1　コーシー・リーマンの関係式

ここでは，コーシー・リーマンの関係式の導出のメモを記述しておく．ある複素関数を $F(z)=\phi(z)+i\psi(z)$ と定義する．この複素関数が微分可能であるとき（正則，解析的），下式が成立する．

$$\frac{dF}{dz}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x+i\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x+i\Delta y} \tag{1}$$

これを変形すると，

$$\frac{dF}{dz}=\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{i\partial y} \tag{2}$$

となるため，

$$\frac{dF}{dz}=\frac{\partial\phi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}=-i\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{3}$$

が成り立つ．実部と虚部を比較して，下式のコーシー・リーマンの方程式が得られる．

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\phi}{\partial y} \tag{5}$$