1 Grundlagen

S 1.1.2 $\mathbb{R}$ ist ein kommutativer, angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist

1.1 Infimum und Supremum

D 1.1.12 Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

1) $c \in \mathbb{R}$ ist **obere Schranke** if $\forall a \in A : a \leqslant c$
2) $c \in \mathbb{R}$ ist **untere Schranke** if $\forall a \in A : c \leqslant a$
3) $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Maximum** von A if $m \in A$ und m eine obere Schranke von A ist.
4) $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Minimum** von A if $m \in A$ und m eine untere Schranke von A ist.

S 1.1.15 . Sei $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ und beschränkt

1) Kleinste obere Schranke: $\sup A$ (**Supremum**)
2) Grösste untere Schranke: $\inf A$ (**Infimum**)

Eigenschaften von Supremum und Infimum

- $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
- $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
- $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

2 Folgen und Reihen

D 2.1.1 Eine **Folge** a_n in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

2.1 Konvergenz von Folgen

D 2.1.4 Eine Folge a_n heisst **konvergent**, falls es $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\}$ endlich ist.

L 2.1.3 Dieses a ist **eindeutig**.

L 2.1.5 Jede konvergente Folge ist **beschränkt**.
Achtung: a_n beschränkt $\not\Longrightarrow$ a_n konvergent!

L 2.1.6 Eine Folge a_n **konvergiert** gegen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 0$ so dass $\forall n \geq N$

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

S 2.1.8 Seien a_n und b_n konvergente Folgen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

1) Dann ist $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2) Dann ist $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3) Dann ist $\lim_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ $(b_n \neq 0\ \forall n \geq 0)$
4) $\exists K \geq 0\ \forall n \geq K\ a_n \leq b_n \implies a \leq b$

S Sandwich Satz Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

$$a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall n \geq K \implies \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

Die Folge a_n ist divergent, falls sie nicht konvergiert.

2.2 Weierstrass und Anwendungen

D 2.2.1 Falls a_n ist

1) **monoton wachsend** falls $a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \geq 0$
2) **monoton fallend** falls $a_n \geq a_{n+1}\ \forall n \geq 0$

S 2.2.2 (Weierstrass) Genau dann, wenn a_n

1) *monoton wachsend* und *nach oben beschränkt* ist, dann **konvergiert** a_n mit Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\ n \geq 0\}$$
2) *monoton fallend* und *nach unten beschränkt* ist, dann **konvergiert** a_n mit Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\ n \geq 0\}$$

L 2.2.7 (Bernoulli Ungleichung)

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$$

2.3 Limes superior und inferior

D 2.3.0

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n, \quad (b_n = \inf\{a_k : k \geq n\})$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n, \quad (c_n = \sup\{a_k : k \geq n\})$$

L 2.4.1 Die Folge a_n konvergiert genau dann, falls

1. a_n beschränkt ist
2. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$

2.4 Cauchy Kriterium

S 2.4.2 (Cauchy Kriterium) Die Folge a_n ist genau dann konvergent und heisst Cauchy-Folge

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 0 \text{ so dass } |a_n - a_m| < \epsilon \quad \forall n, m \geq N$$

2.5 Bolzano-Weierstrass

D 2.5.1 Ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$

1) $[a, b],\ a \leq b, a, b \in \mathbb{R}$
2) $[a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}$
3) $]-\infty, a],\ a \in \mathbb{R}$
4) $]-\infty, +\infty] = \mathbb{R}$

Die Länge eines $\mathcal{L}(I)$ ist definiert als:

- $\mathcal{L}(I) = b - a$ im ersten Fall
- $\mathcal{L}(I) = \infty$ in (2), (3), (4)

S 2.5.5 (Cauchy-Cantor)
Sei $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots I_n \subseteq \cdots$ eine Folge abgeschlossener Intervall mit $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$. Dann gilt

$$\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(I_n) = 0 \implies \left|\bigcap_{n\geq 1} I_n\right| = 1$$

S 2.5.6 $\mathbb{R}$ ist nicht **abzählbar**.

D 2.5.7 b_n ist eine Teilfoge von a_n, falls

$$b_n = a_{l(n)}, \quad l : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ und } l(n) > l(n+1)$$

S 2.5.9 (Bolzano-Weierstrass) Für jede beschränkte Folge existiert eine konvergente Teilfolge.

