eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Máster Universitario en Modelización e Investigación Matemática, Estadística y Computación 2018/2019

Modelos de logística

Problemas de modelos de logística. Cadena de suministro.

F. Javier Pérez Ramírez

Bilbao mayo 2019

Índice

1. Introducción

Para realizar este trabajo se ha elegido el artículo **Mobile phone tower location for survival after natural disasters, de H.A. Eiselt, Vladimir Marianov**[1].

El artículo escogido busca optimizar la localización de un grupo de antenas de telefonía móvil respecto a la situación de una serie de poblaciones a lo largo de una zona de Chile. En este caso se llama 'óptimo' al grupo de antenas que da servicio a la mayor parte de la población posible. Chile es un territorio con frecuentes seísmos, razón por la cual muchas de estas antenas acaban destruidas durante estos sucesos. Los autores justifican que si se hace una inversión reforzando únicamente las antenas seleccionadas, se obtiene por un lado que la inmensa mayoría de la población (hasta el 97 %) podría seguir teniendo cobertura telefónica tras el desastre y por otro lado se reducen los costes de reforzar antenas redundantes para la comunicación.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: La sección 2.1 muestra la formulación matemática del problema descrito en el artículo. La sección 2.2 desarrolla una variante del problema original. La sección 3 muestra ejemplos para ambas formulaciones y la sección 4 muestra las conclusiones finales. Además en los apéndices A y C se puede encontrar el código integro en formato OPL de IBM para CPLEX que se ha utilizado para resolver sendos problemas.

2. Descripción del problema y formulación matemática.

El problema descrito maximiza la cantidad de población cubierta por las antenas reforzadas. El problema ha sido resuelto fijando inicialmente la cantidad de antenas a reforzar a uno de los tres valores: $p = \{10, 15, 20\}$[1]. Por otro lado contiene tres posibles objetivos, pero solo fija uno de ellos a la hora de optimizar. O sea que está planteado como tres problemas de un solo objetivo cada uno.

2.1. Problema original del artículo.

2.1.1. Definición de variables y parámetros.

En el problema se describen los siguientes parámetros y variables.

- Conjuntos e índices:

  I Conjunto que indexa las poblaciones. En el ejemplo del artículo el número de poblaciones oscila entre 1 y 71. El índice i se mueve en este conjunto.

[1]Se prueba a buscar alternativamente las 10 o 15 o 20 antenas mejor situadas. Esto lo mencionan en la página 567 del artículo ('Rather than limiting the budget, we consider several scenarios with 10, 15 and 20 towers that can be strengthened.')

J Conjunto que indexa las antenas. En el ejemplo del artículo el número de antenas va desde 1 hasta 94 [2]. Los índices j y l se mueve en este conjunto.

- Parámetros:[3]

p Número de antenas a reforzar. El artículo fija este número a uno de los tres siguientes valores: $\{10, 15, 20\}$.

N_i Conjunto de antenas que cubren la localización i. La cobertura de una antena se determina en 15 kilómetros.

w_i Número de clientes en la localización i.

q_l Probabilidad de fallo de una antena reforzada en la localización l. Los autores justifican que se puede sustituir este valor por $1/p$.

M_j Conjunto de todas las antenas k que están cerca de la antena j. Se considera que una antena está cerca cuando su distancia es menor de 5,92 kilómetros. Esto se debe a que usando la escala Mercalli de destrucción de terremotos, el nivel de destrucción VII ('muy fuerte'), para un terremoto de magnitud 5, ocupa un radio de 5,92 kilómetros. Para un terremoto de magnitud 6 el nivel VII de destrucción alcanza un radio de 16.8 km. Y para uno de magnitud 7 el radio es de 48 km. Estos valores pueden ser utilizados para parametrizar la 'cercanía' de una antena respecto a otra. La idea es que si hay varias antenas cercanas entre sí, entonces solo se refuerza una de ellas.

