1 Grundlagen

S 1.1.2 $\mathbb{R}$ ist ein kommutativer, angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist

1.1 Infimum und Supremum

D 1.1.12 Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

1) $c \in \mathbb{R}$ ist **obere Schranke** if $\forall a \in A : a \leqslant c$
2) $c \in \mathbb{R}$ ist **untere Schranke** if $\forall a \in A : c \leqslant a$
3) $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Maximum** von A if $m \in A$ und m eine obere Schranke von A ist.
4) $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Minimum** von A if $m \in A$ und m eine untere Schranke von A ist.

S 1.1.15 . Sei $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ und beschränkt

1) Kleinste obere Schranke: $\sup A$ (**Supremum**)
2) Grösste untere Schranke: $\inf A$ (**Infimum**)

Eigenschaften von Supremum und Infimum

- $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
- $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
- $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

2 Folgen und Reihen

D 2.1.1 Eine **Folge** a_n in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

2.1 Konvergenz von Folgen

D 2.1.4 Eine Folge a_n heisst **konvergent**, falls es $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\}$ endlich ist.

L 2.1.3 Dieses a ist **eindeutig**.

L 2.1.5 Jede konvergente Folge ist **beschränkt**.
Achtung: a_n beschränkt $\not\Longrightarrow$ a_n konvergent!

L 2.1.6 Eine Folge a_n **konvergiert** gegen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 0$ so dass $\forall n \geq N$

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

S 2.1.8 Seien a_n und b_n konvergente Folgen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

1) Dann ist $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2) Dann ist $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3) Dann ist $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ $(b_n \neq 0\ \forall n \geq 0)$
4) $\exists K \geq 0\ \forall n \geq K\ a_n \leq b_n \implies a \leq b$

S Sandwich Satz Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

$$a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall n \geq K \implies \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

Die Folge a_n ist divergent, falls sie nicht konvergiert.

2.2 Weierstrass und Anwendungen

D 2.2.1 Falls a_n ist

1) **monoton wachsend** falls $a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \geq 0$
2) **monoton fallend** falls $a_n \geq a_{n+1}\ \forall n \geq 0$

S 2.2.2 (Weierstrass) Genau dann, wenn a_n

1) *monoton wachsend* und *nach oben beschränkt* ist, dann **konvergiert** a_n mit Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\ n \geq 0\}$$
2) *monoton fallend* und *nach unten beschränkt* ist, dann **konvergiert** a_n mit Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\ n \geq 0\}$$

B 2.2.3 $\lim_{n\to\infty} n^a q^n = 0,\ 0 \leq q < 1,\ a \in \mathbb{Z}$

B 2.2.5 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

B 2.2.6 $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

L 2.2.7 (Bernoulli Ungleichung)

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + n \cdot x\quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$$

2.3 Limes superior und inferior

D 2.3.0

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n, \quad (b_n = \inf\{a_k : k \geq n\})$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n, \quad (c_n = \sup\{a_k : k \geq n\})$$

L 2.4.1 Die Folge a_n konvergiert genau dann, falls

1. a_n beschränkt ist
2. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$

2.4 Cauchy Kriterium

S 2.4.2 (Cauchy Kriterium) Die Folge a_n ist genau dann konvergent und heisst Cauchy-Folge

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 0 \text{ so dass } |a_n - a_m| < \epsilon\quad \forall n, m \geq N$$

2.5 Bolzano-Weierstrass

D 2.5.1 Ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$

1) $[a, b],\ a \leq b, a, b \in \mathbb{R}$
2) $[a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}$
3) $]-\infty, a],\ a \in \mathbb{R}$
4) $]-\infty, +\infty] = \mathbb{R}$

Die Länge eines $\mathcal{L}(I)$ ist definiert als:

- $\mathcal{L}(I) = b - a$ im ersten Fall
- $\mathcal{L}(I) = \infty$ in (2), (3), (4)

S 2.5.5 (Cauchy-Cantor) Sei $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots I_n \subseteq \cdots$ eine Folge abgeschlossener Intervall mit $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$. Dann gilt

$$\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(I_n) = 0 \implies \left|\bigcap_{n\geq 1} I_n\right| = 1$$

S 2.5.6 $\mathbb{R}$ ist nicht **abzählbar**.

