实分析答案

Chapter 2. Integration Theory

Exercises

Exercise 1:
通过如下方式构造 $F_j^*, j = 1, 2, ..., N$。
将 j 写为 n 位二进制形式，对 $k = 1, 2, ..., N$, 取

$$G_k = \begin{cases} F_k, j_k = 1 \\ F_k^c, j_k = 0 \end{cases}$$

令

$$F_j^* = \bigcap_{k=1}^{n} G_k.$$

从而得到了 $F_j^*, j = 1, 2, ..., N$，下证这样的 F_j^* 满足条件。易知 $\bigcup_{j=1}^N F_j^* \subset \bigcup_{k=1}^n F_k$，而对任意 $x \in \bigcup_{k=1}^n F_j$，存在 k 使得 $x \in F_k$，对 x 定义 n 元组 $(x_1, ..., x_n)$ 与之对应, 其满足

$$x_i = \begin{cases} 1, x \in F_i \\ 0, x \notin F_i \end{cases}$$

则以 $x_1...x_n$ 为二进制表示的 j 对应的 F_j^* 满足 $x \in F_j^*$。由 x 的任意性知 $\bigcup_{j=1}^N F_j^* \supset \bigcup_{k=1}^n F_k$。故 $\bigcup_{j=1}^N F_j^* = \bigcup_{k=1}^n F_k$。同时由此可见 $F_k = \bigcup_{F_j^* \subset F_k} F_j^*$。
由 F_j^* 的构造过程，若 $j_1 \neq j_2$ 则二者二进制表示不同，即存在 m 使得二者的 n 位二进制表示中第 m 位不同，从而 $F_{j_1}^*, F_{j_2}^*$ 分属于 F_m, F_m^c。此即 $F_j^*, j = 1, 2, ..., N$ 互不相交。

Exercise 2:
由定理 2.4 有，紧支集连续函数在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 上稠密，从而对任意 $\epsilon > 0$，存在 $g \in C_C(\mathbb{R}^d)$ 使得 $\|f - g\|_{L^1} < \epsilon/3$
由 $\delta \to 1$，存在 λ 使得当 $|\delta - 1| < \lambda$ 时 $\frac{1}{\delta^d} < \frac{3}{2}$。设 $K = supp(g)$，由 $g \in C_C(\mathbb{R}^d)$ 知存在 M 使得 $K \subset \{|x| \leq M\}$。设 $B = \{|x| \leq M + 1\}$，B 为紧集，从而 g 在 B 上一致连续。因此存在 $\lambda' > 0, \lambda' < 1$, 使得当 $|x - y| \leq \lambda'$ 时，$|g(x) - g(y)| \leq \frac{\epsilon}{6m(B)}$。现取 δ 充分接近 1 使得

$|\delta-1|<min(\lambda,\frac{\lambda'}{M+1})$。现有

$$\begin{aligned}\|f(\delta x)-f(x)\| &= \int|f(\delta x)-f(x)| \\ &\le \int|f(\delta x)-g(\delta x)|+\int|g(\delta x)-g(x)|+\int|g(x)-f(x)| \\ &= I_1+I_2+I_3\end{aligned} \tag{1}$$

由书 73 页积分的性质知，对 I_1 有

$$\int|f(\delta x)-g(\delta x)|=\frac{1}{\delta^d}\|f-g\|\le\frac{3}{2}\frac{\epsilon}{3}=\frac{\epsilon}{2}$$

且有

$$I_3=\int|g(x)-f(x)|=\|f-g\|\le\frac{\epsilon}{3}$$

对 I_2：
当 $x\notin B,|x|>M+1$，

$$|\delta x|=|\delta||x|\ge(1-\frac{\lambda'}{M+1})|x|>M+1-\lambda'>M$$

从而 $\delta x\notin K,g(\delta x)=g(x)=0$；
当 $x\in B,g(x)\neq0,x\in K$

$$|\delta x|\le(1+\frac{\lambda'}{M+1})|x|<(1+\frac{\lambda'}{M+1})M<M+1$$

故 $\delta x\in B$, 由 $|\delta-1|<min(\lambda,\frac{\lambda'}{M+1}),|\delta x-x|<\lambda'$，由 g 的一致连续性，$|g(\delta x)-g(x)|<\frac{\epsilon}{6m(B)}$。
当 $x\in B,g(\delta x)\neq0,\delta x\in K\subset B$，仍由一致连续性有 $|g(\delta x)-g(x)|<\frac{\epsilon}{6m(B)}$。从而

$$I_2=\int|g(\delta x)-g(x)|<m(B)\frac{\epsilon}{6m(B)}<\frac{\epsilon}{6}$$

综上

$$\|f(\delta x)-f(x)\|_{L^1}<\epsilon\ \ (\delta\to1)$$

Exercise 3:
不妨设 I=(a,b], 这对积分结果没有影响。由 I 是长度为 2π 的区间可知 $I=(a,a+2\pi]$。存在 k 使得 $a\in(k\pi,(k+2)\pi]$，$k\in\mathbb{Z}$ 且 k 为奇数。由 f 为以 2π 为周期的周期函数可有

$$\begin{aligned}\int_I f(x)dx=\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{(k+2)\pi}f(x)dx+\int_{(k+2)\pi}^b f(x)dx \\ &= \int_a^{(k+2)\pi}f(x)dx+\int_{k\pi}^a f(x)dx \\ &= \int_{k\pi}^{(k+2)\pi}f(x)dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx\end{aligned}$$

Exercise 4:

不妨设 $f(t) \geq 0$(否则可将 f 写为 $f = f^+ - f^-$ 的形式继续)。设

$$h(x,t) = \frac{f(t)}{t}\chi_{\{0<x\leq t<b\}}$$

则 $h \geq 0$ 且 h 为可测函数。由 Tonelli 定理

$$\int h(x,t)dt = \int_x^b \frac{f(t)}{t}\chi_{\{0<x\leq b\}}dt$$

为 $\mathbb{R}$ 上的可测函数，且与 $g(x), 0 < x \leq b$ 相等。同时

$$\begin{aligned}\int_0^b g(x)dx &= \int_0^b \int_x^b \frac{f(t)}{t}\chi_{\{0<x\leq b\}}dtdx \\ &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} h(x,t) \\ &= \int_0^b (\int_0^t h(x,t)dx)dt \\ &= \int_0^b f(t)dt \\ &< \infty\end{aligned}$$

从而 g(x) 在 [0,b] 上可积且有

$$\int_0^b g(x)dx = \int_0^b f(t)dt$$

Exercise 5:

(a).

设 $x, y \in R$，由 $\delta(x) = d(x,F) = inf\{|x-y| : y \in F\}$ 知对任意 $\epsilon > 0$，存在 $z \in \mathbb{R}, z \in F$，使得 $|y-z| < \delta(y) + \epsilon$。从而

$$\delta(x) = d(x,F) = inf\{|x-w| : w \in F\} \leq |x-z| \leq |x-y| + |y-z| < |x-y| + \delta(y) + \epsilon$$

同理有

$$\delta(y) < |y-x| + \delta(x) + \epsilon$$

于是 $|\delta(x) - \delta(y)| < |x-y| + \epsilon$ 对任意 $\epsilon > 0$ 成立，故有 $|\delta(x) - \delta(y)| \leq |x-y|$。从而 δ 连续。

(b).

当 $x \notin F$，由 F 为闭集 $\delta(x)0$，令 $\lambda = \delta(x) > 0$, 则对 $y \in B(x, \frac{\lambda}{2}), |x-y| < \frac{\lambda}{2}, |\delta(x) - \delta(y)| \leq$

$|x-y|<\frac{\lambda}{2},\delta(y)>\frac{\lambda}{2}$。故有

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}dx \\
&\geq \int_{x-\frac{\lambda}{2}}^{x+\frac{\lambda}{2}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}dy \\
&> \int_{x-\frac{\lambda}{2}}^{x+\frac{\lambda}{2}} \frac{\frac{\lambda}{2}}{|x-y|^2}dy \\
&= \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \frac{\frac{\lambda}{2}}{|y|^2}dy \\
&= \infty
\end{aligned}$$

从而 $I(x)=\infty$。

(c).

当 $y\notin F$，

$$\int_F \frac{1}{|x-y|^2}dx \leq 2\int_{\delta(y)}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \frac{2}{\delta(y)}$$

而由 Tonelli 定理

$$\begin{aligned}
\int_F I(x)dx &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\chi_F(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\chi_F(x)dx)dy \\
&= \int_{F^c} \delta(y)(\int_F \frac{1}{|x-y|^2}dx)dy \\
&\leq \int_{F^c} \delta(y)\frac{2}{\delta(y)}dy \\
&= 2m(F^c) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

从而对几乎所有 $x\in F, I(x)<\infty$。

Exercise 6:

(a).

令 $f_1(x)$ 满足

$$f(x)=\begin{cases} 2^{3n+4}d(x,[n,n+\frac{1}{2^{2n+1}}]^c) & (n\leq x\leq n+\frac{1}{2^{2n+1}}, n\in Z) \\ 0 & else \end{cases}$$

从而 f_1 在 $[n,n+\frac{1}{2^{2n+1}}]$ 上的曲线为以 2^{n+2} 为最大值，以 $\frac{1}{2^{2n+1}}$ 为底边长度的三角形，其余部分为 0。故有

$$\int |f_1| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$$

但 $\lim sup f_1(x) = \infty$。令 $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$。则当 $x \in (n, n+1), n \geq 1, f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 分别有两个交点在三角形的左侧边和右侧边，记左，右侧边的交点分别为 x_n, y_n，$f_1(x_n) = f_2(x_n), f_1(y_n) = f_2(y_n)$。现考虑 f(x) 满足：

当 $x \geq 0$ 时：

$$f(x) = \begin{cases} f_2(x_1) & x \in [0, x_1] \\ f_1(x) & x \in (x_n, y_n], n \geq 1, n \in \mathbb{Z} \\ f_2(x) & x \in (y_n, x_{n+1}], n \geq 1, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

当 $x < 0$ 时，$f(x) = f(-x)$。故 f 满足

$$\begin{aligned} \int |f| &= 2\int_0^{\infty} |f| \\ &= 2(\int_0^1 |f| + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} |f|) \\ &\leq 2(M + \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} |f_1| + \int_1^{\infty} |f_2|) \\ &\leq 2(M + 2 + 1) \\ &< \infty \end{aligned}$$

从而 f 为正连续可积函数且 $\lim sup\ f(x) = \infty$。

(b).

若不然：$\lim_{|x|\to\infty} f(x) > 0$。存在 $\epsilon > 0, \epsilon < \lim sup\ f(x)$, 存在 x_1 使得 $|f(x_1)| \geq \epsilon$。

由 f 的一致连续性, 存在 δ' 使得当 $|x - y| < \delta'$ 时 $|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$。令 $\delta = min\{\delta', \frac{1}{2}\}$，则当 $y \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ 时，$f(y) \geq \frac{\epsilon}{2}$。由 $\lim_{|x|\to\infty} f(x) > 0$，存在 $x_2 > x_1 + 1$ 使得 $|f(x_2)| > \epsilon$，则当 $x \in (x_2 - \delta, x_2 + \delta)$ 时，$f(x) > \frac{\epsilon}{2}$。如此进行下去...

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx \geq \frac{\epsilon}{2} m(\{x : |f(x)| \geq \frac{\epsilon}{2}\}) \geq \frac{\epsilon}{2} 2\delta n = \infty$$

这与 f 可积矛盾。故 $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$。

Exercise 7:

不妨设 $f(x) \geq 0$。(否则 $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, 设 $\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : y = f_1(x)\}, \Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : y = f_2(x)\}$, 则 $\Gamma \subset \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2, m^*(\Gamma) \leq m^*(\Gamma_1) + m^*(\Gamma_2) = 0$)

令 $\mathscr{A}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}, \mathscr{A}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$, 由推论 3.8,$\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2$ 均为可测集。从而 $\Gamma = \mathscr{A}_1 \bigcup \mathscr{A}_2^c$ 为可测集。

对任意 $x \in \mathbb{R}^d, \Gamma_x$ 为闭集，从而 $m(\Gamma_x)$ 可测且 $m(\Gamma_x) = 0$（推论 3.3）

$$m(\Gamma) = \int \chi_\Gamma(x, y)dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} m(\Gamma_x)dx = 0$$

Exercise 8:

由命题 1.12(b), 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $m(E) < \delta$，E 为 R 上任意可测集

$$\int_E |f| < \epsilon$$

从而对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, 当 $|x-y|<\delta, |F(x)-F(y)|=|\int_y^x f(t)dt|\le\int_y^x|f(t)|dt<\epsilon$
故 F(x) 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续。

Exercise 9:

$$m(E_\alpha)=\int\chi_{E_\alpha}=\int_{E_\alpha}\chi_{E_\alpha}<\frac{1}{\alpha}\int_{E_\alpha}f\chi_{E_\alpha}<\frac{1}{\alpha}\int f$$

Exercise 10:
(1). 若 f 可积：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^k m(F_k)<\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{F_k}f(x)dx=\int f(x)dx<\infty$$

若 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^k m(F_k)<\infty$, 则

$$\int f(x)dx=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{F_k}f(x)dx<\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{F_k}2^{k+1}dx=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int 2^k\chi_{F_k}dx=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^k m(F_k)<\infty$$

从而 f 可积当且仅当 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^k m(F_k)<\infty$
(2). 若 f 可积：
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^k m(F_k)<\infty$

$$m(E_{2^k})=\sum_{j=k}^{\infty}m(F_j)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^k m(E_{2^k})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^k\sum_{j=k}^{\infty}m(F_j)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{k=j}2^k m(F_j)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{j+1}m(F_j)=2\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^j m(F_j)<\infty$$

若 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^k m(E_{2^k})<\infty$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^k m(F_k)\le\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^k m(E_{2^k})<\infty$$

故 f 可积。
从而 f 可积当且仅当 $\sum_{k=-\infty}^{\infty}2^k m(E_{2^k})<\infty$
(3).
对 f 有：
若 $f(x)>2^k, |x|<1, \frac{1}{|x|^a}>2^k, |x|<2^{-\frac{k}{a}}, m(E_{2^k})=2^{-\frac{kd}{a}}m(B_1(0))$

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^k m(E_{2^k})=\sum_{k=0}^{\infty}2^k 2^{-\frac{kd}{a}}m(B_1(0))=m(B_1(0))\sum_{k=0}^{\infty}2^{k(1-\frac{d}{a})}$$

则 $\sum_{k=0}^{\infty}2^k m(E_{2^k})<\infty$ 当且仅当 $1-\frac{d}{a}<0, a<d$。即 f 可积当且仅当 a<d。
对 g 有：

当 $k<0,|x|>1$ 时，若 $2^k<g(x),2^k<\frac{1}{|x|^b},|x|<2^{-\frac{k}{b}},m(E_{2^k})=m(B_1(0))(2^{-\frac{kd}{b}}-1)$

$$\sum 2^k m(E_{2^k})=\sum_{-\infty}^{-1}2^k m(B_1(0))(2^{-\frac{kd}{b}}-1)=m(B_1(0))(\sum_{-\infty}^{-1}(2^{k-\frac{kd}{b}})-1)=m(B_1(0))(\sum_{-\infty}^{-1}(2^{k(1-\frac{d}{b})})-1)$$

则 $\sum_{k=0}^{\infty}2^k m(E_{2^k})<\infty$ 当且仅当 $1-\frac{d}{b}>0,b>d$。即 g 可积当且仅当 b>d。

Exercise 11:

(1).$f(x)\geq 0$

若 $f(x)\geq 0,a.e.x$ 不成立，则存在 $F=\{x:f(x)<0\},m(F)>0$。故

$$F=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x:f(x)<-\frac{1}{n}\},0<m(F)\leq\sum_{n=1}^{\infty}m(\{x:f(x)<-\frac{1}{n}\})$$

从而至少存在一个 n 使得 $m(\{x:f(x)<-\frac{1}{n}\})>0$ 成立，设为 E_n

$$\int_{E_n}f(x)dx\leq\int_{E_n}-\frac{1}{n}dx=-\frac{1}{n}m(E_n)<0$$

与题设矛盾，故 $f(x)\geq 0,a.e.x$。

(2). 若 $\int_E f(x)dx=0$ 对任意可测集 E 成立：

由 (1).$\int_E f(x)dx\geq 0$ 对任意可测集 E 成立, 故 $f(x)\geq 0,a.e.x$。$\int_E -f(x)dx\geq 0$ 对任意可测集 E 成立, 故 $-f(x)\geq 0,a.e.x,f(x)\leq 0,a.e.x$，从而 $f(x)=0,a.e.x$。

Exercise 12:

(1). 构造 $\mathbb{R}^d$ 中的可测集列 E_n 使得 $m(E_n)\to 0$ 且任意 x 都在无穷多个 E_n 中。

令 $N_1,N_2,...$ 满足

$$\begin{cases}N_0=0\\1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{N_1}>10\\\frac{1}{N_1+1}+\frac{1}{N_1+2}+...+\frac{1}{N_2}>100\\\frac{1}{N_2+1}+\frac{1}{N_2+2}+...+\frac{1}{N_3}>1000\\......\end{cases}$$

令 B_{N_k+1} 为中心在原点的体积为 $\frac{1}{N_k+1}$ 的立方体。对 k，令 $B_j,N_k+1<j\leq N_{k+1}$ 为中心在原点的满足 $|B_j|=|B_{j-1}|+\frac{1}{j}$ 的立方体。令 $E_{N_k+1}=B_{N_k+1},E_j=B_j\backslash B_{j-1}$。

(2). $m(E_n)=\frac{1}{n},m(E_n)\to 0$, 对所有 k

$$\bigcup_{j=N_k+1}^{N_{k+1}}E_j$$

表示以原点为中心的体积大于 10^k 的立方体。对任意 x，这些立方体总能包含 x。即存在 K 使得

$$k>K,x\in\bigcup_{j=N_k+1}^{N_{k+1}}E_j$$

(3). 令 $f_n(x)dx = \chi_{E_n}(x), f(x) = 0$

$$\int f_n(x)dx = \frac{1}{n}, \|f_n - f\| = \int |f_n - f| = \int f_n \to 0 \quad f_n \xrightarrow{L^1} f$$

但由 (2) 知对任意 x, 有无穷多个 n 使得 $f_n(x) = 1$, 故 $f_n(x) \nrightarrow f(x)$。

Exercise 13:

在 $\mathbb{R}^2$ 中取 $A = \{0\} \times [0,1], B = \mathscr{N} \times \{0\}$，则 $m(A) = m(B) = 0$,A 与 B 均为可测集。但 $A + B = [0,1] \times \mathscr{N}$ 不可测 (82 页)。

Exercise 14:

(a).

当 $d = 2$ 时，设 $f(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}, x \in [-1,1]$，设 $\mathscr{A}$ 表示单位半圆（x 轴上方部分），则 $v_2 = 2m(\mathscr{A})$, 由推论 3.8，

$$m(\mathscr{A}) = \int_{-1}^{1} f(x)dx$$

故

$$v_2 = 2\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \pi$$

(b).

令 g(x) 表示 d 维单位球面 x 坐标确定时对应的 $d-1$ 维球体积（面积）值，则 $g(x) = v_{d-1}(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}}$

$$v_d = 2\int_0^1 v_{d-1}(1-x^2)^{\frac{d-1}{2}} dx$$

(c). 由 (a). 知

$$v_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}$$

对 $d = 2$ 成立。

设此式对 $d \le n-1$ 成立，当 $d = n$ 时,

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{d-1}{2}} dx &= \int_0^1 (1-t)^{\frac{d-1}{2}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} (1-t)^{\frac{d-1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2} B(\frac{1}{2}, \frac{d+1}{2})\end{aligned}$$

其中 B(a,b) 为 Beta 函数。现有:

$$
\begin{aligned}
v_n &= 2\int_0^1 v_{n-1}(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}dx \\
&= v_{n-1}B(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}) \\
&= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}B(\frac{1}{2},\frac{n+1}{2}) \\
&= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}
\end{aligned}
$$

即此式对 $d=n$ 也成立。
综上,

$$
v_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}
$$

Exercise 15:
对反常黎曼积分有:

$$
\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2
$$

由 $(0,1]=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]$, 对 Lebesgue 积分有

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} fdx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} fdx \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}]} fdx \\
&= \lim_{N\to\infty}\int_{\frac{1}{N+1}}^{1} fdx \\
&= \lim_{a\to 0}\int_a^1 fdx \\
&= 2
\end{aligned}
$$

由积分的平移不变性,$\int_{\mathbb{R}} f(x-r_n)dx$ 仍为 2。由 $f\geq 0$, 部分和单调递增,故由单调收敛定理:

$$
\int Fdx = \sum_{n=1}^{\infty}\int 2^{-n}f(x-r_n)dx = \sum_{n=1}^{\infty}2^{1-n} = 2
$$

从而 F 可积。由此 F 几乎处处有限。
设 $\tilde{F}=F\ a.e.$,I 为任意一个区间,r_N 为 I 中的一个有理数。
对任意 $M>0$, 在 $I_{N,M}=(r_N,r_N+\frac{1}{M^2})$ 上,$f(x-r_N)>M, m(I\bigcap I_{N,M})>0$,从而在任意区间内,都存在正测度的区间使得 $\tilde{F}$ 大于任意大的正整数,故无界。

Exercise 16:

$$f^{\delta}(x)=f(\delta x)=f(\delta_1 x_1,...,\delta_d x_d)$$

由 Ex.7 Ch1,

$$m(\delta E)=|\delta|m(E)=\delta_1...\delta_d m(E)$$

(1).

设 $\phi(x)$ 为一简单函数，有形式 $\phi=\sum a_k\chi_{E_k}$, 则

$$\int\phi^{\delta}dx=\sum a_k m(\delta^{-1}E_k)=\prod_{i=1}^{d}|\delta i|^{-1}\sum a_k m(E_k)=\prod_{i=1}^{d}|\delta i|^{-1}\int\phi dx$$

即结论对简单函数成立。

(2).

设 $f\in BSF$, 则存在 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}\to f\ a.e.$

$$\int f^{\delta}dx=\lim_{n\to\infty}\int\phi_n^{\delta}dx=\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{d}|\delta i|^{-1}\int\phi_n dx=\prod_{i=1}^{d}|\delta i|^{-1}\int f dx$$

结论成立。

(3).

当 f 是非负函数：

$$\int f^{\delta}dx=\sup_{g}\int g^{\delta}dx$$

其中 g 取所有满足 $0\leq g\leq f, g\in BSF$ 的可测函数。故

$$\int f^{\delta}dx=\sup_{g}\int g^{\delta}dx=\sup_{g}\prod_{i=1}^{d}|\delta i|^{-1}\int g dx=\prod_{i=1}^{d}|\delta i|^{-1}\sup_{g}\int g dx=\prod_{i=1}^{d}|\delta i|^{-1}\int f dx$$

结论成立。

(4).

当 f 为一般 Lebesgue 可积函数, 将 f 写为 $f=f^{+}-f^{-}$：

$$\begin{aligned}\int f^{\delta}dx&=\int {f^{+}}^{\delta}dx-\int {f^{-}}^{\delta}dx\\&=\prod_{i=1}^{d}|\delta i|^{-1}\int f^{+}dx-\prod_{i=1}^{d}|\delta i|^{-1}\int f^{-}dx\\&=\prod_{i=1}^{d}|\delta i|^{-1}\int(f^{+}-f^{-})dx\\&=\prod_{i=1}^{d}|\delta i|^{-1}\int f dx\end{aligned}$$

综上
$$\int_{\mathbb{R}^d} f^\delta(x)dx = |\delta_1|^{-1}...|\delta_d|^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$$

Exercise 17:

(a).

对任意 x，当 $x \le 0$ 时，$f(x,y) = f_x(y) = 0$, 当 $x \ge 0$ 时，存在 n 使得 $n \le x < n+1$,

$$f(x,y) = f_x(y) = \begin{cases} -a_n & n+1 \le y < n+2 \\ a_n & n \le y < n+1 \\ 0 & else \end{cases}$$

故 $\int |f_x(y)|dy = 0$ 或 $2|a_n| < \infty, f_x(y)$ 可积。且 $\int f_x(y) = 0, \int(\int f(x,y)dy)dx = 0$

对任意 y，当 $y \ge 1, n+1 \le y < n+2, \int |f_y(x)|dx = |a_{n+1}| + |a_n| < \infty$, 当 $0 \le y < 1, \int |f_y(x)|dx = |a_0| < \infty$, 当 $y < 0, \int |f_y(x)|dx = 0$。故 $f_y(x)$ 可积。

(b).

令 $g(y) = \int f^y(x)dx$, 则

$$g(y) = \begin{cases} a_0 = b_0, 0 \le y < 1 \\ a_n - a_{n-1} = b_n, n \le y < n+1 \end{cases}$$

故 $\int_0^\infty |g(y)|dy = \sum_{k=0}^\infty b_k = s < \infty$, 即 $g(y)$ 在 $(0,\infty)$ 上可积。

$$\int(\int f(x,y)dx)dy = \int g(y)dy = \sum_{k=0}^\infty b_k = s$$

(c).

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(x,y)|dxdy = \sum_{n=0}^\infty 2a_n \to \infty(\lim_{n\to\infty} a_n = s)$$

Exercise 18:

令 $g(x,y) = |f(x) - f(y)|$,g 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上可积。则由 Fubini 定理：

$g^y(x)$ 对几乎所有 y 可积。选择 y 使得 $g^y(x)$ 可积，则

$$|f(x)| \le |f(y)| + |f(x) - f(y)| = |f(y)| + g^y(x)$$

故
$$\int_0^1 |f(x)|dx \le |f(y)| + \int_0^1 g(x,y)dx < \infty$$

从而 f(x) 在 [0,1] 上可积。

Exercise 19:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty m(E_\alpha)d\alpha &= \int_0^\infty (\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{E_\alpha} dx) d\alpha \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty \chi_{E_\alpha} d\alpha dx (Tonelli) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty \chi_{\{|f(x)|>\alpha\}} d\alpha dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty \chi_{\{\alpha<|f(x)|\}} d\alpha dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx\end{aligned}$$

Exercise 20:

记 $\mathscr{C} = \{E : E \subset \mathbb{R}^2, E^y \subset \mathbb{R},$ 对任意 y, E^y为 Borel 集$\}$

(1). 对任意开集 $E, E \subset \mathscr{C}$。

由 E 为 $\mathbb{R}^2$ 上开集，对任意 $\mathbf{x} = (x, y) \in E$ 存在 $r > 0$ 使得 $B_2(\mathbf{x}, r) \subset E$, 从而 $B_2^y(\mathbf{x}, r)$ 为 $\mathbb{R}$ 上以 x 为中心，r 为半径的开球。

故对任意 $x \in E^y$, 存在 $r > 0$ 使得 $B_1(x, r) \subset E^y$。从而 E^y 为 $\mathbb{R}$ 上的开集，自然为 Borel 集。故 $E \in \mathscr{C}$。由 E 的任意性知所有开集均在 $\mathscr{C}$ 中。

(2).$\mathscr{C}$ 对可数交封闭。

设 $E_1 \in \mathscr{C}, E_2 \in \mathscr{C}$，故对任意 y,$E_1^y, E_2^y$ 为 Borel 集，从而 $(E_1 \bigcap E_2)^y = E_1^y \bigcap E_2^y$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 集。故 $E_1 \bigcap E_2 \in \mathscr{C}$。

当 $\{E_n\}$ 为一列可数个 $\mathscr{C}$ 中的元素，$(\bigcap E_i)^y = \bigcap E_i^y$ 为 Borel 集，故 $\bigcap E_i \in \mathscr{C}$

(3). 同理，$\mathscr{C}$ 对可数并封闭。

(4).$\mathscr{C}$ 对补运算封闭。

若 $F \subset \mathscr{C}$, 则 F^y 是 R 上的 Borel 集，$(F^c)^y = (F^y)^c$ 为 Borel 集，故 $F^c \in \mathscr{C}$。

综上,$\mathscr{C}$ 为包含所有开集的一个 $\mathbb{R}$ 上的 $\sigma-$ 代数。由 Borel 集的定义 ($\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ 的元素为 Borel 集，其中 $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ 表示包含所有开集的最小 $\sigma-$ 代数)，$\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2} \subset \mathscr{C}$，故 $\mathbb{R}^2$ 上所有 Borel 集均在 $\mathscr{C}$ 中。

从而对 $\mathbb{R}^2$ 上的任意 Borel 集 E，对任意 y，E^y 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel 集。

Exercise 21:

(a).

由命题 3.9, 当 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上的可测函数时，$\tilde{f} = f(x-y)$ 是 $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上的可测函数。从而 $f(x-y)g(y)$ 是 $\mathbb{R}^{2d}$ 上的可测函数。

(b).

由 Tonelli 定理：

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2d}} |f(x-y)g(y)| &= \int\int |f(x-y)g(y)|dxdy \\
&= \int |g(y)|(\int |f(x-y)|dx)dy \\
&= \int \|f\||g(y)|dy \\
&= \|f\|\|g\| \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

从而 $f(x-y)g(y)$ 在 $\mathbb{R}^{2d}$ 上可积。

(c).

(c) 中 f, g 应仍满足 (b) 中可积的条件。

由 (b): $h(x,y) = f(x-y)g(y)$ 为 $\mathbb{R}^{2d}$ 上的可积函数，故由 Fubini 定理：对几乎所有 x，$h_x(y) = h(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积。从而 $f * g$ 对几乎所有 x 良定。

(d).

$$
\begin{aligned}
\int |f * g|dx &= \int |\int f(x-y)g(y)dy|dx \\
&\leq \int\int |f(x-y)||g(y)|dydx \\
&= \int\int |f(x-y)||g(y)|dxdy \quad (Tonelli) \\
&= \int(\int |f(x-y)|dx)|g(y)|dy \\
&= \int \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}|g(y)|dy \\
&= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}
$$

此即 $\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$。当 $f, g \geq 0, |\int f(x-y)g(y)dy| = \int |f(x-y)||g(y)|dy$，从而不等式可取等号。

(e).

当 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上可积：

$$
|\hat{f}(\xi)| = |\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx| \leq |\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}|dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}
$$

从而 $\hat{f}$ 为有界函数。

对任意 $\xi \in \mathbb{R}^d$, 当 $\xi_1 \to \xi, f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi_1} \to f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}$，由控制收敛定理：

$$
\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi_1) - \hat{f}(\xi)| &= |\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi_1}dx - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi_1} - f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}|dx \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

从而 $\hat{f}(\xi)$ 连续。
对任意 ξ:

$$
\begin{aligned}
(f \hat{*} g)(\xi) &= \int (f*g)(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx \\
&= \int (\int f(x-y)g(y)dy)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx \\
&= \int (\int f(x-y)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx)g(y)dy \\
&= \int (\int f(t)e^{-2\pi i(y+t)\cdot\xi}dt)g(y)dy \\
&= \int (\int f(t)e^{-2\pi it\cdot\xi}dt)e^{-2\pi iy\cdot\xi}g(y)dy \\
&= \int (\hat{f}(\xi))e^{-2\pi iy\cdot\xi}g(y)dy \\
&= \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)
\end{aligned}
$$

Exercise 22:

$$
\begin{aligned}
-\hat{f}(\xi) &= -\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi ix\xi}e^{-\pi i}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i(x+\frac{\xi}{2|\xi|^2})\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-\frac{\xi}{2|\xi|^2})e^{-2\pi ix\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-\xi')e^{-2\pi ix\xi}dx
\end{aligned}
$$

故有

$$
\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}[f(x)-f(x-\xi')])e^{-2\pi ix\xi}dx
$$

由命题 2.5. 当 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 时，

$$
\|f(x)-f(x-\xi')\|_{L^1} \to 0, (\xi' \to 0)
$$

从而当 $|\xi| \to \infty$ 时,$\xi' = \frac{1}{2}\frac{\xi}{|\xi|^2} \to 0$

$$
\begin{aligned}
|\hat{f}(\xi)| &= \frac{1}{2}|\int_{\mathbb{R}^d}[f(x)-f(x-\xi')])e^{-2\pi ix\xi}dx| \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|[f(x)-f(x-\xi')])e^{-2\pi ix\xi}|dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)-f(x-\xi')|dx \\
&= \frac{1}{2}\|f(x)-f(x-\xi')\|_{L^1} \\
&\to 0
\end{aligned}
$$

故有 $\hat{f}(\xi) \to 0$。

Exercise 23:

若存在 $I \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 使得 $f * I = f$ 对任意 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 成立。则

$$f \hat{*} I(\xi) = \hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{I}(\xi)$$

由 f 的任意性，$\hat{I}(\xi) = 1$ 对任意 ξ 成立, 但由 Ex.22，当 $|\xi| \to 0.\hat{I}(\xi) \to 0$, 矛盾。故这样的 I 不存在。

Exercise 24:

(a).

由 g 是有界函数，存在 $M > 0$，使得 $|g(x)| < M$ 对任意 $x \in \mathbb{R}^d$ 成立。从而

$$\begin{aligned}
|f * g(x_1) - f * g(x_2)| &= |\int_{\mathbb{R}^d} f(x_1 - y)g(y)dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x_2 - y)g(y)dy| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x_1 - y)g(y) - f(x_2 - y)g(y)|dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x_1 - y) - f(x_2 - y)||g(y)|dy \\
&\leq M \int_{\mathbb{R}^d} |f(x_1 - y) - f(x_2 - y)|dy \\
&\leq M \int_{\mathbb{R}^d} |f(x_1 - y) - f(x_1 - y - (x_1 - x_2))|dy
\end{aligned}$$

由 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$，令 $f_1(x) = f(x_1 - x), h = x_1 - x_2$，则 $f_1(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$，从而

$$|f * g(x_1) - f * g(x_2)| \leq M\|f_1(x) - f_1(x - h)\|_{L^1} = M\|f_1 - f_{1_h}\|_{L^1}$$

由命题 2.5，当 $h \to 0$, 即当 $|x_1 - x_2| \to 0$

$$\|f_1 - f_{1_h}\|_{L^1} \to 0$$

从而

$$|f * g(x_1) - f * g(x_2)| \to 0$$

即 $f * g$ 一致连续。

(b).

对 $\epsilon > 0$，由定理 2.4，紧支集连续函数在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 上稠密。从而存在 $\tilde{f} \in C_C(\mathbb{R}^d)$ 使得 $supp(\tilde{f}) = K$，K 为紧集, 且

$$\|f - \tilde{f}\|_{L^1} \leq \frac{\epsilon}{2M}$$

由 $\tilde{f} \in C_C(\mathbb{R}^d)$，存在 $N > 0$ 使得 $|\tilde{f}| < N$。

$$\begin{aligned}
|f * g(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy| \\
&= |\int_{\mathbb{R}^d} [\tilde{f}(x-y) + (f(x-y) - \tilde{f}(x-y))]g(y)dy| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{f}(x-y)g(y)|dy + \int_{\mathbb{R}_d} |f(x-y) - \tilde{f}(x-y)||g(y)|dy \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq M \int_{\mathbb{R}_d} |f(x-y) - \tilde{f}(x-y)|dy \\
&= M\|f - \tilde{f}\|_{L^1} \\
&\leq M\frac{\epsilon}{2M} \\
&= \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

由 g 可积，存在紧集 F 使得 $\int_{F^c} |g| < \frac{\epsilon}{2N}$。从而存在 $r > 0$ 使得 $K \subset B_r(0), F \subset B_r(0)$。当 $|x| > r$ 时

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{f}(x-y)g(y)|dy \\
&= \int_{x-y\in K} |\tilde{f}(x-y)||g(y)|dy \\
&\leq N \int_{x-y\in K} |g(y)|dy, \quad (\{y : x-y \in K\} \subset F^c) \\
&\leq N \int_{F^c} |g(y)|dy \\
&< N\frac{\epsilon}{2N} \\
&< \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

从而当 $|x| > r$ 时，$|f * g(x)| < I_1 + I_2 < \epsilon$。故当 $|x| \to \infty$,

$$|f * g(x)| \to 0$$

Exercise 25:

(1).

