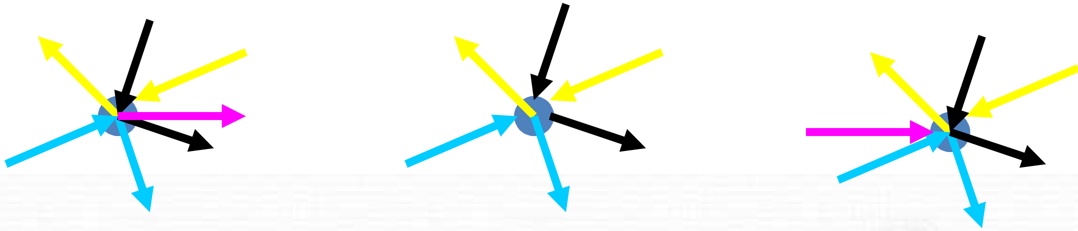
$\Leftrightarrow$ **D**是若干个边不交有向圈的并 **#**



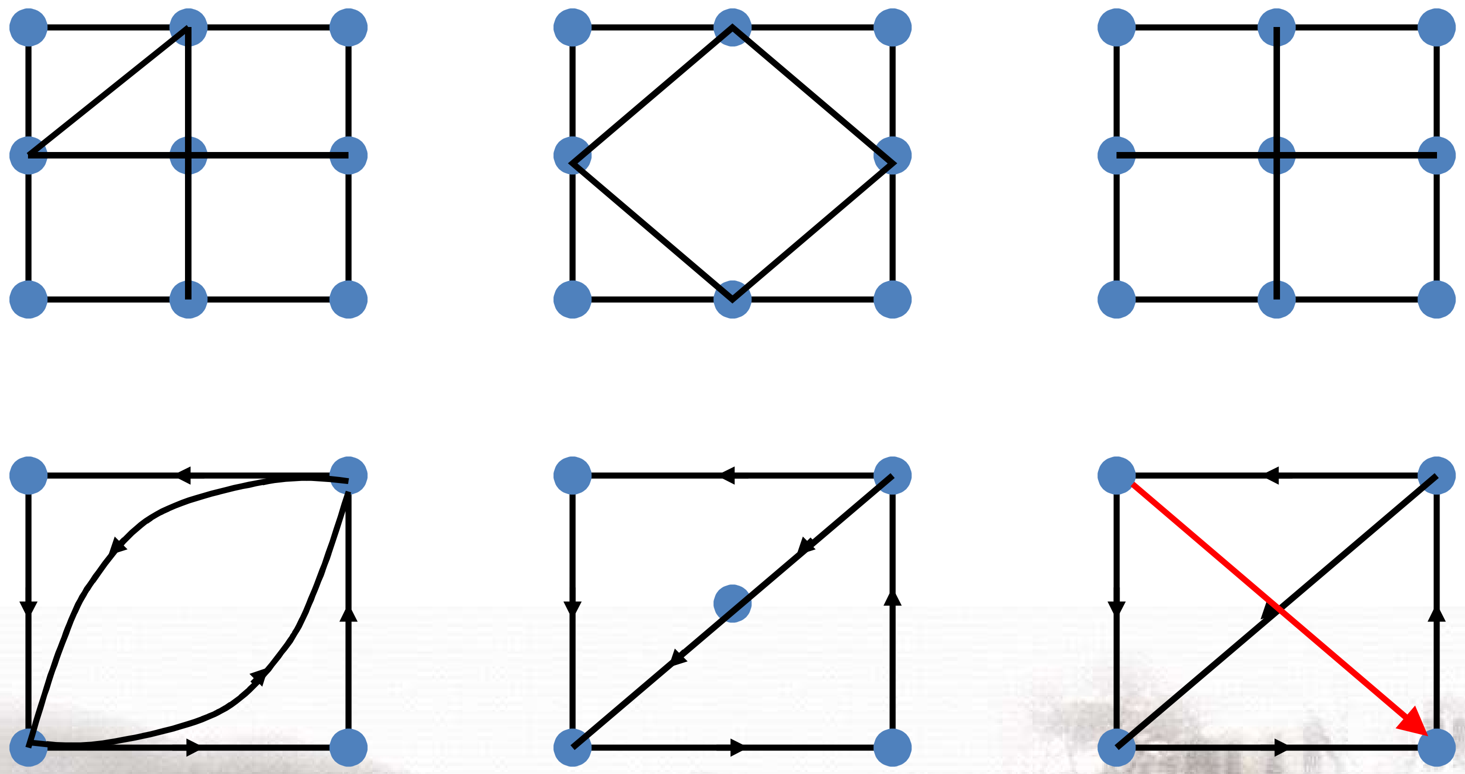
有向半欧拉图的充分必要条件

- 定理**15.4**: 设**D**是有向单向连通图,则
  D是半欧拉图

⇔ **D**中恰有**2**个奇度顶点, 其中**1**个入度比出度大**1**,另**1**个出度比入度大**1**, 其余顶点入度等于出度. **#**



例



Fleury算法(避桥法)

