Relatório 2º Projeto ASA 2020/2021

Grupo: al024
Alunos: António Coelho (ist195535) e Gustavo Aguiar (ist195587)

1 Descrição do Problema e da Solução

Pelo enunciado, temos que o pretendido é $min\{\sum_{i\in P_x}\mathrm{X}_i + \sum_{i\in P_y}\mathrm{Y}_i + \sum_{(i,j)\in P_x\times P_y}\mathrm{c}_{ij}\}$. Assim, por definição, este problema trata-se de um corte de capacidade mínima, pelo que com base no Teorema de Fluxo Máximo Corte Mínimo, modelámo-lo como um de rede de fluxo, onde a fonte e o sumidouro correspondem aos processadores X e Y, respetivamente, e os restantes vértices aos n processos do programa. Para além disso, sabendo que $(\sum_{i\in P_x}X_i + \sum_{i\in P_y}Y_i) \in O(n)$, temos que $|f^*| \in O(|V|)$. Justifica-se assim usar um algoritmo de caminhos de aumento, baseado no método de *Ford-Fulkerson*, sendo esses determinados por uma *BFS* - **Algoritmo de *Edmonds-Karp***.

Assim, como auxílio de resolução dos problemas encontrados utilizaram-se as seguintes referências:

- Análise teórica do algoritmo de *Edmonds-Karp*
- Implementação do algoritmo de *Edmonds-Karp* para determinar o fluxo máximo

2 Análise Teórica

A representação da rede residual em memória foi feita com recurso a uma matriz de adjacências - complexidade de espaço $\Theta(V^2)$ - justificada pela bidirecionalidade dos arcos correspondentes aos custos inter-processos e pelo acesso O(1) às capacidades dos arcos na rede residual no decorrer do algoritmo.

A solução visada para a resolução dos problemas apresentados consiste em 2 etapas: ler a rede de fluxo de *input* (1) e computar o fluxo máximo com recurso ao algoritmo de *Edmonds-Karp*(2).

Para (1) - leitura de *input* - usando `scanf`, ler os dados de entrada dentro de dois ciclos (n e k) a dependerem linearmente e quadraticamente de V para os custos entre os processos e os processadores e entre processos, respetivamente. Mais concretamente, $\Theta(V-2) = \mathrm{O(V)}$ para o primeiro ciclo e $\mathrm{O}(\frac{(V-2)(V-3)}{2})$[1] $= \mathrm{O(V^2)}$ para o segundo.

Para (2) – aplicar o algoritmo de *Edmonds-Karp* na rede de fluxo – enquanto houver caminhos de aumento aplica-se a *BFS* e de seguida faz-se um *backtrack* para calcular a capacidade crítica[2] desses. O número de caminhos $\in |f^*|$. Porém, como no contexto

[1] Numa matriz N $\times$ N existem $\frac{N(N-1)}{2}$ entradas na matriz triangular superior (sem contar com a diagonal).

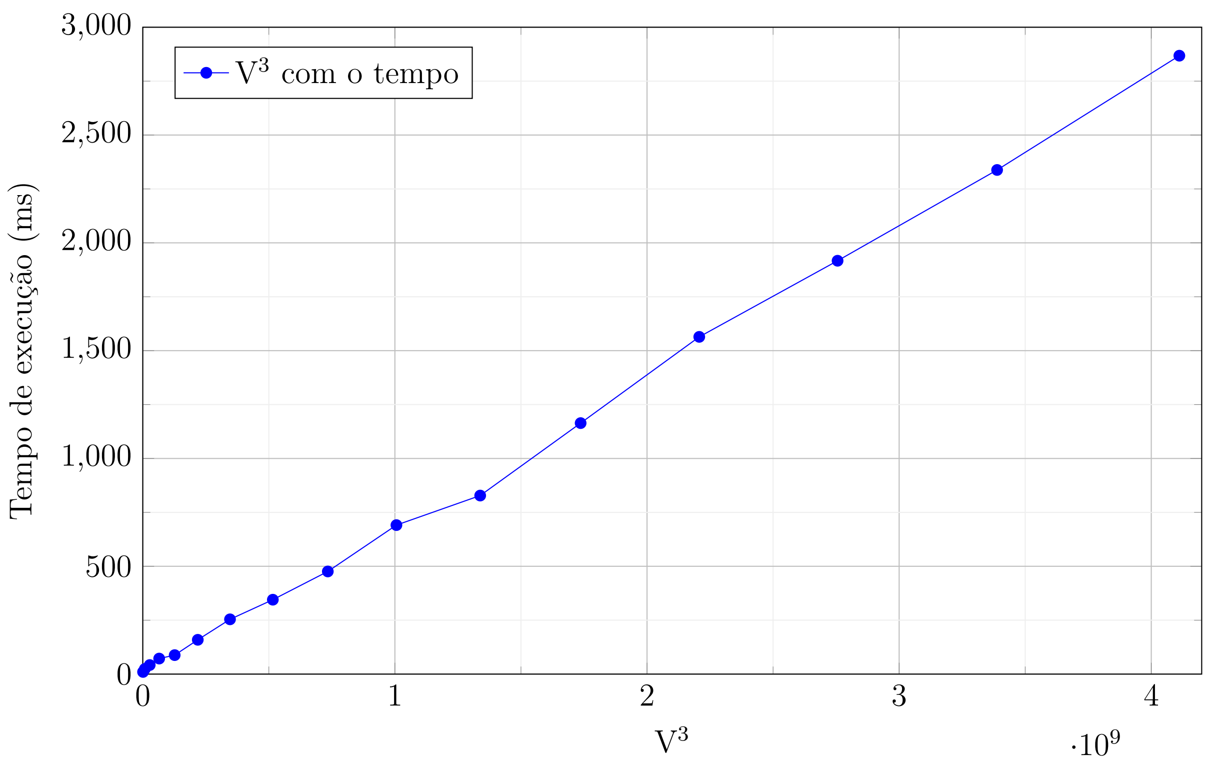
[2] Capacidade crítica de um caminho de aumento é a capacidade mínima de um arco na rede residual que conste nesse mesmo caminho.

do problema $|f^*| \in O(V)$, que é um limite mais apertado, tem-se que esta etapa é O(V). A BFS, por outro lado, devido à representação da rede residual sob matriz, corre em O(V^2). Por fim, o backtrack é O(V), de modo que a complexidade total de (2) é O(V(V^2+V)) = O(V^3). Por fim, como a complexidade de (2) domina a de (1), tem-se que a solução geral aos problemas apresentados $\in$ **O(V^3)**.

3 Avaliação Experimental dos Resultados

Para a devida análise do algoritmo implementado, utilizou-se um computador com processador *Intel Core i5 Quad-Core* a 1.4 GHz, com 8 GB de memória RAM, com o sistema operativo *macOS Big Sur*.

Utilizou-se a ferramenta `gen2procs` fornecida pelo corpo docente para gerar redes de fluxo com capacidade por arco até 15 – mostra-se irrelevante utilizar capacidades superiores uma vez que a solução apresentada tem complexidade independente desse valor - e número de vértices entre 102 e 1602 aumentando de 100 em 100, perfazendo um tamanho de grafo até à ordem de grandeza 10^6. Com o intuito de cronometrar o desempenho do algoritmo implementado utilizou-se a chamada de sistema `time` para o programa a correr sobre as redes geradas.



Por fim, registaram-se os valores obtidos da testagem e ajustou-se uma regressão linear que demonstra, experimentalmente, a veracidade da complexidade do algoritmo esperada teoricamente - **O(V^3)**.