考虑 $K_\delta(x) = e^{-\pi|x|^2/\delta}\delta^{-d/2}, f(x) = \int_0^\infty K_\delta(x)e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}d\delta$。

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx &= \int_{\mathbb{R}^d}|\int_0^\infty K_\delta(x)e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}d\delta|dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty |K_\delta(x)e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}|d\delta dx \\
&= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}|K_\delta(x)e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}|dx d\delta \\
&= \int_0^\infty |e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}|(\int_{\mathbb{R}^d}|K_\delta(x)|dx)d\delta \\
&= \int_0^\infty |e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}|(\int_{\mathbb{R}^d}|e^{-\pi|x|^2/\delta}\delta^{-d/2}|dx)d\delta \\
&= \int_0^\infty |e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}|d\delta \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

从而 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$。

(2).

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}(\int_0^\infty K_\delta(x)e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}d\delta)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty K_\delta(x)e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}e^{-2\pi i x\cdot\xi}d\delta dx \quad (\text{由 Fubini 定理}) \\
&= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d} K_\delta(x)e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx d\delta \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}(\int_{\mathbb{R}^d}K_\delta(x)e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx)d\delta \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}\delta^{-d/2}(\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|x|^2/\delta}e^{-2\pi i x\cdot\xi}dx)d\delta \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}\delta^{-d/2}(\delta^{d/2}e^{-\pi\delta|\xi|^2})d\delta \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}d\delta
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_0^\infty e^{-\pi\delta|\xi|^2}e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}d\delta \quad (\text{令 } \delta' = \pi\delta(1+|\xi|^2)) \\
&= \int_0^\infty e^{-\delta'}(\frac{\delta'}{\pi(1+|\xi|^2)})^{\epsilon-1}\frac{1}{\pi(1+|\xi|^2)}d\delta' \\
&= \frac{1}{\pi^\epsilon}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^\epsilon}\int_0^\infty e^{-\delta'}\delta'^{\epsilon-1}d\delta' \\
&= \pi^{-\epsilon}\Gamma(\epsilon)\frac{1}{(1+|\xi|^2)^\epsilon}
\end{aligned}
$$

故 $\pi^{-\epsilon}\Gamma(\epsilon)\frac{1}{(1+|\xi|^2)^\epsilon}$ 是 $f(x) = \int_0^\infty K_\delta(x)e^{-\pi\delta}\delta^{\epsilon-1}d\delta$ 的 Fourier 变换。从而 $\frac{1}{(1+|\xi|^2)^\epsilon}$ 是 $\pi^\epsilon\frac{1}{\Gamma(\epsilon)}f(x)$ 的 Fourier 变换，且这个函数属于 $L^1(\mathbb{R}^d)$。

Problems

Problem 1:

由

$$\lim_{|n|\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx} \to 0$$

有

$$\begin{cases}\lim_{|n|\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx \to 0\\ \lim_{|n|\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx \to 0\end{cases}$$

取 $f(x) = \chi_E(x)$, 则

$$\begin{cases}\lim_{|n|\to\infty}\int_E \cos nxdx \to 0\\ \lim_{|n|\to\infty}\int_E \sin nxdx \to 0\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_E cos^2(nx+u_n)dx &= \int_E \frac{cos(2nx+2u_n)+1}{2}dx\\ &= \frac{m(E)}{2} + \int_E \frac{cos(2nx+2u_n)}{2}\end{aligned}$$

故只需证当 $n\to\infty$ 时，

$$\int_E cos(2nx+2u_n)dx \to 0$$

$$\begin{aligned}|\int_E cos(2nx+2u_n)dx| &= |\int_E (cos(2nx)cos(2u_n) - sin(2nx)sin(2u_n))dx|\\ &\le |cos(2u_n)||\int_E cos(2nx)dx| + |sin(2u_n)||\int_E sin(2nx)dx|\\ &\le |\int_E cos(2nx)dx| + |\int_E sin(2nx)dx|\\ &\text{当 } n\to\infty \text{ 时}\\ &\to 0\end{aligned}$$

从而结论得证。综上：

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \cos^2(nx+u_n)dx = \frac{m(E)}{2}$$

Problem 2:

对 $A_n = a_n\cos nx + b_n\sin nx$，设 $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)$ 在 E 上收敛，且 $m(E) > 0$。从而在 E 上有 $A_n(x)$ 收敛到 0。则由 Egorov 定理知，对 ϵ 存在一个 E 的闭子集 E_1 使得 $A_n(x)$ 在 E_1 上一致收敛到 0。且 $m(E-E_1) < \frac{m(E)}{2}$, 从而 $m(E_1) > \frac{m(E)}{2} > 0$。

$$\begin{aligned}A_n(x) &= a_n\cos nx + b_n\sin nx\\ &= c_n\cos(nx+d_n)\end{aligned}$$

其中 $c_n = \sqrt{a_n^2+b_n^2}, \tan d_n = -\frac{b_n}{a_n}$。
由一致收敛的条件

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_1} c_n^2\cos^2(nx+d_n)dx = 0$$

又由 Problem 1,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_1} c_n^2\cos^2(nx+d_n)dx = c_n^2 m(E_1)/2$$

但 $m(E_1)>0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n^2 = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=0$。从而

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0\end{cases}$$

Problem 3:

设 f_k 依 L^1 范数收敛，$f_k\in L^1(\mathbb{R}^d)$。对任意 $\epsilon>0$

$$m(\{x:|f_k(x)-f(x)|>\epsilon\}) < \frac{1}{\epsilon}\|f_k-f\|_{L^1}$$

由 f_k 依 L^1 范数收敛

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_{L^1}=0$$

从而对任意 $\epsilon>0$ 都有

$$\lim_{k\to\infty} m(\{x:|f_k(x)-f(x)|>\epsilon\})=0$$

即 f_k 依测度收敛。
反之，依测度收敛的函数列不一定依 L^1 范数收敛。
如设 $f_n(x)=n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x), f(x)=0$, 则

$$\lim_{n\to\infty} m(\{x:|f_n(x)-f(x)|>\epsilon\})=0$$

即 $f_n(x)$ 依测度收敛，但对任意 n

$$\|f_n-f\|_{L^1}=1$$

故 $f_n(x)$ 不依 L^1 范数收敛。

Problem 4:

(a).
当 $d=2$，L 为一个严格上三角阵所表示的线性变换时，设

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

从而

$$\chi_{L(E)}(x,y)=\chi_E(L^{-1}(x,y))=\chi_E(x-ay,y)$$

故

$$\begin{aligned}m(L(E))&=\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\chi_E(x-ay,y)dxdy\\&=\int_{\mathbb{R}}(\int_{\mathbb{R}}\chi_E(x,y)dx)dy\\&=m(E)\end{aligned}$$

(b).

由 (a). 知，对 $\mathbb{R}^d$ 上的线性变换 L，如 L 为上三角阵所表示的线性变换（或下三角阵同理），则有

$$m(L(E))=m(E)$$

现对一般的线性变换 L, 存在上三角阵 L_1，对角阵 Δ，下三角阵 L_2, 使得 $L=L_1\Delta L_2$。又由 Ex7.Ch1.$m(\Delta(E))=m(E)$。

从而有

$$\begin{aligned}m(L(E))&=m(L_1\Delta L_2(E))\\&=m(\Delta L_2(E))\\&=|det(\Delta)|m(L_2(E))\\&=|det(\Delta)|m(E)\end{aligned}$$

又

$$det(L)=det(L_1\Delta L_2)=det(L_1)det(\Delta)det(L_2)=det(\Delta)$$

故

$$m(L(E))=|det(L)|m(E)$$

Problem 5:

考虑 $\mathbb{R}$ 上的任一良序关系 $\prec$ 与集合 $X=\{y\in\mathbb{R}:$ 集合$\{x:x\prec y\}$为不可数集合$\}$。

若 $X=\emptyset$，则 $\prec$ 即为所求的序关系。

若 $X\neq\emptyset$，则存在 X 中的最小元 $\overline{y}$。

从而 $\{x:x\prec\overline{y}\}$ 为不可数集合，且对任意 $x\prec\overline{y},\{z:z\prec x\}$ 可数。

由 $S=\{x:x\prec\overline{y}\}$ 为不可数集合，存在一个从 S 到 $\mathbb{R}$ 的双射 f。故对任意 $r_1,r_2\in\mathbb{R}$ 存在 $x_1,x_2\in S$ 使得 $f(x_1)=r_1,f(x_2)=r_2$ 现定义序关系 $\rightarrow$ 满足：

若 $x_1\prec x_2$, 则 $r_1\rightarrow r_2$。则 $\rightarrow$ 满足题目要求。

对任意 $r_0\in\mathbb{R},r_0$ 有原像 $x_0\in S,x_0\prec\overline{y}$, 从而 $\{x:x\prec x_0\}$ 为可数集合，故 $\{r:r\rightarrow r_0\}$ 为可数集合。由 r_0 的任意性，$\rightarrow$ 即所求的序关系。

Chapter 3. Differentiation and Integration

Exercises

Exercise 1:

(a).

$$\int_{\mathbb{R}_d} \phi(x)dx = 1 \quad , \quad K_\delta(x) = \delta^{-d}\phi(\frac{x}{\delta})$$

$$\int_{\mathbb{R}_d} K_\delta(x)dx = \int_{\mathbb{R}_d} \delta^{-d}\phi(\frac{x}{\delta})dx = \int_{\mathbb{R}_d} \phi(t)dt = 1$$

由 $\phi(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, 存在 $0 < A < \infty$, 使得 $\int_{\mathbb{R}_d} |\phi(t)|dt \leq A < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}_d} |K_\delta(x)|dx = \int_{\mathbb{R}_d} |\delta^{-d}\phi(\frac{x}{\delta})|dx = \int_{\mathbb{R}_d} |\phi(t)|dt \leq A < \infty$$

对任意 $\eta > 0$

$$\int_{|x|\geq\eta} |K_\delta(x)|dx = \int_{|x|\geq\eta} |\delta^{-d}\phi(\frac{x}{\delta})|dx = \int_{|x|\geq\frac{\eta}{\delta^d}} |\phi(t)|dt$$

当 $\delta \to 0, \frac{\eta}{\delta^d} \to \infty$，由第二章命题 1.12 知

$$\lim_{\delta\to 0} \int_{|x|\geq\frac{\eta}{\delta^d}} |\phi(t)|dt = 0$$

从而 $K_\delta(x)$ 为一族优核。

(b).

若 $\phi(x)$ 为有界函数，且有有界支集 A，则存在 $R > 0$ 使得 $A \subset B_0(R)$。故 $supp(K_\delta) \subset B_0(\delta R)$。

设 $|\phi(x)| \leq A$，则对任意 $\delta > 0$

$$|K_\delta(x)| = |\delta^{-d}\phi(\frac{x}{\delta})| \leq A\delta^{-d}$$

且

$$|K_\delta(x)| \leq \begin{cases} A\delta^{-d} \leq \frac{AR^{d+1}\delta}{|x|^{d+1}} \ , & x \in B_0(\delta R) \\ 0, & x \notin B_0(\delta R) \end{cases}$$

从而取 $M = max\{A, AR^{d+1}\}$, 满足

$$\begin{cases} |K_\delta(x)| \leq M\delta^{-d} \\ |K_\delta(x)| \leq M\delta/|x|^{d+1} \end{cases}$$

即 $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ 为单位近似。

(c).

$$
\begin{aligned}
\|f * K_\delta - f\| &= \int_{\mathbb{R}^d} |f * K_\delta(x) - f(x)| dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} | \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) K_\delta(y) dy - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) K_\delta(y) dy | dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dx dy \\
&= \int_{|y| \le \eta} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dx dy + \int_{|y| > \eta} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dx dy \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

由第一章命题 2.5,

$$\lim_{y \to 0} \|f_y - f\|_{L^1} \to 0$$

从而对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\eta > 0$，使得 $\|f_y - f\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{M}$ 对任意 $|y| \le \eta$ 成立。故

$$I_1 \le \int_{|y| \le \eta} \|f_y - f\|_{L^1} |K_\delta(y)| dy \le \epsilon$$

故

$$\lim_{\delta \to 0} I_1 = 0$$

对 I_2 有

$$I_2 = \int_{|y| > \eta} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dx dy \le \int_{|y| > \eta} 2\|f\|_{L^1} |K_\delta(y)| dy$$

故

$$\lim_{\delta \to 0} I_2 = 0$$

综上

$$\lim_{\delta \to 0} \|(f * K_\delta) - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \to 0$$

Exercise 2:

设 x 为 f 的 Lebesgue 集中的任一点。由 $\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx = 0$

$$
\begin{aligned}
|(f * K_\delta)(x)| &= | \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) K_\delta(y) dy | \\
&= | \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-y) - f(x)) K_\delta(y) dy | \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy \\
&= \int_{|y| \le \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2^k \delta < |y| \le 2^{k+1} \delta} |f(x-y) - f(x)| |K_\delta(y)| dy \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}
$$

对 I_1 有

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{|y|\le\delta} |f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|dy \\ &\le \frac{c}{\delta^d}\int_{|y|\le\delta} |f(x-y)-f(x)|dy \\ &\le c\mathcal{A}(\delta) \end{aligned}$$

其中 $\mathcal{A}$ 为引理 2.2 所定义的函数。
现考虑 I_2 有

$$\begin{aligned} \int_{2^k\delta<|y|\le 2^{k+1}\delta} |f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|dy &\le \frac{c\delta}{(2^k\delta)^{d+1}}\int_{|y|\le 2^{k+1}\delta} |f(x-y)-f(x)|dy \\ &\le \frac{c'}{2^k(2^{k+1}\delta)^d}\int_{|y|\le 2^{k+1}\delta} |f(x-y)-f(x)|dy \\ &\le c'2^{-k}\mathcal{A}(2^{k+1}\delta) \end{aligned}$$

对任意 $\epsilon>0$, 存在 N 使得 $\sum_{k>N}2^{-k}<\epsilon$。从而取 δ 充分小使得 $\mathcal{A}(2^k\delta)<\frac{\epsilon}{N+1}$

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^k\delta<|y|\le 2^{k+1}\delta} |f(x-y)-f(x)||K_\delta(y)|dy \\ &= c''\epsilon + c'''\epsilon \end{aligned}$$

故有对任意 $\epsilon>0$ 都存在充分小的 δ 满足

$$|(f*K_\delta)(x)|\le C\epsilon$$

其中 C 为一与 f,K 有关且与 δ 无关的常数。
综上，对几乎所有 x（由推论 1.6, 几乎所有 x 在可积函数 f 的 lebesgue 集中），有

$$\lim_{\delta\to 0}(f*K_\delta)(x)=0$$

Exercise 3:
(a).
由 0 是 E 的密度点知存在 $r_0>0$ 使得当 $r\le r_0$ 时有 $m(E\cap B_r(0))>\frac{2}{3}m(B_r(0))=\frac{4}{3}r$。由对称性，$m((-E)\cap B_{r_0}(0))=m(E\cap B_{r_0}(0))\ge\frac{4}{3}r_0$。故 $m(E\cap(-E))\ge|2r_0-\frac{8}{3}r_0|=\frac{2}{3}r_0>0$。从而存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in(E\cap(-E))$ 使得 $x_n\to 0,-x_n\in E$。
(b).
由 0 是 E 的密度点知存在 $r_0>0$ 使得当 $r\le r_0$ 时有 $m(E\cap B_r(0))>\frac{2}{3}m(B_r(0))=\frac{4}{3}r$。令 $E_0=E\cap B_{r_0}(0)$。

$$m(\frac{1}{2}E_0)=\frac{1}{2}E_0\ge\frac{2}{3}r_0$$

$$\frac{1}{2}E_0=(\frac{1}{2}E)\cap B_{\frac{r_0}{2}}(0),\quad m(\frac{1}{2}E_0)\ge\frac{2}{3}r_0>0$$

$$m(E\cap B_{\frac{r_0}{2}}(0))\ge\frac{2}{3}m(B_{\frac{r_0}{2}}(0))=\frac{2}{3}r_0>0$$

从而 $E\cap B_{\frac{r_0}{2}}(0)\neq\emptyset, \frac{1}{2}E\cap B_{\frac{r_0}{2}}(0)\neq\emptyset$，而 $m(B_{\frac{r_0}{2}}(0))=r_0$。故有

$$\begin{cases} m((\frac{1}{2}E)\cap B_{\frac{r_0}{2}}(0))\geq \frac{2}{3}r_0 \\ m(E\cap B_{\frac{r_0}{2}}(0))\geq \frac{2}{3}r_0 \\ m(E\cap(\frac{1}{2}E))\geq \frac{1}{3}r_0>0 \end{cases}$$

从而存在 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in(E\cap(\frac{1}{2}E)$，$x_n\to 0, x_n\in E, 2x_n\in E$。

Exercise 4:

(1).f^* 在 $\mathbb{R}^d$ 上不可积。

$$f^*(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)|dy$$

由 f 在 a.e. 意义下不恒为 0 知存在 $r_0>0$ 使得

$$\int_{B_{r_0}(0)}|f(y)|dy=c_0>0$$

当 $1\leq|x|<r_0$

$$f^*(x)\geq\frac{1}{m(B_{r_0}(0))}\int_{B_{r_0}(0)}|f(y)|dy=c_1\geq\frac{c_1}{|x|^d}>0$$

当 $|x|\geq r_0$

$$f^*(x)\geq\frac{1}{m(B_{|x|}(0))}\int_{B_{|x|}(0)}|f(y)|dy\geq\frac{1}{B_1(0)|x|^d}c_0=\frac{c_2}{|x|^d}$$

取 $c=min\{c_1,c_2\}>0$，则有

$$f^*(x)\geq\frac{c}{|x|^d}$$

对任意 $|x|\geq 1$ 成立。

从而

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f^*(x)|\geq\int_{|x|\geq 1}\frac{c}{|x|^d}=\infty$$

即 f^* 在 $\mathbb{R}^d$ 上不可积。

(2). 若 f 支集为单位球且 $\int|f|=1$

由定理 1.1 弱类型不等式，存在 $c>0$ 使得

$$m(\{x:f^*(x)>\alpha\})\leq\frac{c}{\alpha}$$

对所有 $\alpha>0$ 成立。

现可取 (1). 中的 $r_0=1$。对任意 $|x|\geq 1$

$$f^*(x)\geq\frac{1}{m(B_{|x|}(0))}\int_{B_{|x|}(0)}|f(y)|dy=\frac{1}{B_1(0)|x|^d}$$

若 $\frac{1}{|B_1(0)|}\frac{1}{|x|^d}>\alpha$，$f^*(x)>\alpha$，$|x|^d<\frac{1}{\alpha|B_1(0)|}$ 对任意 $\alpha<<1$

$$m(\{x:f^*(x)>\alpha\})\geq m(\{1\leq x\leq\frac{1}{\alpha|B_1(0)|}\})\geq m(\{x:\frac{1}{2\alpha|B_1(0)|}\leq|x|^d\leq\frac{1}{\alpha|B_1(0)|}\})=\frac{1}{2\alpha}$$

故对 $\frac{1}{2}>0$ 和所有充分小的 α

$$m(\{x:f^*(X)>\alpha\})\geq \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}$$

从而在此意义下，

$$m(\{x:f^*(x)>\alpha\})\leq \frac{c}{\alpha}$$

即为最佳估计。

Exercise 5:

(a).

考虑 Riemann 积分的情况。

$f(x)$ 为偶函数

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{|x|(\ln x)^2}dx=\int_{-\infty}^{-\ln 2}\frac{e^t dt}{e^t t^2}=\int_{-\infty}^{-\ln 2}\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{\ln 2}<\infty$$

对 Lebesgue 积分：

$$\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{|x|(\ln x)^2}dx=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{m}$$

令 $f_m(x)=\frac{1}{|x|(\ln x)^2}\chi_{[\frac{1}{m},\frac{1}{2}]}$ 从而 f_m 为递增的非负函数列，由单调收敛定理

$$\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx=2\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{2}}\lim_{m\to\infty}f_m(x)dx=\frac{2}{\ln 2}<\infty$$

即 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可积。

(b).

当 $x\in(0,\frac{1}{4}]$ 时

$$f^*(x)\geq\frac{1}{m((0,2x])}\int_0^{2x}|f(y)|dy=\frac{1}{2x}\frac{1}{\ln\frac{1}{2x}}\geq\frac{c_1}{x\ln\frac{1}{x}}$$

当 $x\in(\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$ 时

$$f^*(x)\geq\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}|f(y)|dy\geq\frac{c_2}{x\ln\frac{1}{x}}$$

取 $c=\min\{c_1,c_2\}$，则

$$f^*(x)\geq\frac{c}{|x|\ln\frac{1}{|x|}}$$

对 $|x|\leq\frac{1}{2}$ 成立。

对任意 x：

$$\int_{x-t}^{x+t}|f^*(y)|dy=\int_{x-t}^{x+t}\frac{1}{|y|\ln\frac{1}{|y|}}dy$$

取 x=0，对 Riemann 积分有

$$\int_{-t}^{t}\frac{1}{|y|\ln\frac{1}{|y|}}dy=2\int_0^t\frac{1}{y\ln\frac{1}{y}}dy=-2\int_{-\infty}^{\ln t}\frac{1}{y}dy=2\int_{\ln\frac{1}{t}}^{\infty}\frac{1}{y}dy=\infty$$

与 (a). 同理用单调收敛定理知对 Lebesgue 积分也有

$$\int_{-t}^{t} \frac{1}{|y| \ln \frac{1}{|y|}} dy = \infty$$

由此可知，$f^*(x)$ 非局部可积函数。

Exercise 6:

$$f_+^*(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(y)| dy$$

若 $x \in \{x : f_+^*(x) > \alpha\}$, 即

$$\sup_{h>0} \frac{1}{h} (\int_0^{x+h} |f(y)| dy - \int_0^x |f(y)| dy) > \alpha$$

这等价于存在 h 使得

$$\int_0^{x+h} |f(y)| dy - (x+h)\alpha > \int_0^x |f(y)| dy - x\alpha$$

令 $F(x) = \int_0^x |f(y)| dy - \alpha x$，则 $F(x)$ 为实值连续函数。
由引理 3.5,$E_\alpha^+ = \{x : \text{存在 h>0 使得} F(x+h) > F(x)\}$，则 $E_\alpha^+ = \cup(a_k, b_k)$

$$m(E_\alpha^+) = \sum_k (b_k - a_k)$$

且有

$$F(a_k) = F(b_k)$$

$$\int_0^{a_k} |f(y)| dy - \alpha a_k = \int_0^{b_k} |f(y)| dy - \alpha b_k$$

故有

$$b_k - a_k = \frac{1}{\alpha} (\int_0^{b_k} |f(y)| dy - \int_0^{a_k} |f(y)| dy) = \frac{1}{\alpha} \int_{a_k}^{b_k} |f(y)| dy$$

从而

$$m(E_\alpha^+) = \sum_k (b_k - a_k) = \sum_k \frac{1}{\alpha} \int_{a_k}^{b_k} |f(y)| dy = \frac{1}{\alpha} \int_{E_\alpha^+} |f(y)| dy$$

Exercise 7:
令 $F = [0,1] \setminus E$，若 $m(E) \neq 1$，则 $m(F) > 0$。由推论 1.5，几乎所有 $y \in F$ 都为 F 的 Lebesgue 密度点。
对任意 $y \in F$，若

$$\lim_{m(I) \to 0, y \in I} \frac{m(F \cap I)}{m(I)} = 1$$

则对任意 $\epsilon > 0$ 存在 I 使得

$$\frac{m(I) - m(F \cap I)}{m(I)} \leq \epsilon$$

即

$$m(E \cap I) \leq \epsilon m(I)$$

与题目条件矛盾。

故对任意 $y \in F$,y 不是 F 的 Lebesgue 密度点。这与推论 1.5 矛盾。从而 $m(F) = 0$，即 $m(E) = 1$。

Exercise 8:

由 $m(A) > 0$，存在 A 的 Lebesgue 密度点 x，令 $\{q_n\}$ 为有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个排列。取 s_n 满足 $s_n = q_n - x$，令 $E = \cup_{n=1}^{\infty}(A + s_n)$，下证此即为所求集合。

$m(E^c) = 0$ 即等价于对任意 $n \in \mathbb{N}, m(E^c \cap [n, n+1]) = 0$，因 q_n 取遍有理数，这等价于 $m(E^c \cap [0,1]) = 0$。

对任意 $q \in \mathbb{Q}$ 存在 s_j 使得 $q = x + s_j$，从而 q 为 E 的 Lebesgue 密度点。故对任意 $m > 0$，存在 $N_m \in \mathbb{N}$ 使得

$$m(E \cap B_{\frac{1}{N_m}}(q)) \geq (1 - \frac{1}{m})B_{\frac{1}{N_m}}(q)$$

由 q 的任意性，现令 q 取遍 $\frac{1}{2N_m}, \frac{2}{2N_m}, ..., \frac{2N_m}{2N_m}$，分别记为 $q_1, q_2, ..q_{2N_m}$。

$$\begin{aligned} m(E^c \cap B_{\frac{1}{N_m}}(q_j)) &\leq \frac{1}{m}B_{\frac{1}{N_m}}(q_j) \\ m(E^c \cap [0,1]) &\leq \sum_j m(E^c \cap B_{\frac{1}{N_m}}(q_j)) \\ &\leq \sum_j \frac{1}{m}B_{\frac{1}{N_m}}(q_j) \\ &= \frac{1}{m}2N_m\frac{2}{N_m} \\ &= \frac{4}{m} \end{aligned}$$

由 m 的任意性，令 $m \to \infty$，则有 $\frac{4}{m} \to 0$，即

$$m(E^c \cap [0,1]) = 0,\ m(E^c) = 0$$

从而 E 即为所求。

Exercise 9:

$$\delta(x) = \inf\{|x - y| : y \in F\}$$

由 Ex.5 Ch2. 知对任意 $y, z \in \mathbb{R}$，有 $|\delta(y) - \delta(z)| \leq |y - z|$，从而 $\delta(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有有界变差。故由定理 3.4，$\delta(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处可微。又 $\delta(x)$ 为非负函数且对任意 $x \in F, \delta(x) = 0$，$\delta(x)$ 在 F 上的任意点可取到局部最小值，若 $\delta(x)$ 在 x 处可微，则其在 R 上的微分为 0。此即

$$\lim_{|y| \to 0} \frac{\delta(x+y) - \delta(x)}{|y|} = 0 = \lim_{|y| \to 0} \frac{\delta(x+y)}{|y|}$$

从而

$$\delta(x+y)=o(|y|)$$

对几乎所有 $x\in F$ 成立。

Exercise 10:

令 $q:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ 为一个双射，即 $\mathbb{Q}=\{q(0),q(1),q(2),...\}$ 为有理数的一个排列。取 $g(q(n))=2^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$，则 $\sum_{r\in\mathbb{Q}}g(r)$ 绝对收敛。

令

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sum_{r\in\mathbb{Q},r<x}g(r)$$

则 $f(x)$ 满足题设，为 R 上的严格单调递增函数，且在 $\mathbb{Q}$ 上不连续，在 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 连续。

f 严格单调递增由定义易得。

现设 $x\in\mathbb{Q},h>0$

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{r\in\mathbb{Q},r<x+h}g(r)-\sum_{r\in\mathbb{Q},r<x}g(r)=\sum_{r\in\mathbb{Q},x\leq r<x+h}g(r)>g(x)$$

其中 $g(x)$ 为恒大于 0 的常数，从而 f 在 x 处不连续。

当 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，$h\to 0^+$ 时

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{r\in\mathbb{Q},x\leq r<x+h}g(r)=\sum_{r\in\mathbb{Q},x<r<x+h}g(r)\to 0$$

因当 h 足够小时任意靠近 x 的有理数均可排出区间 $(x,x+h)$ 且 $\{\frac{1}{2^n}\}$ 满足对任意 $\epsilon>0$ 存在充分大的 N 使得 $\sum_{n\geq N}\frac{1}{2^n}<\epsilon$。

同理

$$f(x)-f(x-h)=\sum_{r\in\mathbb{Q},x-h\leq r<x}g(r)\to 0$$

综上，$f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不连续，在 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 连续。

Exercise 11:

(1). 当 $a>b$ 时，f 在 $[0,1]$ 上是有界变差函数。

$$f(x)=\begin{cases}x^a\sin(x^{-b}) & 0<x\leq 1\\ 0 & x=0\end{cases}$$

对任意 $x\in(0,1]$

$$f'(x)=ax^{a-1}\sin(x^{-b})-bx^{a-b-1}\cos(x^{-b})$$

$$|f'(x)|\leq ax^{a-1}+bx^{a-b-1}$$

对 $[0,1]$ 的任意分割 $\pi: 0=t_0<t_1<...<t_n=1$ 任取 $0<\epsilon<t_1$ 考察 Riemann 积分

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^1 |f'(x)|dx &\le \int_\epsilon^1 (ax^{a-1}+bx^{a-b-1})dx \\ &= (x^a+\frac{b}{a-b}x^{a-b})|_\epsilon^1 \\ &= \frac{a}{a-b}-\epsilon^a-\frac{b}{a-b}\epsilon^{a-b} \\ &\le \frac{a}{a-b}\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n |f(t_i)-f(t_{i-1})| &= |f(t_1)-f(t_0)|+\sum_{i=2}^n |f(t_i)-f(t_{i-1})| \\ &= |f(t_1)-f(\epsilon)+f(\epsilon)|+\sum_{i=2}^n |\int_{t_{i-1}}^{t_i} f'(x)dx| \\ &\le |f(\epsilon)|+|f(t_1)-f(\epsilon)|+\sum_{i=2}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} |f'(x)|dx \\ &= |f(\epsilon)|+|\int_\epsilon^{t_1} f'(x)dx|+\int_{t_1}^1 |f'(x)|dx \\ &\le |f(\epsilon)|+\int_\epsilon^1 |f'(x)|dx \\ &\le |f(\epsilon)|+\frac{a}{a-b} \\ &\le 1+\frac{a}{a-b}\end{aligned}$$

从而 $\Gamma_f[0,1]\le 1+\frac{a}{a-b}$，即 f 为有界变差函数。
(2). 当 $a\le b$ 时，f 在 $[0,1]$ 上不是有界变差函数。
取 $[0,1]$ 的一个分割 $\pi: 0=t_0<t_1<...<t_m=1$ 满足

$$t_i=(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi(m-i+1)})^{\frac{1}{b}},\quad i=1,2,...,m-1$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m |f(t_i)-f(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^m (t_i^a+t_{i+1}^a) \\ &\ge \sum_{i=2}^{m-1} t_i^a \\ &= \sum_{i=2}^{m-1} (\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi(m-i+1)})^{\frac{a}{b}} \\ &= \sum_{j=2}^{m-1} (\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi j})^{\frac{a}{b}} \\ &\ge \sum_{j=2}^{m-1} \frac{1}{\pi(\frac{1}{2}+j)}\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$，由级数 $\sum_{j=2}^{m-1}\frac{1}{\pi(\frac{1}{2}+j)}$ 为发散级数知 f 没有有界变差。
综上，f 在 $[0,1]$ 上为有界变差函数当且仅当 $a>b$。
(3).
当 $a=b$ 时存在 a 的值使得存在 f 对任意 $\alpha\in(0,1)$，f 满足 Lipschitz 条件。
设 $0<h<1$

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)| &= |(x+h)^a\sin((x+h)^{-a})-x^a\sin(x^{-a})|\\ &= |(x+h)^a||\sin((x+h)^{-a})-(\frac{x}{x+h})^a\sin(x^{-a})|\\ &\le 2(x+h)^a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)| &= |f'(\xi)|h\\ &\le (a\xi^{a-1}+a\xi^{-1})h\\ &= a(\xi^a+1)\frac{h}{\xi}\\ &\le \frac{2ah}{\xi}\\ &\le 2a\cdot\frac{h}{x}\end{aligned}$$

当 $x^{a+1}\ge h>0$

$$|f(x+h)-f(x)|\le 2a\frac{h}{x}\le 2ah^{\frac{a}{a+1}}$$

当 $x^{a+1}<h$

$$\begin{aligned}|f(x+h)-f(x)| &\le 2(x+h)^a\\ &\le 2(1+h^{\frac{a}{1+a}})h^{\frac{a}{1+a}}\\ &\le 4h^{\frac{a}{1+a}}\end{aligned}$$

故取 $\alpha=\frac{a}{1+a}$ 即 $a=\frac{\alpha}{1-\alpha}$，$A=\max\{2a,4\}=\max\{2\frac{\alpha}{1-\alpha},4\}$。从而对任意 $x,x{+}h\in[0,1],0<h<1$ 有

$$|f(x+h)-f(x)|\le Ah^\alpha$$

从而

$$f(x)=\begin{cases}x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\sin(x^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}) & 0<x\le 1\\ 0 & x=0\end{cases}$$

满足 $Lipschitz-\alpha$ 条件但在 $[0,1]$ 上没有有界变差。

Exercise 12:
当 $x\neq 0$ 时 $F'(x)$ 显然存在。

$$F'(x)=2x\sin(x^{-2})-2x^{-1}\cos(x^{-2})$$

当 $x=0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(h)-F(0)}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin(\frac{1}{h^2})=0$$

考虑 $F'(x)$
$$\int_{-1}^{1}|2x\sin(x^-2)|dx \le \int_{-1}^{1}|2x|dx = 2 < \infty$$
从而 $2x\sin(x^-2)$ 在 [-1,1] 上为可积函数。
对 $\frac{2}{x}\cos(\frac{1}{x^2})$ 有
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}|\frac{2}{x}\cos(\frac{1}{x^2})|dx &= 2\int_{0}^{1}|\frac{2}{x}\cos(\frac{1}{x^2})|dx\\ &= 2\int_{1}^{\infty}\frac{|\cos u|}{u}du\\ &> 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\pi k}^{\pi(k+1)}\frac{|\cos u|}{u}du\\ &> 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(k+1)}\int_{\pi k}^{\pi(k+1)}|\cos u|du\\ &= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(k+1)}\\ &= \infty\end{aligned}$$
从而 $\frac{2}{x}\cos(\frac{1}{x^2})$ 在 [-1,1] 上为不可积函数。
综上，$F'(x)$ 对任意 x 都存在，但在 $[-1,1]$ 上不可积。

Exercise 13:
对 $F(x)$ 为 $Cantor-Lebesgue$ 函数取 $(a_n^k, b_n^k), 1 \le n \le 2^{k-1}$ 满足
$$(a_1^1, b_1^1) = (0,1)$$
$$(a_1^2, b_1^2) = (0,\frac{1}{3}), (a_2^2, b_2^2) = (\frac{2}{3},1)$$
$$(a_1^3, b_1^3) = (0,\frac{1}{9}), (a_2^3, b_2^3) = (\frac{2}{9},\frac{1}{3}), (a_3^3, b_3^3) = (\frac{2}{3},\frac{7}{9}), (a_4^3, b_4^3) = (\frac{8}{9},1)$$
$$...$$
对任意 $\delta > 0$，存在 $k \in \mathbb{N}$ 使得 $(\frac{2}{3})^{k-1} < \delta$，从而
$$\sum_{n=1}^{2^{k-1}}(b_n^k - a_n^k) = (\frac{2}{3})^{k-1} < \delta$$
但
$$\sum_{n=1}^{2^{k-1}}(F(b_n^k) - F(a_n^k)) = 1$$
从而 $Cantor-Lebesgue$ 函数不绝对连续。

Exercise 14:

(a).

$$D^+(F)(x) = \limsup_{h\to 0, h>0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

令 $\Delta(x,h) = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$，$A_M = \{x : D^+(F)(x) > M\}$

$$\begin{aligned} x \in A_M &\iff \text{对任意}k \in \mathbb{N}^*, \text{存在}h \in (0, \frac{1}{k}], \text{使得}\Delta(x,h) > M \\ &\iff \text{对任意}k \in \mathbb{N}^*, \text{存在}l > k, \text{使得存在}h \in [\frac{1}{l}, \frac{1}{k}], \text{满足}\Delta(x,h) > M \\ &\iff x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k+1}^{\infty} \{\sup_{\frac{1}{l}\le h\le\frac{1}{k}} \Delta(x,h) > M\} \end{aligned}$$

故

$$A_M = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=k+1}^{\infty} \{x : \sup_{\frac{1}{l}\le h\le\frac{1}{k}} \Delta(x,h) > M\}$$

当 F 为连续函数，

$$\{x : \sup_{\frac{1}{l}\le h\le\frac{1}{k}} \Delta(x,h) > M\} = \{x : \sup_{\frac{1}{l}\le h\le\frac{1}{k}, h\in\mathbb{Q}} \Delta(x,h) > M\}$$

对 $\frac{1}{l} \le h \le \frac{1}{k}, h \in \mathbb{Q}, \Delta(x,h)$ 为一列可测函数，故 $\{x : \sup_{\frac{1}{l}\le h\le\frac{1}{k}} \Delta(x,h) > M\}$ 为可测集。由 $\{x : \sup_{\frac{1}{l}\le h\le\frac{1}{k}} \Delta(x,h) > M\}$ 为可测集，A_M 为可测集。从而 $D^+(F)(x)$ 可测。

(b).

