

Analysis

Teil I

Folgen und Reihen

1 Konvergenz von Folgen

Def. Eine Folge a_n *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls
 $\forall \epsilon > 0 \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \forall n \geq N: |a_n - a| < \epsilon.$

Def. Eine Folge a_n *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N}^* : a_n \notin]l - \epsilon, l + \epsilon[\}$ endlich ist.

Thm. (Monotone) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n \geq 1}$ mit Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n : n \geq 1\}.$

Thm. (Cauchy) Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist genau dann konvergent, falls $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$ so dass $|a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$

2 Konvergenz von Reihen

Thm. (Cauchy) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls. $\forall \epsilon > 0 \exists N \geq 1$ mit $\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$

Thm. (Ratio) Sei $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geq 1.$
Falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert die Reihe absolut. Falls $\liminf_{n \rightarrow \infty} \square > 1$ divergiert die Reihe.

Thm. (Root) Falls

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Falls $\square > 1$, dann divergiert die Reihe.

3 Tricks

Lem. (Bernouilli) $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1.$