1　コーシー・リーマンの関係式

ここでは，コーシー・リーマンの関係式の導出のメモを記述しておく．ある複素関数を $F(z) = \phi(z) + i\psi(z)$ と定義する．この複素関数が微分可能であるとき（正則，解析的），下式が成立する．

$$\frac{dF}{dz} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x + i\Delta y} \tag{1}$$

これを変形すると，

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{i\partial y} \tag{2}$$

となるため，

$$\frac{dF}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{3}$$

が成り立つ．実部と虚部を比較して，下式のコーシー・リーマンの方程式が得られる．

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{5}$$

2　インバースタンジェントの微分

ここでは，タンジェントの逆関数の微分の導出方法を簡単に記述しておく．まず $q = \tan\theta$ とすると，

$$\frac{d}{dq}\tan^{-1} q = \frac{d\theta}{dq} = \frac{1}{\frac{dq}{d\theta}} = \cos^2\theta \tag{6}$$

が得られる．ここで

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \tag{7}$$

を利用すると，下式のようにインバースタンジェントの微分が得られる．

$$\frac{d}{dq}\tan^{-1} q = \cos^2\theta = \frac{1}{1+q^2} \tag{8}$$