Exercise 3:

(a).

由 0 是 E 的密度点知存在 $r_0>0$ 使得当 $r\le r_0$ 时有 $m(E\cap B_r(0))>\frac{2}{3}m(B_r(0))=\frac{4}{3}r$。由对称性，$m((-E)\cap B_{r_0}(0))=m(E\cap B_{r_0}(0))\ge\frac{4}{3}r_0$。故 $m(E\cap(-E))\ge|2r_0-\frac{8}{3}r_0|=\frac{2}{3}r_0>0$。从而存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in(E\cap(-E))$ 使得 $x_n\to 0,-x_n\in E$。

(b).

由 0 是 E 的密度点知存在 $r_0>0$ 使得当 $r\le r_0$ 时有 $m(E\cap B_r(0))>\frac{2}{3}m(B_r(0))=\frac{4}{3}r$。令 $E_0=E\cap B_{r_0}(0)$。

$$m(\frac{1}{2}E_0)=\frac{1}{2}E_0\ge\frac{2}{3}r_0$$

$$\frac{1}{2}E_0=(\frac{1}{2}E)\cap B_{\frac{r_0}{2}}(0),\quad m(\frac{1}{2}E_0)\ge\frac{2}{3}r_0>0$$

$$m(E\cap B_{\frac{r_0}{2}}(0))\ge\frac{2}{3}m(B_{\frac{r_0}{2}}(0))=\frac{2}{3}r_0>0$$

从而 $E\cap B_{\frac{r_0}{2}}(0)\neq\emptyset$,$\frac{1}{2}E\cap B_{\frac{r_0}{2}}(0)\neq\emptyset$，而 $m(B_{\frac{r_0}{2}}(0))=r_0$。故有

$$\begin{cases} m((\frac{1}{2}E)\cap B_{\frac{r_0}{2}}(0))\ge\frac{2}{3}r_0 \\ m(E\cap B_{\frac{r_0}{2}}(0))\ge\frac{2}{3}r_0 \\ m(E\cap(\frac{1}{2}E))\ge\frac{1}{3}r_0>0 \end{cases}$$

从而存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in(E\cap(\frac{1}{2}E)$，$x_n\to 0,x_n\in E,2x_n\in E$。

Exercise 4:

(1).f^* 在 $\mathbb{R}^d$ 上不可积。

$$f^*(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{m(B)}\int_B|f(y)|dy$$

由 f 在 a.e. 意义下不恒为 0 知存在 $r_0>0$ 使得

$$\int_{B_{r_0}(0)}|f(y)|dy=c_0>0$$

当 $1\le|x|<r_0$

$$f^*(x)\ge\frac{1}{m(B_{r_0}(0))}\int_{B_{r_0}(0)}|f(y)|dy=c_1\ge\frac{c_1}{|x|^d}>0$$

当 $|x|\ge r_0$

$$f^*(x)\ge\frac{1}{m(B_{|x|}(0))}\int_{B_{|x|}(0)}|f(y)|dy\ge\frac{1}{B_1(0)|x|^d}c_0=\frac{c_2}{|x|^d}$$

取 $c=min\{c_1,c_2\}>0$，则有

$$f^*(x)\ge\frac{c}{|x|^d}$$

对任意 $|x|\ge 1$ 成立。

从而

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f^*(x)|\ge\int_{|x|\ge 1}\frac{c}{|x|^d}=\infty$$

即 f^* 在 $\mathbb{R}^d$ 上不可积。

(2). 若 f 支集为单位球且 $\int |f| = 1$

由定理 1.1 弱类型不等式，存在 $c > 0$ 使得

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{c}{\alpha}$$

对所有 $\alpha > 0$ 成立。

现可取 (1). 中的 $r_0 = 1$。对任意 $|x| \geq 1$

$$f^*(x) \geq \frac{1}{m(B_{|x|}(0))} \int_{B_{|x|}(0)} |f(y)|dy = \frac{1}{B_1(0)|x|^d}$$

若 $\frac{1}{|B_1(0)|} \frac{1}{|x|^d} > \alpha$，$f^*(x) > \alpha$，$|x|^d < \frac{1}{\alpha |B_1(0)|}$ 对任意 $\alpha << 1$

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \geq m(\{1 \leq x \leq \frac{1}{\alpha |B_1(0)|}\}) \geq m(\{x : \frac{1}{2\alpha |B_1(0)|} \leq |x|^d \leq \frac{1}{\alpha |B_1(0)|}\}) = \frac{1}{2\alpha}$$

故对 $\frac{1}{2} > 0$ 和所有充分小的 α

$$m(\{x : f^*(X) > \alpha\}) \geq \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha}$$

从而在此意义下，

$$m(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leq \frac{c}{\alpha}$$

即为最佳估计。

Exercise 5:

(a).

