Exercise 10:

令 $q:\mathbb{Q}\to\mathbb{N}$ 为一个双射，即 $\mathbb{Q}=\{q(0),q(1),q(2),...\}$ 为有理数的一个排列。取 $g(q(n))=2^{-n}$, $n\in\mathbb{N}$，则 $\sum_{r\in\mathbb{Q}}g(r)$ 绝对收敛。

令

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sum_{r\in\mathbb{Q},r<x}g(r)$$

则 $f(x)$ 满足题设，为 R 上的严格单调递增函数，且在 $\mathbb{Q}$ 上不连续，在 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 连续。

f 严格单调递增由定义易得。

现设 $x\in\mathbb{Q},h>0$

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{r\in\mathbb{Q},r<x+h}g(r)-\sum_{r\in\mathbb{Q},r<x}g(r)=\sum_{r\in\mathbb{Q},x\leq r<x+h}g(r)>g(x)$$

其中 $g(x)$ 为恒大于 0 的常数，从而 f 在 x 处不连续。

当 $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，$h\to 0^+$ 时

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{r\in\mathbb{Q},x\leq r<x+h}g(r)=\sum_{r\in\mathbb{Q},x<r<x+h}g(r)\to 0$$

因当 h 足够小时任意靠近 x 的有理数均可排出区间 $(x,x+h)$ 且 $\{\frac{1}{2^n}\}$ 满足对任意 $\epsilon>0$ 存在充分大的 N 使得 $\sum_{n\geq N}\frac{1}{2^n}<\epsilon$。

同理

$$f(x)-f(x-h)=\sum_{r\in\mathbb{Q},x-h\leq r<x}g(r)\to 0$$

综上，$f(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不连续，在 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 连续。

Exercise 14:

(a).

$$D^+(F)(x)=\limsup_{h\to 0,h>0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

令 $\Delta(x,h)=\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$，$A_M=\{x:D^+(F)(x)>M\}$

$$\begin{aligned}
x\in A_M &\iff \text{对任意}k\in\mathbb{N}^*,\text{存在}h\in(0,\frac{1}{k}],\text{使得}\Delta(x,h)>M\\
&\iff \text{对任意}k\in\mathbb{N}^*,\text{存在}l>k,\text{使得存在}h\in[\frac{1}{l},\frac{1}{k}],\text{满足}\Delta(x,h)>M\\
&\iff x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=k+1}^{\infty}\{\sup_{\frac{1}{l}\leq h\leq\frac{1}{k}}\Delta(x,h)>M\}
\end{aligned}$$

故

$$A_M=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{l=k+1}^{\infty}\{x:\sup_{\frac{1}{l}\leq h\leq\frac{1}{k}}\Delta(x,h)>M\}$$

当 F 为连续函数，

$$\{x: \sup_{\frac{1}{l}\le h\le\frac{1}{k}} \Delta(x,h) > M\} = \{x: \sup_{\frac{1}{l}\le h\le\frac{1}{k}, h\in\mathbb{Q}} \Delta(x,h) > M\}$$

对 $\frac{1}{l} \le h \le \frac{1}{k}, h \in \mathbb{Q}, \Delta(x,h)$ 为一列可测函数，故 $\{x: \sup_{\frac{1}{l}\le h\le\frac{1}{k}} \Delta(x,h) > M\}$ 为可测集。由 $\{x: \sup_{\frac{1}{l}\le h\le\frac{1}{k}} \Delta(x,h) > M\}$ 为可测集，A_M 为可测集。从而 $D^+(F)(x)$ 可测。

(b).

令 $\Delta(x,h) = \frac{J(x+h)-J(x)}{h}, \Delta_n(x,h) = \frac{J_n(x+h)-J_n(x)}{h}$

$$\begin{aligned}\limsup_{h\to 0} \Delta(x,h) > \epsilon &\iff \forall m\in\mathbb{N}, \exists h \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] \setminus 0 \ s.t. \Delta(x,h) > \epsilon \\ &\iff \forall m\in\mathbb{N}, \exists k \ge m \ s.t. \exists h \in [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] \setminus (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}), \Delta(x,h) > \epsilon \\ &\iff \forall m\in\mathbb{N}, \exists k \ge m \ s.t. \sup_{\frac{1}{k}\le|h|\le\frac{1}{m}} \Delta(x,h) > \epsilon\end{aligned}$$

故有

$$\{x: \limsup_{h\to 0} \Delta(x,h) > \epsilon\} = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\ge m} \{x: \sup_{\frac{1}{k}\le|h|\le\frac{1}{m}} \Delta(x,h) > \epsilon\}$$

故只需证对任意 $k, m \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$，集合

$$A = A_{k,m,\epsilon} = \{x: \sup_{\frac{1}{k}\le|h|\le\frac{1}{m}} \Delta(x,h) > \epsilon\}$$

可测。

下证

$$A = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\ge N} \{x: \sup_{\frac{1}{k}\le|h|\le\frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \epsilon + \frac{1}{l}\}$$

令

$$I = I_{k,m} = [-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}] \setminus (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$$

