13.

(a) 对 F 是闭集，取 $O_n = \{x : d(x,F) < \frac{1}{n}\}$ 为开集

我们有 $F = \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n$

对 F 是开集，F^c 闭 $= \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n$

$F = (\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n)^c = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n^c$ 为 F_σ 集

(b) 取 $F = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

$\therefore F \in F_\sigma$ (有理数可数)

反证：设其可以写作 $\bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n$

记 $A_n = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$

$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} G_n$

$\because A_{n+1} \subset A_n$ 为开集

又$\because F$ 稠密.

$\therefore$ 对于 A_1，显然不能包含 F.

$\therefore \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \subset A_1$ 也不能包含 F.

(3) 取 $T = ([0,\frac{1}{2}] \cap F) \cup ((\frac{1}{2},1) \cap F^c)$

18.

令 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 可测　设 $B_n = [-n, n]$

由 Lusin 定理：存在 B_n 的闭子集 E_n. 有 $m(B_n \setminus E_n) < \frac{1}{2^n}$ 且 f 在 E_n 上连续.

由 Tietze 扩张定理：存在 $g_n: B_n \to \mathbb{R}$ 是连续映射. $g_n|_{E_n} = f$

下证 $g_n \to f$ a.e：

设在 x 处 $g_n \not\to f$，则对无穷多 n，均有 $x \in (B_n^c) \cup (B_n \setminus E_n)$ 成立. 否则 $g_n(x)$ 终等于 $f(x)$

$\therefore x$ 只在有限多的 B_n^c 中

$\therefore x$ 在无限多的 $B_n \setminus E_n$ 中，i.e. $x \in \limsup (B_n \setminus E_n)$

又$\because m(B_n \setminus E_n) = 0\ (n \to \infty)$

$\therefore$ 所有 x 的集合测度为 0

证毕.

19.

(a) 对 $\forall\, x+y \in A+B$

$x \in A \quad y \in B$

在 A 中，存在 ε，s.t. $B(x,\varepsilon) \subset A$

$\therefore$ 此时 $B(x+y, \varepsilon) \subset A+B$

$\therefore A+B$ 为开集

(b)

先证 A 闭 B 紧 则 $A+B$ 闭：

对 $\{a_n + b_n\} \to t$　取 $\{a_n + b_n\} \to t$

s.t. $\{b_{n_k}\} \to b \in B$

$\therefore a_{n_k} \to t - b$

$t - b \in A$

$\therefore t \in A + B$

$\therefore$ 取 $B_n = B \cap B(0, n)$

$A+B = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (B_n + A)$ 是 F_σ 集

$\therefore A+B$ 可测

(c) 反例：$A = \mathbb{Z}$ $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{n + \frac{1}{n}\}$

整数不在 $A+B$ 中，但逼近

20.

(a) A 中包含 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot 3^{k}$ $(a_k = 0$ 或 $2)$ 所有数

B 中包含 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot 3^{k}$ $(b_k = 0$ 或 $1)$ 中所有数

$\therefore A+B$ 包含所有 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot 3^{k}$ $(c_k = 0$ 或 1 或 $2)$ 的所有数

$\therefore [0, 1] \subset A + B$

$m(A+B) > 0$

(b) $m(A) = m(B) = 0$

$m(A+B) = 1 \times 1 = 1 > 0$

13. 在 $\mathbb{R}^2$ 中取 $A = \{0\} \times [0, 1]$

$B = N \times \{0\}$

$\therefore A+B = N \times [0, 1]$

$m(A) = m(B) = 0$

$\therefore A$、B 可测

但 $A+B = [0,1] \times N$ 不可测