令 $\Delta(x,h) = \frac{J(x+h)-J(x)}{h}, \Delta_n(x,h) = \frac{J_n(x+h)-J_n(x)}{h}$

$$\begin{aligned} \limsup_{h\to 0} \Delta(x,h) > \epsilon &\iff \forall m \in \mathbb{N}, \exists h \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] \setminus 0 \; s.t. \Delta(x,h) > \epsilon \\ &\iff \forall m \in \mathbb{N}, \exists k \ge m \; s.t. \exists h \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] \setminus (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}), \Delta(x,h) > \epsilon \\ &\iff \forall m \in \mathbb{N}, \exists k \ge m \; s.t. \sup_{\frac{1}{k}\le|h|\le\frac{1}{m}} \Delta(x,h) > \epsilon \end{aligned}$$

故有

$$\{x : \limsup_{h\to 0} \Delta(x,h) > \epsilon\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\ge m} \{x : \sup_{\frac{1}{k}\le|h|\le\frac{1}{m}} \Delta(x,h) > \epsilon\}$$

故只需证对任意 $k, m \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$，集合

$$A = A_{k,m,\epsilon} = \{x : \sup_{\frac{1}{k}\le|h|\le\frac{1}{m}} \Delta(x,h) > \epsilon\}$$

可测。

下证

$$A = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\ge N} \{x : \sup_{\frac{1}{k}\le|h|\le\frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \epsilon + \frac{1}{l}\}$$

令

$$I = I_{k,m} = [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] \setminus (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$$

若 $x \in A$

$$\sup_{\frac{1}{k} \le |h| \le \frac{1}{m}} \Delta(x,h) > \epsilon$$

从而存在 $h \in I$ 使得 $\Delta(x,h) > \epsilon$, 存在 $l \in \mathbb{N}$ 使得 $\Delta(x,h) > \epsilon + \frac{2}{l}$。
由

$$\Delta(x,h) = \lim_{n\to\infty} \Delta_n(x,h)$$

故对充分大的 n 有

$$\Delta_n(x,h) \ge \epsilon + \frac{1}{l}$$

从而

$$A \subset \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\ge N} \{x : \sup_{\frac{1}{k} \le |h| \le \frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \epsilon + \frac{1}{l}\}$$

若

$$x \in \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\ge N} \{x : \sup_{\frac{1}{k} \le |h| \le \frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \epsilon + \frac{1}{l}\}$$

则存在 $l, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sup_{\frac{1}{k} \le |h| \le \frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \epsilon + \frac{1}{l}$$

对任意 $n \ge N$ 成立。
故存在 $h(n) \in I$ 满足

$$\Delta_n(x,h(n)) > \epsilon + \frac{1}{l}$$

由 I 为区间，存在 $\{h(n)\}$ 的收敛子列收敛到 $h \in I$。选择 $n = n(x) \ge N$ 充分大使得

$$|J_n(x) - J_(x)| \le \frac{1}{2kl}$$

故有

$$\frac{|J_n(x) - J_(x)|}{|h|} \le \frac{1}{2l}$$

对任意 $h \in I$ 成立。

$$\frac{J_n(x+h_n) - J(x)}{h_n} = \frac{J_n(x+h_n) - J_n(x)}{h_n} + \frac{J_n(x) - J(x)}{h_n} \ge \epsilon + \frac{1}{l} - \frac{1}{2l} > \epsilon$$

从而

$$\epsilon < \frac{J_n(x+h_n) - J(x)}{h_n} \le \frac{J_(x+h_n) - J(x)}{h_n} = \Delta(x,h_n)$$

故

$$\sup_{\frac{1}{k} \le |h| \le \frac{1}{m}} \Delta(x,h) \ge \Delta(x,h_n) > \epsilon$$

即

$$x \in A, \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\ge N} \{x : \sup_{\frac{1}{k} \le |h| \le \frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \epsilon + \frac{1}{l}\} \subset A$$

如此得到

$$A=\bigcup_{l\in\mathbb{N}}\bigcup_{N\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geq N}\{x:\sup_{\frac{1}{k}\leq|h|\leq\frac{1}{m}}\Delta_n(x,h)>\epsilon+\frac{1}{l}\}$$

从而为得到所需结果，只需证明

$$B=\{x:\sup_{\frac{1}{k}\leq|h|\leq\frac{1}{m}}\Delta_n(x,h)>\epsilon\}$$

为可测集。由映射 $h\mapsto J_n(x+h)-J_n$ 为递增的

$$\sup_{\frac{1}{k}\leq|h|\leq\frac{1}{m}}\Delta_n(x,h)=\sup_{h\in(\mathbb{Q}\cap I)\cup\{\frac{1}{m}\}}\Delta_n(x,h)$$

而对 $h\in(\mathbb{Q}\cap I)\cup\{\frac{1}{m}\}$,$\Delta_n(x,h)$ 为一列可测函数。从而

$$\{x:\sup_{\frac{1}{k}\leq|h|\leq\frac{1}{m}}\Delta_n(x,h)>\epsilon\}$$

为可测集。即 B 为可测集，继而 A 为可测集。
综上

$$\limsup_{h\to 0}\frac{J(x+h)-J(x)}{h}$$

为可测函数。

Exercise 15:
由定理 3.3，令 $F=G_1-G_2$，其中 G_1,G_2 为单调递增有界函数。
由引理 3.13,G_1,G_2 可写为一个连续单增函数与一个跳跃函数之和。设 $G_1=F_1+J_1,G_2=F_2+J_2$, 则

$$F=(F_1+J_1)-(F_2+J_2)=(F_1-F_2)+(J_1-J_2)$$

故

$$J_1-J_2=F-(F_1-F_2)$$

其中 F,F_1,F_2 为连续函数，故 J_1-J_2 也为连续函数。又 J_1-J_2 为跳跃函数，故其连续当且仅当 J_1-J_2 为常数，设 $J_1-J_2=c$。有

$$F=(F_1-F_2)+(J_1-J_2)=(F_1-F_2)+c=F_1+c-F_2$$

故令 $F_1+c=F_1',F_2=F_2'$,$F=F_1'-F_2'$，即 F 为两个单调连续的函数之差。

Exercise 16:
(a).
当 F 为有界变差函数，F 在 $[a,b]$ 上几乎处处可微。且由引理 3.2

$$F(x)-F(a)=P_F(a,x)-N_F(a,x)$$

$$T_F(a,x)=P_F(a,x)+N_F(a,x)$$

由引理 3.13 当 G 为单增函数，可将 G 写为单增连续函数与跳跃函数之和 $G = G_1 + J$
由推论 3.7，当 G_1 为单增连续函数

$$\int_a^b G_1'(x)dx \le G_1(b) - G_1(a)$$

又 J 为跳跃函数，由定理 3.14，J' 几乎处处为 0，从而

$$\int_a^b G'(x)dx = \int_a^b G_1'(x)dx + \int_a^b J'(x)dx \le G_1(b) - G_1(a) + J(b) - J(a) = G(b) - G(a)$$

故推论 3.7 对单增函数也成立。现 $P_F(a,x), N_F(a,x)$ 均为单增函数，有

$$\begin{aligned}
\int_a^b |F'(x)|dx &= \int_a^b |P_F'(a,x) - N_F'(a,x)|dx \\
&\le \int_a^b |P_F'(a,x)|dx + \int_a^b |N_F'(a,x)|dx \\
&= \int_a^b P_F'(a,x)dx + \int_a^b N_F'(a,x)dx \\
&\le P_F(a,b) - P_F(a,a) + N_F(a,b) - N_F(a,a) \\
&= P_F(a,b) + N_F(a,b) \\
&= T_F(a,b)
\end{aligned}$$

(b).
由命题 4.2，当 F 在 $[a,b]$ 上绝对连续

$$\int_a^b |F'(x)|dx = T_F(a,b)$$

而若

$$\int_a^b |F'(x)|dx = T_F(a,b)$$

成立。
由积分的绝对连续性，(第二章命题 1.12)，对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $E \subset [a,b], m(E) < \delta$

$$\int_E |F'(x)|dx < \epsilon$$

故对任意 $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$，取 $E = \cup_k (a_k, b_k), m(E) < \delta$

$$\begin{aligned}
\sum_k F(b_k) - F(a_k) &\le \sum_k T_F(a_k, b_k) \\
&= \sum_k \int_{a_k}^{b_k} |F'(x)|dx \\
&= \int_E |F'(x)|dx \\
&< \epsilon
\end{aligned}$$

即 F 绝对连续。
综上，

$$\int_a^b |F'(x)|dx = T_F(a,b)$$

成立当且仅当 F 绝对连续。
故

$$L = \int_a^b |z'(t)|dt$$

表示以 z 参数化的可求长曲线的长度当且仅当 z 绝对连续。

Exercise 17:
令 $B(0,\epsilon)$ 或 B_ϵ 表示以 0 为中心半径为 ϵ 的球。

$$\begin{aligned}
|f*K_\epsilon(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)K_\epsilon(y)dy|, \text{不妨设 } x=0 \\
&\le \int_{B(0,\epsilon)} |f(-y)K_\epsilon(y)|dy + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{B(0,2^{n+1}\epsilon)\setminus B(0,2^n\epsilon)} |f(-y)||K_\epsilon(y)|dy \\
&\le \int_{B(0,\epsilon)} |f(y)|\frac{A}{\epsilon^d}dy + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{B(0,2^{n+1}\epsilon)\setminus B(0,2^n\epsilon)} |f(y)|\frac{A\epsilon}{(2^n\epsilon)^{d+1}}dy \\
&\le \frac{C}{m(B_\epsilon)}\int_{B_\epsilon} |f(y)|dy + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A\epsilon}{(2^n\epsilon)^{d+1}}\cdot(2^{n+1}\epsilon)^d\cdot\frac{c}{m(B_{2^{n+1}\epsilon})}\int_{B(2^{n+1}\epsilon)}|f(y)|dy \\
&\le C\cdot\frac{1}{m(B_\epsilon)}\int_{B_\epsilon}|f(y)|dy + \sum_{n=0}^{\infty} A\cdot 2^d\cdot 2^{-n}\cdot c\frac{1}{m(B_{2^{n+1}\epsilon})}\int_{B(2^{n+1}\epsilon)}|f(y)|dy \\
&\le C\cdot f^*(0) + \sum_{n=0}^{\infty} c\cdot 2^d\cdot 2^{-n}f^*(0) \\
&= (c+c\cdot 2)f^*(0) \\
&= cf^*(0)
\end{aligned}$$

式中的 C, c 均为可以计算的有限的与 x 无关的常数。对 $x \neq 0$ 同理。
综上，存在常数 c 使得

$$\sup_{\epsilon>0} |(f*K_\epsilon)(x)| \le cf^*(x)$$

Exercise 18:
由两个函数在 $[0,1]\setminus\mathcal{C}$ 上的各个开区间均为常数且 F 连续，故只需验证二者在 $\mathcal{C}$ 处的点的值相同。其中 $\mathcal{C}$ 为 $Cantor$ 集。
事实上，两个函数的构造均可由下步骤得到。
对任意 $x \in [0,1]$，设 $y \le x$ 且 y 为 $\mathcal{C}$ 中最大的不大于 x 的数。对 y 的三进制表示 (由 0，2 构成)，将各位 2 更换为 1 得到一个二进制数字，再换算为十进制得到 $F(y)$ 的值，$F(x) = F(y)$。
从而两个定义一致。

Exercise 19:

(a).

设 E 为 $\mathbb{R}$ 上的零测集。对任意 $\epsilon > 0$，由 f 为绝对连续函数，存在 $\delta > 0$ 使得对任意 $\sum |b_j - a_j| < \delta$，$\sum |f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon$。

当 E 为零测集，存在开集 U 使得 $E \subset U, m(U) < \delta$，$\mathbb{R}$ 上的任意开集可写为可数个开区间之并

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j), \quad m(U) = \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_i) < \delta$$

对开区间 (a_j, b_j)，设 $m_j, M_j \in [a_j, b_j]$ 满足

$$f(m_j) = \min_{x \in [a_j, b_j]} f(x)$$

$$f(M_j) = \max_{x \in [a_j, b_j]} f(x)$$

从而

$$f(U) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}[f(m_j), f(M_j)]$$

而 $|m_j - M_j| \leq |a_j - b_j|$, 故 $\sum_j |m_j - M_j| \leq \sum_j |a_j - b_j| < \delta$，由绝对连续性

$$\sum_j |f(m_j) - f(M_j)| < \epsilon$$

故

$$m(f(U)) < \epsilon$$

由 ϵ 的任意性可知 $m(f(E)) = 0$，即绝对连续函数 f 把零测集映到零测集。

(b).

对任意可测集 E，可将 E 写为 $E = F \cup N$。其中 F 为 F_σ 集，N 为零测集。则 $f(E) = f(F) \cup f(N)$。

由 $\mathbb{R}$ 上的闭集为 $\sigma-$ 紧的，F 为 $\sigma-$ 紧集。而 f 连续，故 $f(F)$ 为为 $\sigma-$ 紧的，故为 F_σ 集。从而 $f(E)$ 为 F_σ 集 $f(F)$ 与零测集 $f(N)$ 之并，故为可测集。

综上，f 把可测集映到可测集。

Exercise 20:

(a).

令

$$F(x) = \int_a^x \delta_C(x)dx$$

其中 C 为 $[a, b]$ 上有正测度的类 $Cantor$ 集 (第一章习题 4)，$\delta_C(x)$ 为 x 点到 C 的距离。

由习题 9，F' 在 C 上几乎处处存在，$F'(x) = 0$ 对几乎所有 $x \in C$ 成立。对任意 $a \leq x < y \leq b$, 由 C 中不包含区间，故存在区间 $I \subset [x, y], I \subset C^C$。从而

$$\int_I \delta_C(x)dx > 0$$

即 $F(x) < F(y)$，F 为严格单调递增函数，满足题目要求。
(b).
令 F 为 (a). 中的

$$F(x) = \int_a^x \delta_C(x)dx$$

由 F 单增且绝对连续，F 把不相交的开区间映到不相交的开区间。令 $U = [a,b] \setminus C$，则 U 为开集，可写为可数不相交的开区间之并

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j)$$

则

$$F(U) = \bigcup_{j=1}^{\infty}(F(a_j), F(b_j))$$

$$m(F(U)) = \sum_{j=1}^{\infty} F(b_j) - F(a_j)$$

当 $x \in C, \delta(x) = 0$, 故 $\int_C \delta_C(x)dx = 0$

$$\begin{aligned} B - A &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b \delta_C(x)dx \\ &= \int_U \delta_C(x)dx \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(F(b_j) - F(a_j)) \end{aligned}$$

即 $m(F(U)) = m(F([a,b]))$，故 $m(F(C)) = 0$。对任意 $S \subset C, m(F(S)) = 0$。而 $m(C) > 0$，由 Ex.32.(b).Ch1，存在 C 的不可测子集 S 满足 $E = F(S), m(E) = 0, F^{-1}(E) = S$ 不可测。
(c).
令

$$A_n = F^{-1}(E) \cap \{F'(x) > \frac{1}{n}\}$$

若要证明 $F^{-1}(E) \cap \{F'(x) > 0\}$ 可测，只需证明 A_n 可测对任意 $n \in \mathbb{N}$ 成立。
当 O 为开集，O 可写为不相交的可数个开区间之并，而 F 单增且绝对连续，故 $F^{-1}(O)$ 为开集。故有

$$m(O) = \int_{F^{-1}(O)} F'(x)dx$$

由 E 为可测集，E 可写为 $E = G \setminus Z$，其中 $G = \bigcap_{i=1}^{\infty} G_i$ 为 G_δ 集，G_i 为开集,Z 为零测集。故

对 $\forall\epsilon>0,\exists$ 开集 $O\ s.t. Z\subset O, m(O)<\epsilon$。从而

$$\begin{aligned}\epsilon &> m(O)\\ &=\int_{F^{-1}(O)}F'(x)dx\\ &\geq\int_{F^{-1}(O)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\}}F'(x)dx\\ &\geq\frac{1}{n}m(F^{-1}(Z)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})\end{aligned}$$

即

$$m(F^{-1}(Z)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})<n\epsilon$$

对任意 $\epsilon>0$ 成立。故

$$m(F^{-1}(Z)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})=0$$

现对开集 $G_i, F^{-1}(G_i)$ 为开集。由 F' 可积，F' 可测，故 $\{F'(x)>\frac{1}{n}\}$ 为可测集，从而 $F^{-1}(G_i)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\}$ 为可测集。

由此

$$A_n=\bigcap_{i=1}^{\infty}((F^{-1}(G_i)\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})\setminus(F^{-1}(Z))\cap\{F'(x)>\frac{1}{n}\})$$

为可测集，进而 $F^{-1}(E)\cap\{F'(x)>0\}$ 可测。

Exercise 21:

(a).

不妨设 $f>0$，对任意 $a>0$，

$$\begin{aligned}\{f(F(x))F'(x)>a\}&=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\{F'>r_k\}\cap\{f(F(x))>\frac{a}{r_k}\})\\ &=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{F'>r_k, F(x)\in f^{-1}((\frac{a}{r_k},+\infty))\}\end{aligned}$$

由 f 为可测函数，$f^{-1}((\frac{a}{r_k},+\infty))$ 为可测集。由 Ex.20(c).Ch3，$\{F'>r_k, F(x)\in f^{-1}((\frac{a}{r_k},+\infty))\}$ 为可测集，从而 $\{f(F(x))F'(x)>a\}$ 为可测集，即 $f(F(x))F'(x)$ 为可测函数。

(b).

依旧不妨设 $f>0$。当 $f\in L^1[A,B]$，f 可以由递增的简单函数列 $\{\phi_k\}$ 逼近，且 $0\leq\phi_k\leq f$。由单调收敛定理，可以将问题转化为证明对任意 [A,B] 上的可测集 E

$$\int_A^B\chi_E(y)dy=\int_a^b\chi_E(F(x))F'(x)dx$$

当 O 为开集

$$m(O)=\int_A^B\chi_O(y)dy=\int_{F^{-1}(O)}F'(x)dx=\int_a^b\chi_O(F(x))F'(x)dx$$

即此式对所有开集成立。
当 Z 为零测集，由 Ex.20(c).Ch3

$$\int_A^B \chi_Z(y)dy = 0 = \int_a^b \chi_Z(F(x))F'(x)dx$$

故对任意此式零测集也成立。现任意可测集可表示为一个 G_δ 集除去一个零测集，即 $E = \bigcap_{i=1}^\infty G_i \setminus Z$。

$$\begin{aligned}
\int_A^B \chi_E(y)dy &= \int_A^B \chi_{(\bigcap_{i=1}^\infty G_i \setminus Z)}(y)dy \\
&= \int_A^B \chi_{(\bigcap_{i=1}^\infty G_i)}(y)dy - \int_A^B \chi_Z(y)dy \\
&= \int_a^b \chi_{(\bigcap_{i=1}^\infty G_i)}(F(x))F'(x)dx - \int_a^b \chi_Z(F(x))F'(x)dx \\
&= \int_a^b \chi_E(F(x))F'(x)dx
\end{aligned}$$

即此式对任意 [A,B] 上可测集成立。
综上，对任意 $f \in L^1[A,B]$

$$\int_A^B f(y)dy = \int_a^b f(F(x))F'(x)dx$$

Exercise 22:

(a).

当 F, G 在 $[a,b]$ 上绝对连续，存在 $M > 0$ 使得在 $[a,b]$ 上 $|F|, |G| \leq M$，对 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ 使得 $\sum |b_j - a_j| < \delta$ 时

$$\sum |F(b_j) - F(a_j)| \leq \frac{\epsilon}{2M}, \sum |G(b_j) - G(a_j)| \leq \frac{\epsilon}{2M}$$

从而

$$\begin{aligned}
\sum |F(b_j)G(b_j) - F(a_j)G(a_j)| &\leq \frac{1}{2}\sum(|F(b_j) - F(a_j)||G(b_j) + G(a_j)| + |F(b_j) + F(a_j)||G(b_j) - G(a_j)|) \\
&\leq \frac{1}{2}\sum((2M)|F(b_j) - F(a_j)| + (2M)|G(b_j) - G(a_j)|) \\
&\leq \frac{1}{2}((2M)\frac{\epsilon}{2M} + (2M)\frac{\epsilon}{2M}) \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

故 FG 在 $[a,b]$ 上绝对连续，从而有

$$\int_a^b (FG)'dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_a^b (F'G + FG')dx$$

故

$$\int_a^b F'(x)G(x)dx = -\int_a^b F(x)G'(x)dx + [F(x)G(x)]\big|_a^b$$

(b).

设

$$F'(x) \sim \sum b_n e^{inx}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F'(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}(F(x)e^{-inx}\big|_{-\pi}^{\pi} + in\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}dx) \\
&= \frac{1}{2\pi}(F(\pi) - F(-\pi) + in2\pi a_n) \\
&= ina_n
\end{aligned}$$

从而

$$F'(x) \sim \sum ina_n e^{inx}$$

(c).

当 $F(-\pi) \neq F(\pi)$ 时则无 (b). 的结果。如设 $F(x) = x$，当 $n \neq 0$

$$\begin{aligned}
a_0 = 0, a_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xe^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}(-\frac{(-1)^n\pi}{in} - \frac{(-1)^n\pi}{in}) \\
&= \frac{i}{n}(-1)^n
\end{aligned}$$

$F'(x) = 1$ 故

$$b_0 = 1, b_n = 0$$

$b_n = 0 \neq ina_n$，即 (b) 不再成立。

Exercise 23:

(a).

$$D^+F(x) = \limsup_{h\to 0, h>0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \geq 0$$

若 $F(b) < F(a)$，取

$$G_\epsilon(x) = F(x) - F(a) + \epsilon(x-a)$$

当 ϵ 充分小时，由 $b - a > 0$, $F(b) - F(a) < 0$

$$G_\epsilon(b) < 0$$

设 $x_0 \in [a, b)$ 为使得该区间中的最大的 x 满足 $G_\epsilon(x) \geq 0$ 的数。故当 $x \in (x_0, b)$ 时

$$G_\epsilon(x) < 0$$

$$
\begin{aligned}
D^+G_\epsilon(x_0) &= \limsup_{h\to 0, h>0} \frac{G_\epsilon(x+h)-G_\epsilon(x)}{h} \\
&= \limsup_{h\to 0, h>0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)+\epsilon h}{h} \\
&= D^+F(x_0)+\epsilon \\
&> 0
\end{aligned}
$$

而对 $\forall h>0, x_0+h\in(x_0,b)$

$$
\begin{cases}
G_\epsilon(x_0+h) = F(x_0+h)-F(a)+\epsilon(x_0+h-a) < 0 \\
G_\epsilon(x_0) = F(x_0)-F(a)+\epsilon(x_0-a) \geq 0
\end{cases}
$$

从而有

$$
F(x_0) \geq 0 > F(x_0+h)+\epsilon h
$$

产生矛盾。从而 $F(b)\geq F(a)$。
现对任意 $[c,d]\subset[a,b]$，以区间 $[c,d]$ 代替 $[a,b]$ 重复上述过程能得到 $F(d)\geq F(c)$，从而 F 在 $[a,b]$ 上递增。
(b).
当 $F'(x)$ 对任意 $x\in(a,b)$ 存在，则 $D^+F(x)=F'(x)$。由 (a). 知 $Mx-F(x)$, $Mx+F(x)$ 在 (a,b) 上递增。现不妨设 $x<y$

$$
\begin{cases}
Mx-F(x) \leq My-F(y) \\
Mx+F(x) \leq My+F(y)
\end{cases}
$$

得到

$$
|F(x)-F(y)| \leq M(y-x) = M|x-y|
$$

从此式亦可得到 $F(x)$ 绝对连续。

Exercise 24:
(a).
由引理 3.13，当 F 为单增函数，可将其分解为单增连续函数与跳跃函数之和 $F(x)=f(x)+F_J(x)$。由 F 单增，F_J 单增
现对单增连续函数 f，在任意有界区间上 f 有有界变差，从而 f' 几乎处处存在且在 $[a,b]$ 上可积。现令

$$
f(x) = F_C(x)+F_A(x)
$$

其中

$$
F_A(x) = \int_a^x f'(x)dx
$$
$$
F_C(x) = f - F_A(x)
$$

由积分的绝对连续性，$F_A(x)\in AC[a,b]$ 且由 f 单增，$F_A(x)$ 单调递增。
自然 $F_C = f - F_A(x)$ 也连续且几乎处处可微。

$$
F_C'(x) = f' - f' = 0, \quad a.e.x
$$

且由推论 3.7，当 $y \geq x$ 时

$$F_C(y) - F_C(x) = f(y) - f(x) - \int_x^y f'(x)dx \geq 0$$

综上，$F = F_A + F_C + F_J$ 满足题目要求。
(b).
若 F 有两种不同的分解，不妨设

$$F = F_A^1 + F_C^1 + F_J^1 = F_A^2 + F_C^2 + F_J^2$$

令

$$\Delta_J = F_J^1 - F_J^2 = F_A^2 + F_C^2 - (F_A^1 + F_C^1)$$

则 Δ_J 既是跳跃函数，也是连续函数，从而为常数，设 $\Delta_J = C_J$

$$(F_A^1)' - (F_A^2)' = (F_C^2)' - (F_C^1)' = 0$$

设 $\Delta_A = F_A^1 - F_A^2$，则 $\Delta_A \in AC$

$$\Delta_A(x) - \Delta_A(a) = \int_a^x ((F_A^1)' - (F_A^2)')dx = 0$$

故 Δ_A 为常数，设为 C_A，即 $F_A^1 - F_A^2 = C_A$。由此

$$F_C^1 - F_C^2 = -(C_A + C_J) = C_C$$

从而 F 的这种分解在相差一个常数意义下唯一。

Exercise 25:
由 $m(E) = 0$，存在开集 $\mathcal{O}_n$ 满足 $E \subset \mathcal{O}_n$，$m(\mathcal{O}_n) < \frac{1}{2^n}$，令 $f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\mathcal{O}_n}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\mathcal{O}_n} = \sum_{n=1}^{\infty} m(\mathcal{O}_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

从而 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$。现令 $x \in E$。由 $\mathcal{O}_n$ 为开集，存在开球 $B_n \subset \mathcal{O}_n$ 满足 $x \in B_n$ 则对任意球 B 使得 $x \in B$

$$\int_B f(y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} m(\mathcal{O}_n \cap B) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n \cap B)$$

故

$$\frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(B_n \cap B)}{m(B)}$$

对任意 $N > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得 $m(B) < \delta$ 且 $B \subset B_j$，$1 \leq j \leq N$

$$\frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(B_n \cap B)}{m(B)} \geq N$$

这对任意充分小的 B 成立。从而

$$\liminf_{m(B)\to 0,\ x\in B} \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)dy = \infty$$

(b).
令 f 取 (a). 中的 f，取

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy$$

则由积分绝对连续性知 F 绝对连续。由 $f \geq 0$，F 单调递增。由 (a).

$$D_+F(x) = \liminf_{h\to 0,\ h>0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \liminf_{h\to 0,\ h>0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy = \infty$$

$$D_-F(x) = \liminf_{h\to 0,\ h<0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \liminf_{h\to 0,\ h<0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy = \infty$$

Exercise 26:
设 B_0 为单位球，C_0 为它的内置立方体。令

$$c = \frac{m(B_0)}{m(C_0)}$$

(1). 设 $E \in \mathcal{M} = \{Lebesgue - \text{可测集}\}$
由 E 为 $Lebesgue$ 可测集，对任意 $\epsilon > 0$，存在开集 $\mathcal{O}$ 使得 $E \subset \mathcal{O}$, $m(\mathcal{O}) < m(E) + \frac{\epsilon}{2}$。
取 E 的 Vitali 覆盖

$$\mathcal{B} = \bigcup_{x\in E}\bigcup_{n>N(x)} B_{\frac{1}{n}}(x)$$

其中 $N(x)$ 为足够大的 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $B_{\frac{1}{N(x)}}(x) \subset \mathcal{O}$，即当 $n \geq N(x)$, $B_{\frac{1}{n}}(x) \subset \mathcal{O}$。
由推论 3.10，存在 $B_1, ...B_M \in \mathcal{B}$ 互不相交且

$$m(E - \bigcup_{i=1}^M B_i) < \frac{\epsilon}{4c}$$

对 $E - \bigcup_{i=1}^M B_i$，可找到一个立方体覆盖 $\{C_i\}_{i=M+1}^\infty$ 使得

$$\sum_{i=M+1}^\infty m(C_i) < m(E - \bigcup_{i=1}^M B_i) + \frac{\epsilon}{4c}$$

现设每个立方体 C_i 对应的外切球为 B_i, $i \geq M+1$

$$E - \bigcup_{i=1}^M B_i \subset \bigcup_{i=M+1}^\infty C_i \subset \bigcup_{i=M+1}^\infty B_i$$

故

$$E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B_i$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) &= \sum_{i=1}^{M} m(B_i) + \sum_{i=M+1}^{\infty} m(B_i) \\
&\leq m(\mathcal{O}) + c\sum_{i=M+1}^{\infty} m(B_i) \\
&\leq m(E) + \frac{\epsilon}{2} + c\cdot(m(E - \bigcup_{i=1}^{M} B_i) + \frac{\epsilon}{4c}) \\
&\leq m(E) + \frac{\epsilon}{2} + c\cdot(\frac{\epsilon}{4c} + \frac{\epsilon}{4c}) \\
&= m(E) + \epsilon
\end{aligned}
$$

(2). 当 $E \notin \mathcal{M}$

对任意 $\epsilon > 0$，存在 E 的立方体覆盖 C_i 使得 $E \subset \bigcup C_i$

$$\sum m(C_i) < m_*(E) + \frac{\epsilon}{2}$$

由 C_i 为立方体，即为可测集，存在 C_i 的球覆盖 $\{B_j^i\}_{j=1}^{\infty}$ 满足

$$C_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^i$$

使得

$$\sum_j m(B_j^i) < m(C_i) + \frac{\epsilon}{2^{i+1}}$$

从而

$$\sum_i \sum_j m(B_j^i) - (\sum_i \frac{\epsilon}{2^{i+1}}) < \sum_i m(C_i) < m_*(E) + \frac{\epsilon}{2}$$

即

$$\sum_i \sum_j m(B_j^i) < m_*(E) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = m_*(E) + \epsilon$$

综上，对任意的 $\epsilon > 0$，总存在一列球 B_j 使得 $E \subset \bigcup_j B_j$ 且

$$\sum_j m(B_j) \leq m_*(E) + \epsilon$$

此即 $m_*^{\mathcal{B}}(E) \leq m_*(E)$。

Exercise 27:

由定理 3.1，曲线 $(x(t), y(t)), t \in [a, b]$ 可求长当且仅当 $x(t) \in BV[a, b], y(t) \in BV[a, b]$。从而 $x(t), y(t)$ 几乎处处可微，对 $t = t_0$, 若 $x'(t_0), y'(t_0)$ 存在，则

$$(y'(t_0))(x - x(t_0)) = (x'(t_0))(y - y(t_0))$$

即为曲线在 $t = t_0$ 处的切线。从而可求长曲线在曲线上几乎所有点有切线。

Exercise 28:

(a).

