2018-2019 学年第二学期期末考试试卷

一、选择题（30 分，每小题 2 分）

1．下列哪个公式是命题公式：

A. $(P\rightarrow(P\vee Q))$　　B. $(P\vee QR)\rightarrow S$

C. $(\neg P\rightarrow Q)\rightarrow(Q\rightarrow P)$　　D. $((R\rightarrow(Q\rightarrow R)\rightarrow(P\rightarrow Q))$

2．令 A 为命题公式 $((P\rightarrow Q)\leftrightarrow(\neg P\vee Q))\vee(P\wedge R\wedge\neg P)$，则：

A．A 是重言式　　B．$\neg A$ 是重言式

线

C．A 和 $\neg A$ 都不是重言式　　D．A 和 $\neg A$ 都是重言式

3．命题公式 $\neg(p\wedge q)\rightarrow r$ 的成真赋值为

A．000，001，110　　B．001，011，101，110，111

C．全体赋值　　D．无

4．下列公式中哪个不是前束范式？

A．$(\forall x)(\exists y)(P(x)\wedge Q(y))$　　B．$(\forall x)(\forall y)(P(x)\wedge Q(y))\vee(\exists z)S(z)$

C．$Q(a,b)$　　D．P

5．下面的二元关系中哪个是传递的？

A．父子关系　　B．朋友关系

C．集合的包含关系　　D．实数的不相等关系

6．下列选项中不是偏序集合的是

A．<P(N)，$\subseteq$>　　B．<P(N)，$\subset$>

C．<P({a})，$\subseteq$>　　D．<P(Ø)，$\subseteq$>

7．设 A={a, b, c}，R1、R2 是 A 上的二元关系，且 R1 = {<a, b>, <a, c>, <b, c>}，R2 ={<a, b>, <a, a>}，则 $R_1\circ R_2=$

A．{<a, b>, <a, c>}　　B．{<a, b>, <a, c>, <b, c>}

C．{<a, b>, <a, a>}　　D．Φ

8．设集合 S={x|x=2n，n$\in$Z+}，则 S

A．在普通乘法下封闭，在普通加法下不封闭

B．在普通乘法和普通加法下都封闭

C．在普通加法下封闭，在普通乘法下不封闭

D．在普通加法和普通乘法下均不封闭

9．设<A, ★>是代数系统，元素 $a\in A$ 有左逆元 a_L^{-1} 和右逆元 a_R^{-1}。若运算★满足（　　），则 $a_L^{-1}=a_R^{-1}$。

A．结合律　　B．交换律

C．等幂率　　D．分配律

10．设集合 A = {0, 1, 2, 3}，+ 4: 关于模 4 的加法，则系统<A, +4>的生成元是

A．0，1　　B．1，2

C．1，3　　D．1，2，3

11．设 S= {0，1，2，3}，≤是小于等于关系，则 S 与≤

A．不构成代数系统　　B．是半群，不是独异点

C．是独异点，不是群　　D．是群

12．设有向图 G=<V，E>，其中 V= {a，b，c，d，e，f}，E= {<a，b>，<b，c>，<a，d>，<d，e>，<f，e>}。此有向图是

A．强连通图　　B．单侧连通图

C．弱连通图　　D．不连通图

13．设 G 是由五个顶点组成的完全图，则从图 G 中删去几条边可以得到树

A．6　　B．5

C．8　　D．4

14．连通图至少有

A．一条欧拉回路　　B．一条汉密尔顿回路

C．一颗生成树　　D．一条欧拉路

15．设 T 是无向树，T 中有 2 个 2 度结点，4 个 3 度结点和 3 个 4 度结点，且 T 中没有大于 4 度的结点。请问 T 中有几片树叶？

A．10　　B．11

C．12　　D．13

二、解答题（28 分，每小题 7 分）

16．求下列命题公式的主析取范式和主合取范式：　$(P\to Q)\wedge(Q\to P)$

17．设集合 P = {x1, x2, x3, x4, x5}上的偏序关系如图 1 所示。找出 P 的最大元、最小元、极大元、极小元，并找出子集{x2, x3, x6}，{x2, x3, x5}的上界、下界、上确界、下确界，填入表 1。

表 1

子集	上界	下界	上确界	下确界
$\{x_2, x_3, x_6\}$	x_6	x_1	x_6	x_1
$\{x_2, x_3, x_5\}$	无	x_1	无	x_1

18．设$<Z_6, +_6>$是一个群，这里$+_6$是模 6 加法，Z_6={[0], [1], [2], [3], [4], [5]}，试写出$<Z_6, +_6>$中所有的生成元和所有的子群。

19．设有向图 G=（V,E）如下图所示，求邻接矩阵 A，可达性矩阵 P，并求长度为 3 的路的总数以及回路数.

三、证明题（32 分，每小题 8 分）

20．证明：$S \to \neg Q, S \vee R, \neg R \leftrightarrow Q \Rightarrow R$

21．给定集合 S={1, 2, 3, 4, 5}，找出 S 上的等价关系 R，要求此关系 R 能产生划分{{1, 2},{3},{4, 5}}。并画出关系图。

22．设<G, *>是一个群，而 a∈G，如果 f 是从 G 到 G 的映射，使得对于每一个 x∈G，都有

f(x) = a * x * a-1

试证明 f 是一个从 G 到 G 上的自同构。

23．设 G 是一个有 v 个节点 e 条边的连通简单平面图，若 $v \geq 3$ 则 $e \leq 3v-6$。

四、综合题（10 分）

24．**将下列论述符号化，并推证其结论：**不就业的学生是不能毕业的。有些毕业的学生升学考上了研究生。因此，有些升学考上研究生的学生是算就业的。

2018-2019 学年第二学期期末考试试卷参考答案

一、选择题（30 分，每小题 2 分）

1-5：AABBC

6-10:BDAAC

11-15:ACACC

二、解答题（28 分，每小题 7 分）

16. 求下列命题公式的主析取范式和主合取范式： $(P\to Q)\wedge(Q\to P)$

解:先求主合取范式:

