باسمه تعالی

مدار منطقی

نیم سال دوم 00-99

# پاسخنامه تمرین

# سری اول

---

1)

برای تبدیل از مبنای 8 به 2، هر یک رقم در مبنای 8 را در 3 بیت بصورت دودویی می‌نویسیم. بعنوان مثال عدد 6 در مبنای 8 بصورت 110 در مبنای2 نوشته می‌شود.

برای تبدیل از مبنای 2 به مبنای 4، هر دو بیت در مبنای 2 را بصورت یک رقم در مبنای4 می‌نویسیم. بعنوان مثال 11 در مبنای2 بصورت 3 در مبنای4 نوشته می‌شود.

برای تبدیل از مبنای 4 به 16، هر دو رقم در مبنای4 را بصورت یک رقم در مبنای16 می‌نویسیم. در این تبدیل‌ها توجه داریم که ارزش مکانی به درستی درنظر گرفته شود. بعنوان مثال عدد 20 در مبنای4 بصورت 8 در مبنای16 نوشته می‌شود. (1×0+4×2)

a) $(157.2)_8 + (26.61)_8 = (206.01)_8 = (10000110.000001)_2 = (2012.001)_4 = (134.015625)_{10} = (86.04)_{16} = (0001\ 0011\ 0100\ .0000\ 0001\ 0101\ 0110\ 0010\ 0101)_{BCD}$

b) $(2A.156)_{16} - (5.F2)_{16} = (24.236)_{16} = (100100.00100011011)_2 = (210.020312)_4 = (44.1066)_8 = (36.13818359375)_{10} = (0011\ 0110\ .0001\ 0011\ 1000\ 0001\ 1000\ 0011\ 0101\ 1001\ 0011\ 0111\ 0101)_{BCD}$

c) $(5432)_6 = (3425)_7 = (1244)_{10}$

برای حل قسمت c دو روش وجود دارد.

1-تبدیل از مبنای 6 به مبنای 10 و تبدیل از مبنای 10 به مبنای 7

2-تبدیل مستقیم از مبنای 6 به مبنای 7

حل با روش1:

$$(5432)_6 = (5 \times 6^3 + 4 \times 6^2 + 3 \times 6^1 + 2 \times 6^0)_{10} = (1244)_{10}$$

برای تبدیل از مبنای10 به مبنای7 نیز از تقسیم‌های متوالی استفاده می‌کنیم. خارج قسمت‌های این تقسیم از بالا به پایین به ترتیب 177 و 25 و 3 هستند. باقی‌مانده‌های این تقسیم‌ها نیز از بالا به پایین به ترتیب 5 و 2 و 4 هستند. در نتیجه حاصل برابر است با:

$$(1244)_{10} = (3425)_7$$

حل با روش2: برای تبدیل مستقیم از مبنای 6 به مبنای7 مشابه روش اول عمل کرده، با این تفاوت که محاسبات را در مبنای7 انجام می‌دهیم. جدول زیر حاصل ضرب اعداد در مبنای7 را نشان می‌دهد:

| × | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 11 | 13 | 15 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 12 | 15 | 21 | 24 |
| **4** | 0 | 4 | 11 | 15 | 22 | 26 | 33 |
| **5** | 0 | 5 | 13 | 21 | 26 | 34 | 42 |
| **6** | 0 | 6 | 15 | 24 | 33 | 42 | 51 |

حال با توجه به جدول، محاسبات را در مبنای7 انجام می‌دهیم:

$$(5432)_6 = \Big(\big((5 \times 6 + 4) \times 6 + 3\big) \times 6 + 2\Big)_7 = \big((46 \times 6 + 3) \times 6 + 2\big)_7 = (414 \times 6 + 2)_7$$
$$= (3425)_7$$

2 )

(a

فرض کنید عملیات مفروض در مبنای x انجام شده باشد . برای حل سوال اعداد را به مبنای 10 می‌بریم.

$$(344)_x = (3x^2 + 4x + 4)_{10}$$
$$(14)_x = (x + 4)_{10}$$
$$(21)_x = (2x + 1)_{10}$$

حال خواهیم داشت:

$$\frac{3x^2 + 4x + 4}{x + 4} = 2x + 1 \;\Rightarrow (2x + 1)(x + 4) = \; 3x^2 + 4x + 4$$
$$\Longrightarrow \; 2x^2 + 9x + 4 = \; 3x^2 + 4x + 4 \;\Rightarrow x^2 - 5x = 0 \;\Longrightarrow x = 5\,.\,x = 0$$

از آن‌جایی که x = 0 قابل قبول نیست بنابراین تنها جواب قابل قبول سوال x = 5 می‌باشد بنابراین عملیات داده شده در مبنای 5 محاسبه شده است.