2.6 Folgen in R^d und C

D 2.6.1 Eine **Folge** a_n in $\mathbf{R^d}$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{R^d}$$

D 2.6.2 Eine Folge a_n in $\mathbf{R^d}$ konvergiert gegen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 0$ so dass $\forall n \geq N$

$$\|a_n - a\| < \epsilon.$$

2.7 Reihen

D 2.7.0 Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$S_n := a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

D 2.7.1 Die Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist **konvergent**, falls die Folge der Partialsummen konvergiert.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

S 2.7.4 Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k$
(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

S 2.7.5 (Cauchy Kriterium) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 0 \text{ mit } \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

Bem: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

S 2.7.6 Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, falls die Folge $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ nach oben beschränkt ist

K 2.7.7 (Vergleichssatz) Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Reihen mit: $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

S 2.7.9 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**,

$$\text{falls } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert}$$

S 2.7.10 Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und es gilt:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

S 2.7.12 Leibniz Sei a_n monoton fallend mit $a_n \geq 0\ \forall n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{ und } a_1 - a_2 \leq S \leq a_1$$

D 2.7.14 Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a'_n$ ist eine Umordung der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$, falls es eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ mit $a'_n = a_{\phi(n)}$

S 2.7.16 Dirichlet Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Reihe und hat denselben Grenzwert.

S Riemann Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe, dann gibt es zu jedem $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen A konvergiert.

S Quotientenkriterium Sei $a_n \neq 0\ \forall n \geq 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

S Wurzelkriterium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

K 2.7.21 Die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x-x_0)^k$

- konvergiert für alle $|x-x_0|<\rho$
- divergiert für alle $|x-x_0|>\rho$

$$\rho = \begin{cases} \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} & \text{für } n!, \alpha^n \text{ oder Polynom} \\ \frac{1}{\limsup\limits_{c\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{für } (b_n)^n \end{cases}$$

D 2.7.22 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist eine lineare Anordnung der Doppelreihe $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$, falls es eine Bijektion $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ gibt mit $b_k = a_{\epsilon(k)}$.

S 2.7.23 Falls $\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B, \quad \forall m \geq 0$

$$\text{dann konvergiert } S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0$$

$$\text{dann konvergiert } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

$$\text{und es gilt } \sum_{i=0}^{m} S_i = \sum_{j=0}^{m} U_j$$

S 2.7.24 Das **Cauchy Produkt** der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j\right) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \cdots$$

S 2.7.26 Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ absolut konvergieren, so knovergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j}b_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j\right)$$

S 2.7.28 Sei $f_n: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge, für die gilt:

(1) $f(j) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(j)$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$

(2) Es gibt eine Funktion $g: \mathbb{N} \to [0,\infty[$, so dass

(2.1) $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0,\ \forall n \geq 0$

(2.2) $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert

Dann folgt $\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$

K 2.7.29 Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

3 Stetige Funktionen

3.1 Reelwertige Funktionen

D 3.1.1 Sei $f \in \mathbb{R}^D$

(1) f ist **nach oben beschränkt**, falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist.

(2) f ist **nach unten beschränkt**, falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach unten ebschränkt ist.

(3) f ist **beschränkt**, falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.

D 3.1.2 Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist

(1) **monoton wachsend**, falls $\forall x,y \in D$

$$x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

(2) **streng monoton wachsend**, falls $\forall x,y \in D$

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

(3) **monoton fallend**, falls $\forall x,y \in D$

$$x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

(4) **streng monoton fallend**, falls $\forall x,y \in D$

$$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

(5) **monoton**, falls f monoton wachsend oder monoton fallend

(6) **streng monoton**, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

3.2 Stetigkeit an einem Punkt

D 3.2.1 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x_0}$ stetig, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D$

$$|x-x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

D 3.2.2 Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

S 3.2.4 Die Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in x0 stetig, falls für jede Folge a_n

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

K 3.2.5 Seien $f: D \to \mathbb{R}$ und $g: D \to \mathbb{R}$ beides Funktionen, welche in x_0 sind, dann gilt

1) $f+g,\ \lambda\cdot f,\ f\cdot g$ stetig in x_0

2) falls $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ stetig in x_0

D 3.2.6 Polynomiale Funktion $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$P(x) = a_nx^n + \cdots + a_0$$

wobei $a_n, \cdots, a_0 \in \mathbb{R}$ und Grad ist n, falls $a_n \neq 0$

K 2.3.7 $P(x)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig

3.3 Zwischenwertsatz

S 3.3.1 $I \subset \mathbb{R},\ f: I \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in I$

Für jedes c zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gibt es ein z zwischen a und b mit $f(z) = c$.

K 3.3.2 Ein Polynom n-ten grades mit n ungerade, hat mindestens eine Nullstelle in n.

