1. 完全不连续：

取 $x<y$, $x,y\in C$, 设 $x,y$ 规范表示 $x=0.\overline{x_1x_2\cdots}^3$ $y=0.\overline{y_1y_2\cdots}^3$

设 $k$ 为最小的使 $x_k<y_k$ 的数，则有 $x_k=0$ $y_k=2$

令 $z=0.\overline{z_1z_2\cdots}^3$ $z_i=x_i\ (i<k)$ $z_i=1\ (i\geq k)$ 故 $z\notin C$ $x<z<y$

完美：

取 $\forall x\in C$ 若 $x=0$ 令 $z^{(i)}=0.\overline{z_1^{(i)}z_2^{(i)}\cdots}^3$, $z_k^{(i)}=\begin{cases}0 & k\leq i\\ 2 & k>i\end{cases}$ $\lim\limits_{i\to\infty}z^{(i)}=0$

若 $x\neq 0$ 设 $x=0.\overline{x_1x_2\cdots}^3$, $z_k^{(i)}=\begin{cases}x_i & k\leq i\\ 0 & k>i\end{cases}$ $\lim\limits_{i\to\infty}z^{(i)}=x$

2. (a) $\Rightarrow$) 记 $C_n$ 为 Cantor 集第 $n$ 步的构成区间

由 Cantor 集构造方式知，$\forall x\in C_n$, $x$ 可表示为 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}$ 开头结论

其中 $a_k=\begin{cases}0\text{或}2 & 1\leq k\leq n\\ 0\text{或}1\text{或}2 & k\geq n+1\end{cases}$.

由 $n$ 的任意性知 $x$ 有全为 0,2 的三进制展开

$\Leftarrow$) $\forall x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}$, $a_1,\dots,a_n\in\{0,2\}$. 有 $x\in C_n$

由 $n$ 的任意性及闭区间套定理知，$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}C_n=C$. #

(b) (F良定义和F连续都需证!)

"well-defined" 即定义合理. 这里指给定 $x$, $F(x)$ 的存在唯一性

存在性由 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}<\infty$ 可得.

只需证 $a_k$ 只取 0 或 2 时表达式唯一.

设 $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{3^k}$ $a_k,b_k\in\{0,2\}$

若 $\exists k_0$ s.t. $a_{k_0}\neq b_{k_0}$, 不妨设 $a_k=b_k$, $\forall k<k_0$. $a_{k_0}=2, b_{k_0}=0$

则 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{3^k}-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{3^k}\geq\frac{a_{k_0}-b_{k_0}}{3^{k_0}}-\sum\limits_{k>k_0}\frac{2}{3^k}>0$. 矛盾!

故 $F$ 是良定义的. 下证 $F$ 连续

$\forall x,y\in C$ 且 $|x-y|<1/3^n$. 易知二者展开式的前 $n$ 位相同.

故 $|F(x)-F(y)|\leq\frac{1}{2^n}$. $F$ 连续.

$F(0)=\sum\frac{0}{2^k}=0$, $F(1)=\sum\limits^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$ #

(c) $\forall y=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{2^k}\in[0,1]$. 取 $x_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2b_k}{3^k}\in C$ 即可

(d) $\exists k$, s.t. $a=\sum\limits_{l=1}^{k}\frac{S_l}{3^l}+\sum\limits_{l=k+1}^{\infty}\frac{2}{3^{l+1}}$, $b=\sum\limits_{l=1}^{k}\frac{S_l}{3^l}+\frac{2}{3^{k+1}}$

即 $a=0.S_1\cdots S_k022\cdots$

$b=0.S_1S_2\cdots S_k200\cdots$

故 $F(a)=F(b)$. 令 $F(x)=F(a)$, $\forall x\in[a,b]$. 为 $F$ 在 $[0,1]$ 的延拓

由 $F$ 单增，知延拓后 $F$ 连续 #

3. (a) 第k步去掉$2^{k-1}$个长度为$\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^{k-1}\varepsilon$的开区间

总长度为$\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}\left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right)^{k-1}\varepsilon=1$

(b) 第k步后剩余集$C_{\varepsilon,k}$测度为$(1-\varepsilon)^k$

$C_\varepsilon=\bigcap_{k=1}^{\infty}C_{\varepsilon,k}$, $m_*(C_\varepsilon)\leq(1-\varepsilon)^k$. $\forall k$

$k\to\infty$. 得$m_*(C_\varepsilon)=0$

4.

(a) 由测度的可列可加性,

$m(\hat{C})+m([0,1]\setminus\hat{C})=m([0,1])=1$

$m(\hat{C})=1-m([0,1]\setminus\hat{C})=1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}l_k$

(b) 记第n步所得集合为$\widetilde{C}_n$(闭区间的并)

对$x\in\hat{C}$,只须证对$\forall\varepsilon>0$, $\exists y\notin\hat{C}$, s.t. $|x-y|<\varepsilon$, 且y所在区间长度趋于0

$\widetilde{C}_n$中闭区间长度$|J_n|\leq\frac{1}{2^n}$. 取n充分大, $\frac{1}{2^{n-1}}<\varepsilon$

则$\exists y\notin\widetilde{C}_n$, $|y-x|\leq\frac{2}{2^n}<\varepsilon$. 从而$y\notin\hat{C}$ 且y所在的开区间长度$|I_n|<|J_{n-1}|\leq\frac{1}{2^{n-1}}\to0$

(c) 只需注意到开区间的端点$\in\widetilde{C}$

对$\forall x\in\hat{C}$, 取(b)中$I_n$的端点$a_n\in\widetilde{C}$

则$a_n\to x$. 故$\hat{C}$中无孤立点

若$\hat{C}$包含开区间$(p,q)$, 则取n充分大, s.t. $\frac{1}{2^n}<q-p$

则有$(p,q)\subset\widetilde{C}_n$但$\widetilde{C}_n$中的每个闭区间长度$\leq\frac{1}{2^n}$. 矛盾!

(d) 任一非空完全集不可数

或正测集X不可数

若X可数. 设$X=\{x_1,\dots\}$

取$I_k=[x_k-\frac{\varepsilon}{2^k},x_k+\frac{\varepsilon}{2^k}]$

则$X\subset\bigcup I_k$ $\sum m(I_k)=\varepsilon$, 由$\varepsilon$任意性$\Rightarrow m(X)=0$