D 2.5.7 b_n ist eine Teilfoge von a_n, falls

$$b_n = a_{l(n)},\quad l : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ und } l(n) > l(n+1)$$

S 2.5.9 (Bolzano-Weierstrass) Für jede beschränkte Folge existiert eine konvergente Teilfolge.

2.6 Folgen in R^d und C

D 2.6.1 Eine **Folge** a_n in $\mathbf{R^d}$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{R^d}$$

D 2.6.2 Eine Folge a_n in $\mathbf{R^d}$ konvergiert gegen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 0$ so dass $\forall n \geq N$

$$\|a_n - a\| < \epsilon.$$

2.7 Reihen

D 2.7.0 Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$S_n := a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

D 2.7.1 Die Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist **konvergent**, falls die Folge der Partialsummen konvergiert.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

B 2.7.2 (Geometrische Reihe) Sei $|q| < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

S 2.7.4 Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

S 2.7.5 (Cauchy Kriterium) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 0 \text{ mit } \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon\quad \forall m \geq n \geq N$$

Bem: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

S 2.7.6 Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, falls die Folge $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ nach oben beschränkt ist

K 2.7.7 (Vergleichssatz) Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit: $0 \leq a_k \leq b_k\quad \forall k \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

S 2.7.9 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**,

$$\text{falls } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert}$$

S 2.7.10 Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und es gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

B $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{-\pi^2}{12}$

S 2.7.12 Leibniz Sei a_n monoton fallend mit $a_n \geq 0\ \forall n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{ und } a_1 - 1_2 \leq S \leq a_1$$

D 2.7.14 Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a'_n$ ist eine Umordung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$, falls es eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ mit $a'_n = a_{\phi(n)}$

S 2.7.16 Dirichlet Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.

S Riemann Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe, dann gibt es zu jedem $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen A konvergiert.

S Quotientenkriterium Sei $a_n \neq 0\ \forall n \geq 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

B exp(z):= $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

B $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert für $s > 1$

B $\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$

S Wurzelkriterium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

K 2.7.21 Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$

- konvergiert für alle $|x - x_0| < \rho$
- divergiert für alle $|x - x_0| > \rho$

$$\rho = \begin{cases} \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} & \text{für } n!, \alpha^n \text{ oder Polynom} \\ \frac{1}{\limsup\limits_{c\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{für } (b_n)^n \end{cases}$$

D 2.7.22 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist eine lineare Anordnung der Doppelreihe $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$, falls es eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt mit $b_k = a_{\epsilon(k)}$.

S 2.7.23 Falls $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B, \quad \forall m \geq 0$

$$\text{dann konvergiert } S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0$$

$$\text{dann konvergiert } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

$$\text{und es gilt } \sum_{i=0}^{m} S_i = \sum_{j=0}^{m} U_j$$

S 2.7.24 Das **Cauchy Produkt** der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots$$

S 2.7.26 Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ absolut konvergieren, so knovergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

S 2.7.28 Sei $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge, für die gilt:

(1) $f(j) := \lim_{n\to\infty} f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$

(2) Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{N} \to [0, \infty[$, so dass

(2.1) $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0,\ \forall n \geq 0$

(2.2) $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert

Dann folgt $\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$

K 2.7.29 Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

---

3 Stetige Funktionen

3.1 Reelwertige Funktionen

D 3.1.1 Sei $f \in \mathbb{R}^D$

(1) f ist **nach oben beschränkt**, falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist.

(2) f ist **nach unten beschränkt**, falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach unten ebschränkt ist.

(3) f ist **beschränkt**, falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.

D 3.1.2 Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist

(1) **monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D$
$$x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$$

(2) **streng monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D$
$$x < y \implies f(x) < f(y)$$

(3) **monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D$
$$x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$$

(4) **streng monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D$
$$x < y \implies f(x) > f(y)$$

(5) **monoton**, falls f monoton wachsend oder monoton fallend

(6) **streng monoton**, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

3.2 Stetigkeit an einem Punkt

D 3.2.1 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x_0}$ stetig, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

D 3.2.2 Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

S 3.2.4 Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in x0 stetig, falls für jede Folge a_n

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

K 3.2.5 Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ beides Funktionen, welche in x_0 sind, dann gilt

1) $f + g,\ \lambda \cdot f,\ f \cdot g$ stetig in x_0

2) falls $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ stetig in x_0

D 3.2.6 Polynomiale Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$$

wobei $a_n, \cdots, a_0 \in \mathbb{R}$ und Grad ist n, falls $a_n \neq 0$

K 2.3.7 $P(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

3.3 Zwischenwertsatz

S 3.3.1 $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in I$
Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$.

