代数拓扑

孙天阳

2022 年 9 月 14 日

目录

1 概论

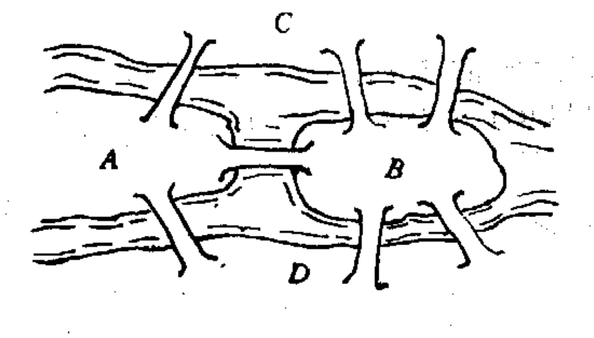
代数拓扑（同调论）广泛分布于数学的各个分支，

- 数论/代数，如：离散群
- 几何/拓扑，如：示性类，K-理论
- 分析/方程，如：Hodge 理论

代数拓扑起点：Euler 的两个结果

1. 哥尼斯堡七桥问题和一笔画问题
2. 多面体的 Euler 公式

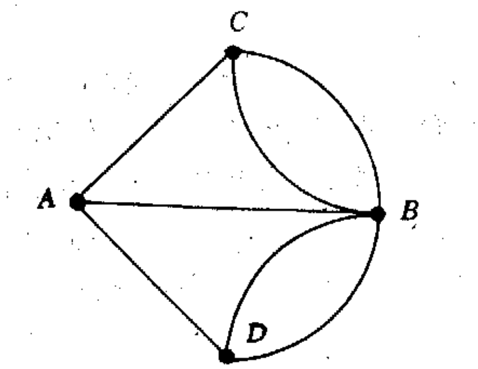
哥尼斯堡七桥问题



问：有没有一种散步方法，从某处出发，经过所有的桥恰好一次后回到原点？

数学研究步骤：具体问题 $\longrightarrow$ 抽象（合适的数学语言表达）$\longrightarrow$ 解决（找到合适的数学工具）$\longrightarrow$ 推广（公理化）$\longrightarrow \cdots$

Euler：抽象出图的概念. 图 $\begin{cases} \text{顶点} & \text{陆地，岛} \\ \text{棱} & \text{桥} \end{cases}$



连通图：任何两个顶点之间有一条由若干条棱构成的路径连结

假定每个棱有两个不同的顶点（即没有 self loops）

记图为 Γ，$\begin{cases} \text{顶点集}V(\Gamma) & v(\Gamma) = |V(\Gamma)| \\ \text{棱集}E(\Gamma) & e(\Gamma) = |E(\Gamma)| \end{cases}$

定义 1.1. *Γ 的一个 Euler 回路是指从某个点出发，沿着 Γ 的棱的一个路径，经过每条棱恰好一次，并且最终回到出发点.*

哥尼斯堡七桥问题 $\Longleftrightarrow$ 图 Γ 有没有 Euler 回路.

观察：

- 若 Γ 有 Euler 回路，则在任意顶点 $v \in V(\Gamma)$ 处，

$$\text{进入}v\text{的棱数} = \text{离开}v\text{的棱数}.$$

- Euler 回路跑遍所有的棱，特别地，跑遍 v 处的所有棱

定义 1.2. *$val(v) = v$ 的所有棱个数.*

定理 1.3. *若 Γ 有 Euler 回路 $\Longleftrightarrow$ 任意 $v \in V(\Gamma), val(V)$ 是偶数.*

证明.

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} val(v) &= v\text{的所有棱个数} \\ &= \text{进入}v\text{的棱个数} + \text{离开}v\text{的棱个数} \\ &= 2 \times \text{进入}v\text{的棱个数} \end{aligned}$$

$\Longleftarrow$ 见图论书.