设 $\mathbb{R}^d$ 上的曲线 $r(t)=(a_1(t),a_2(t),...,a_d(t)), a\le t\le b$，则有

(1). 定理 3.1:

$r(t)$ 可求长当且仅当 $a_i(t), 1\le i\le d$ 具有有界变差。

证明：

若 $a_i(t), 1\le i\le d$ 具有有界变差。

$$\begin{aligned}|r(t_i)-r(t_{i-1})| &= |(a_1(t_i),a_2(t_i),...,a_d(t_i))-(a_1(t_{i-1}),a_2(t_{i-1}),...,a_d(t_{i-1}))|\\ &= |(a_1(t_i)-a_1(t_{i-1}),...,a_d(t_i)-a_d(t_{i-1}))|\\ &\le |(a_1(t_i)-a_1(t_{i-1})|+..+|a_d(t_i)-a_d(t_{i-1}))|\end{aligned}$$

不妨设

$$\sum_{j=1}^{N}|a_i(t_j)-a_i(t_{j-1})|\le M_i$$

令 $M=\max\{M_i, 1\le i\le d\}$

$$\begin{aligned}L(r) &= \sup_{a=t_0<t_1<...<t_N=b}\sum_{j=1}^{N}|r(t_j)-r(t_{j-1})|\\ &\le \sup_{a=t_0<t_1<...<t_N=b}\sum_{j=1}^{N}[|(a_1(t_i)-a_1(t_{i-1})|+..+|a_d(t_i)-a_d(t_{i-1}))|]\\ &\le \sum_{i=1}^{d}M_i\\ &\le Md\\ &<\infty\end{aligned}$$

从而 $r(t)$ 为可求长曲线。

若 $r(t)$ 可求长。

由

$$\sum_{i=1}^{d}|a_i(t_j)-a_i(t_{j-1})|\le d|r(t_j)-r(t_{j-1})|$$

及上述相同过程知 $a_i(t), 1\le i\le d$ 为有界变差函数。

(2). 定理 4.1:

若 $a_i(t), 1\le i\le d$ 绝对连续，则曲线可求长。若以 L 表示曲线长。

$$L=\int_a^b(\sum_{i=1}^{d}a_i'(t)^2)^{\frac{1}{2}}dt$$

证明：

由 $a_i(t)$ 绝对连续，则在 $[a,b]$ 上有有界变差，从而由定理 3.1，曲线可求长。而由命题 4.2 同样的证明过程可得

$$T_F(a,b)=\int_a^b|r'(t)|dt$$

从而

$$L=\int_a^b |r'(t)|dt=\int_a^b (\sum_{i=1}^d a_i'(t)^2)^{\frac{1}{2}}dt$$

(3). 定理 4.3:

若 $r(t)$ 表示可求长曲线，曲线长为 L。考虑以弧长为参数的 $\tilde{r}(s)=(\tilde{a}_1(s),...,\tilde{a}_d(s)),\tilde{r}(s)=r(t),s=s(t)$。则 $\tilde{a}_i(s)$ 绝对连续，且对几乎所有 $s\in[0,L]$ 有 $|\tilde{r}'(s)|=1$

$$L=\int_0^L (\sum_{i=1}^d \tilde{a}_i'(s)^2)^{\frac{1}{2}}ds$$

证明：

我们有

$$|\tilde{r}(s_1)-\tilde{r}(s_2)|\le|s_1-s_2|$$

从而 $\tilde{r}$ 绝对连续，故几乎处处可微。同时此不等式表明

$$|\tilde{r}'(s)|\le 1$$

对几乎所有 $s\in[0,L]$ 成立。

由 (2). 可知

$$L=\int_0^L |r'(s)|ds=\int_a^b (\sum_{i=1}^d a_i'(s)^2)^{\frac{1}{2}}ds$$

且由此上式与 $|\tilde{r}'(s)|\le 1$ 知该不等式几乎处处取等。即

$$|\tilde{r}'(s)|=1$$

对几乎所有 $s\in[0,L]$ 成立。

(b).

$$\mathcal{M}(K)=\lim_{\delta\to 0}\ \frac{m(K^\delta)}{m_{d-1}(B(\delta))}$$

$$\mathcal{M}_*(K)=\liminf_{\delta\to 0}\frac{m(K^\delta)}{m_{d-1}(B(\delta))}$$

$$\mathcal{M}^*(K)=\limsup_{\delta\to 0}\frac{m(K^\delta)}{m_{d-1}(B(\delta))}$$

(1). 命题 4.5：

设曲线 $\Gamma=\{r(t),a\le t\le b\}$ 为一条拟简单曲线。若 $\mathcal{M}_*(\Gamma)<\infty$，则曲线可求长。若以 L 表示曲线长度，则

$$L\le\mathcal{M}_*(\Gamma)$$

证明：

由与引理 4.6 类似证明可得其在 $\mathbb{R}^d$ 上的结果：

若 $\Gamma=\{r(t),a\le t\le b\}$ 为曲线，$\Delta=|r(b)-r(a)|$ 表示两端点间的距离，则

$$m(\Gamma^\delta)\ge m_{d-1}(B(\delta))\Delta$$

现对命题 4.5，设曲线为简单曲线。令 P 为 $[a,b]$ 上任意分割 $a=t_0<t_1<...<t_N=b$，L_P 为相应的多边折线的长度，即

$$L_P=\sum_{j=1}^{N}|r(t_j)-r(t_{j-1})|$$

对任意 $\epsilon>0$，$r(t)$ 的连续性使得存在合适的 N 及 (t_{j-1},t_j) 的闭子区间 $I_j=[a_j,b_j]$ 满足

$$\sum_{j=1}^{N}|r(b_j)-r(a_j)|\geq L_P-\epsilon$$

令 $\Gamma_j=\{r(t):t\in I_j\}$。由 $I_1,...,I_N$ 互不相交，紧集 $\Gamma_1,...,\Gamma_N$ 互不相交。同时

$$\bigcup_{j=1}^{N}\Gamma_j\subset\Gamma\ ,\ \bigcup_{j=1}^{N}(\Gamma_j)^\delta\subset\Gamma^\delta$$

当 δ 充分小时，$(\Gamma_j)^\delta$ 也互不相交。故应用引理 4.6

$$m(\Gamma^\delta)\geq\sum_{j=1}^{N}m((\Gamma_j)^\delta)\geq m_{d-1}(B(\delta))\sum|r(b_j)-r(a_j)|$$

即

$$\frac{m(\Gamma^\delta)}{m_{d-1}(B(\delta))}\geq L_P-\epsilon$$

取极限可得

$$\mathcal{M}_*(\Gamma)\geq L_P-\epsilon$$

而此式对任意分割和 $\epsilon>0$ 成立，从而

$$\mathcal{M}_*(\Gamma)\geq L$$

对拟简单曲线只需令 P 的分割点包含那些有限的非单射的点即可。故此定理得证。
(2). 命题 4.7：
设曲线 $\Gamma=\{r(t),a\leq t\leq b\}$ 为一条可求长曲线，长度为 L。则

$$\mathcal{M}^*(\Gamma)\leq L$$

证明：
由 $\mathcal{M}^*(\Gamma)$, L 为与参数无关的量，不妨取弧长参数 s。则可将曲线写为 $r(s)=(a_1(s),...,a_d(s)),0\leq s\leq L$。由 (a).$r(s)$ 绝对连续且对几乎所有 $s\in[0,L],|r'(s)|=1$。
先固定一个 $\epsilon,0<\epsilon<1$，令可测集 $E_\epsilon\subset\mathbb{R}$ 和正数 r_ϵ 满足 $m(E_\epsilon)<\epsilon$ 且对所有 $s\in[0,L]-E_\epsilon$

$$\sup_{0<|h|<r_\epsilon}|\frac{r(s+h)-r(s)}{h}-r'(s)|<\epsilon$$

此处 E_ϵ,r_ϵ 存在性可由 Egorov's 定理即 $r(s)$ 连续性及原命题 4.7 的证明得出。
现对任意 $0<\rho<r_\epsilon(\rho<1)$，将 $[0,L]$ 分割为连续的闭区间且每一个长为 ρ(最后一个区间长度可

能 $\le \rho$)。将这些区间记为 $I_1, ...I_N$ 并将其分为两类：
将有性质 $I_j \not\subseteq E_\epsilon$ 的区间称为"good" 区间。
将有性质 $I_j \subset E_\epsilon$ 的区间称为"bad" 区间。
从而

$$\bigcup_{I_j \ bad} \subset E_\epsilon$$

从而有小于 ϵ 的测度。
我们有 $[0, L] \subset \bigcup_{j=1}^N I_j$，令 $\Gamma_j = \{r(s) : s \in I_j\}, \Gamma = \bigcup_{j=1}^N \Gamma_j, \Gamma^\delta = \bigcup_{j=1}^N (\Gamma_j)^\delta$，从而 $m(\Gamma^\delta) \le \sum_{j=1}^N m((\Gamma_j)^\delta)$。
现在考虑好的区间，对任一好的区间 $I_j, \exists s_0 \in I_j, s_0 \notin E_\epsilon$，从而

$$\sup_{0<|h|<r_\epsilon} |\frac{r(s_0+h) - r(s_0)}{h} - r'(s_0)| < \epsilon$$

取坐标系使得 $r(s_0) = 0, r'(s_0) = 1$。
注意到 h 在 $[a_j - s_0, b_j - s_0]$ 上变化，$s_0 + h$ 在 $I_j = [a_j, b_j]$ 上变化，$|h| \le \rho < r_\epsilon$, 由前式

$$\sup_{0<|h|<r_\epsilon} |\frac{r(s_0+h) - r(s_0)}{h} - r'(s_0)| < \epsilon$$

知

$$|r(s_0+h) - h| < \epsilon|h|$$

从而 Γ_j 包含在

$$[a_j - s_0 - \epsilon\rho, b_j - s_0 + \epsilon\rho] \times B_{d-1}(\epsilon\rho)$$

中。
故 $(\Gamma_j)^\delta$ 包含在

$$[a_j - s_0 - \epsilon\rho - \delta, b_j - s_0 + \epsilon\rho + \delta] \times B_{d-1}(\epsilon\rho + \delta)$$

中。后者有测度

$$(\rho + 2\epsilon\rho + 2\delta) m_{d-1}(B(\epsilon\rho + \delta))$$

因此对 $\epsilon \le 1$

$$m((\Gamma_j)^\delta) \le m_{d-1}(B(\delta))\rho + O(\epsilon\rho(\delta)^{d-1} + \delta^d + \rho(\epsilon\rho)^{d-1} + \delta(\epsilon\rho)^{d-1})$$

现考虑坏的区间：
由 $|r(s) - r(s')| \le |s - s'|$ 对所有 s, s' 成立。故 Γ_j 被包含在半径为 ρ 的球里，因此 $(\Gamma_j)^\delta$ 被包含在半径为 $\rho + \delta$ 的球里。从而有

$$m((\Gamma_j)^\delta) = O(\rho^d + \delta^d)$$

现至多有 $\frac{L}{\rho} + 1$ 个好区间和 $\frac{\epsilon}{\rho} + 1$ 个坏区间，故

$$m(\Gamma^\delta) \le (\frac{L}{\rho} + 1)[m_{d-1}(B(\delta))\rho + O(\epsilon\rho(\delta)^{d-1} + \delta^d + \rho(\epsilon\rho)^{d-1} + \delta(\epsilon\rho)^{d-1})] + (\frac{\epsilon}{\rho} + 1)[O(\rho^d + \delta^d)]$$

$$
\begin{aligned}
\frac{m(\Gamma^\delta)}{m_{d-1}(B(\delta))} &\le L + O(\rho+\epsilon+\frac{\delta}{\rho}+(1+\rho+\delta+\frac{\delta}{\rho})(\frac{\epsilon\rho}{\delta})^{d-1}+\epsilon(\frac{\rho}{\delta})^{d-1}+\frac{\rho^d}{\delta^{d-1}}+\frac{\delta}{\rho}) \\
&\le L + O(\rho+\epsilon+\frac{\delta}{\rho}+(\frac{\epsilon\rho}{\delta})^{d-1}+\frac{\rho^d}{\delta^{d-1}})
\end{aligned}
$$

取 $\rho=\frac{\delta}{\epsilon^{1-\frac{1}{d}}}$，且令 $0<\delta<\epsilon^{1-\frac{1}{d}}r_\epsilon$，则自然有 $\rho<r_\epsilon$，且

$$
\frac{m(\Gamma^\delta)}{m_{d-1}(B(\delta))} \le L + O(\frac{\delta}{\epsilon^{1-\frac{1}{d}}}+\epsilon+\epsilon^{1-\frac{1}{d}}+\frac{\delta}{\epsilon^{d-1}})
$$

故而

$$
\limsup_{\delta\to 0}\frac{m(\Gamma^\delta)}{m_{d-1}(B(\delta))} \le L + O(\epsilon+\epsilon^{1-\frac{1}{d}})
$$

现令 $\epsilon\to 0$ 即可得到

$$
\mathcal{M}^*(\Gamma)\le L
$$

Exercise 29:

取 $N\in\mathbb{Z}$ 使得 $A(\frac{1}{N})^\alpha\approx\delta$. 将 $[a,b]$ 区间 N 等分, 则对任意 $x\in[a,b]$, 存在 $0\le j\le N$ 使得 $|x-\frac{j}{N}|\le 1/N$, 利用 Lipschitz 条件得 $|z(x)-z(\frac{j}{N})|\le A(\frac{1}{N})^\alpha\approx\delta$. 于是 $\Gamma\subset\bigcup_j B(z(\frac{j}{N}),\delta)$.

设 $x\in\Gamma^\delta$, 则 $d(x,\Gamma^\delta)<\delta$, 于是存在 $y_0\in\Gamma$ 使得 $d(x,y_0)<\delta$, 此时必存在某个 j 使得 $d(x,z(\frac{j}{N}))\le d(x,y_0)+d(y_0,z(\frac{j}{N}))<2\delta$, 由 x 的任意性知

$$
\Gamma^\delta\subset\bigcup_{j=0}^{N}B\left(z(\frac{j}{N}),2\delta\right),
$$

结合 $(\frac{\delta}{A})^{-1/\alpha}\approx N$ 可得 $m(\Gamma^\delta)\le(N+1)\cdot m(B_{2\delta})=O(\delta^{2-1/\alpha})$.

Exercise 30:

(a).

由有界变差函数可写为两个单增有界变差函数之差，只需证明当 F 为单增有界函数时有题目结论。

不妨设 $h>0$

$$
\int_{\mathbb{R}}|F(x-h)-F(x)|=\int_{\mathbb{R}}F(x)-F(x-h)=\int_{\mathbb{R}}F(x+h)-F(x)
$$

则对任意区间 $[a,a+h]$

$$
F(x+h)-F(x)\le F(a+2h)-F(a)
$$

从而

$$
\int_a^{a+h}F(x+h)-F(x)\le h(F(a+2h)-F(a))
$$

特别的对任意 $n\in\mathbb{Z}$

$$
\int_{nh}^{(n+1)h}F(x+h)-F(x)\le h(F((n+2)h)-F(nh))
$$

则对任一 N

$$\begin{aligned}\int_{-Nh}^{Nh} F(x+h)-F(x) &\le h\sum_{n=-N}^{N-1} F((n+2)h)-F(nh)\\ &\le h(F((N+1)h)+F(Nh)-F((-N+1)h)-F(-Nh))\\ &\le 2h(F(+\infty)-F(-\infty))\end{aligned}$$

由 F 为有界函数，存在 $2(F(+\infty)-F(-\infty))<A<\infty$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x+h)-F(x)|dx \le A|h|$$

(b).

$$F(x+h)\phi(x+h)-F(x)\phi(x)=F(x)(\phi(x+h)-\phi(x))+\phi(x+h)(F(x+h)-F(x))$$

两边同时在 $\mathbb{R}$ 上积分得

$$LHS=0=RHS$$

$$\begin{aligned}|\int_{\mathbb{R}} F(x)(\phi(x+h)-\phi(x))dx| &= |\int_{\mathbb{R}} \phi(x+h)(F(x+h)-F(x))|\\ &\le \int_{\mathbb{R}} |\phi(x+h)||F(x+h)-F(x)|dx\\ &\le \int_{\mathbb{R}} |F(x+h)-F(x)|dx\\ &\le A|h|\end{aligned}$$

因此

$$|\int_{\mathbb{R}} F(x)\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}dx| \le A$$

由 ϕ 为有界支集的 C^1 函数，ϕ 有紧支集 K。故 ϕ' 在 K^c 上为 0。因此存在 M 使得 $|\phi'|\le M$。设 L 为 F 在 K 上的最大值则

$$F(x)\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}$$

被函数 $ML\chi_K$ 控制，现由控制收敛定理，当 $h\to 0$ 时有

$$|\int_{\mathbb{R}} F(x)\phi'(x)dx| \le A$$

Exercise 31:

对 $[0,\overline{x}]$ 上的分割 $0=t_0<t_1<...<t_n=\overline{x}$

$$\sum_{j=1}^{n}\sqrt{(t_j-t_{j-1})^2+(F(t_j)-F(t_{j-1}))^2} \le \sum_{j=1}^{n}(t_j-tj-1)+(F(t_j)-F(t_{j-1}))=\overline{x}+F(\overline{x})$$

故对增函数 $F, F(0)=0, L(\overline{x})\le \overline{x}+F(\overline{x})$。

考虑 Cantor-Lebesgue 函数构造中 $F_n(x)\to F(x)$，$[0,1]$ 区间被分为 $2^{n+1}-1$ 个小区间，其中 F_n 在 2^n-1 个小区间上为常值。记 $2^{n+1}-1$ 个区间为 $I_1,C_1,I_2,C_2,...,C_{2^n-1},I_{2^n}$。区间 I_j 长度为

$\frac{1}{3^n}$，总长为 $\frac{2^n}{3^n}$，区间 C_j 总长为 $1-\frac{2^n}{3^n}$。
对 $\overline{x}\in[0,L]$ 考虑分割 P_n，其中包含所有小于或等于 $\overline{x}$ 的区间 C_j,I_j 的端点为分割点。故对 $P_n: 0=t_0<t_1<...<t_m=\overline{x}$，$F_n$ 在 $[t_0,t_1]$ 上单调递增，在 $[t_1,t_2]$ 上为常数，在 $[t_2,t_3]$ 上单调递增……
注意到 $F(t_j)=F_n(t_j)$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}\sqrt{(t_j-t_{j-1})^2+(F(t_j)-F(t_{j-1}))^2}\\
=&\sum_{\substack{j=1\\ j\ odd}}^{m}\sqrt{(t_j-t_{j-1})^2+(F(t_j)-F(t_{j-1}))^2}+\sum_{\substack{j=1\\ j\ even}}^{m}\sqrt{(t_j-t_{j-1})^2+(F(t_j)-F(t_{j-1}))^2}\\
\geq&\sum_{\substack{j=1\\ j\ odd}}^{m}(F(t_j)-F(t_{j-1}))+\sum_{\substack{j=1\\ j\ even}}^{m}(t_j-t_{j-1})\\
=&F(\overline{x})+\sum_k|C_k\cap[0,\overline{x}]|\\
=&F(\overline{x})+\overline{x}-\sum_k|I_k\cap[0,\overline{x}]|\\
\geq&F(\overline{x})+\overline{x}-\sum_k|I_k|\\
=&F(\overline{x})+\overline{x}-(\frac{2}{3})^n
\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，得到 $L(\overline{x})\geq\overline{x}+F(\overline{x})$。
从而有 $L(\overline{x})=\overline{x}+F(\overline{x})$。

Exercise 32:

(1). 若 f 满足 *Lipschitz* 条件

$$|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$$

则自然对 $\forall\epsilon>0$，$\exists\delta=\frac{\epsilon}{M}$，当 $\sum|b_j-a_j|<\delta$ 时

$$\sum|f(b_j)-f(a_j)|<\epsilon$$

故 f 绝对连续。从而 f 几乎处处可微
设 x 满足 $f'(x)$ 存在，则对任意 h

$$|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}|\leq M$$

取极限得 $|f'(x)|\leq M$。
(2). 若 $(i),(ii)$ 条件满足
由 f 绝对连续，f 几乎处处可微，对 x,y 不妨设 $x<y$：

$$|f(x)-f(y)|=|\int_y^x f'(t)dt|\leq\int_x^y|f'(t)|dt\leq\int_x^y Mdt=M|x-y|$$

即 f 满足 *Lipschitz* 条件。

Problems

Problem 1:

由 $0 < m_*(E) < \infty$，存在开集 U 使得 $E \subset U$ 且

$$m(U) \leq (1 + \frac{1}{7^d})m_*(E)$$

对 $\mathcal{B}$ 中属于 U 的开球的集合存在 $\mathcal{B}$ 中的不相交的开球 $B_i = B(x_i, r_i) \in \mathcal{B}$

$$E \subset \bigcup_i B(x_i, 5r_i)$$

则

$$\frac{1}{5^d}m_*(E) \leq \frac{1}{5^d}\sum_i m(B(x_i, 5r_i)) \leq \sum_i m(B(x_i, r_i))$$

从而存在 k_1 使得

$$\frac{1}{6^d}m_*(E) \leq \sum_{i=1}^{k_1} m(B_i)$$

令

$$E_1 = E \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i$$

有

$$m_*(E_1) \leq m(U \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i) = m(U) - \sum_{i=1}^{k_i} m(B_i) \leq (1 + \frac{1}{7^d} - \frac{1}{6^d})m_*(E) = um_*(E)$$

其中

$$u = 1 + \frac{1}{7^d} - \frac{1}{6^d} < 1$$

现 E_1 为开集 $\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i$，从而可找到开集 U_1 使得 $E_1 \subset U_1 \subset \mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i$

$$m(U_1) \leq (1 + \frac{1}{7^d})m_*(E_1)$$

重复上述过程，存在不交的球 $B_i \in \mathcal{B}, i = k_1 + 1, ..., k_2$，其中 $B_i \subset U_1$，$E_2 = E_1 \setminus \bigcup_{i=k_1+1}^{k_2} B_i = E \setminus \bigcup_{i=1}^{k_2} B_i$

$$m_*(E_2) \leq um_*(E_1) \leq u^2 m_*(E)$$

且有 $B_i, i = 1, ..., k_2$ 互不相交。重复此过程 m 次

$$m_*(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k_m} B_i) \leq u^m m_*(E)$$

由 $u < 1$，令 $m \to \infty$，有 $\lim_{m\to\infty} u^m = 0$，从而得到 B_i 互不相交满足

$$m_*(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = 0$$

现对任意 $\eta > 0$，存在 k 充分大使得

$$\frac{1}{7^{d+k}}m_*(E) < \eta$$

再对上过程中的开集 U 令其满足 $m(U) \le (1+\frac{1}{7^{d+k}})m_*(E)$ 就有

$$\sum_{j=1}^{\infty}|B_j| = m(\bigcup B_i) \le m(U) \le (1+\eta)m_*(E)$$

Problem 2:

对 $\mathcal{I} = \bigcup_{i=1}^{N} I_i$ 这有限个区间，存在所有区间中有最左端端点的区间，记为 I_1'。对 $\mathcal{I}\setminus I_1'$，除去所有包含于 I_1' 的区间：

(1). 若剩下 $N-1$ 个区间中没有与 I_1' 相交的区间，则再选择有最左端端点的区间，记为 I_2'。

(2). 若存在区间属于 $\mathcal{I}\setminus I_1'$ 且与 $I_1\prime$ 相交，选择其中有最右端端点的区间记为 I_1''。

对 (1) 中的 $\mathcal{I}\setminus\{I_1'\cup I_2'\}$，或 (2) 中的 $\mathcal{I}\setminus\{I_1'\cup I_1''\}$ 重复此过程有限步即可选择 $I_1,...,I_N$ 的各子区间 $\bigcup_{i=1}^{K} I_k'$ 与 $\bigcup_{l=1}^{L} I_l''$。且任一族区间中的各区间互不相交。

对情况 (2). 中任意与 I_1' 相交的区间 I，设 $I_1' = (a,b), I_1'' = (c,d), I = (e,f)$，则 $a \le e < f \le d$，且 $a \le c < b \le d$，则 $I \subset I_1' \bigcup I_1''$。故对任意 $\mathcal{I}$ 中的区间 I_a

$$I_a \subset \bigcup_{i=1}^{K} I_k' \cup \bigcup_{l=1}^{L} I_l''$$

从而两族区间满足

$$\bigcup_{j=1}^{N} I_j = \bigcup_{i=1}^{K} I_k' \cup \bigcup_{l=1}^{L} I_l''$$

Problem 3:

(1). 找出一列可数个 $\mathcal{B}$ 中的球包含 E。

由 E 为有界集，不妨设 E 与 $\mathcal{B}$ 均包含在一个以原点为中心，半径充分大的球 B_0 中，令 $E_1 = E$ 及

$$\mathcal{B}_1 = \{B(x) : B(x) \in \mathcal{B}, \text{球心 } x \in E_1\}$$

$$r_1 = \sup\{r : r\text{为 } \mathcal{B}_1 \text{ 中球的半径}\}$$

选择 $x_1 \in E_1$ 与球

$$B_1 = B_{\rho_1}(x_1) \in \mathcal{B}_1$$

其中半径 $\rho_1 > \frac{3}{4}r_1$。

若 $E_1 \subset B_1$，则达成题目要求。

若不然，令 $E_2 = E_1 - B_1$ 及

$$\mathcal{B}_2 = \{B(x) : B(x) \in \mathcal{B}, \text{球心 } x \in E_2\}$$

$$r_2 = \sup\{r : r\text{为 } \mathcal{B}_2 \text{ 中球的半径}\}$$

选择 $x_2 \in \mathcal{B}_2$ 与球

$$B_2 = B_{\rho_2}(x_2) \in \mathcal{B}_2$$

其中半径 $\rho_2 > \frac{3}{4}r_2$。
重复此过程，可得到可数个集合 E_n 和球 B_n 及集合 $\mathcal{B}_n$，整数 r_n 满足

$$E_n = E - \bigcup_{j=1}^{n-1} B_j, \quad x_n \in E_n$$

$$\mathcal{B}_n = \{B(x) : B(x) \in \mathcal{B}, \text{球心 } x \in E_n\}$$

$$r_n = \sup\{r : r\text{为 } \mathcal{B}_n \text{ 中球的半径}\}$$

$$B_n = B_{\rho_n}(x_n) \in \mathcal{B}_n$$

其中半径 $\rho_n > \frac{3}{4}r_n$。
由此构造过程，若 $m > n$

$$\rho_n > \frac{3}{4}r_n \geq \frac{3}{4}r_m \geq \frac{3}{4}\rho_m$$

因 $x_m \notin B_n$，

$$|x_n - x_m| > \rho_n = \frac{1}{3}\rho_n + \frac{2}{3}\rho_n \geq \frac{1}{3}\rho_n + \frac{1}{3}\rho_m$$

故各球 $B_{\frac{1}{3}3\rho_n}(x_n)$ 互不相交。当 $n \to \infty$ 时 $\rho_n \to 0$。
下证 $E \subset \bigcup_n B_n$。若不然：
存在 $x \in E \setminus \bigcup_n B_n$ 及以 x 为球心，以 ρ 为半径的球 $B_\rho(x)$。由以上构造过程，对任意 $n \in \mathbb{N}$ 必有

$$B_\rho(x) \subset \mathcal{B}_n$$

因此 $0 < \rho \leq r_n \to 0$，$\rho = 0$ 矛盾。此即 $E \subset \bigcup_n B_n$。

(2). 存在一个只与维数 d 有关的整数 N 满足：对任意 $k \in \mathbb{N}$，在集合 $\{B_1, B_2, ..., B_k\}$ 中至多有 N 个球与 B_k 相交。
对任意 $k \in \mathbb{N}$，考虑球 $B_j, j = 1, 2, ..., k$ 中与 $B_k = B_{\rho_k}(x_k)$ 相交的球，并将其分为两类：

$$\mathcal{G}_1 = \{B_j = B_{\rho_j}(x_j) : j = 1, ..., k, B_j \cap B_k \neq \emptyset, \rho_j \leq \frac{3}{4}M\rho_k\}$$

$$\mathcal{G}_2 = \{B_j = B_{\rho_j}(x_j) : j = 1, ..., k, B_j \cap B_k \neq \emptyset, \rho_j > \frac{3}{4}M\rho_k\}$$

其中 $M > 3$ 为一个后续过程取的正整数。
(i).$\mathcal{G}_1$ 中的球的个数不超过 $4^d(M+1)^d$。
令 $\{B_{\rho_j}(x_j)\}$ 为 $\mathcal{G}_1$ 中的球，$\#\{\mathcal{G}_1\}$ 表示其数目。
由 (1).$\{B_{\frac{1}{3}\rho_j}(x_j)\}$ 互不相交。现对 $B_j \bigcap B_k \neq \emptyset$

$$|x_j - x_k| \leq \rho_j + \rho_k \leq (\frac{3}{4}M + 1)\rho_k$$

对任意 $x \in B_{\frac{1}{3}\rho_j}(x_j)$

$$|x - x_k| \leq |x - x_j| + |x_j - x_k| \leq \frac{1}{3}\rho_j + (\frac{3}{4}M + 1)\rho_k \leq (M + 1)\rho_k$$

故而 $\{B_{\frac{1}{3}\rho_j}(x_j)\} \subset B_{(M+1)\rho_k}(x_k)$。
记 m_d 为 $\mathbb{R}^d$ 中单位球的体积。

$$\sum_{j:B_j\in\mathcal{G}_1} m_d(\frac{1}{3}\rho_j)^d \leq m_d(M+1)^d\rho_k^d$$

又 $j<k$，$\rho_j > \frac{3}{4}\rho_k$, $\frac{1}{3}\rho_j > \frac{1}{4}\rho_k$

$$\#\{\mathcal{G}_1\}\cdot m_d(\frac{1}{4}\rho_k)^d \leq m_d(M+1)^d\rho_k^d$$

故

$$\#\{\mathcal{G}_1\} \leq 4^d(M+1)^d$$

(ii). 选取 M 使得 $\mathcal{G}_2$ 中的球的个数不超过定值。
对球 $B_{\rho_k}(x_k)$，令 $B_{\rho_n}(x_n)$ 与 $B_{\rho_m}(x_m)$ 为 $\mathcal{G}_2$ 中任意两个球，射线 x_kx_n 与球 $B_{\rho_n}(x_n)$ 一一对应，则射线数目即 $\#\{\mathcal{G}_2\}$。令 θ 为射线 x_kx_n 与 x_kx_m 之间所成夹角。
设 $n<m<k$，由此，$x_m \notin B_{\rho_n}(x_n)$，故

$$|x_n - x_m| > \rho_n$$

对 $x_k \notin B_{\rho_n}(x_n)\bigcup B_{\rho_m}(x_m)$

$$\rho_n < |x_n - x_k|,\quad \rho_m < |x_m - x_k|$$

由 $B_{\rho_n}(x_n)\bigcap B_k \neq \emptyset, B_{\rho_m}(x_m)\bigcap B_k \neq \emptyset$，且二者均在 $\mathcal{G}_2$ 中

$$\frac{3}{4}M\rho_k < \rho_n \leq |x_n - x_k| \leq \rho_n + \rho_k$$

$$\frac{3}{4}M\rho_k < \rho_m \leq |x_m - x_k| \leq \rho_m + \rho_k$$

由余弦定理

$$\cos(\theta) = \frac{|x_n-x_k|^2 + |x_m-x_k|^2 - |x_n-x_m|^2}{2|x_n-x_k||x_m-x_k|}$$

设 $\cos(\theta) > 0$

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &\leq \frac{(\rho_n+\rho_k)^2 + (\rho_m+\rho_k)^2 - \rho_n^2}{2\rho_n\rho_m} \\ &\leq \frac{\rho_m^2 + 2\rho_k^2 + 2\rho_k(\rho_n+\rho_m)}{2\rho_n\rho_m} \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{\rho_m}{\rho_n} + \frac{\rho_k}{\rho_n}\frac{\rho_k}{\rho_m} + \frac{\rho_k}{\rho_m} + \frac{\rho_k}{\rho_n} \\ &\leq \frac{1}{2}\frac{\rho_m}{\rho_n} + (\frac{4}{3})^2\frac{1}{M^2} + 2\frac{4}{3}\frac{1}{M}\end{aligned}$$

由 $m>n$，$\rho_n > \frac{3}{4}\rho_m$

$$\cos(\theta) \leq \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\frac{1}{M}(\frac{4}{3}\frac{1}{M} + 2)$$

现取 M 充分大，即可令 $\cos(\theta) \leq \frac{5}{6}$。取 $\theta_0 = \arccos\frac{5}{6}$
当 $d=2$ 时，x_kx_n 射线数目至多 $\frac{2\pi}{\theta_0}$，即 $\#\{\mathcal{G}_2\}$ 数目一定。

当 $d \geq 3$ 时，考虑 $\mathbb{R}^d$ 中的圆锥体与单位球面相交所得的面积即为立体角，记 $\sigma_d(\theta_0)$ 为圆锥体对应的立体角，ω_d 为 d 维单位球面积，即 d 维单位球对应的立体角，则射线数目不多于 $\frac{\omega_d}{\sigma_d(\theta_0)}$，即 $\#\{\mathcal{G}_2\}$ 数目一定。

(3).$\{B_1, B_2...\}$ 可被分入 N 族 $\mathcal{B}_1, ...\mathcal{B}_N$ 使得任一族 $\mathcal{B}_i, 1 \leq i \leq N$ 中的球均互不相交。
对 $j = 1, 2, ..., N$，将 B_j 分入 $\mathcal{B}_N$。考虑球 B_{N+1}, 由 (2).$\{B_1, ..., B_{N+1}\}$ 中至多 N 个球与 B_{N+1} 相交，则至少一个球与 B_{N+1} 不交，不妨设为 B_1，则可将 B_{N+1} 分入 $\mathcal{B}_1$。
对球 B_{N+2}, 由 (2).$\{B_1, ..., B_{N+2}\}$ 中至多 N 个球与 B_{N+2} 相交，则至少两个球与 B_{N+2} 不交。
若在球 $B_j, j = 2, ..., N$ 中有球与 B_{N+2} 不交，不妨设为 B_2，则可将 B_{N+2} 放入 $\mathcal{B}_2$。
若球 $B_j, j = 2, ..., N$ 均与 B_{N+2} 相交，则 B_1, B_{N+1} 与 B_{N+2} 不交，可将 B_{N+2} 放入 $\mathcal{B}_1$。此时 $\mathcal{B}_1$ 中有三个互不相交的球。
重复这个过程，设 $n \in \mathbb{N}$，$n-1$ 步后，

$$B_1, ..., B_N, B_{N+1}, ..., B_{N+n-1}$$

均被分入 $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_N$。任一 $\mathcal{B}_j$ 中至多有 n 个互不相交的球。对 B_{N+n}，由 (2).$\{B_1, ...B_{N+n-1}\}$ 至多 $N-1$ 个与 B_{N+n} 相交。这 $N-1$ 个球至多占 $N-1$ 类，故 $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_N$ 中至少有一族与 B_{N+n} 不交，将 B_{N+n} 分入即可。
由上述 (1).(2).(3). 过程，对任意 $\mathbb{R}^d$ 上的有界集 E 及其 *Besicovitch* 覆盖 $\mathcal{B}$，存在 $\mathcal{B}$ 的 N 个子集合 $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_N$ 满足任意 $\mathcal{B}_j$ 包含互不相交的球，且

$$E \subset \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$$

其中

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_N$$

且整数 N 只与维数 d 有关。

Problem 4:
(a).
若 $\phi(x)$ 在 (a, b) 上不连续，设其在 $x \in (a, b)$ 处不连续。则存在 $\epsilon > 0$，及一列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to x$ 满足 $x_n \in (a, b), |\phi(x_n) - \phi(x)| > \epsilon$ 对任意 n 成立。由点列 x_n 无穷，在下述两类点中必有一类有无穷多个点：
(i).$\phi(x_n) > \phi(x) + \epsilon$
(ii).$\phi(x_n) < \phi(x) - \epsilon$
现对两种情况分类讨论：
(i).
不妨设 $\{x_n\}$ 均在 (i) 类点中 (若不然，取其无穷子列，将之替代即可)。设 $\{x_n\}$ 单调地趋于 x(否则也取其单调子列即可)。令 $L(\theta) = \theta\phi(x_1) + (1-\theta)\phi(x), \theta \in [0, 1]$。则 $L(\theta)$ 为关于 θ 的连续函数。故存在 $\delta > 0$，使得当 $|\theta| < \delta$ 时有 $L(\theta) - \phi(x) < \epsilon$，即 $L(\theta) < \phi(x) + \epsilon$。

现令 $\theta_n = \frac{x_n - x}{x_1 - x}$。由 $\{x_n\}$ 单调地趋于 x，$0 \le \theta_n \le 1$。反解出 $x_n = \theta_n x_1 + (1-\theta_n)x$，故当 $n \to \infty$ 时，$\theta_n \to 0$。当 n 充分大时，$\theta_n < \delta$，则有

$$\phi(x_n) = \phi(\theta_n x_1 + (1-\theta_n)x) \le \theta_n \phi(x_1) + (1-\theta_n)\phi(x) = L(\theta_n) < \phi(x) + \epsilon$$

这与假设 $\phi(x_n) > \phi(x) + \epsilon$ 矛盾。

(ii).

如 (i). 中不妨设 $\{x_n\}$ 单调地趋于 x。令 $y \in (a,b)$ 使得对任意 n，x 在 y, x_n 之间。

令 $\theta_n = \frac{x-y}{x_n - y}$，则 $0 \le \theta_n \le 1$ 且当 $n \to \infty$ 时，$\theta \to 1$。同样反解出 $x = \theta_n x_n + (1-\theta_n)y$

$$\phi(x) = \phi(\theta_n x_n + (1-\theta_n)y) \le \theta_n \phi(x_n) + (1-\theta_n)\phi(y)$$

对任意 n 成立。由 $\theta_n \to 1$ 且 $\phi(x_n) < \phi(x) - \epsilon$

$$\phi(x) < \phi(x) - \epsilon$$

矛盾。综 (i).(ii). 得，$\phi(x)$ 在 (a,b) 上连续。

(b).

