

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования Московский
государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Лабораторная работа №3
«Метод наименьших квадратов.
Аппроксимация алгебраическими многочленами»
по дисциплине
«Численные методы»

Студент группы ИУ9-61

Александрова О.С.

Преподаватель

Домрачева А.Б.

Москва, 2024

Постановка задачи:

Функция $y_i = f(x_i), i = \overline{1, n}$ задана таблично.

Таблица 1

x_1	x_2	\dots	x_n
y_1	y_2	\dots	y_n

Таблица 2

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y	0.96	2.07	1.96	2.62	3.75	4.12	3.98	3.63	4.70

- 1) Построить графики таблично заданных функций и функции $z(x)$
- 2) Найти значений $x_a, x_g, x_h, y_a, y_g, y_h, z(x_a)$
- 3) Составить систему уравнений для определений а, b и решить ее
- 4) Найти среднеквадратичное отклонение

Теоретические сведения:

Введем следующие обозначения:

$$x_a = (x_0 + x_n)/2 \quad (1)$$

$$x_g = \sqrt{(x_0 * x_n)} \quad (2)$$

$$x_h = 2/(1/x_0 + 1/x_n) \quad (3)$$

Легко видеть, что следующие девять функций обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}
 z_1(x) &= ax + b \Leftrightarrow z(x_a) = z_a \\
 z_2(x) &= ax^b \Leftrightarrow z(x_g) = z_g \\
 z_3(x) &= ae^{bx} \Leftrightarrow z(x_a) = z_g \\
 z_4(x) &= a * \ln(x) + b \Leftrightarrow z(x_g) = z_a \\
 z_5(x) &= a/x + b \Leftrightarrow z(x_h) = z_a \\
 z_6(x) &= 1/(ax + b) \Leftrightarrow z(x_a) = z_h \\
 z_7(x) &= x/(ax + b) \Leftrightarrow z(x_h) = z_h \\
 z_8(x) &= ae^{b/x} \Leftrightarrow z(x_h) = z_g \\
 z_9(x) &= 1/(a\ln(x) + b) \Leftrightarrow z(x_g) = z_h \\
 &\sum_{i=0}^n (\ln(a) + b * \ln(x_i) - \ln(y_i))^2
 \end{aligned}$$

и решать соответствующую систему относительно $\ln(a)$ и a . Элементами матрицы этой системы будут следующие:

$$A = \sum_{i=0}^n (\ln(x_i))^2, \quad B = \sum_{i=0}^n (\ln(x_i)), \quad C = \sum_{i=0}^n \ln(x_i)\ln(y_i), \quad D = \sum_{i=0}^n \ln(y_i)$$

(4)

После решения системы по величине $\ln(a)$ определяем a

Практическая реализация:

Листинг 1: Метод наименьших квадратов

```

1 import math
2 import matplotlib
3 # seaborn
4 matplotlib.use('TkAgg')
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 import numpy as np
7
8 if __name__ == "__main__":

```

```

9      n = 8
10     x = [1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4, 4.5, 5]
11     y = [0.96, 2.07, 1.96, 2.62, 3.75, 4.12, 3.98, 3.63, 4.70]
12     x_a = (x[0] + x[n]) / 2
13     print("x_a: ", x_a)
14     x_g = math.sqrt(x[0] * x[n])
15     print("x_g: ", x_g)
16     x_h = 2 / ((1 / x[0]) + (1 / x[n]))
17     print("x_h: ", x_h)
18     y_a = (y[0] + y[n]) / 2
19     y_g = math.sqrt(y[0] * y[n])
20     y_h = 2 / ((1 / y[0]) + (1 / y[n]))
21     z_x_a = 2.16
22     z_x_g = 1.91
23     z_x_h = 1.537
24
25     delt1 = abs(z_x_a - y_a)
26     delt2 = abs(z_x_g - y_g)
27     delt3 = abs(z_x_a - y_g)
28     delt4 = abs(z_x_g - y_a)
29     delt5 = abs(z_x_h - y_a)
30     delt6 = abs(z_x_a - y_h)
31     delt7 = abs(z_x_h - y_h)
32     delt8 = abs(z_x_h - y_g)
33     delt9 = abs(z_x_g - y_h)
34     del_array = [delt1, delt2, delt3, delt4, delt5, delt6, delt7, delt8, delt9]
35     min_del = 1000
36     min_ind = 0
37     for i in range(0, 9):
38         # print("delta", i+1, " ", del_array[i])
39         if del_array[i] < min_del:
40             min_ind = i + 1
41             min_del = del_array[i]
42
43     print("min delta", min_ind, min_del)
44     x_log = [math.log(i) for i in x]
45     sum_lnx = sum(x_log)
46     x_log_2 = [(math.log(i)) ** 2 for i in x]
47     sum_lnx_2 = sum(x_log_2)
48
49     sum_lnx_y = 0
50     for i in range(len(x)):

```

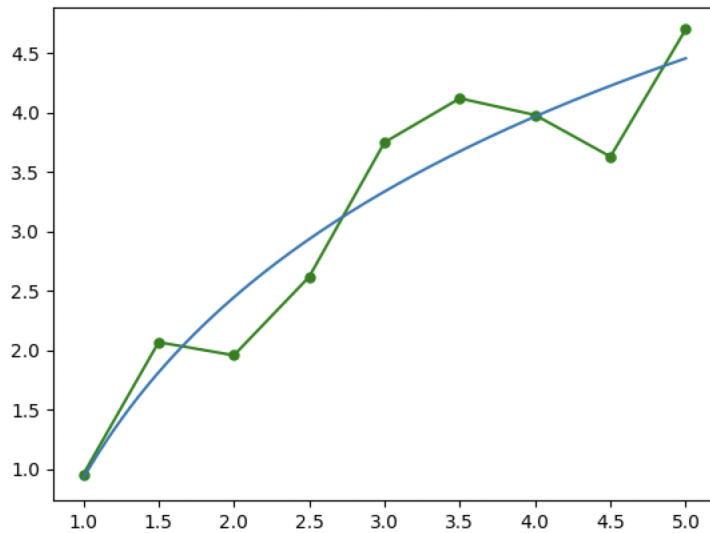


Рис. 1: Вывод графика

```

51         sum_lnx_y += math.log(x[i]) * y[i]
52
53     sum_y_i = sum(y)
54     m = 9
55     a = (m * sum_lnx_y - sum_lnx * sum_y_i) / (m * sum_lnx_2 - sum_lnx**2)
56     b = sum_y_i / m - (a * (sum_lnx)) / m
57
58     print("a: " + str(a))
59     print("b: " + str(b))
60     print("z(x) = ", str(a) + "*ln(x) + " + str(b))
61
62     plt.plot(x, y, color='green', marker='o', markersize=5)
63     x = np.linspace(1, 5, 1000)
64     f1 = np.log(x) * a + b
65     plt.plot(x, f1)
66     plt.show()

```

Результаты:

Ниже приведен вывод программы:

```
 $x_a$  :3.0
 $x_g$  :2.23606797749979
 $x_h$  :1.6666666666666667
 $mindelta$  :30.03585311242371958
 $a$  :2.1924661093676217
 $b$  :0.9279336279175925
 $z(x) = 2.1924661093676217 * \ln(x) + 0.9279336279175925$ 
```

Выводы:

В ходе выполнения лабораторной работы был рассмотрен «Метод наименьших квадратов» и разобрана задача, которая является эквивалентной по отношению к исходной задаче. Была написано реализация данного метода на языке программирования Python.

Был построен график таблично заданных функций и функции $z(x)$ с помощью библиотеки Python matplotlib.