考试教室　姓名　学号　年级　专业、班　学院

公平竞争、诚实守信、严肃考纪、拒绝作弊

密　封　线

◉A卷　○B卷

重庆大学《高等数学 II-2》评分参考

2021 — 2022 学年　第 2 学期

开课学院：数统　课程号：MATH10822　考试日期：2022.06

考试方式：○开卷　◉闭卷　○其他　考试时间：120 分钟

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

考试提示

1.严禁随身携带通讯工具等电子设备参加考试；

2.请人代考、替他人考试、使用通讯设备作弊情节严重、两次及以上作弊等，属严重作弊，开除学籍。

一、 单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=2$ 处条件收敛，则该幂级数（ C ）

A. 收敛半径为 2.　　B. 收敛区间为 $(0,2]$.

C. 收敛区间为 $(0,2)$.　　D. 收敛域为 $[0,2]$.

2. 已知 $du(x,y)=[axy^3+\cos(x+2y)]dx+[3x^2y^2+b\cos(x+2y)]dy$，则(C)

A. $a=2,\ b=-2$.　　B. $a=3,\ b=-2$.

C. $a=2,\ b=2$.　　D. $a=-2,\ b=2$.

3. 设 $S: x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则（ A ）

A. $\iint_S zdS = 4\iint_{S_1} zdS$.　　B. $\iint_S ydS = 4\iint_{S_1} ydS$.

C. $\iint_S xdS = 4\iint_{S_1} xdS$.　　D. $\iint_S xyzdS = 4\iint_{S_1} xyzdS$.

4. 设有曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$，从 x 轴正向看去为逆时针方向，

则 $\oint_\Gamma ydx+zdy+xdz=$（ D ）

A. $\sqrt{2}\pi a^2$.　　B. $-\sqrt{2}\pi a^2$.　　C. $\sqrt{3}\pi a^2$.　　D. $-\sqrt{3}\pi a^2$.

5. 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & 0\le x\le \frac{1}{2} \\ x-1, & \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$，$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x(-\infty<x<+\infty)$，其中

$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，则 $S(-\frac{5}{2})=$（ B ）

A. $\frac{1}{2}$.　　B. $-\frac{1}{2}$.　　C. $\frac{3}{2}$.　　D. $-\frac{3}{2}$.

6. 若 $y=xe^x+x$ 是微分方程 $y''-2y'+ay=bx+c$ 的解，则（ B ）

A. $a=1, b=1, c=1$.　　B. $a=1, b=1, c=-2$.

C. $a=-3, b=-3, c=0$.　　D. $a=-3, b=1, c=1$.

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

7. 设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x,y)-2x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$，则 $dz|_{(0,0)}=$____.

$dz|_{(0,0)}=2dx-dy$

命题人：

组题人：

审题人：

命题时间：

教务处制

8. 设 $y=y(x)$ 是微分方程 $((1-\cos x)y''=y'\sin x$ 的一个特解，且当 $x\to 0$ 时 $y(x)$ 是与 x^3 等价的无穷小量，则该特解是__________ . $y=6(x-\sin x)$

9. 设 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 和平面 $z=1$ 所围成的均匀物体，则 Ω 的重心的 z 坐标 $\bar{z}=$ ____________. $\frac{2}{3}$

10. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n 2^n x^{2n}$ 的收敛域为_______ . $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

11. 设曲线 C 为圆 $x^2+y^2=R^2$，则线积分 $\oint_C (x^2+y^2+2xy)ds=$ _______. $2\pi R^3$

12.若二阶常系数线性微分方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$，其中 C_1,C_2 为任意常数，则该微分方程是_________. $y''-2y'+y=0$

三、计算题（每小题 7 分，共 28 分）

13. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=12$ 的垂直于平面 $x+4y+3z=0$ 的法线方程。

解：平面的法向量为 $\vec{n}=(1,4,3)$。记 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-12$，则曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x,y,z) 的法线向量为 $\vec{n}_1=(F_x,F_y,F_z)=(2x,4y,6z)$。

由已知 $\frac{2x}{1}=\frac{4y}{4}=\frac{6z}{3}=t$，将 $x=\frac{t}{2},y=t,z=\frac{t}{2}$ 代入曲面方程得 $t=\pm 2$.

由此得两个切平面的切点坐标 $(1,2,1),(-1,-2,-1)$。所求两条法线方程为

$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-1}{3}$ 与 $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z+1}{3}$.

14. 求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

解：令 $f_x'(x,y)=(1-x^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0,\ f_y'(x,y)=-xye^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0$

得驻点 $P(1,0),Q(-1,0)$.

$f_{xx}''(x,y)=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$;

$f_{xy}''(x,y)=y(x^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$;

$f_{yy}''(x,y)=x(y^2-1)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.

在 $P(1,0)$ 处，$A=-2e^{-\frac{1}{2}}<0,B=0,C=-e^{-\frac{1}{2}},B^2-AC=-2e^{-1}<0$，

所以 $f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$ 为 $f(x,y)$ 的极大值。

在 $Q(-1,0)$ 处，$A=2e^{-\frac{1}{2}}>0,B=0,C=e^{-\frac{1}{2}},B^2-AC=-2e^{-1}<0$，

所以 $f(1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$ 为 $f(x,y)$ 的极小值。

15. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，且 $f(x,y)=\frac{1}{\pi}\sqrt{x^2+y^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)d\sigma+y^2$，求 $f(x,y)$.

