1 Grundlagen

T 1.1.2 $\mathbb{R}$ ist ein kommutativer, angeordneter Körper, der ordnungsvollständig ist

1.1 Infimum und Supremum

D 1.1.12 Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

1) $c \in \mathbb{R}$ ist **obere Schranke** if $\forall a \in A : a \leqslant c$
2) $c \in \mathbb{R}$ ist **untere Schranke** if $\forall a \in A : c \leqslant a$
3) $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Maximum** von A if $m \in A$ und m eine obere Schranke von A ist.
4) $m \in \mathbb{R}$ heisst ein **Minimum** von A if $m \in A$ und m eine untere Schranke von A ist.

T 1.1.15 . Sei $A \subset \mathbb{R}, A \neq \varnothing$ und beschränkt

1) Kleinste obere Schranke: $\sup A$ (**Supremum**)
2) Grösste untere Schranke: $\inf A$ (**Infimum**)

Eigenschaften von Supremum und Infimum

- $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$
- $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
- $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$
- $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

2 Folgen und Reihen

D 2.1.1 Eine **Folge** a_n in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$

2.1 Konvergenz von Folgen

D 2.1.4 Eine Folge a_n heisst **konvergent**, falls es $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \epsilon > 0$ die Menge $\{n \in \mathbb{N} : a_n \notin]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\}$ endlich ist.

L 2.1.3 Dieses a ist **eindeutig**.

L 2.1.5 Jede konvergente Folge ist **beschränkt**.
Achtung: a_n beschränkt $\not\Longrightarrow$ a_n konvergent!

L 2.1.6 Eine Folge a_n **konvergiert** gegen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 0$ so dass $\forall n \geq N$

$$|a_n - a| < \epsilon.$$

T 2.1.8 Seien a_n und b_n konvergente Folgen mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\to\infty} b_n$

1) Dann ist $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2) Dann ist $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3) Dann ist $\lim_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$ $(b_n \neq 0\ \forall n \geq 0)$
4) $\exists K \geq 0\ \forall n \geq K\ a_n \leq b_n \implies a \leq b$

T Sandwich Satz Sei $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$

$$a_n \leq c_n \leq b_n\ \forall n \geq K \implies \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

Die Folge a_n ist divergent, falls sie nicht konvergiert.

2.2 Weierstrass und Anwendungen

D 2.2.1 Falls a_n ist

1) **monoton wachsend** falls $a_n \leq a_{n+1}\ \forall n \geq 0$
2) **monoton fallend** falls $a_n \geq a_{n+1}\ \forall n \geq 0$

T 2.2.2 (Weierstrass) Genau dann, wenn a_n

1) *monoton wachsend* und *nach oben beschränkt* ist, dann **konvergiert** a_n mit Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\ n \geq 0\}$$
2) *monoton fallend* und *nach unten beschränkt* ist, dann **konvergiert** a_n mit Grenzwert
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\ n \geq 0\}$$

B 2.2.3 $\lim_{n\to\infty} n^a q^n = 0,\ 0 \leq q < 1,\ a \in \mathbb{Z}$

B 2.2.5 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

L 2.2.7 (Bernoulli Ungleichung)

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + n \cdot x \quad \forall n \in \mathbb{N}, x > -1$$

2.3 Limes superior und inferior

D 2.3.0

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n, \quad (b_n = \inf\{a_k : k \geq n\})$$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n, \quad (c_n = \sup\{a_k : k \geq n\})$$

L 2.4.1 Die Folge a_n konvergiert genau dann, falls

1. a_n beschränkt ist
2. $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$

2.4 Cauchy Kriterium

T 2.4.2 (Cauchy Kriterium) Die Folge a_n ist genau dann konvergent und heisst Cauchy-Folge

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 0 \text{ so dass } |a_n - a_m| \quad \forall n, m \geq N$$

2.5 Bolzano-Weierstrass

D 2.5.1 Ein abgeschlossenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$

1) $[a, b],\ a \leq b, a, b \in \mathbb{R}$
2) $[a, +\infty[,\ a \in \mathbb{R}$
3) $]-\infty, a],\ a \in \mathbb{R}$
4) $]-\infty, +\infty] = \mathbb{R}$

Die Länge eines $\mathcal{L}(I)$ ist definiert als:

- $\mathcal{L}(I) = b - a$ im ersten Fall
- $\mathcal{L}(I) = \infty$ in (2), (3), (4)

T 2.5.5 (Cauchy-Cantor)
Sei $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots I_n \subseteq \cdots$ eine Folge abgeschlossener Intervall mit $\mathcal{L}(I_1) < +\infty$. Dann gilt

$$\bigcap_{n\geq 1} I_n \neq \emptyset$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(I_n) = 0 \implies \left|\bigcap_{n\geq 1} I_n\right| = 1$$

T 2.5.6 $\mathbb{R}$ ist nicht **abzählbar**.

D 2.5.7 b_n ist eine Teilfoge von a_n, falls

$$b_n = a_{l(n)}, \quad l : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ und } l(n) > l(n+1)$$

T 2.5.9 (Bolzano-Weierstrass) Für jede beschränkte Folge existiert eine konvergente Teilfolge.

2.6 Folgen in R^d und C

D 2.6.1 Eine **Folge** a_n in $\mathbf{R^d}$ ist eine Abbildung

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbf{R^d}$$

D 2.6.2 Eine Folge a_n in $\mathbf{R^d}$ konvergiert gegen $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, falls $\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq 0$ so dass $\forall n \geq N$

$$\|a_n - a\| < \epsilon.$$

2.7 Reihen

D 2.7.0 Eine Reihe ist eine unendliche Summe

$$S_n := a_1 + a_n \cdots = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

D 2.7.1 Die Reihe $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ist **konvergent**, falls die Folge der Partialsummen konvergiert.