(b

مانند قسمت قبل ابتدا فرض می‌کنیم عملیات مفروض در مبنای x انجام شده باشد . سپس برای حل , تمامی اعداد را به مبنای 10 می‌بریم.

$$(323)_x = (3x^2 + 2x + 3)_{10}$$
$$(135)_x = (x^2 + 3x + 5)_{10}$$
$$(502)_x = (5x^2 + 2)_{10}$$

حال خواهیم داشت:

$$3x^2 + 2x + 3 + \; x^2 + 3x + 5 = \; 5x^2 + 2 \;\Longrightarrow 4x^2 + 5x + 8 = 5x^2 + 2$$
$$\Longrightarrow \; x^2 - 5x - 6 = 0 \;\Longrightarrow x = -1\,.\,x = 6$$

از آن‌جایی که x = -1 قابل قبول نیست بنابراین تنها جواب قابل قبول سوال x = 6 می‌باشد بنابراین عملیات داده شده در مبنای 6 محاسبه شده است.

(c

مانند قسمت قبل ابتدا فرض می‌کنیم عملیات مفروض در مبنای x انجام شده باشد . سپس برای حل , تمامی اعداد را به مبنای 10 می‌بریم.

$$(1234)_x = (x^3 + 2x^2 + 3x + 4)_{10}$$
$$(5432)_x = (5x^3 + 4x^2 + 3x + 2)_{10}$$
$$(6666)_x = (6x^3 + 6x^2 + 6x + 6)_{10}$$

حال خواهیم داشت:

$$x^3 + 2x^2 + 3x + 4 + 5x^3 + 4x^2 + 3x + 2 = 6x^3 + 6x^2 + 6x + 6$$
$$\Longrightarrow 6x^3 + 6x^2 + 6x + 6 = 6x^3 + 6x^2 + 6x + 6$$

همان طور که مشاهده می‌شود عبارت فوق یک عبارت همواره صحیح می‌باشد بنابراین به ازای هر x معادله بالا صحیح می‌باشد . از طرفی باید توجه داشت که مبنای عددی , عددی طبیعی می‌باشد . از طرفی باید توجه داشت که در مبنای x نمایش عدد 6 به شکل 6 می‌باشد بنابراین قطعا $x > 6$ . بنابراین به ازای هر x به شکلی که

$$x \in \mathbb{N} \mid x > 6$$

آن گاه عملیات مفروض می‌تواند در مبنای x انجام شده باشد.

( 3

( a

برای حل سوال ابتدا فرض می‌کنیم مبنای معادله برابر m باشد. سپس تمام اعداد را به اعداد دهدهی تبدیل می‌کنیم و سوال را حل می‌کنیم.

$$(50)_m = (5m)_{10}$$
$$(125)_m = (m^2 + 2m + 5)_{10}$$

در نتیجه معادله به شکل زیر درمی‌آید.

$$5x^2 - 5mx + m^2 + 2m + 5 = 0$$

از طرفی می‌دانیم $x = 5$ جواب معادله فوق می‌باشد . بنابراین با جای‌گذاری x در معادله بالا خواهیم داشت:

$$125 - 25m + m^2 + 2m + 5 = 0 \Longrightarrow m^2 - 23m + 130 = 0 \Longrightarrow m = 13 \,.\, m = 10$$

حال باید چک کنیم که در کدام یک از این مبناها $x = 8$ نیز جواب معادله می‌باشد .در صورتی که $m = 10$ باشد آنگاه معادله به شکل زیر می‌باشد.

$$5x^2 - 50x + 125 = 0 \Longrightarrow 5(x-5)(x-5) = 0$$

همان‌طور که واضح است در صورتی که $m = 10$ آن‌گاه $x = 8$ دیگر جواب معادله نخواهد بود بنابراین $m = 10$ غیرقابل قبول است.

حال فرض می‌کنیم $m = 13$ و معادل دهدهی معادله را می‌نویسیم.

$$5x^2 - 65x + 200 = 0 \Longrightarrow 5(x-5\,)(x-8) = 0$$

همان‌طور که واضح است در صورتی $m = 13$ آن‌گاه هم $x = 8$ و $x = 5$ جواب معادله هستند بنابراین $m = 13$ قابل قبول می‌باشد.

این سوال را می‌توانستیم به شکل دیگری نیز حل کنیم . از آن‌جایی که $x = 5$ و $x = 8$ جواب‌های معادله در مبنای $m$ هستند می‌توانستیم معادله را به شکل زیر بنویسیم.

$$5x^2 - 50x + 125 = 5(x-5)(x-8) = 0 \implies 5x^2 - 50x + 125 = 5x^2 - 5(8+5)x + 5(8*5)$$

بنابراین در مبنای $m$ خواهیم داشت:

$$5(8+5) = 50 \implies (8+5) = 10 \implies m = 13$$

b (

ابتدا فرض می‌کنیم که معادله در مبنای $m$ برقرار می‌باشد . سپس معادله را در مبنای 10 آورده و $m$ را به دست می‌آوریم.

$$(64)_m = (6m+4)_{10}$$
$$(10)_m = (m)_{10}$$

بنابراین معادله در مبنای 10 به شکل زیر درمی‌آید.

$$\frac{x + 6m + 4}{3x - m} = x + 6$$

از آن‌جایی که $x = 4$ جواب معادله می‌باشد بنابراین آن را در معادله بالا جایگذاری می‌کنیم .

$$\frac{6m+8}{12-m} = 10 \implies 120 - 10m = 6m + 8 \implies 16m = 112 \implies m = 7$$

$m = 7$ جواب قابل قبول این سوال می‌باشد.

