常用知识点回顾

汇 报 人 | XXX

指导老师 | XXX

目 录 CONTENTS

1、连续函数的导数

1.1、单变量函数的导数

一阶导数定义：设函数$y = f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，

若极限

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在，则称函数f在点x_0可导，记作 $f'(x_0)$.

计算： 基本初等函数导数公式

四则运算和复合函数的导数

二阶导数定义：若函数f的导函数f'在点x_0可导，

则称f'在点x_0的导数为f在点x_0的二阶导数，

记作 $f''(x_0)$ ，即

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = f''(x_0),$$

一般，我们可由f的n-1阶导函数定义n阶导数

函数乘积n阶导数计算的莱布尼茨公式

$$(uv)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

1、连续函数的导数

1.2、多变量函数的偏导数

定义：设函数$z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$. 若$(x_0,y_0)\in D$,且$f(x,y_0)$在x_0的某邻域内有定义，则当极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在时，称这个极限为函数f在点(x_0,y_0)关于x的偏导数，记作 $f_x(x_0,y_0)$或 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}$

计算：复合函数的链式法则

若函数 $z=f(x,y),x=\varphi(s,t),y=\psi(s,t)$ ，则

$$\frac{\partial z}{\partial s}|_{(s,t)}=\frac{\partial z}{\partial x}|_{(x,y)}\frac{\partial x}{\partial s}|_{(s,t)}+\frac{\partial z}{\partial y}|_{(x,y)}\frac{\partial y}{\partial s}|_{(s,t)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}|_{(s,t)}=\frac{\partial z}{\partial x}|_{(x,y)}\frac{\partial x}{\partial t}|_{(s,t)}+\frac{\partial z}{\partial y}|_{(x,y)}\frac{\partial y}{\partial t}|_{(s,t)}.$$

1、连续函数的导数

1.3、多变量函数的高阶偏导数计算

由于$z=f(x,y)$的偏导数$f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$,仍是自变量x与y的函数，如果它们关于x与y的偏导数

也存在，则称函数f具有二阶偏导数，二元函数的二阶偏导数有以下四种情形：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y).$$

对n元函数：$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

1阶导数为梯度 $\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$

2阶导数为黑塞矩阵 $\nabla^2 f=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}$

2、方向导数、梯度、散度

2.1、方向导数

定义：设三元函数f在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某邻域$U(P_0)\subset\mathbb{R}^3$有定义，$l$为从点$P_0$出发的射线，$P(x,y,z)$为$l$上且含于$U(P_0)$内的任一点，以$\rho$表示$P$与$P_0$两点间的距离.若极限

$$\lim_{\rho\to0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\Delta_l f}{\rho}$$

存在，则称此极限为函数f在点P_0沿方向l的方向导数.记作：$\frac{\partial f}{\partial l}|_{p_0}, f_l(p_0)$或$f_l(x_0,y_0,z_0)$

定理：若函数f在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$可微，则f在点P_0沿任一方向l的方向数都存在，且

$$f_l(p_0)=f_x(p_0)\cos\alpha+f_y(p_0)\cos\beta+f_z(p_0)\cos\gamma$$

2、方向导数、梯度、散度

2.2、梯度定义

定义：若$f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的存在对所有自变量的偏导数，则称向量$(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))$

为函数f在点P_0的梯度，记作

$$gradf=(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))$$

引入梯度算子

$$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$$

梯度可以写作

$$\mathrm{grad}\,f=\nabla f$$

向量$gradf$的长度（模）为 $|\mathrm{grad}\,f|=\sqrt{f_x(P_0)^2+f_y(P_0)^2+f_z(P_0)^2}$

1)、$\nabla(u+c)=\nabla u$

2)、$\nabla(\alpha u+\beta v)=\alpha\nabla u+\beta\nabla v$

3)、$\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$

4)、$\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$

2、方向导数、梯度、散度

2.3、梯度的含义

f 可微时，记 $l_0=(\cos\alpha,\cos\beta,cos\gamma)$ 为l方向的单位方向向量，则方向导数可写为

$$f_l(p_0)=\nabla f(p_0)\cdot l_0=|\nabla f(p_0)|\cos\theta$$

θ是梯度向量 $\nabla f(p_0)$ 与 l_0 的夹角

可知,当$\theta=0$时，$f_l(p_0)$ 取得最大值$|\nabla f(p_0)|$ ，

即f在点P_0的梯度方向是f的值增长最快的方向，

沿这一方向的变化率就是梯度的模.

