任意两个实数序列的不等式及其研究

摘要:非弹性碰撞是非常普遍的自然现象.因此，研究非弹性碰撞的数量关系具有十分重要的物理意义.共速运动就是典型的非弹性碰撞.本文首先讨论了共速运动的能量损耗问题，得到了共速运动的能量损耗方程.从非弹性碰撞的角度出发，导出了基于自然数域的不等式，再推广到基于实数域的任意两个实数序列的不等式，并对该不等式进行了推广和严格的数学证明，讨论了一些特例.定义了一种新型数列并讨论了有关性质.该不等式为求解相关问题和优化计算过程提供了有力的数学工具.

关键词:非弹性碰撞；共速运动；实数序列；不等式；向量.

Abstract: Inelastic collision is very common natural phenomenon. So it is very important to study the quantity relation of inelastic collision. The motion of common velocity is a typical inelastic collision. This article first discusses the energy loss problem of the common motion and to get a energy loss equation for the motion of the common velocity. From the point of view that themotion is inelastic collision, the inequality based on natural number field is derived. Then the inequality of any two real numbers sequences based on real number field is extended. Finally, strict mathematical proofs are given and discuss some special cases. At the end of this paper, the inequality is specially extended. This inequality can provide a powerful

mathematical tool for solving related problems and optimizing calculation process.

Keywords: Inelastic collision； Motion of common velocity； Real number sequence；Inequality；Vector.

1. 基于自然数域的不等式

非弹性碰撞是一种常见的自然现象.在遇到相关问题时，我们通常使用动量守恒定律来解决.共速运动是典型的非弹性碰撞.本文研究了共速运动的能量损失问题，揭示了其定量关系.

在理想环境下,假设有$n(n \in \mathbb{N}^*)$个物体在水平面.在某个时刻发生碰撞.碰撞后，发生共速运动.碰撞过程中有如下关系:假设碰撞前系统总动能为E_1，碰撞后系统总动能为E_2，共速后系统的速度大小为v_0.有：

$$E_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2}v_0^2\sum_{i=1}^{n} m_i$$

碰撞时动量守恒，则：

$$\sum_{i=1}^{n} m_i v_i = v_0 \sum_{i=1}^{n} m_i$$

$$v_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

$$E_2 = \frac{(\sum_{i=1}^{n} m_i v_i)^2}{2\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

假设ΔE是系统失去的动能.有$\Delta E = E_1 - E_2$，则有：

(1.1) $$\Delta E = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n} m_i v_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} m_i}\right] \qquad (n \in \mathbb{N}^*; i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

因为共速运动是非弹性碰撞,所以$\Delta E > 0$.因为质量和速度大小的取值范围是自然数的集合,所以当系统的质量或速度大小或都取0时易知$\Delta E = 0$.

综上所述,得到基于自然数域的不等式:对于自然数序列$\{m_n\}$和$\{v_n\}$有

(1.2) $$\sum_{i=1}^{n} m_i \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} m_i v_i\right)^2 \qquad (m_i, v_i \in \mathbb{N}; n \in \mathbb{N}^*; i = 1,2,3,\cdots,n)$$

2. 推广和证明

那么可以合理地猜测:是否可以将(1.2)推广到实数域呢?

即对于$n(n \in N^*)$相同的任意两个实数序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$均有：

(2.1) $$\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \qquad (a_i, b_i \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*; i = 1,2,3,\cdots,n)$$

下面给出证明：

把(2.1)拆开就得到了：

① $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(a_1 b_1^2 + a_2 b_2^2 + \cdots + a_n b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$

② $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + a_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2 - a_1 b_1^2\right) + a_2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2 - a_2 b_2^2\right) + \cdots + a_n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2 - a_n b_n^2\right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + a_1 b_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - a_1 b_1\right) + a_2 b_2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - a_2 b_2\right) + \cdots + a_n b_n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i - a_n b_n\right)$

③ $a_1 a_2(b_1^2 + b_2^2) + a_1 a_3(b_1^2 + b_3^2) + \cdots + a_1 a_n(b_1^2 + b_n^2) + a_2 a_3(b_2^2 + b_3^2) + a_2 a_4(b_2^2 + b_4^2) + \cdots + a_2 a_n(b_2^2 + b_n^2) + \cdots + a_{n-1} a_n(b_{n-1}^2 +$

$b_n^2) \geq 2(a_1a_2b_1b_2 + a_1a_3b_1b_3 + \cdots + a_1a_nb_1b_n + a_2a_3b_2b_3 +$

$a_2a_4b_2b_4 + \cdots + a_2a_nb_2b_n + \cdots + a_{n-1}a_nb_{n-1}b_n)$

因为$a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (a, b \in \mathbb{R})$

所以③成立.

