باسمه تعالی

مدار منطقی

نیم سال دوم ۰۰-۹۹

پاسخنامه تمرین سری دوم

---

۱) همان طور که ملاحظه میشود ، A_0 همواره متمم میشود و این کار تا رسیدن به اولین رقم یک ادامه میابد .
چنین فرایندی به معنای $f = a - 1$ است. به مثال زیر توجه کنید :

$$a = 1001 \Rightarrow F_0 = \overline{A_0}$$

$$F_1 = A_0 \oplus \overline{A_1}$$

$$F_2 = (A_0 + A_1) \oplus \overline{A_2}$$

$$F_3 = (A_0 + A_1 + A_2) \oplus \overline{A_3}$$

$$f = 1000$$

به عبارت دیگر باتوجه به روابط بالا میتوان متوجه شد که در مراتب بالاتر با OR کردن و البته XOR کردن آن همان بیت سر جایش باقی بماند و فقط بیت اول دست خوش تغییر میشود و حتما کم میشود.

۲-۱) طبق اتحاد $a + ab = a$ دو جمله $x + xyz$ به x تبدیل می‌شوند. سپس با همین اتحاد $x + wx$ و $\bar{w}x$ نیز به x تبدیل می‌شوند. بر اساس همین اتحاد $\bar{x}y + \bar{x}yz$ به $\bar{x}y$ تبدیل می‌شوند. در نهایت دو جمله $x + \bar{x}y$ باقی می‌ماند که طبق اتحاد $a + \bar{a}b = a + b$ به $x + y$ تبدیل می‌شوند.

۲-۲)

$$f(A,B,C,D) = \overline{AB + \underbrace{\bar{A}\bar{D}}_{1} + B\bar{D} + \bar{A}B + \underbrace{C\bar{D}A}_{2} + \bar{A}D + \underbrace{CD}_{2} + \underbrace{\bar{A}\bar{B}\bar{D}}_{1}}$$

$$1:\ \bar{A}\bar{D} + \bar{A}\bar{B}\bar{D} \xrightarrow{a+ab=a} \bar{A}\bar{D}$$

$$2:\ C\bar{D}A + CD \xrightarrow{ab+a\bar{b}c=ab+ac} CD + AC$$

$$f = \overline{\underbrace{AB}_{4} + \underbrace{\bar{A}\bar{D}}_{3} + B\bar{D} + \underbrace{\bar{A}B}_{4} + CD + AC + \underbrace{\bar{A}D}_{3}} = \overline{B + \underbrace{\bar{A}}_{5} + B\bar{D} + CD + \underbrace{AC}_{5}}$$

$$= \overline{\underbrace{B}_{6} + \bar{A} + \underbrace{B\bar{D}}_{6} + \underbrace{CD}_{7} + \underbrace{C}_{7}} = \overline{B + \bar{A} + C} = A\bar{B}\bar{C}$$

۳-۱) در جمله اول یعنی ab، به جای a و b عدد یک می‌گذاریم. متغیر c غایب است که یکبار صفر و یکبار یک برای آن در نظر می‌گیریم، در نتیجه شماره‌های 7 و 6 بدست می‌آید. در جمله $\bar{a}c$، به جای $\bar{a}$، صفر و به جای c یک می‌گذاریم. متغیر b که غایب است دو حالت صفر و یک دارد. پس دو شماره 3 و 1 بدست می‌آید. به طریق مشابه از جمله سوم شماره‌های 7 و 3 بدست می‌آید. اجتماع آنها یعنی $f(a,b,c)=\sum m(1,3,6,7)$ جواب است.

۳-۲) ابتدا با ضرب پرانتزها در یکدیگر، تابع را به صورت SOP تبدیل می‌کنیم. سپس در جمله $\bar{a}bc$ به جای $\bar{a}$، صفر و به جای c و b، یک قرار می‌دهیم که عدد حاصل برابر 011 یا سه است. در جمله $\bar{b}\bar{c}$ به جای b و c، صفر می‌گذاریم و a که غایب است دو حالت صفر و یک دارد پس شماره‌های 0 و 4 بدست می‌آید. اجتماع این شماره‌ها یعنی $f(a,b,c)=\sum m(0,3,4)$ جواب است.