$(P\to R)\wedge(Q\to R)\Leftrightarrow(\neg P\vee R)\wedge(\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee(Q\wedge\neg Q)\vee R)\wedge((P\wedge\neg P)\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)\wedge(P\vee\neg Q\vee R)$

（+2）

由此可得 $(P\to R)\wedge(Q\to R)$ 的主合取范式为

$M_{100}\wedge M_{110}\wedge M_{010}$ (+1)

于是可得 $(P\to R)\wedge(Q\to R)$ 的主析取范式为

$m_{000}\vee m_{001}\vee m_{011}\vee m_{101}\vee m_{111}$ (+2)

即 $(P\to R)\wedge(Q\to R)$ 的主析取范式为:

$(\neg P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge R)$

(+2)

17. 设集合 P = {x1, x2, x3, x4, x5}上的偏序关系如图 1 所示。找出 P 的最大元、最小元、极大元、极小元，并找出子集{x2, x3, x6}，{x2, x3, x5}的上界、下界、上确界、下确界，填入表 1。

表 1

子集	上界	下界	上确界	下确界
$\{x_2, x_3, x_6\}$	x_6	x_1	x_6	x_1
$\{x_2, x_3, x_5\}$	无	x_1	无	x_1

（+4）

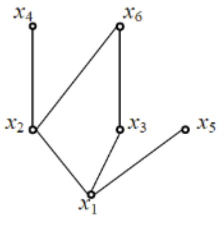


图 1

解：P 没有最大元，最小元为 x_1。

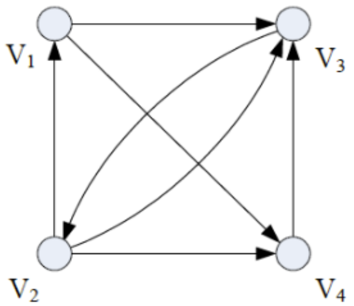
极大元为 x_4、x_5、x_6，极小元为 x_1。（+3）

18. 设<Z_6, $+_6$>是一个群，这里$+_6$是模 6 加法，Z_6={[0], [1], [2], [3], [4], [5]}，试写出<Z_6, $+_6$>中所有的生成元和所有的子群。

解：生成元有：[1], [5]。（+3）

子群有：<{[0]}, +6>，<{[0], [3]}, +6>，<{[0], [2], [4]}, +6>和<Z6, +6>。（+4）

19. 设有向图 G=（V,E）如下图所示，求邻接矩阵 A，可达性矩阵 P，并求长度为 3 的路的总数以及回路数.



解：

邻接矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

（+2）

可达性矩阵 P= $A \vee A^2 \vee A^3 \vee A^4$

∨其中

$$A^2=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&1&2&0\\1&0&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}\qquad A^3=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&1\\0&1&2&1\\1&0&1&1\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&2&4&3\\1&2&2&1\\0&1&2&1\end{bmatrix}$$

(+2)

其中长度为 3 的路有：17

长度为 3 的回路：6　　　　　(+3)

三、证明题（32 分，每小题 8 分）

20．证明：$S\to\neg Q, S\vee R, \neg R\leftrightarrow Q \Rightarrow R$

证明：

(1) $S\vee R$　　　　P

(2) $\neg R$　　　　P（附加前提）

(3) S　　　　(1)(2)T, I

(4) $S\to\neg Q$　　　　P

(5) $\neg Q$　　　　(3)(4)T, I　　（+2）

(6) $\neg R\leftrightarrow Q$　　　　P

(7) $(\neg R\to Q)\wedge(Q\to\neg R)$　　(6)T, E

(8) $\neg R\to Q$　　　　(7)T, I

(9) R　　　　(5)(8)T, I　　（+4）

(10) $R\wedge\neg R$　　　　(2)(9)矛盾　　（+2）

21．给定集合 S={1, 2, 3, 4, 5}，找出 *S* 上的等价关系 *R*，要求此关系 *R* 能产生划分{{1, 2},{3},{4, 5}}。并画出关系图。

解：我们可用如下方法产生一个等价关系：

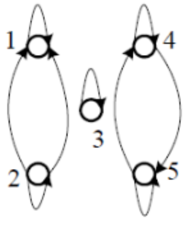
R1={1, 2}×{1, 2}={<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>}　（+1）

R2={3}×{3}={<3, 3>}　（+1）

R3={4, 5}×{4, 5}={<4, 4>, <4, 5>, <5, 4>, <5, 5>}　（+1）

R= R1∪R2∪R3={<1, 1>, <1, 2>, <2, 1>, <2, 2>, <3, 3>, <4, 4>, <4, 5>, <5, 4>, <5, 5>}（+3 分）

关系图如下图所示。(+2)



22．设<G, *>是一个群，而 a∈G，如果 f 是从 G 到 G 的映射，使得对于每一个 x∈G，都有

f(x) = a * x * a-1
试证明 f 是一个从 G 到 G 上的自同构。

证明：对于任意的 x，y∈G，若 x ≠ y，则由群的消去律有：

f(x) = a * x * a-1 ≠ a * y * a-1 = f(y)
所以，f 是 G 到 G 的入射。（+3）
对于任意的 $y\in G$，由封闭性得
a-1*y*a∈G，（+2）
不妨设 a-1*y* a=x。
这就说明，对于任意的 y∈G 必存在 x∈G，有
f(x* y)= a*(x*y)*a-1= (a*x*a-1)*(a*y*a-1)= f(x)* f(y)（+3）
因此，f 是一个从 G 到 G 上的自同构

23．设 G 是一个有 v 个节点 e 条边的连通简单平面图，若 v≥3 则 e≤3v-6。

证明：设简单连通平面图 G 的面数为 r，当 v=3，e=2 时 $e\le 3v-6$ 显然成立，(+2)

除此以外，若 $e\ge 3$，则每一面的次数不小于 3，由于一个有限平面图面的次数之间等于边的 2 倍，可令各面次数之和为 2e，因此 $2e\ge 3r$，即 $r\le\frac{2}{3}e$

(+2)

