SVD分解的理解

2012年03月31日 / 数学工具 / 评论数 12 / 被围观 12,367 views+

SVD分解（奇异值分解），本应是本科生就掌握的方法，然而却经常被忽视。实际上，SVD分解不但很直观，而且极其有用。SVD分解提供了一种方法将一个矩阵拆分成简单的，并且有意义的几块。它的几何解释可以看做将一个空间进行旋转，尺度拉伸，再旋转三步过程。

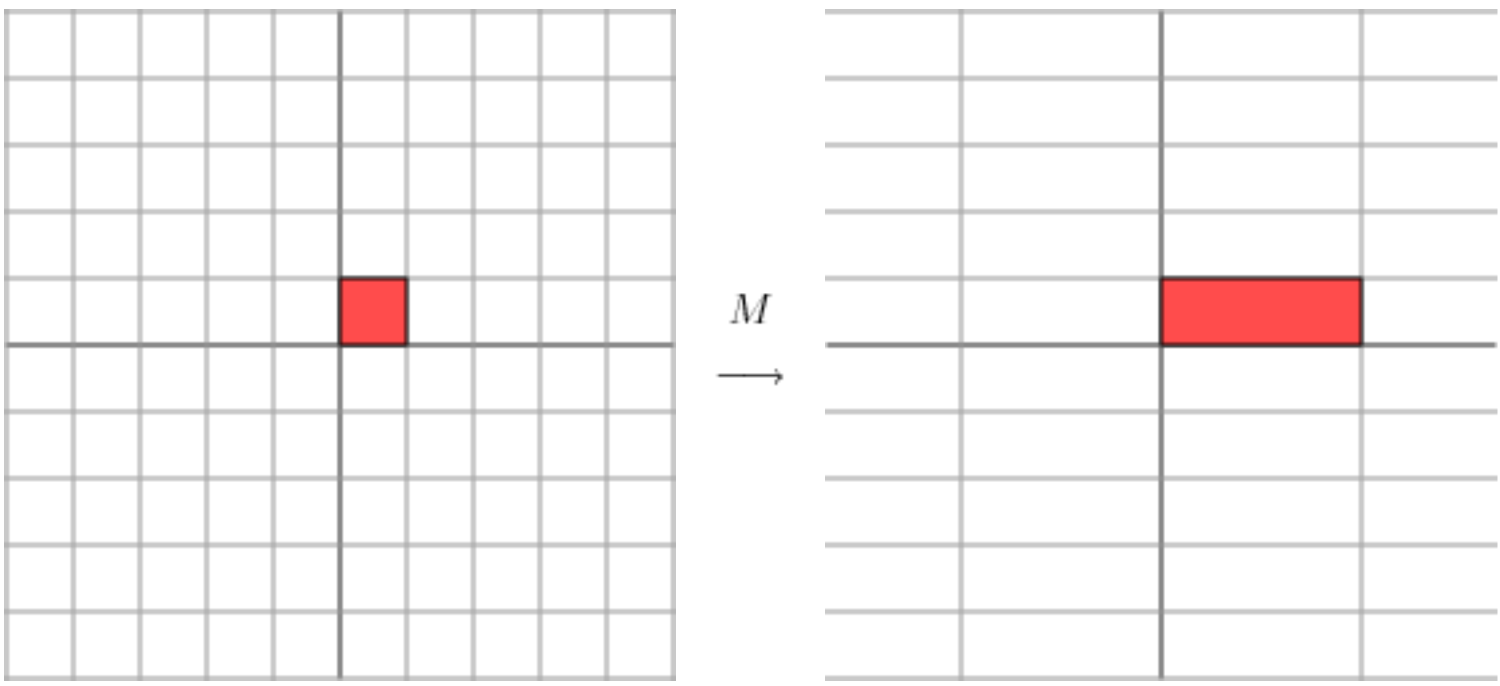
首先来看一个对角矩阵，

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

几何上, 我们将一个矩阵理解为对于点 **(x, y)** 从一个平面到另一个平面的映射:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ y \end{bmatrix}.$$

