Исследование скорости сходимости приближенного решения системы линейных уравнений, найденного с помощью метода Качмарца и его модификаций

Агафонкин Егор, Бурзилов Арсений, Горин Глеб, Захаров Марк, Тарасов Андрей

NLA проект. MIPT. GitHub-репозиторий проекта

Вступление

Метод Качмарца — это классический итерационный алгоритм для решения систем линейных уравнений, нашедший применение в компьютерной томографии, цифровой обработке сигналов и других областях. Несмотря на его широкое использование, теоретическое понимание скорости сходимости и эффективности различных его модификаций остаётся неполным. В данном проекте мы исследуем различные вариации метода Качмарца, анализируем их сходимость на разных типах матриц: разреженных, плохо обусловленных и сильно переопределенных. Результаты этого исследования могут быть полезны для оптимизации выбора итерационных методов в прикладных задачах.

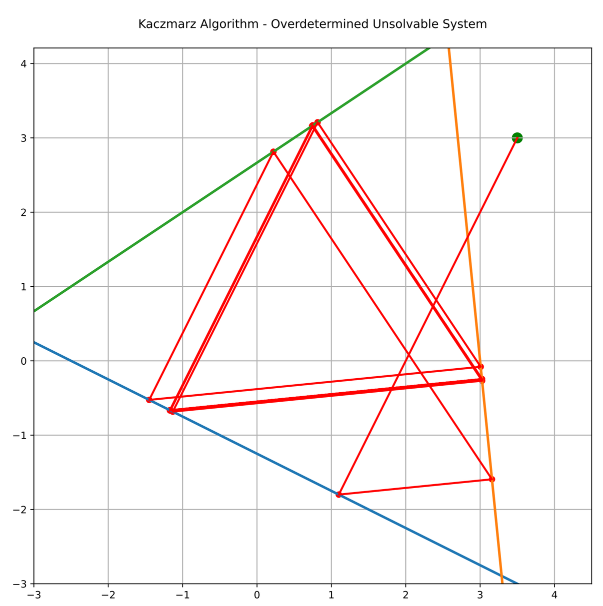
Вариации алгоритма Качмарца

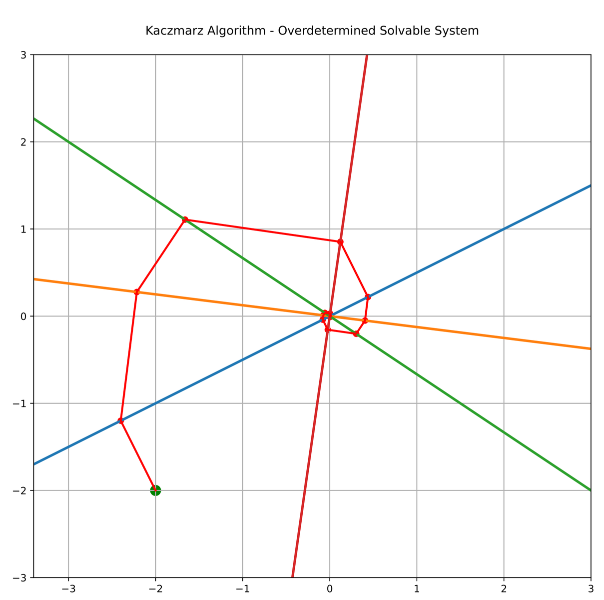
Классическая реализация

На каждом шаге поиска решения системы $Ax = b$ обновляем текущее приближение x по следующему правилу:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(a_i, x_k) - b_i}{a_i^2} \cdot a_i,$$

где a_i – некоторая строка матрицы A. В алгоритме, описанном Стефаном Качмарцем [2], строки выбираются поочередно по циклу. Обработка одного обновления занимает $O(n)$ времени.





Randomized Kaczmarz

В статье Томаса Штромера и Романа Вершинина [4] вместо поочередной последовательности выбора строк было предложено на каждом шаге выбирать строку матрицы A случайным образом пропорционально квадрату ее нормы. При таком подходе имеет место следующее неравенство, дающее оценку на скорость сходимости метода:

$$\mathbb{E}\|x_k - x^*\|_2^2 \le \left(1 - \kappa(A)^{-2}\right)^k \|x_0 - x^*\|_2^2,$$

где $\kappa(A)$ - число обусловленности матрицы A

Randomized Block Kaczmarz

Идея алгоритма заключена в выборе вместо одной строки a_i несколько строк одновременно, то есть подматрицы $A_{blk} \in \mathbb{R}^{r \times n}$, где r — размер блока.