3.4 Min-Max Satz

D 3.4.2 $D \subset \mathbb{R}, f: D \to \mathbb{R},\ g: D \to \mathbb{R}$

- $D = [a,b], a \leq b$ ist in dieser Form kompakt
- $max(f,g)(x) := max(f(x), g(x)) \quad \forall x \in D$
- $min(f,g)(x) := min(f(x), g(x)) \quad \forall x \in D$
- $|f|(x) := |f(x)|$

L 3.4.3 Sei $x_0 \in D$ und f, g stetig in x_0.
Dann sind $|f|$, $max(f,g), min(f,g)$ stetig in x_0

L 3.4.4 $\{x_n : n \geq 1\} \subset [a,b] \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in [a,b]$

S 3.4.5 $f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, dann $\exists u, v \in I$ so dass $f(u) \leq f(x) \leq (v)\ \forall x \in I$(f ist beschränkt)

3.5 Umkehrabbildungen

S 3.5.1 $D_1, D_2 \subset \mathbb{R},\ x_0 \in D_1, f: D_1 \to D_2$ in x_0 stetig, $f(x_0) \in D_2,\ g: D_2 \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ stetig

$$\Longrightarrow\ g \circ f: D_1 \to \mathbb{R} \text{ stetig in } x_0$$

S 3.5.3 $f \to \mathbb{R}$ stetig, streng monoton, dann ist $J := f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f^{-1}: J \to I$ stetig, streng monoton wachsend

3.6 Exponentialfunktion

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

S 3.6.1 $\exp: \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv.

K 3.6.2 exp(x) $> 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

B 2.7.27 $\forall z, w\ \exp(w+z) = \exp(w) + \exp(z)$

K 3.6.3 exp(z) $>$ exp(y) $\forall z > y$

K 3.6.4 exp(x) $\geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\Longrightarrow \exp(-x) \leq \frac{1}{1+x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

K 3.6.5 ln $:]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.
Es gilt $\ln(a\cdot b) = \ln a + \ln b \quad \forall a, b \in]0,+\infty[$

K 3.6.6 $f:]0,+\infty[\to]0,+\infty[$

1. Für $a > 0$ ist $f(x) = x^a$ eine stetige, streng monoton wachsende Bijektion
2. Für $a < 0$ ist $f(x) = x^a$ eine stetige, streng monoton fallende Bijektion
3. $\ln(x^a) = a\ln(x) \quad \forall a \in \mathbb{R},\ \forall x > 0$
4. $x^a \cdot x^b = x^{a+b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall x > 0$
5. $(x^a)^b = x^{a\cdot b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ \forall x > 0$

3.7 Konvergenz v. Funktionenfolgen

D 3.7.1 f_n **konvergiert punktweise** gegen $f: D \to \mathbb{R}$, falls für alle $x \in D$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

D 3.7.3 $f_n: D \to \mathbb{R}$ **konvergiert gleichmässig** in D gegen $f: D \to R$, falls $\forall \epsilon \geq 0,\ \exists N > 1$, so dass

$$\forall n \geq N,\quad \forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

$$\limsup_{x\in D} |f(x) - f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

S 3.7.4 Falls $f_n: D \to \mathbb{R}$ gegen $f: D \to \mathbb{R}$ gleichmässig konvergiert, dann ist f stetig.

S 3.7.5 $f_n: D \to \mathbb{R}$ ist **gleichmässig konvergent**, falls für alle x $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert und f_n gleichmässig gegen f konvergiert.

K 3.7.6 $f_n: D \to \mathbb{R}$ konvergiert genau dann gleichmässig in D, falls $\forall \epsilon \geq 0,\ \exists N > 1$, so dass

$$\forall n, m \geq N \text{ und } \forall x \in D\, |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

D 3.7.8 Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ **konvergiert gleichmässig**, falls die durch $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ gegebene Funktionenfolge gleichmässig konvergiert

D 3.7.9 $f_n: D \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, wobei $|f_n(x)| \leq c_n \quad \forall x \in D$ und $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert.
Dann konvergiert die Reihe $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, wobei $f(x)$ eine stetige Funktion ist.

4 Differenzierbare Funktionen

D 4.1.1 f ist **in** x_0 **differenzierbar**, falls

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existiert}$$

Bem: $f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

4.1 Die Ableitung

S 4.1.3 $f: D \to \mathbb{R},\ x_0 \in D$ ein Häufungspunkt

1. f ist in x_0 differenzierbar
2. Es git $c \in \mathbb{R}$ und $r: D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(x_0) + c(x-x_0) + r(x)\cdot(x-x_0)$

$r(x_0) = 0$ und r ist stetig in x_0
Dann ist $c = f'(x_0)$ eindeutig bestimmt.

