Exercise 19:

(a).

设 E 为 $\mathbb{R}$ 上的零测集。对任意 $\epsilon > 0$，由 f 为绝对连续函数，存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $\sum |b_j - a_j| < \delta$，$\sum |f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon$。

当 E 为零测集，存在开集 U 使得 $E \subset U, m(U) < \delta$，$\mathbb{R}$ 上的任意开集可写为可数个开区间之并

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j), \quad m(U) = \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_i) < \delta$$

对开区间 (a_j, b_j)，设 $m_j, M_j \in [a_j, b_j]$ 满足

$$f(m_j) = \min_{x \in [a_j, b_j]} f(x)$$

$$f(M_j) = \max_{x \in [a_j, b_j]} f(x)$$

从而

$$f(U) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}[f(m_j), f(M_j)]$$

而 $|m_j - M_j| \leq |a_j - b_j|$, 故 $\sum_j |m_j - M_j| \leq \sum_j |a_j - b_j| < \delta$，由绝对连续性

$$\sum_j |f(m_j) - f(M_j)| < \epsilon$$

故

$$m(f(U)) < \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知 $m(f(E)) = 0$，即绝对连续函数 f 把零测集映到零测集。

(b).

对任意可测集 E，可将 E 写为 $E = F \cup N$。其中 F 为 F_σ 集，N 为零测集。则 $f(E) = f(F) \cup f(N)$。

由 $\mathbb{R}$ 上的闭集为 $\sigma-$ 紧的，F 为 $\sigma-$ 紧集。而 f 连续，故 $f(F)$ 为为 $\sigma-$ 紧的，故为 F_σ 集。从而 $f(E)$ 为 F_σ 集 $f(F)$ 与零测集 $f(N)$ 之并，故为可测集。

综上，f 把可测集映到可测集。

Exercise 20:

(a).

令

$$F(x) = \int_a^x \delta_C(x)dx$$

其中 C 为 $[a, b]$ 上有正测度的类 $Cantor$ 集 (第一章习题 4)，$\delta_C(x)$ 为 x 点到 C 的距离。

由习题 9，F' 在 C 上几乎处处存在，$F'(x) = 0$ 对几乎所有 $x \in C$ 成立。对任意 $a \leq x < y \leq b$, 由 C 中不包含区间，故存在区间 $I \subset [x, y], I \subset C^C$。从而

$$\int_I \delta_C(x)dx > 0$$

即 $F(x) < F(y)$，F 为严格单调递增函数，满足题目要求。
(b).
令 F 为 (a). 中的

$$F(x) = \int_a^x \delta_C(x)dx$$

由 F 单增且绝对连续，F 把不相交的开区间映到不相交的开区间。令 $U = [a,b] \setminus C$，则 U 为开集，可写为可数不相交的开区间之并

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)$$

则

$$F(U) = \bigcup_{j=1}^{\infty}(F(a_j), F(b_j))$$

$$m(F(U)) = \sum_{j=1}^{\infty} F(b_j) - F(a_j)$$

当 $x \in C, \delta(x) = 0$, 故 $\int_C \delta_C(x)dx = 0$

$$\begin{aligned} B - A &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b \delta_C(x)dx \\ &= \int_U \delta_C(x)dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j) - F(a_j)) \end{aligned}$$

即 $m(F(U)) = m(F([a,b]))$，故 $m(F(C)) = 0$。对任意 $S \subset C, m(F(S)) = 0$。而 $m(C) > 0$，由 Ex.32.(b).Ch1，存在 C 的不可测子集 S 满足 $E = F(S), m(E) = 0, F^{-1}(E) = S$ 不可测。
(c).
令

$$A_n = F^{-1}(E) \cap \{F'(x) > \frac{1}{n}\}$$

若要证明 $F^{-1}(E) \cap \{F'(x) > 0\}$ 可测，只需证明 A_n 可测对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立。
当 O 为开集，O 可写为不相交的可数个开区间之并，而 F 单增且绝对连续，故 $F^{-1}(O)$ 为开集。故有

$$m(O) = \int_{F^{-1}(O)} F'(x)dx$$

由 E 为可测集，E 可写为 $E = G \setminus Z$，其中 $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ 为 G_δ 集，G_i 为开集,Z 为零测集。故

对 $\forall\epsilon>0,\exists$ 开集 $O\ s.t. Z\subset O, m(O)<\epsilon$。从而

$$\begin{aligned}\epsilon &> m(O)\\ &=\int_{F^{-1}(O)}F'(x)dx\\ &\geq \int_{F^{-1}(O)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\}}F'(x)dx\\ &\geq \frac{1}{n}m(F^{-1}(Z)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})\end{aligned}$$

即

$$m(F^{-1}(Z)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})<n\epsilon$$

对任意 $\epsilon>0$ 成立。故

$$m(F^{-1}(Z)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})=0$$

现对开集 $G_i, F^{-1}(G_i)$ 为开集。由 F' 可积，F' 可测，故 $\{F'(x)>\frac{1}{n}\}$ 为可测集，从而 $F^{-1}(G_i)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\}$ 为可测集。

由此

$$A_n=\bigcap_{i=1}^{\infty}((F^{-1}(G_i)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})\setminus(F^{-1}(Z))\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})$$

为可测集，进而 $F^{-1}(E)\cap\{F'(x)>0\}$ 可测。

Exercise 21:

(a).

