Exercise 8:

由 $m(A) > 0$，存在 A 的 Lebesgue 密度点 x，令 $\{q_n\}$ 为有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个排列。取 s_n 满足 $s_n = q_n - x$，令 $E = \cup_{n=1}^{\infty}(A + s_n)$，下证此即为所求集合。

$m(E^c) = 0$ 即等价于对任意 $n \in \mathbb{N}, m(E^c \cap [n, n+1]) = 0$，因 q_n 取遍有理数，这等价于 $m(E^c \cap [0,1]) = 0$。

对任意 $q \in \mathbb{Q}$ 存在 s_j 使得 $q = x + s_j$，从而 q 为 E 的 Lebesgue 密度点。故对任意 $m > 0$，存在 $N_m \in \mathbb{N}$ 使得

$$m(E \cap B_{\frac{1}{N_m}}(q)) \geq (1 - \frac{1}{m})B_{\frac{1}{N_m}}(q)$$

由 q 的任意性，现令 q 取遍 $\frac{1}{2N_m}, \frac{2}{2N_m}, ..., \frac{2N_m}{2N_m}$，分别记为 $q_1, q_2, ..q_{2N_m}$。

$$\begin{aligned}
m(E^c \cap B_{\frac{1}{N_m}}(q_j)) &\leq \frac{1}{m}B_{\frac{1}{N_m}}(q_j) \\
m(E^c \cap [0,1]) &\leq \sum_j m(E^c \cap B_{\frac{1}{N_m}}(q_j)) \\
&\leq \sum_j \frac{1}{m}B_{\frac{1}{N_m}}(q_j) \\
&= \frac{1}{m}2N_m\frac{2}{N_m} \\
&= \frac{4}{m}
\end{aligned}$$

由 m 的任意性，令 $m \to \infty$，则有 $\frac{4}{m} \to 0$，即

$$m(E^c \cap [0,1]) = 0,\ m(E^c) = 0$$

从而 E 即为所求。

Exercise 11:

(1). 当 $a > b$ 时，f 在 $[0,1]$ 上是有界变差函数。

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}) & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

对任意 $x \in (0,1]$

$$f'(x) = ax^{a-1}\sin(x^{-b}) - bx^{a-b-1}\cos(x^{-b})$$
$$|f'(x)| \leq ax^{a-1} + bx^{a-b-1}$$

对 $[0,1]$ 的任意分割 $\pi : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = 1$ 任取 $0 < \epsilon < t_1$ 考察 Riemann 积分

$$\begin{aligned}
\int_{\epsilon}^{1} |f'(x)|dx &\leq \int_{\epsilon}^{1}(ax^{a-1} + bx^{a-b-1})dx \\
&= (x^a + \frac{b}{a-b}x^{a-b})|_{\epsilon}^{1} \\
&= \frac{a}{a-b} - \epsilon^a - \frac{b}{a-b}\epsilon^{a-b} \\
&\leq \frac{a}{a-b}
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})| &= |f(t_1)-f(t_0)|+\sum_{i=2}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})| \\
&= |f(t_1)-f(\epsilon)+f(\epsilon)|+\sum_{i=2}^{n}|\int_{t_{i-1}}^{t_i}f'(x)dx| \\
&\le |f(\epsilon)|+|f(t_1)-f(\epsilon)|+\sum_{i=2}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}|f'(x)|dx \\
&= |f(\epsilon)|+|\int_{\epsilon}^{t_1}f'(x)dx|+\int_{t_1}^{1}|f'(x)|dx \\
&\le |f(\epsilon)|+\int_{\epsilon}^{1}|f'(x)|dx \\
&\le |f(\epsilon)|+\frac{a}{a-b} \\
&\le 1+\frac{a}{a-b}
\end{aligned}$$

从而 $\Gamma_f[0,1]\le 1+\frac{a}{a-b}$，即 f 为有界变差函数。

(2). 当 $a\le b$ 时，f 在 $[0,1]$ 上不是有界变差函数。

取 $[0,1]$ 的一个分割 $\pi : 0=t_0<t_1<...<t_m=1$ 满足

$$t_i=(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi(m-i+1)})^{\frac{1}{b}},\quad i=1,2,...,m-1$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}|f(t_i)-f(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{m}(t_i^a+t_{i+1}^a) \\
&\ge \sum_{i=2}^{m-1}t_i^a \\
&= \sum_{i=2}^{m-1}(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi(m-i+1)})^{\frac{a}{b}} \\
&= \sum_{j=2}^{m-1}(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi j})^{\frac{a}{b}} \\
&\ge \sum_{j=2}^{m-1}\frac{1}{\pi(\frac{1}{2}+j)}
\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$，由级数 $\sum_{j=2}^{m-1}\frac{1}{\pi(\frac{1}{2}+j)}$ 为发散级数知 f 没有有界变差。

综上，f 在 $[0,1]$ 上为有界变差函数当且仅当 $a>b$。

(3).