S 4.1.4 $f : D \to \mathbb{R}$ ist in x_0 differenzierbar, genau dann, wenn $\phi : D \to \mathbb{R}$ stetig in x_0 ist und

$$f(x) = f(x_0) + \phi(x) \cdot (x - x_0), \quad \text{wobei } \phi(x_0) = f'(x_0)$$

K 4.1.5 f differenzierbar in $x_0 \Rightarrow f$ stetig in x_0

D 4.1.7 $f : D \to \mathbb{R}$ ist in D differenzierbar, falls $\forall x_0 \in D$, f in x_0 differenzierbar ist

S 4.1.9 Sei $f, g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar

---

1. $f + g$ ist in x_0 differenzierbar und
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$
2. $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und
$$(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$
3. Falls $g(x_0) \neq 0$ ist $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

S 4.1.11 $f : D \to E$ in x_0 und $g : E \to \mathbb{R}$ in $f(x_0)$ differenzierbar, so ist $(g \circ f)$ in x_0 differenzierbar

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

K 4.1.12 $f : D \to E$ bijektiv

$$\implies f^{-1} \text{ differenzierbar, } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

4.2 Erste Ableitung

D 4.2.1 $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$

1. f hat lokales Maximum in x_0, falls $\delta > 0$ gibt
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in]x_o - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$
2. f hat lokales Minimum in x_0, falls $\delta > 0$ gibt
$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in]x_o - \delta, x_0 + \delta[\cap D$$
3. Maximums und Minimums sind Extremums

S 4.2.2 $f :]a, b[\to \mathbb{R}$, f in x_0 differenzierbar

1. Falls $f'(x) > 0$ gibt es $\delta > 0$
$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$
$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$
2. Falls $f'(x) < 0$ gibt es $\delta > 0$
$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$
$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$
3. x_0 ist lokales Extremum $\implies f'(x) = 0$

S 4.2.3 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $]a, b[$ differenzierbar, so gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$f'(\xi) = 0$$

S 4.2.5 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $]a, b[$ differenzierbar, so gibt es $\xi \in]a, b[$ mit

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

K 4.2.5 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $]a, b[$ differenzierbar und $\forall \xi \in]a, b[$

1. $f'(\xi) = 0, \Rightarrow f$ konstant
2. $f'(\xi) \geq 0, \Rightarrow f$ monoton wachsend
3. $f'(\xi) > 0, \Rightarrow f$ streng monoton wachsend
4. $f'(\xi) \leq 0, \Rightarrow f$ monoton fallend
5. $f'(\xi) < 0, \Rightarrow f$ streng monoton fallend
6. $f'(\xi) = g'(\xi), \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = g(x) + c$
7. $|f'(\xi)| \leq M \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \leq M\,|x_1 - x_2|$

S 4.2.9 $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, differenzierbar in $]a, b[$, falls $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$ folgt

$$g(a) \neq g(b) \text{ und } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

S 4.2.10 l'Hospital $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} g(x) = 0 \quad \wedge \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

$$\implies \lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lambda$$

Bem: Gilt auch für $b = +\infty, \lambda = +\infty, x \to a^+$

D 4.2.13 $f : I \to \mathbb{R}$, $x \leq y$, bzw. $x < y$

1. f ist **konvex** falls $\forall x, y \in \wedge \, \forall \lambda \in [0, 1]$
$$f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) \leq \lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) \cdot f(y)$$
2. f ist **streng konvex** falls $\forall x, y \in \wedge \, \forall \lambda \in]0, 1[$
$$f(\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y) < \lambda \cdot f(x) + (1 - \lambda) \cdot f(y)$$

Bem: $f(x)$ ist **konkav**, falls $-f(x)$ konvex ist

L 4.2.15 f ist konvex $\Leftrightarrow$ für alle $x_0 < x < x_1 \in I$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x}$$

Bem: f streng konvex $\Leftrightarrow$ strikte Ungleichung gilt

S 4.2.16 Sei $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar

f (streng) konvex $\Leftrightarrow f'(x)$ (streng) monoton wachs.