而梯度的反方向就是f的值减小最快的方向

2.4、散度

设空间V上的向量函数

$$A(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

A在点$(x,y,z)\in V$的散度

$$divA=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

于是

$$divA=\nabla\cdot A$$

拉普拉斯算子

$$\Delta=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

3、矩阵运算及性质

3.1、基本运算

1)、$C = A \pm B, c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, (A, B, C \in R^{m\times n})$

2)、$C = \alpha A, \quad c_{ij} = \alpha a_{ij}$

3)、$C = A * B, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, (A \in R^{m\times n}, B \in R^{n\times p}, C \in R^{m\times p})$

$C = A.* B, \quad c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}, (A, B, C \in R^{m\times n})$

4)、转置矩阵 $C = A^T, \quad c_{ij} = a_{ji}, (A \in R^{m\times n}, C \in R^{n\times m})$

有 $(AB)^T = B^T A^T$.

5)、单位矩阵 $\mathrm{I} = \left(e_1, e_2, \cdots, e_n\right) \in R^{n\times n}$,

6)、非奇异矩阵 设$A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times n}$, 若$AB = BA = I$,则称$B$是$A$的逆矩阵，记$A^{-1}$

有（$A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.如果A^{-1}存在，则称A为非奇异矩阵.

如果$A, B \in R^{n\times n}$为非奇异矩阵, 则 $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

3、矩阵运算及性质

3.2、矩阵的行列式与特征值

1. 矩阵的行列式, $A \in R^{n\times n}, \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, i = 1,2,\cdots,n.$

1)、$\det(AB) = \det(A)\det(B), \quad A, B \in R^{n\times n}$

2)、$\det(A^T) = \det(A), \quad A \in R^{n\times n}$

3)、$\det(cA) = c^n \det(A), \quad A \in R^{n\times n}$

4)、$\det(A) \neq 0 \quad \Leftrightarrow A$为非奇异矩阵, $A \in R^{n\times n}$

2.矩阵的特征值$A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$,若存在数$\lambda$和非零向量$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \in R^n$,使

$$Ax = \lambda x$$

则称λ为A的特征值，x为A对应λ的特征向量.

3.矩阵A的特征多项式 $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

若$A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.则

$\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$,

A 的迹$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

4.1、线性空间

$\mathbb{F}$是一个域，设V是一个 **非空**集合．在集合V的元素之间定义了一种代数运算，叫做加法；这就是说，给出了一个法则，对于V中任意两个元素α与β，在V中都有唯一的一个元素γ 与它们对应，称为α与β的和，记为$\gamma=\alpha+\beta$．在域$\mathbb{F}$与集合V的元素之间还定义了一种运算，叫做数量乘法；这就是说，对于域$\mathbb{F}$中任一数k与V中任一元素α，在V中都有唯一的一个元素δ与它们对应，称为k与α的数量乘积，记为$\delta=k\alpha$．如果加法与数量乘法满足下述规则，那么V称为域$\mathbb{F}$上的线性空间．

加法满足下面四条规则：

1)$\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

2)$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

3) 在V中有一个元素0，对于V中任一元素α都有$\alpha+0=\alpha$;

4) 对于V中每一个元素α，都有V中的向量β，使得$\alpha+\beta=0$.

数量乘法满足下面两条规则：

5)$1\alpha=\alpha$;

6)$k(l\alpha)=(kl)\alpha$.

数量乘法与加法满足下面两条规则：

7)$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$;

8)$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$.

4、线性空间、内积与范数

4.2、内积

定义 设X是数域K上的线性空间，对$\forall u,v\in X$,有K中一个数与之对应，记为(u,v)，满足以下条件:

1)、$(u,v)=\overline{(v,u)}$

2)、$\left(\alpha u,v\right)=\alpha(u,v)$

3)、$(u+v,w)=(u,w)+(v,w)$

4)、$(u,u)\geq 0$,当且仅当$u=0$时,$(u,u)=0$

则称(u,v)为X上u和v的内积.