解：记 $A=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(x,y)d\sigma$，则 $f(x,y)=\frac{A}{\pi}\sqrt{x^2+y^2}+y^2$，该式两端在区域 $x^2+y^2\le 1$ 上二重积分，有

$A=\frac{A}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}y^2 d\sigma$,

$A=\frac{A}{\pi}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma+\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)d\sigma$,

$A=\frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r\cdot rdr+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr$，

$A=\frac{A}{\pi}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}\Rightarrow A=\frac{3\pi}{4}$.

于是 $f(x,y)=\frac{3}{4}\sqrt{x^2+y^2}+y^2$.

16. 设 $f(u)$ 具有连续的二阶导数，函数 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},$$

（1）证明 $f(u)$ 满足方程 $f''(u)+\frac{1}{u}f'(u)=u^3$；

（2）求 $f(u)$ 的表达式。

解：（1）记 $u=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{x}{u},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)\cdot\frac{x^2}{u^2}+f'(u)\frac{u-x\frac{x}{u}}{u^2}=f''(u)\cdot\frac{x^2}{u^2}+f'(u)\frac{u^2-x^2}{u^3},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot\frac{y}{u},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)\cdot\frac{y^2}{u^2}+f'(u)\frac{u-y\frac{y}{u}}{u^2}=f''(u)\cdot\frac{y^2}{u^2}+f'(u)\frac{u^2-y^2}{u^3},$$

代入 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$，可得

$$f''(u)+\frac{1}{u}f'(u)=u^3.$$

（2）因为

$$f'(u)=e^{-\int\frac{1}{u}du}(C_1+\int u^3 e^{\int\frac{1}{u}du}du)=\frac{1}{u}(C_1+\frac{1}{5}u^5)=\frac{C_1}{u}+\frac{1}{5}u^4,$$

积分可得 $f(u)=C_1\ln u+\frac{1}{25}u^5+C_2$.

四、综合题（每小题 8 分，共 16 分）

17. 设 $f(x)$ 连续可导，$f(1)=1$，G 为不包含原点的单连通区域，任取点 $M,N\in G$，在 G 内曲线积分 $\int_M^N\frac{1}{f(x)+2y^2}(ydx-xdy)$ 与路径无关。

（1）求 $f(x)$；

（2）计算 $\oint_\Gamma\frac{1}{f(x)+2y^2}(ydx-xdy)$，其中 Γ 为 $|x|+|y|=2$，取逆时针方向。

解：（1）因积分与路径无关，故 $\forall(x,y)\in G$，有

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{f(x)+2y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{f(x)+2y^2}\Leftrightarrow\frac{f(x)-2y^2}{(f(x)+2y^2)^2}=\frac{-f(x)-2y^2+xf'(x)}{(f(x)+2y^2)^2}$$

由此推得 $xf'(x)=2f(x)$，又 $f(1)=1$，此微分方程的解为 $f(x)=x^2$.

（2）取正向小椭圆 $\Gamma_\varepsilon: x^2+2y^2=\varepsilon^2,\varepsilon$ 充分小的正数，使 Γ_ε 含在 Γ 内，则

$$\int_\Gamma\frac{ydx-xdy}{f(x)+2y^2}=\int_\Gamma\frac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}=\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{ydx-xdy}{x^2+2y^2}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon\sin\theta\cdot(-\varepsilon\sin\theta)-\varepsilon\cos\theta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon\cos\theta\right)d\theta$$

$$=-\sqrt{2}\pi.$$

18. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n!(n+2)}$ 的收敛区间及和函数.

解：由 $\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!(n+2)}{(n+1)!(n+3)}\right|=0$ 知收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$。

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+2}}{n!(n+2)}$，则

$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n!}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n}}{n!}=x(e^x-1)$，两端积分，有

$S(x)-S(0)=\int_0^x xe^x dx-\dfrac{1}{2}x^2=xe^x-e^x+1-\dfrac{1}{2}x^2$，

$S(x)=xe^x-e^x+1-\dfrac{1}{2}x^2, x\in(-\infty,+\infty).$

五、证明题（共 10 分）

19. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,(a_n\geq 0)$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n-1})$ 收敛，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证：因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n-1})$ 收敛，故其部分和 S_n 数列的极限存在，不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$.

又 $S_n=(b_1-b_0)+(b_2-b_1)+\cdots+(b_n-b_{n-1})=b_n-b_0$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=S+b_0$，故 $\forall n,\exists M>0$，使 $|b_n|\leq M$ 。

进一步，$0\leq|a_nb_n|\leq Ma_n$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\,(a_n\geq 0)$ 收敛，由正项级的比较判别法知

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。

六、应用题（共 10 分）

20. 求向量 $\vec{A}(x,y,z)=\vec{i}+z\vec{j}+\dfrac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{k}$ 穿过曲面 Σ 的通量，其中 Σ 为曲线

$\begin{cases}z=x\\y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所形成旋转曲面的外侧在 $1\leq z\leq 2$ 间部分。

解：旋转曲面的方程为 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}\,(1\leq z\leq 2)$， 曲线 Σ 的法向量为

$\vec{n}=(2x,2y,-2z)$（外侧），单位法向量为

$$\vec{n}_e=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(2x,2y,-2z),$$

因此通量（流量）为

$$\begin{aligned}\Phi&=\iint\limits_{\Sigma}dydz+zdzdx+\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy\\&=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(1,z,\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}})\cdot(2x,2y,-2z)\mathrm{d}S\\&=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x+yz-\dfrac{ze^z}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\Sigma}\frac{x+yz-e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}S,\end{aligned}$$

由曲面的对称性可得 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}S=0$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}S=0$. 故可得

$$\begin{aligned}\Phi&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}S\\&=-\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 e^z\mathrm{d}z\\&=2\pi(e-e^2).\end{aligned}$$