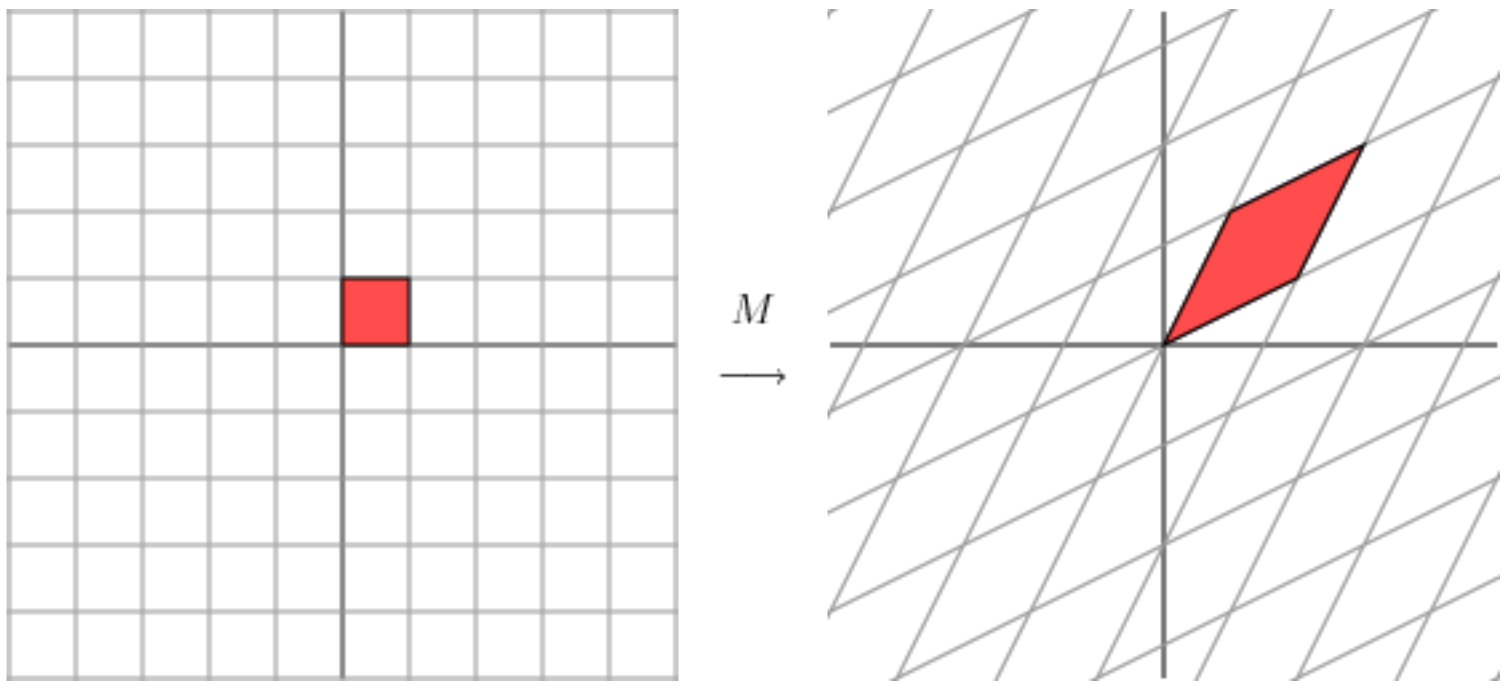
下图显示了这个映射的效果: 平面被横向拉伸了3倍，纵向没有变化。



对于另一个矩阵

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

它的效果是



这样一个变化并不是很好描述，然而当我们将坐标系旋转45度后，我们可以看出

这时，我们发现这个新的网格上发生的变化和网格在对角阵下发生变化的效果相似。

这是一个对称矩阵的例子，可以看出，对称矩阵经过旋转后，其作用就和对角阵类似了。数学上，对于一个对称矩阵 M, 我们可以找到一组正交向量 $\mathbf{v_i}$ 从而 $M\mathbf{v_i}$ 相当于 $\mathbf{v_i}$上的标量乘积; 也就是

$$M\mathbf{v_i} = \lambda_i\mathbf{v_i}$$

λ_i 是标量，也就是对应对角阵中对角线上的元素. 由于这个性质，我们称 $\mathbf{v_i}$ 是 M 的特征向量; λ_i 为特征值. 一个对称矩阵不同特征值对应的特征向量是正交的。

