1 Random Stuff

2 Folgen und Reihen

D 2.1.1 Eine **Folge** a_n ist eine Abbildung

$$a : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{R}$$

2.1 Konvergenz von Folgen

D 2.1.4 Eine Folge a_n heisst **konvergent**, falls es $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbf{N}^* : a_n \notin]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\}$ endlich ist.
L 2.1.3 Dieses a ist **eindeutig**.

L 2.1.5 Jede konvergente Folge ist **beschränkt**.
Achtung: a_n beschränkt $\not\Longrightarrow$ a_n konvergent!

L 2.1.6 Eine Folge a_n **konvergiert** gegen $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1$ so dass $\forall n \geq N$

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

T 2.1.8 Seien a_n und b_n konvergente Folgen mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

1) Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2) Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3) Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b})$ $(b_n \neq 0\ \forall n \geq 1)$
4) $\exists K \geq 1\ \forall n \geq K\ a_n \leq b_n \implies a \leq b$

2.2 Der Satz von Weierstrass

T Monotone Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \geqslant 1\}$.
T Cauchy Die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ ist genau dann konvergent, falls $\forall \varepsilon > 0\quad \exists N \geqslant 1$ so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geqslant N$
T Sandwich Die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert zu a, falls $(b_n)_{n\geqslant 1}, (c_n)_{n\geqslant 1}$ existieren mit Grenzwert a und $\forall n \geq 1 : b_n \leq a_n \leq c_n$.

2.3 Konvergenz von Reihen

D Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut ($\Rightarrow$ konvergent), falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ kovergiert.

T Cauchy Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geqslant 1$ mit $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \quad \forall m \geqslant n \geqslant N$
T Ratio Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geqslant 1$. Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert die Reihe absolut. Falls $\liminf\limits_{n\to\infty} \square > 1$ divergiert die Reihe.
T Root Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Falls $\square > 1$, dann divergiert die Reihe.
T Alternating Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton fallend mit $a_n \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt $a_1 - a_2 \leqslant S \leqslant a_1$.

2.4 Andere Aussagen

L (Bernouilli) $(1+x)^n \geqslant 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$.
T Teilfolge Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.
T Vektorfolge $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$ genau dann wenn $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant d$.

Teil I
Stetige Funktionen

D Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

3 Stetigkeit an einem Punkt

D Epsilon Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ stetig, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

.

T Sequence Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in $\boldsymbol{x}_0$ stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in D

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

gilt.
T Sidewise Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ stetig, falls

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

gilt.