- 从任意一点开始, 沿着没有走过的边向前走
- 在每个顶点, 优先选择剩下的非桥边, 除非只有唯一一条边
- 直到得到欧拉回路或宣布失败

- 定理: 设G是无向欧拉图,则**Fleury**算法终止时得到的简单通路是欧拉回路. **#**

Fleury算法(迭代形式)

(1) P_0:=v;

(2) 设$P_i=v_0e_1v_1e_2…e_iv_i$已经行遍,

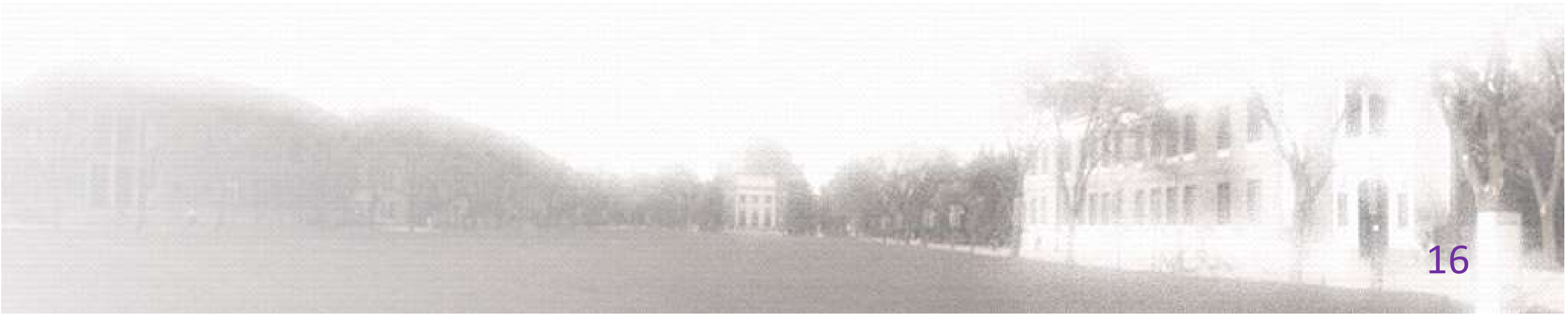
设 $G_i=G-\{e_1,e_2 ,… ,e_i\}$,

e_{i+1}:= G_i中满足如下2条件的边:

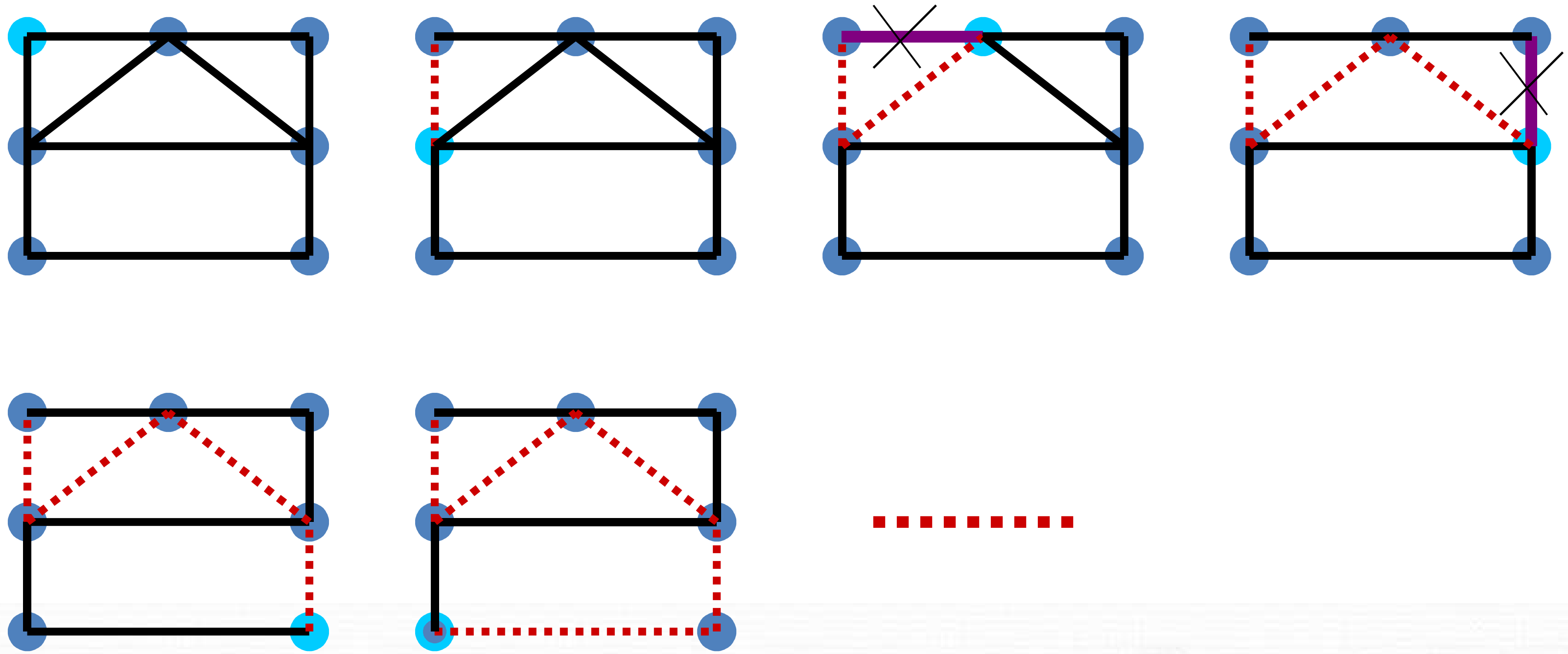
(a) e_{i+1}与v_i关联

(b) 除非别无选择,否则e_{i+1}不是G_i中的桥

(3) 若$G_i≠N_i$, 则回到(2); 否则算法停止

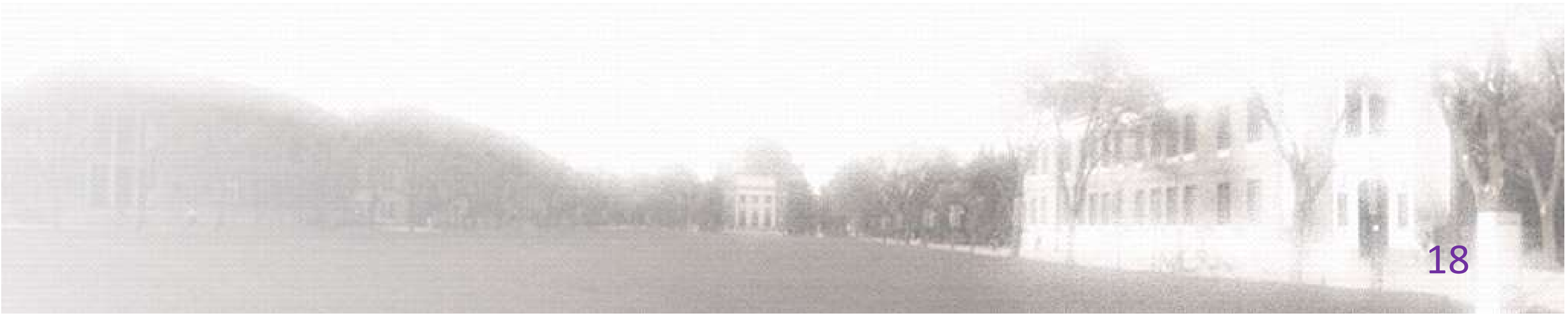


Fleury算法举例

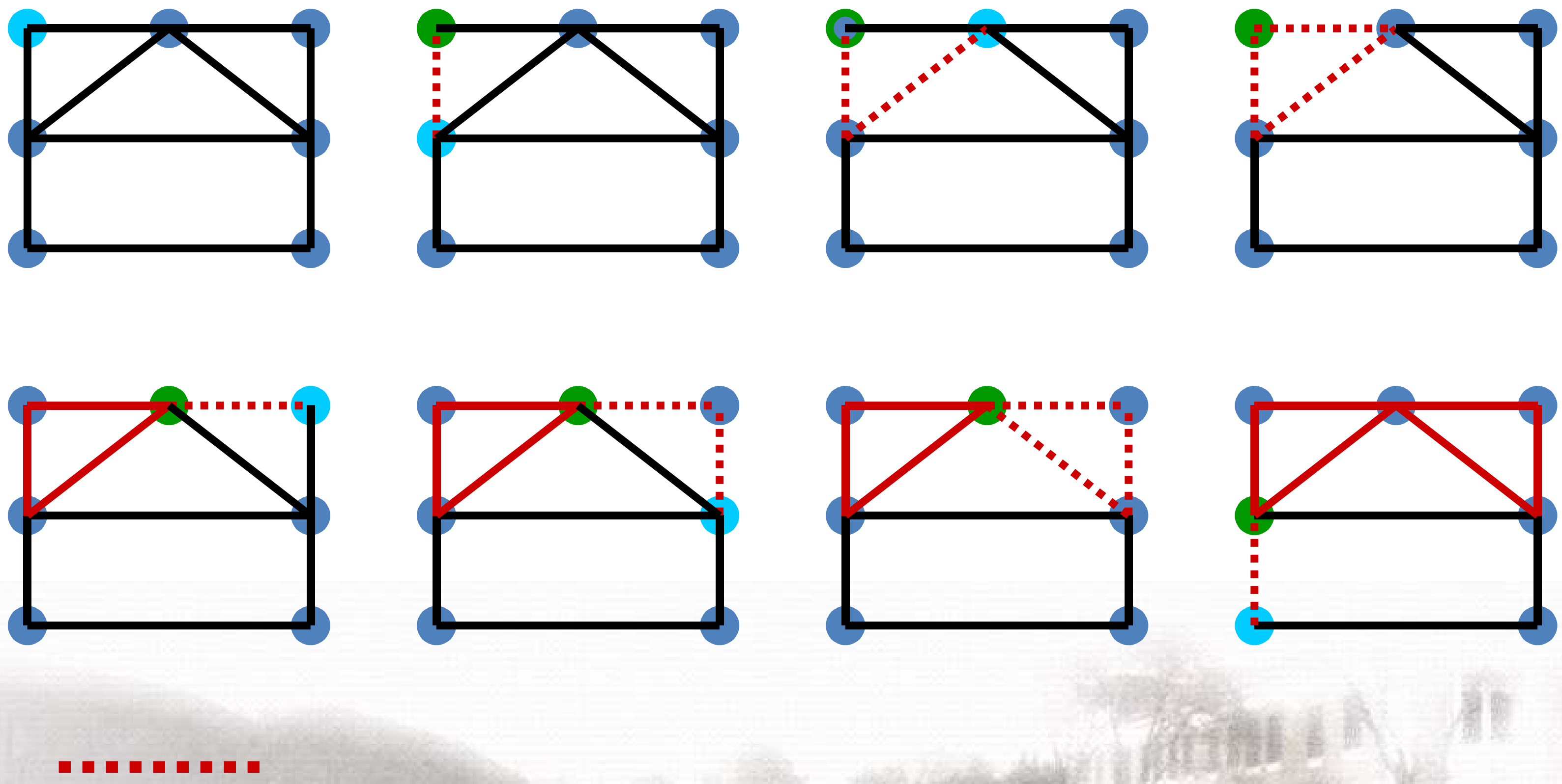


逐步插入回路算法

