可测函数 (MF).

$f\in MF$
- 定义在 $\mathbb{R}^n$ 或一可测集 E 上
- $|f|<\infty$ a.e. (almost everywhere 几乎处处).
- $\forall a\in\mathbb{R}$, $f^{-1}((-\infty,a))=\{x\in\mathbb{R}^n: f(x)<a\}$ 可测.

例: ① 连续函数. (f^{-1}(开) 为开集).

② $\chi_E(x)$, 其中 E 可测.

- 若 $f\in C$ (即 f 连续), $g\in MF$, 则 $f\circ g\in MF$.

能否削弱 f 条件使 $f\circ g$ 仍可测呢 (其中 g 可测)? 我们有:

- f 单调, $g\in MF$, 则 $f\circ g\in MF$.

证: 不妨 f 单调增, 考虑 $f^{-1}((-\infty,a))$.

观察到: 若 $x\in f^{-1}((-\infty,a))$, 则 $\forall y<x$, $y\in f^{-1}((-\infty,a))$.

(想法: 定义: $t=\sup f^{-1}((-\infty,a))$. (良定吗? 为此需考虑 $f^{-1}((-\infty,a))$是否非空))

$$f^{-1}((-\infty,a))=\begin{cases}\phi \\ (-\infty,t) \text{ 或 } (-\infty,t] \quad \text{其中 } t=\sup f^{-1}((-\infty,a)). \\ \mathbb{R}.\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $g^{-1}\circ f^{-1}((-\infty,a))$ 可测. ∎

- 练习: 设 $f(x,y)$ 为 $\mathbb{R}^2$ 上二元函数且 f 连续, 若 $g_1,g_2\in MF(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R})$. 试证:

$f(g_1(x),g_2(x))\in MF$.

证: 由于 $f^{-1}((-\infty,a))$ 开, 则可写为可数个几乎不交的闭方体的并.

考虑其中每个方体即可. 用好的情况来说明一般情况.

设 $[a,b]\times[c,d]$ 为某一方体 Q 可测.

则 $x\in g_1^{-1}([a,b])\cap g_2^{-1}([c,d])\Leftrightarrow (g_1(x),g_2(x))\in Q$.

设 $f^{-1}((-\infty,a))=\bigcup_{n=1}^{\infty}([a_n,b_n]\times[c_n,d_n])$

则 $\{x\in\mathbb{R}^n: f(g_1(x),g_2(x))<a\}$

$=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(g_1^{-1}([a_n,b_n])\cap g_2^{-1}([c_n,d_n])\right)$ 可测.

从而 $f(g_1(x),g_2(x))\in MF(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R})$. $\square$

§ 可测函数的几种收敛方式.

设 $\{f_n\}\in MF(E\to\mathbb{R})$.

- $f_n(x)\xrightarrow{a.e.}f(x)$ 几乎处处(逐点. pointwise) 收敛
- $f_n(x)\xrightarrow{m}f(x)$ 依测度收敛 (Convergence in measure).

这里指 Lebesgue 测度，概率论中依概率收敛类似定义.

$f_n\xrightarrow{m}f \iff \forall\varepsilon>0,\ \exists N(\varepsilon)\geq1$, s.t.

$m(\{x\mid |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\})<\varepsilon \quad \forall n\geq N(\varepsilon)$.

重要的是这个 ε.

例: $f_n(x)=\chi_{[\frac{i}{2^k},\frac{i+1}{2^k}]}(x)$ 其中 $n=2^k+i$, $0\leq i<2^k$

则 $f_n\xrightarrow{m}0$. 但 $f_n\not\xrightarrow{a.e.}0$. (经典例子 不要忘).

① $m(\{|f_n-f|>0\})=\frac{1}{2^k}$, 其中 $k=[\log_2 n]$.

② $\forall x\in[0,1]$, $f_n(x)$ 不收敛. (有无穷多个 n s.t $f_n(x)=1$, 有无穷多个 n s.t $f_n(x)=0$).