代入欧拉定理得：(+3)

$$2=v-e+r\le v-e+\frac{2}{3}e,\ (+2)\text{即 } e\le 3v-6\text{。}(+2)$$

四、综合题（10 分）

24．**将下列论述符号化，并推证其结论：**不就业的学生是不能毕业的。有些毕业的学生升学考上了研究生。因此，有些升学考上研究生的学生是算就业的。

解：设论域为学生。
令 $M(x)$：x 是就业的学生；$F(x)$：x 是毕业的学生；$G(x)$：x 是升学考上研究生的学生。
本题符号化为：

$(\forall x)(\neg M(x)\to\neg F(x))\wedge(\exists x)(F(x)\wedge G(x))\Rightarrow(\exists x)(G(x)\wedge M(x))$；（+3）

证明：

（1）$(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$ P

（2）$F(c)\wedge G(c)$ ES（1）

（3） $(\forall x)(\neg M(x) \to \neg F(x))$ P

（4） $\neg M(c) \to \neg F(c)$ US（3）

（5） $M(c) \vee \neg F(c)$ T（4）E

（6） $F(c)$ T（2）I

（7） $M(c)$ T（5），（6）I

（8） $G(c)$ T（2）I

（9） $G(c) \wedge M(c)$ T（7），（8）I

（10） $(\exists x)(G(x) \wedge M(x))$ EG（9） （+7）

期末考试试卷（一）

一、填空题(每空 2 分，共 20 分)

1、如果有限集合A有n个元素，则$|2^A|=$________.

2、设P：它占据空间，Q：它有质量，R：它不断运动，S：它叫做物质。命题“占据空间的，有质量的而且不断运动的叫做物质”的符号化为________.

3、某人有三个儿子，组成集合$A=\{S_1,S_2,S_3\}$，在A上的兄弟关系具有__________性质.

4、公式$\neg(P\vee Q)\wedge(P\vee\neg(Q\wedge\neg S))$的对偶公式为__________.

5、设$K[N]=\aleph_0$，$K[(0,1)]=\aleph$，则$K[N\times(0,1)]=$__________.

6、设$X=\{a,b,c\}$，X上的关系R的关系矩阵是$M_R=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$，则$M_{R\circ R}$__________.

7、若$f:A\rightarrow B$是函数，则当f是$A\rightarrow B$的________，$f^c:B\rightarrow A$是f的逆函数。

8、若连通平面图$G=\langle V,E\rangle$共有r个面，其中$|V|=v$，$|E|=e$，则它满足的$Euler$公式为_______.

9、命题公式$A\Leftrightarrow P\vee(\neg P\rightarrow(Q\wedge(\neg Q\rightarrow R)))$的主合取范式为__________，其编码表示为__________.

二、选择题(每小题 2 分，共 20 分)

1、下列结果正确的是（　　）

A、$(A\cup B)-A=B$　　B、$(A\cap B)-A=\Phi$　　C、$(A-B)\cup B=A$　　D、$\Phi\cup\{\Phi\}=\Phi$

2、在（　　）下有$A\times B\subseteq A$。

A、$A=B$；　　B、$B\subseteq A$；

C、$A\subseteq B$；　　D、$A=\Phi$或$B=\Phi$

3、若公式$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$的主析取范式为$m_{001} \vee m_{011} \vee m_{110} \vee m_{111}$，则它的主合取范式为（　　）

A、$m_{001} \wedge m_{011} \wedge m_{110} \wedge m_{111}$；　　B、$M_{000} \wedge M_{010} \wedge M_{100} \wedge M_{101}$；

C、$M_{001} \wedge M_{011} \wedge M_{110} \wedge M_{111}$；　　D、$m_{000} \wedge m_{010} \wedge m_{100} \wedge m_{101}$

4、命题“尽管有人聪明，但未必一切人都聪明”的符号化（$P(x)$：x是聪明的，$M(x)$：x是人）（　　）

A、$\exists x(M(x) \to P(x)) \wedge \neg(\forall x(M(x)) \to P(x))$；

B、$\exists x(M(x) \wedge P(x)) \wedge \neg(\forall x(M(x)) \wedge P(x))$；

C、$\exists x(M(x) \wedge P(x)) \wedge \neg(\forall x(M(x)) \to P(x))$；

D、$\exists x(M(x) \wedge P(x)) \vee \neg(\forall x(M(x)) \to P(x))$

5、设集合A、B是有穷集合，且$|A|=m$，$|B|=n$，则从A到B有（　　）个不同的双射函数。

A、n　　B、m　　C、$n!$　　D、$m!$

6、设$K=\{e,a,b,c\}$，$\langle K,*\rangle$是$Klein$四元群，则元素a的逆元为（　　）

A、e　　B、a　　C、b　　D、c

7、连通非平凡的无向图G有一条欧拉回路当且仅当图G（　　）

A、只有一个奇度结点；　　B、只有两个奇度结点；

C、只有三个奇度结点；　　D、没有奇度结点

8、设无向图$G=\langle V,E\rangle$是连通的且$|V|=n$，$|E|=m$，若（　　）则G是树。

A、$M=N+1$　　B、$n=m+1$　　C、$m\leqslant 3n-6$　　D、$n\leqslant 3m-6$

9、n个结点的无向完全图K_n的边数为（　　）

A、$n(n+1)$　　B、$\dfrac{n(n+1)}{2}$　　C、$n(n-1)$　　D、$\dfrac{n(n-1)}{2}$

10、下列图中（　　）是根树。

A、$G_1=\langle\{a,b,c,d\},\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle c,d\rangle\}\rangle$；

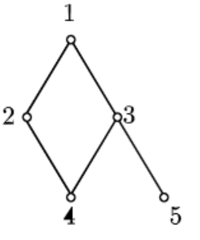
B、$G_2=\langle\{a,b,c,d\},\{\langle a,b\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,d\rangle\}\rangle$；

C、$G_3=\langle\{a,b,c,d\},\{\langle a,b\rangle,\langle a,d\rangle,\langle c,a\rangle\}\rangle$；

D、$G_4=\langle\{a,b,c,d\},\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle d,d\rangle\}\rangle$