۳-۳) روش حل این سوال نیز مانند قسمت‌های قبل است. تنها نکته قابل توجه این است که هرگاه تعداد متغیرهای غایب دو عدد باشد، تعداد ترکیبات آنها چهار ترکیب یعنی 00,01,10,11 خواهد شد.

$$f(a,b,c,d)=\sum m(4,6,10,11,12,14,15)$$

۴-الف- ۱) در جمله $a+b$ به جای متغیر a و b صفر می‌گذاریم. متغیر c غایب است که دو حالت صفر و یک دارد. پس دو حالت 000 و 001 یعنی ماکسترم‌های 0 و 1 را تولید می‌کند. در جمله وسط به جای متغیرهای $\bar{a}$ و $\bar{c}$ یک می‌گذاریم. متغیر b که غایب است دو حالت 1 و 0 دارد. پس دو حالت 101 و 111 یعنی شماره‌های 5 و 7 تولید می‌شوند. به طریق مشابه از جمله سوم ترکیبات 000 و 100 یعنی شماره‌های 0 و 4 بدست می‌آید. پس در نهایت اجتماع این‌ها یعنی $f(a,b,c)=\prod M(0,1,4,5,7)$ جواب است.

۴-الف-۲) روش حل مانند قسمت قبل است فقط باید بدین نکته توجه داشت که وقتی تعداد متغیرهای غایب دو عدد می‌باشد، تعداد ترکیبات آنها 4 ترکیب خواهد بود.

$$f(a,b,c,d)=\prod M(4,6,8,12,14)$$

۴-ب-۱) برای متمم کردن توابع که به صورت فشرده نوشته شده است ، کافی است علامت Σm را به $\prod M$ یا برعکس تبدیل کنیم . یکی دیگر از راه های متمم کردن تابعی که به شکل فشرده نوشته شده است ، تعویض اعداد داخل پرانتز با سایر اعداد کل مجموعه است که نوشته نشده اند.

$$f'(a,b,c,d)=\prod M(0,1,5,8,12,14,15).\prod D(2,7,11)$$

۴-ب-۲) همانند قسمت قبل عمل میکنیم.

$$f'(a,b,c,d) = \prod M(0,5,6,7,10,12,13,15).\prod D(3,8,14)$$

۵-۱) در اولین قدم پرانتزهای کنار هم در زیر NOT اصلی را در یکدیگر ضرب می‌کنیم. ضرب یک متغیر در خودش با خود آن متغیر برابر است و ضرب یک متغیر در معکوس خودش برابر با صفر است. در مرحله بعدی $\bar{A}\bar{B}C + BC$ طبق اتحاد $ab + a\bar{b}c = ab + ac$ به $BC + \bar{A}C$ تبدیل خواهد شد. در مرحله چهارم از B و C فاکتور می‌گیریم که پرانتزهایی که به صورت ضرایب آنها بدست می‌آیند برابر یک خواهند شد. در نهایت مقدار $\overline{B + C}$ بدست می‌آید که طبق قانون دمرگان برابر $\bar{B}\bar{C}$ است.