练习: 设 $f_n\in MF(E\to\mathbb{R})$. 假设 $f_n\xrightarrow{m}f$ 且 $f_n\xrightarrow{m}g$ 试证:

$f=g$ a.e. $x\in E$.

证: $S=\{x\in E: |f(x)-g(x)|>0\}$.

$S_n=\{x\in E: |f(x)-g(x)|\geq\frac{1}{n}\}$ $\Rightarrow$ $S=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n$.

$\forall \varepsilon \in (0, \frac{1}{2n})$, $\exists N>0$ s.t $m>N$时,

$m(\{|f_m-f|\geq\varepsilon\}) \leq \varepsilon$, $m(\{|f_m-g|\geq\varepsilon\}) \leq \varepsilon$.

又 $|f-g| \leq |f_m-f|+|f_m-g|$.

则 "$|f(x)-f_m(x)|<\varepsilon$, $|f_m(x)-g(x)|<\varepsilon \Rightarrow |f(x)-g(x)|<2\varepsilon<\frac{1}{n}$"

从而 $S_n \subset \{|f_m-f|\geq\varepsilon\} \cup \{|f_m-g|\geq\varepsilon\}$.

$\Rightarrow m(S_n) \leq m(\{|f_m-f|\geq\varepsilon\})+m(\{|f_m-g|\geq\varepsilon\})$

$\leq 2\varepsilon$

令 $\varepsilon\to 0^+$, 知 $m(S_n)=0$.

从而 $m(S)=0$. $\square$

命题: $f_n \in MF(E\to\mathbb{R})$. $m(E)<\infty$. $f_n \longrightarrow f$ a.e. $x\in E$.

则 $f_n \xrightarrow{m} f$.

证: $E_n(\varepsilon) = \{x\in E: |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}$.

$\mathbb{Q}^+=\{r_k\}$. (或$\{\frac{1}{n}\}$也行).

下考虑 $E_n(r_k)$ 与 $\limsup\limits_n E_n(r_k) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=i}^{\infty} E_j(r_k)$.

下定义 $S=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\limsup\limits_n E_n(r_k))$

$A=\{x: f_n(x)\not\to f(x)\}$.

断言: $S\subset A$, (则 $m(S)=0$).

证: $\forall x\in S$. $\exists k$ s.t $x\in \limsup\limits_n E_n(r_k)$.

从而 有无穷多个 $j\in\mathbb{N}$ s.t $x\in E_j(r_k)$. 即 $|f_j(x)-f(x)|\geq r_k$.

从而 $f_n(x)\not\to f(x)$. 则 $x\in A$.

由 x 任意性, $S\subset A$. #.

从而 $m(\limsup\limits_n E_n(r_k))=0$ $\forall r_k$.

$\lim\limits_{i\to\infty} m(\bigcup\limits_{j=i}^{\infty} E_j(r_k))=0$.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists\, I=I(\varepsilon)$ s.t $i\geq I$, $m\left(\bigcup_{j=i}^{\infty} E_j(r_k)\right)<\varepsilon$.

从而 $m(E_j(r_k))<\varepsilon$. $\forall j\leq I$.

从而 $f_n \xrightarrow{m} f$.

$\square$

注: $f_n \xrightarrow{a.e} f \iff m\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=i}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}: |f_j(x)-f(x)|>\frac{1}{n}\}\right)=0$. $\forall n$.

$\iff \lim\limits_{i\to\infty} m\left(\bigcup_{j=i}^{\infty}\{x\in\mathbb{R}: |f_j(x)-f(x)|>\frac{1}{n}\}\right)=0$. $\forall n$.

$f_n \xrightarrow{m} f \iff \lim\limits_{n\to\infty} m(\{|f_n-f|\geq\varepsilon\})=0$. $\forall \varepsilon>0$.