例1、设 $x,y\in R^n,x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,

则

$$(x,y)=x^T y=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$$

例2、$C[a,b]$上带权内积

$$(f(x),g(x))=\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$$

4、线性空间、内积与范数

4.3、范数

定义 设S为线性空间，$x \in S$，若存在唯一实数$\|\cdot\|$，满足条件：

1）、$\|x\| \geq 0$，当且仅当$x=0$时，$\|x\|=0$;(正定性）

2）、$\|\alpha x\|=|\alpha| \cdot \|x\|, \alpha \in R$;（齐次性）

3）、$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|, x, y \in S$.（三角不等式）

则称$\|\cdot\|$为线性空间上S的范数，S与$\|\cdot\|$一起称为赋范线性空间

例1、对 R^n上的向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，常用的范数有：

$\infty-$范数 $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$

$1-$范数 $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$

$2-$范数 $\|x\|_2 = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$

例2、对连续函数空间$C[a,b]$，$f \in C[a,b]$

$\infty-$范数 $\|f\|_\infty = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$

$1-$范数 $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$

$2-$范数 $\|f\|_2 = (\int_a^b f^2(x) dx)^{\frac{1}{2}}$

4、线性空间、内积与范数

4.4、矩阵的范数

定义 如果矩阵 $A \in R^{n\times n}$ 的某个非负的实值函数 $N(A)=\|A\|$ 满足条件:

1）、$\|A\|\geq 0$,当且仅当$A=0$时,$\|A\|=0$;(正定性)

2）、$\|cA\|=|c|\cdot\|A\|, c\in R$;（齐次性）

3）、$\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$（三角不等式）

4）、$\|AB\|\leq\|A\|\ \ \|B\|$.

则称$N(A)$是 $R^{n\times n}$ 上的一个矩阵范数

常用矩阵范数: 行−范数 $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$

列−范数 $\|A\|_1=\max\limits_{1\leq j\leq n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$

$2-$范数 $\|A\|_2=(\lambda_{\max}(A^TA))^{\frac{1}{2}}$

把矩阵A看作mn维向量

$$\|A\|=(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2)^{\frac{1}{2}}$$

5、泰勒公式

5.1、一元函数的泰勒公式

$$f(x)=f\left(x_0\right)+f^{\prime}\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\frac{f^{\prime\prime}\left(x_0\right)}{2!}\left(x-x_0\right)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x-x_0\right)^n+R_n(x) \quad (1)$$

其中余项 $R_n(x)$ 有三种形式，分别为**积分余项**

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \mathrm{dt} \quad (2)$$

Lagrange余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}, \qquad \xi\in\left(x_0,x\right) \quad (3)$$