N_i Conjunto de antenas j que cubren la localidad i. En nuestro ejemplo se considera que una antena tiene una cobertura de 15 kilómetros. Por tanto cualquier antena j a menos de esa distancia de i forma parte del conjunto N_i.

- Variables:

y_j Binaria. Vale 1 si la antena en la localización j esta reforzada. 0 en caso contrario.

x_i Binaria. Vale 1 si la población i está cubierta por alguna antena. 0 en caso contrario.

z_{il} Binaria. Vale 1 si la población i está cubierta incluso aunque la antena l sea destruida. 0 en caso contrario.

v_l Entera. Numero total de clientes sin conexión si la antena l es destruida.

v Entera. Valor máximo de la variable v_l. Esta variable sólo se utiliza en caso de haber elegido la función objetivo (2).

[2] Los datos en 'crudo', antes de ser tratados, se pueden encontrar en el repositorio [3].

[3] Este artículo declara el parámetro c_j, coste de reforzar la torre j, pero no lo usa en ningún momento. Sin embargo en la sección posterior (2.2) se implementará una nueva variante de este artículo donde se declarará este parámetro y se hará uso del mismo.

2.1.2. Formulación matemática del problema.

Como ya se dijo el problema contiene tres posibles funciones objetivo, pero solo fija una de ellas a la hora de optimizar. O sea que está planteado como tres problemas de un solo objetivo cada uno.

$$\text{Max } \sum_{i \in I} w_i x_i \tag{1}$$

$$\text{Max } \sum_{i \in I} w_i x_i - v \tag{2}$$

$$\text{Max } \sum_{i \in I} w_i x_i - \frac{1}{p} \sum_{l \in J} v_l \tag{3}$$

s.t.

$$\sum_{j \in J} y_j = p \tag{4}$$

$$x_i \leq \sum_{j \in N_i} y_j \quad \forall i \in I \tag{5}$$

$$z_{il} \leq 1 - 2y_l + \sum_{j \in N_i} y_j \quad \forall i \in I, l \in N_i \tag{6a}$$

$$z_{il} = 1 \quad \forall i \in I, l \notin N_i \tag{6b}$$

$$v_l = \sum_{i : l \in N_i} w_i (1 - z_{il}) \quad \forall l \in J \tag{7}$$

$$v \geq v_l \quad \forall l \in J \tag{8}$$

$$y_k + y_j \leq 1 \quad \forall j, k \in M_j \tag{9}$$

$$x_i, y_j, z_{il} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J, l \in J \tag{10}$$

Funciones objetivo:

- La primera función objetivo (1) maximiza la cobertura de los clientes.
- La segunda función objetivo (2) también se maximiza la cobertura de la población total, pero considerando el peor caso: que se pierde la antena con mayor cobertura.
- La tercera (3) también se maximiza la cobertura de la población total, pero considerando el caso de perdida intermedia.

Restricciones:

- La restricción (4) fija el numero de antenas a reforzar.
- La restricción (5) define al nodo i como cubierto solo si el sitio está cubierto por al menos una antena.[4]

[4]Supongo que el lector o lectora no precisa explicaciones más exhaustivas y que no hay necesidad de copiar los detalles del articulo original. En dicho artículo ([1]) se explica magistralmente el sentido de cada uno de los sumandos que componen todas las restricciones.

- En la restricción (6a) se consideran todos los pares de poblaciones i y de potenciales antenas reforzadas antenas l. La primera suma $(1-2y_l)$ cuenta con signo negativo el número de veces que el nodo i está cubierto por la antena l (que es 0 o 1). El segundo sumando $(\sum_{j\in N_i} y_j)$ cuenta el número de veces que el nodo i está cubierto por cualquier antena, incluida l. Al restarse ambas cantidades se obtiene el valor esperado: z_{il}.
- La restricción (6b) indica que si el nodo l no cubre la población i entonces su destrucción no le afecta.
- La restricción (7) define cuantos clientes se pierden en caso de que se destruya la antena l.
- (8) es una restricción especial si se elige la función objetivo (2).
- La restricción (9) fuerza la separación mínima entre antenas.
- La restricción (10) indica que las variables x_i, y_j, z_{il} son binarias.

