Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Лабораторная работа №5
«Метод наискорейшего спуска поиска минимума функции многих переменных»
по дисциплине
«Численные методы»

Студент группы ИУ9-61	Александрова О.С.
Преподаватель	Домрачева А.Б.

Москва, 2024

Постановка задачи:

Функция из индивидуального варианта $f(x) = x^2 + 2y^2 + \exp(x + y)$

$X^0 = (1, 1)$

Задание:

1. Найти минимум функции двух переменных с точностью $\epsilon = 0.001$, начиная итерации из точки X^0.
2. Найти минимум аналитичности.
3. Сравнить полученные результаты.

Теоретические сведения:

Метод наискорейшего спуска является итерационным. Пусть для функции $f(x_1, x_2 ...)$ на k-м шаге имеет некоторое приближение к минимуму $X^k = (x_1^k, ..., x_n^k)$

Рассмотрим функцию одной переменной:

$$\phi(t)_k = f(x_1^k - t\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^k), ..., (x_n^k - t\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^k))) = f(x^k - t\nabla(f(x^k))) \quad (1)$$

Здесь вектор $(\nabla(f(x^k))\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^k), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^k))$ - градиент функции f в точке X^k. Функция $\phi(t)_k$ представляет собой ограничение исходной функции на прямую градиентного спуска, проходящую через точку $k-$ приближения X^k.

Минимум функции t^* $\phi(t)_k$ можно найти любым методом одномерной оптимизации. Полагаем, что точка минимума это t^* .
Приближение к точке экстремума это :

$$x^{k+1} = x^k - t^*\nabla f(x^k) = (x_1^k - t^*\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^k), ..., (x_n^k - t^*\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^k))) \quad (2)$$

Далее поиск минимума продолжается до тех пор, пока $||\nabla f(x^k)|| = max\{1 <= i <= n\}|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^k)|$ -не станет меньше допустимой погрешности ε
В большинстве случаев можно ограничиться приближением к t^*, тогда вид итераций в двумерном случае будет иметь вид:

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k - t^* \frac{\partial f}{\partial x}, y_k - t^* \frac{\partial f}{\partial y}) \tag{3}$$

где $t^* = \frac{-\phi'_k(0)}{\phi''_k(0)}; \phi'_k(0) = -(\frac{\partial f}{\partial x})^2 - (\frac{\partial f}{\partial x})^2;$
$\phi''_k(0) = (\frac{\partial f}{\partial x})^2(\frac{\partial f^2}{\partial x^2}) + 2\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + (\frac{\partial f}{\partial y})^2(\frac{\partial f^2}{\partial y^2})$

Практическая реализация:

Листинг 1: Метод наименьших квадратов

```
#include <iostream>
#include <cmath>
using namespace std;

double eps = 0.001;
double xk, yk;

double f(double x, double y) {
    return x*x + 2*y*y + exp(x + y);
}

pair<double, double> analytical_min() {
    return {-0.292688, -0.14320};
}

double df_dx(double x, double y) {
    return 2*x + exp(x + y);
}

double df_dy(double x, double y) {
```

```
    return 4*y + exp(x + y);
}

double d2f_dx2(double x, double y) {
    return 2 + exp(x + y);
}

double d2f_dy2(double x, double y) {
    return 4 + exp(x + y);
}

int main() {
    int k = 0;
    double phi1, phi2, t_star;
    xk = 1.0;
    yk = 1.0;

    do {
        phi1 = - pow(df_dx(xk, yk), 2) - pow(df_dy(xk, yk), 2);

        phi2 = d2f_dx2(xk, yk) * pow(df_dx(xk, yk), 2) + 2 * d2

        t_star = - phi1 / phi2;

        xk = xk - t_star * df_dx(xk, yk);
        yk = yk - t_star * df_dy(xk, yk);

        k++;
    } while (max(df_dx(xk, yk), df_dy(xk, yk)) >= eps);

    cout << "methods min: (" << xk << ", " << yk << ")" << endl
    cout << "analytical min: (" << analytical_min().first << ",
    cout << "difference: (" << fabs(xk - analytical_min().first

    return 0;
```

}

Результаты:

Ниже приведен вывод программы:

$$methodsMin : (-0.312669, -0.156271)$$
$$analyticalMin : (-0.292688, -0.1432)$$
$$difference : (0.0199809, 0.013071)$$

Выводы:

В ходе выполнения лабораторной работы был рассмотрен «Метод наискорейшего спуска» для поиска минимума функции многих переменных. Была написана реализация данного метода на языке программирования C++, для которой были вручную посчитаны производные для формул из теоретического материла и получен аналитический минимум.