K 4.2.17 $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar

$$f \text{ konvex} \Leftrightarrow f''(x) \geq 0$$

$$f \text{ streng konvex} \Leftrightarrow f''(x) > 0$$

4.3 Höhere Ableitungen

D 4.3.1 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar

1. f ist **n-mal differenzierbar**, falls $f^{(n-1)}$ in D differenzierbar ist. $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$
2. f ist **n-mal stetig differenzierbar**, falls f n-mal differenzierbar und $f^{(n)}$ stetig ist
3. f ist **glatt**, falls $\forall n \geq 1$ f n-mal differenzierbar

S 4.3.3 $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar

1. $f + g$ ist n-mal differenzierbar
$$(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$
2. $f \cdot g$ ist n-mal differenzierbar
$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

S 4.3.5 $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar

Falls $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in D$, $\frac{f}{g}$ ist n-mal differenzierbar

S 4.3.6 $f, g : D \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar

$$(g \circ f)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_{n,k}(x)(g^{(k)} \circ f)(x)$$

Bem: $A_{n,k}$ ist Polynom in $f', f^{(2)}, \cdots, f^{(n+1-k)}$

4.4 Potenzreihen & Taylor Approx.

S 4.4.1 $f_n :]a, b[\to \mathbb{R}$, wobei f_n einmal stetig differenzierbar ist, f_n und f_n' gleichmässig konvergieren. Dann ist f stetig differenzierbar.

$$\lim_{n \to \infty} f_n = f \text{ und } \lim_{n \to \infty} f_n' = f'$$

S 4.4.2 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ eine Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \text{ ist differenzierbar}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k x^k$$

K 4.4.3 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ist glatt

S 4.4.5 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar
Für jedes $a < x \leq b$ gibt es $\xi \in]a, x[$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

K 4.4.6 $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal differenzierbar
Sei $c < a < d$, so folgt für alle $x \in [c, d]$ $x \leq \xi \leq a$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$$

K 4.4.7 $n \geq 0, a < x_0 < b$ und $f : D \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar
Annahme: $f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = ... = f^{(n)}(x_0) = 0$

1. Falls n gerade und x_0 lokale Extremalstelle folgt $f^{(n+1)}(x_0) = 0$
2. Falls n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, so ist x_0 eine strikte lokale Minimalstelle
3. Falls n ungerade und $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, so ist x_0 eine strikte lokale Maximalstelle

K 4.4.8 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei $a < x_0 < b$. Annahme $f'(x_0) = 0$.

1. Falls $f^{(2)}(x_0) > 0$ so folgt daraus, dass x_0 strikte lokale Minimalstelle ist.
2. Falls $f^{(2)}(x_0) < 0$ so folgt daraus, dass x_0 strikte lokale Maximalstelle ist.
3. Falls $f^{(2)}(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, so ist x_0 ein Sattelpunkt

Bem: Falls $f^{(2)}(x_0) = 0$ und $f^{(3)}(x_0) \neq 0$, so ist x_0 ein Wendepunkt (hier ist $f'(x)$ beliebig)

---

5 Das Riemann Integral

5.1 Integrabilitätskriterien

D 5.1.1 Eine Partition ist eine endliche Teilmenge $P \subset [a, b]$, wobei $a, b \in P$

D Untersumme

$$s(f, P) := \sum_{i=1}^{n} f_i \delta_i, \qquad f_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$s(f) := \sup_{P \in \mathcal{P}(I)} s(f, P)$$

D Obersumme

$$S(f, P) := \sum_{i=1}^{n} F_i \delta_i, \qquad F_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)$$

$$S(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}(I)} S(f, P)$$

L 5.1.2 Sei P' Verfeinerung von P

$$s(f, P) \leq s(f, P') \leq S(f, P') \leq S(f, P)$$

D 5.1.3 Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar falls

$$s(f) = S(f) \quad := \int_a^b f(x)dx$$

S 5.1.4 Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \in \mathcal{P}(I) \quad \text{mit} \quad S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

S 5.1.8 Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

ist genau dann integrierbar, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$

$$\forall P \in P_\delta(I),\ S(f,P) - s(f,P) < \epsilon$$

5.2 Integrierbare Funktionen

S 5.2.1 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar Dann sind $f+g$, $\lambda \cdot f$, $f \cdot g$, $|f|$, $min(f,g)$, $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) > 0$) integrierbar

K 5.2.3 P, Q Polynom und $Q(x) \neq 0\ \forall x \in [a,b]$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ ist integrierbar}$$

S 5.2.4 $f : D \to \mathbb{R}$ ist **gleichmässig stetig**, falls $\forall \epsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in D$

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

S 5.2.6 Falls $f : [a,b] \to$ stetig in $[a,b]$ ist. Dann ist f in $[a,b]$ gleichmässig stetig.