若 $x \in A$

$$\sup_{\frac{1}{k}\le|h|\le\frac{1}{m}} \Delta(x,h) > \epsilon$$

从而存在 $h \in I$ 使得 $\Delta(x,h) > \epsilon$, 存在 $l \in \mathbb{N}$ 使得 $\Delta(x,h) > \epsilon + \frac{2}{l}$。

由

$$\Delta(x,h) = \lim_{n\to\infty} \Delta_n(x,h)$$

故对充分大的 n 有

$$\Delta_n(x,h) \ge \epsilon + \frac{1}{l}$$

从而

$$A \subset \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\ge N} \{x: \sup_{\frac{1}{k}\le|h|\le\frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \epsilon + \frac{1}{l}\}$$

若

$$x \in \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \{x : \sup_{\frac{1}{k}\leq|h|\leq\frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \epsilon + \frac{1}{l}\}$$

则存在 $l, N \in \mathbb{N}$ 使得

$$\sup_{\frac{1}{k}\leq|h|\leq\frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \epsilon + \frac{1}{l}$$

对任意 $n \geq N$ 成立。
故存在 $h(n) \in I$ 满足

$$\Delta_n(x, h(n)) > \epsilon + \frac{1}{l}$$

由 I 为区间，存在 $\{h(n)\}$ 的收敛子列收敛到 $h \in I$。选择 $n = n(x) \geq N$ 充分大使得

$$|J_n(x) - J_(x)| \leq \frac{1}{2kl}$$

故有

$$\frac{|J_n(x) - J_(x)|}{|h|} \leq \frac{1}{2l}$$

对任意 $h \in I$ 成立。

$$\frac{J_n(x+h_n) - J(x)}{h_n} = \frac{J_n(x+h_n) - J_n(x)}{h_n} + \frac{J_n(x) - J(x)}{h_n} \geq \epsilon + \frac{1}{l} - \frac{1}{2l} > \epsilon$$

从而

$$\epsilon < \frac{J_n(x+h_n) - J(x)}{h_n} \leq \frac{J_(x+h_n) - J(x)}{h_n} = \Delta(x, h_n)$$

故

$$\sup_{\frac{1}{k}\leq|h|\leq\frac{1}{m}} \Delta(x,h) \geq \Delta(x,h_n) > \epsilon$$

即

$$x \in A, \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \{x : \sup_{\frac{1}{k}\leq|h|\leq\frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \epsilon + \frac{1}{l}\} \subset A$$

如此得到

$$A = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} \{x : \sup_{\frac{1}{k}\leq|h|\leq\frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \epsilon + \frac{1}{l}\}$$

从而为得到所需结果，只需证明

$$B = \{x : \sup_{\frac{1}{k}\leq|h|\leq\frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \epsilon\}$$

为可测集。由映射 $h \mapsto J_n(x+h) - J_n$ 为递增的

$$\sup_{\frac{1}{k}\leq|h|\leq\frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) = \sup_{h\in(\mathbb{Q}\cap I)\cup\{\frac{1}{m}\}} \Delta_n(x,h)$$

而对 $h \in (\mathbb{Q}\cap I)\cup\{\frac{1}{m}\}$,$\Delta_n(x,h)$ 为一列可测函数。从而

$$\{x : \sup_{\frac{1}{k}\leq|h|\leq\frac{1}{m}} \Delta_n(x,h) > \epsilon\}$$

为可测集。即 B 为可测集，继而 A 为可测集。
综上

$$\limsup_{h\to 0}\frac{J(x+h)-J(x)}{h}$$

为可测函数。

Exercise 24:
(a).
由引理 3.13，当 F 为单增函数，可将其分解为单增连续函数与跳跃函数之和 $F(x)=f(x)+F_J(x)$。由 F 单增，F_J 单增
现对单增连续函数 f，在任意有界区间上 f 有有界变差，从而 f' 几乎处处存在且在 $[a,b]$ 上可积。现令

$$f(x)=F_C(x)+F_A(x)$$

其中

$$F_A(x)=\int_a^x f'(x)dx$$
$$F_C(x)=f-F_A(x)$$

由积分的绝对连续性，$F_A(x)\in AC[a,b]$ 且由 f 单增，$F_A(x)$ 单调递增。
自然 $F_C=f-F_A(x)$ 也连续且几乎处处可微。

$$F_C'(x)=f'-f'=0,\quad a.e.x$$

且由推论 3.7，当 $y\geq x$ 时

$$F_C(y)-F_C(x)=f(y)-f(x)-\int_x^y f'(x)dx\geq 0$$

综上，$F=F_A+F_C+F_J$ 满足题目要求。
(b).
若 F 有两种不同的分解，不妨设

$$F=F_A^1+F_C^1+F_J^1=F_A^2+F_C^2+F_J^2$$

令

$$\Delta_J=F_J^1-F_J^2=F_A^2+F_C^2-(F_A^1+F_C^1)$$

则 Δ_J 既是跳跃函数，也是连续函数，从而为常数，设 $\Delta_J=C_J$

$$(F_A^1)'-(F_A^2)'=(F_C^2)'-(F_C^1)'=0$$

设 $\Delta_A=F_A^1-F_A^2$，则 $\Delta_A\in AC$

$$\Delta_A(x)-\Delta_A(a)=\int_a^x((F_A^1)'-(F_A^2)')dx=0$$

故 Δ_A 为常数，设为 C_A，即 $F_A^1 - F_A^2 = C_A$。由此

$$F_C^1 - F_C^2 = -(C_A + C_J) = C_C$$

从而 F 的这种分解在相差一个常数意义下唯一。

Exercise 25:

(a).