和**Peano余项**

$$R_n(x)=o\left(\left(x-x_0\right)^n\right) \quad (4)$$

第二部分

研 究 内 容

RESEARCH CONTENTS

6、离散情形下导数的计算

6.1、数字图像获取——取样和量化

一副连续的图像$f(x,y)$，经取样和量化转换为一副数字图像

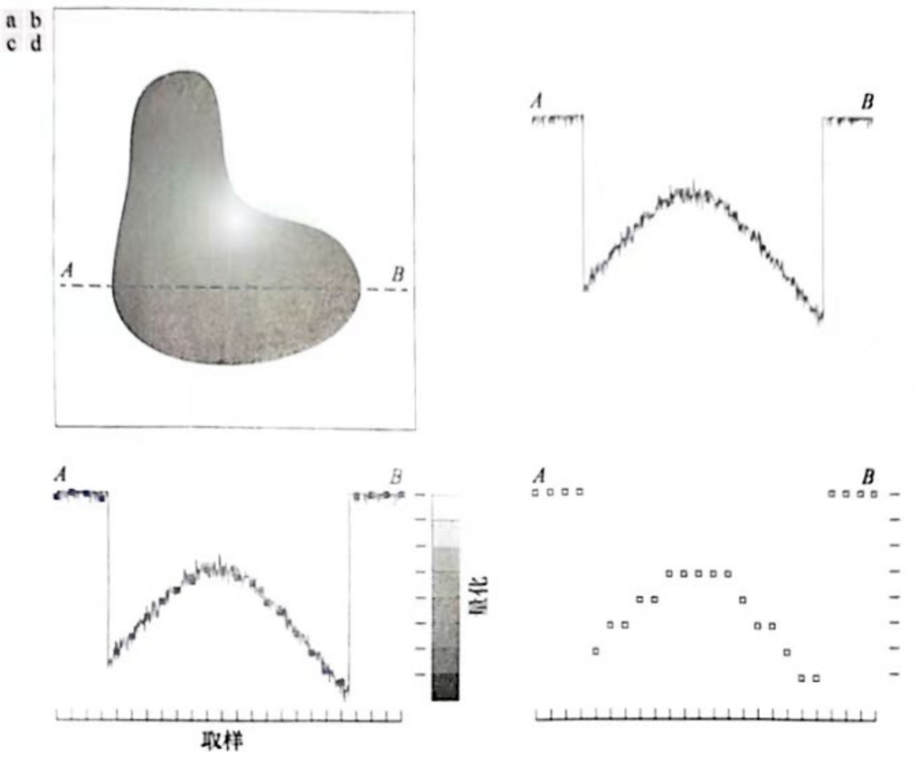
取样：对图像空间坐标离散化

量化：对图像幅度离散化

6.2、数字图像表示

计算机中一般用二维矩阵存储一副数字图像

$$f(x,y)=\begin{pmatrix} f(0,0) & f(0,1) & \cdots & f(0,N-1) \\ f(1,0) & f(1,1) & \cdots & f(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(M-1,0) & f(M-1,1) & \cdots & f(M-1,N-1) \end{pmatrix}$$



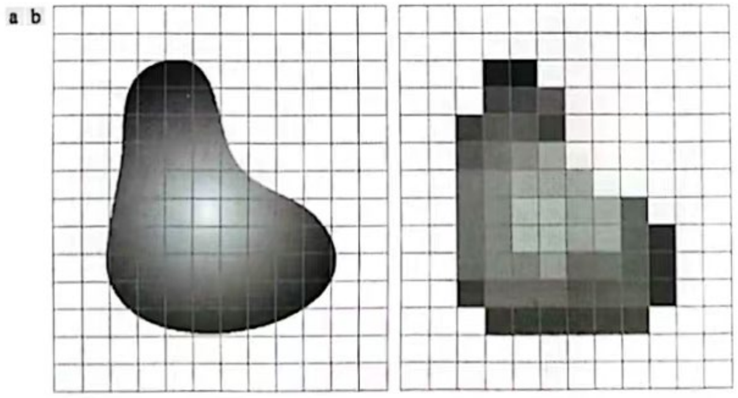


图 2.17 (a)投影到传感器阵列上的连续图像；(b)图像取样和量化后的结果

6、离散情形下导数的计算

6.3、单变量函数导数的计算

设函数$f(x)$定义在$[0, M]$上，对$[0, M]$离散

则一阶向前差分

$$f'(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{\Delta x}, i=0,1,\cdots,N-1.$$

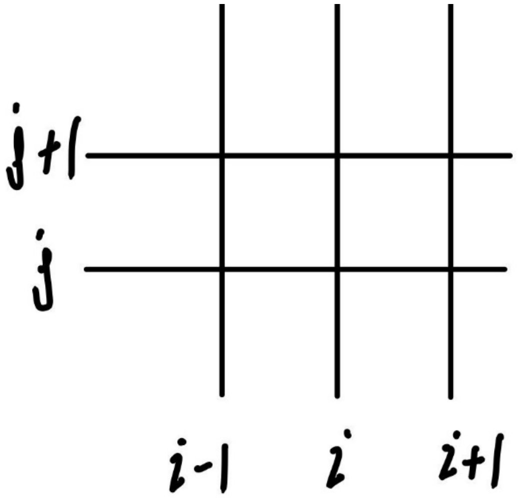
二阶向前差分

$$f''(x_i)=\frac{f(x_{i+1})-2f(x_i)+f(x_{i-1})}{(\Delta x)^2}, i=1,\cdots,N-1.$$

6、离散情形下导数的计算

6.3、二元函数导数的计算

设函数$f(x,y)$定义在$[0,M]\times[0,N]$上，对$[0,M]\times[0,N]$离散



则一阶向前差分

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i,y_j)=\frac{f(x_{i+1},y_j)-f(x_i,y_j)}{\Delta x},\quad \begin{array}{l} i=0,1,\cdots,M-1. \\ j=0,1,\cdots,N-1. \end{array}$$