S 5.2.7 f auf $[a,b]$ stetig $\implies$ f integrierbar

S 5.2.8 f auf $[a.b]$ monoton $\implies$ f integrierbar

S 5.2.10 $f_1, f_2 : [a,b] \to$ integrierbar

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$$

$$\int_a^b (\lambda f(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

5.3 Ungleich. & Mittelwertsatz

S 5.3.1 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar Sei $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$, dann folgt

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

K 5.3.2 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

S 5.3.3 $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

S 5.3.4 $f : [a.b] \to \mathbb{R}$ stetig

$$\exists \xi \in [a,b] \quad \text{mit} \quad \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

S 5.3.6 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, wobei f stetig, g beschränkt, integrierbar mit $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$

$$\exists \xi \in [a,b] \quad \text{mit} \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

5.4 Fundamentalsatz

S 5.4.1 $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b$$

$F(x)$ ist stetig differenzierbar und $F'(x) = f(x)$

D 5.4.2 $F(x)$ ist die Stammfunktion von f

S 5.4.3 Fundamentalsatz $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

S 5.4.5 Partielle Integration $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $a < b$.

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

S 5.4.6 Substitution $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\phi([a,b]) \subset I$, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig.

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

K 5.4.8 $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x)dx = \int_a^b f(t+c)dt$$

$$\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(x)dx$$

5.5 Integration konv. Reihen

S 5.5.1 Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Folge von beschränkten, integrierbaren Funktionen, die gleichmässig gegen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f beschränkt und integrierbar

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

K 5.5.2 Sei f_n ist eine Folge beschränkter integrierbarer Funktion, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmässig konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx$$

K 5.5.3 Potenzreihe ist integrierbar $\forall x \in\ ]-p, p[$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} x^{n+1}$$

5.6 Uneigentliche Integrale

D 5.8.1 Sei $f : [a, \infty] \to \mathbb{R}$ beschränkt und integrierbar auf $[a,b] \quad \forall b \geq a$, wir definieren

$$\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Grenzwert existiert $\implies$ f auf $[a, +\infty]$ integrierbar

K 5.8.2 $f : [a, \infty[\ \to \mathbb{R}$ beschränkt, integrierbar

1. Falls $|f(x)| \leq g(x) \quad \forall x \geq$ und $g(x)$ ist auf $[a, +\infty[$ integrierbar, so ist f auf $[a, +\infty[$ integrierbar
2. Falls $0 \leq g(x) \leq f(x)$ und $\int_a^{\infty} g(x)dx$ divergiert, so divergiert auch $\int_a^{\infty} f(x)dx$

S 5.8.5 Sei $f : [1, \infty[\ \to [0, \infty[$ monoton fallend

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konvergiert}$$

D 5.8.8 Falls f auf $[a + \epsilon, b], \epsilon > 0$ beschränkt, integrierbar ist, aber nicht beschränkt auf $]a, b]$

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

Grenzwert existiert $\implies$ f auf $[a,b]$ integrierbar

D 5.8.11 Gamma Funktion Für $s > 0$

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}dx$$

S 5.8.12

1. Die Gamma Funktion erfüllt die Relationen
   (a) $\Gamma(1) = 1$
   (b) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \forall s > 0$
   (c) Γ ist logarithmisch konvex für $0 \leq \lambda \leq 1$
   $\Gamma(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \Gamma(x)^{\lambda}\lambda(y)^{1-\lambda} \quad \forall x, y > 0$
   (d) $\Gamma(n+1) = n!$
   (e) $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} \quad \forall x > 0$
2. Die Gamma Funktion ist die einzige Funktion $]0, \infty[$, die (a), (b), (c) erfüllt

5.7 Das unbestimmte Integral

S 5.1.9 $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ eine rationale Funktion und $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$, dann ist

$$Q(x) = x^n + a_{n-1}x'n - 1 + \ldots$$

$$= \prod_{i=1}^{k} (x - \gamma_i)^{n_i} \prod_{j=1}^{l} \left((x - \alpha_j)^2 + \beta_j^2\right)^{m_j}$$

und

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{C_{ij}}{(x - \gamma_i)^j} +$$

$$\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{(A_{ij} + B_{ij}x)}{\left((x - \alpha_i)^2 + \beta_i^2\right)^j}$$

