

## Epreuve de Thermodynamique

### Exercice

On fait subir à un gaz une transformation élémentaire réversible. La quantité de chaleur échangée avec l'extérieur peut s'écrire :

$$\delta Q = C_v dT + l dV \quad \text{ou encore} \quad \delta Q = C_p dT + h dP$$

1. On choisit comme variables indépendantes  $T$  et  $V$ .

a. Ecrire les différentielles de l'énergie interne  $dU$  et de l'entropie  $dS$ .

b. Sachant que  $dU$  et  $dS$  sont des différentielles totales exactes, montrer que  $l = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$  et

$$\left( \frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V.$$

2. On choisit comme variables indépendantes  $T$  et  $P$ .

a. Ecrire les différentielles de l'enthalpie  $dH$  et de l'entropie  $dS$ .

b. Sachant que  $dH$  et  $dS$  sont des différentielles totales exactes, montrer que  $h = -T \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$  et

$$\left( \frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T = -T \left( \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_P.$$

3. a. que deviennent les expressions de  $l$ , de  $\left( \frac{\partial C_v}{\partial V} \right)_T$ , de  $h$  et de  $\left( \frac{\partial C_p}{\partial P} \right)_T$  pour un gaz parfait.

b. En déduire que l'énergie interne et l'enthalpie ne dépendent que de la température pour un gaz parfait.

### Problème

Un gaz parfait décrit le cycle de Stirling suivant :

- Compression isotherme de l'état initial  $A(P_1, V_1, T_1)$  à l'état  $B(P_2, V_2 = \alpha V_1, T_1)$
- Echauffement isochore de l'état  $B$  à l'état  $C(P_3, V_2, T_2)$ .
- Détente isotherme de l'état  $C$  à l'état  $D(P_4, V_1, T_2)$ .
- Refroidissement isochore de l'état  $D$  à l'état  $A$ .

$$V_1 = \alpha V_2 \quad V_2 = \frac{V_1}{\alpha}$$

Données : Les températures  $T_1$  et  $T_2$  ; le taux de compression  $\alpha = \frac{V_2}{V_1}$  ; le nombre de mole  $n$  du gaz parfait ; la constante des gaz parfaits  $R$  et la capacité calorifique à volume constant  $C_v$  ( $C_v = \text{cte}$ ). Toutes les transformations sont réversibles.

مكتبة ووراقة العمران  
LIBRAIRIE ALOMRAN

1. Représenter dans un diagramme  $(P, V)$  le cycle décrit par le gaz parfait.
2. a. Donner l'expression des variations d'énergie interne  $U_{AB}$ ,  $U_{BC}$ ,  $U_{CD}$  et  $U_{DA}$  lors des quatre transformations.  
b. Calculer  $U_{cycle}$ . Conclusion.
3. a. Calculer les travaux  $W_{AB}$ ,  $W_{BC}$ ,  $W_{CD}$  et  $W_{DA}$  échangés avec l'extérieur lors des quatre transformations.  
b. Calculer  $W_{cycle}$ . Conclusion.
4. a. Calculer les quantités de chaleur  $Q_{AB}$ ,  $Q_{BC}$ ,  $Q_{CD}$  et  $Q_{DA}$  échangées avec l'extérieur lors des quatre transformations.  
b. Calculer  $Q_{cycle}$ . Conclusion.
5. Calculer  $Q_{cycle} + W_{cycle}$ . Conclusion.
6. a. Calculer la variation d'entropie entre chacun des états  $A, B, C, D$ .  
b. Calculer la variation d'entropie au cours du cycle. Conclusion.
7. Calculer le rendement du cycle de Stirling  $\rho_s$ .
8. Mettre  $\rho_s$  sous la forme  $\rho_s = \frac{T_2 - T_1}{T_2 + \alpha}$  et montrer que  $\rho_s$  est inférieur au rendement du cycle de Carnot ( $\rho_c = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$ )
9. a. Exprimer la température  $T$  en fonction de l'entropie  $S$  ( $T = T(S)$ ) pour une transformation isochore.  
b. Représenter alors l'allure du cycle de Stirling dans un diagramme  $(T, S)$ .

مكتبة وورقة العمران  
LIBRAIRIE ALOMRANE