الكلية متعددة التخصصات الناظور

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Université Mohamed Premier,

Faculté Pluridisciplinaire de Nador

Mathématiques 2
Chapitre 2: Matrices

Politiques économiques

Année Universitaire: 2023-2024

Table des matières

1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

2 Matrices

Les matrices sont un outil de calcul et de représentation des applications linéaires.

$\mathbb{K}$ désigne un corps. On peut penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Qu'est-ce qu'une matrice ?

Définition 1

- Une matrice A est un tableau rectangulaire d'éléments de $\mathbb{K}$.
- Elle est dite de taille $n \times p$ si le tableau possède n lignes et p colonnes.
- Les nombres du tableau sont appelés les coefficients de A.
- Le coefficient situé à la i-ème ligne et à la j-ème colonne est noté $a_{i,j}$.

Un tel tableau est représenté de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p} \quad (a_{i,j}).$$

Exemple 2.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

est une matrice 2×3 *avec, par exemple,* $a_{1,1} = 1$ *et* $a_{2,3} = 7$.

Encore quelques définitions :

Définition 2

- Deux matrices sont égales lorsqu'elles ont la même taille et que les coefficients correspondants sont égaux.
- L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Les éléments de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ sont appelés matrices réelles.

2.2 Matrices particulières

Voici quelques types de matrices intéressantes :
– Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite matrice carrée. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, ..., a_{n,n}$ forment la diagonale principale de la matrice.
– Une matrice qui n'a qu'une seule ligne ($n = 1$) est appelée matrice ligne ou vecteur ligne. On la note

$$A = (a_{1,1} \quad a_{1,2} \quad ... \quad a_{1,p})$$

– De même, une matrice qui n'a qu'une seule colonne ($p = 1$) est appelée matrice colonne ou vecteur colonne. On la note

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}$$

– La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la matrice nulle et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0. Dans le calcul matriciel, la matrice nulle joue le rôle du nombre 0 pour les réels.

2.3 Addition de matrices

Définition 3 (Somme de deux matrices)

Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur somme $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

En d'autres termes, on somme coefficients par coefficients. Remarque : on note indifféremment a_{ij} où $a_{i,j}$ pour les coefficients de la matrice A.

Exemple 2.2. *Si* $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *alors* $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
Par contre si $B' = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ *alors* $A + B'$ *n'est pas définie.*

Définition 4 (Produit d'une matrice par un scalaire)

Le produit d'une matrice $A = \left(a_{ij}\right)$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice $\left(\alpha a_{ij}\right)$ formée en multipliant chaque coefficient de A par α. Elle est notée $\alpha \cdot A$ (ou simplement αA).

Exemple 2.3. *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $\alpha = 2$ *alors* $\alpha A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice (-1)A est l'opposée de A et est notée $-A$. La différence $A - B$ est définie par $A + (-B)$.

Exemple 2.4. *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ *alors* $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

L'addition et la multiplication par un scalaire se comportent sans surprises :

Proposition 1. *Soient A, B et C trois matrices appartenant à $M_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\beta \in \mathbb{K}$ deux scalaires.*

1. $A + B = B + A$ *: la somme est commutative,*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *: la somme est associative,*
3. $A + 0 = A$ *: la matrice nulle est l'élément neutre de l'addition,*
4. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,
5. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

2.4 Multiplication de matrices

2.4.1 Définition du produit

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition 5

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

On peut écrire le coefficient de façon plus développée, à savoir :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} + \dots + a_{ip}b_{pj}.$$

Il est commode de disposer les calculs de la façon suivante

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \\ & & & \times & \end{pmatrix} \leftarrow B \\ A \rightarrow \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \times & \times & \times & \times \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & & | & \\ & & & | & \\ - & - & - & c_{ij} & \\ & & & & \end{pmatrix} \leftarrow AB \end{array}$$

Avec cette disposition, on considère d'abord la ligne de la matrice A située à gauche du coefficient que l'on veut calculer (ligne représentée par des $\times$ dans A) et aussi la colonne de la matrice B située au-dessus du coefficient que l'on veut calculer (colonne représentée par des $\times$ dans B). On calcule le produit du premier coefficient de la ligne par le premier coefficient de la colonne ($a_{i1} \times b_{1j}$), que l'on ajoute au produit du deuxième coefficient de la ligne par le deuxième coefficient de la colonne ($a_{i2} \times b_{2j}$), que l'on ajoute au produit du troisième. . .

2.5 Exemples

Exemple 2.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

On dispose d'abord le produit correctement (à gauche) : la matrice obtenue est de taille 2×2. Puis on calcule chacun des coefficients, en commençant par le premier coefficient $c_{11} = 1 \times 1 + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = 2$(au milieu), puis les autres (à droite).