K 3.3.2 Ein Polynom n-ten grades mit n ungerade, hat mindestens eine Nullstelle in n.

3.4 Min-Max Satz

D 3.4.2 $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$

- $D = [a, b], a \leq b$ ist in dieser Form kompakt
- $max(f, g)(x) := max(f(x), g(x)) \quad \forall x \in D$
- $min(f, g)(x) := min(f(x), g(x)) \quad \forall x \in D$
- $|f|(x) := |f(x)|$

L 3.4.3 Sei $x_0 \in D$ und f, g stetig in x_0.
Dann sind $|f|$, $max(f, g), min(f, g)$ stetig in x_0

L 3.4.4 $\{x_n : n \geq 1\} \subset [a, b] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n \in [a, b]$

S 3.4.5 $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann $\exists u, v \in I$ so dass $f(u) \leq f(x) \leq (v)\ \forall x \in I$(f ist beschränkt)

3.5 Umkehrabbildungen

S 3.5.1 $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D_1, f : D_1 \to D_2$ in x_0 stetig, $f(x_0) \in D_2$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ stetig

$$\implies g \circ f : D_1 \to \mathbb{R} \text{ stetig in } x_0$$

S 3.5.3 $f \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton, dann ist $J := f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1} : J \to I$ stetig, streng monoton wachsend

---

3.6 Exponentialfunktion

S 3.6.1 exp : $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

K 3.6.2 $\exp(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

K 3.6.3 $\exp(z) > \exp(y)\ \forall z > y$

K 3.6.4 $\exp(x) \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

K 3.6.5 $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.
Es gilt $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0, +\infty[$

K 3.6.6 $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$

1. Für $a > 0$ ist $f(x) = x^a$ eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion
2. Für $a < 0$ ist $f(x) = x^a$ eine stetige, streng monoton fallende Bijektion
3. $\ln(x^a) = a \ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R},\ \forall x > 0$
4. $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall x > 0$
5. $(x^a)^b = x^{a \cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall x > 0$

3.7 Konvergenz v. Funktionenfolgen

D 3.7.1 f_n **konvergiert punktweise** gegen $f : D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

D 3.7.3 $f_n : D \to \mathbb{R}$ **konvergiert gleichmässig** in D gegen $f : D \to R$, falls $\forall \epsilon \geq 0,\ \exists N > 1$, so dass

$$\forall n \geq N, \quad \forall x \in D : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

S 3.7.4 Falls $f_n : D \to \mathbb{R}$ gegen $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert, dann ist f stetig.

S 3.7.5 $f_n : D \to \mathbb{R}$ ist **gleichmässig konvergent**, falls für alle x $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert und f_n gleichmässig gegen f konvergiert.

K 3.7.6 $f_n : D \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmässig in D, falls $\forall \epsilon \geq 0,\ \exists N > 1$, so dass

$$\forall n, m \geq N \text{ und } \forall x \in D\, |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

D 3.7.8 Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ **konvergiert gleichmässig**, falls die durch $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ gegebene Funktionenfolge gleichmässig konvergiert

D 3.7.9 $f_n : D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, wobei $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert.
Dann konvergiert die Reihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, wobei $f(x)$ eine stetige Funktion ist.

3.8 Trigonometrische Funktionen

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

S 3.8.1 $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig

S 3.8.2 Eigenschaften von sin und cos

1. $\cos z = \cos(-z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$
2. $\exp(i \cdot z) = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$
3. $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$
4. $\sin(z+w) = \sin(z) \cdot \cos(w) + \sin(w) \cdot \cos(z)$
   $\cos(z+w) = \cos(z) \cdot \cos(w) - \sin(w) \cdot \sin(z)$
5. $\sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\cos(z) = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

K 3.8.3
$\sin(2 \cdot z) = 2\sin(z) \cdot \cos(z)$
$\cos(2 \cdot z) = \cos(z)^2 \cdot \sin(z)^2$