由 $m(E) = 0$，存在开集 $\mathcal{O}_n$ 满足 $E \subset \mathcal{O}_n$，$m(\mathcal{O}_n) < \frac{1}{2^n}$，令 $f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\mathcal{O}_n}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\mathcal{O}_n} = \sum_{n=1}^{\infty} m(\mathcal{O}_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

从而 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$。现令 $x \in E$。由 $\mathcal{O}_n$ 为开集，存在开球 $B_n \subset \mathcal{O}_n$ 满足 $x \in B_n$ 则对任意球 B 使得 $x \in B$

$$\int_B f(y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} m(\mathcal{O}_n \cap B) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n \cap B)$$

故

$$\frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(B_n \cap B)}{m(B)}$$

对任意 $N > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得 $m(B) < \delta$ 且 $B \subset B_j$，$1 \leq j \leq N$

$$\frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(B_n \cap B)}{m(B)} \geq N$$

这对任意充分小的 B 成立。从而

$$\liminf_{m(B)\to 0,\ x\in B} \frac{1}{m(B)} \int_B f(y)dy = \infty$$

(b).

令 f 取 (a). 中的 f，取

$$F(x) = \int_0^x f(y)dy$$

则由积分绝对连续性知 F 绝对连续。由 $f \geq 0$，F 单调递增。由 (a).

$$D_+F(x) = \liminf_{h\to 0,\ h>0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \liminf_{h\to 0,\ h>0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)dy = \infty$$

$$D_-F(x) = \liminf_{h\to 0,\ h<0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \liminf_{h\to 0,\ h<0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)dy = \infty$$

Exercise 31:

对 $[0, \overline{x}]$ 上的分割 $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = \overline{x}$

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{(t_j - t_{j-1})^2 + (F(t_j) - F(t_{j-1}))^2} \leq \sum_{j=1}^{n} (t_j - tj - 1) + (F(t_j) - F(t_{j-1})) = \overline{x} + F(\overline{x})$$

故对增函数 $F, F(0)=0, L(\overline{x}) \leq \overline{x}+F(\overline{x})$。

考虑 Cantor-Lebesgue 函数构造中 $F_n(x) \to F(x)$，$[0,1]$ 区间被分为 $2^{n+1}-1$ 个小区间，其中 F_n 在 2^n-1 个小区间上为常值。记 $2^{n+1}-1$ 个区间为 $I_1, C_1, I_2, C_2, ..., C_{2^n-1}, I_{2^n}$。区间 I_j 长度为 $\frac{1}{3^n}$，总长为 $\frac{2^n}{3^n}$，区间 C_j 总长为 $1-\frac{2^n}{3^n}$。

对 $\overline{x} \in [0,L]$ 考虑分割 P_n，其中包含所有小于或等于 $\overline{x}$ 的区间 C_j, I_j 的端点为分割点。故对 $P_n: 0=t_0<t_1<...<t_m=\overline{x}$，$F_n$ 在 $[t_0,t_1]$ 上单调递增，在 $[t_1,t_2]$ 上为常数，在 $[t_2,t_3]$ 上单调递增......

注意到 $F(t_j)=F_n(t_j)$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m} \sqrt{(t_j-t_{j-1})^2+(F(t_j)-F(t_{j-1}))^2} \\
=&\sum_{\substack{j=1 \\ j \ odd}}^{m} \sqrt{(t_j-t_{j-1})^2+(F(t_j)-F(t_{j-1}))^2}+\sum_{\substack{j=1 \\ j \ even}}^{m} \sqrt{(t_j-t_{j-1})^2+(F(t_j)-F(t_{j-1}))^2} \\
\geq&\sum_{\substack{j=1 \\ j \ odd}}^{m} (F(t_j)-F(t_{j-1}))+\sum_{\substack{j=1 \\ j \ even}}^{m} (t_j-t_{j-1}) \\
=&F(\overline{x})+\sum_{k} |C_k \cap [0,\overline{x}]| \\
=&F(\overline{x})+\overline{x}-\sum_{k} |I_k \cap [0,\overline{x}]| \\
\geq&F(\overline{x})+\overline{x}-\sum_{k} |I_k| \\
=&F(\overline{x})+\overline{x}-(\frac{2}{3})^n
\end{aligned}
$$

令 $n \to \infty$，得到 $L(\overline{x}) \geq \overline{x}+F(\overline{x})$。

从而有 $L(\overline{x})=\overline{x}+F(\overline{x})$。