32. 见习题课4.

33.

由Hint 设 $m_*(N^c) = 1-2\varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$

由 P13 observation 3，存在开集 O s.t. $m(O) < 1-\varepsilon$

令 $U = [0,1] \cap O$ 可测且满足 $N^c \subseteq U \subseteq [0,1]$，$m(U) \le m(O) < 1-\varepsilon$

令 $E = [0,1] \setminus U$，是 N 的可测子集，比 ε 大

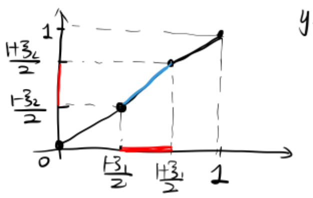
与 32(a) 矛盾！

34

$\cdot\ C_1$ from $\bigcap_{k=0}^{\infty} C_{1,k}$ 表达 $\qquad C_{1,1}^c = \left(\frac{1-\xi_1}{2}, \frac{1+\xi_1}{2}\right)$

$C_2 = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_{2,k}. \qquad C_{2,1}^c = \left(\frac{1-\xi_2}{2}, \frac{1+\xi_2}{2}\right).$

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \text{线性} & x \in \left(0, \frac{1-\xi_1}{2}\right) \\ \frac{1-\xi_2}{2} & x = \frac{1-\xi_1}{2} \\ \text{线性} & x \in \left(\frac{1-\xi_1}{2}, \frac{1+\xi_1}{2}\right) \\ \frac{1+\xi_2}{2} & x = \frac{1+\xi_1}{2} \\ \text{线性} & x \in \left(\frac{1+\xi_1}{2}, 1\right) \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



$y = F_1(x) \quad x \in [0,1].$

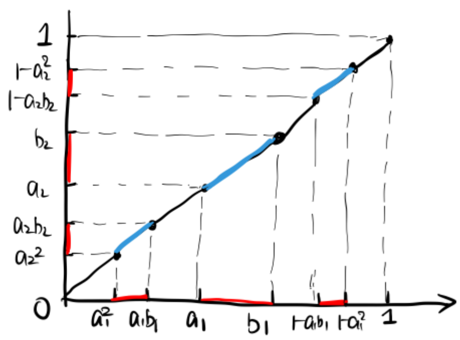
$F_2(x)$

$a_1 = \frac{1-\xi_1}{2}$

$b_1 = \frac{1+\xi_1}{2}$

$a_2 = \frac{1-\xi_2}{2}$

$b_2 = \frac{1+\xi_2}{2}$



$\Rightarrow \quad |F_{n+1}(x) - F_n(x)| \le \left(\frac{1-\xi_2}{2}\right)^n \quad \left(\text{即 } \frac{|C_n|}{2^n}\right).$

$\Rightarrow \quad F_n$ 一致收敛于一连续函数 F.

则验证 F 严格增和满射即可.

只需分别考察 C_1, C_1^c $\quad C_2, C_2^c$ 上点即可.

35.

设 C_1, C_2 为类 Cantor 集，$m(C_1) > 0 \quad m(C_2) = 0$

存在 $N \subset C_1$，N 不可测

由 1.34 定义 $F: C_1 \to C_2$

$\because \Phi(N) \subset \Phi(C_1)$

$\therefore \Phi(N)$为零测集.

$f = \chi_{\Phi(N)}$ 可测且 $[f\circ\Phi = 1] = N$ 不可测

$\therefore f\circ\Phi$ 不可测

另一方面. 若 $\Phi(N)$ 为 Borel 集，则 $\Phi^{-1}(\Phi(N))$ 为可测集

$\because \Phi$ 为双射.

$N = \Phi^{-1}(\Phi(N))$ 不可测

$\therefore \Phi(N)$ 为非 Borel 可测集

另，Φ 连续.