Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Лабораторная работа №6
«Тригонометрическая интерполяция функций с помощью быстрого преобразования Фурье»
по дисциплине
«Численные методы»

Студент группы ИУ9-61	Александрова О.С.
Преподаватель	Домрачева А.Б.

Москва, 2024

Исходные данные:

$$f(x) = sin(2\pi x)$$

Задание:

1. Вычислить значения функций $f(x)$ в узлах сетки $x_j = j/N, N = 128$
2. Построить тригонометрическую интерполяцию функции, пользуясь БНФ для подсчета дискретных коэффициентов Фурье.
3. Сравнить значения тригонометрической интерполяции в средних точках всех отрезков разбиения $y_j = 0.5{+}j/N, j = 0, ..., (N-1)$.

Теоретические сведения:

Периодическая функция может быть разложена в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} a_q \exp 2\pi\imath qx \qquad (1)$$

Из-за периодичности функции $f(x)$ ряд Фурье можно записать в виде:

$$f(x) = \sum_{q=0}^{N-1} A_q \exp 2\pi\imath qx_j \qquad (2)$$

где $A_q = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_{q+sN}$

Верно и обратное равенство:

$$A_q = 1/N \sum_{j=0}^{N-1} f_j * \exp -2(\pi)\imath * q * x_j \qquad (3)$$

БНФ применяют, если число узлов сетки $N = 2^r$

$$q = \sum_{k=1}^{r} q_k * 2^{k-1} j = \sum_{m=1}^{r} j_{r+1-m} 2^{m-1} \tag{4}$$

БПФ состоит в подсчете коэффициентов A_q с помощью рекуррентных соотношений

$$A_q = A^{(r)}(q1, ..., qr) = A^{(m)}(q1, ..., q_m, j_{m+1}, ...j_r) =$$

$$1/2 \textstyle\sum_{j_m=0}^{1} \exp\left(-2\pi \imath j_m 2^{-m} \left(\sum_{k=1}^{m} q_k 2^{k-1}\right)\right) * A^{m-1}(q1, ..., q_{m-1}, j_m, ...j_r),$$

m=1, ... r (5)

где $A^{(0)}(j1, ..., j_r) = f_{(j_r)+j_{r-1}2+...2^{r-1}}$

Практическая реализация:

Листинг 1: Тригонометрическая интерполяция функции

```
import math
import cmath
import matplotlib.pyplot as plt

N = 128
x = [j / N for j in range(N)]
y = [math.sin(2 * math.pi * xj) for xj in x]


def bnf_fft(y):
    r = int(math.log2(N))

    Aq = [[0] * N for _ in range(r + 1)]

    for j in range(N):
        j_bin = bin(j)[2:].zfill(r)
        Aq[0][j] = y[int(j_bin, 2)]

```

```
    for m in range(1, r + 1):
        for q in range(N):
            q_bin = bin(q)[2:].zfill(r)
            j_m = int(q_bin[m - 1], 2)

            Aq[m][q] = 0.5 * sum([
                cmath.exp(- 2 * cmath.pi * 1j * j_m * 2 ** (-m) * sum(
                    [int(q_bin[k - 1], 2) * 2 ** (k - 1)
                     for k in range(1, m + 1)])) * Aq[m - 1][q]
                for j_m in range(2 ** (m - 1))
            ])

    return Aq[r]


def main():
    Aq = [1 / N * sum([fj * cmath.exp(- 2 * cmath.pi * 1j * q * xj)
                       for xj, fj in zip(x, y)]) for q in range(N)]

    yf = [sum([Aq[q] * cmath.exp(2 * cmath.pi * 1j * q * xj)
               for q in range(N)]) for xj in x]
    plt.plot(x, [yfj.real for yfj in yf])

    Aq = bnf_fft(y)
    yf = [sum([Aq[q] * cmath.exp(2 * cmath.pi * 1j * q * xj)
               for q in range(N)]) for xj in x]

    plt.plot(x, [yfj.real for yfj in yf])
    plt.legend()
    plt.show()


if __name__ == '__main__':
    main()
```

Результаты:

Ниже приведен вывод программы:

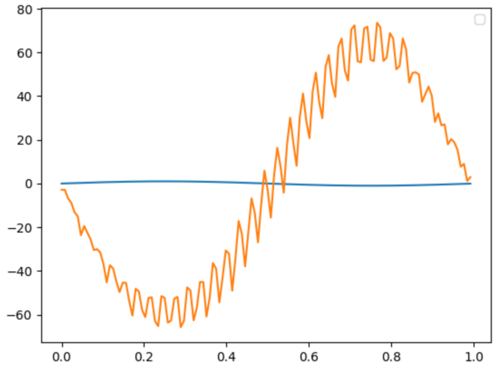

Рис. 1: Тригонометрическая интерполяция с помощью БНФ

Выводы:

В результате выполнения данного задания были получены числовые значения функции $f(x)$ на заданной сетке, построена тригонометрическая интерполяция функции и проведено сравнение интерполяционных значений с исходными значениями.

Выполнение данного задания позволило практически применить теоретические знания о вычислении значений функций в узлах сетки и построении тригонометрической интерполяции.