考虑 Riemann 积分的情况。

$f(x)$ 为偶函数

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|x|(\ln x)^2} dx = \int_{-\infty}^{-\ln 2} \frac{e^t dt}{e^t t^2} = \int_{-\infty}^{-\ln 2} \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{\ln 2} < \infty$$

对 Lebesgue 积分：

$$\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|x|(\ln x)^2} dx = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{m}$$

令 $f_m(x) = \frac{1}{|x|(\ln x)^2} \chi_{[\frac{1}{m}, \frac{1}{2}]}$ 从而 f_m 为递增的非负函数列，由单调收敛定理

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx = 2 \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}} \lim_{m \to \infty} f_m(x) dx = \frac{2}{\ln 2} < \infty$$

即 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积。

(b).

当 $x \in (0, \frac{1}{4}]$ 时

$$f^*(x) \geq \frac{1}{m((0, 2x])} \int_0^{2x} |f(y)|dy = \frac{1}{2x} \frac{1}{\ln \frac{1}{2x}} \geq \frac{c_1}{x \ln \frac{1}{x}}$$

当 $x \in (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 时

$$f^*(x) \geq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(y)|dy \geq \frac{c_2}{x \ln \frac{1}{x}}$$

取 $c = \min\{c_1, c_2\}$，则

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x| \ln \frac{1}{|x|}}$$

对 $|x| \leq \frac{1}{2}$ 成立。
对任意 x：

$$\int_{x-t}^{x+t} |f^*(y)|dy = \int_{x-t}^{x+t} \frac{1}{|y| \ln \frac{1}{|y|}} dy$$

取 x=0，对 Riemann 积分有

$$\int_{-t}^{t} \frac{1}{|y| \ln \frac{1}{|y|}} dy = 2\int_{0}^{t} \frac{1}{y \ln \frac{1}{y}} dy = -2\int_{-\infty}^{\ln t} \frac{1}{y} dy = 2\int_{\ln \frac{1}{t}}^{\infty} \frac{1}{y} dy = \infty$$

与 (a). 同理用单调收敛定理知对 Lebesgue 积分也有

$$\int_{-t}^{t} \frac{1}{|y| \ln \frac{1}{|y|}} dy = \infty$$

由此可知，$f^*(x)$ 非局部可积函数。

Exercise 6:

$$f_+^*(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} |f(y)|dy$$

若 $x \in \{x : f_+^*(x) > \alpha\}$, 即

$$\sup_{h>0} \frac{1}{h} (\int_{0}^{x+h} |f(y)|dy - \int_{0}^{x} |f(y)|dy) > \alpha$$

这等价于存在 h 使得

$$\int_{0}^{x+h} |f(y)|dy - (x+h)\alpha > \int_{0}^{x} |f(y)|dy - x\alpha$$

令 $F(x) = \int_0^x |f(y)|dy - \alpha x$，则 $F(x)$ 为实值连续函数。
由引理 3.5,$E_\alpha^+ = \{x :$ 存在 h>0 使得$F(x+h) > F(x)\}$，则 $E_\alpha^+ = \cup(a_k, b_k)$

$$m(E_\alpha^+) = \sum_k (b_k - a_k)$$

且有

$$F(a_k) = F(b_k)$$

$$\int_{0}^{a_k} |f(y)|dy - \alpha a_k = \int_{0}^{b_k} |f(y)|dy - \alpha b_k$$

故有

$$b_k - a_k = \frac{1}{\alpha} (\int_{0}^{b_k} |f(y)|dy - \int_{0}^{a_k} |f(y)|dy) = \frac{1}{\alpha} \int_{a_k}^{b_k} |f(y)|dy$$

从而

$$m(E_\alpha^+) = \sum_k (b_k - a_k) = \sum_k \frac{1}{\alpha}\int_{a_k}^{b_k} |f(y)|dy = \frac{1}{\alpha}\int_{E_\alpha^+} |f(y)|dy$$

Exercise 7:

令 $F = [0,1] \setminus E$，若 $m(E) \neq 1$，则 $m(F) > 0$。由推论 1.5，几乎所有 $y \in F$ 都为 F 的 Lebesgue 密度点。

对任意 $y \in F$，若

$$\lim_{m(I)\to 0, y\in I} \frac{m(F\cap I)}{m(I)} = 1$$

则对任意 $\epsilon > 0$ 存在 I 使得

$$\frac{m(I) - m(F\cap I)}{m(I)} \leq \epsilon$$

即

$$m(E\cap I) \leq \epsilon m(I)$$

与题目条件矛盾。

故对任意 $y \in F$,y 不是 F 的 Lebesgue 密度点。这与推论 1.5 矛盾。从而 $m(F) = 0$，即 $m(E) = 1$。