En la sección 3 se puede encontrar un ejemplo ilustrativo con los datos originales del problema. Pero antes se pasará a realizar una formulación alternativa del problema.

2.2. Variante del problema original

Se puede plantear un problema ligeramente diferente donde se minimice el coste de reforzar ciertas torres de comunicación sujetos a un presupuesto limitado y dando cobertura a un gran porcentaje de la población tras un desastre. En este caso también se puede elegir entre el caso habitual (que no se pierda ninguna antena reforzada, ecuación (18a)) y el peor caso (que se pierde la antena con mayor cobertura, ecuación (18b).

2.2.1. Definición de nuevos parámetros.

- Parámetros:

  C_j Coste individual por reforzar cada una de las antenas (en unidades monetarias). El coste puede ser diferente para cada antena. Podemos suponer que las antenas en parajes más inaccesibles o en ciertas situaciones técnicas pueden ser más caras de reforzar que otras que se encuentran en núcleos urbanos.

  B Presupuesto total del que se dispone para reforzar todas las antenas (en unidades monetarias).

  F Porcentaje de la población que acaba teniendo cobertura final solo con las antenas reforzadas. Valor real entre [0, 1].

  $W1_i$ Hay poblaciones que aún no tienen cobertura de antena. Estas no contaran para el porcentaje de clientes inicialmente cubiertos. Por tanto $W1_i$ será un parámetro binario que vale 1 si la población i inicialmente tiene cobertura de alguna antena y 0 en caso contrario. En nuestro ejemplo, las poblaciones $i = 11$ e $i = 21$ no poseen ninguna cobertura de telefonía móvil.

2.2.2. Formulación matemática del problema alternativo.

$$\text{Min} \sum_{j \in J} C_j y_j \tag{11}$$

s.t.

$$x_i \leq \sum_{j \in N_i} y_j \quad \forall i \in I \tag{12}$$

$$z_{il} \leq 1 - 2y_l + \sum_{j \in N_i} y_j \quad \forall i \in I, l \in N_i \tag{13a}$$

$$z_{il} = 1 \quad \forall i \in I, l \notin N_i \tag{13b}$$

$$v_l = \sum_{i: l \in N_i} w_i (1 - z_{il}) \quad \forall l \in J \tag{14}$$

$$v \geq v_l \quad \forall l \in J \tag{15}$$

$$y_k + y_j \leq 1 \quad \forall j, k \in M_j \tag{16}$$

$$\sum_{j \in J} C_j y_j \leq B \tag{17}$$

$$\sum_{i \in I} w_i x_i \geq F \sum_{i \in I} w_i W1_i \tag{18a}$$

$$\sum_{i \in I} w_i x_i - v \geq F \sum_{i \in I} w_i W1_i \tag{18b}$$

$$x_i, y_j, z_{il} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in I, j \in J, l \in J \tag{19}$$

Funciones objetivo:

- Ahora hay una sola función objetivo:(11) que minimiza el coste de reforzar las antenas.

Restricciones:

La restricción (4) ya no está presente porque el número de antenas a reforzar es variable. Además las restricciones originales de la (5) a la (9) son exactamente iguales que las restricciones de la (12) a la (16). Y las restricciones (10) y (19) también son iguales entre sí.

Las nuevas restricciones son:

- La restricción (17) fuerza que la cantidad gastada sea menor que el presupuesto disponible, B.
- Hay que elegir entre las restricción (18a) y la (18b). La primera exige que la cobertura final con las antenas reforzadas sea mayor o igual que un porcentaje F respecto a los clientes cubiertos inicialmente. La segunda opción exige que la cobertura final eliminando la antena con mayor servicio a clientes, v, sea mayor o igual que un porcentaje F de los clientes inicialmente cubiertos. Para este problema se elegirá únicamente la restricción (18a).

