微分流形

孙天阳

It is both a blessing and a handicap.

目录

Chapter 1

代数准备

1 张量积

定义 1.1. 设 V, W, Z 都是 $\mathbb{R}$-向量空间. 如果 $f\colon V \times W \to Z$ 满足

$$f(\lambda v_1 + v_2, w) = \lambda f(v_1, w) + f(v_2, w)$$
$$f(v, \lambda w_1 + w_2) = \lambda f(v, w_1) + f(v, w_2)$$

则称 f 为 $\mathbb{R}$-双线性映射. 将这样的双线性映射全体记作 $\mathscr{L}(V, W; Z)$.

定义 1.2. 设 U, V, W 都是 $\mathbb{R}$-向量空间, $f\colon V \times W \to U$ 是 $\mathbb{R}$-双线性映射. 如果对任意的 $\mathbb{R}$-向量空间 Z 和 $\mathbb{R}$-双线性映射 $g\colon V \times W \to Z$, 都存在唯一的 $\mathbb{R}$-线性映射 $h\colon U \to Z$ 使得 $h \circ f = g$, 即下列图表可交换

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & U \arrow[d, dashed, "\exists! h"] \\ & Z \end{tikzcd},$$

则称 f 为 V 与 W 在 $\mathbb{R}$ 上的张量积.

仅仅从张量积的定义出发，我们便能知道很多信息：

- 张量积的泛性质蕴含了若存在则在同构意义下唯一, 因此我们可将 U 记作 $V \otimes W$, 将 $f(v, w)$ 记作 $v \otimes w$. 但此时还不清楚存在性,$V \otimes W$ 和 $v \otimes w$ 都还十分抽象.
- $\mathscr{L}(V, W; Z) \cong \mathrm{Hom}(V \otimes W, Z)$，特别地，当 Z 取为 $\mathbb{R}$ 时，我们得到 $\mathscr{L}(V, W; \mathbb{R}) \cong (V \otimes W)^*$.
- $V \otimes W = \operatorname{span} \operatorname{Im} f(V \times W)$，否则 h 不可能唯一.

  进而若 $\{e_i\}_{i=1}^n, \{f_j\}_{j=1}^m$ 分别是 V, W 的一组基，则 $V \otimes W = \operatorname{span}\{e_i \otimes f_j\}$.
- 设 $\{e_i\}_{i=1}^n, \{f_j\}_{j=1}^m$ 分别是 V, W 的一组基，对 (e_k, f_l) 赋予 1，对其他所有基对赋予 0，按双线性性可定义出一个双线性函数 f_{kl}，由泛性质存在 $V \otimes W$ 上的一个线性函数 $\tilde{f}_{kl}$，由图表的交换性知 $\tilde{f}_{kl}$ 在 $e_k \otimes f_l$ 上取值为 1，在其他 $e_i \otimes f_l$ 上取值为 0.

  结合上一条可知 $\{e_i \otimes f_j\}$ 是 $V \otimes W$ 的一组基，从而 $V \otimes W$ 是 $n \times m$ 维线性空间.
- $(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$，从而 $\mathscr{L}(V, W; \mathbb{R}) \cong V^* \otimes W^*$，从而 $V \otimes W \cong \mathscr{L}(V^*, W^*; \mathbb{R})$.

容易验证 $\mathscr{L}(V^*, W^*; \mathbb{R})$ 确实满足张量积的定义，因此我们在 V 和 W 都是有限维线性空间的情形下将 $V \otimes W$ 具体实现为 $\mathscr{L}(V^*, W^*; \mathbb{R})$.

下面介绍另一种同样自然的构造张量积的方式，它适用于任意线性空间 V, W.

这种构造来源于两个观察

- $V \otimes W = \operatorname{span} \operatorname{Im} f(V \times W)$，即 $V \otimes W$ 由所有形如 $v \otimes w$ 的元素张成.
- $$\begin{aligned} a(v \otimes w) = (av) \otimes w = v \otimes (aw) \\ v \otimes w_1 + v \otimes w_2 = v \otimes (w_1 + w_2) \\ v_1 \otimes w + v_2 \otimes w = (v_1 + v_2) \otimes w \end{aligned}$$

这促使我们将 $V \otimes W$ 定义为 $V \times W$ 生成的自由线性空间商掉上述关系后得到的商空间，容易验证如此定义的空间确实满足张量积的定义. 具体可参见 [1].