Обновление x происходит следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k + (A_{blk})^{\dagger} \cdot (b_{blk} - A_{blk} \cdot x_k).$$

Скорость сходимости RBK можно описать следующим соотношением:

$$\mathbb{E}\|x_k - x^*\|^2 \le \left(1 - \frac{\sigma^2_{min}(A)}{\beta l}\right)^k \cdot \|x_0 - x^*\|^2 + \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\|r\|^2}{\sigma^2_{min}(A)},$$

где (l, α, β) - row paving [1].

Preconditional Kaczmarz

В этой реализации [3] мы переходим к решению системы:

$$AP_R y = b, \; x = P_R y,$$

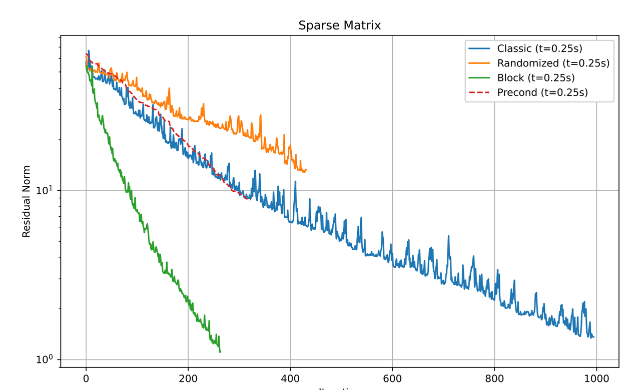
где AP_R *близка* к унитарной в том смысле, что $\kappa(AP_R) \sim 1$. Переход к следующему x происходит следующим образом:

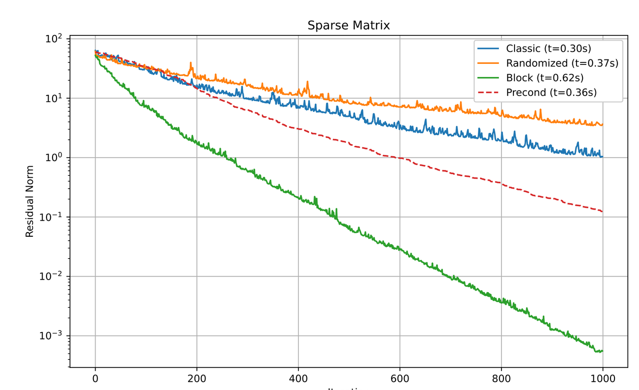
$$x_{k+1} = x_k - \frac{a_i P_R x_k - b_i}{\|P_R a_i\|_2^2} \cdot (a_i P_R)^{\intercal},$$

где a_i – это i-я строка матрицы A отобранная согласно некоторому распределению.

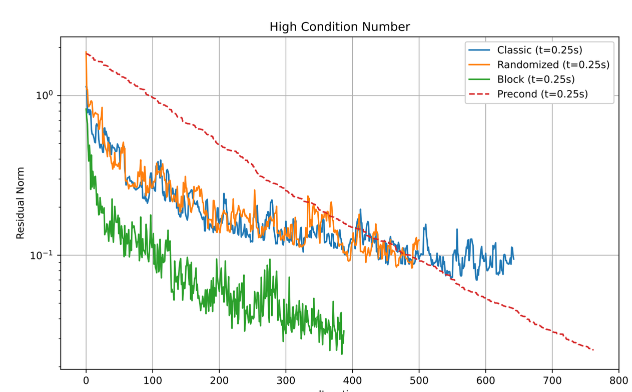
Сравнение алгоритмов на различных типах матриц