不妨设 $f>0$，对任意 $a>0$，

$$\begin{aligned}\{f(F(x))F'(x)>a\}&=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\{F'>r_k\}\cap\{f(F(x))>\frac{a}{r_k}\})\\ &=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{F'>r_k, F(x)\in f^{-1}((\frac{a}{r_k},+\infty))\}\end{aligned}$$

由 f 为可测函数，$f^{-1}((\frac{a}{r_k},+\infty))$ 为可测集。由 Ex.20(c).Ch3，$\{F'>r_k, F(x)\in f^{-1}((\frac{a}{r_k},+\infty))\}$ 为可测集，从而 $\{f(F(x))F'(x)>a\}$ 为可测集，即 $f(F(x))F'(x)$ 为可测函数。

(b).

依旧不妨设 $f>0$。当 $f\in L^1[A,B]$，f 可以由递增的简单函数列 $\{\phi_k\}$ 逼近，且 $0\leq\phi_k\leq f$。由单调收敛定理，可以将问题转化为证明对任意 [A,B] 上的可测集 E

$$\int_A^B\chi_E(y)dy=\int_a^b\chi_E(F(x))F'(x)dx$$

当 O 为开集

$$m(O)=\int_A^B\chi_O(y)dy=\int_{F^{-1}(O)}F'(x)dx=\int_a^b\chi_O(F(x))F'(x)dx$$

即此式对所有开集成立。

当 Z 为零测集，由 Ex.20(c).Ch3

$$\int_A^B \chi_Z(y)dy = 0 = \int_a^b \chi_Z(F(x))F'(x)dx$$

故对任意此式零测集也成立。现任意可测集可表示为一个 G_δ 集除去一个零测集，即 $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \setminus Z$。

$$\begin{aligned}
\int_A^B \chi_E(y)dy &= \int_A^B \chi_{(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i \setminus Z)}(y)dy \\
&= \int_A^B \chi_{(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i)}(y)dy - \int_A^B \chi_Z(y)dy \\
&= \int_a^b \chi_{(\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i)}(F(x))F'(x)dx - \int_a^b \chi_Z(F(x))F'(x)dx \\
&= \int_a^b \chi_E(F(x))F'(x)dx
\end{aligned}$$

即此式对任意 [A,B] 上可测集成立。

综上，对任意 $f \in L^1[A, B]$

$$\int_A^B f(y)dy = \int_a^b f(F(x))F'(x)dx$$

Exercise 23:

(a).

$$D^+F(x) = \limsup_{h\to 0, h>0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geq 0$$

若 $F(b) < F(a)$，取

$$G_\epsilon(x) = F(x) - F(a) + \epsilon(x - a)$$

当 ϵ 充分小时，由 $b - a > 0, \ F(b) - F(a) < 0$

$$G_\epsilon(b) < 0$$

设 $x_0 \in [a, b)$ 为使得该区间中的最大的 x 满足 $G_\epsilon(x) \geq 0$ 的数。故当 $x \in (x_0, b)$ 时

$$G_\epsilon(x) < 0$$

$$\begin{aligned}
D^+G_\epsilon(x_0) &= \limsup_{h\to 0, h>0} \frac{G_\epsilon(x+h) - G_\epsilon(x)}{h} \\
&= \limsup_{h\to 0, h>0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0) + \epsilon h}{h} \\
&= D^+F(x_0) + \epsilon \\
&> 0
\end{aligned}$$

而对 $\forall h > 0, x_0 + h \in (x_0, b)$

$$\begin{cases} G_\epsilon(x_0+h) = F(x_0+h) - F(a) + \epsilon(x_0+h-a) < 0 \\ G_\epsilon(x_0) = F(x_0) - F(a) + \epsilon(x_0 - a) \geq 0 \end{cases}$$

从而有

$$F(x_0) \geq 0 > F(x_0+h) + \epsilon h$$

产生矛盾。从而 $F(b) \geq F(a)$。

现对任意 $[c,d] \subset [a,b]$，以区间 $[c,d]$ 代替 $[a,b]$ 重复上述过程能得到 $F(d) \geq F(c)$，从而 F 在 $[a,b]$ 上递增。

(b).

当 $F'(x)$ 对任意 $x \in (a,b)$ 存在，则 $D^+F(x) = F'(x)$。由 (a). 知 $Mx - F(x)$, $Mx + F(x)$ 在 (a,b) 上递增。现不妨设 $x < y$

$$\begin{cases} Mx - F(x) \leq My - F(y) \\ Mx + F(x) \leq My + F(y) \end{cases}$$

得到

$$|F(x) - F(y)| \leq M(y-x) = M|x-y|$$

从此式亦可得到 $F(x)$ 绝对连续。