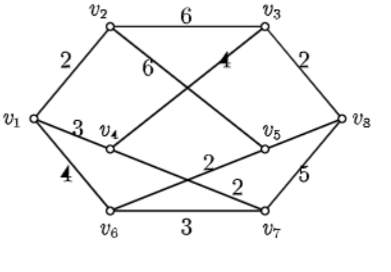
三、计算题(每小题 8 分，共 40 分)

1、设$A=\{1,2,3,4,5\}$，A上的偏序关系如下图所示，求A的子集$\{3,4,5\}$和$\{1,2,3\}$的上界，下界，上确界和下确界。



2、求$(Q\rightarrow P)\wedge(\neg P\wedge Q)$的主合取范式。

3、求图中的一个最小生成树。



4、将公式$((P \vee Q) \wedge R) \to (P \wedge R)$划为只含有联结词$\neg$，$\wedge$的等价公式。

5、已知某有向图的邻接矩阵如下：$A = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，试求：$v_3$到$v_1$的长度为 4 的有向路径的条数。

四、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1、令 $R=\left\{m \middle| m=a+b\sqrt{2}, a, b \in Q, +\text{为普通加法}\right\}$，定义映射 g：$R \to R$ 为 $g\left(a+b\sqrt{2}\right)=a-b\sqrt{2}$，试证：$g$ 是 $\langle R,+\rangle$ 到 $\langle R,+\rangle$ 的自同构映射。

2、用 CP 规则证明 $A \to (B \wedge C)$，$(E \to \neg F) \to \neg C$，$B \to (A \wedge \neg S)' B \to E$。

期末考试试卷（一）参考答案

一、填空题(每空 2 分，共 20 分)

1、【正解】2^n

2、【正解】$S \leftrightarrow P \wedge Q \wedge R$

3、【正解】反自反性、对称性、传递性

4、【正解】$\neg(P \wedge Q) \wedge (P \wedge \neg(Q \vee \neg S))$

5、【正解】

6、【正解】$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7、【正解】双射

8、【正解】$v-e+r=2$

9、【正解】$(P \vee Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R)$；$M_{000} \wedge M_{001}$

二、选择题(每小题 2 分，共 20 分)

1、【正解】B

2、【正解】D

3、【正解】B

4、【正解】C

5、【正解】D

6、【正解】B

7、【正解】D

8、【正解】B

9、【正解】D

10、【正解】C

三、计算题(每小题 8 分，共 40 分)

1、【解析】$\{3,4,5\}$：上界：1，3；上确界：3；下界：无；下确界：无；

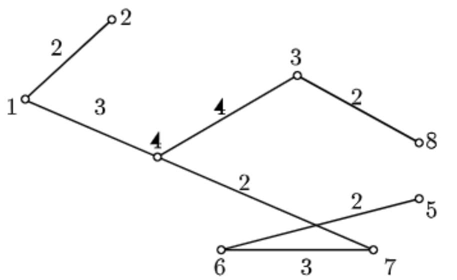
$\{1,2,3\}$：上界：1；上确界：1；下界：4；下确界：4

2、【解析】$(Q \to P) \wedge (\neg P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg Q \vee P) \wedge (\neg P \wedge Q)$

$\Leftrightarrow (\neg Q \wedge \neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg P \wedge Q) \Leftrightarrow F \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge \neg Q)$

3、【解析】用 $Kruskal$ 算法，选一条权最小的边，逐一选取剩余的边中与已知边未构成回路且权数最小的边(v_1,v_2)，每次选出的边记入T，其权加入T的成本。

T 的边	T 的成本
(v_1,v_2)	2
(v_3,v_8)	$2+2$
(v_4,v_7)	$2+2+2$
(v_5,v_6)	$2+2+2+2$
(v_6,v_7)	$2+2+2+2+3$
(v_1,v_4)	$2+2+2+2+3+3$



4、【解析】原式$\Leftrightarrow \neg((P \vee Q) \wedge R) \vee (P \wedge R) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg R \vee (P \wedge R)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg P \wedge \neg Q)) \wedge R \wedge \neg(P \wedge R)$

5、【解析】$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&1&1\\1&1&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$，$A^2=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\2&1&0&1\\1&0&2&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$，$A^3=\begin{pmatrix}1&0&2&1\\1&0&3&1\\3&2&1&2\\1&1&0&1\end{pmatrix}$，$A^4=\begin{pmatrix}3&2&1&2\\4&3&1&3\\3&1&5&3\\1&0&2&1\end{pmatrix}$

由v_3到v_1的长度为 4 的有向路径的条数为 3 条。

四、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1、【解析】①g是$\langle R,+\rangle$上的同态映射$\forall m_1=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)$，$m_2=\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\in R$

$g(m_1+m_2)=g\left(a_1+b_1\sqrt{2}+a_2+b_2\sqrt{2}\right)=g\left((a_1+a_2)+b_1+b_2\sqrt{2}\right)=(a_1+a_2)-(b_1+b_2)\sqrt{2}$

$$=\left(a_1-b_1\sqrt{2}\right)+\left(a_2-b_2\sqrt{2}\right)=g(m_1)+g(m_2)$$

② g 是 $\langle R,+\rangle$ 上的满射 $\forall m=\left(a+b\sqrt{2}\right)\in R$，$\exists\, m'=a-b\sqrt{2}\in R$ 使 $g(m')=g\left(a-b\sqrt{2}\right)$

$=a-(-b)\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}=m$，所以 g 是 $\langle R,+\rangle$ 上的满射

③ g 是 $\langle R,+\rangle$ 上的单射 $\forall m_1=\left(a_1+b_1\sqrt{2}\right)$，$m_2=\left(a_2+b_2\sqrt{2}\right)\in R$，且 $m_1\neq m_2$ 则

$g(m_1)=a_1-b_1\sqrt{2}$，$g(m_2)=a_2-b_2\sqrt{2}$，如果 $g(m_1)=g(m_2)$

则 $(a_1-a_2)-(b_1-b_2)\sqrt{2}=0$，$\therefore$ 必有 $a_1=a_2$，$b_1=b_2$ 这与 $m_1\neq m_2$ 矛盾。

