$$f\in AC([a,b]) \underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow} f\in BV([a,b])$$

微积分基本定理：若 $f\in AC([a,b])$，则

(1) $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b)-f(a)$.

(2) $\int_a^b |f'(x)|\,dx = T_a^b(f) < +\infty$.

(3) 若 $f\in BV([a,b])\cap C([a,b])$ and $m(f(Z))=0$，$\forall$ 零测集 $Z\subseteq[a,b]$

则 $f\in AC([a,b])$.

$\square$

Ex 1. 若 $f\in BV([a,b])$ 且 $\forall\varepsilon>0$，$f\in AC([a+\varepsilon,b])$. 若 f 在 a 处连续，则 $f\in AC([a,b])$.

(注：• $f\in BV([a,b]) \Rightarrow f'$ a.e 存在 & $\int_a^b |f'|\,dx \leq T_a^b(f) < \infty$.

$\Rightarrow f'\in L^1([a,b])$.

• f 单增 $\Rightarrow \int_a^b f'(x)\,dx \leq f(b)-f(a)$.)

证：只需证 $\forall t\in[a,b]$，$\int_a^t f'(x)\,dx = f(t)-f(a)$.

又 $\int_{a+\varepsilon}^t f'(x)\,dx = f(t)-f(a+\varepsilon)$

由 $f'\in L^1([a,b])$，f 在 a 处连续，令 $\varepsilon\to 0$.

知 $\int_a^t f'(x)\,dt = f(t)-f(a)$.

$\blacksquare$

① 换元 (Change of variable).

② 分部积分 (Integration by parts).

- $g: [a,b] \longrightarrow [c,d]$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt.$$

何时等式成立?

取 $F(x)=\int_{g(a)}^{x} f(t)\,dt$, 则 $F'=f$.

$$(F(g(t)))' = F'(g(t))\,g'(t) = f(g(t))\,g'(t).$$

积分 $\int_a^b$:

$LHS = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt.$

$RHS = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt.$

数分做法

Ex 2 设 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g: [c,d] \to [a,b]$.

若 $f \in AC([a,b])$, $g \in AC([c,d])$

则当以下任意一条成立时, 有 $f\circ g \in AC([c,d])$.

(A). g 严格增, (B) f 为 Lipschitz 函数.

证: 检查定义即可. $\forall$ 不交 $I_k = (a_k, b_k) \subseteq [c,d]$.

考虑 $S = \sum_{k=1}^{N} |f(g(b_k)) - f(g(a_k))|$

(A) $J_k=(g(a_k),g(b_k))\subseteq[a,b]$ 且两两不交.

$S=f$ 在 $\bigcup J_k$ 上全变差.

又 $\sum_{k=1}^{N}|J_k|=\sum_{k=1}^{N}|g(b_k)-g(a_k)|$

$=g$ 在 $\bigcup I_k$ 上的全变差.

则 $\sum|I_k|$ 小 $\Rightarrow\sum|J_k|$ 小 $\Rightarrow S$ 小.

$\Rightarrow f(g(t))\in AC([a,b])$

问：若 $f,g\in AC$，是否有 $f\circ g\in AC$?

否！反例： $f(t)=t^{\frac{1}{3}}$ $(0\le t\le 1)$. $\in AC$

$g(x)=x^3\sin^3\frac{1}{x}$ $(0\le x\le 1)\in AC$.

$f\circ g=x\sin\frac{1}{x}$ $(0\le x\le 1)\notin BV$.

$(f\circ g)'\notin L^1([0,1])$

注：若 $f,g\in AC$ 且 $f\circ g\in BV$，则 $f\circ g\in AC$.

证： $f\circ g\in C+f\circ g\in BV+f\circ g$：零测 $\longmapsto$ 零测

$m(Z)=0\Rightarrow m(g(Z))=0\Rightarrow m(f\circ g(Z))=0$. $\blacksquare$

<u>Lemma</u> 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，若 f' 在 $E\subseteq[a,b]$ 上存在,

则 $f'(x)=0$ a.e $x\in E \iff m(f(E))=0$.

证: "$\Rightarrow$" $m_*(f(E)) \leq \int_E |f'| = 0$ (见第12次习题课)

"$\Leftarrow$" $B=\{x\in E: |f'(x)|>0\}$, 只需证 $m(B)=0$.

定义 $B_n=\{x\in E: \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}\geq \frac{1}{n}, \forall |x-y|<\frac{1}{n}\}$.

则 $B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

只需证 $m(B_n\cap I)=0$, $\forall$ 区间 I s.t $|I|<\frac{1}{n}$.

特别地 $f(B_n\cap I)\subseteq f(B)\subseteq f(E)$, 故 $m(f(B_n\cap I))=0$

因此 $f(B_n\cap I)\subseteq \bigcup I_k$ & $\sum |I_k|<\varepsilon$.

考虑 $f^{-1}(I_k)\cap(B_n\cap I)=:A_k$.

则 $\bigcup A_k = B_n\cap I =: A$.

则 $m(A)\leq \sum_k m(A_k) \leq \sum_k \left(\sup_{s,t\in A_k}|s-t|\right)$

$$\leq \sum_k n \sup_{s,t\in A_k} |f(s)-f(t)|$$

$$\leq n\sum_k |I_k| < n\varepsilon.$$

由ε任意性, 知 $m(A)=0$.

即 $m(B_n\cap I)=0$. $\forall$区间I_n s.t $|I_n|<\frac{1}{n}$,

从而 $m(B_n)=0$, 从而 $m(B)=0$. ▨

推论：若 f' 在 E 上几乎处处存在且 $m(f(E))=0$，

则 $f'(x)=0$ a.e $x\in E$.

证：$\exists A\subseteq E$ s.t f' 在 A 上处处存在 & $m(E\setminus A)=0$.

又 $m(f(A))\leq m(f(E))=0$

$\Rightarrow f'(x)=0$ a.e $x\in A$.

$\Rightarrow f'(x)=0$ a.e $x\in E$. $\boxtimes$

<u>定理</u>：① $g:[a,b]\to[c,d]$ 且 g' 在 $[a,b]$ 上几乎处处存在.

② $F'(x)=f(x)$ a.e $x\in[c,d]$.

③ $(F(g(t)))'$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处存在.

④ F 把 $[c,d]$ 上零测集映为零测集.（必要）.

则 $(F(g(t)))'=f(g(t))\,g'(t)$, a.e. $t\in[a,b]$.

证：$\exists Z\subseteq[c,d]$ s.t $m(Z)=0$ & $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[c,d]\setminus Z$.

定义 $A=g^{-1}(Z)\cap[a,b]$, A' s.t $m(A')=0$ 且 $g'(t)$ 存在 对 $\forall t\in[a,b]\setminus A'$.

考虑 $t\in[a,b]\setminus(A'\cup A)$.

<u>Claim</u>：$(F(g(t)))'=f(g(t))\cdot g'(t)$.

这是由于 $g'(t)$, $F'(g(t))$ 存在.

因于 $m(g(A))=0$, 则 $g'(x)=0$ a.e. $x\in A$.

又 $m(F(g(A)))=0$, 则 $(F(g(t)))'=0$ a.e $t\in A$.

$\Rightarrow (F(g(t)))' = f(g(t))\, g'(t)$ a.e $t\in A$.

$\square$.