1.1 张量代数

2 外积

Chapter 2

流形范畴

1 拓扑流形

2 光滑流形

例 2.1. 设 V 是 n 维线性空间,

例 2.2. 可数个点.

可数个点

3 带边流形

4 光滑映射

Chapter 3

线性近似

1 切空间

设 $C_u(M)$ 为所有形如 (p,γ) 的元素的集合, 其中 $p\in M,\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ 是过点 $\gamma(0)=p$ 的光滑曲线. 有自然投影 $\pi:C_u(M)\to M,\pi(p,\gamma)=p$.

在 $C_u(M)$ 上引进等价关系：在点 p 附近取坐标卡 (U,φ). 如果

$$p_1=p_2 \quad 且 \quad \left.\frac{\mathrm{d}(\varphi\circ\gamma_1)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}-\left.\frac{\mathrm{d}(\varphi\circ\gamma_2)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0,$$

则 $(p_1,\gamma_1)\sim(p_2,\gamma_2)$.

验证该等价关系与坐标卡的选取无关. 在点 p 附近取另一个坐标卡 (V,ψ), 则

$$\frac{\mathrm{d}(\psi\circ\gamma_1)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\psi\circ\varphi^{-1}\circ\varphi\circ\gamma_1)}{\mathrm{d}t}=D(\psi\circ\varphi^{-1})\Big|_{\varphi(p)}\cdot\left.\frac{\mathrm{d}(\varphi\circ\gamma_1)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}.$$

命题 1.1. $T_p(M_1\times M_2)\cong T_{p_1}M_1\times T_{p_2}M_2$

证明. 我们先来理解一下这件事情.

设 $(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)$ 分别是 p_1,p_2 附近的坐标卡, 那么 $(U_1\times U_2,\varphi_1\times\varphi_2)$ 便是 p 附近的坐标卡.

$T_{p_1}M_1$ 有一组基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^1},\cdots\frac{\partial}{\partial x_1^n}\right\}$,$T_{p_2}M_2$ 有一组基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_2^1},\cdots\frac{\partial}{\partial x_2^m}\right\}$.

$T_p(M_1\times M_2)$ 有一组基 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^1},\cdots\frac{\partial}{\partial x_1^n},\frac{\partial}{\partial x_2^1},\cdots\frac{\partial}{\partial x_2^m}\right\}$.

两处的 $\frac{\partial}{\partial x_1^1}$ 并不是同一个东西, 但我们仍用同一个记号, 因为它们基本上也就是同一个东西了！

有着上面的观察, 我们很容易写出两个方向的同构映射分别是什么. □

2 偏导数

设 f 是 $\mathbb{R}^2$ 上的光滑函数, 设 r^1 和 r^2 分别是关于第一和第二分量的投影映射. 考虑

$$\phi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \tilde{\phi} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ z, \end{pmatrix}$$

其中 $x = \tilde{x} = r^1$,$y = r^2$, 即 $\phi = \mathrm{Id}$.

假如 $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, 问能否找到 z 使得 $\dfrac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \neq 0$?

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} &= \frac{\partial f \circ \tilde{\phi}^{-1}}{\partial r^1} \\
&= \frac{\partial f \circ \phi^{-1} \circ \tilde{\phi}^{-1}}{\partial r^1} \\
&= \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial r^1} \frac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^1}{\partial r^1} + \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial r^2} \frac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^2}{\partial r^1} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^1}{\partial r^1} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^2}{\partial r^1}
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^1}{\partial r^1} & \dfrac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^1}{\partial r^2} \\ \dfrac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^2}{\partial r^1} & \dfrac{\partial (\tilde{\phi}^{-1})^2}{\partial r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{\phi}^1}{\partial r^1} & \dfrac{\partial \tilde{\phi}^1}{\partial r^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{\phi}^2}{\partial r^1} & \dfrac{\partial \tilde{\phi}^2}{\partial r^2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial r^1} & \dfrac{\partial \tilde{x}}{\partial r^2} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r^1} & \dfrac{\partial z}{\partial r^2} \end{pmatrix}$$

