DÉTERMINANTS

Prof. Redouane Qesmi

Ecole Supérieure de Technologie de Fès

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah

Calcul d'un déterminant

Calcul d'un déterminant

- Un déterminant est un nombre.

Calcul d'un déterminant

- Un déterminant est un nombre.
- Il se présente sous la forme d'un tableau carré ayant donc même nombre de lignes et de colonnes.

Calcul d'un déterminant

- Un déterminant est un nombre.
- Il se présente sous la forme d'un tableau carré ayant donc même nombre de lignes et de colonnes.
- On le note det.

Calcul d'un déterminant

- Un déterminant est un nombre.
- Il se présente sous la forme d'un tableau carré ayant donc même nombre de lignes et de colonnes.
- On le note det.
- Il est dit d'ordre n quand il est composé de n lignes et n colonnes.

Calcul d'un déterminant

- Un déterminant est un nombre.
- Il se présente sous la forme d'un tableau carré ayant donc même nombre de lignes et de colonnes.
- On le note det.
- Il est dit d'ordre n quand il est composé de n lignes et n colonnes.
- Il se calcule par récurrence en utilisant :

1. la défnition d'un déterminant 2×2 qui est

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. la formule de récurrence suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

1. la défnition d'un déterminant 2×2 qui est

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

2. la formule de récurrence suivante :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

oú $\det A_{ij}$ est le déterminant d'ordre $n-1$ obtenu en rayant dans

$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ la ième ligne et la jème colonne.

Exemple1. Calculer le déterminant suivant : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Propriétés importantes

Propriétés importantes

- $\forall n \geq 2, \det I_n = 1.$

Propriétés importantes

- $\forall n \geq 2, \det I_n = 1$.
- Une matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$

Propriétés importantes

- $\forall n \geq 2, \det I_n = 1.$
- Une matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K)$,
$$\det AB = \det A \det B$$

Propriétés importantes

- $\forall n \geq 2, \det I_n = 1.$
- Une matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K),$
$$\det AB = \det A \det B$$
- Si A est inversible
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Propriétés importantes

- $\forall n \geq 2, \det I_n = 1.$
- Une matrice A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$
- $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(K)$,
$$\det AB = \det A \det B$$
- Si A est inversible
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$
- $\det A = \det {}^t A$

Règles de calculs

On appelle rangée de A, toute ligne ou toute colonne de A.

- Si tous les éléments d'une rangée d'un déterminant sont nuls, alors ce déterminant est nul.

Règles de calculs

On appelle rangée de A, toute ligne ou toute colonne de A.

- Si tous les éléments d'une rangée d'un déterminant sont nuls, alors ce déterminant est nul.
- Si l'on permute deux rangées paralléles dans un déterminant, alors on change le signe de ce déterminant.

Règles de calculs

On appelle rangée de A, toute ligne ou toute colonne de A.

- Si tous les éléments d'une rangée d'un déterminant sont nuls, alors ce déterminant est nul.
- Si l'on permute deux rangées paralléles dans un déterminant, alors on change le signe de ce déterminant.
- Si deux rangées parallèles dans un déterminant sont proportionnelles, alors le déterminant est nul.

- On ne modifie pas le résultat du calcul d'un déterminant, lorsque l'on ajoute une rangée, une combinaison linéaire d'autres rangées parallles celle-ci.

- On ne modifie pas le résultat du calcul d'un déterminant, lorsque l'on ajoute une rangée, une combinaison linéaire d'autres rangées parallles celle-ci.

- Si l'on multiplie tous les éléments d'une rangée par un scalaire α, alors le déterminant est multiplié par α.

- On ne modifie pas le résultat du calcul d'un déterminant, lorsque l'on ajoute une rangée, une combinaison linéaire d'autres rangées parallles celle-ci.

- Si l'on multiplie tous les éléments d'une rangée par un scalaire α, alors le déterminant est multiplié par α.

- Si on multiplie une matrice A par un scalaire α alors on a : $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

- On ne modifie pas le résultat du calcul d'un déterminant, lorsque l'on ajoute une rangée, une combinaison linéaire d'autres rangées parallles celle-ci.
- Si l'on multiplie tous les éléments d'une rangée par un scalaire α, alors le déterminant est multiplié par α.
- Si on multiplie une matrice A par un scalaire α alors on a : $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.
- Si une rangée du déterminant est combinaison linéaire d'autres rangées parallles, alors le déterminant est nul.

Exemple2. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

et

$$\begin{vmatrix} \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1-2i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} \\ \frac{1+i}{3} & \frac{1+i}{3} & \frac{1-2i}{3} \end{vmatrix}.$$

Inverse d'une matrice carée A par la méthode des cofacteurs

- Définition

On appelle matrice des cofacteurs de A la matrice dont le terme générale est donnée par

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$$

oú A_{ij}est le mineur de A (dèterminant obtenu a partir de det A en supprimant la ième ligne et la jème colonne).

On note $Co(A)$. On a

$$\mathrm{Co(A)} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Notons que A est une matrice inversible ssi $\det A \neq 0$. Dans ce cas

l'inverse de la matrice A est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A'$$

où A' est la matrice dèfinie par $A' =^t Co(A)$ et $Co(A)$ est la matrice

des cofacteurs de A.

- Exemple

Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$
On a $\det A = -32$. $\det A \neq 0$ alors A est inversible...
$$Co(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$
D'où
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Co(A) = -\frac{1}{32} \begin{pmatrix} 24 & -18 & -4 \\ 28 & -29 & 6 \\ -20 & 15 & -2 \end{pmatrix}.$$

Résolution d'un systéme de Cramer

- Dèfinition.

Soilt le systéme linéaire $n \times n$ $AX = B$. Ce systéme est de Cramer ssi $det(A)$ est non nul.

- Résolution.

Un tel système a une seule solutuion qui est $X = A^{-1}B$.

Cette solution peut s'exprimer a l'aide des déterminants comme suit:

Le systéme de Cramer

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

admet la solution unique $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dfinie par

$$x_i = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & b_2 & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{\det A} \det A_i$$

oú A_i est la matrice obtenue a partir de A en remplacent la *ieme* colonne de A par le vecteur colonne B.

- Exemple.

Soit le système $\begin{cases} 3x + y - 2z & = 1 \\ x - y + z & = -1 \\ 2x + 3y - z & = 2. \end{cases}$

On a $\det A = -13 \neq 0$. Donc

$x = -\frac{1}{13} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{13}, y = -\frac{1}{13} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \frac{8}{13}$ et
$z = -\frac{1}{13} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -\frac{4}{13}$.