第 2 周讲稿

等可能概型存在的问题：

☆Bertrand 悖论 （在圆内任意作一弦，求其长超过圆内接正三角形边长的概率？）

问题的提法不确定，这里的“任意”至少有 3 种解释，相对于各自的解释，每种解法都正确。原因：当随机试验有无穷多个可能结果时，有时很难规定“等可能”这一概念。

☆抛硬币之例（书中例子介绍例 1.3；例 1.4，例 1.5）；

☆有限样本空间的非古典概型例子。

§3 概率空间及概率的计算

1. 事件域的引入

定义：事件族(Ω的子集族)$\mathcal{F}$ 称为σ**-域**(也称为σ**-代数**或**事件体**), 如果它满足下列条件：

i) $\Omega \in \mathcal{F}$；

ii) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $A^c \in \mathcal{F}$;

iii) 若 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$, 则$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$，

几个特殊的σ-域介绍（例子）。

2. 概率的公理化定义

定义：概率（也称为**概率测度**）P 为 $\mathcal{F}$ 上的非负值函数，即对每一事件$A \in \mathcal{F}$，都可定义一个数 $P(A)$，满足下列条件：

(1) 非负性： 对一切$A \in \mathcal{F}$，有 $P(A) \geq 0$ (1.2)

(2) 规范性：$P(\Omega) = 1.$ (1.3)

(3) 可数可加性： 若 $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$为一列两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) \tag{1.4}$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率。试验的样本空间Ω、事件σ-域 $\mathcal{F}$ 及定义在 $\mathcal{F}$上的概率 P 所构成的三元组(Ω, $\mathcal{F}$, P), 称为描述该随机试验的概率空间.

注 1) 如果Ω只包含 n 个点，则每个单点集$\left\{\omega_j\right\}$ $j=1,2,\cdots,n$ 是一个基本事件，取 $\mathcal{F}$ 为Ω的所有子集的全体, 则对每个$\left\{\omega_j\right\}$指定概率就足够了。因为对任意 $A \in \mathcal{F}$, 我们有$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$。当基本事件都是等可能的情况下，我们进一步可推得

$$P\left(\left\{\omega_j\right\}\right) = \frac{1}{n} \qquad j=1,2,\cdots n,$$

此时， $P(A)=\frac{\# A}{n}$ （$A\in \mathcal{F}$）。由此可见古典概型仅仅是 Kolmogorov 模型中的一个非常小的子模型.

例（有限概率空间，但不等可能）从$1,2,\cdots,100$中选取一数，取到不超过 50 的数的概率为 p，取到不超过 50 的数的概率为 3p，求取一数它为平方数的概率？ 【$\frac{16}{200}$】

2) 如果Ω包含可数个点，我们就不能对基本事件做等可能的假设，但仍然可以通过对每个基本事件$\{\omega\}$指定概率，而得到概率 P。因为对任意$A\in \mathcal{F}$ (其中 $\mathcal{F}$ 为Ω的所有子集的全体)，令$P(A)=\sum_{\omega\in A}P(\omega)$，就得到满足概率公理的概率测度$P$ 。

3) 如果Ω包含不可数多个点，每个单点集是一基本事件，虽然这时各单点集可能完全对称,它们出现的可能性也相同，但是这时我们不能简单地指定每个基本事件的概率，因为这个值为零。更深层的原因是：此时 $\mathcal{F}$ 一般不能取Ω的所有子集的全体，这相当于实分析中“难测度问题”。

3. 概率的简单性质

性质 1 $P(\phi)=0$**，从而有**

（**有限可加性**）若$A_1,A_2,\cdots,A_n\in \mathcal{F}$为一列两两互不相容的事件，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{n}A_n\right)=\sum_{n=1}^{n}P(A_n)$$

性质 2（求逆公式）如果$A\in\mathcal{F}$，则$P(A^c)=1-P(A)$.

性质 3（减法公式）如果$A, B\in \mathcal{F}$, 则$P(A-B)=P(A)-P(AB)$；

特别地，当$A\supset B$时，有$P(A-B)=P(A)-P(B)$，从而 $P(A)\ge P(B)$ **（单调性）**.

性质 4（一般的加法公式） 如果$A, B\in \mathcal{F}$，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)\le P(A)+P(B)$$

一般地，若$A_1,A_2,\cdots,A_n\in \mathcal{F}$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i}P(A_i)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)$$

注：可数可加性$\Rightarrow$有限可加性；可数可加性与加法公式区别.

