

Explicación del Problema: Walking on Multiplication Table

El problema plantea una situación donde Takahashi se encuentra en una tabla de multiplicar infinita. Esta tabla tiene:

- Filas numeradas desde 1 hasta infinito.
- Columnas numeradas desde 1 hasta infinito.
- En cada celda se encuentra el valor:  $\text{celda}(i,j)=i \times j$

Takahashi comienza en la posición (1,1), cuyo valor es:  $1 \times 1 = 1$

Desde esta casilla, él solo puede moverse en dos direcciones:

- Hacia la derecha  $\rightarrow$  aumenta la columna
- Hacia abajo  $\rightarrow$  aumenta la fila

El objetivo del problema es muy simple de enunciar:

Dado un número N, debemos determinar el mínimo número de movimientos que necesita Takahashi para llegar a cualquier celda cuyo valor sea exactamente N.

Ejemplo del Enunciado

Para ilustrar el problema, tomemos el ejemplo donde:

$N=10$

La salida esperada es:

5

¿Por qué?

En la tabla de multiplicación infinita, el número 10 aparece en varias posiciones:

- $(1, 10) \rightarrow 1 \times 10$
- $(2, 5) \rightarrow 2 \times 5$
- $(5, 2) \rightarrow 5 \times 2$
- $(10, 1) \rightarrow 10 \times 1$

Como Takahashi solo puede moverse hacia la derecha o hacia abajo desde (1,1), buscamos un camino que minimice los movimientos necesarios para alcanzar alguna de estas posiciones.

- Ejemplo de caminos posibles:

1. Camino 1

Moverse por la primera fila hasta llegar a la columna 10

Movimientos:

- 9 a la derecha
- Total = 9 movimientos

2. Camino 2

Bajar a la fila 2 y avanzar hasta la columna 5

Movimientos:

- 1 hacia abajo
- 4 hacia la derecha

Total = 5 movimientos  $\rightarrow$  mejor opción

Por lo tanto, la respuesta mínima es: 5

Cómo determinar los movimientos mínimos

Si una celda que contiene N está en la posición (i, j), llegar a ella desde (1,1) requiere:

$\text{movimientos} = (i-1) + (j-1) = i+j-2$

Por lo tanto, el problema se reduce a:

Encontrar todos los pares (i, j) tales que  $i \times j = N$ , y escoger el que minimice  $i+j-2$

Por qué no sirve la solución ingenua

Una primera idea sería recorrer toda la tabla buscando dónde aparece N.

Pero la tabla es infinita y la búsqueda sería:

- $O(n^2)$  si exploráramos pares (i, j) sin optimización
- Imposible para valores grandes de N

Esta solución es completamente inviable.

La observación clave del enunciado

El número N solo aparece en posiciones donde:

$i|N$

es decir, solo necesitamos buscar los divisores de N.

Para cada divisor i:

- $j = N / i$
- obtenemos el par (i, j) que genera N
- calculamos los movimientos:

$i+j-2$

La pregunta se reduce entonces a:

¿Cuál par divisor  $(i, j)$  minimiza la expresión  $i+j-2$ ?

Complejidad del método eficiente

Para buscar divisores de un número, solo necesitamos recorrer:

$$1 \leq i \leq \sqrt{N}$$

Con esto obtenemos todos los pares divisor–cociente.

La complejidad final:

$$O(\sqrt{N})$$

Mucho más eficiente que la solución cuadrática inicial.

Conclusión del Enunciado

El problema pide determinar la forma más rápida de llegar a algún punto de la tabla de multiplicación que contenga el valor  $N$ , utilizando únicamente movimientos hacia abajo o hacia la derecha.

La clave está en entender que:

- Los valores de la tabla dependen de multiplicaciones.
- Solo las posiciones  $(i, j)$  donde  $i \times j = N$  son relevantes.
- Estas posiciones pueden obtenerse mediante los divisores de  $N$ .
- La mejor de ellas es la que reduce al mínimo la expresión  $i + j - 2$ .

Por tanto, el análisis de divisores lleva a la solución óptima.