故 $g(m_1)\neq g(m_2)$。由①，②，③知 g 是从 $\langle R,+\rangle$ 到 $\langle R,+\rangle$ 的自同构映射。

2、【解析】

（1）	B	P（附加前提）
（2）	$B\rightarrow(A\wedge\neg S)$	P
（3）	$A\wedge\neg S$	$T(1)(2)I$
（4）	A	$T(3)I$
（5）	$A\rightarrow B\wedge C$	P
（6）	$B\wedge C$	$T(4)(5)I$
（7）	C	$T(6)I$
（8）	$(E\rightarrow\neg F)\rightarrow\neg C$	P
（9）	$\neg(E\rightarrow\neg F)$	$T(7)(8)I$
（10）	$E\wedge F$	$T(9)I$
（11）	E	$T(10)I$
（12）	$B\rightarrow E$	CP

期末考试试卷（二）

一、填空题(每空 2 分，共 20 分)

1、任意两个不同小项的合取为________，全体小项的析取式为___________.

2、设R为集合A上的等价关系，对$\forall a \in A$，集合$[a]_R =$________，称为元素a形成的R等价类，$[a]_R \neq \Phi$，因为___________.

3、设$A=\{0,1\}$，N为自然数集，$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{是奇数}\\ 1, & x\text{是偶数}\end{cases}$，若$f$：$A\rightarrow A$，则$f$是___________射的，若$f$：$N\rightarrow A$，则$f$是___________射的.

4、设S为非空有限集，代数系统$\langle 2^S, \cup\rangle$中幺元为___________，零元为___________.

5、若$G=\langle V,E\rangle$为汉密尔顿图，则对于结点集V的每个非空子集S，均有$W(G-S)$_____$|S|$成立，其中$W(G-S)$是__________.

二、选择题(每小题 2 分，共 20 分)

1、命题公式$P\rightarrow(Q\vee P)$（　　）

A、矛盾式　　B、可满足式　　C、重言式　　D、等价式

2、下列各式中哪个不成立（　　）

A、$\forall x(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$；

B、$\forall x(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$；

C、$\forall x(P(x)\wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$；

D、$\forall x(P(x)\wedge Q) \Leftrightarrow \forall xP(x)\wedge Q$

3、谓词公式$\forall x(P(x)\vee\exists yR(y))\rightarrow Q(x)$中的$x$是（　　）

A、自由变元；　　B、约束变元；

C、既是自由变元又是约束变元；　　D、既不是自由变元又不是约束变元

4、设f和g都是X上的双射函数，则$(f\circ g)^{-1}$为（　　）

A、$f^{-1}\circ g^{-1}$　　B、$(g\circ f)^{-1}$　　C、$g^{-1}\circ f^{-1}$　　D、$g\circ f^{-1}$

5、下面集合（　　）关于减法运算是封闭的。

A、N　　B、$\{2x|x\in I\}$　　C、$\{2x+1|x\in I\}$　　D、$\{x|x是质数\}$

6、具有如下定义的代数系统$\langle G,*\rangle$，（　　）不构成群。

A、$G=\{1,10\}$，$*$是模 11 乘；　　B、$G=\{1,3,4,5,9\}$，$*$是模 11 乘；

C、$G=Q$（有理数集），$*$是普通加法；　　D、$G=Q$（有理数集），$*$是普通乘法

7、设$G=\{2^m\times 3^n|m,n\in I\}$，$*$是普通乘法。则代数系统$\langle G,*\rangle$的幺元为（　　）

A、不存在　　B、$e=2^0\times 3^0$　　C、$e=2\times 3$　　D、$e=2^{-1}\times 3^{-1}$

8、下面集合（　　）关于整除关系构成格。

A、$\{2,3,6,12,24,36\}$；　　B、$\{1,2,3,4,6,8,12\}$；

C、$\{1,2,3,5,6,15,30\}$；　　D、$\{3,6,9,12\}$

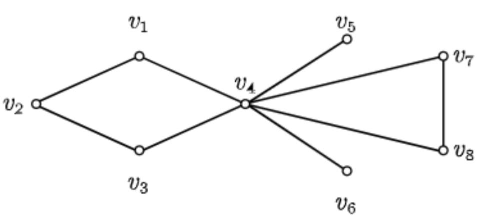
9、无向图$G=\langle V,E\rangle$，如下图所示，下面哪个边集不是其边割集（　　）

A、$\{\langle v_1,v_4\rangle,\langle v_3,v_4\rangle\}$；

B、$\{\langle v_1,v_5\rangle,\langle v_4,v_6\rangle\}$；

C、$\{\langle v_4,v_7\rangle,\langle v_4,v_8\rangle\}$；

D、$\{\langle v_1,v_2\rangle,\langle v_2,v_3\rangle\}$



10、有n个结点$(n\geqslant 3)$，m条边的连通简单题是平面图的必要条件（　　）

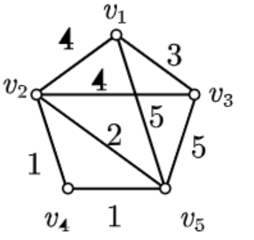
A、$n\geqslant 3m-6$　　B、$n\leqslant 3m-6$　　C、$m\geqslant 3n-6$　　D、$m\leqslant 3n-6$

三、计算题(每小题 8 分，共 40 分)

1、设$A=\{a,b,c\}$上的关系$\rho=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$，求出$r(\rho)$，$s(\rho)$和$t(\rho)$。

2、集合$A=\{2,3,6,12,24,36\}$上的偏序关系②为整除关系。设$B=\{6,12\}$，$C=\{2,3,6\}$，试画出②的哈斯图，并求A，B，C的最大元素、极大元素、下界、上确界。

3、图给出的赋权图表示五个城市v_1，v_2，v_3，v_4，v_5及对应两城镇间公路的长度。试给出一个最优化的设计方案使得各城市间能够有公路连通。



4、已知$G=\{1,2,3,4,5,6\}$，$\times_7$为模 7 乘法。试说明$\langle G,\times_7\rangle$是否构成群？是否为循环群？若是，生成元是什么？