二阶向前差分

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i,y_j)=\frac{f(x_{i+1},y_j)-2f(x_i,y_j)+f(x_{i-1},y_j)}{(\Delta x)^2},\quad \begin{array}{l} i=1,\cdots,M-1. \\ j=1,\cdots,N-1. \end{array}$$

7、凸集、凸函数、利普希茨函数

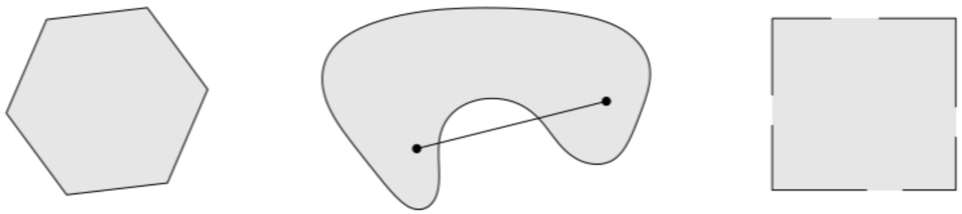
7.1、凸集

定义：如果集合 C 中任意两点的连线线段仍在 C 中，

则称C是凸集

即对任意$x_1, x_2 \in C, \theta \in [0,1]$,

有$\theta x_1 + (1-\theta)x_2 \in C$



7.2、凸函数

定义：定义在凸集C上的函数$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$是凸函数，

如果满足对任意$x, y \in \mathrm{C}, \theta \in [0,1]$， 有

$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta)f(y)$$

几何意义：f图像上任意两点的弦位于函数图像上方

当f可微时，凸函数的等价定义

$$f(y) \ge f(x) + \nabla f(x)^T (y-x)$$

强凸函数：上述不等式变为严格不等式，$\theta \in (0,1)$时.

μ-强凸函数：

$$f(x) = h(x) + \frac{\mu}{2} \| x - x_0 \|^2$$

$$f(y) \ge f(x) + \nabla f(x)^T (y-x) + \frac{\mu}{2} \| y - x \|^2$$

7、凸集、凸函数、利普希茨函数

7.3、利普希茨函数

定义：如果函数f满足利普希茨条件：

存在非负常数L使得对任意的$x, y \in C$，都有

$$\|\nabla^p f(x) - \nabla^p f(y)\| \le L\|x - y\| \qquad \forall x, y \in C. \qquad (1)$$

则称f是利普希茨函数.

$p = 0$，时，$|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$

性质：

1、有界性（变化率有限）

2、局部光滑性（存在任意阶导数）

3、一致连续性

用 $C_L^p(C)$ 表示满足（1）的函数族，则有以下性质

Lipschitz函数的性质（在凸集 C 上）

lemma 1.2.2. （用$\nabla^2 f(x)$表示的$\mathcal{C}_L^1(C)$的等价条件）

$$f \in \mathcal{C}_L^1(C) \iff \|\nabla^2 f(x)\| \le L \iff -LI_n \le \nabla^2 f(x) \le LI_n, \quad \forall x \in C \quad (4)$$

lemma 1.2.3. 若 $f \in \mathcal{C}_L^1(C)$，则 $\forall x, y \in C$ 有

$$|\, f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x),\, y - x\rangle \,| \le \frac{L}{2}\|y - x\|^2 \qquad (5)$$

lemma 1.2.4. 若 $f \in \mathcal{C}_M^2(C)$，则 $\forall x, y \in C$ 有

$$\left\|\nabla f(y) - \nabla f(x) - \left\langle \nabla^2 f(x),\, y - x\right\rangle\right\| \le \frac{M}{2}\|y - x\|^2 \qquad (6.1)$$

$$\left|\, f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x),\, y - x\rangle - \frac{1}{2}\left\langle \nabla^2 f(x)(y - x),\, y - x\right\rangle \,\right| \le \frac{M}{6}\|y - x\|^3 \qquad (6.2)$$