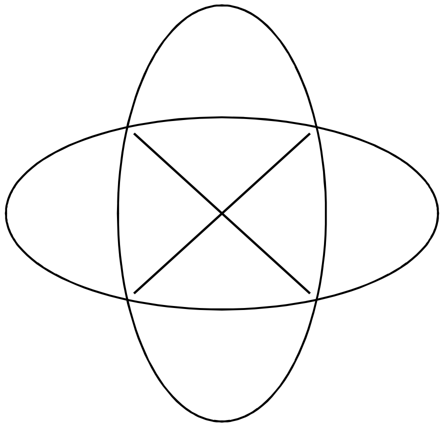
- 每次求出一个简单回路
- 然后回溯到上一个有边没有被遍历到的顶点
- 把新求出的回路插入老回路, 合并成一个更大的回路
- 直到得到欧拉回路或宣布失败

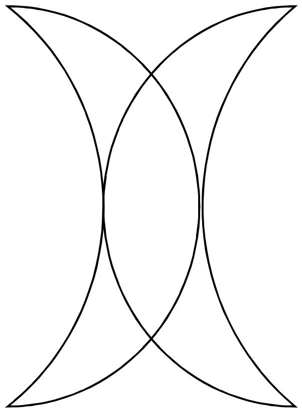


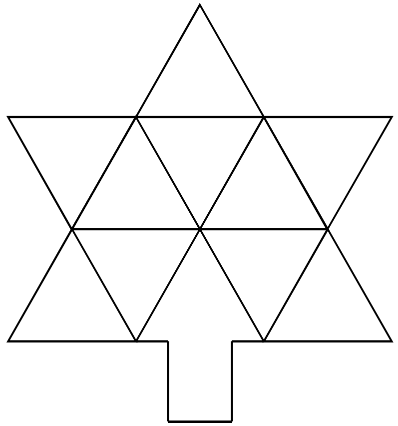
逐步插入回路算法举例

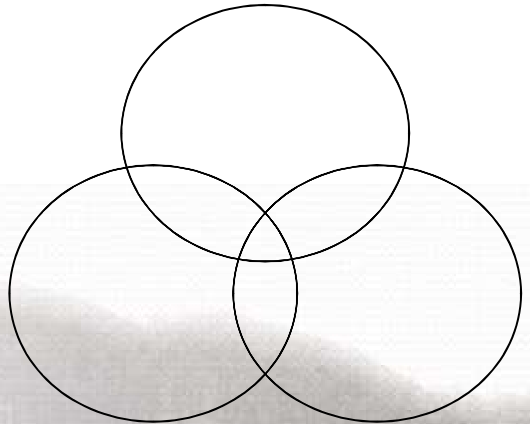