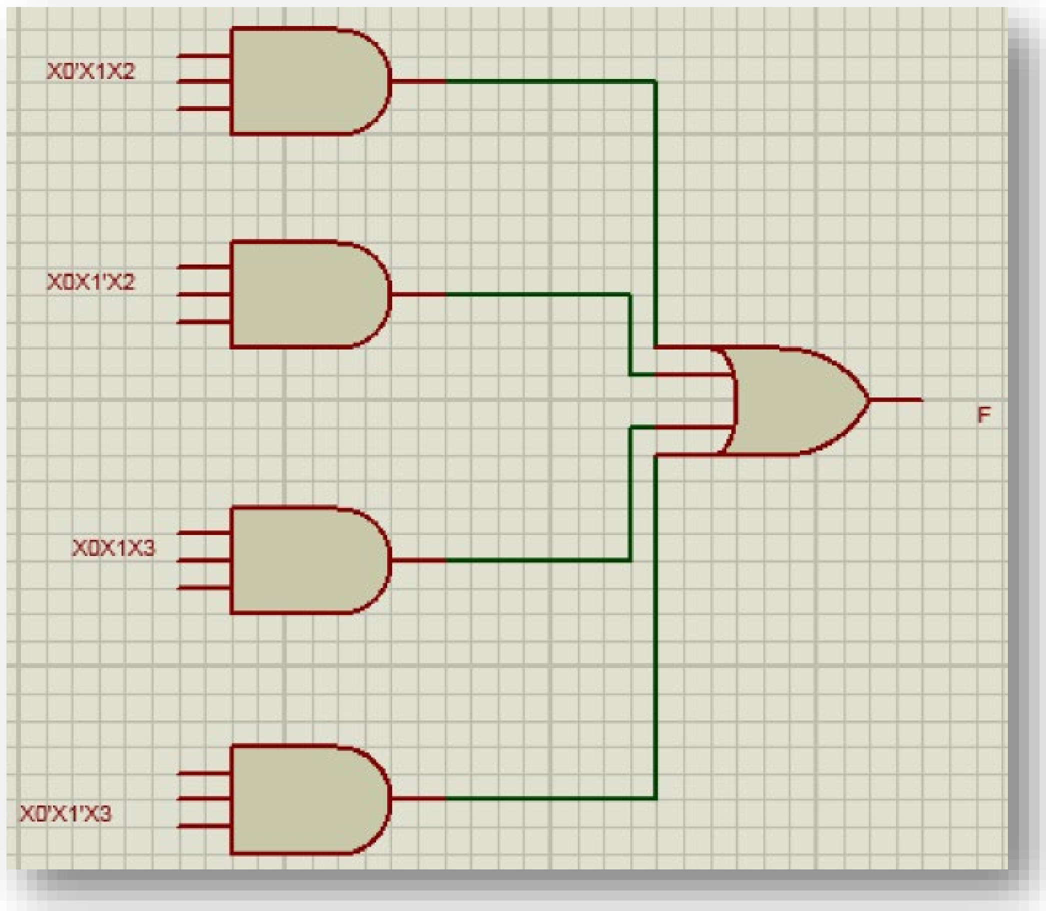
$$\overline{(B + \bar{A})(AB + C) + AB\bar{A} + \bar{A}\bar{B}C + (A + B)(\bar{A} + C)}$$

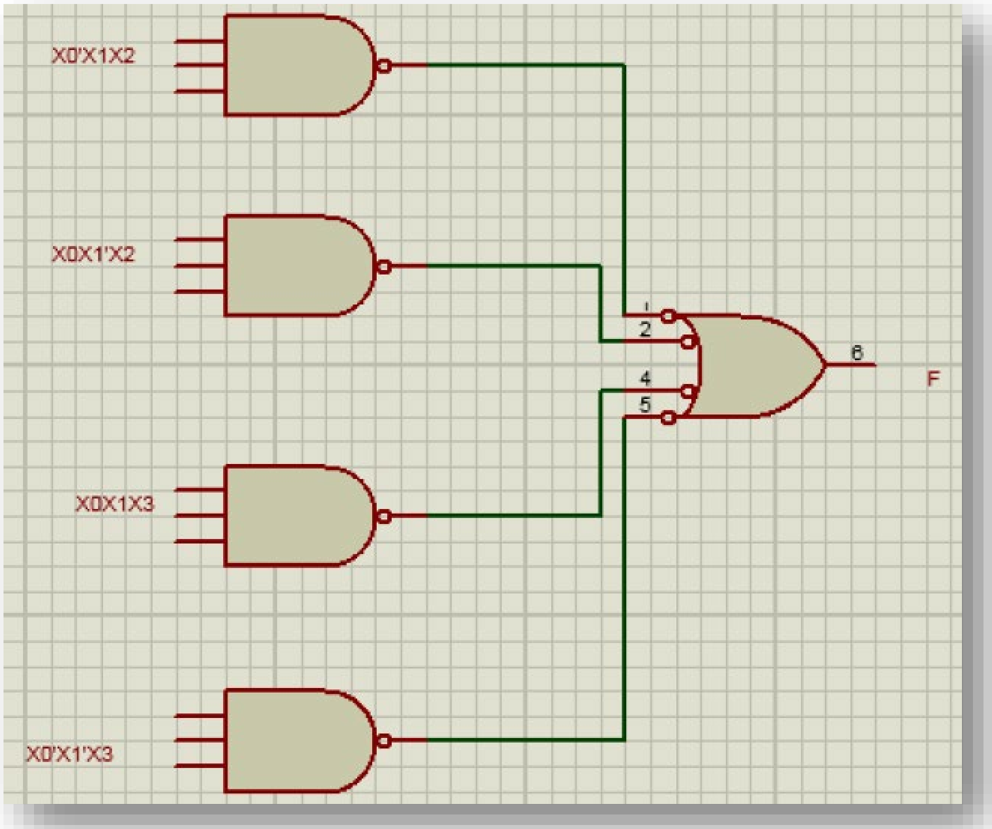
$$= \overline{A\underbrace{BB}_{B} + BC + \underbrace{\bar{A}AB}_{0} + \bar{A}C + \underbrace{AB\bar{A}}_{0} + \bar{A}\bar{B}C + \underbrace{A\bar{A}}_{0} + AC + \bar{A}B + BC}$$