对于更广泛的情况，我们看看是否能从一个正交网格转换到另一个正交网格. 考虑一个非对称矩阵:

这个矩阵的效果形象的称为剃刀（*shear*）。

这个矩阵将网格在水平方向拉伸了，而垂直方向没有变化。如果我们将网格旋转大约58度，这两个网格就又会都变为正交的了。

奇异值分解:

考虑一个 2 *2 矩阵, 我们可以找到两组网格的对应关系。用向量表示，那就是当我们选择合适的单位正交向量 $\mathbf{v_1}$ 和 $\mathbf{v_2}$, $M\mathbf{v_1}$ 和 $M\mathbf{v_2}$ 也是正交的.

我们使用 $\mathbf{u_1}$ 和 $\mathbf{u_2}$ 代表 $M\mathbf{v_1}$ 和 $M\mathbf{v_2}$的方向. $M\mathbf{v_1}$ 和 $M\mathbf{v_2}$ 的长度表示为 σ_1 和 σ_2，也就是网格在每个方向的拉伸. *这两个拉伸值叫做M的 奇异值（sigular value）*

和前面类似，我们可以 有

$M\mathbf{v_1} = \sigma_1\mathbf{u_1}$

$M\mathbf{v_2} = \sigma_2\mathbf{u_2}$

我们一直讨论的 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$ 是一对正交向量， 对于一般的向量 $\mathbf{x}$，我们有这样的投影关系

$$\mathbf{x} = (\mathbf{v_1 x})\ \mathbf{v_1} + (\mathbf{v_2 x})\ \mathbf{v_2}$$

也就是说

$$M\mathbf{x} = (\mathbf{v_1 x})\ M\mathbf{v_1} + (\mathbf{v_2 x})\ M\mathbf{v_2}$$

$M\mathbf{x} = (\mathbf{v_1 x})\ \sigma_1\mathbf{u_1} + (\mathbf{v_2 x})\ \sigma_2\mathbf{u}$

即

$M\mathbf{x} = \mathbf{u_1}\sigma_1\ \mathbf{v_1}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \mathbf{u_2}\sigma_2\ \mathbf{v_2}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$ ---> $M = \mathbf{u_1}\sigma_1\ \mathbf{v_1}^{\mathrm{T}} + \mathbf{u_2}\sigma_2\ \mathbf{v_2}^{\mathrm{T}}$

这个关系可以写成矩阵形式

$$M = U\Sigma\ V^T$$

U 的列是 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$, Σ σ_1 和 σ_2构成的对角阵，V 的列是 $\mathbf{v}_1$ 和 $\mathbf{v}_2$. 即V描述了域中的一组正交基，U描述了相关域的另一组正交基，Σ 表述了U中的向量与V中向量的拉伸关系。

寻找奇异值分解

奇异值分解可以应用于任何矩阵，对于前面的例子，如果我们加上一个圆，那它会映射成一个椭圆，椭圆的长轴和短轴定义了新的域中的正交网格，可以被表示为$M\mathbf{v}_1$ and $M\mathbf{v}_2$。

换句话说，单位圆上的函数 $|M\mathbf{x}|$ 在 $\mathbf{v}_1$ 取得最大值，在 $\mathbf{v}_2$取得最小值. 这将单位圆上的函数优化问题简化了。可以证明，这个函数的极值点就出现在M^TM的特征向量上，这个矩阵一定是对称的，所以不同特征值对应的特征向量$\mathbf{v}_i$是正交的.

