1 Random Stuff

2 Folgen und Reihen

D 2.1.1 Eine **Folge** a_n ist eine Abbildung

$$a : \mathbf{N}^* \longrightarrow \mathbf{R}$$

2.1 Konvergenz von Folgen

D 2.1.4 Eine Folge a_n heisst **konvergent**, falls es $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbf{N}^* : a_n \notin]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\}$ endlich ist.

L 2.1.3 Dieses a ist **eindeutig**.

L 2.1.5 Jede konvergente Folge ist **beschränkt**. **Achtung:** a_n beschränkt $\not\Longrightarrow$ a_n konvergent!

L 2.1.6 Eine Folge a_n **konvergiert** gegen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1$ so dass $\forall n \geq N$

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

T 2.1.8 Seien a_n und b_n konvergente Folgen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

1) Dann ist $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2) Dann ist $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3) Dann ist $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ $(b_n \neq 0\ \forall n \geq 1)$
4) $\exists K \geq 1\ \forall n \geq K\ a_n \leq b_n \implies a \leq b$

T Sandwich Satz Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

$$a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall n \geq K \implies \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

Die Folge a_n ist divergent, falls sie nicht konvergiert.

2.2 Weierstrass und Anwendungen

D 2.2.1 Die Folge a_n ist

1) **monoton wachsend** falls $a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \geq 1$
2) **monoton fallend** falls $a_n \geq a_{n+1}\ \forall n \geq 1$

T 2.2.2 (Weierstrass) Falls die Folge a_n

1) *monoton wachsend* und *nach oben beschränkt* ist, dann **konvergiert** a_n mit Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\ n \geq 1\}$$
2) *monoton fallend* und *nach unten beschränkt* ist, dann **konvergiert** a_n mit Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\ n \geq 1\}$$

B 2.2.3 $\lim_{n\to\infty} n^a q^n = 0,\ 0 \leq q \leq 1,\ a \in \mathbb{Z}$

B 2.2.5 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

L 2.2.7 (Bernoulli Ungleichung)

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$$

2.3 Limes superior und inferior

D 2.3.0

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n, \quad (b_n = \inf\{a_k : k \geq n\})$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n, \quad (c_n = \sup\{a_k : k \geq n\})$$

L 2.4.1 Die Folge a_n konvergiert genau dann, falls

1. a_n beschränkt ist
2. $\liminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$

2.4 Cauchy Kriterium

T 2.4.2 (Cauchy Kriterium) Die Folge a_n ist genau dann konvergent

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 1 \text{ so dass } |a_n - a_m| \quad \forall n, m \geq N$$

2.5 Bolzano-Weierstrass

D 2.5.1 Ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$

1) $[a, b],\ a \leq b, a, b \in \mathbb{R}$
2) $[a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}$
3) $]-\infty, a],\ a \in \mathbb{R}$
4) $]-\infty, +\infty] = \mathbb{R}$

2.6 Konvergenz von Reihen

D Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut ($\Rightarrow$ konvergent), falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ kovergiert.

T Cauchy Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \geqslant 1$ mit $\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \varepsilon \quad \forall m \geqslant n \geqslant N$

T Ratio Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geqslant 1$. Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert die Reihe absolut. Falls $\liminf_{n\to\infty} \square > 1$ divergiert die Reihe.

T Root Falls

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Falls $\square > 1$, dann divergiert die Reihe.

T Alternating Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ monoton fallend mit $a_n \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant 1$ und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt $a_1 - a_2 \leqslant S \leqslant a_1$.

2.7 Andere Aussagen

L (Bernouilli) $(1+x)^n \geqslant 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$.

T Teilfolge Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

T Vektorfolge $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ genau dann wenn $\lim_{n\to\infty} a_{n,j} = b_j \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant d$.

Teil I
Stetige Funktionen

D Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

3 Stetigkeit an einem Punkt

D Epsilon Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ stetig, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

.

T Sequence Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in $\boldsymbol{x}_0$ stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in D

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

gilt.

T Sidewise Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ stetig, falls

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

gilt.