2. (15 分) 设 E 是 $\mathbb{R}^d$ 中的可测集且满足 $m(E) < \infty$, 叙述 E 上的 Egorov 定理，并举例说明条件 $m(E) < \infty$ 是必需的。

5' ① 设 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为一列定义在 E 上的可测函数. 且 $m(E)<\infty$. 设 $f_k \to f$ a.e. on E.
则对 $\forall \varepsilon>0$. 存在闭集 $A_\varepsilon \subset E$. 使得 $m(E-A_\varepsilon) \le \varepsilon$. 且 $f_k \to f$ 在 A_ε 上一致收敛.

② 有理即可 eg. $f_n(x) = \chi_{(0,n)}(x)$.
10' $f=1$. $E=(0,\infty)$.

3. (15 分) 设 $A \subset [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ 是具有正测度的可测集，证明 A 必然包含至少一个不可测子集。

Pf: 定义等价关系 $(a,b) \sim (c,d) \iff (a-c, b-d) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

对每个等价类选取一个代表元，所有代表元构成 $\mathcal{N}$

知 $\mathcal{N} \subset A$ …… 构造出 $\mathcal{N}$ —5 分

claim $\mathcal{N}$ 不可测

· if $(a,b) \neq (c,d) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ $\mathcal{N}+(a,b)$ 与 $\mathcal{N}+(c,d)$ 不交 …… 不相交 —3 分

· $A \subset \bigcup_{\substack{p \in \mathbb{Q} \cap [-1,1] \\ q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}} \mathcal{N}+(p,q) \subset [-1,2] \times [-1,2]$

· 反证. 设 $\mathcal{N}$ 可测

由测度的平移不变性，以及可数可加性

$$\Rightarrow m(A) \leq \sum_{\substack{p \in \mathbb{Q} \cap [-1,1] \\ q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}} m(\mathcal{N}) \leq 3 \times 3 = 9$$ …… 不等式 —5 分

$\Rightarrow m(A) = 0$ 矛盾 …… 矛盾 —2 分

4. (15 分) 设 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数。

(a). 证明 f 的图 $\Gamma = \{(x,y) | y = f(x)\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集，从而是可测集；

(b). 证明 Γ 是 $\mathbb{R}^2$ 中的零测集。

(a). 取 Γ 任一收敛列 $\{(x_n, y_n)\}$ $\quad y_n = f(x_n)$

设 $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$.

则 $x_n \to x$, $y_n \to y$. $\quad$ 3

由 f 连续. 知 $y = f(x)$, $(x,y) \in \Gamma$

$\Rightarrow \Gamma$ 闭. $\quad$ 3

(b). $\Gamma_n = \cancel{\{(x,y)\}}\ \Gamma \cap \{(x,y) : -n \le x \le n\} \nearrow \Gamma$. 3

Γ_n 闭

$m(\Gamma_n) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\Gamma_n}(x,y)\, dx dy \overset{\text{Tonelli } \cancel{\text{Fubini}}}{=\!=\!=} \int_{[-n,n]} \cancel{\int_{\chi_{\{y=f(x)\}}(y)}} \int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f(x)\}}(y)\, dy$ 3

$= 0$.

$m(\Gamma) = \lim_{n\to\infty} m(\Gamma_n) = 0$. $\quad$ 3

$m(\Gamma) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_\Gamma(x,y)\, dx dy$ $\quad$ 9

$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_\Gamma(x,y)\, dy \right) dx$

$= \int_{\mathbb{R}} 0\, dx$

$= 0$

5. （15 分）若 f 为 $\mathbb{R}$ 上连续紧支撑函数, 函数 f 紧支撑指集合 $\{x \in \mathbb{R} | f(x) \neq 0\}$ 的闭包为紧集. 求证:

(a). $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\sqrt{-1}\pi\xi x} dx$ 为 $\mathbb{R}$ 上以 ξ 为自变量的连续函数。

(b). $\lim_{\xi \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.

(a) 固定 ξ_0, 当 $\xi \to \xi_0$ 时, 有

$$f(x) e^{-2\sqrt{-1}\pi\xi x} \to f(x) e^{-2\sqrt{-1}\pi\xi_0 x} \qquad 2$$

做为函数点点收敛.

注意到 f 有界, 有紧支集, 所以

$$\int |f| dx < \infty. \qquad 2$$

用控制收敛定理, 得

$$\int f(x) e^{-2\sqrt{-1}\pi\xi x} \to \int f(x) e^{-2\sqrt{-1}\pi\xi_0 x} \qquad 4$$

当 $\xi \to \xi_0$ 时. 所以 $\hat{f}$ 在 ξ_0 处连续.