4 Differenzierbare Funktionen

D 4.1.1 f ist **in x_0 differenzierbar**, falls

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert}$$

Bem: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

4.1 Die Ableitung

S 4.1.3 $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt

1. f ist in x_0 differenzierbar
2. Es git $c \in \mathbb{R}$ und $r : D \to \mathbb{R}$ mit
   $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0)$
   $r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0

Dann ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

S 4.1.4 $f : D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar, genau dann, wenn $\phi : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 ist und

$f(x) = f(x_0) + \phi(x) \cdot (x - x_0)$, wobei $\phi(x_0) = f'(x_0)$

K 4.1.5 f differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0

D 4.1.7 $f : D \to \mathbb{R}$ ist in D differenzierbar, falls $\forall x_0 \in D$, f in x_0 differenzierbar ist

S 4.1.9 Sei $f, g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar

1. $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und
   $$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
2. $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und
   $$(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$
3. Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar
   $$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

S 4.1.11 $f : D \to E$ in x_0 und $g : E \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ differenzierbar, so ist $(g \circ f)$ in x_0 differenzierbar

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

K 4.1.12 $f : D \to E$ bijektiv

$$\implies f^{-1} \text{ differenzierbar, } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

4.2 Erste Ableitung

D 4.2.1 $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

1. f hat lokales Maximum in x_0, falls $\delta > 0$ gibt
   $$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_o - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$
2. f hat lokales Minimum in x_0, falls $\delta > 0$ gibt
   $$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in]x_o - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$
3. Maximums und Minimums sind Extremums

S 4.2.2 $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, f in x_0 differenzierbar

1. Falls $f'(x) > 0$ gibt es $\delta > 0$
   $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$
   $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$
2. Falls $f'(x) < 0$ gibt es $\delta > 0$
   $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$
   $f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$
3. x_0 ist lokales Extremum $\implies f'(x) = 0$

S 4.2.3 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $]a,b[$ differenzierbar, so gibt es $\xi \in]a,b[$ mit

$$f'(\xi) = 0$$

S 4.2.5 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $]a,b[$ differenzierbar, so gibt es $\xi \in]a,b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

K 4.2.5 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $]a,b[$ differenzierbar und $\forall \xi \in]a,b[$

1. $f'(\xi) = 0, \Rightarrow f$ konstant
2. $f'(\xi) \geq 0, \Rightarrow f$ monoton wachsend
3. $f'(\xi) > 0, \Rightarrow f$ streng monoton wachsend
4. $f'(\xi) \leq 0, \Rightarrow f$ monoton fallend
5. $f'(\xi) < 0, \Rightarrow f$ streng monoton fallend
6. $f'(\xi) = g'(\xi), \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c$
7. $|f'(\xi)| \leq M \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq M\,|x_1 - x_2|$

S 4.2.9 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in $]a,b[$, falls $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$ folgt

$$g(a) \neq g(b) \text{ und } \frac{f(b) - f(a}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

S 4.2.10 l'Hospital $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0 \ \wedge \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

$$\implies \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

Bem: Gilt auch für $b = +\infty, \lambda = +\infty, x \to a^+$

D 4.2.13 $f : I \to \mathbb{R}$, $x \leq y$, bzw. $x < y$

1. f ist **konvex** falls $\forall x, y \in \wedge \forall \lambda \in [0,1]$
   $$f(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) \leq \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) \cdot f(y)$$
2. f ist **streng konvex** falls $\forall x, y \in \wedge \forall \lambda \in]0,1[$
   $$f(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) < \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) \cdot f(y)$$

Bem: $f(x)$ ist **konkav**, falls $-f(x)$ konvex ist

L 4.2.15 f ist konvex $\Leftrightarrow$ für alle $x_0 < x < x_1 \in I$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Bem: f streng konvex $\Leftrightarrow$ strikte Ungleichung gilt

S 4.2.16 Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar

f (streng) konvex $\Leftrightarrow f'(x)$ (streng) monoton wachs.