3 光滑映射的微分

4 淹没和浸入

上次我们提到了如果 $f: M \to N$ 是一个微分同胚, 那么 $\mathrm{d}f_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ 便是一个线性同构. 正如欧氏空间中的情形, 我们能够证明下面的局部逆命题：

定理 4.1 (逆映射定理). *设 $f: M \to N$ 是一个光滑映射满足 $\mathrm{d}f_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ 是一个线性同构, 那么 f 在 p 附近是一个局部微分同胚, 即它把 p 的某个邻域 U_1 微分同胚地映到 $q = f(p)$ 地某个邻域 $f(U_1)$.*

即使 $\mathrm{d}f_p$ 处处是线性同构, 我们也不能得出 f 是整体微分同胚, 因为 f 可能不是可逆的. 事实上, 我们现在能构造一个更简单的例子：设 $f: \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1, f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}$. 这就仅仅是一个局部微分同胚.

自然要问, 如果 $\mathrm{d}f_p$ 不是线性同构呢？当然最简单的情形是满秩的情形.

定义 4.1. *设 $f: M \to N$ 是一个光滑映射.*

(1) *称 f 在 p 处是一个淹没如果 $\mathrm{d}f_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ 是满射.*

(2) *称 f 在 p 处是一个浸入如果 $\mathrm{d}f_p: T_pM \to T_{f(p)}N$ 是单射.*

我们称 f 是一个淹没/浸入如果它在每点处都是淹没/浸入.

显然

- 如果 f 是一个淹没, 那么 $\dim M \geqslant \dim N$
- 如果 f 是一个浸入, 那么 $\dim M \leqslant \dim N$
- 如果 f 在 p 处是一个淹没/浸入, 那么 f 在 p 附近是一个淹没/浸入.

Chapter 4

子流形

1 光滑子流形

设 M 是一个 n 维光滑流形, 我们该称什么对象为 M 的"光滑子流形"? 回忆：什么是线性空间 V 的线性子空间 W？W 应该满足三个条件：W 是 V 的子集；W 本身是一个线性空间；W 上的线性空间结构是 V 上线性空间结构的限制. 类似地, 什么是群的子群？什么是拓扑空间的拓扑子空间？在每种情形下你总能写出三个条件：包含关系, 结构本身, 相容性.M 的光滑流形 S 也应该满足这三个条件：

- S 应该是 M 的子集；
- S 本身应该是 k 为光滑流形, 其中 $k \leqslant n$；
- S 上的光滑结构应该与 M 相容.

最后一个条件, 即相容性, 可以被陈述地更加准确：S 上的光滑结构即一族坐标卡应该是 M 的光滑结构的限制.

2 嵌入

光滑子流形与浸入子流形之间的区别是什么呢？正如我们描述的, 使得浸入子流形是一个流形的拓扑是通过 f 从源空间搬运过来的诱导拓扑, 而不是从靶空间继承的子空间拓扑. 另一方面, 如果 S 是 M 的光滑子流形, 那么 S 的拓扑

Chapter 5

微分形式及其代数准备

1 微分形式

- 记号
  - k-次微分形式全体：$\Omega^k(M)$.
- df
- 按上面定义出 dx^i, 又恰好是 ∂_i 的对偶基.
- $df = \partial_i f dx^i$

2 外微分

定理 2.1. 设 M 是 m 维光滑流形, 则存在唯一的一个 $\mathbb{R}$-线性映射 $d:\Omega(M)\to\Omega(M)$, 使得 $d(\Omega^k(M))\subset\Omega^{k+1}(M)$, 并且满足下列条件:

(1) 对于 $f\in\Omega^0(M)$,$df(X)=Xf$.

(2) 对于 $f\in\Omega^0(M)$,$d(df)=0$.

(3)

证明.

- 先证明若存在, 则是局部算子.
- 再证明局部上的唯一性, 必须形如什么什么
- 再局部定义为这样, 验证这样定义的满足所有的条件
- 最后说明定义并不依赖于局部坐标的选取

□

3 各种微分形式上运算的关系

Chapter 6

流形上的积分

1 定向

2 n-形式在光滑流形上的积分

3 Stokes 公式

Chapter 7

向量场

1　向量场

2 单参数变换群与完备向量场

3 Lie 导数

称光滑流形 M 连同其上的流 Φ 为动力系统. 下面我们研究由向量场的流生成的动力系统.