3. Ejemplo ilustrativo.

Para mostrar la efectividad de las dos formulaciones propuestas se partirá de los datos originales del artículo. Estos datos han sido compartidos amablemente por uno de los autores (V. Marianov) y con su permiso expreso han sido subidos al repositorio GitHub [3]. Estos tienen la forma indicada en la tablas 1 y 2. Ha habido que pre-procesarlos para obtener el resultado final que se refleja en los ficheros `AntennaLocation.dat` y `AntennaLocationBudget.dat` (aptos para ser usados con lenguaje OPL de IBM para CPLEX)[5].

Tabla 1: Muestra de los datos originales con las posiciones de las 71 ciudades.

Nr	Population	x[km]	y[km]
1	212003	138.19	216.52
2	161692	134.33	225.36
3	91469	131.31	193.58
4	85928	135.22	220.22
⋮	⋮	⋮	⋮
71	1245	174.00	259.00

Tabla 2: Muestra de los datos originales con las posiciones de las 94 antenas.

Nr	x[km]	y[km]
1	163.53	298.30
2	158.77	294.51
3	173.17	264.06
4	172.22	263.99
⋮	⋮	⋮
94	106.98	46.02

A continuación para no alargar innecesariamente este trabajo, se mostrarán los resultados del artículo original de manera muy sucinta y seguidamente nos centraremos en los resultados de la formulación alternativa.

3.1. Resultados de la programación original del artículo.

Para obtener los resultados del artículo, se ha escrito un programa en formato OPL de IBM para CPLEX que se puede encontrar en el apéndice A. Como es de esperar, los resultados de la optimización son los mismos que en el artículo. Pueden variar las antenas escogidas por el programa, pero manteniendo el nivel de

[5]El mencionado repositorio ([3]) contiene un fichero en formato XLS, donde se han pre-procesado los datos originales y donde se pueden ver los cálculos realizados hasta llegar a obtener los parámetros N_i, M_j, w_i, etcétera.

cobertura máxima exigida. Si se toma la primera función objetivo, esta diferente elección de antenas puede hacer variar ligeramente los valores finales de v_l y de v.

Los resultados relativos a la primera función objetivo (1) fijando el número de antenas $p = 10$ son los siguientes:

```
Numero de antenas reforzadas, p = 10
Numero total de personas en el territorio: 1073258
Numero total de personas cubiertas por TODAS las antenas:
   1051395
-----------------------------------------
Numero total de clientes cubiertos por las antenas
   reforzadas:
1. Total: 1033955
2. Perdida una antena (peor caso): 446012
3. Perdida una antena (caso intermedio): 925343
-----------------------------------------
Lista de antenas reforzadas = { 5 9 26 67 73 79 82 84 85 88}
Porcentaje personas cubiertas: 98.3413 %
```

Si se fija el número de antenas a $p = 15$ se obtiene;

```
Numero de antenas reforzadas, p = 15
Numero total de personas en el territorio: 1073258
Numero total de personas cubiertas por TODAS las antenas:
   1051395
-----------------------------------------
Numero total de clientes cubiertos por las antenas
   reforzadas:
1. Total: 1049276
2. Perdida una antena (peor caso): 461333
3. Perdida una antena (caso intermedio): 975717
-----------------------------------------
Lista de antenas reforzadas = { 1 5 9 26 64 67 73 74 79 82
   84 85 88 91 93}
Porcentaje personas cubiertas: 99.7985 %
```

Si se fija el número de antenas a $p = 20$ se obtiene;

```
Numero de antenas reforzadas, p = 20
Numero total de personas en el territorio: 1073258
Numero total de personas cubiertas por TODAS las antenas:
   1051395
-----------------------------------------
Numero total de clientes cubiertos por las antenas
   reforzadas:
1. Total: 1051395
2. Perdida una antena (peor caso): 382759
3. Perdida una antena (caso intermedio): 923441
-----------------------------------------
Lista de antenas reforzadas = { 1 4 6 11 12 39 52 59 64 67
```

```
   68 74 76 79 82 84 85 88 91 93}
Porcentaje personas cubiertas: 100 %
```

3.2. Resultados de la programación alternativa minimizando costes.

A continuación nos centraremos en los resultados del segundo problema. Fijaremos el coste de reforzar cada antena a un valor fijo e idéntico para todas las antenas: $C_j = 100, \forall j \in J$ (esta cantidad podría ser diferente de unas antenas a otras).