K 4.2.17 $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar

$$f \text{ konvex} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

$$f \text{ streng konvex} \Leftrightarrow f''(x) > 0$$

4.3 Höhere Ableitungen

D 4.3.1 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar

1. f ist **n-mal differenzierbar**, falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$
2. f ist **n-mal stetig differenzierbar**, falls f n-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ stetig ist
3. f ist **glatt**, falls $\forall n \geq 1$ f n-mal differenzierbar

S 4.3.3 $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar

1. $f + g$ ist n-mal differenzierbar
   $$(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$
2. $f \cdot g$ ist n-mal differenzierbar
   $$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

S 4.3.5 $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar

Falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$, $\frac{f}{g}$ ist n-mal differenzierbar

S 4.3.6 $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}(x)(g^{(k)} \circ f)(x)$$

Bem: $A_{n,k}$ ist Polynom in $f', f^{(2)}, \cdots, f^{(n+1-k)}$

4.4 Potenzreihen & Taylor Approx.

S 4.4.1 $f_n :]a,b[\to \mathbb{R}$, wobei f_n einmal stetig differenzierbar ist, f_n und f_n' gleichmässig konvergieren. Dann ist f stetig differenzierbar.

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \text{ und } \lim_{n \to \infty} f_n' = f'$$

S 4.4.2 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ ist differenzierbar}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k$$

K 4.4.3 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist glatt

S 4.4.5 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar
Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\xi \in]a, x[$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

K 4.4.6 $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar
Sei $c < a < d$, so folgt für alle $x \in [c,d]$ $x \leq \xi \leq a$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

K 4.4.7 $n \geq 0, a < x_0 < b$ und $f : D \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar
Annahme: $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$

1. Falls n gerade und x_0 lokale Extremalstelle folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$
2. Falls n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, so ist x_0 eine strikte lokale Minimalstelle
3. Falls n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, so ist x_0 eine strikte lokale Maximalstelle

K 4.4.8 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $a < x_0 < b$. Annahme $f'(x_0) = 0$.

1. Falls $f^{(2)}(x_0) > 0$ so folgt daraus, dass x_0 strikte lokale Minimalstelle ist.
2. Falls $f^{(2)}(x_0) < 0$ so folgt daraus, dass x_0 strikte lokale Maximalstelle ist.
3. Falls $f^{(2)}(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, so ist x_0 ein Sattelpunkt

Bem: Falls $f^{(2)}(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, so ist x_0 ein Wendepunkt (hier ist $f'(x)$ beliebig)

5 Beweise

5.1 Grundlagen

Beweis: $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$
Es gilt $a + b \leq \sup A + b \leq \sup A + \sup B$
$\implies \sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$

Beweis: $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$
Es gilt $\forall \epsilon > 0 \quad \sup A \leq a - \frac{\epsilon}{2}$ und $\sup B \leq b - \frac{\epsilon}{2}$
$\implies \sup A + \sup B - \epsilon \leq a + b \leq \sup(A+B)$

5.2 Folgen und Reihen

S Sandwich Satz Wir nehmen an, dass

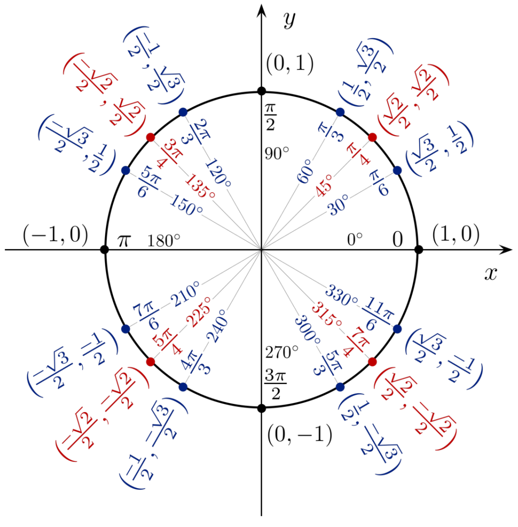
1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$
2. $a_n \leq c_n \leq b_n \; \forall n \geq K$

Es gilt $|a_n - \alpha| < \epsilon \implies -\epsilon < a_n - \alpha$
Es gilt $|b_n - \alpha| < \epsilon \implies +\epsilon > b_n - \alpha$
$\implies -\epsilon < a_n - \alpha \leq c_n - \alpha \leq b_n - \alpha < \epsilon$
$\implies |c_n - \alpha| < \epsilon \implies \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

6 Random, but useful stuff

6.1 Trigonometrie

6.1.1 Unit Circle $(\sin(x), \cos(x))$



6.1.2 Quadratic Formula for $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b + \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$