□

Euler 一笔画问题

定义 1.4. *Γ 的 Euler 道路是指沿 Γ 的一个路径，走过所有的棱（此时未必回到出发点）.*

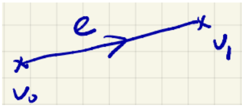
- Case 1 起点 = 终点，此时回到 Euler 回路问题
- Case 2 起点 $\neq$ 终点
  - Case2.1 终点为偶顶点：仅有一个奇顶点
  - Case2.2 终点为奇顶点：恰有两个奇顶点

定理 1.5. *Γ 有 Euler 道路 $\Longleftrightarrow \Gamma$ 至多有两个奇顶点.*

证明. 见图论书. □

重新回顾

如下图给棱 e 一个定向



在此定向下，我们定义 $\partial e = v_1 - v_0$.

如果 Γ 有 Euler 回路，按 Euler 回路诱导 $E(\Gamma)$ 中的棱的定向，则有

$$\partial\left(\sum_{e\in E(\Gamma)} e\right) = 0.$$

定义 1.6.

- $C_1(\Gamma) = \left\{\sum_{e\in E(\Gamma)} a_e e \mid a_e \in \mathbb{R},\ \mathit{for}\ e \in E(\Gamma)\right\}$，即由 $E(\Gamma)$ 张成的 $\mathbb{R}$-线性空间.
- $C_0(\Gamma) = \left\{\sum_{v\in V(\Gamma)} b_v v \mid b_v \in \mathbb{R},\ \mathit{for}\ v \in V(\Gamma)\right\}$，即由 $V(\Gamma)$ 张成的 $\mathbb{R}$-线性空间.
- 记 $\dim C_1(\Gamma) = e(\Gamma), \dim C_0(\Gamma) = v(\Gamma)$.

事实上，若

(1) Γ 没有 self loop

(2) Γ 是定向图（即每条棱都指定了定向）

即可定义

$$\partial\colon C_1(\Gamma) \longrightarrow C_0(\Gamma).$$

定义 1.7.

- $H_1(\Gamma) = \ker\partial = \{c \in C_1(\Gamma) \mid \partial c = 0\}$
- $H_0(\Gamma) = \operatorname{coker}\partial = C_0(\Gamma)/\operatorname{im}\partial$
- 记 $h_1 := \dim H_1(\Gamma), h_0 := \dim H_0(\Gamma)$

命题 1.8. *$h_1(\Gamma)$ 和 $h_0(\Gamma)$ 不依赖于 Γ 的定向.*

推论 1.9. *若 $h_1(\Gamma) = 0$，则 Γ 一定无 Euler 回路.*

问题：如何计算 $h_1(\Gamma)$ 与 $h_0(\Gamma)$？

命题 1.10. 若 Γ 连通，则 $h_0(\Gamma)=1$，并且

$$h_0(\Gamma)-h_1(\Gamma)=v(\Gamma)-e(\Gamma).$$

证明. 定义

$$\begin{array}{ccccc} C_1(\Gamma) & \xrightarrow{\partial} & C_0(\Gamma) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ & & \sum\limits_{v\in V(\Gamma)} b_v v & \longmapsto & \sum\limits_{v\in V(\Gamma)} b_v \end{array}$$

- φ 线性.
- φ 满射. 任取 $w\in V(\Gamma)$，有 $\varphi(\lambda w)=\lambda$.
- $\operatorname{im}\partial\subset\ker\varphi$. 只需对 $e\in E(\Gamma)$ 验证，显然有 $\varphi\partial(e)=0$.
- $\ker\varphi\subset\operatorname{im}\partial$. 设 $\sum\limits_v b_v v\in\ker\varphi$，即 $\sum\limits_v b_v=0$. 任意取定 $w\in V(\Gamma)$，则有

  $$b_w=-\sum_{v\neq w} b_v$$
  $$\sum_v b_v v=b_w w+\sum_{v\neq w} b_v v=\sum_{v\neq w} b_v(v-w)$$

  因为 Γ 连通，所以 $v-w=\partial c_v$，其中 $c_v\in C_1(\Gamma)$.（c_v 不一定简单到是一条边.）
- 结合上述两条有 $\ker\varphi=\operatorname{im}\partial$，从而

  $$H_0(\Gamma)=C_0(\Gamma)/\operatorname{im}\partial=C_0(\Gamma)/\ker\varphi\simeq\operatorname{im}\varphi=\mathbb{R}\Longrightarrow h_0(\Gamma)=1.$$

