比较集合 A 和 B (大小)?

- 基数 (cardinal number) $A \approx B$ (等势).

Def 1. ① $A \approx B \iff \exists f: A \to B$ s.t f 又单又满. (双射, bijective)

(surjective)

(injective)

② $A \lesssim B \iff \exists f: A \to B$ 单射.

e.g. = 例. $A \subseteq B \Rightarrow A \lesssim B$.

Thm 1 (Cantor - Bernstein).

假定 A, B 为两集合, 若 $A \lesssim B$ 且 $B \lesssim A$, 则 $A \approx B$.

Pf: $\exists$ 单射 f, g s.t $f: A \to B$. $g: B \to A$.

用以下 Lemma 1, 可构造 $F: A \to B$. s.t.

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A_1 \\ g^{-1}(x), & x \in A_2. \end{cases}$$

为双射. (其中 A_1, A_2 见下 Lemma). $\boxed{}$

Lemma 1

假设 $f: A \to B$, $g: B \to A$ 为两个映射, 则 $\exists$ 分解.

$A = A_1 \sqcup A_2$ ($\leftarrow A = A_1 \cup A_2$ & $A_1 \cap A_2 = \phi$), $B = B_1 \sqcup B_2$. s.t.

$f(A_1) = B_1$ & $g(B_2) = A_2$.

Pf: 构造即可, "极大化".

选 $A' \subset A$, 考虑 $g(B \setminus f(A'))$ 若 $A = A' \sqcup g(B \setminus f(A'))$, 则做完.

降低要求, 先找 A' s.t $A' \cap g(B \setminus f(A'))$

想选一个 极大的 (maximal: $\nexists$ A'' 满足条件 s.t $A' \subsetneq A''$) 的

$A' \subseteq A$, s.t $A' \cap g(B \setminus f(A'))$.

Claim $A' \cup g(B\setminus f(A')) = A$.

pf: 令 $A'' = A\setminus g(B\setminus f(A'))$ 则 $A' \subseteq A''$.

考虑 $A'' \cap g(B\setminus f(A''))$

$$A' \subseteq A''$$
$$\Rightarrow f(A') \subseteq f(A'')$$
$$\Rightarrow B\setminus f(A') \supseteq B\setminus f(A'')$$
$$\Rightarrow g(B\setminus f(A')) \supseteq g(B\setminus f(A''))$$
$$\Rightarrow A'' = A\setminus g(B\setminus f(A')) \subseteq A\setminus g(B\setminus f(A''))$$
$$\Rightarrow A'' \cap g(B\setminus f(A'')) = \phi$$
$$\Rightarrow A'' = A' \qquad \#$$

令 $A_1 = A'$, $A_2 = A\setminus A'$, $B_1 = f(A')$ $B_2 = B\setminus B_1$. $\boxed{}$

应用1. • $A \subseteq B \subseteq C$、若 $A \approx C$, 则 $B \approx C$.

(Cantor-Bernstein.)

• $(-1,1) \subseteq [-1,1] \subseteq \mathbb{R}$. $\longrightarrow$ $[-1,1] \approx \mathbb{R}$. 但双射不连续.

($\tan x$. $\frac{x}{1-x^2}$. $\Rightarrow (-1,1) \approx \mathbb{R}$).

随堂小练习: 1、若 $A \subseteq B$, $A \approx A\cup C$, 则 $B \approx B\cup C$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Cantor-Bernstein.} \\ B\cup C = A\cup C \cup (B\setminus (A\cup C)) \\ \qquad\qquad \text{单}\downarrow \qquad\qquad \text{单}\downarrow \\ \qquad\qquad A \quad \cup \quad B\setminus(A\cup C) \subseteq B \end{array}\right)$$

2. $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$ s.t. $A_1 \approx B_1$ $A \approx B$.

$\overset{?}{\nRightarrow}$ $A \setminus A_1 \approx B \setminus B_1$

(反例: $A = \mathbb{R}$ $A_1 = \mathbb{R}$.
$B = (0,2)$ $B_1 = (0,1)$.)

Def 2. A 可数 (countable) $\Longleftrightarrow A \approx \mathbb{N} \Longleftrightarrow A = \{a_1, a_2, \cdots\}$.

eg. $2\mathbb{Z}$ (偶数), $\mathbb{Q}$ (有理数).

Thm 2. $[0,1]$ 不可数 (uncountable).

Pf (Cantor 对角线办法).

\color{gray} $\forall x \in (0,1]$. 有 $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n}$ $a_n \in \{0,1\}$.
为使表达唯一, 要求有无穷多个 k s.t. $a_k \neq 0$.
$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-n_i}$ $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$
$\Rightarrow (0,1] \approx \{(n_1, n_2, \cdots) \mid 1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$.

反证法. 设 $[0,1]$ 可数, 则 $(0,1] = \{a_1, a_2, \cdots\}$

$a_1 \sim n_{11}, n_{12}, n_{13}, \cdots$

$a_2 \sim n_{21}, n_{22}, n_{23}, \cdots$

$a_3 \sim n_{31}, n_{32}, n_{33}, \cdots$

$\vdots$

令 $a = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-b_i}$, $b_i = \left(\sum_{j=1}^{i} n_{jj}\right) + 1$.

则 $a \neq a_n$, $\forall n$, $a \in (0,1]$. 矛盾 ↯.

(非空).

Corollary = 推论 1: 任一非平凡区间不可数!

练习3、设 A_k 可数，$k=1,2,3,\cdots$

求证：$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ 可数.

$$
\left(
\begin{array}{l}
A_1 = \{ a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \cdots \}. \\
A_2 = \{ a_{21},\ a_{22},\ a_{23},\ \cdots \}. \\
A_3 = \{ a_{31},\ a_{32},\ a_{33},\ \cdots \}. \\
\vdots
\end{array}
\right)
$$

Cantor 集 C. 可数性？

- $f: C \to [0,1]$ Cantor-Lebesgue 函数. 满

$\Rightarrow C \approx \mathbb{R}$.

练习4. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^2$，且 $\forall\, x, y \in E$，$|x-y|$ 为有理数 (rational).

求证：E 可数.

($\dot{p}$ $\dot{q}$. 作有理数半径的圆，即可.)