性质 5（概率的下（上）连续性）设$\{A_n\}$是$\mathcal{F}$中的非减（或非增）事件序列(即$A_n\in \mathcal{F}$, 并

且 $A_n \subset A_{n+1}$(或$A_n \supset A_{n+1}$)$,n=1,2,\cdots$ ），则

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \quad （或 \lim_{n\to\infty} P(A_n)=P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n)）$$

注：可数可加性 $\Leftrightarrow$ 有限可加性 ＋ 概率的连续性（思考）

例 从 $(0,1)$ 中任取一数，它为 $\frac{1}{3}$ 的概率等于 0.

提示：记 A_n ={ $(0,1)$ 中任取一数，它的前 n 位小数为 $\underbrace{33\cdots3}_{n}$}，$A_n \downarrow A=\{\frac{1}{3}\}$，$P(A_n)=\frac{1}{10^n}$

补充：事件序列的极限

设$\{A_n\}$为样本空间Ω中的事件序列，

定义$\{A_n\}$的上极限为：$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$；(当且仅当有无穷个 A_n 发生)

$\{A_n\}$的下极限为：$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$。(当且仅当至多有有限个 A_n 不发生)

如果 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，则称事件序列$\{A_n\}$的极限存在，记为$\lim_{n\to\infty} A_n$。

§4 条件概率与 Bayes 公式，独立性的概念

1. 条件概率与事件独立性的定义

★ **样本空间缩减法：**$\Omega \to B$

★ **条件概率定义：**$P(A|B)=\dfrac{P(A\bigcap B)}{P(B)} \quad P(B)>0$

注：条件概率也是一种概率，故概率的运算规则同样适用于条件概率。

例 1 从 1~100 这 100 个整数中，任取一数，已知取出的一数是不超过 50 的数，求它是 2 或 3 的倍数的概率. 【$\frac{33}{50}$】

例 2（教材中嘉宾猜奖游戏的样本空间解法）可以证明：

$$P(嘉宾猜中|嘉宾永远改变自己的选择)=\frac{2}{3}$$

2. 独立性的有关重要性质

（1）独立性的定义

（2）条件概率与独立性的联系

★ $A,\ B\in \mathscr{F}$相互独立，即 $P(AB)=P(A)P(B)$

$$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A) \qquad P(B)>0$$
$$\Leftrightarrow P(A|\bar{B})=P(A) \qquad P(\bar{B})>0$$
$$\Leftrightarrow P(A|B)=P(A|\bar{B}) \quad 0<P(B)<1$$

注：两事件独立性的实质及与两事件互不相容的关系

结论 1：若 4 对事件$\{A,B\},\{\bar{A},B\},\{A,\bar{B}\},\{\bar{A},\bar{B}\}$中有一对是相互独立的，则另外 3 对也都是相互独立的。

结论 2：当$P(A),P(B)>0$时，如果A 与 B 互不相容，则 A 与 B 一定不相互独立；如果 A 与 B 相互独立，则 A 与 B 一定不会互不相容.

（3）多个事件的独立性的定义及其实质

★ 称n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$是**相互独立**的，如果对任意自然数$k(2\le k\le n)$都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

其中$i_1,i_2,\cdots,i_k$是满足$1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n$的任意$k$个自然数.

★ 独立性的实质（事件σ域相互独立）

定理 如果事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$相互独立，那么将该事件序列分成互不重叠的 m 组$(m\le n)$，则这 m 组事件各自所生成的σ-域也是相互独立的, 后者的含义是指: 在此m个$\sigma-$域任意各取一个事件, 则此m个事件总是相互独立的。（大家不会证明）

★ 注意：与两两独立的区别与联系

★ $P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\bigcap_{i=1}^{n}\bar{A}_i)=1-P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)\cdots P(\bar{A}_n)$

3 条件概率的三大公式（乘法公式、全概率公式与 Bayes 公式）及应用

★ **乘法公式：若**$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}$ 满足$P(\bigcap_{j=1}^{n-1}A_j)>0$，则

$$P(\bigcap_{j=1}^{n}A_j)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1\cap A_2)\cdots P(A_n|\bigcap_{j=1}^{n-1}A_j)$$

例 3 将字母 M、A、X、A、M 分开写在 5 张卡片上，每卡一字，混合后重新排列，问正好得到顺序 MAXAM 的概率是多少？ 【$\frac{1}{30}$】