5、给定命题公式$(P \wedge (\neg Q \wedge R)) \vee (\neg S \vee W)$，试给出相应的二元树。

四、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1、试证明若$\langle G, *\rangle$是群，$H \subseteq G$，且任意的$a \in H$，对每一个$x \in G$，有$a * x = x * a$，则$\langle H, *\rangle$是$\langle G, *\rangle$的子群。

2、符号化下列各命题，并说明结论是否有效（用推理规则）。任何人如果他喜欢美术，他就不喜欢体育。每个人或喜欢体育，或喜欢音乐，有的人不喜欢音乐，因而有的人不喜欢美术。

期末考试试卷（二）参考答案

一、填空题(每空 2 分，共 20 分)

1、【正解】永假式（矛盾式），永真式（重言式）

2、【正解】$[a]_R=\{x|x\in A, aRx\}$； $a\in[a]_R$

3、【正解】双射；满射

4、【正解】Φ， S

5、【正解】$\leqslant$；$G-S$ 的连通分支数

二、选择题(每小题 2 分，共 20 分)

1、【正解】C

2、【正解】A

3、【正解】C

4、【正解】C

5、【正解】B

6、【正解】D

7、【正解】B

8、【正解】C

9、【正解】B

10、【正解】D

三、计算题(每小题 8 分，共 40 分)

1、【解析】$r(\rho)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$

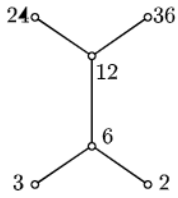
$$s(\rho)=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$$

$$\rho^2=\rho\circ\rho=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle\}$$

$$\rho^3=\rho^2\circ\rho=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$$

$$\therefore t(\rho)=\rho\cup\rho^2=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$$

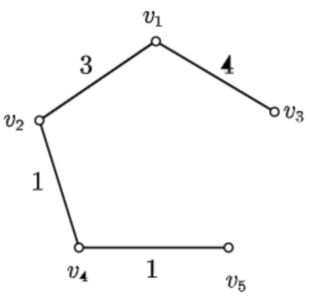
2、【解析】②的哈斯图为



集合	最大元	极大元	下界	上确界
A	无	24，36	无	无
B	12	12	6，2，3	12
C	6	6	无	6

3、【解析】此问题的最优设计方案即要求该图的最小生成树，由破圈法或避圈法得最小生成树为：

其权数为$1+1+3+4=9$



4、【解析】$\langle G,\times_7\rangle$既构成群，又构成循环群，其生成元为3，5。因为：$\times_7$的运算表为：

$\times_7$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

（1）由运算表知，$\times_7$封闭；

（2）$\times_7$ 可结合（可自证明）；

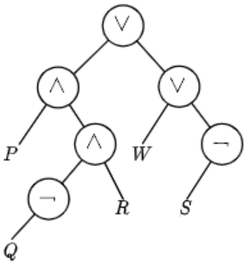
（3）1 为幺元；

（4）$1^{-1}=1$，$2^{-1}=4$，$3^{-1}=5$，$4^{-1}=2$，$5^{-1}=3$，$6^{-1}=6$，综上所述，$\langle G,\times_7\rangle$ 构成群。

由 $3^1=3$，$3^2=2$，$3^3=6$，$3^4=4$，$3^5=5$，$3^6=1$。所以，3 为其生成元，3 的逆元 5 也为其生成元。

故 $\langle G,\times_7\rangle$ 为循环群。

5、【解析】命题公式对应的二元树见右图。



四、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1、【解析】（1）设群 $\langle G,*\rangle$ 的幺元为 e，则 $\forall x\in G$ 有 $x*e=e*x$，$\therefore e\in H$ 即 H 非空。

（2）$\forall a,b\in H$，则 $\forall x\in G$ 有 $a*x=x*a$，$b*x=x*b$，从而

$$(a*b^{-1})*x=(a*b^{-1})*x*(b*b^{-1})$$

$$=a*(b^{-1}*b)*x*b^{-1}=(a*x)*b^{-1}$$

$$=x*(a*b^{-1})，\therefore a*b^{-1}\in H$$

故 $\langle H,*\rangle$ 是 $\langle G,*\rangle$ 的子群。

2、【解析】设 $P(x)$：x 喜欢美术，$Q(x)$：x 喜欢体育，$R(x)$：x 喜欢音乐。论域：人。

命题形式为：前提：$\forall x(P(x)\rightarrow\neg Q(x))$，$\forall x(Q(x)\vee R(x))$，$\exists x\neg R(x)$

结论：$\exists x\neg P(x)$。

证明：

（1）	$\exists x\neg R(x)$	P
（2）	$\neg R(a)$	$ES(1)$
（3）	$\forall x(Q(x)\vee R(x))$	P

（4）	$Q(a) \vee R(a)$	$US(4)$
（5）	$Q(a)$	$T(2)(4)I$
（6）	$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	P
（7）	$P(a) \rightarrow \neg Q(a)$	$US(6)$
（8）	$\neg P(a)$	$T(5)(7)I$
（9）	$\exists x \neg P(x)$	$EG(8)$

$\therefore$结论有效。

期末考试试卷（三）

一、填空题(每空 2 分，共 20 分)

1、命题$P \to Q$的真值为 0，当且仅当________.

2、$P(P(\Phi)) =$________.

3、设$A = \{x|(x \in N)且(x < 5)\}$，$B = \{x|x \in E^+且x < 7\}$（$N$: 自然数集，$E^+$正偶数）则$A \cup B =$

___________.

4、公式$(P \wedge R) \vee (S \wedge R) \vee \neg P$的主合取范式为___________.

5、n阶完全图节点v的度数$d(v) =$___________.

6、代数系统$\langle A, * \rangle$中，$|A| > 1$，如果e和θ分别为$\langle A, * \rangle$的幺元和零元，则e和θ的关系为

__________.

7、设$\langle G, * \rangle$是一个群，$\langle G, * \rangle$是阿贝尔群的充要条件是________.

8、设$\langle G, * \rangle$是由元素$a \in G$生成的循环群，且$|G| = n$，则$G =$_______.