由数学分析内容，函数 ϕ 在区间 (a,b) 上是凸函数，当且仅当对任意 $(x_1, x_2) \subset (a,b)$ 及任何 $x \in (x_1, x_2)$ 有

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

现对 $[a', b'] \subset (a,b)$，取 $h > 0$ 满足 $[a'-h, b'+h] \subset (a,b)$。对任意 $x, y \in [a', b']$，不妨令 $x < y$。由 $a' - h < a' \le x < y \le b' < b' + h$ 及以上不等式有

$$\frac{\phi(a') - \phi(a'-h)}{h} \le \frac{\phi(y) - \phi(a'-h)}{y - a' + h} \le \frac{\phi(y) - \phi(x)}{y - x} \le \frac{\phi(b'+h) - \phi(x)}{b' + h - x} \le \frac{\phi(b'+h) - \phi(b')}{h}$$

令 $m = \frac{\phi(a') - \phi(a'-h)}{h}, M = \frac{\phi(b'+h) - \phi(b')}{h}$，则当 $[a', b']$ 确定时，m, M 为常数。则有

$$m|y - x| \le |\phi(y) - \phi(x)| \le M|y - x|$$

此即 $\phi(x)$ 在 $[a', b']$ 上满足一阶 *Lipschitz* 条件，因此 ϕ 在 (a,b) 的任意子区间上绝对连续。

(c).

对任意 $[x,y] \subset (a,b)$，由 (b).$\phi(x)$ 在 $[x,y]$ 上绝对连续，故有 ϕ 在 $[x,y]$ 上几乎处处可微，且

$$\phi(y) - \phi(x) = \int_x^y \phi'(t)dt$$

现对任意 $x \in (a,b)$，由 $\phi(x)$ 为凸函数及 (b). 中不等式，$\frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}$ 为关于 h 的增函数。

故有

$$D^+ = D_+, \quad D^- = D_-, \quad |D^+|, |D^-| < \infty, \quad D^+ \ge D^-$$

对 $x < y$，由题目所给不等式

$$D^+\phi(x) \le D^-\phi(y)$$

又 $D^- \le D^+$ 知这两个函数均为单调递增函数。
下证 $D^+ = D^-$ 对除至多可数个点之外的所有点成立。
令 $\{x_\alpha\}$ 为所有使得 $D^+ \neq D^-$ 的点。取 $j_\alpha > 0, j_\alpha = D^+(\phi)(x_\alpha) - D^-(\phi)(x_\alpha)$。则对任意子区间 $[a', b']$，若 $\{x_1, ..., x_n\} \subset [a', b'], x_k \le x_{k+1}$，取 $x_0 = a', x_{n+1} = b'$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n+1}(D^+(\phi)(x_k) - D^-(\phi)(x_k)) \\ \le&\sum_{k=1}^{n+1}(D^+(\phi)(x_k) - D^-(\phi)(x_k)) + \sum_{k=1}^{n+1}(D^-(\phi)(x_k) - D^+(\phi)(x_{k-1})) \\ =&D^+(\phi)(b') - D^-(\phi)(a')\end{aligned}$$

故所有这样的有限子和有界。于是

$$\sum_{x\in[a',b']}(D^+(\phi)(x) - D^-(\phi)(x)) = \sum_{x_\alpha\in[a',b']} j_\alpha$$

有限。因此这个和式只能包含至多可数个非零项，即至多可数个 $[a', b']$ 上的点满足 $D^-(\phi)(x) \neq D^+(\phi)(x)$。
对区间 (a, b)，可将其写为可数个闭子区间之并

$$(a, b) = \bigcup_n [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$$

因此区间 (a, b) 上使得 $D^-(\phi)(x) \neq D^+(\phi)(x)$ 的点有至多可数个。在这至多可数个点之外，有 $D_- = D^- = D^+ = D_+, |D^+|, |D^-| < \infty$，即 ϕ' 存在。对 $x < y$，$D^+\phi(x) \le D^-\phi(y)$，即 $\phi' = D^+\phi$ 为递增的函数。且

$$\phi(y) - \phi(x) = \int_x^y \phi'(t)dt$$

(d).
要证 $\phi(x)$ 在 (a, b) 上为凸函数，只需证明对任意 $x_1, x_2 \in (a, b), 0 \le \theta \le 1$

$$\phi(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \le \theta\phi(x_1) + (1-\theta)\phi(x_2)$$

不失一般性，不妨令 $x_1 < x_2$。

$$
\begin{aligned}
\phi(\theta x_1+(1-\theta)x_2) &= \int_c^{\theta x_1+(1-\theta)x_2}\psi(t)dt \\
&= \int_c^{x_2}\psi(t)dt - \int_{\theta x_1+(1-\theta)x_2}^{x_2}\psi(t)dt \\
&= \int_c^{x_2}\psi(t)dt - \theta\int_{\theta x_1+(1-\theta)x_2}^{x_2}\psi(t)dt - (1-\theta)\int_{\theta x_1+(1-\theta)x_2}^{x_2}\psi(t)dt \\
&\le \int_c^{x_2}\psi(t)dt - \theta\int_{\theta x_1+(1-\theta)x_2}^{x_2}\psi(t)dt - (1-\theta)\theta(x_2-x_1)\psi(\theta x_1+(1-\theta)x_2) \\
&\le \int_c^{x_2}\psi(t)dt - \theta\int_{\theta x_1+(1-\theta)x_2}^{x_2}\psi(t)dt - \theta\int_{x_1}^{\theta x_1+(1-\theta)x_2}\psi(t)dt \\
&= \int_c^{x_2}\psi(t)dt - \theta\int_{x_1}^{x_2}\psi(t)dt \\
&= \int_c^{x_2}\psi(t)dt - \theta\int_c^{x_2}\psi(t)dt + \theta\int_c^{x_1}\psi(t)dt \\
&= \theta\int_c^{x_1}\psi(t)dt + (1-\theta)\int_c^{x_2}\psi(t)dt \\
&= \theta\phi(x_1)+(1-\theta)\phi(x_2)
\end{aligned}
$$

即命题得证，$\phi(x)$ 为 (a,b) 上的凸函数。

Problem 5:

(1). 若对几乎所有 $x\in[a,b]$，$F'(x)\ge 0$，则有 $F(b)\ge F(a)$，即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增。

令 E 为所有满足的 $F'(x)<0$ 点的集合，则 $m(E)=0$。

由 $Exercise$ 25 中的构造，存在单调递增且绝对连续的函数 $\Phi(x)=\int_0^x f(y)dy$，其中 $f=\sum_n \chi_{O_n}$，O_n 为包含 E 的开集且存在开球 $B_n\subset O_n, x\in B_n, m(O_n)<\frac{1}{2^n}$。则 $f(x)$ 为可积函数且 $\int_{\mathbb{R}}|f|\le 1$。则 $|\Phi(x)|\le 1$，且对任意 $x\in E$，有 $D_+(\Phi)(x)=D_-(\Phi)(x)=\infty$，自然有 $D^+(\Phi)(x)=\infty$。

对任意实数 δ，考虑函数 $F+\delta\Phi$。则对任意 $x\in[a,b]$，$(D^+(F+\delta\Phi))(x)\ge 0$，由 $Exercise$ 23(a).，$F+\delta\Phi$ 在 $[a,b]$ 上单调递增。故对任意 $x_1,x_2\in[a,b], x_1\le x_2$ 有

$$F(x_1)+\delta\Phi(x_1)\le F(x_2)+\delta\Phi(x_2)$$

若 $F(x_1)>F(x_2)$，则存在 $\epsilon>0$ 使得 $F(x_1)-F(x_2)>\epsilon>0$，故而

$$\epsilon<F(x_1)-F(x_2)\le\delta\Phi(x_2)-\delta\Phi(x_1)\le\delta|\Phi(x_2)-\Phi(x_1)|\le 2\delta$$

但由 δ 的任意性，取 $\delta<\frac{\epsilon}{2}$，则矛盾。

故而 $F(x_1)\le F(x_2)$，即 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增。

(2). 证明题目中的 F 绝对连续。

将 $F'(x)$ 分解为其正部函数与负部函数之差，即

$$F'(x)=(F'(x))^+-(F'(x))^-,\ (F'(x))^+\ge 0,\ (F'(x))^-\ge 0$$

令 $G(x)=\int_a^x(F'(t))^+dt$，则 $G(x)$ 绝对连续，$G'(x)$ 几乎处处存在，对几乎所有 $x\in[a,b]$

$$G'(x)=(F'(x))^+\ge 0$$

令 $H=G-F$，对几乎所有 $x\in[a,b]$

$$H'=(F'(x))^+-F'(x)=(F'(x))^-\geq 0$$

由 (1)，H,G 均在 $[a,b]$ 上单调递增。对任意 $x_1<x_2,x_1,x_2\in[a,b]$

$$H(x_2)\geq H(x_1)$$

$$G(x_2)-F(x_2)\geq G(x_1)-F(x_1)$$

故

$$F(x_2)-F(x_1)\leq G(x_2)-G(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}(F'(t))^+dt\leq\int_{x_1}^{x_2}|F'(t)|dt$$

令 $-F$ 代 F 重复上述过程，则 $(-F)'=(-F'(x))^+-(-F'(x))^-=(F'(x))^--(F'(x))^+$，故有

$$-F(x_2)+F(x_1)\leq\int_{x_1}^{x_2}(F'(t))^-dt\leq\int_{x_1}^{x_2}|F'(t)|dt$$

从而有

$$|F(x_2)-F(x_1)|\leq\int_{x_1}^{x_2}|F'(t)|dt$$

故

$$\sum_n|F(b_n)-F(a_n)|\leq\sum_n\int_{a_n}^{b_n}|F'(t)|dt$$

由 F' 可积，F 绝对连续，由定理 3.11

$$F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)dx$$

Problem 6:

(1).

对 $\mathbb{R}$ 上的有界函数 F，有条件

(a). 存在常数 A 及任意 $h\in\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}}|F(x+h)-F(x)|dx\leq A|h|$$

(b). 对任意 C^1 有界支集函数 ϕ 满足 $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\phi(x)|\leq 1$

$$|\int_{\mathbb{R}}F(x)\phi'(x)dx|\leq A$$

(c).F 在 $\mathbb{R}$ 上有有界变差。即对任意 $\mathbb{R}$ 上的有界子区间 $[a,b],a<b\in\mathbb{R}$，$\sup_{a,b}T_F(a,b)<\infty$。

由 Exercise 30，(a) 可推出 (b)，(c) 可推出 (a)。

现若有界函数 F 满足 (b):

对 $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$$|\int_{\mathbb{R}}F(x)\phi'(x)|\leq A\|\phi\|_\infty$$

由 $Riesz$ 表示定理，存在唯一的测度 μ 使得

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\phi'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)d\mu$$

记

$$G(x) = \begin{cases} \mu((0,x]), & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\mu((-x,0]), & x < 0 \end{cases}$$

则 G 为有界变差函数。

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\phi'(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x)dG \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}} G\phi'(x)dx$$

从而对任意 $\phi \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} (F(x) - G(x))\phi'(x)dx = 0$$

在上述过程中，$(*)$ 处使用的“分步积分”有如下合理性：对任意 $G(x) \in BV$ 右连续，将 $d\mu_G$ 写为 dG，$\phi(x) \in C_c^{\infty}$

$$\int_{(a,b]} \phi d\mu_G + \int_{(a,b]} G d\mu_\phi = \phi(b)G(b) - \phi(a)G(a) = \int_{(a,b]} \phi dG + \int_{(a,b]} G d\phi$$

考虑 $\Omega = \{(x,y) : a < x \le y \le b\}$，由 Fubini 定理

$$\begin{aligned} \mu_G \times \mu_\phi(\Omega) &= \int_{(a,b]} \int_{(a,y]} d\mu_G(x) d\mu_\phi(y) \\ &= \int_{(a,b]} (G(y) - G(a)) d\mu_\phi(y) \\ &= \int_{(a,b]} G(y) d\mu_\phi(y) - G(a)(\phi(b) - \phi(a)) \end{aligned}$$

同样有

$$\begin{aligned} \mu_G \times \mu_\phi(\Omega) &= \int_{(a,b]} \int_{[x,b]} d\mu_\phi(y) d\mu_G(x) \\ &= \int_{(a,b]} (\phi(b) - \phi(x)) d\mu_G(x) \\ &= \phi(b)(G(b) - G(a)) - \int_{(a,b]} \phi(x) d\mu_G \end{aligned}$$

故有

$$\int_{(a,b]} \phi d\mu_G + \int_{(a,b]} G d\mu_\phi = \phi(b)G(b) - \phi(a)G(a)$$

下证对 $f \in L([a,b])$，若对其支集在 (a,b) 内且可微的任一函数 $\phi(x)$

$$\int_a^b f(x)\phi'(x)dx = 0$$

则 $f(x) = c$ a.e.$x \in [a,b]$，其中 c 为常数。
对任意支集 (a,b) 内的连续函数 $g(x)$，令连续函数 $h(x)$ 满足：$supp\ h \subset (a,b)$，且 $\int_a^b h(x)dx = 1$。令

$$\phi(x) = \int_a^x g(t)dt - \int_a^x h(t)dt \cdot \int_a^b g(t)dt, \quad x \in [a,b]$$

当 $x \in \mathbb{R} \setminus (a,b)$，$\phi(x) = 0$，故 $supp\ \phi(x) \subset (a,b)$，且

$$\phi'(x) = g(x) - h(x) \int_a^b g(t)dt$$

从而有

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b f(x)\phi'(x)dx \\
&= \int_a^b f(x)(g(x) - h(x)\int_a^b g(t)dt)dx \\
&= \int_a^b f(x)g(x)dx - \int_a^b f(x)h(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx \\
&= \int_a^b (f(x) - \int_a^b f(t)h(t)dt)g(x)dx
\end{aligned}$$

对任意 $t(x) \in L(\mathbb{R})$，若对任一 $\mathbb{R}$ 上紧支集连续函数 $p(x)$

$$\int_{\mathbb{R}} t(x)q(x) = 0$$

则 $t(x) = 0$，a.e.$x \in \mathbb{R}$。
（若不然，不妨设存在有界正测集 E 使得 $0 < t(x)$，则可作紧支集连续函数列 $\{q_k(x)\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\chi_E(x) - q_k(x)|dx = 0$$

其中 $|q_k(x)| \le 1$

$$\lim_{k\to\infty} q_k(x) = \chi_E(x),\ a.e.x \in E$$

故

$$0 < \int_E t(x)dx = \int_{\mathbb{R}} t(x)\chi_E(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} t(x)q_k(x)dx = 0$$

）
由此，$f(x) - \int_a^b f(t)h(t)dt = 0$ a.e.$x \in [a,b]$。
从而 $F(x) = G(x)$ a.e.$x \in \mathbb{R}$。即若条件 (b). 成立，则存在 $\mathbb{R}$ 上的有界变差函数 G 使得 $F(x) = G(x)$ a.e.$x \in \mathbb{R}$。
(2).
对 $\mathbb{R}^d$，由 Exercise 30 及上述过程同样有：
若 F 为 $\mathbb{R}^d$ 上的有界函数则以下两条件等价：
(a'). 对任意 $h \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |F(x+h) - F(x)|dx \le A|h|$$

(b'). 对 $j = 1, \cdots, d$

$$|\int_{\mathbb{R}^d} F(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j} dx| \le A$$

其中 $\phi \in C^1$，且有有界支集，满足 $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\phi(x)| \le 1$。

Problem 7:

(a).

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e^{2\pi i 2^n x}$$

对任意 $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned}
|f_1(x) - f_1(y)| &\le \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |e^{2\pi i 2^n x} - e^{2\pi i 2^n y}| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} |e^{2\pi i 2^n x} - e^{2\pi i 2^n y}|^{1-\alpha} |e^{2\pi i 2^n x} - e^{2\pi i 2^n y}|^{\alpha} \\
&\le \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} 2^{1-\alpha} |e^{2\pi i 2^n x} - e^{2\pi i 2^n y}|^{\alpha} \\
&\le 2^{1-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} (2\pi 2^n)^{\alpha} |x-y|^{\alpha} \\
&= 2\pi^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(1-\alpha)} |x-y|^{\alpha} \\
&\le \frac{2\pi^{\alpha}}{1 - 2^{\alpha-1}} |x-y|^{\alpha} \\
&= A_{\alpha} |x-y|^{\alpha}
\end{aligned}$$

此即 $|f_1(x) - f_1(y)| \le A_{\alpha}|x-y|^{\alpha}$。

(b).

对函数

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} e^{2\pi i 2^n x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} (\cos(2\pi 2^n x) + i \sin(2\pi 2^n x))$$

由 $Weierstrass$ 构造的在 $\mathbb{R}$ 的例子，当 $0 < a < 1, b > 1, ab \ge 1$ 时以下两函数处处不可微

$$C(x) = \sum a^n \cos b^n \pi x, \quad S(x) = \sum a^n \sin b^n \pi x$$

令 $a = \frac{1}{2}, b = 2$，可知

$$g(x) = \sum 2^{-n} e^{2^n \pi i x}$$

在 $\mathbb{R}$ 上处处不可微。则自然 $f_1(x) = g(2x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上处处不可微。

Problem 8:

(a).

不妨设 $x=(x_1,x_2)$ 在第一象限。
令 B 为单位球，考虑函数 $\phi(x)=\frac{\chi_B(x)}{m(B)}$。对任意 $\delta>0$，令

$$\phi_\delta(x)=\frac{\phi(\frac{x}{\delta})}{\delta^2}=\frac{\chi_{\delta B}(x)}{m(\delta B)}$$

则

$$\int_{\mathbb{R}^2}\phi_\delta(x)=1$$

对

$$(\phi_\delta)^*_{\mathcal{R}}(x)=\sup_{R\in\mathcal{R}}\frac{1}{m(R)}\int_R|\phi_\delta(x-y)|dy=\sup_{R\in\mathcal{R}}\frac{1}{m(R)}\int_R|\frac{\chi_{\delta B}(x-y)}{m(\delta B)}|dy$$

考虑

$$g_R(x)=\frac{1}{m(R)}\int_R|\frac{\chi_{\delta B}(x-y)}{m(\delta B)}|dy=\frac{1}{m(R)m(\delta B)}\int_R|\chi_{\delta B}(x-y)|dy$$

其中

$$\int_R|\chi_{\delta B}(x-y)|dy$$

表示以 x 为中心以 δ 为半径的球 $B_\delta(x)$ 与包含原点的矩形 R 相交的面积。从而对 R 与球 $B_\delta(x)$ 相交情况讨论：

- 当 $R\bigcap B_\delta(x)\neq\emptyset$ 时，

$$g_R(x)=0$$

- 当 $B_\delta(x)\subset R$ 时，

$$g_R(x)=\frac{1}{m(R)m(\delta B)}m(\delta B)=\frac{1}{m(R)}$$

- 当 $R\bigcap B_\delta(x)\neq\emptyset$ 且 $B_\delta(x)\not\subset R$ 时

$$g_R(x)=\frac{1}{m(R)m(\delta B)}\int_R|\chi_{\delta B}(x-y)|dy\leq\frac{1}{m(R)m(\delta B)}m(\delta B)=\frac{1}{m(R)}$$

从而

$$(\phi_\delta)^*_{\mathcal{R}}(x)=\sup_{R\in\mathcal{R}}\frac{1}{m(R)}\int_R|\frac{\chi_{\delta B}(x-y)}{m(\delta B)}|dy=\sup_{R\in\mathcal{R}}g_R(x)=\sup_{R\in\mathcal{R}}\frac{1}{m(R)}$$

若要令 $\frac{1}{m(R)}$ 取得 sup 值，则需令 $m(R)$ 尽可能小。
令 R_ϵ 为以 $(-\epsilon,-\epsilon),(x_1+\delta,-\epsilon),(x_1+\delta,x_2+\delta),(-\epsilon,x_2+\delta)$ 为顶点的矩形。则 R_ϵ 满足 $0\in R_\epsilon,B_\delta(x)\subset R_\epsilon$。
则

$$\lim_{\delta\to0}(\phi_\delta)^*_{\mathcal{R}}(x)=\lim_{\delta\to0}\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{1}{(x_1+\epsilon+\delta)(x_2+\epsilon+\delta)}=\lim_{\delta\to0}\frac{1}{(x_1+\delta)(x_2+\delta)}=\frac{1}{x_1x_2}$$

当去除 x 在第一象限的限制且 $x_1x_2\neq0$ 时

$$\lim_{\delta\to0}(\phi_\delta)^*_{\mathcal{R}}(x)=\frac{1}{|x_1||x_2|}$$

若弱类型不等式成立，则存在 A 使得

$$m(\{x:\frac{1}{|x_1||x_2|}>\alpha\})\leq\frac{A}{\alpha}$$

而

$$\frac{A}{\alpha}\geq m(\{x:\frac{1}{|x_1||x_2|}>\alpha\})>\frac{1}{\alpha}\int_{\alpha}^{1}\frac{1}{x}dx=-\frac{\ln\alpha}{\alpha}$$

当 $\alpha>0$ 充分小，则矛盾。故对 $f\mapsto f^*_{\mathcal{R}}$ 及任意 $\alpha>0,f\in L^1(\mathbb{R}^2)$

$$m(\{x:f^*_{\mathcal{R}}(x)>\alpha\})\leq\frac{A}{\alpha}\|f\|_{L^1}$$

不再成立。

(b).

Chapter 6. Abstract Measure and Integration Theory

Exercises

Exercise 1:

此处有误，反例：

$$X=\{1,2,3,4\},\mathcal{M}=\{\emptyset,X,\{1,2\},\{3,4\},\{1,3\},\{2,4\}\}$$

若增加条件：$\mathcal{M}$ 对有限交运算封闭则可证明 $\mathcal{M}$ 为 σ-代数。

验证 $\mathcal{M}$ 对可数交运算封闭：

对任意 $E_1,E_2,...\in\mathcal{M}$，令 $A_1=E_1,A_2=E_2\setminus E_1,...,A_k=E_k\setminus(\bigcup_{i=1}^{k-1}E_i)=E_k\setminus(\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i)$...

则 $\{A_k\}$ 为互不相交的集合且满足

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$$

又

$$A_2=E_2\setminus E_1=E_2\bigcap(E_1)^c\in\mathcal{M}$$

由归纳易得

$$A_k=E_k\setminus(\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i)=E_k\bigcap(\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i)^c\in\mathcal{M}$$

从而

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\in\mathcal{M}$$

再由 $\mathcal{M}$ 对补运算封闭及

$$(\bigcup A_k)^c=\bigcap A_k$$

知 $\mathcal{M}$ 对可数并运算封闭。从而 $\mathcal{M}$ 为 σ-代数。

Exercise 2:

(a).

先证 $\overline{\mathcal{M}}$ 为 $\sigma-$ 代数：

由 $\mathcal{M}$ 为 σ-代数易知 $\overline{\mathcal{M}}$ 对可数交、并运算封闭。现验证补运算：

设 $E_1\subset\overline{\mathcal{M}}$，则存在 $E\subset\mathcal{M},Z\subset F,F\in\mathcal{M},\mu(F)=0$ 使得 $E_1=E\cup Z$。由

$$(E\cup Z)^c=(E\cup F)^c\bigcup(F\setminus Z)$$

$$E\cup F\in\mathcal{M},(E\cup F)^c\in\mathcal{M},F\setminus Z\subset F$$

$$E_1^c=(E\cup Z)^c\in\overline{\mathcal{M}}$$

从而得到 $\overline{\mathcal{M}}$ 为 $\sigma-$ 代数。

由定义，$\mathcal{M}\bigcup\{Z:Z\subset F,F\in\mathcal{M},\mu(F)=0\}\subset\overline{\mathcal{M}}$。

现若 $\mathcal{N}$ 为另一包含 $\mathcal{M}\bigcup\{Z:Z\subset F,F\in\mathcal{M},\mu(F)=0$ 的 $\sigma-$ 代数：

考虑 $E_1\in\overline{\mathcal{M}},E_1=E\cup Z$，则 $E\in\mathcal{M}\subset\mathcal{N},Z\in\mathcal{N}$，从而 $E_1=E\cup Z\in\mathcal{N}$。由 E_1 的任意性，$\overline{\mathcal{M}}\subset\mathcal{N}$。即 $\overline{\mathcal{M}}$ 为包含 $\mathcal{M}$ 和所有 $\mathcal{M}$ 中零测集子集的最小 $\sigma-$ 代数。

(b).

$$\overline{\mu}(\emptyset)=\mu(\emptyset)=0$$

对 $\overline{\mathcal{M}}$ 中一列可数个互不相交的 $\overline{E_1},\overline{E_2},...$，设 $\overline{E_n}=E_n\cup Z_n,Z_n\subset F_n\in\mathcal{M}$，自然 E_n 在 $\mathcal{M}$ 中互不相交。且 $\bigcup_{n=1}^\infty Z_n\subset\bigcup_{n=1}^\infty F_n$。由 μ 为 $\mathcal{M}$ 上的测度：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\mu}(\overline{E_n})=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\overline{\mu}(\cup_{n=1}^{\infty}E_n\bigcup\cup_{n=1}^{\infty}Z_n)=\overline{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{E_n})$$

即 $\overline{\mu}$ 为 $\overline{\mathcal{M}}$ 上的测度。

现对 $\forall E_1\in\overline{\mathcal{M}},E_1=E\cup Z,Z\subset F,\mu(F)=0,\overline{\mu}(E_1)=\mu(E)=0$，若 $H_1\subset E_1$:

$$H_1\subset E\cup Z\subset E\cup F$$

且 $\mu(E\cup F)=0,E\cup F\in\mathcal{M}$，故 $H_1=\emptyset\cup(E\cup F)\in\overline{\mathcal{M}}$。即 $\overline{\mu}$ 完备。

Exercise 3:

(1). 若 E 为 $\mathbb{R}^d$ 上的 Carathéodory 可测集。

- (a). 当 $m_*(E)<\infty$:

$$m_*(E)=\inf m_*(O)$$

其中 O 为任意 E 的开覆盖。由此，对任意 $n \in \mathbb{N}$ 存在 E 的开覆盖 O_n 满足：

$$m_*(O_n) \leq m_*(E) + \frac{1}{n}$$

令 $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$, 则 G 为一个 G_δ 集。对 G 有

$$m_*(G) = m_*(G \cap E) + m_*(G \cap E^c) = m_*(E) + m_*(G - E)$$

即

$$m_*(G - E) = 0$$

从而 E 为 Lebesgue 可测集。

- (b). 当 $m_*(E) = \infty$:
  令 $B(0, n)$ 表示以原点为中心，以 n 为半径的开球，则

  $$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap B(0, n))$$

  其中 $E \cap B(0, n)$ 均为外测度有限的集合。由过程 (a)，对任意 $E \cap B(0, n)$ 为 Lebesgue 可测集，从而 E 为 Lebesgue 可测集。

(2). 若 E 为 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 可测集。
设 A 为 $\mathbb{R}^d$ 上一个任意的集合。只需证明

$$m_*(A) \geq m_*(A \cap E) + m_*(A \cap E^c)$$

而此结论对于 $m_*(A) = \infty$ 时的情况自然成立，故此时仅考虑 $m_*(A) < \infty$ 的情况。
与 (1). 类似地，对任意 $n \in \mathbb{N}$，取 A 的一个开覆盖 U_n 使得

$$m_*(U_n) < m_*(A) + \frac{1}{n}$$

令 $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$，则 U 为 G_δ 集，且 Lebesgue 可测，$U \cap E$ 与 $U \cap E^c$ 均为 Lebesgue 可测集，$(U \cap E) \cap (U \cap E^c) = \emptyset$

$$m_*(A) = m_*(U) = m(U) = m(U \cap E) + m(U \cap E^c) \geq m_*(A \cap E) + m_*(A \cap E^c)$$

由 A 的任意性，E Carathéodory 可测。

Exercise 4:
对 $\mathbb{R}^d$ 上的一个旋转映射 r:
对任意 S^{d-1} 上的可测集 E, 希望

$$\sigma(r(E)) = \sigma(E)$$

由 σ 定义

$$\sigma(E) = d \cdot m(\tilde{E})$$

其中 $\tilde{E}=\{x\in\mathbb{R}^d:\frac{x}{|x|}\in E,0<x<1\}$。
由 r 为 $\mathbb{R}^d$ 上的旋转映射

$$\sigma(rE)=d\cdot m(\widetilde{rE})$$

对任意 $x\in\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}x\in\widetilde{rE} &\iff x=\rho\theta,\ \rho\le 1,\theta\in rE\\ &\iff x=\rho r(\alpha),\ \rho\le 1,\alpha\in E\\ &\iff x=r(\rho\alpha),\quad \rho\alpha\in\tilde{E}\\ &\iff x\in r\tilde{E}\end{aligned}$$

从而

$$\sigma(rE)=d\cdot m(\widetilde{rE})=d\cdot m(r\tilde{E})=d\cdot m(\tilde{E})=\sigma(E)$$

即 r 为 S^{d-1} 上的保测映射。

Exercise 5:
(a).
由公式

$$\int_{\mathbb{R}^d}f(x)dx=\int_{S^{d-1}}\int_0^\infty f(r\theta)r^{d-1}drd\sigma(\theta)$$

当 $d=2$ 时，

$$\int_{\mathbb{R}^2}e^{-\pi|x|^2}dx=\sigma(S^1)\int_0^\infty e^{-\pi r^2}rdr=2\pi(-\frac{1}{2\pi}e^{-\pi r^2}\Big|_0^\infty)=1$$

对一般情况，由 Tonelli 定理得:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|x|^2}dx&=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi(x_1^2+...+x_d^2)}dx\\&=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi x_1^2}...e^{-\pi x_d^2}dx_1...dx_d\\&=(\int_{\mathbb{R}^1}e^{-\pi x^2}dx)^d\\&=1\end{aligned}$$

即对任意维数 d，有：

$$\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|x|^2}dx=1$$

(b).
由 (a).

$$\int_{\mathbb{R}^d}e^{-\pi|x|^2}dx=1$$

即

$$
\begin{aligned}
1 &= \int_{S^{d-1}} \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{d-1} dr d\sigma \\
&= \sigma(S^{d-1}) \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{d-1} dr \\
&= \sigma(S^{d-1}) \frac{1}{2} (\frac{1}{\pi})^{\frac{d}{2}} \int_0^\infty e^{-t} t^{\frac{d}{2}-1} dt \\
&= \frac{1}{2} (\frac{1}{\pi})^{\frac{d}{2}} \sigma(S^{d-1}) \Gamma(\frac{d}{2})
\end{aligned}
$$

即

$$
\sigma(S^{d-1}) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}
$$

(c).

由 Ex14.Ch2 知

$$
v_d = m(B) = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}
$$

同时令 $f(x) = \chi_B(x)$，其中 B 为 d 维单位球，由公式有

$$
\begin{aligned}
v_d = m(B) &= \int_{S^{d-1}} \int_0^1 r^{d-1} dr d\sigma(\theta) \\
&= \sigma(S^{d-1}) \int_0^1 r^{d-1} dr \\
&= \frac{1}{d} \sigma(S^{d-1}) \\
&= \frac{1}{d} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \\
&= \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\frac{d}{2}\Gamma(\frac{d}{2})} \\
&= \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}
\end{aligned}
$$

得到了一致的结果。

Exercise 6:

取 Thm 4.2. Ch 5 证明部分中的函数 η_ϵ^+ 满足

$$
\eta_\epsilon^+(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1-\epsilon \\ \chi(\frac{|x|-1+\epsilon}{\epsilon}), & 1-\epsilon \le |x| \le 1 \\ 0, & |x| \ge 1 \end{cases}
$$

其中 χ 为一个固定的 $[0,1]$ 上的 C^2 函数满足

$$
\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \frac{1}{4}] \\ 0, & x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}
$$

由引理 4.5，有

$$\begin{aligned}
\int_B (v\Delta u - u\Delta v)\eta_\epsilon^+ dx &= \int_B (v\Delta u - u\Delta v)\chi(\frac{|x|-1+\epsilon}{\epsilon})dx \\
&= \int_B u(\nabla v\cdot\nabla\eta_\epsilon^+) - v(\nabla u\cdot\nabla\eta_\epsilon^+)dx \\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_B \chi'(\frac{|x|+1-\epsilon}{\epsilon})\cdot[u(\nabla v\cdot\frac{x}{|x|}) - v(\nabla u\cdot\frac{x}{|x|})]dx \\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_B \chi'(\frac{|x|+1-\epsilon}{\epsilon})(u(x)\frac{\partial v}{\partial n} - v(x)\frac{\partial u}{\partial n})dx \\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_{S^{d-1}}\int_0^1 \chi'(\frac{r+1-\epsilon}{\epsilon})r^{d-1}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})(r\gamma)drd\sigma(\gamma) \\
&= \frac{1}{\epsilon}\int_0^1 \chi'(\frac{r+1-\epsilon}{\epsilon})r^{d-1}\int_{S^{d-1}}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})(r\gamma)d\sigma(\gamma)dr
\end{aligned}$$

因 $\chi'(s)$ 只在 $[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$ 上非零，令 $s=\frac{r-1+\epsilon}{\epsilon}$，此时 $r\in[1-\frac{3}{4}\epsilon, 1-\frac{1}{4}\epsilon]$。对上式有

$$\begin{aligned}
\int_B (v\Delta u - u\Delta v)\eta_\epsilon^+ dx &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \chi'(s)(r_\epsilon(s))^{d-1}\int_{S^{d-1}}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})(r_\epsilon(s)\gamma)d\sigma(\gamma)dr \\
&= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \chi'(s)F_\epsilon(s)ds
\end{aligned}$$

其中

$$F_\epsilon(s) = (r_\epsilon(s))^{d-1}\int_{S^{d-1}}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})(r_\epsilon(s)\gamma)d\sigma(\gamma)$$

现令 $\epsilon\to 0$，有

$$F_\epsilon(s)\to\int_{S^{d-1}}(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})(\gamma)d\sigma(\gamma) = F(\gamma)$$

即

$$\int_B (v\Delta u - u\Delta v)dx = F(\gamma)\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\chi'(s)ds = F(\gamma)[\chi(\frac{3}{4}) - \chi(\frac{1}{4})] = -F(\gamma)$$

此即

$$\int_B (v\Delta u - u\Delta v)dx = \int_{S^{d-1}}(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n})(\gamma)d\sigma(\gamma)$$

Exercise 7:

由 Thm 4.2. Ch5，连续函数 u 在 Ω 上调和的充分必要条件为

$$u(x_0) = \frac{1}{m(B)}\int_B u(x)dx$$

对任意以 x_0 为球心且闭包在 Ω 中的球 B 成立。

回到此题，欲证这个充要条件等价于

$$u(x_0) = c\int_{S^{d-1}} u(x_0+ry)d\sigma(y),\quad c^{-1} = \sigma(S^{d-1})$$

不妨设 $x_0 = 0, 0\in\Omega$。

(1). 若 u 为调和函数：我们有

$$u(x_0) = \frac{1}{m(B)}\int_B u(x)dx = \frac{1}{r^d v_d}\int_B u(x)dx$$

即

$$u(0)r^d v_d = \int_B u(x)dx = \int_0^r \int_{S^{d-1}} u(ty)t^{d-1}d\sigma(y)dt$$

等式两边对 r 求导得

$$d \cdot u(0)r^{d-1}v_d = \int_{S^{d-1}} r^{d-1}u(ry)d\sigma(y)$$

即

$$d \cdot v_d u(0) = \sigma(S^{d-1})u(0) = \int_{S^{d-1}} u(ry)d\sigma(y)$$

于是

$$u(x_0) = c\int_{S^{d-1}} u(x_0+ry)d\sigma(y), \quad c^{-1} = \sigma(S^{d-1})$$

(2). 若连续函数 u 满足题目等式

$$u(x_0) = c\int_{S^{d-1}} u(x_0+ry)d\sigma(y), \quad c^{-1} = \sigma(S^{d-1})$$

同样地，不妨设 $x_0 = 0$。
在等式两边同乘 $r^{d-1}d \cdot v_d$ 并对 r 积分得

$$\int_0^r d \cdot u(0)t^{d-1}v_d dt = \int_0^r \int_{S^{d-1}} t^{d-1}u(ty)d\sigma(y)dt$$

于是

$$u(0)r^d v_d = \int_0^r \int_{S^{d-1}} t^{d-1}u(ty)d\sigma(y)dt = \int_B u(x)dx$$

即

$$u(0) = \frac{1}{m(B)}\int_B u(x)dx$$

因此 u 为调和函数。

Exercise 8:
(a).

$$\mu(Q_1) = c = \mu(\{x : 0 < x_j \leq 1, j = 1, ..., d\})$$
$$Q_{\frac{1}{n}} = \{x : 0 < x_j \leq \frac{1}{n}, j = 1, ..., d\}$$

则立方体 Q_1 可表示为 n^d 个 $Q_{\frac{1}{2}}$ 的平移的不交并。从而有

$$\mu(Q_1) = n^d\mu(Q_{\frac{1}{n}})$$

即

$$\mu(Q_{\frac{1}{n}}) = n^{-d}\mu(Q_1) = cn^{-d}$$

(b).
希望证明：μ 关于 m 绝对连续。
设 E 为 Lebesgue 可测集使得 $m(E) = 0$。则对任意 $\epsilon > 0$ 存在开集 U 使得 $m(U \setminus E) < \epsilon$，即

$m(U) < \epsilon$。

现依据 Thm 1.4. Ch1 可将 U 写为可数个几乎不交的闭立方体 Q_j 之并，其中 Q_j 的边长为 $\frac{1}{n}$ 的形式，则这些 Q_j 均是 (a). 中立方体的平移。即

$$U = \bigcup_j Q_j$$

又由 (a). 我们有

$$\mu(Q_{\frac{1}{n}}) = cn^{-d} = cm(Q_{\frac{1}{n}})$$

由这些闭矩体内部不交可得

$$\mu(U) = \sum_j \mu(Q_j) = \sum_j cm(Q_j) = c\sum_j m(Q_j) = cm(U) < c\epsilon$$

其中 c 为与 μ 有关的常数。由 ϵ 的任意性，有

$$\mu(E) = 0$$

从而 μ 关于 m 绝对连续，即 $\mu \ll m$。由定理 4.3，存在局部可积函数 f 使得

$$\mu(E) = \int_E f dx$$

(c).