解：依次取出后,排成一列,设$A_1=$\{第 1 次取到字母 M\}，$A_2=$\{第 2 次取到字母 A\}，$A_3=$\{第 3 次取到字母 X\}，$A_4=$\{第 4 次取到字母 A\}，$A_5=$\{第 5 次取到字母 M\}, 则

$P(A_1A_2A_3A_4A_5)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)P(A_5|A_1A_2A_3A_4)$
$=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{30}$

例4　(可靠性)

已知某装置的**故障强度(死亡率或风险率)函数**为 $\lambda(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{h(t+\Delta t;t)}{\Delta t}$，其中，$h(t+\Delta t;t)$ 是装置在 $(0,t]$ 上无故障的情况下，在 $(t,t+\Delta t]$ 上出现故障的条件概率。

试求装置的**可靠性函数** $g(t)$ (即在时间段 $(0,t]$ 上无故障的概率。其中设 $g(0)=1$, 即假定设备在开始时刻都是无故障的)。**参见教材**

★ **全概率公式：** 设事件 $B_1,B_2\ldots$ 为样本空间 Ω 的一个正划分，则对任何一个事件 A，有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)P(A|B_i)$$

例 5 已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品，从甲箱中任取 3 件放入乙箱后，求从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

【 $\frac{1}{4}$ 】

解： $P(A)=\sum\limits_{k=0}^{3}P(A\mid X=k)P(X=k)=0\times\frac{C_3^0C_3^3}{C_6^3}+\frac{1}{6}\times\frac{C_3^1C_3^2}{C_6^3}+\frac{2}{6}\times\frac{C_3^2C_3^1}{C_6^3}+\frac{3}{6}\times\frac{C_3^3C_3^0}{C_6^3}=\frac{1}{4}$

例 6　(赌徒输光问题)　设甲有赌本 $i(i\geq 1)$ 元，其对手乙有赌本 $a-i>0$ 元．每赌一次甲以概率 p 赢一元，而以概率 $q=1-p$ 输一元．假定不欠不借，赌博一直到甲乙中有一人输光才结束．因此，两个人中的赢者最终有总赌资 a 元．求甲输光的概率．

解决思路首步分析法（类似的思想可以应用到抽签问题，Polya 模型等）

例 7　r 个人相互传球，从甲开始，每次传球时，传球者等可能地把球传给其余 $r-1$ 个人中的任意一个，求第 n 次传球时仍由甲传出的概率？

【 $p_n=\frac{1}{r}[1-(\frac{-1}{r-1})^{n-2}],n\geq 2$ 】

解决思路末步分析法

★ **Bayes 公式(逆概率公式)：** 设 $B_1,B_2,\cdots$ 为样本空间 Ω 的一个正划分，$A\in\mathscr{F}$ 满足 $P(A)>0$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}.$$

若将它与全概率公式结合起来，就是 Bayes 公式的以下的常用形式

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{m}P(B_j)P(A|B_j)}\qquad (m\le+\infty，\ i=1,2,\cdots m).$$

例 8 （续例 5）已知从乙箱中取出的一件产品是次品的条件下，求从甲箱中取出的 3 件中有 2 件次品的概率？

例 9 （Jailer's Paradox）甲乙丙三名囚犯获知他们中将有两人获释，一人被判死刑，而监狱里只有狱卒知道确切的结果。于是，甲写了一封家信，找到狱卒希望狱卒告诉他乙或丙那个将获释，以便让获释的那个囚犯将家信带出去。狱卒拒绝透露任何信息给甲，解释说，如果他告诉了甲，乙或丙那个获释，那么甲被判死刑的概率就从原来的$\frac{1}{3}$变为$\frac{1}{2}$了，是这样的吗，解释之？

例 10（嘉宾猜奖游戏的 Bayes 公式解法）**见教材**

注：1. 问题判断：若随机试验可以分两阶段（或层次）进行，且第一阶段的各试验结果具体发生了哪一个未知，要求第二阶段的结果发生的概率，肯定用全概率公式；

若随机试验可以分两阶段（或层次）进行，且第一阶段的各试验结果具体发生了哪一个未知，但第二阶段的某一个结果是已知的，要求此结果是第一阶段某一个结果所引起的概率，则肯定用 Bayes 公式。

2. 先验概率与后验概率（Bayes 统计的主要思想）