$\sigma_i = |M\mathbf{v_i}|$就是奇异值, $\mathbf{u_i}$ 是 $M\mathbf{v_i}$方向的单位向量.

$$M\mathbf{v_i} = \sigma_i\mathbf{u_i}$$
$$M\mathbf{v_j} = \sigma_j\mathbf{u_j}.$$
$$M\mathbf{v_i}\ M\mathbf{v_j} = \mathbf{v_i}^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\ M\mathbf{v_j} = \mathbf{v_i}\ M^{\mathrm{T}}M\mathbf{v_j} = \lambda_j\mathbf{v_i}\ \mathbf{v_j} = 0.$$

也就是

$$M\mathbf{v_i}\ M\mathbf{v_j} = \sigma_i\sigma_j\ \mathbf{u_i}\ \mathbf{u_j} = 0$$

因此, $\mathbf{u_i}$ 和 $\mathbf{u_j}$ 也是正交的。所以我们就把一组正交基 $\mathbf{v_i}$ 变换到了另一组正交基 $\mathbf{u_i}$.

另一个例子

我们来看一个奇异矩阵（秩为1，或只有一个非零奇异值）

它的效果如下

在这个例子中，第二个奇异值为0，所以 $M = \mathbf{u_1}\sigma_1\ \mathbf{v_1}^T$. 也就是说，如果有奇异值为0，那么这个矩阵就有降维的效果。因为0奇异值对应的维度就不会出现在右边。这对于计算机科学中的数据压缩极其有用。例如我们想压缩下面的15 25 像素的黑白图像

我们可以看出这个图像中只有三种列，即

把图像表示成一个15 25 的矩阵，总共有 375 个元素.

然而当我们做了奇异值分解，会发现非零奇异值仅有3个，

$$\sigma_1 = 14.72，\quad \sigma_2 = 5.22，\quad \sigma_3 = 3.31$$

因此，这个矩阵就可以被表示为 $M=\mathbf{u}_1\sigma_1\ \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} + \mathbf{u}_2\sigma_2\ \mathbf{v}_2^{\mathrm{T}} + \mathbf{u}_3\sigma_3\ \mathbf{v}_3^{\mathrm{T}}$

也就是说我们用三个长度为15的向量$\mathbf{v_i}$，三个长度为25的向量$\mathbf{u_i}$，以及三个奇异值，总共123个数字表示了这个375个元素组成的矩阵。奇异值分解找到了矩阵中的冗余信息实现了降维。

可以看出，奇异值分解捕获了图像中的主要信息。因此，又假设上一个例子里引入了噪声，

当我们用同样的方法做奇异值分解，我们得到如下非零奇异值

$$\sigma_1 = 14.15，\sigma_2 = 4.67，\sigma_3 = 3.00，\sigma_4 = 0.21，\sigma_5 = 0.19，\ \ldots，\sigma_{15} = 0.05$$

显然，前三个奇异值比其他的大很多，说明其中包括了绝大部分信息。如果我们只要前三个，

$$M\ \ \mathbf{u}_1\sigma_1\ \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}} + \mathbf{u}_2\sigma_2\ \mathbf{v}_2^{\mathrm{T}} + \mathbf{u}_3\sigma_3\ \mathbf{v}_3^{\mathrm{T}}$$

我们就实现了图像的降噪。

Noisy image　　Improved image

图片和实例来源于 www.asm.org

猜您也喜欢：

一个1976年的讲解SVD的视频

看看机器学习都有哪些比较成熟的应用

超直观的可视化机器学习工具(转)

机器学习不重要吗?

（转）CMU博士用机器学习做出能够通关《超级马里奥兄弟》的人工智能

VALSE 2012 视觉与学习青年论坛归来

返回

作者: bfcat

博主
该日志由 bfcat 于445 天前发表在数学工具分类下， 你可以发表评论，并在保留原文地址及作者的情况下引用到你的网站或博客。
转载请注明: SVD分解的理解 | bfcat-计算机视觉博客 +复制链接
关键字: SVD, 学习
【上篇】平行线的相交问题——齐次坐标系
【下篇】Google搜索类似matlab的绘图功能

元芳，你怎么看？ 目前元芳已发表 11 条看法（非匿名用户仅第一条留言需要审核） -------------------------->登录 / 注册

留言无头像?