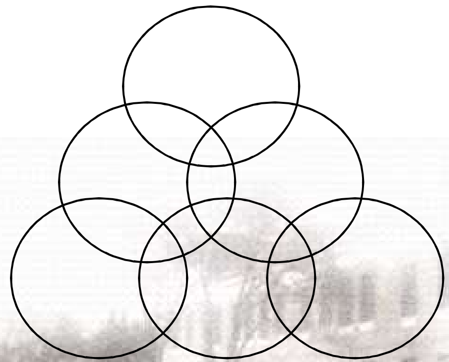
应用：一笔画





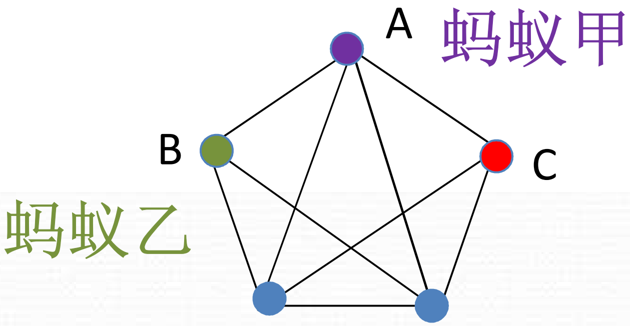






应用：蚂蚁比赛

- 甲、乙两只蚂蚁分别位于图的结点A 、B 处，并设图中的边长度相等。甲、乙进行比赛：从它们所在的结点出发，走过图中所有边最后到达结点C 处。如果它们的速度相同，问谁先到目的地C点？



小结

- 欧拉图　　**Easy**
  - 充要条件