§ Hardy-Littlewood 极大函数.

给定 $\mathbb{R}^n$ 上可积函数 f.

$$Mf(x) := \sup_{\substack{x\in B \\ B\text{为球}}} \frac{1}{|B|}\int_B |f|.$$

$$\overline{M}f(x) := \sup_{B(x,r)} \frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)} |f|.$$

则

(i) Mf 下半连续 $\Longleftrightarrow$ $\{Mf(x)>\alpha\}$ 为开集, $\forall \alpha\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Mf 可测

(ii) weak (1,1)-type. (弱(1,1)-型)

$$m(\{Mf(x)>\alpha\}) \leqslant \frac{A}{\alpha}\|f\|_{L^1} \quad (\forall \alpha>0,\ A=3^n).$$

(iii). 除非 $f\equiv 0$ a.e. , 否则 Mf 不为 $\mathbb{R}^n$ 上可积. (甚至可能局部不可积).

思路: 若 $f\not\equiv 0$ a.e, 则 $Mf(x)\geqslant \frac{C}{|x|^n}$, $|x|$充分大时. 其中 C 为正常数.

如何证明?

取 $B=B(0,|x|)$. 则 $Mf(x)\geqslant \frac{1}{m(B)}\int_B|f| \geqslant \frac{C}{|x|^n}$, 当$|x|$充分大时.

因此 $\int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)\,dx = \infty$

Lebesgue 微分定理

若 f 为 $\mathbb{R}^n$上(局部)可积, 则

$$\lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B |f(y)-f(x)|\,dy = 0 \quad \text{对 a.e } x \text{ 成立}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{m(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{m(B)}\int_B f(y)\,dy = f(x). \quad \text{a.e. } x.$$

Ex ① 设 f, g 均为 $\mathbb{R}^n$ 上可积函数,

则 $M(f+g) \le Mf + Mg$.

② 试证: $\frac{1}{2^n} Mf(x) \le \overline{Mf}(x) \le Mf(x)$.

Pf: ① $\forall x$, $\forall B \ni x$.

$$\frac{1}{m(B)}\int_B |f+g| \le \frac{1}{m(B)}\int_B |f| + \frac{1}{m(B)}\int_B |g| \le Mf(x) + Mg(x).$$

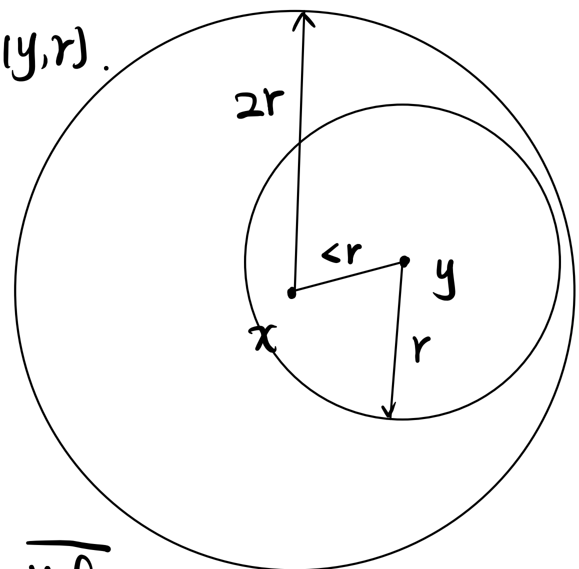
左边取 sup. 则 $M(f+g)(x) \le Mf(x) + Mg(x)$. $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

② $\overline{Mf} \le Mf$ ✓

考虑 $\forall x$, $\forall B \ni x$. 且 $B = B(y, r)$.

令 $B_1 = B(x, 2r)$.

$\Rightarrow B \subseteq B_1$.



$$\frac{1}{m(B)}\int_B |f| = \frac{2^n}{m(B_1)}\int_B |f|$$

$$\le \frac{2^n}{m(B_1)}\int_{B_1} |f|.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n}\frac{1}{m(B)}\int_B |f| \le \frac{1}{m(B_1)}\int_{B_1} |f| \le \overline{Mf}(x).$$

左边取 sup, 得 $\frac{1}{2^n} Mf(x) \le \overline{Mf}(x)$.

$\mathcal{F}$ = $\mathbb{R}^n$ 中闭球的集合.

$\cup$

$\mathcal{G}$ = $\mathbb{R}^n$ 中不交球的子集.

回顾课堂上学习有限情形覆盖引理:

设$|F|$有限，则$\exists G\subseteq F$ s.t $\bigcup_{B\in F} B \subseteq \bigcup_{B\in G}(3B)$

$\Rightarrow m(\bigcup_{B\in F} B) \leqslant 3^n \sum_{B\in G} m(B)$.

思路：1. 最大球 B_1.