为了简便我们假定 X 是完备的, 所以我们有一族微分同胚 $\phi_t : M \to M$. 现在假定 $f \in C^\infty(M)$ 是任意的光滑函数. 我们希望计算 f 沿着流的变化率.

命题 3.1. 设 $X \in \Gamma^\infty(TM)$ 是完备的. 那么

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \phi_t^* f = Xf, \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

证明. 首先我们理解一下式子的左侧,

$$\phi_t^*(f)(p) \xlongequal{\text{拉回映射的定义}} f(\phi_t(p)) \xlongequal{\phi_t\text{的定义}} f(\gamma_p(t)),$$

所以对于固定的 p,$f(\gamma_p(t))$ 是关于 t 的从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}$ 的函数, 从而我们可以谈论对该函数关于 t 在 $t=0$ 处求导数.

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \phi_t^* f(p) &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f(\gamma_p(t)) \\
&= \pi((f \circ \gamma_p)_{*,0}(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0})) && \text{Tu An introduction to manifolds Page 92} \\
&= \pi(f_{*,p}((\gamma_p)_{*,0}(\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}))) && \text{链式法则} \\
&= \pi(f_{*,p}(X_p)) && \text{积分曲线的定义} \\
&= df_p(X_p) && \text{Tu An introduction to manifolds Page 191} \\
&= Xf(p) && \text{外微分的定义}
\end{aligned}$$

$\square$

Chapter 8

李群

1 李群

定义 1.1. 称集合 G 是李群, 如果其上既有光滑结构又有群结构, 并且

$$\mu : G \times G \to G, \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2$$

是光滑映射.

注记.

- 与拓扑群的情形不同, 群乘法的光滑性可以蕴含逆的光滑性.
- 希尔伯特第五问题,*[Gleason and Montgomery-Zippin,1950's]*: 设 G 是任意拓扑群, 其底空间是一个拓扑流形, 那么 G 上有一个光滑结构使得它是一个李群.
- 事实上每个李群都是实解析的. 也就是说, 任意李群 G 上的一个光滑结构包含了唯一一个实解析结构.

例 1.1. 有一些基本的例子:

- 回忆离散群是指赋予了离散拓扑的拓扑群.

  如果该群还是至多可数的，那么它是零维李群，称作离散李群.
- $\mathbb{R}^n$, 加法群.
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, 乘法群.
- $\mathbb{S}^1$, 乘法群.
- 线性李群, 矩阵乘法.

$$\begin{aligned} GL(n,\mathbb{R}) &= \left\{X \in M(n,\mathbb{R}) \middle| \det X \neq 0\right\}, \quad \text{一般线性群} \\ SL(n,\mathbb{R}) &= \left\{X \in M(n,\mathbb{R}) \middle| \det X = 1\right\}, \quad \text{特殊线性群} \\ O(n) &= \left\{X \in M(n,\mathbb{R}) \middle| XX^T = I_n\right\}, \quad \text{正交群.} \end{aligned}$$

- 如果 G_1 和 G_2 是李群, 那么它们的直积 $G_1 \times G_2$ 也是李群.

注记.

(2) 不是每个光滑流形都有李群结构. 例如, 有李群结构的球只有 $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1$ 和 $\mathbb{S}^3$; 在所有的紧二维曲面中有李群结构的只有 $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. 李群结构存在的一个简单的拓扑阻碍是 $\pi_1(G)$ 必须是 *Abel* 的.

现在假设 G 是一个李群. 对任意元素 $a, b \in G$, 有两个自然映射, 左乘

$$L_a : G \to G, \quad g \mapsto a \cdot g$$

和右乘

$$R_b : G \to G, \quad g \mapsto g \cdot b.$$

L_a 是光滑的因为它可以被视作光滑映射的复合

$$\begin{aligned} L_a : & G \xhookrightarrow{j_a} G \times G \xrightarrow{\mu} G \\ & g \longmapsto (a, g) \longmapsto a \cdot g. \end{aligned}$$

类似地 $R_b = \mu \circ i_b$ 也是光滑的. 显然有 $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$ 和 $R_b^{-1} = R_{b^{-1}}$. 所以 L_a 和 R_b 都是微分同胚. 此外,L_a 和 R_b 彼此交换, 即 $L_a R_b = R_b L_a$.

