Université Mohammed Premier | **Année universitaire 2023-2024**
Faculté Pluridisciplinaire-Nador | **Module : Analyse 1 MIP**

Examen d'analyse 1 session normale (MIP
(Durée 1h30mn)

NB: Aucun document n'est autorisé. Les calculs faits doivent être justifiés, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1:

Soit f une fonction croissante définie sur $[0,1]$ vers $[0,1]$. On considère l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A} = \{x \in [0,1] : f(x) \leq x\}$$

E ∈ [0,1

E ∈ [0,1]

1. Vérifier que $\mathcal{A}$ admet une borne supérieure et la calculer.

A ≠ ∅

2. Montrer que $\mathcal{A}$ admet une borne inférieure α et que $f(\alpha) = \alpha$.

f(α) ≤ 0

3. **Application :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{A}_n = \{x \in [0,1] : nx^{2n+1} \geq x\}$.
En utilisant ce qui précède, calculer $\sup(\mathcal{A}_n)$ et $\inf(\mathcal{A}_n)$.

alors A admet une borne sup(b) = b

Exercice 2:

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f(1)| = |x-1|$.
   (b) En déduire que f est continue et dérivable en 1.
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 \neq 1$.
   (a) Justifier l'existence d'une suite $(u_n)_n$ de nombres rationnels et d'une suite $(v_n)_n$ de nombres irrationnels qui convergent vers x_0.
   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.
   (c) En déduire que f est discontinue en x_0.

Exercice 3:

Soit f une fonction définie sur $[0;2[$ par $f(x) = \begin{cases} x(x-2)\ln\left(\frac{x}{2-x}\right) & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$

1. Etudier la continuité de f.
2. Etudier la dérivabilité de f et donner l'expression de la fonction dérivée.
3. Montrer qu'il existe $a \in]1;2[$ tel que $f'(a) = 0$.

Exercice 4:

Soient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$ et $v_n = \ln(u_n)$.

1. Écrire v_n sous forme d'une somme.
2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \geq 0$,
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
3. Encadrer v_n, on rappelle $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. En déduire que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes et déterminer leurs limites.