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

B 2.7.2 (Geometrische Reihe) Sei $|q| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}$$

T 2.7.4 Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent

(1) $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k$
(2) $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha \cdot a_k = \alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

T 2.7.5 (Cauchy Kriterium) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist genau dann konvergent, falls

$$\forall \epsilon > 0\ \exists n \geq 0 \text{ mit } \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N$$

T 2.7.6 Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ genau dann, falls die Folge $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ nach oben beschränkt ist

K 2.7.7 (Vergleichssatz) Seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen mit: $0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \geq 0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ konvergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ divergent} \implies \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

T 2.7.9 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heisst **absolut konvergent**,

$$\text{falls } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ konvergiert}$$

T 2.7.10 Eine absolut konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist auch konvergent und es gilt:

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

T 2.7.12 Leibniz Sei a_n monoton fallend mit $a_n \geq 0\ \forall n \geq 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert

$$S := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \text{ und } a_1 - 1_2 \leq S \leq a_1$$

D 2.7.14 Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a'_n$ ist eine Umordung der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$, falls es eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ mit $a'_n = a_{\phi(n)}$

T 2.7.16 Dirichlet Falls $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert jede Umordnung der Riehe und hat denselben Grenzwert.

T Riemann Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Riehe, dann gibt es zu jedem $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Umordnung der Reihe, die gegen A konvergiert.

T Quotientenkriterium Sei $a_n \neq 0\ \forall n \geq 0$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

T Wurzelkriterium

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergiert}$$

K 2.7.21 Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergiert für alle $|z| < \rho$ und divergiert für alle $|z| > \rho$

$$\rho = \begin{cases} +\infty & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0 \\ \frac{1}{\limsup_{c\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} & \text{falls } \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} > 0 \end{cases}$$

Bem: Der Konvergenzbereich ist $\{z \in \mathbb{C} | \, |z| < \rho\}$

D 2.7.22 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ ist eine lineare Anordnung der Doppelreihe $\sum_{i,j\geq 0} a_{ij}$, falls es eine Bijektion $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt mit $b_k = a_{\epsilon(k)}$.

T 2.7.23 Falls $\sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} |a_{ij}| \leq B, \quad \forall m \geq 0$

$$\text{dann konvergiert } S_i := \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall i \geq 0$$

$$\text{dann konvergiert } U_j := \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij} \quad \forall j \geq 0$$

$$\text{und es gilt } \sum_{i=0}^{m} S_i = \sum_{j=0}^{m} U_j$$

T 2.7.24 Das **Cauchy Produkt** der Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \cdots$$

T 2.7.26 Falls die Reihen $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ absolut konvergieren, so knovergiert ihr Cauchy Produkt und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j \right) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right)$$

T 2.7.28 Sei $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Folge, für die gilt:

(1) $f(j) := \lim_{n\to\infty}$ existiert $\forall j \in \mathbb{N}$

(2) Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{N} \to [0, \infty[$, so dass

(2.1) $|f_n(j)| \leq g(j) \quad \forall j \geq 0, \ \forall n \geq 0$

(2.2) $\sum_{j=0}^{\infty} g(j)$ konvergiert

Dann folgt $\sum_{j=0}^{\infty} f(j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f_n(j)$

K 2.7.29 Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z)$$

---

3 Stetige Funktionen

3.1 Reelwertige Funktionen

D 3.1.1 Sei $f \in \mathbb{R}^D$

(1) f ist **nach oben beschränkt**, falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt ist.

(2) f ist **nach unten beschränkt**, falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ nach unten ebschränkt ist.

(3) f ist **beschränkt**, falls $f(D) \subset \mathbb{R}$ beschränkt ist.

D 3.1.2 Eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei $D \subset \mathbb{R}$, ist

(1) **monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D$

$$x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$

(2) **streng monoton wachsend**, falls $\forall x, y \in D$

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$

(3) **monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D$

$$x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$

(4) **streng monoton fallend**, falls $\forall x, y \in D$

$$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

(5) **monoton**, falls f monoton wachsend oder monoton fallend

(6) **streng monoton**, falls f streng monoton wachsend oder streng monoton fallend ist.

3.2 Stetigkeit an einem Punkt

D 3.2.1 Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ stetig, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

.

D Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig falls sie in jedem Punkt von D stetig ist.

4 Stetigkeit an einem Punkt

D Epsilon Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ stetig, falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

.

T Sequence Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann in $\boldsymbol{x}_0$ stetig, falls für jede Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ in D

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$$

gilt.

T Sidewise Sei $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$. Die Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ist in $\boldsymbol{x}_0$ stetig, falls

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

gilt.

---

5 Beweise

5.1 Grundlagen

Beweis: $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$
Es gilt $a + b \leq \sup A + b \leq \sup A + \sup B$
$\Longrightarrow \sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$

Beweis: $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$
Es gilt $\forall \epsilon > 0 \quad \sup A \leq a - \frac{\epsilon}{2}$ und $\sup B \leq b - \frac{\epsilon}{2}$
$\Longrightarrow \sup A + \sup B + \epsilon \leq a + b \leq \sup(A + B)$

5.2 Folgen und Reihen

T Sandwich Satz Wir nehmen an, dass

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$
2. $a_n \leq c_n \leq b_n \ \forall n \geq K$

Es gilt $|a_n - \alpha| < \epsilon \implies -\epsilon < a_n - \alpha$
Es gilt $|b_n - \alpha| < \epsilon \implies +\epsilon > b_n - \alpha$
$\implies -\epsilon < a_n - \alpha \leq c_n - \alpha \leq b_n - \alpha < \epsilon$
$\implies |c_n - \alpha| < \epsilon \implies \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$