引理 1.1. 乘法映射 $\mu : G \times G \to G$ 的微分是

$$d\mu_{a,b}(X_a, Y_b) = (dR_b)_a(X_a) + (dL_a)_b(Y_b).$$

我们已经利用了 *PSet2* 中的同构 $\theta : T_aG \times T_bG \simeq T_{(a,b)}(G \times G)$.

证明.

$$\begin{aligned} (d\mu_{a,b}(X_a, Y_b))f &= (X_a, Y_b)(f \circ \mu) \\ &= X_a(f \circ \mu \circ i_b) + Y_b(f \circ \mu \circ j_a) \\ &= X_a(f \circ R_b) + Y_b(f \circ L_a) \\ &= (dR_b)_a(X_a)f + (dL_a)_b(Y_b)f. \end{aligned}$$

□

2 同态

回忆群 G 到群 H 的群同态 $\phi : G \to H$ 是指一个映射满足

$$\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) \cdot \phi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

对于李群, 很自然地要求映射 ϕ 的光滑性.

定义 2.1. *设 G, H 是李群. 如果映射 $\phi : G \to H$ 是光滑的群同态, 则称 ϕ 是一个李群同态.*

类似地我们可以定义李代数同态

定义 2.2. *设 $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ 是李代数. 如果映射 $L : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ 满足*

(1) *L 是线性映射*

(2) *$L([X_1, X_2]) = [L(X_1), L(X_2)], \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$.*

则称 L 是李代数同态.

现在假设 $\phi : G \to H$ 是一个李群同态, 那么它在 e 处诱导了切映射 $\phi_{*,e} : T_e G \to T_e H$

3 左不变向量场

我们从抽象的定义开始.

定义 3.1. 设 V 是实向量空间, 若其上有一个二元运算

$$[\cdot,\cdot]:V\times V\to V$$

满足

(1)（线性）$[aX_1+bX_2,Y]=a[X_1,Y]+b[X_2,Y]$

(2)（反对称）$[X,Y]=-[Y,X]$.

(3)（*Jacobi* 恒等式）$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$.

则称 V 是一个李代数, 称 $[\cdot,\cdot]$ 是 V 上的李括号运算.

例 3.1. 任何向量空间上都有一个平凡的李代数结构：$[X,Y]\equiv 0$.

例 3.2. 光滑流形 M 上的全体光滑向量场 $\Gamma^\infty(TM)$ 构成一个李代数.

例 3.3.

3.1 单参数子群作为单参数变换群

$$\begin{tikzcd} v\in T_eG & X\text{左不变矢量场} \arrow[d] \\ \phi:\mathbb{R}\to G & \varphi:\mathbb{R}\times G\to G \arrow[l] \end{tikzcd}$$

命题 3.1. 设 G 是李群, X 是 G 上的左不变矢量场，则

(1) X 是完备的.

(2) 设 $\varphi:\mathbb{R}\times G\to G$ 是由 X 决定的单参数变换群，$\phi(t)=\varphi(t,e)$，那么 $\varphi(t,g)=g\cdot\phi(t)$

特别地，$\phi:\mathbb{R}\to G$ 是唯一满足 $\phi'(0)=X_e$ 的李群同态.

证明. 我们知道积分曲线局部的存在性总是成立的，而李群的好处和左不变矢量场的特殊之处在于我们可以利用左乘来将某处的积分曲线搬到另一处仍是积分曲线。如果我们搬的不太远，即两个积分曲线相交，那么我们可以利用唯一性断定这两个积分曲线可以拼到一起，从而极大积分曲线的定义域必须是 $\mathbb{R}$。还是利用左乘和左不变矢量场的特殊性，我们发现经过任意两点的极大积分曲线不会相差太多，只差一个左乘，如果我们以经过 e 的极大积分曲线 $\phi(t)$ 为基准，那么经过 g 的极大积分曲线就是 $g\cdot\phi(t)$，而只要你稍微会想起单参数变换群是如何由积分曲线决定的，你便会发现 t 对应的微分同胚即是右乘 $\phi(t)$. □

3.2 指数映射

- 指数映射让我们可以从李代数得到群的局部结构
- 指数映射的存在性是李代数能成为研究李群的有力工具的一个基本原因
- 数学分析中的指数映射是 G 为正实数的乘法群的特殊情形.