2. 删掉 B_1 及与其有交的球

3. 重复

并用到了 若 $r_1 \geqslant \alpha r_2$, $B_1\cap B_2 \neq \phi$, 则 $B_2 \subseteq (\frac{2}{\alpha}+1)B_1$

Vitali 覆盖引理：

设$|F|$无限，$\sup_{B\in F} r(B) = D < \infty$. 则：

$\exists G\subseteq F$ s.t $\bigcup_{B\in F} B \subseteq \bigcup_{B\in G}(5B)$.

$\Rightarrow m(\bigcup_{B\in F} B) \leqslant 5^n \sum_{B\in G} m(B)$.

定义：$F_i = \{B\in F \mid \frac{D}{2^i} < r(B) \leqslant \frac{D}{2^{i-1}}\}$, $i=1,2,3\cdots$

(i) $G_1 \subseteq F_1$ 能否取出？用Zorn's Lemma.

G_1 为 F_1 中不交球的极大集族.

$\forall B\in F_1\setminus G_1$, 则 $\exists B_1\in G_1$ s.t $B\cap B_1\neq\phi$.

(ii) 取 $G_2\subseteq F_2$ 为

$\{B\in F_2 \mid B\cap B_1=\phi, \forall B_1\in G_1\}$中不交球的极大集族.

(iii) 取定 $G_1,\cdots G_{k-1}$ 后. 取 $G_k\subseteq F_k$ 为

$\{B\in F_k \mid B\cap B_i=\phi, \forall B_i\in \bigcup_{i=1}^{k-1} G_i\}$ 中不交球的极大集族.

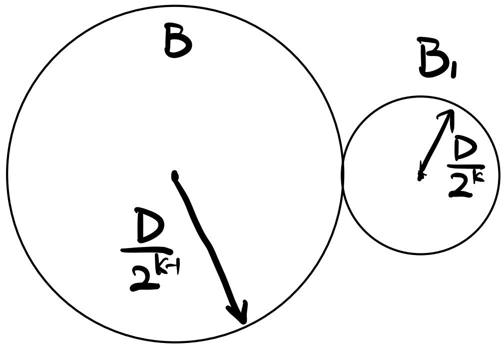
(iv) 取 $G=\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \subseteq F$. 则 G 内为不交球.

$\forall B\in F=\bigcup_{k=1}^{\infty}F_k$. 则 $B\in F_k$. for some $k>1$.

① $B\in G_k\subseteq G$.

② $\exists B_1\in\bigcup_{i=1}^{k}G_i$ s.t $B\cap B_1\neq\phi$. 否则令 $G_k'=G_k\cup\{B\}$ 仍满足球不交，与 G_k 极大矛盾!

断言: $B\subset 5B_1$.



$$\begin{cases}\frac{D}{2^k}<r(B)\le\frac{D}{2^{k-1}} & (\Leftarrow B\in F_k).\\ \frac{D}{2^i}<r(B_1)\le\frac{D}{2^{i-1}} & \text{for some } 1\le i\le k\end{cases}$$

$\Rightarrow\quad r(B_1)\geqslant\frac{1}{2}r(B)$

$\Rightarrow\quad B\subseteq\left(\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)}+1\right)B_1=5B_1$. $\square$

Rmk: G 至多可数个球的闭.

Ex. 给定开集 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ s.t. $m(U)<\infty$.

求证: 存在一族 U 中不交的闭球 $\{B\}_{B\in F}$ s.t.

$$m\left(U-\bigcup_{B\in F}B\right)=0.$$

(提示: 使用 Vitali 覆盖引理)

Pf: $\forall x\in U$, $\exists\ x\in \overset{\text{闭}}{B_x}\subset U$.

定义 $F_1=\{B_x\mid x\in U\}$. 则 $U=\bigcup_{x\in U}B_x=\bigcup_{B\in F_1}B$

由 Vitali 覆盖引理, $\exists G_1\subseteq F_1$, G_1 中闭球不交.

且 $\bigcup_{B\in F_1}B\subseteq\bigcup_{B\in G_1}5B$. $\Rightarrow m(U)\le 5^n\sum_{B\in G_1}m(B)$.

定义 $U_1=U\setminus\left(\bigcup_{B\in G_1}B\right)$ 仍开且 $m(U_1)\le\left(1-\frac{1}{5^n}\right)m(U)$.

重复操作 $U_1(F_2, G_2)$，令 $U_2 = U_1 \setminus \bigcup_{B\in G_2} B$.

则 $m(U_2) \leq (1-\frac{1}{5^n})^2 m(U)$.

$\vdots$

$\{B\}_{B\in F} = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.

$m(U - \bigcup_{B\in F} B) \leq m(U_k) \leq (1-\frac{1}{5^n})^k m(U) \to 0 \quad (k\to\infty)$

从而 $m(U - \bigcup_{B\in F} B) = 0$. $\boxed{}$.

<u>Rmk</u>: • $\{B\}_{B\in F}$ 中仅可数个

• 闭球可替换为开球.（与 Ch1. Ex12 比较）.