有界变差函数 BV([a,b])

割分(partition) $P=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b\}$

we define $S_p=\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|$

$f\in BV([a,b]) \Leftrightarrow \sup_P S_p<\infty$　　令定义 $T_a^b(f)=\sup_P S_p$

Example ① 任意函数 f $\Rightarrow$ $T_a^b(f)\geq|f(b)-f(a)|$

· f单调. $\Rightarrow$ $T_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$

Q: if $T_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$　f单调吗?

A: Yes.

Pf: 不失一般性. 假设 $f(a)\leq f(b)$　(否则考虑 $-f$)

想证f单增 i.e. $\forall\ a\leq x<y\leq b \Rightarrow f(x)\leq f(y)$

对割分 $a\leq x<y\leq b$　$S_p=|f(x)-f(a)|+|f(y)-f(x)|+|f(b)-f(y)|$

$\overset{\text{三角不等式}}{\geq} |f(b)-f(y)+f(y)-f(x)+f(x)-f(a)|$

$=|f(b)-f(a)| = T_a^b(f)$

$\Rightarrow$ $S_p=T_a^b(f)$　由三角不等式取等条件 $\Rightarrow$ $f(a)\leq f(x)\leq f(y)\leq f(b)$

② Lipschitz-function: $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$　$\forall\ x,y\in[a,b]$

③ Absolute continuous function　$AC([a,b])$

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$, s.t. $\forall$ 不交开区间族 $\bigcup_{k=1}^{m}(a_k,b_k)\subset[a,b]$ with $\sum_{k=1}^{m}|b_k-a_k|<\delta$

we have $\sum_{k=1}^{m}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$

断: $AC([a,b])\subset BV([a,b])$

Pf: Assume $f\in AC([a,b])$, choose $\varepsilon=1$, $\exists\delta>0$. satisfying above conclusion

$\forall$ $[a,b]$的割分 P. $\exists$ P的加细 $\tilde{P}$　$a=s_0<s_1<\cdots<s_m=b$　满足 $\frac{\delta}{2}<s_i-s_{i-1}<\delta$ $\forall i$

$\Rightarrow$ $S_p \underset{\text{三角不等式}}{\leq} S_{\tilde{p}} = \sum_{i=1}^{m}|f(s_i)-f(s_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{m}1 = m < 2\frac{b-a}{\delta}$.

对 (s_{i-1},s_i) 用绝对连续条件

Prop. if $f\in BV([a,b])$ then $T_a^b(f)=T_a^c(f)+T_c^b(f)$ $\forall\ a\le c\le b$

Pf: 一方面：$\forall$ $[a,c]$ 的剖分 P_1，$[c,b]$ 的剖分 P_2，容易看到 $P=P_1\cup P_2$ 为 $[a,b]$ 的剖分

则 $S_P=S_{P_1}+S_{P_2}\le T_a^b(f)$

对 P_1,P_2 取上确界 $\Rightarrow$ $T_a^c(f)+T_c^b(f)\le T_a^b(f)$

另一方面：$\forall\ [a,b]$ 的剖分 P，定义 $P'=P\cup\{c\}$

则 $S_P\le S_{P'}$ 且 $P'=P_1\cup P_2$ P_1,P_2 分别为 $[a,c],[c,b]$ 的剖分

则 $S_P\le S_{P'}=S_{P_1}+S_{P_2}\le T_a^c(f)+T_c^b(f)$

对 P 取上确界 $\Rightarrow$ $T_a^b(f)\le T_a^c(f)+T_c^b(f)$

Rmk: 该 Prop 给出 有界变差函数的分解

Prop: if $f\in BV([a,b])$ then $f=f_1-f_2$ f_1,f_2 单增

Pf. define $\begin{cases} f_1(x)=\frac{1}{2}T_a^x(f)+\frac{1}{2}f(x) \\ f_2(x)=\frac{1}{2}T_a^x(f)-\frac{1}{2}f(x)\end{cases}$

下证 f_1 单增 只证 f_1，f_2 类似

We want $\forall\ x<y\in[a,b]$ $\Rightarrow$ $f_1(x)\le f_1(y)$ i.e $\frac{1}{2}T_a^x(f)+\frac{1}{2}f(x)\le\frac{1}{2}T_a^y(f)+\frac{1}{2}f(y)$

$\Leftrightarrow$ $f(x)-f(y)\le T_a^y(f)-T_a^x(f)=T_x^y(f)$ obviously

由分解 则 可以将单调函数的"好"的性质转移到 $BV([a,b])$ 上

对单增函数 f，• $f'(x)$ 存在 a.e $\Rightarrow$ 若 $f\in BV[a,b]$ then f' 存在 a.e

• $\int_a^b f'(x)dx\le f(b)-f(a)$ $\Rightarrow$ Ex.

Ex: $\forall f\in BV([a,b])$ $\int_a^b|f'(x)|dx\le T_a^b(f)$

Pf. $\int_a^b|f'(x)|dx=\int_a^b|f_1'(x)+f_2'(x)|dx$

$\le\int_a^b|f_1'(x)|+|f_2'(x)|dx$

$\overset{单调性}{=}\int_a^b f_1'(x)dx+\int_a^b f_2'(x)dx$

$\le f_1(b)-f_1(a)+f_2(b)-f_2(a)$

$\overset{代入f_1,f_2}{=}T_a^b(f)$

Ex $\forall f \in AC([a,b])$ $\quad \int_a^b |f'(x)|dx = T_a^b(f)$

Pf: 只需证 $T_a^b(f) \le \int_a^b |f'(x)|dx$

$\forall [a,b]$ 的分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$

$$S_p = \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^m \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(x)dx \right| \le \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(x)|dx = \int_a^b |f'(x)|dx$$

$\to \quad T_a^b(f) \le \int_a^b |f'(x)|dx$

Rmk: $\quad (T_a^x(f))' = |f'(x)|$

Ex $\quad f \in AC(\mathbb{R})$ $\quad$ if $m(E) = 0$ then $m(f(E)) = 0$

pf: since $m(E) = 0$ $\forall\delta$, then $\exists$ open $U \supset E$ $\quad m(U) < \delta$

开集结构定理 $\quad U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$ $\quad \sum_{k=1}^{m} b_k - a_k \le \delta$

$f(E) \subset f(U) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} f([a_k, b_k])$

f 将闭区间映成闭区间，设 $f([a_k, b_k]) = [m_k, M_k] = [f(c_k), f(d_k)]$

则 $\quad m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} f([a_k, b_k])\right) = \sum_{k=1}^{\infty} |f(d_k) - f(c_k)| \le \varepsilon$

对 $\forall\varepsilon$，由 f 绝对连续可取 δ

$\Rightarrow \quad m(f(E)) = 0$