1. Presupuesto $B = 1000$ y porcentaje final de cobertura $F = 0{,}9834$. Este es un caso prácticamente idéntico al propuesto en el problema y por tanto los resultados deben muy parecidos. El número de personas cubiertas por las antenas reforzadas es el mismo (1051395). Sin embargo la distribución de antenas no es exactamente el mismo, porque puede haber diferentes configuraciones de antenas que den la misma solución óptima:

```
Presupuesto disponible, B = 1000
Gasto final 1000
Numero de antenas reforzadas = 10
Numero total de personas en el territorio 1073258
Numero total de personas cubiertas por TODAS las antenas
    1051395
-----------------------------------------
Numero total de clientes cubiertos por las antenas
   reforzadas:
1. Total: 1033955
2. Perdida una antena (peor caso): 365319
3. Perdida una antena (caso intermedio): 917274
-----------------------------------------
Lista de antenas reforzadas = { 5 9 39 67 73 79 82 84 85
    89}
Porcentaje minimo de cobertura final, F = 98.34 %
Porcentaje personas cubiertas finalmente = 98.3413 %
```

   La figura 1 muestra la localización relativa de las poblaciones y de las diez antenas.

2. Si se reduce el presupuesto a $B = 900$ pero exigiendo el mismo nivel de cobertura final ($F = 0{,}9834$). El problema no tiene solución, como era previsible.

3. Si Se aumenta el presupuesto al doble del inicial, $B = 2000$, pero exigiendo el mismo nivel de cobertura final ($F = 0{,}9834$), se tiene el mismo resultado que en el caso 1. como es de esperar.

4. Si se tiene un presupuesto $B = 2000$ y se exige una cobertura final del 100 % ($F = 1$): se obtiene que solamente son necesarias 17 antenas reforzadas para