现由 Cor 1.7. Ch3 知对几乎任意 $x \in \mathbb{R}^d$

$$f(x) = \lim_{m(U_\alpha)\to 0, x\in U_\alpha} \frac{1}{m(U_\alpha)} \int_{U_\alpha} f(y)dy = \lim_{m(U_\alpha)\to 0, x\in U_\alpha} \frac{\mu(U_\alpha)}{m(U_\alpha)} = c$$

其中可取 U_α 为所有包含 x 的开立方体 (边长为 $\frac{1}{n}$ 的形式，即为某个 $Q_{\frac{1}{n}}$ 的平移) 即为一个正则收缩到 x 的集簇。

从而

$$f(x) = c$$

对几乎所有 $x \in \mathbb{R}^d$ 成立，再由 (b). 的结果

$$\mu = cm$$

Exercise 9:

(1). 构造 μ。

令记号 $f \prec u$ 表示：

$0 \leq f \leq 1$ 且在区间 [a,u] 上有 $f = 1$。

令

$$F(u) = \inf\{\ell(f) : f \prec u\}$$

则 F 满足：

- 1. F 单调递增。
  对任意 $u' > u$ 与 $f \prec u'$，有 $f \prec u$。从而
  $$F(u) \leq F(u')$$
  即 F 在 [a,b] 上单调递增。

- 2. F 为右连续函数。
  只需证明对任意 $\epsilon > 0$ 与 $f \prec u$，存在 $u_1 > u$ 与 $f_1 \prec u_1$ 使得
  $$\ell(f_1) < \ell(f) + \epsilon$$
  现设 $C = \ell(f)$。由 f 为连续函数，存在 $\delta > 0$ 使得函数 $(1+\frac{\epsilon}{C})f(x) > 1$ 在区间 $u < x < u+\delta$ 成立。
  令 $f_1 \prec u + \frac{\delta}{2}$ 且当 $y \geq \delta$ 时有 $f_1(y) = 0$。则 $f_1(x) \leq (1 + \frac{\epsilon}{C})f(x)$ 对任意 $x \in [a, b]$ 成立。于是
  $$\ell(f_1) \leq (1 + \frac{\epsilon}{C})\ell(f) = C + \epsilon$$
  从而构造的 F 是右连续的。

现由 Thm 3.5 Ch 6. 存在 [a,b] 上唯一的 Borel 测度 μ 使得对任意 $a \leq a_1 < b_1 \leq b$，有
$$\mu((a_1, b_1]) = F(b_1) - F(a_1)$$
(2). 现证明
$$\ell(f) = \int_a^b f d\mu$$
对任意 $f \in C[a, b]$ 成立。
令线性泛函 $L(f) = \int_a^b f d\mu$，只需证明
$$\ell(f) \leq L(f)$$
则
$$-\ell(f) = \ell(-f) \leq L(-f) = -L(f)$$
即
$$\ell(f) \geq L(f)$$
从而
$$\ell(f) = L(f)$$
对任意 $f \in C[a, b]$ 成立，命题得证。
由连续函数可以由阶梯函数一致逼近，对任意 $\epsilon > 0$ 和任意 $f \in C[a, b]$，存在阶梯函数 $f_\epsilon \geq f$ 使得
$$L(f_\epsilon) < L(f) + \epsilon$$

设阶梯函数

$$f_\epsilon = \sum_k c_k \chi_{(a_k, b_k]}$$

不妨设区间 $(a_k, b_k]$ 互不相交。选择 $a_k' > a_k$ 令

$$f_\epsilon' = \sum c_k \chi_{(a_k', b_k]}$$

现由 F 的定义，存在连续函数 g_k 与 h_k 使得 $g_k \prec b_k, h_k \prec a_k'$。且

$$\ell(h_k) - F(a_K') < \ell(g_k) - F(b_k) < \frac{\epsilon}{c_k 2^k}$$

不妨设在区间 (a_k, a_k') 上有 $f < c_k(1 - h_k)$。
(若不然我们可以令：

$$c_k(1 - h_k') = \begin{cases} \max(f, c_k(1 - h_k)), & a_k < x < a_k' \\ c_k, & a_k' \leq x < b_k \end{cases}$$

这样得到的连续函数 h_k' 满足 $h_k' \prec a_k'$，且由 $h_k' < h_k$ 知 $\ell(h_k') - F(a_k') < \ell(h_k) - F(a_k') < \ell(g_k) - F(b_k) < \frac{\epsilon}{c_k 2^k}$。则我们可以令 h_k' 代替 h_k。)
现在取函数

$$\tilde{f}_\epsilon = \sum_k c_k (g_k - h_k)$$

则

$$f \leq \tilde{f}_\epsilon$$

由此有

$$\ell(\tilde{f}_\epsilon) = \sum_k c_k (\ell(g_k) - \ell(h_k)) < \sum_k c_k (F(b_k) - F(a_k')) + \epsilon = L(f_\epsilon') + \epsilon$$

又

$$f \leq \tilde{f}_\epsilon, \quad f_\epsilon' \leq f_\epsilon$$

从而

$$\ell(f) \leq \ell(\tilde{f}_\epsilon) < L(f_\epsilon') + \epsilon < L(f_\epsilon) + \epsilon < L(f) + 2\epsilon$$

现由 $\epsilon > 0$ 的任意性知

$$\ell(f) \leq L(f)$$

即命题得证。

Exercise 10:

(a).

若测度 ν_1, ν_2 满足

$$\nu_1 \perp \mu, \ \nu_2 \perp \mu$$

则存在互不相交的 $A_1, B_1 \in \mathcal{M}$，$A_2, B_2 \in \mathcal{M}$ 使得

$$\nu_1(E) = \nu_1(A_1 \cap E),\ \mu(E) = \mu(B_1 \cap E)$$

$$\nu_2(E) = \nu_1(A_2 \cap E),\ \mu(E) = \mu(B_2 \cap E)$$

令

$$A = A_1 \cup A_2,\ B = B_1 \cap B_2$$

则

$$A \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap (B_1 \cap B_2) = (A_1 \cap (B_1 \cap B_2)) \cup (A_2 \cap (B_1 \cap B_2)) = \emptyset$$

现对于任意可测集 E:

$$\mu(E) = \mu(E \cap B_1) = \mu(E \cap B) + \mu(E \cap (B_1 \setminus B_2))$$

又

$$\mu(B_1 \setminus B_2) = \mu((B_1 \setminus B_2) \cap B_2) = 0$$

从而

$$\mu(E) = \mu(E \cap B_1) = \mu(E \cap B) + \mu(E \cap (B_1 \setminus B_2)) = \mu(E \cap B)$$

同样有

$$\nu_1(E) = \nu_1(E \cap A_1) = \nu_1(E \cap A) - \nu_1(E \cap (A \setminus A_1)) = \nu_1(E \cap A) - \nu_1(E \cap (A \setminus A_1) \cap A_1)\nu_1(E \cap A)$$

$$\nu_2(E) = \nu_2(E \cap A)$$

故

$$(\nu_1 + \nu_2)(E) = (\nu_1 + \nu_2)(E \cap A)$$

又 $A \cap B = \emptyset$，

$$\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$$

(b).
若 $\nu_1 \ll \mu,\ \nu_2 \ll \mu$，则对任意 $E \in \mathcal{M}$ 使得 $\mu(E) = 0$ 有

$$\nu_1(E) = 0,\ \nu_2(E) = 0$$

从而

$$(\nu_1 + \nu_2)(E) = \nu_1(E) + \nu_2(E) = 0$$

即

$$\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$$

(c).
若 $\nu_1 \perp \nu_2$，则存在 $A, B \in \mathcal{M},\ A \cap B = \emptyset$ 使得对任意 $E \in \mathcal{M}$

$$\nu_1(E) = \nu_1(E \cap A),\ \nu_2(E) = \nu_2(E \cap B)$$

从而对 E 的任意分割 $E=\bigcup_j E_j$

$$|\nu_1|(E)=\sup\sum_j|\nu_1(E_j)|=\sup\sum_j|\nu_1(E_j\cap A)|=|\nu_1|(E\cap A)$$

同样有

$$|\nu_2|(E)=|\nu_2|(E\cap B)$$

即

$$|\nu_1|\perp|\nu_2|$$

(d).
设 $E\in\mathcal{M}$ 使得 $|\nu|(E)=0$，则对 E 的任意分割 $E=\bigcup_j E_j$

$$|\nu|(E)=\sup\sum_j|\nu(E_j)|=0$$

即

$$\nu(E_j)=0$$

对任意 $E_j\subset E$ 成立，于是

$$\nu(E)=0$$

从而 $\nu\ll|\nu|$。
(e).
若 $\nu\ll\mu$ 且 $\nu\perp\mu$:
则存在 $A,B\in\mathcal{M},\ A\cap B=\emptyset$ 使得对任意 $E\in\mathcal{M}$

$$\nu(E)=\nu(E\cap A),\ \mu(E)=\mu(E\cap B)$$

于是

$$\mu(E\cap A)=\mu(E\cap A\cap B)=0$$

由 $\nu\ll\mu$ 我们有

$$\nu(E)=\nu(E\cap A)=\mu(E\cap A)=0$$

由 $E\in\mathcal{M}$ 的任意性，$\nu=0$。

Exercise 11:
(i).
由 μ_A 定义，对任意 E 及其覆盖 $\cup_j(a_j,b_j]$

$$\begin{aligned}\mu_A(E)&=\inf_{E\subset\cup_j(a_j,b_j]}\sum F_A(b_j)-F_A(a_j)\\&=\inf_{E\subset\cup_j(a_j,b_j]}\sum\int_{a_j}^{b_j}F_A'(x)dx\\&\geq\inf_{E\subset\cup_j(a_j,b_j]}\int_{\cup(a_j,b_j]}F_A'(x)dx\\&\geq\int_E F_A'(x)dx\end{aligned}$$

现对任意 $\epsilon > 0$，由积分的绝对连续性，存在 $\delta > 0$ 使得当 $m(H) < \delta$ 时

$$\int_H F_A'(x)dx < \epsilon$$

对任意的 Lebesgue 可测集 E，存在开集 U 使得 $E \subset U$, $m(U \setminus E) < \delta$。因 U 为 $\mathbb{R}$ 上的开集，将 U 写为可数个互不相交的开区间之并：

$$U = \bigcup_j (a_j, b_j)$$

令 $\tilde{U} = \bigcup_j (a_j, b_j]$，则

$$m(\tilde{U} \setminus E) = m(U \setminus E)$$

$$\int_{\tilde{U} \setminus E} F_A'(x)dx = \int_{U \setminus E} F_A'(x)dx < \epsilon$$

$$\int_{\tilde{U}} F_A'(x)dx \leq \epsilon + \int_E F_A'(x)dx$$

又 $E \subset \tilde{U}$

$$\mu_A(E) \leq \epsilon + \int_E F_A'(x)dx$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性

$$\mu_A(E) \leq \int_E F_A'(x)dx$$

从而

$$\mu_A(E) = \int_E F_A'(x)dx$$

由此也自然有测度 μ_A 关于 Lebesgue 测度 m 绝对连续。

(ii).

若 F 绝对连续，则

$$F_A(x) = F(x)$$

当 f 为特征函数 χ_H 时，由 (a). 显然有

$$\int f d\mu = \int_H d\mu = \int_H F'(x)dx = \int f(x)F'(x)dx$$

从而

$$\int f d\mu = \int f(x)F'(x)dx$$

对 f 是简单函数的情况也成立。当 f 为非负函数，存在简单函数 $\{f_n\} \nearrow f$，由单调收敛定理

$$\int f d\mu = \int (\lim_{n\to\infty} f_n) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)F'(x)dx = \int (\lim_{n\to\infty} f_n)(x)F'(x)dx = \int f(x)F'(x)dx$$

即对非负函数成立。

最后对 $f \in L^1(\mu)$ 该式也成立。

由此也可得 $f \in L^1(\mu)$ 即等价于 $fF'(x)$ Lebesgue L^1 可积。

(iii).
只需证明 $\mu_C \perp m$, $\mu_J \perp m$。
(1). 令

$$F_J(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{[x_k,\infty)}$$

$A = \{x_k\}$，则 A 为可数点集，从而 $m(A) = 0$，即 m 支在 A^c 上。
对开集 A^c，存在可数个区间 $(a_j, b_j]$ 使得 $A^c \subset \bigcup_j (a_j, b_j]$。对任意 $E \subset A^c$，$E \subset \bigcup_j (a_j, b_j]$ 满足 $F_J(a_j) = F_J(b_j)$，即 $\mu_J(E) = 0$。从而 μ_J 支在 A 上。
由 $A \cup A^c = \emptyset$，$\mu_J \perp m$。
(2). 现考虑 μ_C。
若 $\mu_C \perp m$ 不成立，则由定理 4.3，可对 μ_C 进行分解

$$\mu_C = \mu_a + \mu_s$$

其中 $\mu_s \perp m$, $\mu_a \ll m$。且存在广义 Lebesgue 可积函数 f 使得

$$\mu_a(E) = \int_E f(x)dx$$

现对任意 $E = (a, b] \subset R$，E 为 Lebesgue 可测集，故有 $\mu_s(E) = 0$

$$\mu_C(E) = F_C(b) - F_C(a) = \int_{(a,b]} f(x)dx$$

式左端表明函数 $F_C(x)$ 绝对连续。而这与 F_C 在 Ex.24 Ch3 中的定义不符，因 $F_C'(x) = 0$ $a.e.$ 表明 F_C 不绝对连续。从而命题得证。

Exercise 12:
设 $\mathbb{R}^d - \{0\}$ 上任意的开集 E。记 $\mathbb{Q}_+ = \{r_i\}_{i=1}^{\infty} = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+$，且令 $A = \{\gamma_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 S^{d-1} 的一个可数稠密子集。设 E_1 为 E 的一个可数稠密子集 (如取 E 中有理点的集合)，$E_1 = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$，$a_i = (b_i, c_i)$ 其中 $b_i = \|a_i\| \in \mathbb{R}_+, c_i = \frac{a_i}{\|a_i\|} \in S^{d-1}$。
设 $S_{j,k,n}$ 为 $\mathbb{R}^d - \{0\}$ 的开矩体为如下形式

$$S_{j,k,n} = \{\|r_j - r\| < \frac{1}{n}\} \times \{\|\gamma_k - \gamma\| < \frac{1}{n}\}$$

则 $E \subset \bigcup_{j,k,n} S_{j,k,n}$。
下证，对任意 $a_i \in E_1$，存在 $S_{j,k,n}$ 使得

$$a_i \in S_{j,k,n} \subset E$$

于是由 E_1 在 E 上稠密可知所有满足此条件的 $\bigcup_{j,k,n} S_{j,k,n} = E$。
事实上对任意 $a_i \in E_1 \subset E$，存在 $d_i > 0$ 使得以 a_i 为中心的开球 $B_{d_i}(a_i) \subset E$。
现取 n 充分大满足

$$\frac{1}{n} < \frac{d_i}{2(b_i + 3)}$$

再由有理数在 $\mathbb{R}$ 的稠密性及 A 在 S^{d-1} 中稠密可找到 $r_J \in \mathbb{Q}_+, \gamma_k \in A$ 使得

$$\|r_j - b_i\| < \frac{1}{n},\ \|\gamma_k - c_i\| < \frac{1}{n}$$

则 $a_i \in S_{j,k,n}$。现对任意 $x \in S_{j,k,n}$，记 $y \in \mathbb{R}^d - \{0\} = (\|x\|, c_i)$，则

$$\begin{aligned}
\|x - a_i\| &\le \|x - y\| + \|y - a_i\| \\
&\le \|x\|(\|\frac{x}{\|x\|} - c_i\|) + \|b_i - \|x\|\| \\
&\le \|x\|(\|\frac{x}{\|x\|} - \gamma_k\| + \|\gamma_k - c_i\|) + (\|b_i - r_j\| + \|r_j - \|x\|\|) \\
&< (\|\|x\| - r_i\| + \|r_j\|)(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} + \frac{1}{n}) \\
&< (\frac{1}{n} + b_i)\frac{2}{n} + \frac{2}{n} \\
&= \frac{2}{n}(1 + \frac{1}{n} + b_i) \\
&< d_i
\end{aligned}$$

此即

$$S_{j,k,n} \subset B_{d_i}(a_i) \subset E$$

Exercise 13:

对 $(\mathbb{R}^{d_1}, \mathcal{M}_1, m_1)$ 与 $(\mathbb{R}^{d_2}, \mathcal{M}_2, m_2)$。记 $\mathcal{M}$ 为 m 可测集构成的 σ-代数，$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ 为 $m_1 \times m_2$ 的 σ-代数。显然有

$$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}$$

由命题 3.2 的证明过程：

对 $\mathbb{R}^d$ 上的任意零测集 E，由命题 1.6，存在 $F \in \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ 使得 $(m_1 \times m_2)(F) = 0$。

现对一般的 $E \subset \mathcal{M}$，则 $E^c \in \mathcal{M}$。同样由命题 1.6，存在 $F^c \subset \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$，$E^c \subset F^c$ 满足 $F^c - E^c = Z$ 测度为 0，即 $Z = F^c \cap E$ 测度为 0。于是由 $F \subset E$ 知 Z=$E - F$ 测度为 0，回到了前一种情况。由上述讨论及 Ex 2 中定义知 m 为 $m_1 \times m_2$ 的完备化。

Exercise 14:

(1).$\mathcal{A}$ 为一个代数。

闭，有限交并。

对任意 $E = E_1 \times \cdots \times E_k, E_j \subset \mathcal{M}_j$，

$$\begin{aligned}
E^c &= (E_1 \times \cdots \times E_k)^c \\
&= (E_1^c \times E_2 \times \cdots \times E_k) \cup (E_1 \times E_2^c \times \cdots \times E_k) \cup \cdots \cup (E_1 \times \cdots \times E_k^c)
\end{aligned}$$

即 $\mathcal{A}$ 对补运算封闭。再由

$$(E_1 \times E_2) \cap (E_3 \times E_4) = (E_1 \cap E_3) \times (E_2 \cap E_4)$$

及归纳地知道 $\mathcal{A}$ 对有限交运算封闭，自然也对有限补运算封闭。从而 $\mathcal{A}$ 为代数。
(2).μ_0 可延拓为 $\mathcal{A}$ 上的预测度。
设 $E = E_1 \times \cdots \times E_k \in \mathcal{A}$，若 E 可表示为 $\mathcal{A}$ 中可数个互不相交的集合之并：

$$E = \bigcup_j E_1^j \times \cdots \times E_k^j$$

则由 E 的两种表示：对 $(x_1, \cdots, x_k) \in (X_1, \cdots, X_k)$

$$\chi_{E_1}(x_1)\chi_{E_2}(x_2)\cdots\chi_{E_k}(x_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{E_1^j}(x_1)\cdots\chi_{E_k}^j(x_k)$$

现对 x_1 积分，由单调收敛定理得

$$\mu_1(E_1)\chi_{E_2}(x_2)\cdots\chi_{E_k}(x_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(E_1^j)\chi_{E_2^j}(x_2)\cdots\chi_{E_k}^j(x_k)$$

再对 x_2 积分并使用单调收敛定理交换式子左端积分与求和号的次序，依次进行下去，最后得到

$$\mu_1(E_1)\mu_2(E_2)\cdots\mu_k(E_k) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1(E_1^j)\cdots\mu_k(E_k^j)$$

此即

$$\mu_0(E_1 \times \cdots \times E_k) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu_0(E_1^j \times \cdots \times E_k^j)$$

从而如此定义的 μ_0 为 $\mathcal{A}$ 上的预测度。再由定理 1.5，即 μ_0 可在 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数上延拓为一个测度。

Exercise 15:
(1).$\mathcal{A}$ 构成一个代数。
由 E 的定义，只需考虑有限个使得 $E_j \neq X_j$ 的指标即可。显然当 $E \in \mathcal{A}, E^c \in \mathcal{A}$。
现若 $E, F \in \mathcal{A}$

$$E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i,\ F = \prod_{j=1}^{\infty} F_j$$

存在一个有限指标集 I 使得

$$E = \prod_{i\in I} E_i \prod_{j\notin I} X_j$$

$$F = \prod_{i\in I} F_i \prod_{j\notin I} X_j$$

从而

$$E \cap F = (\prod_{i\in I} E_i \cap \prod_{i\in I} F_i) \prod_{j\notin I} X_j$$

于是由 Ex 14 结论

$$E \cap F \in \mathcal{A}$$

从而 $\mathcal{A}$ 对补运算及有限交运算封闭，故对有限并运算封闭，从而为代数。
(2).μ_0 在 $\mathcal{A}$ 上可延拓为预测度。
对任意 $E=\prod_{j=1}^{\infty}E_j\in\mathcal{A}$，若 E 可表示为 $\mathcal{A}$ 中可数个互不相交的集合之并

$$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\infty}E_j^k$$

则有

$$\prod_{j=1}^{\infty}\chi_{E_j}(x_j)=\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\infty}\chi_{E_j^k}(x_j)$$

同样地，对 $x_1,...$ 积分，由单调收敛定理交换求和号与积分次序，进行 l 步后得到

$$\mu_1(E_1)\cdots\mu_l(E_l)\prod_{j=l+1}^{\infty}\chi_{E_j}(x_j)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_1(E_1^k)\cdots\mu_l(E_l^k)\prod_{j=l+1}^{\infty}\chi_{E_j^k}(x_j)$$

再由 E 定义，存在充分大的 ℓ 使得当式左端 $l>\ell$ 时 $(\mu_j(X_j)=1)$

$$LHS=\prod_{j=1}^{\infty}\mu_j(E_j)=\mu_0(E)$$

于是

$$\lim_{l\to\infty}LHS=\mu_0(E)$$

对式右端，对 l 用单调收敛定理

$$\lim_{l\to\infty}RHS=\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\infty}\mu_j(E_j^k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(\prod_{j=1}^{\infty}E_j^k)$$

综合来看有

$$\mu_0(E)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_0(\prod_{j=1}^{\infty}E_j^k)$$

此即表面 μ_0 在 $\mathcal{A}$ 上为预测度，再由定理 1.5，μ_0 可在 $\mathcal{A}$ 生成的 σ-代数上延拓为测度。

Exercise 16:
(a).
由 Ex 8，Lebesgue 测度可由其平移不变性确定。
设 $E=E_1\times\cdots\times E_d$ 为 $\mathbb{T}^d$ 上的一个可测矩体。对任意 $x=(x_1,...,x_d)\in\mathbb{T}^d$ 有

$$\mu(E+x)=\mu((E_1+x_1)\times\cdots\times(E_d+x_d)=\mu_1(E_1+x_1)\cdots\mu_d(E_d+x_d)=\mu_1(E_1)\cdots\mu_d(E_d)=\mu(E)$$

从而对 $\mathbb{T}^d$ 上的任一可测矩体，μ 限制在其生成的代数上有平移不变性。从而由此诱导的外测度 μ_* 具有平移不变性。而 $\mu=\mu_*\big|_{\mathcal{M}_1}$，其中 $\mathcal{M}_1$ 为 μ_* 对应的所有 Carathéodory 可测集生成的 σ-代数。(定理 1.1 与引理 1.4) 从而 μ 具有平移不变性，再由

$$\mu(\mathbb{T}^d)=m(Q)=1$$

与 Ex 8, μ 的完备化即是 Q 上的 Lebesgue 测度。
(b).
由第一章可测函数的性质，f 是可测函数当且仅当对任意开集 $O, f^{-1}(O)$ 为可测集。由 $\tilde{f}$ 为 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上的周期函数延拓，且可数个可测集之并仍是可测集，这等价于 $\tilde{f}^{-1}(O)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上为可测集，就等价于 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上为可测函数。
类似有，f 在 $\mathbb{T}^d$ 上为连续函数，等价于对任意开集 O，$f^{-1}(O)$ 为开集。由 $\tilde{f}$ 为 f 在 $\mathbb{R}^d$ 上的周期函数延拓，且可数个开之并仍是开集，这等价于 $\tilde{f}^{-1}(O)$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上为开集，就等价于 $\tilde{f}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上为连续函数。
(c).
有限性由 Ex. 21 Ch. 2(Page 12) 即得证 (用 $\mathbb{T}^d$ 替换 $\mathbb{R}^d$ 即可)。
交换性：

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{\mathbb{T}^d} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{T}^d} f(t)g(x-t)dt \\ &= (g*f)(x)\end{aligned}$$

(d).
设 $c_n = \int_{\mathbb{T}^d}(f*g)(x)e^{-2\pi in\cdot x}dx$。
由 Fubini-Tonelli 定理

$$\begin{aligned}c_n &= \int_{\mathbb{T}^d}\int_{\mathbb{T}^d} f(x-y)g(y)dye^{-2\pi in\cdot x}dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^d}(\int_{\mathbb{T}^d} f(x-y)e^{-2\pi in(x-y)}dx)e^{-2\pi in\cdot y}g(y)dy \\ &= a_n\int_{\mathbb{T}^d} g(y)e^{-2\pi in\cdot y}dy \\ &= a_nb_n\end{aligned}$$

此即

$$f*g \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} a_nb_ne^{2\pi in\cdot x}$$

(e).
(1).$\{e^{2\pi in\cdot x}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ 为 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 上的标准正交向量组。

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi in\cdot x}e^{-2\pi im\cdot x}dx &= \int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi i(n-m)\cdot x}dx \\ &= \delta_n^m\end{aligned}$$

(2).$\{e^{2\pi in\cdot x}\}_{n\in\mathbb{Z}^d}$ 为 $L^2(\mathbb{T}^d)$ 上的一组基。
由 Thm 2.3 Ch 4，这等价于证明：
若 $(f, e^{2\pi ij\cdot x}) = 0$ 对任意 $j\in\mathbb{Z}^d$ 成立，则 $f=0$。

由条件，

$$\begin{aligned}
0 &= (f, e^{2\pi i n\cdot x}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^d} f(x)e^{-2\pi i n\cdot x}dx \\
&= \int_{\mathbb{T}} e^{-2\pi i n_1 x_1}\cdots\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i n_d x_d} f(x_1,...,x_d)dx_d\cdots dx_1
\end{aligned}$$

记 $F(x_1)$ 为关于 $x_1\in\mathbb{T}$ 的函数

$$F(x_1) = \int_{\mathbb{T}} e^{-2\pi i n_2 x_2}\cdots\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i n_d x_d} f(x_1,...,x_d)dx_d\cdots dx_2$$

则由以上条件

$$\int_{\mathbb{T}} e^{-2\pi i n_1 x_1}\cdots\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i n_d x_d} f(x_1,...,x_d)dx_d\cdots dx_1 = (F(x_1), e^{2\pi i n_1 x_1}) = 0$$

对任意 $n_1\in\mathbb{Z}$ 成立。由维数一的情况，$\{e^{2\pi i n_1 x_1}_{n_1\in\mathbb{Z}}\}$ 为 $L^2(\mathbb{T})$ 上的标准正交基。于是由 Thm 2.3 Ch 4，$F(x_1)=0$ 对几乎所有 $x_1\in\mathbb{T}$ 成立。再定义

$$F_2(x_1,x_2) = \int_{\mathbb{T}} e^{-2\pi i n_3 x_3}\cdots\int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i n_d x_d} f(x_1,...,x_d)dx_d\cdots dx_3$$

同样地过程可证明作为 x_2 的函数时 $F_2(x_1,x_2)=0$ 对几乎所有 $x_2\in\mathbb{T}$ 成立，从而对 $(x_1,x_2)\in\mathbb{T}^2$ 成立。如此进行下去，可得到

$$f(x) = f(x_1,...,x_d) = 0 \ a.e. x\in\mathbb{T}^d$$

即命题成立。再利用 Thm 2.3.(iv) Ch 4 得到等式

$$\|f\|_{L^d(\mathbb{T}^d)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |(f, e^{2\pi i n\cdot x})|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |a_n|^2$$

(f).

取一族函数

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} \epsilon^{-d}, & 0 < x_j \le \epsilon,\ j=1,...,d \\ 0, & else \end{cases}$$

则

$$\int_{\mathbb{T}} g_\epsilon(x)dx = 1$$

$$\begin{aligned}
|f(x) - (f*g_\epsilon)(x)| &= |\int_{\mathbb{T}} f(x)g_\epsilon(y)dy - \int_{\mathbb{T}} f(x-y)g(y)dx| \\
&\le \int_{\mathbb{T}} |f(x)-f(x-y)||g_\epsilon(y)|dy
\end{aligned}$$

由 f 在 $\mathbb{T}^d$ 上连续，f 一致连续，对任意 $\delta>0$ 存在 $\delta_0>0$ 使得当

$$|x-y| < \delta_0$$

时有
$$|f(x)-f(y)|<\delta$$
从而当 $\epsilon<\delta_0$ 时
$$|f(x)-f*g_\epsilon(x)|\le\int_{\mathbb{T}}\delta g_\epsilon(y)dy=\delta$$
由 δ 的任意性，得到当 $\epsilon\to 0$ 时，
$$|f(x)-(f*g_\epsilon)(x)|$$
一致地趋于 0。
现对于 f 的 Fourier 系数 a_n 和 g_ϵ 的系数 b_n^ϵ，由
$$f\in{}^2(\mathbb{T}^d),\ g_\epsilon\in L^2(\mathbb{T}^d)$$
及 (e)
$$\sum|a_n|^2<\infty,\ \sum|b_n^\epsilon|^2<\infty$$
由 Cauchy 不等式
$$\sum|a_nb_n^\epsilon|<\infty$$
于是
$$f\hat{*}g_\epsilon\in L^1$$
又
$$f*g_\epsilon\in L^1$$
有
$$f*g_\epsilon(x)=\sum a_nb_ne^{2\pi in\cdot x},\ a.e.x\in\mathbb{T}^d$$
而上式两边均为连续函数，从而
$$f*g_\epsilon(x)=\sum a_nb_ne^{2\pi in\cdot x}$$
现只需证明
$$\lim_{N\to\infty}\|f-\sum_{|n|\le N}a_ne^{2\pi in\cdot x}\|\to 0$$
为此
$$\begin{aligned}\|f-\sum_{|n|\le N}a_ne^{2\pi in\cdot x}\|&\le\|f-f*g_\epsilon\|+\|f*g_\epsilon-\sum_{|n|\le N}a_nb_n^\epsilon e^{2\pi in\cdot x}\|\\&\le\|f-f*g_\epsilon\|+\|\sum_{|n|>N}a_nb_n^\epsilon e^{2\pi in\cdot x}\|\\&\le\|f-f*g_\epsilon\|+\sum_{|n|>N}|a_nb_n^\epsilon|\\&\to 0,\ N\to\infty,\epsilon\to 0\end{aligned}$$
从而命题得证。

Exercise 17:
设 $E = E_1 \times \cdots \times E_d$ 为 $\mathbb{T}^d$ 上的一个可测集矩体，则对

$$\tau : x \mapsto x + \alpha$$

有

$$\tau^{-1}(E) = (E_1 - \alpha_1) \times \cdots \times (E_d - \alpha_d)$$

从而 $\tau^{-1}(E)$ 仍为 $\mathbb{T}^d$ 上的可测矩体。同时

$$m(\tau^{-1}(E)) = m(E_1 - \alpha) \cdots m(E_d - \alpha_d) = m(E_1) \cdots m(E_d) = m(E)$$

从而命题对 $\mathbb{T}^d$ 上的所有可测矩体成立，从而对这些矩体生成的代数的任意集合成立，进一步对任意在其生成的 σ-代数中的集合成立，即对 $\mathbb{T}^d$ 上的任意可测集成立。

Exercise 18:
令集合

$$E' = \limsup_{n\to\infty} \{\tau^{-n}(E)\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup_{k\geq n} \tau^{-k}(E))$$

则由 E 与 $\tau^{-1}(E)$ 只相差一个零测集，E 与 $E_k = \tau^{-k}(E)$ 只相差一个零测集对 $k \geq 1$ 成立。于是 E 与

$$E' = \limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup_{k\geq n} E_k)$$

只相差一个零测集。事实上

$$E \setminus E' = \bigcup_{n=0}^{\infty} (\bigcap_{k\geq n} E \setminus E_k)$$

即

$$m(E \setminus E') \leq \sum_k m(E \setminus E_k) = 0$$

同样

$$E' \setminus E = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup_{k\geq n} E_k \setminus E)$$

$$m(E' \setminus E) \leq \sum_k m(E_k \setminus E) = 0$$

于是证明了 E 与 E' 只相差一个零测集。
由 E' 为可测集，$\tau^{-1}(E)$ 为可测集。而

$$\tau^{-1}(E') = \tau^{-1}(\bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup_{k\geq n} E_k)) = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup_{k\geq n} \tau^{-1}(E_k)) = \bigcap_{n=0}^{\infty} (\bigcup_{k\geq n} E_{k+1}) = \limsup_{n\to\infty} E_n = E'$$

即

$$E' = \tau^{-1}(E')$$

Exercise 19:

(1). 若 τ 为遍历变换。

设 ν 为一个关于 μ 绝对连续的测度且 μ 不变。则由定理 4.3，设

$$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu$$

其中 E 为 X 上任意 μ-可测集。

再由 ν 不变，有

$$\int_E f(x) d\mu = \nu(E) = \nu(\tau(E)) = \int_{\tau(E)} f(x) d\mu = \int_E f(\tau(x)) d\mu$$

由 E 的任意性和 Ex 11. Ch 2. 知

$$f(x) = f(\tau(x)),\ a.e. x \in X$$

从而 f 为关于遍历变换 τ 的不变函数，从而为常数。又 $\mu(X) = 1$，即有

$$\nu(E) = \int_E c d\mu = c\mu(E)$$

$$\nu = c\mu$$

(2). 若对任意关于 μ 绝对连续且关于 τ 不变的测度为 $c\mu$。

设 $f(x)$ 为任一 τ 的不变函数，即

$$f(x) = f(\tau(x)),\ a.e. x \in X$$

定义测度 ν 为

$$\nu = \int f d\mu$$

则 ν 关于 μ 绝对连续，且

$$\nu(E) = \int_E f d\mu = \int_E f(\tau^{-1}(x)) d\mu = \int_{\tau^{-1}(E)} f(x) d\mu = \nu(\tau^{-1}(E))$$