计算指数映射的套路

- 明确李群 G, 明确李代数 $\mathfrak{g}$, 任取元素 $X \in \mathfrak{g}$
- 构造 $\phi : \mathbb{R} \to G$, 满足
  - $\phi(0) = e$
  - $\phi'(0) = X$
  - ϕ 是李代数同态, 即 $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$
- $\exp(X) = \phi(1)$.

4 伴随表示

5 李子群

6 闭李子群

7 李群作用

设 M 是光滑流形,G 是李群. 设 $\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数.

从本章开始,$\mathfrak{g}$ 的元素会被记作 $A, B, \cdots$. 根据语境, 它们会被视作 G 上的左不变矢量场或 $\mathscr{T}_e G$ 中的元素.

7.1 覆叠映射

Chapter 9

Maurer-Cartan 形式

1 Maurer-Cartan 形式

- 欧式空间中向量的平行移动
  - 首先, 向量指的是某点处切空间中的元素
  - 平行移动让我们得到任意两点处切空间的一个同构？甚至得到切丛是平凡的？
    - 我想有两个意义下的平行移动。一个意义下的平行移动是给定了一个联络后的平行移动, 切丛当然不必是平凡的。
      另一个意义就是这里李群意义下的平行移动, 切丛是平凡的。
    - 还需要好好理解平行移动到底带给了我们什么, 应该不仅仅是任意两点处切空间的一个同构。
    - 我本以为这里这件事是靠李群结构保证的, 但他又说这依赖于光滑地、可迁地作用于 $\mathbb{R}^n$ 的一个 translation group。但确实对任意李群都可以找到这样的一个 translation group。

Chapter 10

丛

1 丛

定义 1.1. 设 E, M 是光滑流形, $\pi\colon E \to M$ 是光滑满射, 称 (E, π, M) 是丛.

称 $F_p := \pi^{-1}(p)$ 为 $p \in M$ 处的纤维. 称 E 为丛流形，M 为底流形，π 为丛投影.

2 纤维丛

一般来说，纤维 $\pi^{-1}(p)$ 不是 E 的子流形. 为此我们引入

定义 2.1. *设 $\xi = (E, \pi, M)$ 是丛, F 是光滑流形. 称 ξ 是以 F 为典型纤维的纤维丛，如果对任意的 $x \in M$，存在邻域 U 和微分同胚*

$$\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$$

使得

$$\pi_U \circ \varphi = \pi\big|_{\pi^{-1}(U)}.$$

我有两个问题：

- 纤维丛之间的态射是什么？我目前的回答是就是丛之间的态射.
- 有了态射，就可以讲同构. 我的问题是不同的局部平凡化是否会使得丛成为不同的纤维丛？

  我目前的回答是不会，因为纤维丛之间的态射就是 underlying 的丛之间的态射，与局部平凡化的选取无关.

在纤维丛的情形下，$\pi\colon E \to M$ 是淹没，从而 $\pi^{-1}(p)$ 能成为子流形.

3 向量丛

4 G-丛

G 能不能成为结构群是与局部平凡化 $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ 的选取有关的. 比如平凡丛，它的结构群可以是 $\{e\}$. 但你若非要对平凡丛多搞几个平凡化，那结构群就不能是 $\{e\}$.

我目前还好奇如何由转移函数构造出纤维丛

以 G 为结构群的纤维丛，它的丛流形 E 自然成为右 G 流形.

态射

For fiber bundles with structure group G and whose total spaces are (right) G-spaces (such as a principal bundle), bundle morphisms are also required to be G-equivariant on the fibers. This means that $\varphi : E \to F$ is also G-morphism from one G-space to another, that is, $\varphi(xs) = \varphi(x)s$ for all $x \in E$ and $s \in G$.

5 主丛

Chapter 11

商流形

Chapter 12

作业

1 PSet2

(5)Let M, N be smooth manifolds with atlases $\mathcal{A} = \{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}$ and $\mathcal{B} = \{(\phi_\beta, U_\beta)\}$ respectively. Define an atlas $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ on the product space $M \times N$ to be

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(\phi_\alpha \times \phi_\beta, U_\alpha \times U_\beta)\}.$$

Prove:

(a) $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ is an atlas on $M \times N$, thus define a smooth structure.