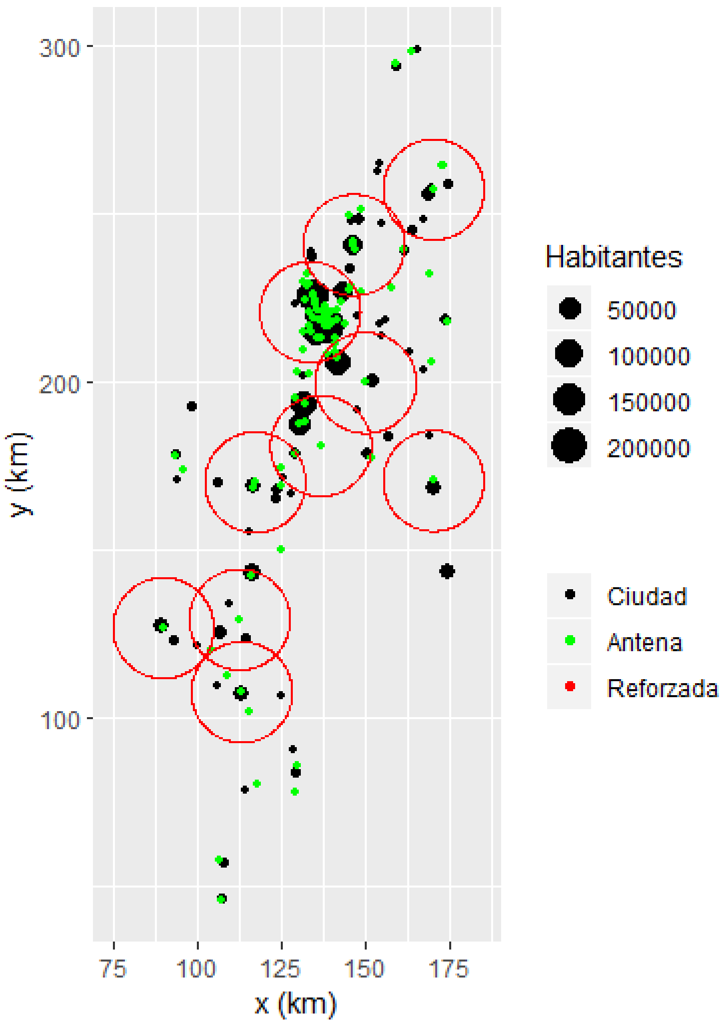

Figura 1: Con un presupuesto limitado se pueden reforzar 10 antenas que dan cobertura al 98,34 % de la población.

la configuración dada de poblaciones y antenas, en vez de 20 como presentaba el ejemplo del artículo. No hay necesidad de usar todo el presupuesto, ahorrando costes.

```
Presupuesto disponible, B = 2000
Gasto final 1700
Numero de antenas reforzadas = 17
Numero total de personas en el territorio 1073258
Numero total de personas cubiertas por TODAS las antenas
    1051395
-----------------------------------------
Numero total de clientes cubiertos por las antenas
   reforzadas:
1. Total: 1051395
2. Perdida una antena (peor caso): 463452
```

```
3. Perdida una antena (caso intermedio): 964067
-----------------------------------------
Lista de antenas reforzadas = { 1 5 6 8 26 63 64 72 76
   77 79 82 84 85 89 91 94}
Porcentaje minimo de cobertura final, F = 100 %
Porcentaje personas cubiertas finalmente = 100 %
```

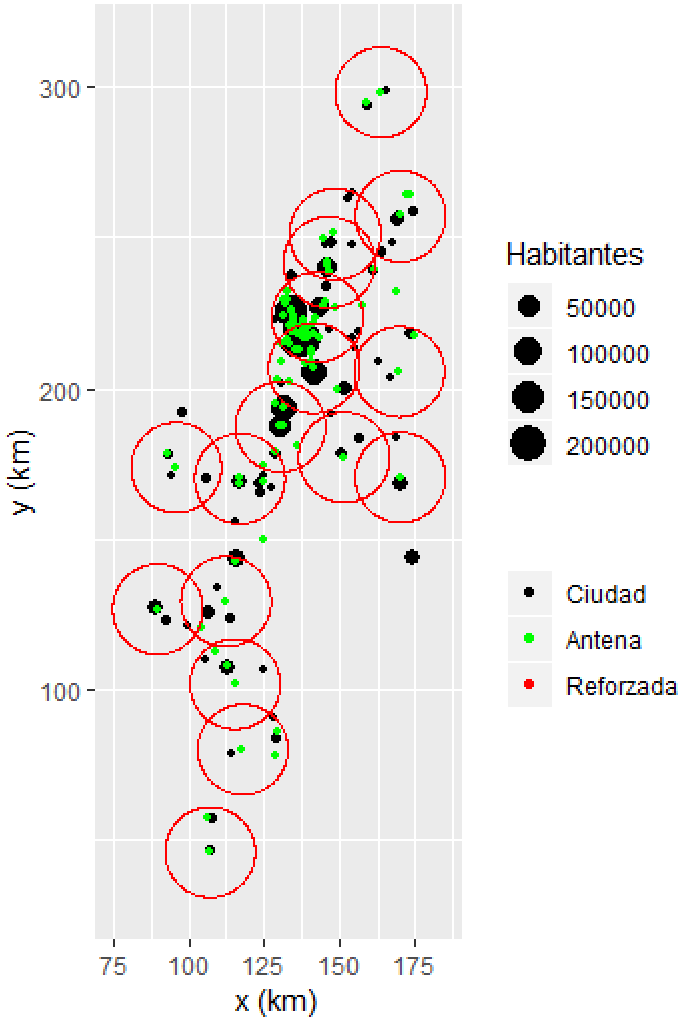

Figura 2: Con un presupuesto limitado se pueden reforzar 17 antenas que dan cobertura al 100 % de la población que inicialmente ya tenía cobertura telefónica.