由 ξ_0 的任意性, 得 $\hat{f}$ 连续.

(b).
$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\sqrt{-1}\pi\xi x} dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f\left(x - \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right) e^{-2\pi\sqrt{-1}\xi\left(x - \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right)} dx.$$
$$= \int_{\mathbb{R}} -f\left(x - \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right) e^{-2\pi\sqrt{-1}\xi x} dx \qquad 4$$
$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left\{ f(x) - f\left(x - \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right) \right\} e^{-2\pi\sqrt{-1}\xi x} dx$$
$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - f\left(x - \frac{\xi}{2|\xi|^2}\right) \right| \to 0 \text{ as } \frac{\xi}{2|\xi|^2} \to 0 \qquad 3$$

6. (10 分，Borel-Cantelli 引理) 假设 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是一列可测集，满足 $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. 令 $E = \{x \in \mathbb{R}^d | x \in E_k$对无穷多个$k$成立$\}$。证明 $m(E) = 0$.

pf: $E = \limsup_{k\to\infty} E_k \quad (\text{or } E = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i}^{\infty} E_j)$ 4

$$m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j) < \infty$$ 2

$\forall i \quad \bigcup_{j=i+1}^{\infty} E_j \subseteq \bigcup_{j=i}^{\infty} E_j$ 1

$$m(E) = \lim_{\substack{\cancel{j=i} \\ i\to\infty}} m\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} E_j\right) \leq \lim_{i\to\infty} \sum_{j=i}^{\infty} m(E_j) = 0$$

3

3. (15 分) 设 $A \subset [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ 是具有正测度的可测集，证明 A 必然包含至少一个不可测子集。

Pf: 定义等价关系 $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow (a-c, b-d) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

对每个等价类选取一个代表元，所有代表元构成 $\mathcal{N}$

知 $\mathcal{N} \subset A$ …… 构造出 $\mathcal{N}$ —5分

claim $\mathcal{N}$ 不可测

- if $(a,b) \neq (c,d) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$，$\mathcal{N}+(a,b)$ 与 $\mathcal{N}+(c,d)$ 不交 …… 不相交 —3分

- $A \subset \bigcup_{\substack{p \in \mathbb{Q}\cap[-1,1] \\ q \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]}} \mathcal{N}+(p,q) \subset [-1,2]\times[-1,2]$

- 反证. 设 $\mathcal{N}$ 可测

由测度的平移不变性，以及可数可加性

$\Rightarrow m(A) \le \sum_{\substack{p \in \mathbb{Q}\cap[-1,1] \\ q \in \mathbb{Q}\cap[-1,1]}} m(\mathcal{N}) \le 3\times 3 = 9$ …… 不等式 —5分

$\Rightarrow m(A) = 0$ 矛盾 …… 矛盾 —2分

期中 五(b) 另一证明

$\mathrm{Supp}\, f \subset [-N, N]$

$$\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx = \int f(x) \cos 2\pi x\xi\, dx - i\int f(x) \sin 2\pi x\xi\, dx$$

consider $\left[\frac{i}{\xi}, \frac{i+1}{\xi}\right]$, f 一致连续 ($\Leftarrow f$ 紧支连续) 则

$\forall \varepsilon > 0$. $\left|f(x) - f\left(\frac{i}{\xi}\right)\right| < \varepsilon$ 若 ξ 足够大. $\left(x \in \left[\frac{i}{\xi}, \frac{i+1}{\xi}\right]\right)$

则 $$\left|\int_{\left[\frac{i}{\xi}, \frac{i+1}{\xi}\right]} f(x) \cos 2\pi x\xi\, dx\right| = \left|\int_{\left[\frac{i}{\xi}, \frac{i+1}{\xi}\right]} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{\xi}\right)\right) \cos 2\pi x\xi\, dx\right| \leq \int_{\left[\frac{i}{\xi}, \frac{i+1}{\xi}\right]} \left|f(x) - f\left(\frac{i}{\xi}\right)\right| dx \leq \frac{\varepsilon}{\xi}$$

$$\Rightarrow \left|\int f(x) \cos 2\pi x\xi\, dx\right| \leq \sum_i \left|\int_{\left[\frac{i}{\xi}, \frac{i+1}{\xi}\right] \cap [-N, N]} f(x) \cos 2\pi x\xi\, dx\right| \leq 2N\varepsilon$$

由 ε 任意小性 $\Rightarrow \int f(x) \cos 2\pi x\xi\, dx = 0$

类似 $\int f(x) \sin 2\pi x\xi\, dx = 0$

Good morning, professor... It is a great honor to be here for this interview. My name