9、拉格朗日定理说明若$\langle H, * \rangle$是群$\langle G, * \rangle$的子群，则可建立G中的等价关系$R =$___________。若

$|G| = n$，$|H| = m$则m和n的关系为___________.

二、选择题(每小题 2 分，共 20 分)

1、设$A = \{1, 2, 3\}$，则A上的二元关系有（　　）个。

A、2^3　　　　B、3^2　　　　C、$2^{3\times3}$　　　　D、$3^{2\times2}$

2、设R，S是集合A上的关系，则下列说法正确的是（　　）

A、若R，S是自反的，则$R \circ S$是自反的；

B、若R，S是反自反的，则$R \circ S$是反自反的；

C、若R，S是对称的，则$R \circ S$是对称的；

D、若R，S是传递的，则$R\circ S$是传递的

3、命题逻辑演绎的CP规则为（　　）

A、在推演过程中可随便使用前提；

B、在推演过程中可随便使用前面演绎出的某些公式的逻辑结果；

C、如要演绎出的公式为$B\rightarrow C$形式，那么将B作为前提，设法演绎出C；

D、$\Phi(A)$是含公式A的命题公式，$B\Leftrightarrow A$，则可用B替换$\Phi(A)$中的A。

4、命题“有的人喜欢所有的花”的逻辑符号化为（　　）。设D: 全总个体域，$F(x)$:x是花，$M(x)$:x是人，$H(x,y)$:x喜欢y

A、$\forall x(M(x)\rightarrow\forall y(F(y)\rightarrow H(x,y)))$；

B、$\forall x(M(x)\wedge\forall y(F(y)\rightarrow H(x,y)))$；

C、$\exists x(M(x)\rightarrow\forall y(F(y)\rightarrow H(x,y)))$；

D、$\exists x(M(x)\wedge\forall y(F(y)\rightarrow H(x,y)))$

5、公式$\forall x\forall y(P(x,y)\vee Q(y,z))\wedge\exists xP(x,y)$换名（　　）。

A、$\forall x\forall u(P(x,u)\vee Q(u,z))\wedge\exists xP(x,y)$；

B、$\forall x\forall y(P(x,u)\vee Q(u,z))\wedge\exists xP(x,u)$；

C、$\forall x\forall y(P(x,y)\vee Q(y,z))\wedge\exists xP(x,u)$；

D、$\forall u\forall y(P(u,y)\vee Q(y,z))\wedge\exists uP(u,y)$

6、N是自然数集，定义f:$N\rightarrow N$，$f(x)=(x)mod3$（即x除以3的余数），则f是（　　）

A、满射不是单射；　　B、单射不是满射；

C、双射；　　D、不是单射也不是满射

7、设$\langle A,\vee,\wedge\rangle$是由格$\langle A,\leqslant\rangle$诱导的代数系统，若对$\forall a,b,c\in A$，当$b\leqslant a$时，有（　　）$\langle A,\leqslant\rangle$是模格。

A、$a\wedge(b\vee c)=b\vee(a\wedge c)$；

B、$c\wedge(a\vee c)=a\vee(b\wedge c)$；

C、$a\vee(b\wedge c)=b\wedge(a\vee c)$；

D、$c\vee(a\wedge c)=b\wedge(a\vee c)$

8、在（　　）中，补元是唯一的。

A、有界格　　B、有补格　　C、分配格　　D、有补分配格

9、在布尔代数$\langle A,\vee,\wedge,-\rangle$中，$b\wedge\bar{c}=0$当且仅当（　　）

A、$b\leqslant\bar{c}$　　B、$\bar{c}\leqslant b$　　C、$b\leqslant c$　　D、$c\leqslant b$

10、设$\langle A,\leqslant\rangle$是偏序集，“$\leqslant$”定义为：$\sqrt{a},b\in A,a\leqslant b\Leftrightarrow a|b$，则当$A=$（　　）时，$\langle A,\leqslant\rangle$是格。

A、$\{1,2,3,4,6,12\}$；

B、$\{1,2,3,4,6,8,12,14\}$；

C、$\{1,2,3,\cdots,12\}$；

D、$\{1,2,3,4\}$

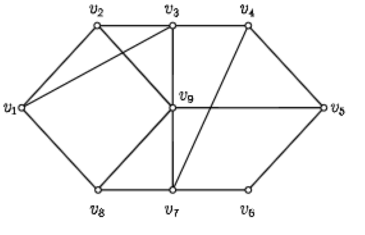
三、计算题(每小题 8 分，共 40 分)

1、给定 3 个命题：P：北京比天津人口多；Q：2 大于 1；R：15 是素数。求复合命题：$(Q\to R)\leftrightarrow(P\wedge\neg R)$的真值。

2、给定解释I：$D=\{2,3\}$，$L(x,y)$为$L(2,2)=L(3,3)=1$，$L(2,3)=L(3,2)=0$，求谓词合式公式$\exists y\forall xL(x,y)$的真值。

3、$A=\{a,b,c,d\}$，$R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,b\rangle\}$为$A$上的关系，利用矩阵乘法求$R$的传递闭包，并画出$t(R)$的关系图。

4、某年级共有 9 门选修课程，期末考试前必须提前将这 9 门课程考完，每人每天只在下午考完一门课，若以课程表示结点，有一人同时选两门课程，则这两点间有边（其图如下），问至少需几天？



5、用$Huffman$算法求出带权为 2，3，5，7，8，9 的最优二叉树T，并求$W(T)$。若传递a，b，c，d，e，f的频率分别为2%，3%，5%，7%，8%，9%求传输它的最佳前缀码。

四、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1、设$\langle A,*\rangle$，是半群，e是左幺元且$\forall x \in A$，$\exists \hat{x} \in A$，使得$\hat{x} * x = e$，则$\langle A,*\rangle$是群。

2、设$A=\{1,2,3,4\}$，在$P(A)$上规定二元关系如下：$R=\{\langle s,t\rangle \mid s,t \in P(A) \wedge (|s|=|t|)\}$，证明$R$是$P(A)$上的等价关系并写出商集$P(A)/R$。

