الكلية متعددة التخصصات الناظور
ⵜⴰⵖⵓⵍⴰⵏⵜ ⵜⴰⵎⵜⵜⵓⵜ ⵏ ⵏⴰⴹⵓⵔ
Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Université Mohammed Premier, Faculté Pluridisciplinaire de Nador

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

FILIERE: POLITIQUES ECONOMIQUES

Mathématiques 2

Souhaila BUKBECH

OUTLINE

Vecteurs dans $\mathbb{R}^n$

1. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est souvent représenté par une droite. C'est un espace de dimension 1.

4 / 18

Vecteurs dans $\mathbb{R}^n$

1. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est souvent représenté par une droite. C'est un espace de dimension 1.
2. Le plan est formé des couples de nombres réels (x, y). Il est noté par $\mathbb{R}^2$. C'est un espace à deux dimensions.

4 / 18

Vecteurs dans $\mathbb{R}^n$

1. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est souvent représenté par une droite. C'est un espace de dimension 1.
2. Le plan est formé des couples de nombres réels (x, y). Il est noté par $\mathbb{R}^2$. C'est un espace à deux dimensions.
3. L'espace de dimension 3 est constitué des triplets de nombres réels (x, y, z). Il est noté par $\mathbb{R}^3$.

4 / 18

On généralise ces notions en considérant des espaces de dimension $n \in \mathbb{N}$. Les éléments de l'espace de dimension n sont les $n-$uplets donnés par $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ où $x_i \in \mathbb{R}$.

Definition

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est formé de l'ensemble des $n-$uplets de réels, nommés vecteurs.

Remarque

Comme en dimensions 2 et 3 , le n-uplet $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dénote aussi bien un point qu'un vecteur de l'espace de dimension n.

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Definition

- Loi d'addition interne: La somme de u et v est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

.

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Definition

- Loi d'addition interne: La somme de u et v est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

.

- Loi de multiplication externe: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

.

Remarque

- Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Remarque

- Le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
- L'opposé du vecteur $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur $-u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$.

Théorème

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors:*

1. $u + v = v + u$

Théorème

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors:*

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$

Théorème

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors:*

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + 0 = 0 + u = u$

Théorème

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors:*

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + 0 = 0 + u = u$
4. $u + (-u) = 0$

Théorème

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors:*

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + 0 = 0 + u = u$
4. $u + (-u) = 0$
5. $1.u = u$

8 / 18

Théorème

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors:*

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + 0 = 0 + u = u$
4. $u + (-u) = 0$
5. $1.u = u$
6. $\lambda.(\beta.u) = (\lambda\beta).u$

Théorème

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors:*

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + 0 = 0 + u = u$
4. $u + (-u) = 0$
5. $1.u = u$
6. $\lambda.(\beta.u) = (\lambda\beta).u$
7. $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$

Théorème

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors:*

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + 0 = 0 + u = u$
4. $u + (-u) = 0$
5. $1.u = u$
6. $\lambda.(\beta.u) = (\lambda\beta).u$
7. $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$
8. $(\lambda + \beta).u = \lambda.u + \beta.u$

Théorème

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ *et* $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$. *Alors:*

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + 0 = 0 + u = u$
4. $u + (-u) = 0$
5. $1.u = u$
6. $\lambda.(\beta.u) = (\lambda\beta).u$
7. $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v$
8. $(\lambda + \beta).u = \lambda.u + \beta.u$

REPRÉSENTATION DES VECTEURS DANS $\mathbb{R}^n$

Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On l'appelle vecteur colonne. Parfois, on rencontre aussi des vecteurs lignes de la forme $u = (u_1, ..., u_n)$. En fait, le vecteur ligne correspondant à u est la transposée u^T du vecteur colonne u. Les vecteurs sont le plus souvent présentés en colonnes. Ainsi, les calculs sont plus faciles qu'avec une présentation en ligne. Par exemple on a

$$\lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_1 u_n \end{pmatrix}.$$

PRODUIT SCALAIRE

Definition

On appelle produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$ l'application ϕ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi : (u, v) \longmapsto (u \mid v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

où $u = (u_1, \cdots, u_n)$ et $v = (v_1, \cdots, v_n)$ $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel est dit **espace euclidien.**

Remarque

- Selon les cas, on trouvera pour désigner le produit scalaire de u et v par les notations : $\phi(u, v) =< u, v >= (u \mid v)$.
- $\langle u|v\rangle = u^T \times v$.