(b) The nature projections $\pi_1 : M \times N \to M$ and $\pi_2 : M \times N \to N$ are smooth.

(c) If P is any smooth manifold, then a map $f : P \to M \times N$ is smooth if and only if both $\pi_1 \circ f$ and $\pi_2 \circ f$ are smooth.

(d) $T_{(p,q)}(M \times N) \simeq T_pM \times T_qN$.

证明.

(a)
- $\{(U_\alpha \times U_\beta)\}$ 显然是 $M \times N$ 的开覆盖.
- 若 $(U_\alpha \times U_\beta) \cap (U'_\alpha \times U'_\beta) \neq \varnothing$, 则

$$(\phi'_\alpha \times \phi'_\beta) \circ (\phi_\alpha \times \phi_\beta)^{-1} = (\phi'_\alpha \times \phi') \circ (\phi_\alpha^{-1} \times \phi_\beta^{-1}) = (\phi'_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1}) \times (\phi'_\beta \circ \phi_\beta^{-1})$$

(b)

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\phi_\alpha \times \phi_\beta"] & M \arrow[d, "\phi_\alpha"] \\
\phi_\alpha(U_\alpha) \times \phi_\beta(U_\beta) \arrow[r, "\tilde{\pi}"] & \phi_\alpha(U_\alpha)
\end{tikzcd}$$

(c)
- $\Longrightarrow$ 容易.
- $\Longleftarrow$

$$\begin{array}{cc}
P & M \times N \\
 & \\
\phi_\gamma(U_\gamma) & \phi_\alpha \times \phi_\beta(U\beta)
\end{array}$$

(d) 两边维数相同, 显然同构（笑）

不过我们可以给出一个稍微有点意义的同构映射,

$$\theta : T_pM \times T_qN \longrightarrow T(p,q)(M \times N)$$
$$(u,v) \longmapsto w$$

其中 $wf = uf(\cdot,q) + vf(p,\cdot)$, 容易验证该映射良好定义.

- 容易验证 θ 是线性映射.
- $\ker\theta = \{(0,0)\}$. 假设 $u \neq 0$, 则可以找到 $f_1 : M \to R$ 满足 $uf_1 \neq 0$, 可设 $uf_1 > 0, f_1(p) > 0$, 否则, 考虑 $-f_1 + C$, 其中 C 是充分大的某正数. 对 $v \neq 0$ 也同样找到这样的一个函数 f_2, 若 $v = 0$ 则取 $f_2 \equiv 1$. 定义

  $$f : M \times N \longrightarrow \mathbb{R}$$
  $$(p,q) \longmapsto f_1(p)f_2(q)$$

  则 $wf = f_2(q)uf_1 + f_1(p)vf_2 > 0$.

□

2 PSet5Part1

(5)

(a)

(b) Let G be a Lie group. Prove: G is abelian if and only if $\mathfrak{g}$ is abelian.

(c)

证明.

(a)

(b) • $\Longrightarrow$

- 当 G 是李群时, 断言 $i_*X = -X$.
  令 $m : G\times G \to G$ 是群乘法, 那么容易验证

$$\begin{aligned} \mathrm{d}m_{(e,e)} : T_{(e,e)}(G\times G) \cong T_eG \oplus T_eG &\longrightarrow T_eG \\ (X,Y) &\longmapsto X+Y \end{aligned}$$

  考虑复合映射

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \ G\times G \longrightarrow G \\ g &\longmapsto (g, g^{-1}) \longmapsto e. \end{aligned}$$

  在 e 处计算 φ 的微分, 由链式法则有

$$0 = dm_{(e,e)}(id_*X, i_*X) = X + i_*X,$$

  从而 $i_*X = -X$.
- 当 G 是 Abel 群时, 容易验证取逆映射是群同态, 可参见近世代数第十周作业 Ex2.4.
- 由条件 G 是 Abel 李群, 此时取逆映射 i 是光滑的群同态, 即李群同态, 从而 i_* 是李代数同态, 那么

$$[X,Y] = [-X,-Y] = [i_*X, i_*Y] = i_*([X,Y]) = -[X,Y],$$

  当域特征不为 2 时, 便有 $[X,Y]=0$.

(c)

$\square$

参考文献

[1] 高等线性代数学黎景辉白正简周国晖