即 ν 为关于 τ 不变的测度，由条件，存在常数 c 使得

$$\nu = \int f d\mu = c\mu$$

从而 $f = c$ a.e.$x \in X$。由 f 的任意性，τ 为遍历变换。

Exercise 20:

若

$$\mu(\tau^{-n}(E) \cap F) \to \mu(E)\mu(F),\ n \to \infty$$

对任意可测集 E, F 成立。则当 f, g 为特征函数：$f = \chi_E, g = \chi_F$

$$(T^n f, g) = \int \chi_E(\tau^n(x)) \chi_F(x) d\mu = \mu(\tau^{-n}(E) \cap F) \to \mu(E)\mu(F) = \int \chi_E \int \chi_F = (f, 1)(1, g)$$

即命题成立。于是命题对特征函数的有限线性组合，即简单函数成立。
现对任意 $f, g \in L^2$，存在 $f_k \to f, g_k \to g$ 其中 f_k, g_k 为简单函数列 (简单可积函数在 L^p 稠密)。于是

$$(T^n f, g) = (T^n f, g - g_k) + (T^n f, g_k) = (T^n f, g - g_k) + (T^n f - T^n f_l, g_k) + (T^n f_l, g_k)$$

对右式第一项：

$$|(T^n f, g - g_k)| \le \|T^n f\| \|g - g_k\| \to 0,\ k \to \infty$$

对第二项：

$$|(T^n f - T^n f_l, g_k)| \to 0,\ l \to \infty$$

对第三项：

$$(T^n f_l, g_k) = (f_l, 1)(1, g_k) \to (f, 1)(1, g),\ k, l \to \infty$$

从而命题对一般的 $f, g \in L^2(X)$ 成立：

$$(T^n f, g) = (f, 1)(1, g)$$

Exercise 21:
(1). 若 τ 遍历，则 α 满足题目条件。
若不然，存在 α 不满足题设条件，使得对应的 $\tau : x \to x + \alpha$ 为遍历变换。
不妨设

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_d\alpha_d = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

则取可测集 E 为

$$E = \{x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{T}^d : 0 < \{q(a_1x_1 + ... + a_dx_d)\} < \frac{1}{2}\}$$

其中 $\{a\}$ 表示 a 的小数部分。
则

$$\tau^{-1}(E) = \{x : 0 < \{q(a_1(x_1 - \alpha_1) + ... + a_d(x_d - \alpha_d))\} < \frac{1}{2}\} = \{x : 0 < \{q(a_1x_1 + ... + a_dx_d)\} < \frac{1}{2}\} = E$$

即 E 对 τ 为不变的，由 τ 遍历，$m(E) = 0$ 或 $m(E^c) = 0$。但事实上，$m(E) = \frac{1}{2}$，矛盾。
(2). 若 α 满足题目条件，则 τ 遍历。
为此，由如下两步得出：
(a). 对任意连续周期函数 f 与如上 α，有

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(\tau^k(x)) \to \int_{\mathbb{T}^d} f(x)dx,\ m \to \infty$$

由 Ex 16.(f)，$\mathbb{T}^d$ 上的任意连续周期函数 f 可用 $\{e^{2\pi i n\cdot x}\}$ 的有限线性组合一致地逼近。从而只需验证该式对任意 $\{e^{2\pi i n\cdot x}\}$ 成立：

(i). 当 $n=0$。

$$LHS=\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}1=1=\int_{\mathbb{T}^d}1dx=RHS$$

(ii). 当 $n\neq 0$。

$$LHS=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}e^{2\pi in\cdot(x+k\alpha)}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}e^{2\pi in\cdot x}e^{2\pi in\cdot k\alpha}$$

记 $\gamma=n\cdot\alpha$，由题目条件，γ 对任意的 $0\neq n\in\mathbb{Z}^d$ 均为无理数。从而

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}e^{2\pi in\cdot x}e^{2\pi in\cdot k\alpha}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}e^{2\pi in\cdot x}\sum_{k=0}^{m-1}e^{2\pi ik\gamma}=e^{2\pi in\cdot x}\int_0^1 e^{2\pi ix}dx=0=\int_{\mathbb{T}^d}e^{2\pi in\cdot x}dx=RHS$$

即命题成立。

(b). 在此条件下，τ 唯一遍历。

设 ν 为 $\mathbb{T}^d$ 上的另一测度使得 τ 对 Borel 集仍为保测变换，且 $\nu(\mathbb{T}^d)=1$。则由 (a). 与定理 5.1，

$$P_\nu(f)=\int_{\mathbb{T}^d}fdx$$

其中 P_ν 表示 $L^2(\mathbb{T}^d,\nu)$ 到其不变函数张成的子空间的正交投影算子。从而 P_ν 把连续函数，进而把 $\mathbb{T}^d$ 上的可积函数映到常数，于是

$$P_\nu(f)=\int_{\mathbb{T}^d}fd\nu$$

即得到

$$\int_{\mathbb{T}^d}fdx=\int_{\mathbb{T}^d}fd\nu$$

对任意连续函数成立，再由连续函数逼近特征函数，从而在 $\mathbb{T}^d$ 的任意 Borel 集上有 $\mu=m$。即 τ 唯一遍历。再由 Ex 19. 得到 τ 是遍历变换。

Exercise 22:

(a).τ 为保测变换。

设 $E=\prod_{i=1}^{\infty}E_i$ 为 X 上的一个可测集，则由 $(X_i,\mu_i)=(X_1,\mu_1)$，令

$$F_i=E_{i-1},F_i\in X_i,\ i\geq 2$$

则

$$\tau^{-1}(E)=X_1\times\prod_{i=2}^{\infty}F_i$$

从而

$$\mu(E)=\prod_{i=1}^{\infty}\mu_i(E_i)=\mu_1(X_1)\prod_{i=2}^{\infty}\mu_i(F_i)=\mu(\tau^{-1}(E))$$

即 τ 为 X 上的保测变换。
(b).τ 是混合的，从而为遍历变换。
设 E, F 为 X 中两个任意的可测集

$$E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$$

$$F = \prod_{i=1}^{\infty} F_i$$

由 Ex 15. 中的定义，存在有限的正整数 n_1, n_2 使得当 $i \geq n_1, E_i = X_i$，$j \geq n_2, F_j = X_j$

$$E = \prod_{i=1}^{n_1} E_i \prod_{i=n_1+1}^{\infty} X_i$$

$$F = \prod_{i=1}^{n_2} F_i \prod_{i=n_2+1}^{\infty} X_i$$

从而当 $n \geq n_2$ 时

$$\mu(\tau^{-n}(E) \cap F) = \mu(E)\mu(F)$$

由 E, F 的任意性，τ 是混合的，从而为遍历变换。
(c).τ 不唯一遍历。
固定一个 $x_1 \in X_1$，令集合 $E \subset X$

$$E = \{(x_i) : x_j = x_1 \text{对任意 } j \text{ 成立}\}$$

再令测度 ν 为

$$\nu(F) = \begin{cases} 1, & E \subseteq F \\ 0, & E \not\subseteq F \end{cases}$$

从而 $\nu \neq \mu$ 仍满足 τ 为保测变换，故 τ 不是唯一遍历的。

Exercise 23:
(a).
考虑 $[0,1]$ 间的实数的二进制表示，由任意实数都有其二进制表示知 D 为满射。令 Z_2 为拥有两种二进制表示 (即二进制表示不唯一) 的 $[0,1]$ 之间的实数，则 $Z_2 = \{$可用有限位 01 表示的有理数$\}$。由有理数可数，$Z_2 \subset \mathbb{Q}$ 可数，从而 $Z_1 = D^{-1}(Z_2)$ 可数。
从而 D 在 $X - Z_1$ 到 $[0,1] - Z_2$ 间既是单射又是满射。
(b).
由 Exercise 15，X 上的 σ-代数 $\mathcal{M}_1$ 可由 X 上的代数 $\mathcal{A}$ 生成。而 D 可将 X 上的 cylinder set 一一映为 $[0,1]$ 上有限个形如 $[a,b]$ 区间之并，其中 a 有有限的二进制表示。而 $[0,1]$ 上所有形如 $[a,b]$ 的区间生成的代数再生成的 σ-代数即为 $[0,1]$ 上的 Lebesgue 可测集构成的 σ-代数 $\mathcal{M}_2$。
由上述过程知，X 上的集合 E 是可测集当且仅当 $E \in \mathcal{M}_1$ 当且仅当 $D(E) \in \mathcal{M}_2$ 即当且仅当 $D(E)$ 在 $[0,1]$ 上可测。

而对结论 $\mu(E)=m(D(E))$，只需验证对 X 上的 cylinder set 成立即可。不妨取 X 上的 cylinder set F

$$F=\{(x_j):\begin{cases}x_j=0\text{ 或 }1\text{ 中的一个，当 j}\leq n\\ x_j\in Z(2),\text{当}j>n\end{cases}\}$$

从而

$$\mu(E)=\frac{1}{2^n}$$

而令 F 的前 n 位表示的有理数为 a，则 $D(F)$ 里最小的数为 a 即区间下界，最大的数为 $a+\frac{1}{2^n}$ 即区间上界，从而

$$m(D(F))=\frac{1}{2^n}=\mu(F)$$

进而结论对任意 X 上的可测集成立。

(c).

设 τ 为 X 上的移位映射，对任意 $x\in X,D(x)\in[0,1]$，由 $0\equiv 1 \mod 1$，若记 $m=(0,0,0,...)\in X$ 则 $\tau(m)=m$ 且 $D(m)=D(\tau(m))=0$。故不妨考虑 $X\setminus m$ 到 $(0,1]$。

记 Section 5.4 中 example(b) 里的双倍映射为

$$\iota: x\mapsto 2x \mod 1\ for\ x\in(0,1]$$

现若 $x\in X=(x_j)$

$$D(x)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_j}{2^j}$$

设 $y=\tau(x)=(y_j),y_j=x_{j+1}$，则

$$D(y)=D(\tau(x))=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{y_j}{2^j}=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{x_{j+1}}{2^{j+1}}$$

故

$$D(\tau(x))=2D(x) \mod 1$$

即 X 上的移位映射 τ 成为了双倍映射 ι。

Exercise 24:

(a).

只需对 $(0,1]$ 上的开集与零测集验证性质。

由 Lebesgue 测度伸缩不变性，对任意零测集 E，$\tau^{-1}(E)$ 仍为零测集。

现考虑 $(0,1]$ 上的开集，不妨只考虑开区间 $A=(a,b)$。

$$\tau^{-1}(A)=(\frac{a}{m},\frac{b}{m})\cup(\frac{a+1}{m},\frac{b+1}{m})\cup\cdots\cup(\frac{a+m-1}{m},\frac{b+m-1}{m})$$

(以上区间均按模去 1 计)。

故

$$m(A)=b-a=m\cdot\frac{b-a}{m}=m(\tau^{-1}(A))$$

即对开集成立。

综上，τ 是关于 Lebesgue 测度的保测变换。

(b).

与 Section 5.4 中 example(b) 类似，令 $X=(0,1]$，由 Exercise 20，只需验证对任意 $f,g\in L^2(X,m)$，

$$(T^nf,g)\to(f,1)(1,g),\ n\to\infty$$

其中

$$T^n(f)(x)=f(\tau^n(x))$$

现只需验证对任意 $f=e^{2\pi ikx}$ 与 $g=e^{2\pi ilx}$，性质成立：

若 $k=l=0$:

$$1=(T^nf,g)=\int_0^1 e^{2\pi ikm^nx}e^{-2\pi ilx}dx=(f,1)(1,g)$$

若 k,l 不全为 0：

当 n 充分大，$m^nk\neq l$ 恒成立，故而

$$0=(T^nf,g)=\int_0^1 e^{2\pi ikm^nx}e^{-2\pi ilx}dx=(f,1)(1,g)$$

综上，τ 为混合变换，从而遍历。

(c).

(1).

x 为 normal number 当且仅当数 $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n,...$ 是等分布的 (在模去 1 的运算下，以下证明略去此说明)，其中 $\xi_i=m^{i-1}x$，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}e^{2\pi ilm^kx}=0 \tag{$*$}$$

对任意正整数 l 成立。

(i). 先证明第一个论断。

x 为 normal 的当且仅当

$$\frac{\#\{j:a_j=k,1\leq j\leq N\}}{N}\to\frac{1}{m},\ N\to\infty$$

而 $a_j=k$ 当且仅当

$$m^{j-1}x=0.k..._{(m)}$$

这当且仅当

$$\xi_j=m^{j-1}x\in(\frac{k}{m},\frac{k+1}{m})$$

(此处区间上下界不取等可由 normal 的条件得出)。

现若 $(\xi_j)_{j=1}^{\infty}$ 是等分布的，显然对应 x normal。而若 x normal：考虑任意的 $(a,b)\subset(0,1]$。

$$\xi_j\in(a,b)\Leftrightarrow m^{j-1}x\in(a,b)\Leftrightarrow m^{j+r-1}x\in(a\cdot m^r,b\cdot m^r)$$

对任意非负整数成立。
再将 a, b 表示为 m 进制的形式即可得出第一个论断。
(ii). 再证明第二个论断。
若 x normal，则 $\xi_1, \xi_2, ...$ 等分布，对任意整数 $l \geq 1$，$f(x) = e^{2\pi ilx}$ 有

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

将这个积分写为 $Riemann$ 和可得

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ilm^k x}$$

即 $(*)$ 式成立。
反之，若 $(*)$ 式成立：
由 l 的任意性知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j) = \int_0^1 f(x)dx \tag{$**$}$$

对任意的三角多项式 f 成立，进而对 $(0, 1]$ 上的任意连续函数成立。现对任意区间 $(a, b) \subset (0, 1]$，记 g 为这个区间的示性函数，则 g 可由 $(0, 1]$ 上的连续函数逼近，故 $(**)$ 对 g 也成立

$$b - a = \int_a^b 1dx = \int_0^1 g(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g(\xi_j)$$

这就是

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \leq j \leq N : \xi_j \in (a, b)\}}{N} = b - a$$

即 $\xi_1, \xi_2, ...$ 等分布，x 为 normal number。
(2).
在 (1). 成立的条件下，取

$$f(x) = e^{2\pi ilx}$$

则对任意正整数 l，f 为可积函数。
由推论 5.6，对 $a.e.x \in (0, 1]$ 有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x)) = \int_X f(x)dx = \int_0^1 e^{2\pi ilx}dx = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ilm^k x}$$

从而对 $a.e.x \in (0, 1]$，x 为 normal number。

Exercise 25:
当 T 为压缩映射，$\|T\| \leq 1$，故 $\|T^*\| \leq 1$，即 $\|T^* f\| \leq \|f\|$ 对任意 $f \in \mathcal{H}$ 成立。
与定理 5.1 的证明类似地，令

$$S = \{f \in \mathcal{H} : T(f) = f\},\ S_1 = \{f \in \mathcal{H} : f = g - Tg, g \in \mathcal{H}\}$$

下证

$$S^{\perp} \subseteq \overline{S_1}$$

这等价于证明

$$(\overline{S_1})^{\perp} \subseteq S$$

对任意 $f \in (\overline{S_1})^{\perp}$，$f$ 满足对任意 $g \in \mathcal{H}$

$$(f, g - Tg) = 0$$

即

$$(f, g) = (f, Tg) = (T^* f, g)$$

由 g 的任意性

$$f = T^* f$$

现由 Cauchy 不等式

$$(Tf, f) \le \|Tf\| \cdot \|f\| \le \|f\|^2 = (f, f) = (f, T^* f) = (Tf, f)$$

从而该式全部取等。由 Cauchy 不等式取等条件，存在常数 c 使得

$$Tf = cf$$

而

$$(Tf, f) = (cf, f) = c\|f\|^2 = \|f\|^2$$

故 $c = 1$

$$Tf = f,\ f \in S$$

这就证明了 $S^{\perp} \subseteq \overline{S_1}$。
现对任意 $f \in \mathcal{H}$，可将其分解为

$$f = f_0 + f_1,\ f_0 \in S,\ f_1 \in \overline{S_1}$$

对任意 $\epsilon > 0$，存在 $f_1' \in S_1$ 使得

$$\|f_1 - f_1'\| < \epsilon$$

于是

$$A_n(f) = A_n(f_0) + A_n(f_1') + A_n(f_1 - f_1')$$

对第一项，因 $f_0 \in S, P(f) = f_0$

$$A_n(f_0) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(f_0) = f_0 = P(f)$$

对第二项，因 $f_1' \in S_1$，存在 $g \in \mathcal{H}$ 使得

$$f_1' = g - Tg$$

从而

$$A_n(f_1') = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(g) - T^{k+1}(g) = \frac{1}{n}(g - T^n(g))$$

因 T 为压缩映射，当 $n \to \infty$ 时

$$\|A_n(f_1')\| \le \frac{1}{n} \cdot 2\|g\| \to 0$$

对第三项

$$\|A_n(f_1 - f_1')\| \le \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \|T^k(f_1 - f_1')\| \le \|f_1 - f_1'\| < \epsilon$$

由 ϵ 的任意性及上述过程

$$\limsup_{n\to\infty} \|A_n(f) - P(f)\| < \epsilon$$

平均遍历定理对压缩映射 T 仍然成立。

Exercise 26:

(a).

令

$$S = \{f \in L^2 : f \circ \tau = f\},\ S_1 = \{g - Tg : g \in L^2\}$$

由引理 5.2，

$$L^2(X) = S \oplus \overline{S_1}$$

对任意 $f \in L^2$ 及 $\epsilon > 0$，可取

$$f = f_0 + f_1 + f_2$$

其中

$$f_0 \in S,\ f_1 \in S_1,\ f_1 + f_2 \in \overline{S_1},\ \|f_2\| < \epsilon$$

故存在 $g \in L^2(X)$ 使得 $f_1 = g - Tg$。

现令 $h = f_0 + f_1$，则

$$A_m f_0 = f_0 = P(f_0)$$

$$A_m f_1 = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} T^k(g - Tg) = \frac{1}{m}(g - T^m g)$$

当 $m \to \infty$

$$\frac{1}{m} g(x) \to 0$$

又

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}\|T^m g\|_{L^2}^2 = \|g\|_{L^2}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \infty$$

故而由单调收敛定理，对几乎所有 $x \in X$

$$\frac{1}{m} T^m g \to 0$$

上述过程表明

$$A_m(h(x)) \to P(h(x)),\ a.e. x \in X$$

现取

$$E_\alpha = \{x \in X : \limsup_{m\to\infty} |A_m f(x) - Pf(x)| > \alpha\}$$

只需证明对任意 $\alpha > 0$，$\mu(E_\alpha) = 0$。再由

$$A_m f - Pf = A_m h - Ph + A_m f_2 - Pf_2$$

令

$$A_1 = \{x \in X : \limsup_{m\to\infty} |A_m h(x) - Ph(x)| > 0\}$$

则由上述过程，$\mu(A_1) = 0$

$$A_2 = \{x \in X : \sup \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} |T^k f_2(x)| > \frac{\alpha}{2}\} = \{x : f_2^*(x) > \frac{\alpha}{2}\}$$

$$A_3 = \{x \in X : |Pf_2(x)| > \frac{\alpha}{2}\}$$

有

$$E_\alpha \subseteq A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

对 A_2

$$\|f_2^*\|_{L^2}^2 \geq \mu(A_2)(\frac{\alpha}{2})^2$$

故

$$\mu(A_2) \leq \frac{4}{\alpha^2}\|f_2^*\|_{L^2}^2 \leq \frac{4}{\alpha^2}c^2\epsilon^2$$

对 A_3，因 $\|Pf_2\| \leq \|f_2\|$

$$\mu(A_3) \leq \frac{4}{\alpha^2}\|f_2\|_{L^2}^2 \leq \frac{4\epsilon^2}{\alpha^2}$$

由 ϵ 的任意性

$$\mu(A_2) = \mu(A_3) = 0$$

从而

$$\mu(E_\alpha) = 0$$

命题成立。

(b).

对任意 $f \in L^1(X)$ 及任意 $\epsilon > 0$，存在 $g \in L^1 \cap L^2$ 使得 $\|f - g\|_1 < \epsilon$。

$$A_m f(x) - Pf(x) = A_m g(x) - Pg(x) + A_m(f-g)(x) - P(f-g)(x)$$

令

$$F_\alpha = \{x \in X : \limsup |A_m f(x) - Pf(x)| > 2\alpha\}$$

则

$$B_1 = \{x : |A_m g(x) - Pg(x)| \nrightarrow 0\}$$

$$B_2 = \{x : \limsup |A_m(f-g)(x)| > \alpha\}$$

$$B_3 = \{x : \limsup |P(f-g)(x)| > \alpha\}$$

则

$$F_\alpha \subseteq B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

由 (a). 及 $g \in L^2$

$$\mu(B_1) = 0$$

再由定理 5.3

$$\mu(B_2) \leq \frac{A}{\alpha}\|f-g\|_{L^1} < \frac{A\epsilon}{\alpha}$$

又 $\|P(f-g)\| \leq \|f-g\| < \epsilon$

$$\mu(B_3) \leq \frac{1}{\alpha}\|f-g\|_{L^1} < \frac{\epsilon}{\alpha}$$

由 ϵ 的任意性

$$\mu(B_2) = \mu(B_3) = 0$$

$$\mu(F_\alpha) = 0$$

故命题成立。

Exercise 27:

考虑 $X = [0,1]$ 以及一列区间 $I_n, n \geq 2$，其构造过程如下：
对区间 $I_2, ..., I_{N_1}$

$$I_{k+1} \subseteq X \setminus (I_2 \cup ... \cup I_k)$$

且

$$m(I_{k+1}) = \begin{cases} \frac{1}{(k+1)\log(k+1)}, & m(X \setminus (I_2 \cup ... \cup I_k) \geq \frac{1}{(k+1)\log(k+1)} \\ m(X \setminus (I_2 \cup ... \cup I_k), & m(X \setminus (I_2 \cup ... \cup I_k) < \frac{1}{(k+1)\log(k+1)} \end{cases}$$

因 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$ 发散，$m(X) = 1$，这样的过程是有限步的，即总存在这样的 $N_1 < \infty$ 使得 $I_2, ..., I_{N_1}$ 满足

$$\bigcup_{k=2}^{N_1} I_k = X$$

现对 $I_{N_1+1}, ..., I_{N_2}$，重复上述过程，则除去 $I_{N_2} \leq \frac{1}{(N_2+1)\log(N_2+1}$, 其他区间均有

$$m(I_k) = \frac{1}{k\log k}$$

将这个过程重复下去，得到了一列区间 $\{I_n\}_{n=2}^{\infty}$，令 $f_n(x) = n\log n \cdot \chi_{I_n}$

$$\int_X |f_n(x)| \leq n\log n \frac{1}{n\log n} = 1$$

从而

$$\|f_n\|_{L^1} \le 1$$

又对任意 $x \in X$，存在无穷多个 k 使得这无穷多个区间满足 $x \in I_k$，故而

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{f_n}{n} = \infty$$

满足条件。

Exercise 28:

对 E_n，令 $F_n = E_n^c$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) = 0$$

(由数学分析教程定理 14.7.5)

令 $F_1' = F_1$，由 τ 混合，存在 $m_2 < \infty$ 使得

$$\mu(\tau^{-m^2}(F_2) \cap F_1') < \mu(F_1')\mu(F_2) + \frac{1}{2^2}$$

取 $F_2' = \tau^{-m_2}(F_2)$，则存在 m_3 使得

$$\mu(\tau^{-m_3}(F_3) \cap (F_1' \cap F_2')) < \mu(F_1' \cap F_2')\mu(F_3) + \frac{1}{2^3}$$

$$\mu(\tau^{-m_3}(F_3) \cap F_2') < \mu(F_2')\mu(F_3) + \frac{1}{2^3}$$

取 $F_3' = \tau^{-m_3}(F_3)$ 则

$$\begin{aligned}
\mu(F_1' \cap F_2' \cap F_3') &< \mu(F_1' \cap F_2')\mu(F_3) + \frac{1}{2^3} \\
&= \mu(F_3)(\mu(F_1)\mu(F_2) + \frac{1}{2^2}) + \frac{1}{2^3} \\
&= \mu(F_1)\mu(F_2)\mu(F_3) + \frac{1}{2^2}\mu(F_3) + \frac{1}{2^3}
\end{aligned}$$

持续这个过程，总选择 m_k 使得

$$\mu(\tau^{-m_k}(F_k) \cap \bigcup_{j=l}^{k-1} F_j') < \mu(F_k)\mu(\bigcup_{j=l}^{k-1} F_j') + \frac{1}{2^k}$$

成立，其中 l 取遍 $1, ..., k-1$。

左边式总小于

$$\prod_{j=l}^{k} \mu(F_j) + \sum_{j=l+1}^{k} \frac{1}{2^j} \prod_{i=j+1}^{k} \mu(F_i)$$

(后一项乘积中当 $j = k$ 时该项取 1，即为 $\frac{1}{2^k}$ 项) 固定 l，当 $k \to \infty$ 时

$$\prod_{j=l}^{\infty} \mu(F_j) = 0$$

对第二项，取 $M < \infty$

$$\sum_{j=l+1}^{k}\frac{1}{2^j}\prod_{i=j+1}^{k}\mu(F_i)=\sum_{j=l+1}^{M}\frac{1}{2^j}\prod_{i=j+1}^{k}\mu(F_i)+\sum_{j=M+1}^{k}\frac{1}{2^j}\prod_{i=j+1}^{k}\mu(F_i)$$

对右式第一项，因 $M < \infty$，当 $k \to \infty$ 时，该项中的每一个乘积均趋于 0。
对右式第二项

$$\frac{1}{2^j}\prod_{i=j+1}^{k}\mu(F_i)\leq\frac{1}{2^j}$$

故第二项小于

$$\sum_{j=M+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}$$

当改变 M，该项可取任意小。
现在对任意 l 有

$$\mu(\bigcap_{j=l}^{\infty}F_j')=0$$

则

$$\mu(\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{j=l}^{\infty}F_j')=0$$

令

$$E_j'=\tau^{-m_j}(E_j)$$

$$\limsup_{j\to\infty}E_j'=(\bigcup_{l=1}^{\infty}\bigcap_{j=l}^{\infty}F_j')^c$$

即命题成立。

Problems

Problem 1:

(a).
由 Φ 连续，故 Φ 把紧集映到紧集。从而将 F_σ 集映到 F_σ 集。
设 $E \subset O$ 为零测集。对任意正整数 n，令

$$F_n=\{x\in E:|\Phi'(x)|<n\}$$

对任意 $x \in F_n$，存在 $\delta > 0$ 使得当 $|y-x| < \delta$ 时

$$\frac{|\Phi(y)-\Phi(x)|}{|y-x|}<n$$

取 $F_{n,p} \subset F_n$ 为固定 $\delta = \frac{1}{p}$ 的满足条件的 x 的集合。
$m(F_{n,p}) = 0$，故可用测度任意小的开集将 $F_{n,p}$ 覆盖。将此开集分解为几乎不交的立方体之并，并且其直径小于 $\frac{1}{p}$，就形成了 $F_{n,p}$ 的一个覆盖。由 Ex 8(b). Ch 1. 同样的过程知

$$m(T(F_{n,p})) = 0$$

从而

$$E = \bigcup_{n,p} F_{n,p}$$

$$m(T(E)) \leq \sum_{n,p} m(T(F_{n,p})) = 0$$

现 T 将 F_σ 集映到 F_σ 集，将零测集映为零测集，故将可测集映为可测集。
(b).

$$m(\Phi(E)) = \int_E |\det \Phi'(x)| dx$$

设 E 为开有界集，取一任意 $\epsilon > 0$，将 E 写为如下形式

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

其中 Q_j 为几乎不交的立方体，且其直径均小于 ϵ。设 z_k 为 Q_k 的中心点。则当 $x \in Q_k$ 时

$$\Phi(x) = \Phi(z_k) + \Phi'(z_k)(x - z_k) + o(\epsilon)$$

故

$$\Phi(Q_k) = \Phi(z_k) + \Phi'(z_k)(Q_k - z_k) + o(\epsilon)$$

即

$$\Phi(Q_k) - \Phi(z_k) = \Phi'(z_k)(Q_k - z_k) + o(\epsilon)$$

故存在 $\eta(\epsilon)$ 满足当 $\epsilon \to 0$ 时

$$\eta(\epsilon) \to 0$$

使得

$$(1 - \eta(\epsilon))\Phi'(z_k)(Q_k - z_k) \subset \Phi(Q_k) - \Phi(z_k) \subset (1 + \eta(\epsilon))\Phi'(z_k)(Q_k - z_k)$$

再由 Pro 4. Ch 2. 知当 $\epsilon \to 0$ 时

$$m(\Phi(E)) = \sum_k m(\Phi(Q_k)) = \sum_k |\det(\Phi'(z_k))| m(Q_k) + o(1)$$

将右式第一项看作 Riemann 和可得

$$m(\Phi(E)) = \int_E |\det(\Phi'(x))| dx$$

现对一般情况，当 E 为可测集，存在一列开集 O_n 使得

$$E \subset O_n,\ m(O_n \setminus E) < \frac{1}{n}$$

现 $\bigcap_n O_n$ 为 G_δ 集，故不妨设

$$\bigcap_n O_n = E \cup N$$

其中 N 为零测集。

故

$$\Phi(E \cup N) = \Phi(\bigcap_n O_n) = \bigcap_n \Phi(O_n)$$

再由 (a). $\Phi(N)$ 为零测集

$$m(\Phi(E)) \leq m(\Phi(E \cup N)) \leq m(\Phi(E)) + m(\Phi(N)) = m(\Phi(E))$$

故

$$m(\Phi(E \cup N)) = m(\Phi(E))$$

又

$$\begin{aligned}
m(\Phi(E \cup N)) &= m(\bigcap_n \Phi(O_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} m(\Phi(O_n)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{O_n} |\det \Phi'| \\
&= \int_{\bigcap_n O_n} |\det \Phi'| \\
&= \int_{E \cup N} |\det \Phi'| \\
&= \int_E |\det \Phi'| \\
&= m(\Phi(E))
\end{aligned}$$

(c).

当 $f = \chi_{\Phi(E)}$，由 (b). 知

$$\int_{O'} \chi_{\Phi(E)}(y)dy = m(\Phi(E)) = \int_E |\det \Phi'| = \int_O f(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|dx$$

自然成立。从而

$$\int_{O'} f(y)dy = \int_O f(\Phi(x))|\det \Phi'(x)|dx$$

对所有简单函数 f 成立，进而对所有有界并有有限支集的函数成立，最后对 O' 上所有可积函数成立。

Problem 2:

对分式线性变换
$$\Phi : x \to \frac{az+b}{cz+d}$$
有
$$\Phi'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2} \neq 0$$
设 $\Phi(z) = \Phi(x,y) = (x', y')$，则
$$y' = \frac{1}{(cx+d)^2+(cy)^2} \cdot (ad-bc)y = \frac{1}{(cx+d)^2+(cy)^2} y$$
现对可测集 E 有
$$\begin{aligned}
\mu(\Phi(E)) &= \int_{\Phi(E)} \frac{1}{(y')^2} dxdy \\
&= \int_E \frac{1}{(y')^2} |\det \Phi'| dxdy \\
&= \int_E \frac{(cx+d)^2+(cy)^2}{y^2} \frac{1}{|(cz+d)^2|} dxdy \\
&= \int_E \frac{(cx+d)^2+(cy)^2}{y^2} \frac{1}{|(c(x+iy)+d)|^2} dxdy \\
&= \int_E \frac{1}{y^2} dxdy \\
&= \mu(E)
\end{aligned}$$
故而 Φ 为测度 μ 的保测变换。

Problem 3:

(a).

