Analysis

Teil I
Folgen und Reihen

1 Konvergenz von Folgen

Def. (1) Eine Folge a_n *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}, \; \forall n \geq N\colon \; |a_n - a| < \epsilon.$$

Für $\mathbb{R}^d$ muss gelten $\|a_n - a\| < \epsilon$.

Def. (2) Eine Folge a_n *konvergiert* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es $l \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbf{N}^* : a_n \notin]\, l - \varepsilon, l + \varepsilon[\}$ endlich ist.

Thm. (Monotone) Sei $(a_n)_{n \geqslant 1}$ monoton fallend und nach unten beschränkt. Dann konvergiert $(a_n)_{n \geqslant 1}$ mit Grenzwert $\lim_{n \to \infty} a_n = \inf \{a_n : n \geqslant 1\}$.

Thm. (Cauchy) Die Folge $(a_n)_{n \geqslant 1}$ ist genau dann konvergent, falls $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geqslant 1$ so dass $|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geqslant N$

Thm. (Sandwich) Die Folge $(a_n)_{n \geqslant 1}$ konvergiert zu a, falls $(b_n)_{n \geqslant 1}, (c_n)_{n \geqslant 1}$ existieren mit Grenzwert a und $\forall n \geq 1 : b_n \leq a_n \leq c_n$.

2 Konvergenz von Reihen

Def. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut ($\Rightarrow$ konvergent), falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ kovergiert.

Thm. (Cauchy) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geqslant 1$ mit $\left| \sum\limits_{k=n}^{m} a_k \right| < \varepsilon \quad \forall m \geqslant n \geqslant N$

Thm. (Ratio) Sei $(a_n)_{n \geqslant 1}$ mit $a_n \neq 0 \quad \forall n \geqslant 1$. Falls

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert die Reihe absolut. Falls $\liminf\limits_{n \to \infty} \square > 1$ divergiert die Reihe.

Thm. (Root) Falls

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut. Falls $\square > 1$, dann divergiert die Reihe.

Thm. (Alternating) Sei $(a_n)_{n \geqslant 1}$ monoton fallend mit $a_n \geqslant 0 \quad \forall n \geqslant 1$ und $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$$

und es gilt $a_1 - a_2 \leqslant S \leqslant a_1$.

3 Andere Aussagen

Lem. (Bernouilli) $(1 + x)^n \geqslant 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$.

Thm. (Teilfolge) Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Thm. (Vektorfolge) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = b$ genau dann wenn $\lim\limits_{n \to \infty} a_{n,j} = b_j \quad \forall 1 \leqslant j \leqslant d$.

Teil II
Stetige Funktionen

Def. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

4 Stetigkeit an einem Punkt

Def. (Epsilon) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ stetig, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

.

Thm. (Sequence) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in $\boldsymbol{x}_0$ stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n \geqslant 1}$ in D

$$\lim_{n \to \infty} a_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0)$$

gilt.

Thm. (Sidewise) Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ stetig, falls

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

gilt.