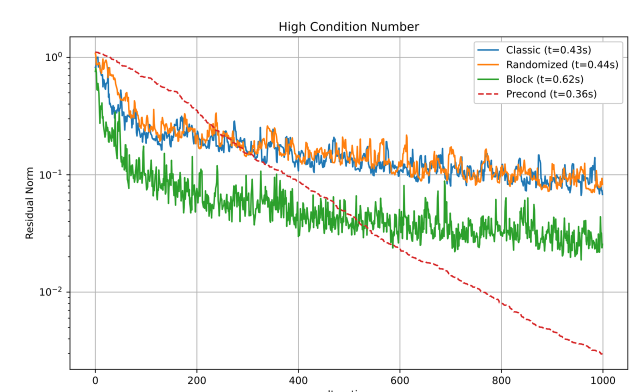
Разреженные матрицы



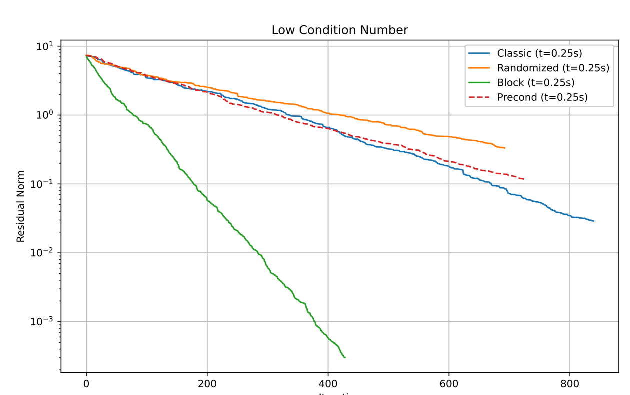


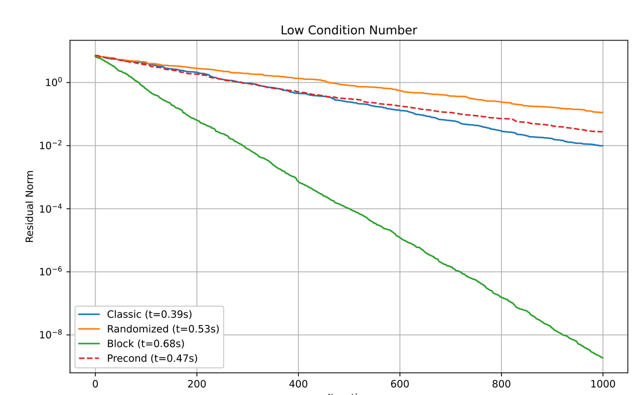
Плохо обусловленные матрицы



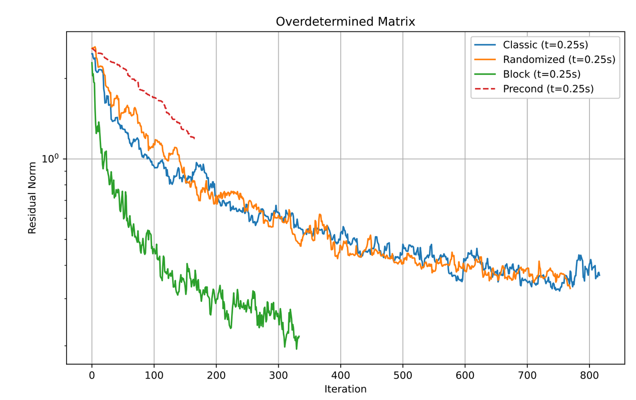


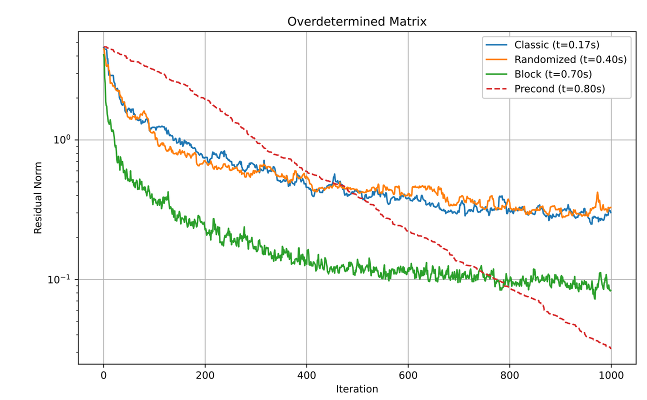
Хорошо обусловленные матрицы



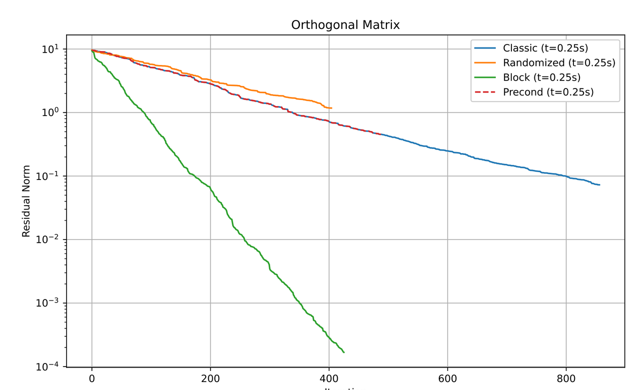


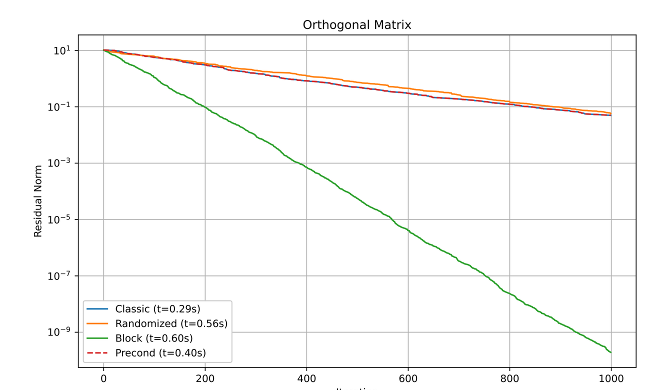
Переопределенные матрицы



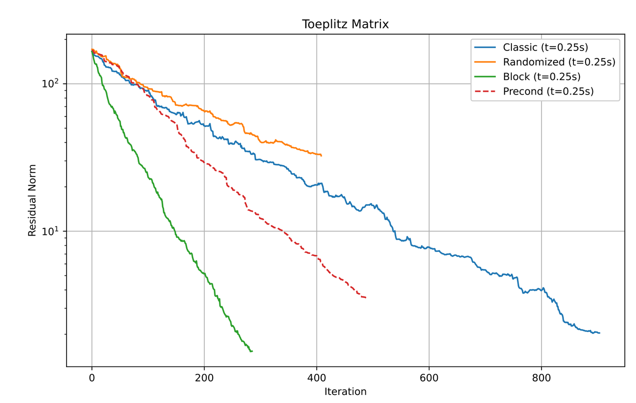


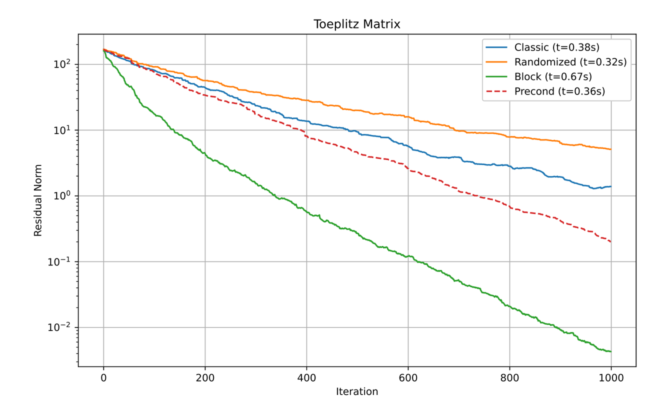
Ортогональные матрицы





Теплицевы матрицы





Выводы

- Почти на всех рассмотренных классах матриц наиболее эффективен блочный метод за счёт возможности распараллеливания.
- Рандомизированная версия метода на практике почти никогда не лучше классической, а в некоторых случаях, из-за накладных расходов, даже медленнее
- Алгоритм с предобуславливанием на практике оказываются лучше классического. Особенно это проявляется на плохо обусловленных матрицах

Список литературы

[1] T. Elfving, *Block-iterative methods for consistent and inconsistent linear equations*, Numerische Mathematik, 35 (1980), pp. 1–12.

[2] S. Kaczmarz, *Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen (english translation by jason stockmann): Bulletin international de l'académie polonaise des sciences et des lettres*, (1937).

[3] A. Katrutsa and I. Oseledets, *Preconditioning kaczmarz method by sketching*, arXiv preprint arXiv:1903.01806, (2019).

[4] T. Strohmer and R. Vershynin, *A randomized kaczmarz algorithm with exponential convergence*, Journal of Fourier Analysis and Applications, 15 (2009), pp. 262–278.