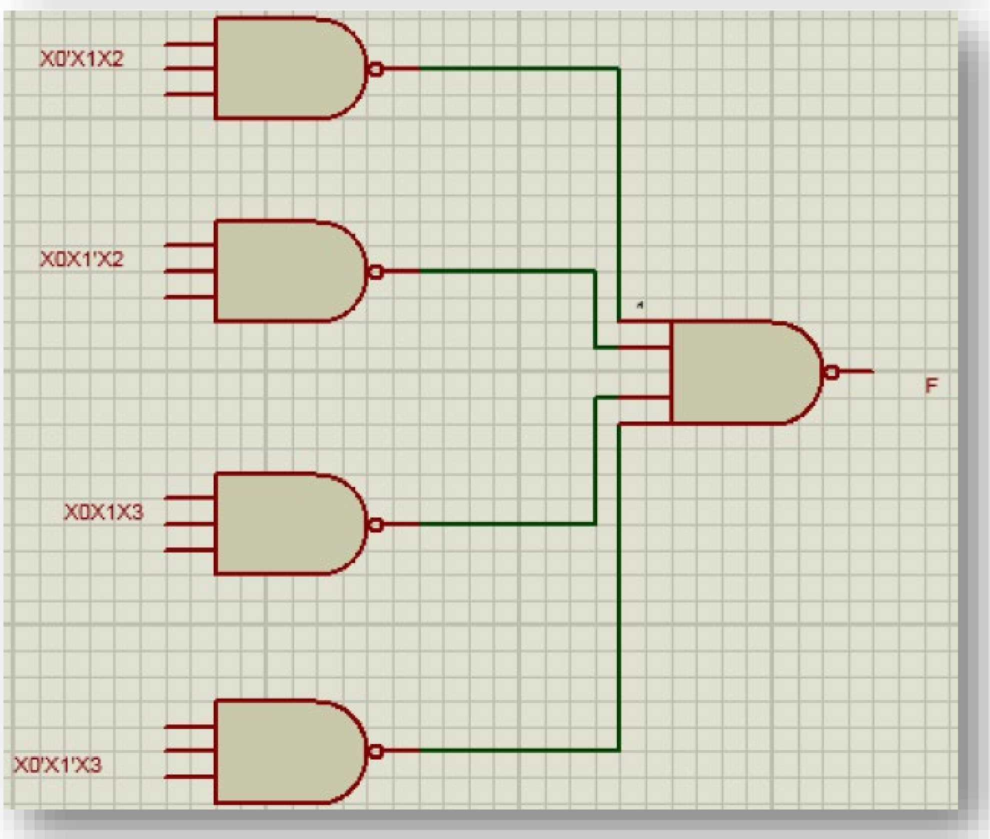
$$= \overline{AB + BC + \bar{A}C + \bar{A}\bar{B}C + AC + \bar{A}B + BC} = \overline{AB + BC + \bar{A}B + \bar{A}C + AC}$$

$$= \overline{B(A + \bar{A} + C) + C(A + \bar{A})} = \overline{B + C} = \bar{B}\bar{C}$$

۵-۲) برای طراحی با گیت NADN داریم:

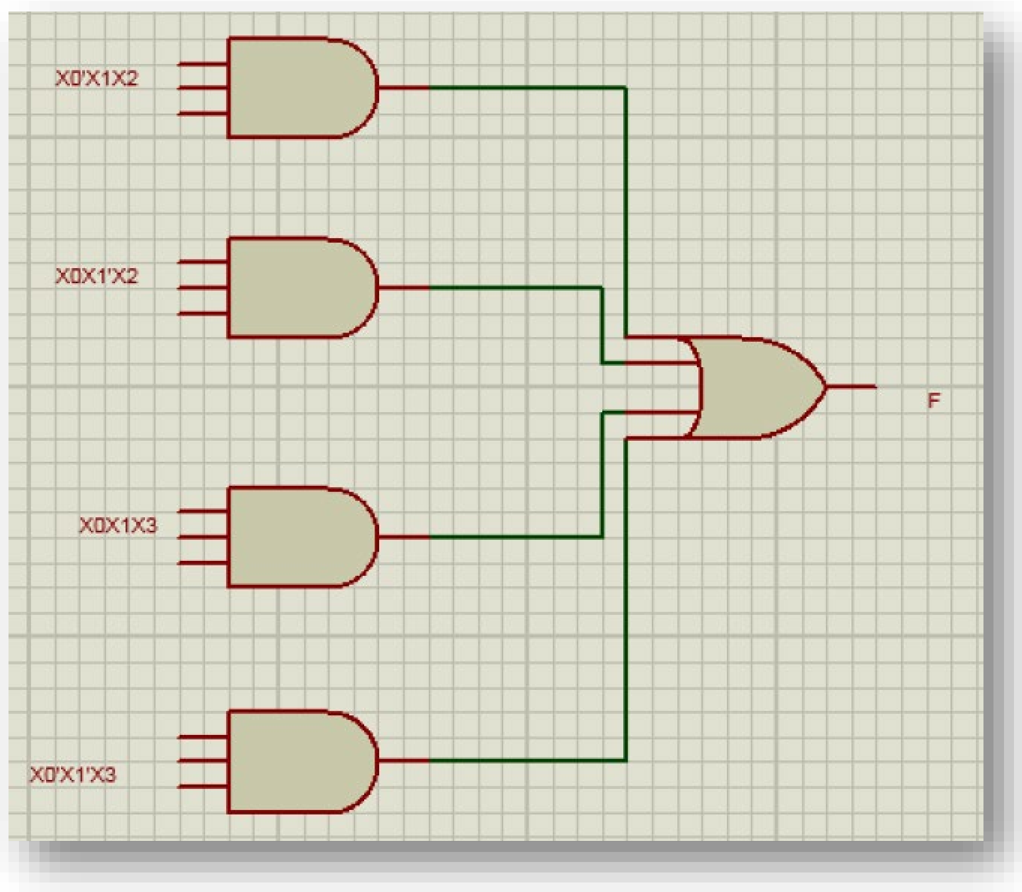


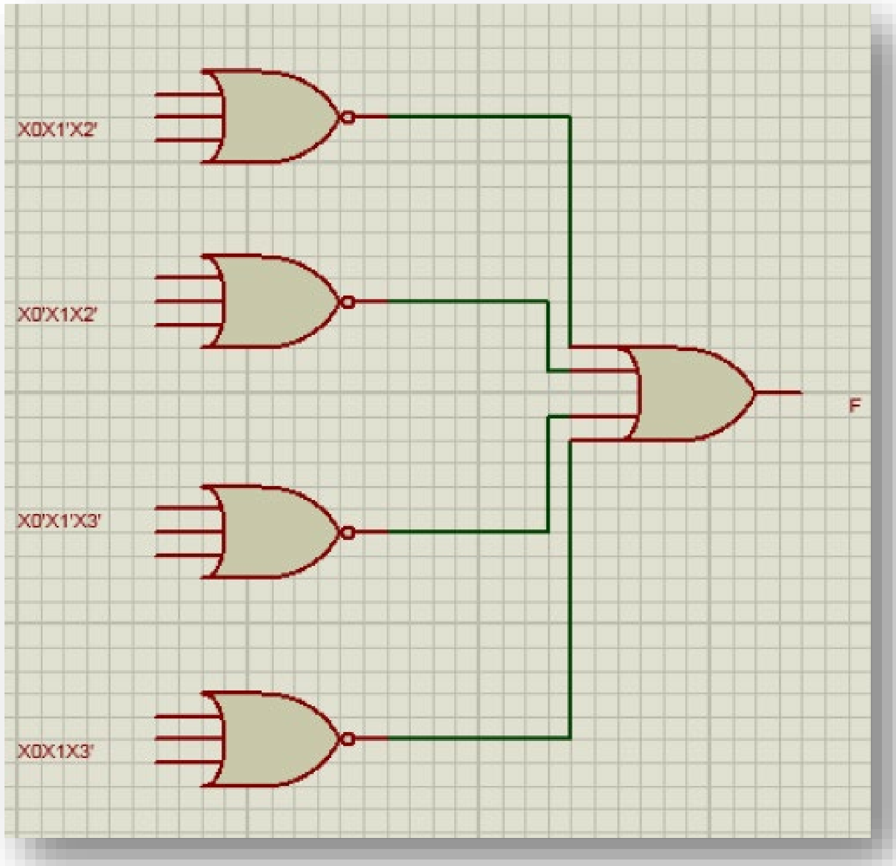

X0'X1X2
X0X1'X2
X0X1X3
X0'X1'X3
1
2
4
5
6
F

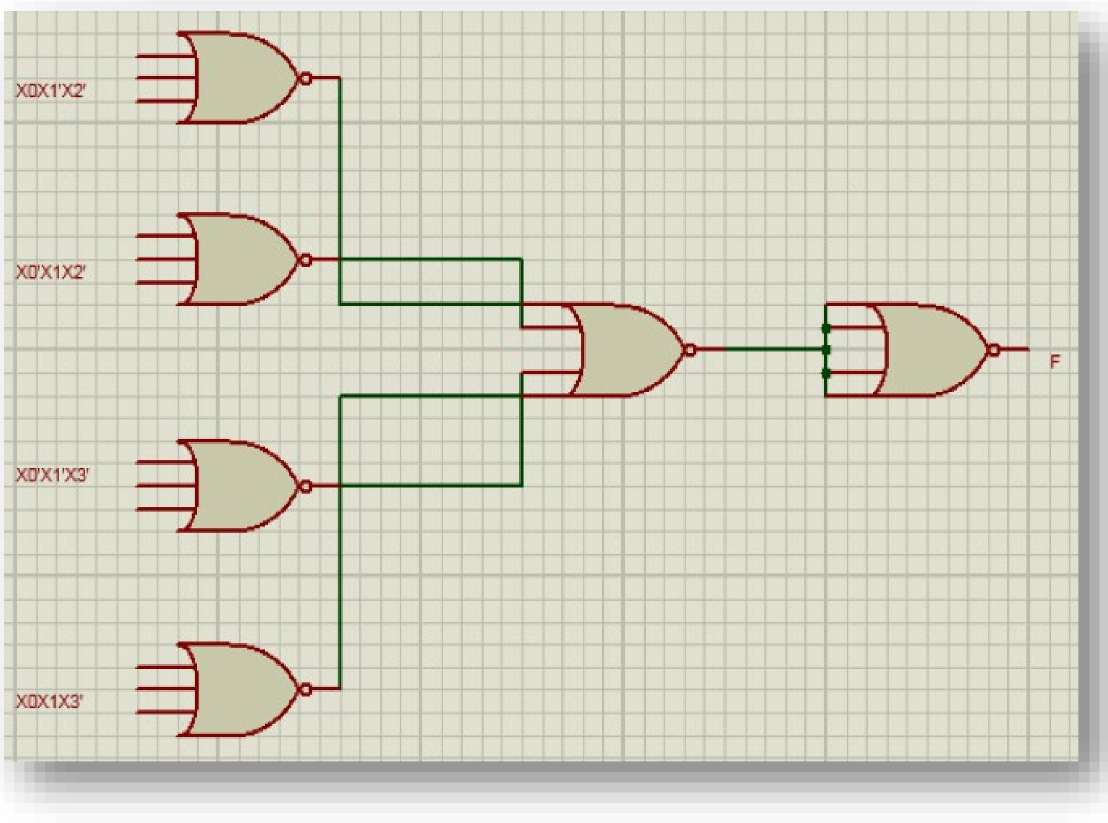

X0'X1X2
X0X1'X2
X0X1X3
X0'X1'X3
F

۶-۱) چون تابع داده شده بصورت POS است می‌توانیم به جای تمام گیت‌ها، گیت NOR قرار دهیم که معادل دو بار NOT کردن تابع است. یعنی $\overline{\overline{(a+b)(\bar{a}+c)(b+c)}} = \overline{\overline{(a+b)} + \overline{(\bar{a}+c)} + \overline{(b+c)}}$ که NOT پایینی اثر داده شده است ولی NOT بالایی اثر داده نشده است. حال هر یک از جملات $\overline{(a+b)}$، $\overline{(\bar{a}+c)}$ و $\overline{(b+c)}$ معادل یک گیت NOR هستند. در نهایت سه جمله هم با یکدیگر NOR شده‌اند.

۶-۲) برای طراحی با گیت NOR داریم:




X0X1'X2'
X0'X1X2'
X0'X1'X3'
X0X1X3'
F


X0X1'X2'
X0'X1X2'
X0'X1'X3'
X0X1X3'
F

۷-۱)

a	b	c	d	$f=(b+cd)(c+bd)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$f=\sum m(3,5,6,7,11,13,14,15)$$

۷-۲)

a	b	c	d	$f=(cd+\bar{b}c+b\bar{d})(b+d)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

$$f=\sum m(3,4,6,7,11,12,14,15)$$