当 $a=b$ 时存在 a 的值使得存在 f 对任意 $\alpha\in(0,1)$，f 满足 Lipschitz 条件。

设 $0<h<1$

$$\begin{aligned}
|f(x+h)-f(x)| &= |(x+h)^a\sin((x+h)^{-a})-x^a\sin(x^{-a})| \\
&= |(x+h)^a||\sin((x+h)^{-a})-(\frac{x}{x+h})^a\sin(x^{-a})| \\
&\le 2(x+h)^a
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|f(x+h)-f(x)| &= |f'(\xi)|h \\
&\le (a\xi^{a-1}+a\xi^{-1})h \\
&= a(\xi^a+1)\frac{h}{\xi} \\
&\le \frac{2ah}{\xi} \\
&\le 2a\cdot\frac{h}{x}
\end{aligned}
$$

当 $x^{a+1}\ge h>0$

$$|f(x+h)-f(x)| \le 2a\frac{h}{x} \le 2ah^{\frac{a}{a+1}}$$

当 $x^{a+1}<h$

$$
\begin{aligned}
|f(x+h)-f(x)| &\le 2(x+h)^a \\
&\le 2(1+h^{\frac{a}{1+a}})h^{\frac{a}{1+a}} \\
&\le 4h^{\frac{a}{1+a}}
\end{aligned}
$$

故取 $\alpha=\frac{a}{1+a}$ 即 $a=\frac{\alpha}{1-\alpha}$，$A=\max\{2a,4\}=\max\{2\frac{\alpha}{1-\alpha},4\}$。从而对任意 $x,x+h\in[0,1],0<h<1$ 有

$$|f(x+h)-f(x)|\le Ah^{\alpha}$$

从而

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\sin(x^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}) & 0<x\le 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

满足 $Lipschitz-\alpha$ 条件但在 $[0,1]$ 上没有有界变差。

Exercise 12:

当 $x\ne 0$ 时 $F'(x)$ 显然存在。

$$F'(x)=2x\sin(x^{-2})-2x^{-1}\cos(x^{-2})$$

当 $x=0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(h)-F(0)}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin(\frac{1}{h^2})=0$$

考虑 $F'(x)$

$$\int_{-1}^{1}|2x\sin(x^{-2})|dx\le\int_{-1}^{1}|2x|dx=2<\infty$$

从而 $2x\sin(x^{-2})$ 在 [-1,1] 上为可积函数。

对 $\frac{2}{x}\cos(\frac{1}{x^2})$ 有

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}|\frac{2}{x}\cos(\frac{1}{x^2})|dx &= 2\int_{0}^{1}|\frac{2}{x}\cos(\frac{1}{x^2})|dx \\
&= 2\int_{1}^{\infty}\frac{|\cos u|}{u}du \\
&> 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\pi k}^{\pi(k+1)}\frac{|\cos u|}{u}du \\
&> 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi(k+1)}\int_{\pi k}^{\pi(k+1)}|\cos u|du \\
&= 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(k+1)} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

从而 $\frac{2}{x}\cos(\frac{1}{x^2})$ 在 [-1,1] 上为不可积函数。
综上，$F'(x)$ 对任意 x 都存在，但在 $[-1,1]$ 上不可积。

Exercise 17:
令 $B(0,\epsilon)$ 或 B_ϵ 表示以 0 为中心半径为 ϵ 的球。

$$\begin{aligned}
|f*K_\epsilon(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^d}f(x-y)K_\epsilon(y)dy|, \text{不妨设 } x=0 \\
&\le \int_{B(0,\epsilon)}|f(-y)K_\epsilon(y)|dy + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{B(0,2^{n+1}\epsilon)\backslash B(0,2^n\epsilon)}|f(-y)||K_\epsilon(y)|dy \\
&\le \int_{B(0,\epsilon)}|f(y)|\frac{A}{\epsilon^d}dy + \sum_{n=0}^{\infty}\int_{B(0,2^{n+1}\epsilon)\backslash B(0,2^n\epsilon)}|f(y)|\frac{A\epsilon}{(2^n\epsilon)^{d+1}}dy \\
&\le \frac{C}{m(B_\epsilon)}\int_{B_\epsilon}|f(y)|dy + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A\epsilon}{(2^n\epsilon)^{d+1}}\cdot(2^{n+1}\epsilon)^d\cdot\frac{c}{m(B_{2^{n+1}\epsilon})}\int_{B(2^{n+1}\epsilon)}|f(y)|dy \\
&\le C\cdot\frac{1}{m(B_\epsilon)}\int_{B_\epsilon}|f(y)|dy + \sum_{n=0}^{\infty}A\cdot 2^d\cdot 2^{-n}\cdot c\frac{1}{m(B_{2^{n+1}\epsilon})}\int_{B(2^{n+1}\epsilon)}|f(y)|dy \\
&\le C\cdot f^*(0) + \sum_{n=0}^{\infty}c\cdot 2^d\cdot 2^{-n}f^*(0) \\
&= (c+c\cdot 2)f^*(0) \\
&= cf^*(0)
\end{aligned}$$

式中的 C, c 均为可以计算的有限的与 x 无关的常数。对 $x \neq 0$ 同理。
综上，存在常数 c 使得

$$\sup_{\epsilon>0}|(f*K_\epsilon)(x)| \le cf^*(x)$$