La figura 2 muestra la localización relativa de las poblaciones y de las diecisiete antenas. Hay dos poblaciones que nunca han tenido cobertura: la número 11 y la número 21. Por eso las antenas reforzadas tampoco pueden llegar a ellas. Esta eventualidad puede comprobarse numéricamente en los ficheros de datos [3] ya mencionados.

4. Conclusiones.

Con el segundo programa se optimiza el presupuesto disponible y se aprecia que con 17 antenas reforzadas (en lugar de 20) es suficiente para cubrir, en este caso, al 100 % de la población que ya tenía cobertura. De esta manera se consiguen dos objetivos: ceñirse a un presupuesto y dotar de servicio telefónico a todo el territorio con las antenas reforzadas.

5. Agradecimientos.

Agradezco enormemente al profesor Vladimir Marianov por enviarme los datos 'en crudo' con las posiciones geográficas de las antenas y de las ciudades con los que prepararon su artículo. Sin estos datos no habría podido llegar a este resultado. Hoy en día estos datos se pueden consultar en [3].

Así mismo debo mencionar a IBM por proporcionar a la Universidad del País Vasco (UPV/EHU) una licencia académica de CPLEX ™con la que he podido realizar mis cálculos y avanzar en mis conocimientos.

A. Código fuente del artículo original

El código integro en formato OPL de IBM para CPLEX que se ha utilizado para el problema original estará disponible en el repositorio GitHub [3] al terminar el año académico, para no interferir con el trabajo del resto de alumnos del máster. Así mismo también se podrá encontrar allí el código del artículo [2] 'Planning production using mathematical programming'.

B. Fichero de datos para el artículo original

El fichero de datos integro en formato OPL de IBM para CPLEX que se ha utilizado para resolver el problema original descrito en la sección 2.1 está disponible en el repositorio GitHub [3] para poder descargarlo con facilidad.

C. Código fuente de la variante del artículo original

El código integro en formato OPL de IBM para CPLEX que se ha utilizado para resolver la variante del problema original descrito en la sección 2.2 está disponible en el repositorio GitHub [3]

D. Fichero de datos para la variante del artículo original

El fichero de datos integro en formato OPL de IBM para CPLEX que se ha utilizado para resolver la variante del problema original descrito en la sección 2.2

está disponible en el repositorio GitHub [3] para poder descargarlo con facilidad.

E. Créditos y fuentes.

- Este documento ha sido escrito con LaTeX, usando el editor gratuito TeXstudio.
- Los datos en crudo proporcionados por el profesor Marianov han sido tratados con excel y con excelVBA de Microsoft. Estos datos están disponibles en el repositorio repositorio GitHub de quien suscribe [3].
- Los problemas han sido resueltos con CPLEX de IBM en su versión académica.
- Las figuras de la localización de las poblaciones y las antenas han sido implementadas con Rstudio.

Referencias

[1] Horst A Eiselt and Vladimir Marianov. Mobile phone tower location for survival after natural disasters. *European journal of operational research*, 216(3):563–572, 2012.

[2] Rafael Pastor, Jordi Altimiras, and Manuel Mateo. Planning production using mathematical programming: the case of a woodturning company. *Computers & Operations Research*, 36(7):2173–2178, 2009.

[3] F. Javier Pérez Ramírez. Mobile phone tower location for survival after natural disasters. based on an article by h.a. eiselt and vladimir marianov. `https://github.com/ImJaviPerez/Antenna-location-for-natural-disasters`, 2019.