Cor 1.2.2. 若 $f \in \mathcal{C}_M^2(C)$，则 $\forall x, y \in C$ 有

$$\nabla^2 f(x) - M\|y - x\|I_n \le \nabla^2 f(y) \le \nabla^2 f(x) + M\|y - x\|I_n \qquad (6.3)$$

$$-M\|y - x\|I_n \le \nabla^2 f(y) - \nabla^2 f(x) \le M\|y - x\|I_n$$

8、优化问题、线性规划、凸优化

8.1、数学优化问题

常见形式:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad f(x) \\
&s.t. \quad
\begin{aligned}
&g_i(x) \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, s, \\
&h_j(x) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, t.
\end{aligned}
\end{aligned}
$$

$f(x)$:目标函数,

决策变量,

约束条件,

可行解，可行域

- 数学优化
  - 线性优化
    - 线性规划
    - 整数规划
  - 非线性优化
    - 凸优化
    - 二次优化

局部最优解，全局最优解

8、优化问题、线性规划、凸优化

8.2、线性规划标准型

标准型特点：

1）、目标函数极小化；
2）、约束条件右端常数项$b_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,m$；
3）、决策变量取值均非负；
4）、除决策变量取值范围外，所有约束条件均为等式.

$$\text{Min } Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,n \\ b_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

也可写成：

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = 1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geq 0, j = 1,2,\cdots,n$$

用矩阵表示：

$$Min \quad Z = CX$$

$$s.t. \quad AX = b$$

$$X \geq 0$$

8、优化问题、线性规划、凸优化

8.2、线性规划标准型

【例1-12】将下列线性规划化为标准型

Max $Z=-x_1+x_2-3x_3$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3\le 8 & (1) \\ x_1+x_2+x_3\ge 3 & (2) \\ -3x_1+x_2+2x_3\le -5 & (3) \\ x_1\ge 0、x_2\ge 0、x_3\text{无符号要求} \end{cases}$$

Min $Z'=x_1-x_2+3x_3'-3x_3''$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3'-x_3''+x_4=8 \\ x_1-x_2+x_3'-x_3''-x_5=3 \\ 3x_1-x_2-2(x_3'-x_3'')-x_6=5 \\ x_1、x_2、x_3'、x_3''、x_4、x_5、x_6\ge 0 \end{cases}$$

8、优化问题、线性规划、凸优化

8.2、线性规划标准型

【例1-12】将下列线性规划化为标准型

$$\text{Max } Z=-x_1+x_2-3x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3\le 8 & (1) \\ x_1+x_2+x_3\ge 3 & (2) \\ -3x_1+x_2+2x_3\le -5 & (3) \\ x_1\ge 0、x_2\ge 0、x_3\text{无符号要求} \end{cases}$$

【解】（1）因为x_3无符号要求，即x_3取正值也可取负值，标准型中要求变量非负，所以令

$$x_3=x_3'-x_3'',\text{其中}x_3',x_3''\ge 0$$

(2) 第一个约束条件是≤号，在≤左端加入松驰变量 (slack variable) x_4，$x_4\ge 0$,化为等式；

(3)第二个约束条件是≥号，在≥号 左端减去剩余变量 (Surplus variable)x_5，$x_5\ge 0$。也称松驰变量

(4)第三个约束条件是≤号且常数项为负数，因此在≤左边加入松驰变量x_6，$x_6\ge 0$，同时两边乘以－1。

（5）目标函数是最大值，为了化为求最小值，令Z′=－Z,得到max Z′=－Z，即当Z达到最大值时Z′达到最小值，反之亦然。

8、优化问题、线性规划、凸优化

8.3、对偶问题

线性规划的原问题与对偶问题

$$(P)\quad Min \quad Z = cX \qquad s.t.\begin{cases} AX \geq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

$$(D)\quad Max \quad w = Yb \qquad s.t.\begin{cases} YA \leq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

$$\min z = 8x_1 + 16x_2 + 12x_3$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 4x_3 \geq 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\max w = 2y_1 + 3y_2$$

$$s.t.\begin{cases} y_1 + 2y_2 \leq 8 \\ 4y_1 \leq 16 \\ 4y_2 \leq 12 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