期末考试试卷（三）参考答案

一、填空题(每空 2 分，共 20 分)

1、【正解】P 的真值为 1，Q 的真值为 0

2、【正解】$\{\Phi,\{\Phi\},\{\{\Phi\}\},\{\Phi\{\Phi\}\}\}$

3、【正解】$\{0,1,2,3,4,6\}$

4、【正解】$(\neg P\vee S\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg S\vee R)$

5、【正解】$n-1$

6、【正解】$e\neq\theta$

7、【正解】任意$ab\in G$，$(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)$

8、【正解】$G=\{a,a^2,\cdots,a^{n-1},a^n=e\}$

9、【正解】$\{\langle a,b\rangle\,|a\in G,b\in G,a^{-1}*b\in H\}$； m/n

二、选择题(每小题 2 分，共 20 分)

1、【正解】C

2、【正解】A

3、【正解】C

4、【正解】D

5、【正解】A

6、【正解】D

7、【正解】A

8、【正解】D

9、【正解】C

10、【正解】A

三、计算题(每小题 8 分，共 40 分)

1、【解析】P，Q 是真命题，R 是假命题。

$$(Q\rightarrow R)\leftrightarrow(P\wedge\neg R)=(1\rightarrow 0)\leftrightarrow(1\wedge 1)=0\leftrightarrow 1=0$$

2、【解析】$\exists y\forall xL(x,y)\ \Leftrightarrow\ \exists y(L(2,y)\wedge L(3,y))$

$$\Leftrightarrow\ (L(2,2)\wedge L(3,2)\vee(L(2,3)\wedge L(3,3)))\ \Leftrightarrow\ (1\wedge 0)\vee(0\wedge 1)=0\vee 0=0$$

3、【解析】$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$$M_{R^2}=M_R\circ M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

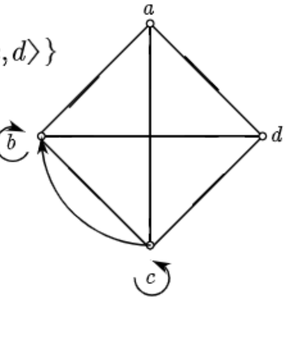
$$M_{R^3}=M_{R^2}\circ M_R=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=M_R$$

$$M_{R^4}=M_{R^3}\circ M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=M_{R^2}$$

$$\therefore M_{t(R)}=M_R\vee M_{R^2}\vee M_{R^3}\vee M_{R^4}=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以$t(R)=\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle a,d\rangle,\langle b,b\rangle,\langle b,c\rangle,\langle b,d\rangle,\langle c,b\rangle,\langle c,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$

关系图为



4、【解析】$\chi(G)$即为最少考试天数。

用$Welch-Powell$方法对G着色：$v_9 v_3 v_7 v_1 v_2 v_4 v_5 v_8 v_6$

第一种颜色的点$v_9 v_1 v_4 v_6$，剩余点$v_3 v_7 v_2 v_5 v_8$

第二种颜色的点$v_3 v_7 v_5$，剩余点$v_2 v_8$

第三种颜色的点$v_2 v_8$

所以$\chi(G) \leqslant 3$

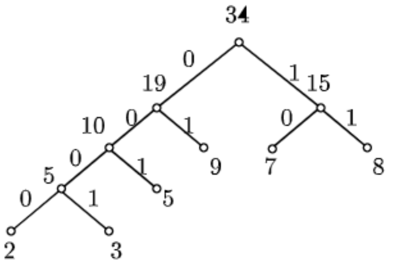
任$v_2 v_3 v_9$构成一圈，所以$\chi(G) \geqslant 3$

故$\chi(G)=3$

所以三天下午即可考完全部九门课程。

5、【解析】

2	3	5	7	8	9
	5	5	7	8	9
		10	7	8	9
			10	15	9
				15	19
					34



$W(T)=2\times4+3\times4+5\times3+9\times2+7\times2+8\times2=83$

用 0000 传输a，0001 传输b，001 传输c，01 传输f，10 传输d，11 传输e传输它们的最优前缀码为$\{0000,0001,001,01,10,11\}$。

四、证明题（每小题 10 分，共 20 分）

1、【解析】（1）$\forall a,b,c\in A$，若$a*b=a*c$则$b=c$

事实上：$\because a*b=a*c \therefore \exists\hat{a}$使$\hat{a}*(a*b)=\hat{a}*(a*c) \quad (\hat{a}*a)*b=(\hat{a}*a)*c$

$\therefore e*b=e*c$即：$b=c$

（2）e是$\langle A,*\rangle$之幺元。

事实上：由于e是左幺元，现证e是右幺元。

$\forall x \in A$，$x * e \in A$，$\exists \hat{x}$使$\hat{x} * (x * e) = (\hat{x} * x) * e = e * e = e = \hat{x} * x$

由（1）即$x * e = x$

$\therefore e$为右幺元

（3）$\forall x \in A$，则$x^{-1} \in A$

事实上：$\forall x \in A \quad (x * \hat{x}) * x = x * (\hat{x} * x) = x * e = x = e * x$

$x * \hat{x} = e$故有$\hat{x} * x = x * \hat{x} = e$

$\therefore x$有逆元$\hat{x}$

由（2）（3）知：$\langle A, * \rangle$为群。

2、【解析】（1）$\forall s \in P(A)$，由于$|s| = |s|$，所以$\langle s，s\rangle \in R$，即R是自反的。

（2）$\forall s，t \in P(A)$，若$\langle s，t\rangle \in R$，则$|s| = |t| \Rightarrow |t| = |s|$，$\therefore \langle t，s\rangle \in R$，$R$是对称的。

（3）$\forall s，t，u \in P(A)$，若$\langle s，t\rangle \in R$且$\langle t，u\rangle \in R$，即$|s| = |t| = |u|$，$\therefore |s| = |u|$，$\langle s，u\rangle \in R$，所以R是传递的。

由（1）（2）（3）知，R是等价关系。

$P(A)/R = \{[\Phi]_R, [\{1\}]_R, [\{1,2\}]_R, [\{1,2,3\}]_R, [\{1,2,3,4\}]_R\}$