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}\color{red}{1} & 2\\ \color{red}{-1} & 1\\ \color{red}{1} & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}\color{red}{1} & \color{red}{2} & \color{red}{3}\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\color{red}{2} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}\end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2 & 7\\ 3 & 11\end{pmatrix}\end{array}$$

Un exemple intéressant est le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne :

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

Alors $u \times v$ est une matrice de taille 1×1 dont l'unique coefficient est $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$. Ce nombre s'appelle le produit scalaire des vecteurs u et v.

Calculer le coefficient c_{ij} dans le produit $A \times B$ revient donc à calculer le produit scalaire des vecteurs formés par la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B.

2.6 Pièges à éviter

Premier piège

Le produit de matrices n'est pas commutatif en général. En effet, il se peut que AB soit défini mais pas BA, ou que AB et BA soient tous deux définis mais pas de la même taille. Mais même dans le cas où AB et BA sont définis et de la même taille, on a en général $AB \neq BA$.

Exemple 2.6.

$$\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14 & 3\\ -2 & -6\end{pmatrix} \quad \textit{mais} \quad \begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 1\\ 3 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 2\\ 29 & -2\end{pmatrix}.$$

Deuxième piège

$AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$. Il peut arriver que le produit de deux matrices non nulles soit nul. En d'autres termes, on peut avoir $A \neq 0$ et $B \neq 0$ mais $AB = 0$.

Exemple 2.7.

$$A = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 5\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad AB = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Troisième piège

$AB = AC$ n'implique pas $B = C$. On peut avoir $AB = AC$ et $B \neq C$.

Exemple 2.8.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad et \quad AB = AC = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

2.7 Propriétés du produit de matrices

Proposition 2.

1. *$A(BC) = (AB)C$: associativité du produit,*
2. *$A(B+C) = AB + AC$ et $(B+C)A = BA + CA$: distributivité du produit par rapport à la somme,*
3. *$A.0 = 0$ et $0.A = 0$.*

2.8 La matrice identité

La matrice carrée suivante s'appelle la matrice identité :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ses éléments diagonaux sont égaux à 1 et tous ses autres éléments sont égaux à 0. Elle se note I_n ou simplement I. Dans le calcul matriciel, la matrice identité joue un rôle analogue à celui du nombre 1 pour les réels. C'est l'élément neutre pour la multiplication. En d'autres termes :

Proposition 3. *Si A est une matrice $n \times p$, alors*

$$I_n.A = A \text{ et } A.I_p = A$$

2.9 Puissance d'une matrice

Dans l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, la multiplication des matrices est une opération interne : si $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in M_n(\mathbb{K})$.
En particulier, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même : on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$.
On peut ainsi définir les puissances successives d'une matrice :

Définition 6

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit les puissances successives de A par $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $A^p = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{p \text{ facteurs}}$.

Exemple 2.9. *On cherche à calculer A^p avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule A^2, A^3 et A^4 et on obtient :*

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad A^4 = A^3 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

2.10 Inverse d'une matrice : définition

Définition 7

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Sil existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que

$$AB = I \quad \text{et} \quad BA = I,$$

on dit que A est inversible. On appelle B l'inverse de A et on la note A^{-1}.

On verra plus tard qu'il suffit en fait de vérifier une seule des conditions $AB = I$ ou bien $BA = I$.

Exemple 2.10. *Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.*

Étudier si A est inversible, c'est étudier l'existence d'une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à coefficients dans K, *telle que $AB = I$ et $BA = I$. Or $AB = I$ équivaut à :*

$$AB = I \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette égalité équivaut au système :

$$\begin{cases} a + 2c = 1 \\ b + 2d = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases}$$

Sa résolution est immédiate : $a = 1, b = -\frac{2}{3}, c = 0, d = \frac{1}{3}$*. Il n'y a donc qu'une seule matrice possible, à savoir* $B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$*. Pour prouver qu'elle convient, il faut aussi montrer l'égalité* $BA = I$*. La matrice* A *est donc inversible et*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Exemple 2.11. *La matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas inversible. En effet, soit* $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *une matrice quelconque. Alors le produit*

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+5b & 0 \\ 3c+5d & 0 \end{pmatrix}$$

ne peut jamais être égal a la matrice identité.

Proposition 4 (Unicité)**.** *Si* A *est inversible, alors son inverse est unique.*

Proposition 5 (Inverse de l'inverse)**.** *Soit* A *une matrice inversible. Alors* A^{-1} *est aussi inversible et on a :*

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

Proposition 6 (Inverse d'un produit)**.** *Soient* A *et* B *deux matrices inversibles de même taille. Alors* AB *est inversible et*

$$(AB^{-1}) = B^{-1}A^{-1}$$

Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre !

2.11 Inverse d'une matrice : calcul

Nous allons voir une méthode pour calculer l'inverse d'une matrice quelconque de manière efficace. Cette méthode est une reformulation de la méthode du pivot de Gauss pour les systèmes linéaires. Auparavant, nous commençons par une formule directe dans le cas simple des matrices 2×2.