闭球 B 为紧集，Ω^c 为闭集，而 $B \subset \Omega, B \cap \Omega^c = \emptyset$，从而
$$d(B, \Omega^c) > 0$$
选择 $\delta < d(B, \Omega^c)$。令
$$V_\delta = \{x : d(X, B) < \delta\} \subset \Omega$$
对任一 $x \in V_\delta$，令
$$I_{x,\delta} = \{y \in \mathbb{R} : (x,y) \in \hat{B}^\delta\}$$
且
$$h(x,\delta) = m(I_{x,\delta})$$
对 $\hat{B}^\delta \subset V_\delta \times \mathbb{R}$，用 Tonelli 定理有
$$\begin{aligned}
m(\hat{B}^\delta) &= \int_{(x,y) \in V_\delta \times \mathbb{R}} \chi_{I_{x,\delta}}(y) \\
&= \int_{V_\delta} \int_{\mathbb{R}} \chi_{I_{x,\delta}}(y) dydx \\
&= \int_{V_\delta} h(x,\delta) dx
\end{aligned}$$

取 $a < d(B,\Omega^c)$ 为一固定值，则当 $x \in V_a \setminus V_\delta$ 时 $h(x,\delta) = 0$。从而

$$m(\hat{B}^\delta) = \int_{V_\delta} h(x,\delta)dx = \int_{V_a} h(x,\delta)dx$$

现计算 $h(x,\delta)$：
对 $x \in B$，令 $M = |\nabla F|$ 在 x 处的值，令 $\vec{v}$ 为 ∇F 方向的单位向量，则在 x 处有

$$\nabla F \cdot \vec{v} = M$$

现由 F 为 C^1 函数，∇F 连续。从而对任意 $\epsilon > 0$ 存在 $\delta_0 > 0$ 使得当 $y \in B(x,\delta_0)$ 时对 y 有

$$|\nabla F| < M + \epsilon$$

$$\nabla F \cdot \vec{v} > M - \epsilon$$

设 $\delta < \delta_0$。
(1). 现对任意 $y \in \mathbb{R}$，若有

$$F(x) \leq F(x) + y \leq F(x) + \delta\sqrt{1 + (M-\epsilon)^2}$$

即

$$0 \leq y \leq \delta\sqrt{1 + (M-\epsilon)^2}$$

考虑当 $0 \leq t \leq \frac{\delta(M-\epsilon)}{1+(M-\epsilon)^2}$ 时的

$$F(x + t\vec{v})$$

由 $\delta < \delta_0$ 的限制可得

$$F(x) + (M-\epsilon)t < F(x + t\vec{v}) < F(x) + (M+\epsilon)t$$

又

$$\frac{y(M-\epsilon)}{1+(M-\epsilon)^2} < \frac{\delta(M-\epsilon)}{\sqrt{1+(M-\epsilon)^2}} < \delta$$

可取

$$t = \frac{y(M-\epsilon)}{1+(M-\epsilon)^2}$$

此时有

$$F(x + \frac{y(M-\epsilon)}{1+(M-\epsilon)^2}\vec{v}) > F(x) + \frac{y(M-\epsilon)^2}{1+(M-\epsilon)^2}$$

而 $F(x)$ 为连续函数，故由中间值定理，存在 $0 < t_0 < t < \delta$ 使得

$$F(x + t_0\vec{v}) = F(x) + \frac{y(M-\epsilon)^2}{1+(M-\epsilon)^2}$$

令 $x_1 = x + t_0\vec{v}$，则 $(x_1, F(x_1)) \in \hat{B}$ 且

$$\begin{aligned} d((x, y+F(x)), (x_1, F(x_1)))^2 &= t_0^2 + (y - \frac{y(M-\epsilon)^2}{1+(M-\epsilon)^2})^2 \\ &= t_0^2 + (\frac{y^2}{1+(M-\epsilon)^2})^2 \\ &\le (\frac{y(M-\epsilon)}{1+(M-\epsilon)^2})^2 + (\frac{y^2}{1+(M-\epsilon)^2})^2 \\ &= \frac{y^2}{1+(M-\epsilon)^2} < \delta^2 \end{aligned}$$

即

$$d((x, y+F(x)), (x_1, F(x_1))) < \delta$$

从而

$$y \in I_{x,\delta}$$

由对称性，到这里我们证明了：

$$[F(x) - \delta\sqrt{1+(M-\epsilon)^2}, F(x) + \delta\sqrt{1+(M-\epsilon)^2}] \subset I_{x,\delta}$$

与

$$\frac{h(x,\delta)}{2\delta} \ge \sqrt{1+(M-\epsilon)^2}$$

(2). 另一方面，考虑当 $F(x) + y > F(x) + \delta\sqrt{1+(M+\epsilon)^2}$ 的情况，若此时有 $(x, y) \in I_{x,\delta}$ 成立：存在 x_2 使得

$$d((x, F(x)+y), (x_2, F(x_2))) < \delta$$

从而

$$|x_2 - x| < \delta$$

设

$$t_2 = |x_2 - x|$$

则

$$F(x_2) < F(x) + (M+\epsilon)t_2$$

此时

$$\begin{aligned} d((x, F(x)+y), (x_2, F(x_2)))^2 &= t_2^2 + (y - (M-\epsilon)t_2)^2 \\ &= (1+(M+\epsilon)^2)t_2^2 - 2y(M+\epsilon)t_2 + y^2 \end{aligned}$$

上式最后一项得到一个二次函数，当

$$t_2 = \frac{y(M+\epsilon)}{1+(M+\epsilon)^2}$$

时右式取得最小值

$$(1+(M+\epsilon)^2)(\frac{y(M+\epsilon)}{1+(M+\epsilon)^2})^2 - 2y(M+\epsilon)\frac{y(M+\epsilon)}{1+(M+\epsilon)^2} + y^2 = y^2\frac{1}{1+(M+\epsilon)^2}$$

即

$$d((x,F(x)+y),(x_2,F(x_2)))^2 >\geq y^2\frac{1}{1+(M+\epsilon)^2} > \delta^2$$

这与

$$d((x,F(x)+y),(x_2,F(x_2))) < \delta$$

矛盾，于是 $y \notin I_{x,\delta}$。
同样地，由对称性，到现在我们证明了：

$$I_{x,\delta} \subset [F(x)-\delta\sqrt{1+(M+\epsilon)^2}, F(x)+\delta\sqrt{1+(M+\epsilon)^2}]$$

即

$$\frac{h(x,\delta)}{2\delta} \leq \sqrt{1+(M+\epsilon)^2}$$

综合 (1). 我们有

$$\sqrt{1+(M-\epsilon)^2} \leq \frac{h(x,\delta)}{2\delta} \leq \sqrt{1+(M+\epsilon)^2}$$

于是由 ϵ 的任意性得到了

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{h(x,\delta)}{2\delta} = \sqrt{1+|\nabla F|^2}$$

(3).
现在对闭球 B 上的连续函数 ∇F 存在最大值 N。对任意 $x \in B$，若 $|z-F(x)| > (N+1)\delta$，那么对于 $B(x,\delta)$ 里的 x_3 有

$$|F(x_3)-F(x)| < N\delta$$

从而有

$$|z-F(x_3)| > \delta$$

再由 x_3 的任意性可知

$$z \notin I_{x,\delta}$$

于是对任意 $\delta > 0$

$$\frac{h(x,\delta)}{2\delta} \leq N+1$$

回到最初，由 V_a 测度有限及 $N+1<\infty$，由控制收敛定理

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2\delta}\cdot m(\hat{B}^\delta) &= \lim_{\delta\to 0}\int_{V_a}\frac{h(x,\delta)}{2\delta}dx \\
&= \int_{V_a}\lim_{\delta\to 0}\frac{h(x,\delta)}{2\delta}dx \\
&= \int_B \sqrt{1+|\nabla F|^2}dx \\
&= \mu(\hat{B})
\end{aligned}$$

(b).
设在球面 S^{d-1} 上两点 θ,ϕ 之间的角距离为

$$a(\theta,\phi)$$

对任一 $\mathbb{R}^{d-1}$ 里满足 $|x|<1$ 的球面 B，设其由 $F(x)$ 对应而来的 S^{d-1} 上的球为 $\hat{B}$。设

$$B'_\delta=\{p\in S^{d-1}:a(p,\hat{B})<2\arcsin\frac{\delta}{2}\}$$

从而在极坐标意义下

$$\hat{B}\times[1-\delta,1+\delta]\subset(\hat{B})^\delta\subset B'_\delta\times[1-\delta,1+\delta]$$

再由 Section 3.2

$$m(\hat{B}\times[1-\delta,1+\delta])=\sigma(\hat{B})\int_{1-\delta}^{1+\delta}r^{d-1}dr=\frac{(1+\delta)^d-(1-\delta)^d}{d}\sigma(\hat{B})$$

$$\frac{m(\hat{B}\times[1-\delta,1+\delta])}{2\delta}=\frac{1}{d}\frac{(1+\delta)^d-(1-\delta)^d}{2\delta}\sigma(\hat{B})$$

而

$$\lim_{\delta\to0}\frac{(1+\delta)^d-(1-\delta)^d}{2\delta}=d$$

从而

$$\frac{m(\hat{B}\times[1-\delta,1+\delta])}{2\delta}\to\sigma(\hat{B})$$

另一边有

$$\frac{m(B'_\delta\times[1-\delta,1+\delta])}{2\delta}=\frac{1}{d}\frac{(1+\delta)^d-(1-\delta)^d}{2\delta}\sigma(B'_\delta)$$

而

$$\bigcap B'_\delta=\overline{\hat{B}}$$

故

$$\lim_{\delta\to0}\sigma(B'_\delta)=\sigma(\overline{\hat{B}})=\sigma(\hat{B})$$

综上得到

$$\mu(\hat{B})=\lim_{\delta\to0}\frac{1}{2\delta}m(\hat{B}^\delta)=\sigma(\hat{B})$$

故 $\mu=\sigma$ 对任意球成立，进而对所有 Borel 集成立，故有 $\mu=\sigma$。
(c).
由 (a).(b).

$$d\sigma=\sqrt{1+|\nabla F|^2}dx$$

其中

$$\begin{aligned}dx&=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial\theta}&\frac{\partial x_1}{\partial\phi}\\\frac{\partial x_2}{\partial\theta}&\frac{\partial x_2}{\partial\phi}\end{vmatrix}d\theta d\phi\\&=\begin{vmatrix}\cos\theta\cos\phi&-\sin\theta\sin\phi\\\cos\theta\sin\phi&\sin\theta\cos\phi\end{vmatrix}d\theta d\phi\\&=\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi\end{aligned}$$

$$\nabla F=(\frac{\partial F}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2})=(\frac{-x_1}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}},\frac{-x_2}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2}})$$

$$
\begin{aligned}
1+|\nabla F|^2 &= 1+\frac{x_1^2+x_2^2}{1-x_1^2-x_2^2} \\
&= \frac{1}{\cos^2\theta}
\end{aligned}
$$

故而

$$
d\sigma=\sqrt{1+|\nabla F|^2}dx=\frac{1}{\cos\theta}\sin\theta\cos\theta d\theta d\phi=\sin\theta d\theta d\phi
$$

一般地，当维数为 $d=n+1$ 时：

由 $n+1$ 维求坐标变换：

$$
\begin{cases}
y=\cos\theta_1 \\
x_1=\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
\vdots \\
x_{n-1}=\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n \\
x_n=\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n
\end{cases}
$$

此时

$$
\frac{\partial(x_1,...,x_n)}{\partial(\theta_1,...,\theta_n)}=\cos\theta_1\sin^{n-1}\theta_1\sin^{n-2}\theta_2\sin^{n-3}\theta_3\cdots\sin\theta_{n-1}
$$

且同样有

$$
1+|\nabla F|^2=\frac{1}{\cos^2\theta_1}
$$

从而对 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的单位球 S^d

$$
d\sigma=\sin^{n-1}\theta_1\sin^{n-2}\theta_2\sin^{n-3}\theta_3\cdots\sin\theta_{n-1}d\theta_1\cdots d\theta_n
$$

Problem 4:

设 λ 为 $SO(d)$ 上的左不变测度，μ 为 S^{d-1} 上的旋转不变的 Borel 测度，σ_1 为 S^{d-1} 上的左不变测度，则 $\sigma_1=c\sigma$，其中 c 为常数。对任意的 $x\in S^{d-1}$，映射

$$
g\mapsto gx
$$

把测度 λ 映为 σ_1。

对任意的连续函数 $f:S^{d-1}\to\mathbb{R}$，由 Fubini 定理有

$$
\begin{aligned}
\int_{S^{d-1}}f(x)d\mu(x) &= \int_{SO(d)}\int_{S^{d-1}}f(gx)d\mu(x)d\lambda(g) \\
&= \int_{S^{d-1}}\int_{SO(d)}f(gx)d\lambda(g)d\mu(x) \\
&= \int_{S^{d-1}}\int_{S^{d-1}}f(y)d\sigma_1(y)d\mu(x) \\
&= c\int_{S^{d-1}}\int_{S^{d-1}}f(y)d\sigma(y)d\mu(x) \\
&= c\int_{S^{d-1}}f(y)d\sigma(y)
\end{aligned}
$$

(此两处 c 表示函数，实际值不相等)。
从而命题成立。

Problem 5:
此即 Folland 实分析一书中 212 页的 Riesz 表示定理，依如下四步证明即可得证：
(1). 对开集 U 定义
$$\mu(U) = \sup\{\ell(f) : f \in C_c(X), f \prec U\}$$
设对任意 $E \subset X$
$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(U) : U \supset E, U\ open\}$$
则 μ^* 为一个外测度。
(2). 任意开集为 μ^*-可测的。
(3). μ 满足对任意 X 上的紧集 K 有
$$\mu(K) = \inf\{\ell(f) : f \in C_c(X), f \geq \chi_K\}$$
(4). 对任意 $f \in C_c(X)$ 有
$$\ell(f) = \int f d\mu$$
Problem 6:
(a).
由 A 为 $\mathbb{T}^d$ 的自同构，A^{-1} 也有相同性质。现对 $\mathbb{T}^d$ 上的任意可测集 E，存在对应的 $\mathbb{R}^d$ 上单位立方体上的可测集 $\tilde{E}$ 使得
$$\mu(A^{-1}(E)) = m(A^{-1}(\tilde{E})) = |\det A^{-1}|m(\tilde{E}) = m(\tilde{E}) = \mu(E)$$
此即
$$\mu(\tau^{-1}(E)) = \mu(E)$$
即 τ 为 $\mathbb{T}^d$ 上的保测同构。
(b).
A. 方一。
(1). 若 τ 遍历，则 A 无 $e^{2\pi ip/q}$(p,q 为整数) 形式的特征值。
若不然，存在一个这样形式的 A 的特征值 r。由 A^T 与 A 的特征多项式相同，r 也为 A^T 的特征值。从而 r^q 为 $(A^T)^q$ 的特征值，即 1。
现由 $A^T - I$ 的各项均为有理数，故存在一个特征向量属于 $\mathbb{Q}^d$，再乘以一个常数后可得到一个属于 $\mathbb{Z}^d$ 的特征向量，设为 n。即
$$(A^T)^q n = n$$
考虑函数 $f(x) = e^{2\pi in\cdot x}, x \in \mathbb{T}^d$，则
$$n \cdot (Ax) = n^T Ax = (A^T n)^T x = (A^T n) \cdot x$$

$$T^k f(x) = e^{2\pi i((A^T)^k n)\cdot x}$$

于是有

$$A_m f(x) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} e^{2\pi i((A^T)^k n)\cdot x}$$

由推论 5.6，对 a.e.$x \in \mathbb{T}^d$，当 $m \to \infty$ 时有

$$A_m f(x) \to \int_{\mathbb{T}^d} f d\mu = 0$$

而由 $(A^T)^q n = n$

$$T^{k+q} f = T^k f$$

对任意 k 成立，故对任意整数 j

$$A_{jq} f(x) = A_q f(x)$$

而 $A_q f(x)$ 非零，故而该列有无限多项非零，从而与推论 5.6 矛盾，即 τ 不遍历，矛盾。于是命题成立。

(2).

若 A 没有 $e^{2\pi i p/q}$ 形式的特征值，则 τ 混合，从而遍历。

设 $f(x) = e^{2\pi i n\cdot x}, g(x) = e^{2\pi i m\cdot x}$，$n, m \in \mathbb{Z}^d$，有

$$(T^k f, g) = \int_{\mathbb{T}^d} e^{2\pi i((A^T)^k n - m)\cdot x} dx$$

若 $m = n = 0$，则

$$(T^k f, g) = 1 = (f, 1)(1, g)$$

若 m, n 不全为 0，则 $(A^T)^k n - m$ 最终非零。

若不然，则存在 $k_1 \neq k_2$ 使得

$$(A^T)^{k_1} n = (A^T)^{k_2} n$$

即

$$(A^T)^{k_2 - k_1}((A^T)^{k_1} n) = (A^T)^{k_1} n$$

$(A^T)^{k_1} n$ 为 $(A^T)^{k_2 - k_1}$ 的特征向量，其对应的特征值为 1。从而 A 有特征值为 1 的 $(k_2 - k_1)$ 阶单位根，矛盾。故 $(A^T)^k n - m$ 最终非零。

从而当 $k \to \infty$ 时

$$(T^k f, g) = 0 = (f, 1)(1, g)$$

即 τ 混合，从而遍历。

B. 方二。

考虑 τ 的不变函数 $f \in L^2(X, \mu)$，将其写为

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^k} c_n e^{2\pi i n\cdot x}$$

$f\circ\tau$ 可写为

$$f\circ\tau=\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}c_n e^{2\pi i n\cdot(Ax)}=\sum_{n\in\mathbb{Z}^k}c_n e^{2\pi i(A^T n)\cdot x}$$

从而

$$c_n=c_{A^T n}=\cdots$$

由 Parseval 等式

$$\|f\|_{L^2}=\sum|c_n|^2<\infty$$

综合这两个条件可知
或者 $c_n=0$;
或者 $\{n,A^T n,\cdots\}$ 仅含有限个元素;
若 $\{n,A^T n,\cdots\}$ 仅含有限个元素，则存在整数 k 使得 $(A^T)^k n=n$，这表明 A^T 有为 k 阶单位根的特征值，从而也为 A 的特征值。
反之，若存在 n 使得 $(A^T)^k n=n$，即 A 有 k 阶单位根特征值，则函数

$$f(x)=\sum_{j=0}^{k-1}e^{2\pi i n\cdot(A^j x)}$$

不是常数，但为满足条件的 τ 的不变函数。
(c).
令 ν 为 $\mathbb{T}^d$ 上的狄拉克测度

$$\nu(E)=\begin{cases}1, & 0\in E\\ 0, & 0\notin E\end{cases}$$

则仍满足对任意可测集 E

$$\nu(\tau^{-1}(E))=\nu(E)$$

从而 τ 不是唯一遍历的。

Problem 7:
(1).
令 $f_0=0$

$$f_n(x)=f+T\circ f+\cdots+T^{n-1}\circ f$$

$$F_n(x)=\max_{0\leq j\leq n}f_j(x)$$

$$E_n=\{x:F_n(x)>0\}$$

则

$$E_0=\bigcup_n E_n$$

现若 $x\in E_n$，即 $F_n(x)>0$，下证明

$$f(x)\geq F_n(x)-T\circ F_n(x)$$

因当 $0 \leq j \leq n$ 时有

$$F_n \geq f_j$$

故

$$T \circ F_n \geq T \circ f_j$$

$$T \circ F_n + f(x) \geq T \circ f_j + f(x) = f_{j+1}(x)$$

$$T \circ F_n + f(x) \geq \max_{1 \leq j \leq n+1} f_j(x)$$

而 $F_n(x) \geq 0$ 恒成立，从而

$$T \circ F_n + f(x) \geq F_n(x)$$

现在 E_n 上积分

$$\int_{E_n} f(x) d\mu \geq \int_{E_n} F_n(x) d\mu - \int_{E_n} T \circ F_n(x) d\mu \geq \int_{E_n} F_n(x) d\mu - \int_X T \circ F_n(x) d\mu$$

而当 $x \in E_n$ 时由定义 $F_n = 0$ 故

$$\int_{E_n} f(x) d\mu \geq \int_X F_n(x) d\mu - \int_X T \circ F_n(x) d\mu$$

又 τ 为保测变换，$T \circ F_n(x) = F_n(\tau(x))$

$$\int_X F_n(x) d\mu = \int_X T \circ F_n(x) d\mu$$

从而

$$\int_{E_n} f(x) d\mu \geq 0$$

而

$$E_0 = \bigcup_n E_n$$

于是

$$\int_{E_0} f(x) d\mu \geq 0$$

(2).
令 $g(x) = f(x) - \alpha$，$G_0 = \{x : g^{\#}(x) > 0\} = \{x : f^{\#} > \alpha\}$，则当 $f \geq 0$ 时

$$\{x : f^*(x) > \alpha\} = G_0$$

从而

$$0 \leq \int_{G_0} g(x) d\mu = \int_{G_0} (f(x) - \alpha) d\mu = \int_{G_0} f(x) d\mu - \alpha \mu(G_0)$$

即

$$\mu\{x : f^*(x) > \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\{f^*(x) > \alpha\}} f(x) d\mu$$

Problem 8:

对 $[0,1)$ 上的任一开区间 (a,b)，

$$\langle\frac{1}{x}\rangle \in (a,b) \Leftrightarrow \frac{1}{x} \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(a+k,b+k) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{b+k},\frac{1}{a+k})$$

故

$$\begin{aligned}\mu(\tau^{-1}((a,b))) &= \sum_{k=1}^{\infty}\mu((\frac{1}{b+k},\frac{1}{a+k})) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{b+k}}^{\frac{1}{a+k}}\log 2\cdot\frac{dx}{1+x} \\ &= \log 2\sum_{k=1}^{\infty}\log(\frac{a+k+1}{a+k}\cdot\frac{b+k}{b+k+1}) \\ &= \log 2\log\frac{b+1}{a+1} \\ &= \mu((a,b))\end{aligned}$$

从而 τ 作用在区间上为保测变换，进而对所有 $[0,1)$ 上的 Borel 集成立，故而 τ 对测度 μ 为保测变换。

Problem 9:

通过定义来证明 τ 是遍历的。而 $\mu(E)=0 \Leftrightarrow m(E)=0$，故 τ 不变集不受测度为 m 或 μ 的影响，可以只考虑 Lebesgue 测度。

(1).

令映射 $\psi_{k_n,\ldots,k_1}:(0,1]\to(0,1]$

$$\psi_{k_n,\ldots,k_1}(x) = \frac{1}{k_n+\frac{1}{k_{n-1}+\cdots+\frac{1}{k_1+x}}}$$

令

$$\phi_k(x) = \frac{1}{k+x}$$

从而

$$\psi_{k_n,\ldots,k_1} = \phi_{k_n}\circ\cdots\circ\phi_{k_1}$$

且

$$T^n\circ\phi_{k_n,\ldots,k_1} = I$$

即通过选取不同的 k_i，任意 $T^{-n}(x)$ 可写为 $\phi_{k_n,\ldots,k_1}$ 的形式。

令 $U_{k_n,\ldots,k_1} = \psi_{k_n,\ldots,k_1}((0,1)) = \phi_{k_n}\circ\cdots\circ\phi_{k_1}((0,1))$。显然 $U_{k_n,\ldots,k_1}$ 为区间。

现对任意 $0<a<b\le 1$ 和 $k\in\mathbb{N}$

$$\phi_k(a)-\phi_k(b) = \frac{b-a}{(k+a)(k+b)} \le b-a$$

于是

$$1 \geq m(U_{k_1}) \geq m(U_{k_2,k_1}) \geq m(U_{k_3,k_2,k_1}) \geq ...$$

以下证明对任意选取的 $k_1, k_2...$

$$m(U_{k_{n+2},k_{n+1},k_n,...,k_1}) \leq \frac{1}{2} m(U_{k_n,k_{n-1},...,k_1})$$

设 $k = k_{n+1}, k' = k_{n+2}, U_{k_n,k_{n-1},...,k_1} = (a, b), U_{k_{n+1},k_n,...,k_1} = (a', b'), U_{k_{n+2},k_{n+1},...,k_1} = (a'', b'')$。

$$|b' - a'| = |\phi_k(a) - \phi_k(b)| = |\frac{b-a}{(k+a)(k+b)}|$$

故当 $k \geq 2$ 时

$$|b' - a'| \leq \frac{1}{2}(b-a)$$

当 $k = 1$ 时

$$a' = \frac{1}{1+b} \geq \frac{1}{2},\ b' = \frac{1}{1+a} \geq \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
|b'' - a''| &= |\phi_{k'}(a') - \phi_{k'}(b')| \\
&= |\frac{b'-a'}{(k'+a')(k'+b')}| \\
&\leq |b'-a'| \frac{1}{(k'+\frac{1}{2})^2} \\
&\leq \frac{1}{2}|b'-a'|
\end{aligned}$$

由此我们有

$$m(U_{k_n,...,k_1}) \leq 2^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

(2).

对区间 $[a, b]$ 及处处不为零的函数 $F : [a, b] \to \mathbb{R}$，定义

$$var_{[a,b]}F = \sup_{x,y \in [a,b]} |\frac{F(x)}{F(y)}|$$

希望存在与 n 和 $k_n, ..., k_1$ 选取无关的常数 c 使得

$$var_{[0,1]}\psi'_{k_n,...,k_1} \leq c$$

由链式法则

$$var_{[0,1]}\psi'_{k_n,...,k_1} \leq var_{[0,1]}\psi'_{k_{n-1},...,k_1} \cdot var_{\psi_{k_{n-1},...,k_1}((0,1))}\phi'_{k_n}$$

$$var_{[a,b]}\phi'_k = |\frac{k+b}{k+a}|^2 \leq |\frac{1+b}{1+a}|^2 \leq |1+b-a|^2 \leq 1 + 3(b-a)$$

故归纳地有

$$var_{[0,1]}\psi'_{k_n,...,k_1} \leq \prod_{n=1}^{\infty}(1 + 3 \cdot 2^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) \leq e^{3\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} < \infty$$

(3).
定义任一区间 $U_{k_n,\dots,k_1}$ 为 n 阶标准区间。设 $E \subset [0,1]$ 为一可测集，固定 $k_1,\dots,k_n$，令

$$\psi = \psi_{k_n,k_{n-1},\dots,k_1}$$

则 $\psi : E \to \psi(E)$ 为双射。

$$m(\psi(E)) = \int 1_{\psi(E)}(x)dx = \int 1_E(y)\psi'(y)dy$$

由 (2).

$$var_{[0,1]}\psi' \le c$$

故而存在与 E 和 $k_1,\dots,k_n$ 选取无关的 M_1, M_2 满足 $\frac{M_2}{M_1}$ 有界且使得上式受 $M_1 m(E)$ 与 $M_2 m(E)$ 控制。
当 $E = [0,1], \psi(E) = U_{k_n,\dots,k_1}$。
存在常数 $C > 0$ 使得

$$m(\psi(E)) \ge Cm(E)m(U_{k_n,\dots,k_1})$$

现对 $\psi(E) = \tau^{-n}(E) \cap U_{k_n,\dots,k_1}$ 有

$$m(\tau^{-n}(E) \cap U_{k_n,\dots,k_1}) \ge Cm(E)m(U_{k_n,\dots,k_1})$$

现设 E 为 τ 的不变集，则 $\tau^{-n}(E)$ 与 E 至多相差一零测集。令 $\tilde{U}$ 为有限个 n 阶标准区间的并，称之为 n 阶标准集，则有

$$m(E \cap \tilde{U}) \ge Cm(E)m(\tilde{U})$$

因所有 n 阶标准区间的并几乎覆盖了区间 $(0,1)$，仅除有着 $\psi_{k_n,\dots,k_1}(0), \psi_{k_n,\dots,k_1}(0)$ 形式的数，而这些数为有理数，测度为 0，从而所有 n 阶标准区间的并测度为 1。
由 (1).n 阶标准区间测度至多为 $2^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$，而

$$\lim_{n\to\infty} 2^{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = 0$$

我们有引理如下：
设开区间族 $(U_{n,i})_{i=1,2,\dots}$，$n = 1,2\dots$ 满足
(i). 当 $n \to \infty$ 时有 $\sup_i m(U_{n,i}) \to 0$
(ii). 对固定的 n，区间 $U_{n,i}$ 互不相交
(iii).

$$m([0,1] \setminus \bigcup_i U_{n,i}) = 0$$

那么任意的 Borel 集可由有限个有着相同 n 下标的区间之并任意逼近。即对任意 $\epsilon > 0$ 和所有充分大的 n 存在 $\Sigma_n \subset \mathbb{N}$ 使得

$$m(E \triangle U) < \epsilon$$

其中

$$U = \bigcup_{i\in\Sigma_n} U_{n,i}$$

由此引理，任意可测集可由某阶标准集任意逼近，从而对任意可测集 E'

$$m(E \cap E') \geq Cm(E)m(E')$$

于是可取 $E' = [0,1] \setminus E$ 可得 $m(E) = 0$ 或 1，从而由定义，τ 为遍历变换。
(4).
(3). 中引理的证明：
对可测集 E，存在开集 $O \subset [0,1]$ 使得

$$E \subset O,\ m(O \setminus E) < \frac{\epsilon}{3}$$

而 O 可写为 [0,1] 上互不相交的开区间的可数并

$$O = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

从而存在 $J < \infty$ 使得

$$m(O \setminus \bigcup_{j=1}^{J} I_j) < \epsilon$$

因此有

$$m(E \triangle \bigcup_{j=1}^{J} I_j) < \frac{2\epsilon}{3}$$

现取 n 充分大使得

$$\sup_i m(U_{n,i}) < \frac{\epsilon}{6J}$$

令

$$\Sigma_n = \{i : \text{存在 } j \in \{1, ..., J\} \text{ 使得} U_{n,i} \cap I_j \neq \emptyset\}$$

于是

$$m(\bigcup_{i \in \Sigma_n} U_{n,i} \setminus \bigcup_{j \leq J} I_j) < \frac{\epsilon}{3}$$

综合上述过程可得

$$m(E \triangle \bigcup_{i \in \Sigma_n} U_{n,i}) < \epsilon$$

Problem 10:
(a).
若 x 的连分数终止，则一步步通分即可将连分数变为分数形式，从而为有理数。
若 x 为有理数，不妨设 $x \in [0,1)$，则存在互素的正整数 $p < q$ 使得

$$x = \frac{p}{q}$$

则存在正整数 m 与整数 $r, 0 < r \leq p - 1$ 使得

$$q = mp + r$$

从而 x 可以写为

$$x = \frac{1}{m + \frac{r}{p}}$$

现对 $y = \frac{r}{p} \in [0, 1)$ 重复以上过程，而在此过程中可以看到所得分数 r_i 的分子分母均为互素整数且不断减小。再由 p, q 互素，以及此过程即为欧几里得算法可知在有限步内此过程终止。

(b).

(1). 定义 p_n, q_n 如下:

$p_0 = a_0, p_1 = a_1a_0 + 1,\ q_0 = 1, q_1 = a_1$

$$p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2},\ n \geq 2$$

$$q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2},\ n \geq 2$$

则

$$[a_0a_1 \cdots a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

利用归纳法证明这一点。

当 $n = 0, n = 1$ 时结论显然成立。

设当 $n \leq m$ 时结论成立，即

$$[a_0a_1 \cdots a_{m-1}a_m] = \frac{p_m}{q_m} = \frac{a_mp_{m-1} + p_{m-2}}{a_mq_{m-1} + q_{m-2}}$$

从而有

$$\begin{aligned}
[a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, a_m, a_{m+1}] &= [a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}, a_m + \frac{1}{a_{m+1}}] \\
&= \frac{(a_m + \frac{1}{a_{m+1}})p_{m-1} + p_{m-2}}{(a_m + \frac{1}{a_{m+1}})q_{m-1} + q_{m-2}} \\
&= \frac{a_{m+1}(a_mp_{m-1} + p_{m-2}) + p_{m-1}}{a_{m+1}(a_mq_{m-1} + q_{m-2}) + q_{m-1}} \\
&= \frac{a_{m+1}p_m + p_{m-1}}{a_{m+1}q_m + q_{m-1}} \\
&= \frac{p_{m+1}}{q_{m+1}}
\end{aligned}$$

从而结论对 $n = m + 1$ 也成立，从而对任意 n 成立。

(2).

由 (1). 可得

$$\begin{aligned}
p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n &= (a_np_{n-1} + p_{n-2})q_{n-1} - p_{n-1}(a_nq_{n-1} + q_{n-2}) \\
&= -(p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1}) \\
&\vdots \\
&= (-1)^{n-1}(p_1q_0 - p_0q_1) \\
&= (-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
x_m - x_{m-2} &= \frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m-2}}{q_{m-2}} \\
&= \frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} + \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} - \frac{p_{m-2}}{q_{m-2}} \\
&= \frac{(-1)^{m-1}}{q_m q_{m-1}} + \frac{(-1)^{m-2}}{q_{m-1} q_{m-2}} \\
&= \frac{(-1)^m (q_m - q_{m-2})}{q_m q_{m-1} q_{m-2}} \\
&= \frac{(-1)^m a_m q_{m-1}}{q_m q_{m-1} q_{m-2}} \\
&= \frac{(-1)^m a_m}{q_m q_{m-2}}
\end{aligned}
$$

由 a_m, q_{m-2}, q_m 为正整数，这个差的正负仅取决于 m 的奇偶。因此偶数项 x_{2m} 随 m 增大严格递增，奇数项 x_{2m-1} 随 m 增大严格递减。

又

$$
x_m - x_{m-1} = \frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{q_m q_{m-1}}
$$

可知总有

$$
x_{2m+1} > x_2 m,\ x_{2m+1} > x_{2m+2} \tag{$*$}
$$

若存在 r 使得

$$
x_{2m+1} < x_{2r}
$$

即某个奇数项小于偶数项，则有以下两种情况

$$
\begin{cases}
x_{2m+1} \le x_{2r} < x_{2m}, & r < m \\
x_{2r+1} < x_{2m+1} \le x_{2r}, & r > m
\end{cases}
$$

而这两种情况均与 $(*)$ 式矛盾。于是知道总有奇数项大于偶数项。

因此 $x = [a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots]$ 的值总大于等于偶数项 x_{2m} 的值，小于等于奇数项 x_{2m-1} 的值。

(3).$x_m = \frac{p_m}{q_m}$ 为 x 的所有有理数逼近里分母小于等于 q_m 的最佳逼近。

由 (2).，x 总落在奇数项与偶数项之间，$\frac{p_{m=1}}{q_{m-1}}$ 与 $\frac{p_m}{q_m}$ 为 x 的两个渐进分数。若 $\frac{p}{q}$ 为满足分母小于等于 q_m 的最佳渐进分数，则必在 x_m 与 x_{m-1} 之间。

$$
|\frac{p}{q} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}| = |\frac{pq_{m-1} - qp_{m-1}}{qq_{m-1}}| \ge |\frac{1}{qq_{m-1}}|
$$

$$
|\frac{p}{q} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}| \le |\frac{p_m}{q_m} - \frac{p_{m-1}}{q_{m-1}}| = \frac{1}{q_m q_{m-1}}
$$

从而

$$
\frac{1}{qq_{m-1}} \le \frac{1}{q_m q_{m-1}}
$$

即

$$
q_m \le q \le q_m
$$

从而各式处处取等，从而

$$\frac{p}{q}=\frac{p_m}{q_m}$$

命题得证。

(c).

(1). 若 x 的连分数为周期的，设最小正周期为 N。

不妨设

$$a_{k+N}=a_k$$

对 $k\geq 0$ 成立。

则 x 可表示为

$$x=a_0+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\cdots+\frac{1}{a_{N-1}+x}}}$$

逐项通分，可将上式变为

$$x=\frac{ax+b}{cx+d}$$

其中 a,b,c,d 均为整数。从而 x 为至多二次的代数数。

(2). 若 x 为至多二次的代数数。

此时存在正整数 A，整数 B,C 使得

$$Ax^2+Bx+C=0$$

及非平方数 $D=B^2-4AC>0$。设

$$x=[a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},x_n']$$

则有

$$x=\frac{x_n'p_{n-1}+p_{n-2}}{x_n'q_{n-1}+q_{n-2}}$$

将上式写为矩阵形式，令

$$P_n=\begin{pmatrix}p_{n-1} & q_{n-1}\\ p_{n-2} & q_{n-2}\end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix}x & 1\end{pmatrix}=(x_n'q_{n-1}+q_{n-2})^{-1}\begin{pmatrix}x_n' & 1\end{pmatrix}P_n$$

于是由

$$Ax^2+Bx+C=0$$

可得

$$\begin{pmatrix}x_n' & 1\end{pmatrix}P_nRP_n^T\begin{pmatrix}x_n' & 1\end{pmatrix}^T=0$$

其中

$$R=\begin{pmatrix}A & \frac{B}{2}\\ \frac{B}{2} & C\end{pmatrix}$$

由此有

$$A_n x_n'^2 + B_n x_n' + C_n = 0 \tag{**}$$

其中

$$\begin{cases} A_n = Ap_{n-1}^2 + Bp_{n-1}q_{n-1} + Cq_{n-1}^2 \\ C_n = Ap_{n-2}^2 + Bp_{n-2}q_{n-2} + Cq_{n-2}^2 \\ B_n^2 - 4A_nC_n = -4\det(P_nRP_n^T) = D \end{cases}$$

对第一个式子等式两边同除 q_{n-1}^2 并将 $Ax^2 + Bx + C = 0$ 带入可得

$$A_n q_{n-1}^{-2} = -A(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}})(x + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}) - B(x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}) \tag{1}$$

而由 (b). 中的 (3). 可知

$$|x - \frac{p_m}{q_m}| \leq \frac{1}{q_m q_{m+1}} \leq \frac{1}{q_m^2}$$

从而 (1) 式表明存在常数 M_1 使得

$$|\frac{A_n}{q_{n-1}^2}| \leq \frac{M_1}{q_{n-1}^2}$$

即

$$|A_n| \leq M_1$$

对 C_n, B_n 可由同样的过程知此二项也有界，故存在常数 M 使得

$$|A_n| \leq M,\ |B_n| \leq M,\ |C_n| \leq M$$

而 A_n, B_n, C_n 均为整数，从而这样的方程 $(**)$ 是有限组的，而一组方程至多有两个不同的 x_n' 的解，因此在无穷多的 n 中至少存在两个不同的 $n_1 \neq n_2$ 使得

$$x_{n_1}' = x_{n_2}'$$

由 x_n' 的定义，这意味着 x 的连分数是周期的。

(d).

由逐点遍历定理的推论：

若 τ 遍历，$f \geq 0$ 且

$$\int f d\mu = \infty$$

那么对 a.e.x 有当 $m \to \infty$ 时

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(\tau^k(x)) \to \infty$$

现取

$$d\mu = \frac{1}{\log 2}\frac{dx}{1+x}$$

那么 τ 遍历。

取 $f(x) = [\frac{1}{x}]$。则

$$f(\tau^k(x)) = [\frac{1}{\tau^k(x)}] = a_{k+1}(x)$$

又此时有

$$\int f d\mu = \infty$$

于是对几乎处处 x

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(\tau^k(x)) = \frac{a_1 + \cdots + a_m}{m} \to \infty,\ m \to \infty$$

即结论成立。

特别的，若 x 的连分数 $[a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots]$ 有界时，

$$\frac{a_1 + \cdots + a_m}{m} \nrightarrow \infty$$

从而这样的 x 的集合为零测集。