下证命题中的另一等式

$$\begin{aligned}&\dim\ker\partial-\dim\operatorname{coker}\partial=\operatorname{index}\partial\\ =&(\dim C_1(\Gamma)-\dim\operatorname{im}\partial)-(\dim C_0(\Gamma)-\dim\operatorname{im}\partial)\\ =&\dim C_1(\Gamma)-\dim C_0(\Gamma).\end{aligned}$$

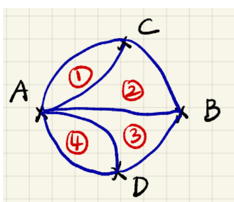
□

注记.

$$\underbrace{\operatorname{index}\partial}_{\text{分析}}=\underbrace{h_1(\Gamma)-h_0(\Gamma)}_{\text{拓扑}}=\underbrace{e(\Gamma)-v(\Gamma)}_{\text{几何}}.$$

注记. $e(\Gamma)=7, v(\Gamma)=4$. 则 $h_1(\Gamma)=h_0(\Gamma)+e(\Gamma)-v(\Gamma)=4$.

直观上，$h_1(\Gamma)$ 给出 Γ 的“洞个数”.



多面体的 Euler 公式

设 p 是一个凸多面体（此处不给出严格定义）. 记

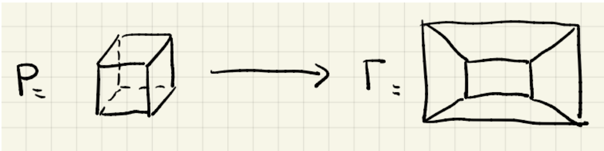
$$\begin{cases} v(p) & \text{顶点数} \\ e(p) & \text{棱数} \\ f(p) & \text{面数} \end{cases}$$

则

$$v(p) - e(p) + f(p) = 2.$$

Cauchy 的证明.

(1) 任取 P 的一个底面，将底面拉得足够大，得到一平面图 Γ



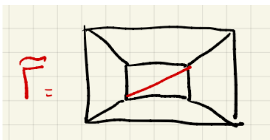
将 p 和 Γ 进行比较，

$$\begin{cases} v(p) = v(\Gamma) \\ e(p) = e(\Gamma) \\ f(p) = \#\left\{\mathbb{R}^2 \backslash \Gamma\text{的连通分支}\right\} \end{cases}$$

按习惯，定义 Γ 的面 =“有界”的面，则 $f(p) = f(\Gamma) + 1$. 等价于要证明

$$v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma) = 1.$$

(2) 在 Γ 的同属于一个面的两个未直接相连的顶点间增加一条连线，得到 $\widetilde{\Gamma}$



将 $\widetilde{\Gamma}$ 和 Γ 进行比较

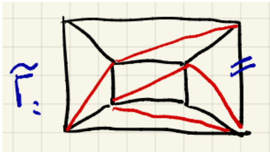
$$\begin{cases} v(\widetilde{\Gamma}) = v(\Gamma) \\ e(\widetilde{\Gamma}) = e(\Gamma) + 1 \\ f(\widetilde{\Gamma}) = f(\Gamma) + 1 \end{cases}$$

因此

$$v(\widetilde{\Gamma}) - e(\widetilde{\Gamma}) + f(\widetilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma).$$

现设 Γ 的每个面都已经通过连线剖分成三角形，得到的新图仍记作 Γ.

(3) 从最外边去掉一条边，新图记作 $\widetilde{\Gamma}$.



将 $\widetilde{\Gamma}$ 和 Γ 进行比较

$$\begin{cases} v(\widetilde{\Gamma}) = v(\Gamma) \\ e(\widetilde{\Gamma}) = e(\Gamma) - 1 \\ f(\widetilde{\Gamma}) = f(\Gamma) - 1 \end{cases}$$

仍有

$$v(\widetilde{\Gamma}) - e(\widetilde{\Gamma}) + f(\widetilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma).$$

(4) 在消边的时候还可能遇到如下情况

将 $\widetilde{\Gamma}$ 和 Γ 进行比较

$$\begin{cases} v(\widetilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - 1 \\ e(\widetilde{\Gamma}) = e(\Gamma) - 1 \\ f(\widetilde{\Gamma}) = f(\Gamma) \end{cases}$$