6 Beispiele

6.1 Folgen

B 2.2.3 $\lim_{n\to\infty} n^a q^n = 0,\ 0 \leq q < 1,\ a \in \mathbb{Z}$

B 2.2.5 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

B 2.2.6 $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

6.2 Reihen

B 2.7.2 $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$

B $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

B $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \frac{-\pi^2}{12}$

B $\exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

B $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert für $s > 1$

B $\sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}$

6.3 Ableitungen

B 4.1.10

$(x_n)' = nx^{n-1}$ für $n \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$\sin'(x) = \cos(x)$
$\cos'(x) = -\sin(x)$
$\tan' x = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot' x = \frac{-1}{\sin^2(x)} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

B 4.1.13

$\ln'(x) = \frac{1}{x}$
$(x^a)' = ax^{a-1}$

B 4.2.6

$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$
$\arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$
$\arctan'(y) = \cos^2(x) = \frac{1}{1+y^2}$
$\text{arccot}'(y) = \frac{-1}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{1+y^2}$

B 4.2.7

$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$
$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$
$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\text{arcsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$

$\operatorname{arccosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$

$\operatorname{arctanh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

6.4 Integrale

B 5.9.0 Grundlegende Integrale

$$\int x^s dx = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x+1} & s \neq -1 \\ \ln x & s = -1 \end{cases}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x$$

$$\int \cos x dx = \sin x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} x$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x$$

$$\int e^x dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh} x$$

B 5.9.1 Partielle Integration

$$\int 1 \cdot \ln(x) = x\ln(x) - x$$

$$\int x\ln(x) = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

$$\int x^2 \sin(x) = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x)$$

$$\int xe^x \; dx = xe^x - x$$

$$\int x\cos(x) \; dx = x\sin(x) + \cos(x)$$

$$I_n = \int \sin^n(x)dx, n \geq 0$$

$$I_n = -\frac{1}{n}\cos(x)\sin^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sin^2(x)dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin(x)\cos(x)}{2}$$

$$\int \cos^2(x)dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(x)\cos(x)}{2}$$

B 5.9.2 Substitution

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \int \frac{a}{a^2(1+u^2)} du = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

B Random Stuff

$$\int \frac{1}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln(|x-a|) & n = 1 \\ \frac{1}{(x-a)^{n-1}} \frac{1}{1-n} & n \geq 2 \end{cases}$$

Trick:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)), \quad \text{mit } f \text{ beliebig}$$

$$\int f'(x)f(x)dx = \frac{f(x)^2}{2} \quad \text{mit } f \text{ beliebig}$$

7 Beweise

7.1 Grundlagen

Beweis: $\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$

Es gilt $a + b \leq \sup A + b \leq \sup A + \sup B$

$\implies \sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$

Beweis: $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$

Es gilt $\forall \epsilon > 0 \quad \sup A \leq a - \frac{\epsilon}{2}$ und $\sup B \leq b - \frac{\epsilon}{2}$

$\implies \sup A + \sup B - \epsilon \leq a + b \leq \sup(A+B)$

7.2 Folgen und Reihen

S Sandwich Satz Wir nehmen an, dass

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$
2. $a_n \leq c_n \leq b_n \; \forall n \geq K$

Es gilt $|a_n - \alpha| < \epsilon \implies -\epsilon < a_n - \alpha$

Es gilt $|b_n - \alpha| < \epsilon \implies +\epsilon > b_n - \alpha$

$\implies -\epsilon < a_n - \alpha \leq c_n - \alpha \leq b_n - \alpha < \epsilon$

$\implies |c_n - \alpha| < \epsilon \implies \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$

Beweis: $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergiert $\implies \lim_{n\to\infty} b_k = 0$

Definiere $c_1 = 0$ mit $c_k = b_{k-1}$. Es folgt $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergiert und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$

$$\implies \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k - \sum_{k=1}^{n} c_k\right) = 0$$

Beweis: [Hôpital] $f(c) = g(c) = 0, \quad g'(c) \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} \\ &= \lim_{x\to a}\frac{[f(x)-f(a)]/(x-a)}{[g(x)-g(a)]/(x-a)} \\ &= \frac{\lim_{x\to a}([f(x)-f(a)]/(x-a))}{\lim_{x\to a}([g(x)-g(a)]/(x-a))} \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)} \end{aligned}$$

Beweis: $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n)$

Wir dürfen dabei verwenden dass:

$$\begin{aligned} &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_a \quad \forall n \geq n_a : |a_n - a| < \varepsilon \\ &\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_b \quad \forall n \geq n_b : |b_n - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