APPLICATIONS LINÉAIRES

Definition

Soient E et F deux espaces vectoriels; une application f de E dans F est appelée **application linéaire** si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1. Pour tous vecteurs u et v de $E, f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. Pour tout vecteur u de E et pour tout scalaire λ de $\mathbb{R}, f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Applications linéaires

Definition

Soient E et F deux espaces vectoriels; une application f de E dans F est appelée **application linéaire** si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1. Pour tous vecteurs u et v de $E, f(u+v) = f(u) + f(v)$
2. Pour tout vecteur u de E et pour tout scalaire λ de $\mathbb{R}, f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Remarque

Soient E et F deux espaces vectoriels; si f est une application linéaire de E dans F alors $f(0_E) = 0_F$ et, pour tout vecteur u de E on a $f(-u) = -f(u)$.

Caractérisation d'une application linéaire

Proposition

Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F; l'application f est linéaire si et seulement si, pour tous vecteurs u et v de E et pour tous scalaires α et β de $\mathbb{R}$,

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

Soient f une application linéaire de E dans F, u et v deux vecteurs de E, α et β deux éléments de $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha u + \beta v) &= f(\alpha u) + f(\beta v) \\ &= \alpha f(u) + \beta f(v). \end{aligned}$$

Vocabulaire

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté par $L\left(E, F'\right)$.

Vocabulaire

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté par $L\left(E, F'\right)$.
- Une application linéaire de E dans F est aussi appelée homomorphisme d'espace vectoriel.

VOCABULAIRE

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté par $L(E, F')$.
- Une application linéaire de E dans F est aussi appelée homomorphisme d'espace vectoriel.
- Une application linéaire bijective de E dans F est appelée isomorphisme d'espace vectoriel.

VOCABULAIRE

- L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté par $L(E, F')$.
- Une application linéaire de E dans F est aussi appelée homomorphisme d'espace vectoriel.
- Une application linéaire bijective de E dans F est appelée isomorphisme d'espace vectoriel.
- Une application linéaire de E dans E est appelée endomorphisme de E.

EXEMPLES

L'application f définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y+z) \end{array}$$

est linéaire.

Exemples

L'application f définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, y+z) \end{array}$$

est linéaire. En effet, soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f\left((x+x', y+y', z+z')\right) \\ &= (x+x', (y+y') + (z+z')) \\ &= (x+x', y+z+y'+z') \\ &= (x, y+z) + (x', y'+z') \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

λ étant un réel,

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f((\lambda x, \lambda y, \lambda z)) \\ &= (\lambda x, \lambda y + \lambda z) \\ &= \lambda(x, y, z) \\ &= \lambda f(u) \end{aligned}$$

EXEMPLES

L'application $f : (x, y) \mapsto (x, x + y, x - 2y)$ est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

EXEMPLES

L'application $f : (x, y) \mapsto (x, x + y, x - 2y)$ est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
En effet, Pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

EXEMPLES

L'application $f:(x,y)\mapsto(x,x+y,x-2y)$ est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
En effet, Pour tous $(x,y),(x',y')\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda(x,y)+(x',y')\right) &= f\left(\lambda x+x',\lambda y+y'\right)\\
&= \left(\lambda x+x',(\lambda x+x')+(\lambda y+y'),(\lambda x+x')-(2\lambda y+2y')\right)\\
&= \lambda(x,x+y,x-2y)+(x',x'+y',x'-2y')\\
&= \lambda f(x,y)+f\left(x',y'\right).
\end{aligned}$$