仍有

$$v(\widetilde{\Gamma}) - e(\widetilde{\Gamma}) + f(\widetilde{\Gamma}) = v(\Gamma) - e(\Gamma) + f(\Gamma).$$

(5) 有限步之后，只剩一条线段，

$$v - e + f = 2 - 1 + 0 = 1.$$

$\square$

重新叙述

$\mathbb{R}^2$ 中一个闭凸集 A，由有限个三角形沿边粘贴得到. 记 $\Gamma(A)$ 为对应的平面图.$V(\Gamma), E(\Gamma), F(\Gamma)$ 分别为顶点集、棱集和有界面集. 对每个面逆时针定向，对每条棱任意定向.

定义 1.11.

- $C_2(\Gamma) = \left\{ \sum_{f\in F(\Gamma)} a_f f \mid a_f \in \mathbb{R},\ for\ f \in F(\Gamma) \right\}.$
- $C_1(\Gamma) = \left\{ \sum_{e\in E(\Gamma)} b_e e \mid b_e \in \mathbb{R},\ for\ e \in E(\Gamma) \right\}.$
- $C_0(\Gamma) = \left\{ \sum_{v\in V(\Gamma)} c_v v \mid c_v \in \mathbb{R},\ for\ v \in V(\Gamma) \right\}.$
- $$C_2(\Gamma) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\Gamma) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\Gamma)$$
  - ∂_1 按以前定义.
  - $\partial_2 f = f$ 的棱的 ± 1 系数组合. 当 f 诱导的定向与棱给定的定向一致时取 1，相反取 -1. 说白了，$\partial_2 f$ 就是把 f 的棱按 f 诱导的定向加起来.

引理 1.12. $\partial_1\partial_2 = 0$

证明. 不妨设棱 f 诱导的定向与给定定向一致，若不然，也不影响 $\partial_2 f$ 的实际结果.

$\partial_1\partial_2 f = \partial_1(e_1 + e_2 + e_3) = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_0 - v_2 = 0.$ □

定义 1.13.

- $H_2(\Gamma) = \ker \partial_2$
- $H_1(\Gamma) = \ker \partial_1 / \operatorname{im} \partial_2$
- $H_0(\Gamma) = \operatorname{coker} \partial_1 = C_0(\Gamma)/\operatorname{im} \partial_1$

命题 1.14. $H_0(\Gamma) \simeq \mathbb{R}$.

定理 1.15. $\dim H_0(\Gamma) - \dim H_1(\Gamma) + \dim H_2(\Gamma) = \dim C_0(\Gamma) - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_2(\Gamma)$.

证明.

$$\begin{aligned}
&\dim C_2(\Gamma) - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma)\\
=&\dim\ker\partial_2 - \dim\ker\partial_2 + \dim C_2(\Gamma) - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma)\\
=&\dim H_2(\Gamma) + \dim\operatorname{im}\partial_2 - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma)\\
=&\dim H_2(\Gamma) + \dim\operatorname{im}\partial_2 - \dim\ker\partial_1 + \dim\ker\partial_1 - \dim C_1(\Gamma) + \dim C_0(\Gamma)\\
=&\dim H_2(\Gamma) - \dim H_1(\Gamma) - \dim\operatorname{im}\partial_1 + \dim C_0(\Gamma)\\
=&\dim H_2(\Gamma) - \dim H_1(\Gamma) + \dim H_0(\Gamma).
\end{aligned}$$

□

定理 1.16. $H_2(\Gamma) = \{0\}$.

证明. 设 $\sum_f a_f f \in \ker \partial_2$. 考虑相邻的两个面 f_1, f_2，他们中间夹着一条棱 e. 经由 ∂_2 作用能提供 e 的只有 f_1 和 f_2. 注意 f_1 和 f_2 诱导 e 的定向是相反的，因此为了保证经由 ∂_2 作用后 e 前系数为零，必须有 $a_{f_1} = a_{f_2}$. 由连通性知 $a_f \equiv a$. 那么有

$$0 = a \sum_f \partial f = a \sum_{e\text{是边界}} \pm e \Longrightarrow a = 0 \Longrightarrow \ker \partial_2 = \{0\}\,.$$

□

定理 1.17. $H_1(\Gamma) = \{0\}$.

证明. □