Sei also $|a| \geq \varepsilon_0 > 0$ beliebig. Setze $n_0 := \max\{n_a, n_b\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n + (a_n b - a_n b) - ab| \\ &= |a_n (b_n - b) + b(a_n - a)| \\ (\triangle-\text{ Ungl.}) &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\ (*), (1), (2) &< (\varepsilon + |a|)\varepsilon + |b|\varepsilon \\ (\varepsilon \leq |a|) &\leq \underbrace{(2|a| + |b|)}_{=:C}\varepsilon = C \cdot \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0) \end{aligned}$$

8 Random, but useful stuff

8.1 Trigonometrie

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{für } -1 < x < 1$$

S 3.8.1 sin, cos und exp sind stetig auf $\mathbb{R}$

8.1.1 Additionstheoreme

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin(\alpha)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{4 - \tan^2\alpha}$$

$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - \cos\alpha$$

$$\tan(3\alpha) = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1 - 3\tan^2\alpha}$$

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

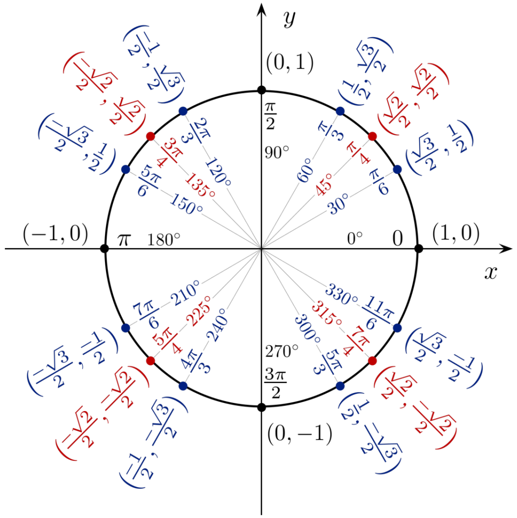
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

8.1.2 Unit Circle $(\cos(x), \sin(x))$



S 3.8.2 Eigenschaften von sin und cos

1. $\cos z = \cos(-z)$ und $\sin(-z) = -\sin(z)$
2. $\exp(i \cdot z) = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$
3. $\cos(z)^2 + \sin(z)^2 = 1$
4. $\sin(z+w) = \sin(z) \cdot \cos(w) + \sin(w) \cdot \cos(z)$
   $\cos(z+w) = \cos(z) \cdot \cos(w) - \sin(w) \cdot \sin(z)$
5. $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

K 3.8.3
$\sin(2 \cdot z) = 2\sin(z) \cdot \cos(z)$
$\cos(2 \cdot z) = \cos(z)^2 - \sin(z)^2$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} \cos\theta \quad \text{für ein } \theta \in [0, t]$$

$$\sin(x) \le x \quad \forall x \ge 0$$

$$|\sin(x)| \le |x|$$

8.2 Formula for $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b + \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

8.3 Konvergente Folgen

1. Weierstrass (monoton + beschränkt)
2. Vergleichssatz

8.4 Konvergente Reihen

1. Weierstrass (monoton + beschränkt)
2. Vergleichssatz
3. Geometrische Folge
4. Alternierende Reihe
5. Riemann Zeta
6. Teleskopieren
7. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
8. konvergiert das Integral?

8.5 Implications

f differenzierbar $\Longrightarrow$ f stetig $\Longrightarrow$ f integrierbar

---

8.6 Länge von Kurven

$$L = \int_a^b = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad p(t) = (x(t), y(t))$$

$$L = \int_c^d = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad y = f(x),\ x \in [c, d]$$

8.7 Taylor Polynom

$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$\ln(1 + x) = x + O(x^2)$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$$

8.8 Gleichmässige Stetigkeit

$f(x) = x^2$ ist stetig, aber nicht gleichmässig stetig
$f(x) = x$ und $f(x) = \sqrt{x}$ sind stetig und gleichmässig stetig.

8.9 Gleichmässige Konvergenz

$$f_n(x) \text{ konv. gleichmässig} : \lim_{n \to \infty} \sup |f(x) - f_n(x)| = 0$$

8.10 Fixpunkte $f(x) = x$

Definiere $g(x) = f(x) - x$, zeige $g(y) \le 0$ und $g(z) \ge 0$
Wenn f stetig ist, benutze Zwischenwertsatz, um zu zeigen $g(x_0) = 0$

8.11 Substitution

$$\int_a^b f(g(x)) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \frac{du}{g'(x)}$$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

$$\int_e^\infty \frac{1}{x \log(x)} \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_{\log(e)}^{\log(b)} \frac{1}{u} \mathrm{d}u$$

$$= \lim_{b \to \infty} \log(u) \Big|_1^{\log(b)}$$

$$= \lim_{b \to \infty} \log(\log(b)) = \infty$$