2.11.1 Matrices 2×2

Considérons la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposition 7. *Si* $ad - bc \neq 0$*, alors* A *est inversible et*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2.11.2 Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I. On fait simultanément les mêmes opérations élémentaires en partant de la matrice I . On aboutit alors à une matrice qui est A^{-1}.

En pratique, on fait les deux opérations en même temps en adoptant la disposition suivante : à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A \mid I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I \mid B)$. Et alors $B = A^{-1}$.
Ces opérations élémentaires sur les lignes sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul .
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

N'oubliez pas : tout ce que vous faites sur la partie gauche de la matrice augmentée, vous devez aussi le faire sur la partie droite.

2.11.3 Un exemple

Calculons l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
Voici la matrice augmentée, avec les lignes numérotées :

$$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}$$

On applique la méthode de Gauss pour faire apparaître des 0 sur la première colonne, d'abord sur la deuxième ligne par l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$ qui conduit à la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1$$

Puis un 0 sur la première colonne, à la troisième ligne, avec $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array}$$

On multiplie la ligne L_2 afin qu'elle commence par 1 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow -\frac{1}{8} L_2$$

On continue afin de faire apparaittre des 0 partout sous la diagonale, et on multiplie la ligne L_3. Ce qui termine la première partie de la méthode de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \qquad \text{puis} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_3 \leftarrow 2L_3$$

Il ne reste plus qu'à remonter pour faire apparaître des zéros au-dessus de la diagonale :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - \frac{5}{8}L_3 \quad \text{puis} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$$

Ainsi l'inverse de A est la matrice obtenue à droite et après avoir factorisé tous les coefficients par $\frac{1}{4}$, on a obtenu :

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 7 & -3 & -5 \\ -8 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Pour se rassurer sur ses calculs, on n'oublie pas de vérifier rapidement que $A \times A^{-1} = I$.

2.12 Matrices triangulaires, transposition, trace, matrices symétriques

2.12.1 Matrices triangulaires

Soit A une matrice de taille $n \times n$. On dit que A est triangulaire inférieure si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que A est triangulaire supérieure si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 2.12. *Deux matrices triangulaires inférieures (à gauche), une matrice triangulaire supérieure (à droite) :*

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Une matrice qui est triangulaire inférieure et triangulaire supérieure est dite diagronale. Autrement dit : $i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.

Exemple 2.13. *Exemples de matrices diagonales :*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Théorème 2.1. *Une matrice A de taille $n \times n$, triangulaire, est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.*

2.12.2 La transposition

Soit A la matrice de taille $n \times p$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Définition 8

On appelle matrice transposée de A la matrice A^T de taille $p \times n$ définie par :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i,j) de A^T est a_{ji}. Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de A^T (et réciproquement la j-ème colonne de A^T est la j-ème ligne de A).

Notation: La transposée de la matrice A se note aussi souvent ${}^tA$.

Exemple 2.14.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

L'opération de transposition obéit aux règles suivantes :

Théorème 2.2. *1.* $(A+B)^T = A^T + B^T$

2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $\left(A^T\right)^T = A$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. *Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a* $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Notez bien l'inversion : $(AB)^T = B^T A^T$, comme pour $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2.12.3 La trace

Dans le cas d'une matrice carrée de taille $n \times n$, les éléments $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sont appelés les éléments diagonaux.
Sa diagonale principale est la diagonale $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Définition 9

La trace de la matrice A est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,

$$trA = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Théorème 2.3. *Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :*

1. $tr(A+B) = trA + trB$
2. $tr(\alpha A) = \alpha trA$
3. $tr\left(A^T\right) = trA$
4. $tr(AB) = tr(BA)$

2.12.4 Matrices symétriques

Définition 10

Une matrice A de taille $n \times n$ est symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si

$$A = A^T,$$

ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$. Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Exemple 2.15. *Les matrices suivantes sont symétriques :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple 2.16. *Pour une matrice B quelconque, les matrices $B \cdot B^T$ et $B^T \cdot B$ sont symétriques. Preuve : $\left(BB^T\right)^T = \left(B^T\right)^T B^T = BB^T$. Idem pour $B^T B$.*

2.12.5 Matrices antisymétriques

Définition 11

Une matrice A de taille $n \times n$ est antisymétrique si

$$A^T = -A,$$

c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \ldots, n$.

Exemple 2.17.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls.

Exemple 2.18. *Toute matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.*
Preuve : Soit A *une matrice. Définissons* $B = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ *et* $C = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$*. Alors d'une part* $A = B + C$ *; d'autre part* B *est symétrique, car* $B^T = \frac{1}{2}\left(A^T + \left(A^T\right)^T\right) = \frac{1}{2}\left(A^T + A\right) = B$ *; et enfin* C *est antisymétrique,* car $C^T = \frac{1}{2}\left(A^T - \left(A^T\right)^T\right) = -C$.
Exemple :
Pour $A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$ *alors* $A = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}}_{\textit{synérique}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\textit{antisymertique}}$.