原问题（对偶问题）	对偶问题（原问题）
目标函数min z	目标函数max w
约束条件： m个 第i个约束类型为“≤” 第i个约束类型为“≥” 第i个约束类型为“＝”	变量数： m个 第i个变量≤0 第i个变量≥0 第i个变量是自由变量
变量数：n个 第j个变量≥0 第j个变量≤0 第j个变量是自由变量	约束条件：n个 第j个约束类型为“≤” 第j个约束类型为“≥” 第j个约束类型为“＝”
决策系数 c	右端项c
右端项b	决策系数b
约束矩阵的第j列	约束矩阵的第j行

8、优化问题、线性规划、凸优化

8.3、对偶理论

1.弱对偶定理：

若X^0是原问题(P)的可行解，Y^0是对偶问题(D)的可行解，则$cX^0 \geq Y^0\mathrm{b}$

表明：

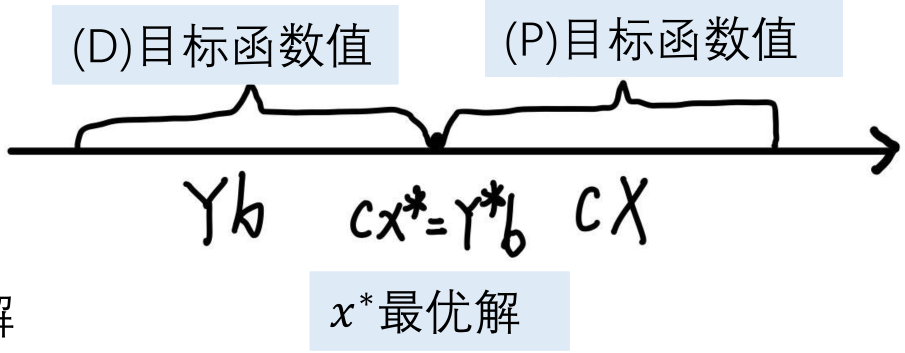
（P）的任一可行解对应目标函数值总是（D）目标函数值的上界，
（D）的任一可行解对应目标函数值总是（P）目标函数值的下界.

2.强对偶定理：

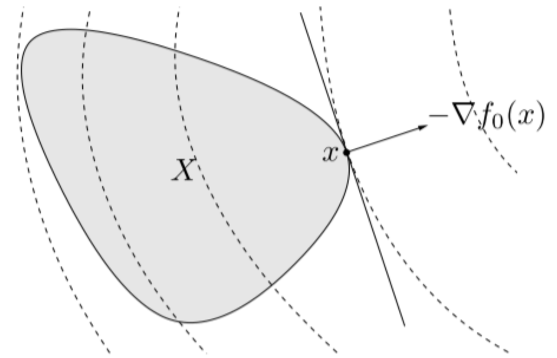
若X^0，Y^0分别是原问题(P)和对偶问题(D)的可行解，

且$cX^0 = Y^0\mathrm{b}$，则X^0，Y^0分别是原问题(P)和对偶问题(D)的最优解

（若（P）和（D）中有一个问题有最优解，则另一个问题也有最优解，且它们的目标函数值相等）



8、优化问题、线性规划、凸优化



8.4、凸优化问题

定义：一个凸优化问题是指

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
s.t. \quad & g_i(x) \geq 0, \quad i = 1,2,\cdots,s, \\
& h_j(x) = 0, \quad j = 1,2,\cdots,t.
\end{aligned}
$$

目标函数是凸函数，可行域是凸集.

（目标函数是凸函数，不等约束函数是凸函数，

等式约束函数是仿射函数）

性质：1、局部最优解是全局最优解

2、可微函数最优解的一个判别准则

当凸优化问题的目标函数f是可微的，有

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$$

判别准则：

x是最优解 $\Leftrightarrow \nabla f(x)^T (y-x) \geq 0,$ 对任意$y \in X$(可行域)

3、等式约束优化问题

$$
\begin{aligned}
Min \quad & f(x) \\
s.t. \quad & Ax = b.
\end{aligned}
$$

最优判别准则：

x是最优解 $\Leftrightarrow \nabla f(x)^T (y-x) \geq 0,$ 对任意$y \in X$(可行域)

感谢老师的悉心指导

THANK YOU!

汇报人 | XXX　　　　指导老师 | XXX