网友路人甲 昵称（选填。匿名留言需要博主审核。）

anonymous@bfcat.com 邮箱（选填。留言有回复时会通知您哦~。）

www.bfcat.com 网址（选填。不填就默认本站了）

留言是种美德，写点什么...

发表看法 重写
插入图片
有人回复时邮件通知我

1. **monkeyhey** : 2012年06月17日00:45:18 沙发 @回复 回复

   太棒了，我上个学期学完SVD就是不明白什么含义，书上推来推去虽然能看懂但是没说明机理

啊，今天终于清楚了些，感谢啊！

- **bfcat** : 2012年06月17日01:11:00 @回复 回复

  很高兴能帮到你啊

  - **liupf** : 2012年06月28日20:10:13 @回复 回复

    太好了！抽象的理论终于不那么抽象了…

2. **ddhzy** : 2012年10月26日10:20:31 板凳 @回复 回复

   讲解得太好了，让我不得不注册一个评论一下，感谢！

   - **bfcat** : 2012年10月26日10:31:04 @回复 回复

     这个是翻译国外的，原作讲解的确实不错。很高兴对你有帮助

3. **qingqing** : 2012年11月11日21:29:54 地板 @回复 回复

   太强大了

4. **qwe70007** : 2012年11月14日23:37:16 1楼 @回复 回复

   太棒了，谢谢你让我明白了其中的物理意义。thx
   这样经典的解释真的很难得。

5. **flz** : 2013年02月12日21:47:51 2楼 @回复 回复

   感觉"将坐标系旋转45度后"这句话不太准确，应该只是旋转了原图像的网格。
   可能只是笔误，后面的表达都是使用“网格”的

6. **网友路人甲** : 2013年02月27日15:49:25 3楼 @回复 回复

   太感谢了。。

7. **cameracalibration** : 2013年04月19日22:07:23 4楼 @回复 回复

   关于降维和图像的压缩讲得太好了。涨见识啊！
   终于明白了什么是主分量提取。

8. **xiaomengxin** : 2013年05月02日16:02:11 5楼 @回复 回复

这个解释不错，要不然根本不知道其物理意义

查看来自外部的引用: 1

- 最新文章
- 本月排行
- 随便看看

  - 视频分析工具Video Explorer可以下
  - 贝叶斯法则250周年（转）
  - Intel也要推出自己的深度相机了
  - 一种基于OpenCV的双目视觉里程计
  - Google在改进图片搜索技术
  - Kintinuous: 实时创建3D地图
  - 宣传一下视觉显著性交流的QQ群
  - 利用并行计算的高效视觉三维场景重建
  - 网友提供Slides：CVPR2013显著
  - 新的感光元件让相机不再需要闪光灯

订阅本站

订阅本站

最新评论

- 网友路人甲:
  想请问一下GCMex怎么用?
- 网友路人甲:
  牛b
- 丕子:
  还有百度~ http://
- NicoYu:
  请问，你们有度量图像对比度的
- 马志国:
  申请了一个QQ群，群号是22
- 马志国:

- 非常感谢，群里现在有10个人
- 网友路人甲:
  求论文
- 小鸡蛋:
  楼主 1.Hierarchi

CVPR google linux matlab OpenCV Ubuntu 函数 创意 博客 图像 图像处理 学习 工具 技巧 数据 机器人 机器学习 相机 程序 网站 视频 计算机视觉 论文 辅助驾驶 问题

最活跃的读者

网站统计

日志总数：360篇

评论总数：758条

分类总数：15个

标签总数：341个

友情链接：18个

网站运行：459天

最后更新：2013年6月17日

- 网站地图
- 链接
- 关于博主
- 留言板
- 数据 代码
- 文章

返回首页

备案号：陕ICP备13000188号 网站地图