所以(2.1)得证.

即(2.1) $\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \quad (a_i, b_i \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*; i = 1,2,3,\cdots, n)$成立.

易知,(2.1)的二维形式是:

(2.2) $$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{ac^2} + \mathbf{bd^2}) \geq (\mathbf{ac} + \mathbf{bd})^2 \qquad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R})$$

观察(2.2)可知当$a \neq 0$, $b \neq 0$和$a + b \neq 0$时; 只有在$c = d$的条件下(2.2)取等号.

特别地，在一维情况下，即当$n = 1$时(2.1)恒取等号.

在$n(n \geq 1)$维情形中，（2.1）的等式条件为以下的任意一条:

⑴当$\{b_n\}$中的项都相等.

⑵当$\{b_n\}$中的项都为零.

⑶当$\{a_n\}$中的项都为零.

⑷当$\{a_n\}$中有$(n-1)$个项都为零.

3. 不等式的推广

因为③是正确的,根据向量的运算法则,得到（2.1）的向量形式.

因为$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 \geq 2\vec{a}\vec{b}$

所以（2.1）的向量形式是:

(3.1) $$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{a}}_i \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{a}}_i \vec{\mathbf{b}}_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathbf{a}}_i \vec{\mathbf{b}}_i\right)^2 \qquad (\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*; \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \cdots, \mathbf{n})$$

易知（3.1）的二维形式是：

(3.2) $$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}\vec{c}^2+\vec{b}\vec{d}^2)\geq\left(\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{d}\right)^2$$

还总结了其他的不等式.对于满足条件的实数序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$，在(3.3)中至少有一个不等式成立.

(3.3) $$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i b_i^2}\geq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i(b_i+1)^2}\ \text{或}\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i b_i^2}\geq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i(b_i-1)^2}\quad(a_i\in\mathbb{N};b_i\in\mathbb{R};n\in\mathbb{N}^*;i=1,2,3,\cdots,n)$$

下面是使(3.3)等号成立的一些条件：

⑴$\{a_n\}$中的项都为零.

⑵$\{b_n\}$中的项都为零.

（3.3）的证明：

$$\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i b_i^2}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}a_i b_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i b_i^2}\geq\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}a_i b_i^2+2\left|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right|$$

而 $\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}a_i b_i^2+2|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i|=\sum_{i=1}^{n}a_i(b_i+1)^2$ 或 $\sum_{i=1}^{n}a_i+\sum_{i=1}^{n}a_i b_i^2+2|\sum_{i=1}^{n}a_i b_i|=\sum_{i=1}^{n}a_i(b_i-1)^2$

所以开平方根得：$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i b_i^2}\geq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i(b_i+1)^2}$ 或

$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i b_i^2}\geq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i(b_i-1)^2}$

（3.3）得证.

易知（3.3）的二维形式是：

(3.4) $$\sqrt{a+b}+\sqrt{ac^2+bd^2}\geq\sqrt{a(c+1)^2+b(d+1)^2}\ \text{或}\ \sqrt{a+b}+\sqrt{ac^2+bd^2}\geq\sqrt{a(c-1)^2+b(d-1)^2}\quad(a,b\in\mathbb{N};c,d\in\mathbb{R})$$

当$a=b=0$时，（3.4）等号成立.

当$a=b=c=d=0$时，（3.4）等号成立.

参考文献：

【1】保宗悌.物理（选修 3-5）【M】.广州：广东教育出版社，2005.7.

【2】刘绍学.数学（必修 5）【M】.北京：人民教育出版社，2007.2.