4)

توجه کنید که برای جمع و تفریق دو عدد که اندازه یکسانی ندارند ( یعنی یک عدد با x بیت نشان داده شده باشد و عدد دیگر با y بیت و $x \neq y$ ) ابتدا باید دو عدد را با استفاده از گسترش علامت هم اندازه کنیم. گسترش علامت نیز در سیستم مکمل 2 به این شکل است که اگر عدد ما مثبت باشد (بیت علامت آن صفر باشد) باید به سمت چپ عدد بیت 0 اضافه کنیم و در صورتی که عدد ما منفی باشد (بیت علامت برابر یک باشد) باید به سمت چپ عدد بیت 1 اضافه کنیم.

در رابطه با سرریز نیز در صورتی است که جواب جمع و تفریق غیرمنطقی باشد یعنی برای مثال جمع 2 عدد مثبت, عددی منفی باشد. این نیز به دلیل آن است که تعداد بیت مورد نیاز برای نمایش جواب جمع و تفریق را بیشتر از تعداد بیت مفروض است.

a ) 1010110 + 1101

$$1101 \xRightarrow{\text{گسترش علامت}} 1111101$$

$$\begin{array}{rl} & 1010110 \\ + & 1111101 \\ \hline \text{carry} \leftarrow 1 & 1010011 \end{array}$$

همان طور که واضح است جمع دو عدد منفی, عددی منفی شده است بنابراین سرریز رخ نداده است. یکی دیگر از راه‌ها برای تشخیص سرریز آن است که در صورتی که carry وارد شده به آخرین بیت با carry خارج شده از آن یکسان باشد آن‌گاه سرریز رخ نداده است. در مثال بالا نیز بیت 1 به عنوان carry به آخرین بیت (سمت چپ ترین بیت) وارد می‌شود و بیت 1 به عنوان carry از بیت آخر خارج می‌شود بنابراین سرریز رخ نداده است.

b ) 110101 – 110

$$110 \xrightarrow{\text{مکمل 2}} 010 \xrightarrow{\text{گسترش علامت}} 000010$$

$$\begin{array}{r} 110101 \\ +\;000010 \\ \hline 110111 \end{array}$$

همان طور که واضح است در این مثال هم سرریز رخ نداده است. هم‌چنین هیچگاه در جمع یک عدد منفی و یک عدد مثبت سرریز رخ نمی‌دهد.

c ) 0111001 - 01010

$$01010 \xrightarrow{\text{مکمل 2}} 10110 \xrightarrow{\text{گسترش علامت}} 1110110$$

$$\begin{array}{rr} & 0111001 \\ & +\;1110110 \\ \hline \textbf{\textit{carry}} \longleftarrow 1 & 0101111 \end{array}$$

طبق توضیحات قسمت در جمع یک عدد مثبت و یک عدد منفی هیچ‌گاه سرریز رخ نمی‌دهد بنابراین در این مثال نیز سرریز رخ نداده است. هم‌چنین اگر دقت کنید بیت carry وارد شده به آخرین بیت (سمت چپ‌ترین بیت )برابر 1 است و بیت carry خارج شده از آن هم برابر 1 است بنابراین سرریز رخ نداده است.

5)

a ) 285 + 164

نمایش BCD عدد 285 به شکل 0101 1000 0010 و نمایش BCD عدد 164 به شکل 0100 0110 0001 می‌باشد. حال خواهیم داشت:

$$
\begin{array}{rr}
 & 0010\ 1000\ 0101 \\
+ & 0001\ 0110\ 0100 \\
\hline
 & 0011\ 1110\ 1001 \\
+ & 1\ 0110\ \phantom{1001} \\
\hline
 & 0100\ 0100\ 1001
\end{array}
$$

توجه کنید که در جمع اعداد در حالت BCD در صورتی که در رقمی مقدار بیشتر از 9 شد کافی است تا آن رقم را با 0110 که همان عدد 6 باینری است جمع کنیم و carry آن را به رقم بعدی انتقال دهیم.

b ) 252 - 168

نمایش BCD عدد 252 به شکل 0010 0101 0010 و نمایش BCD عدد 168 به شکل 1000 0110 0001 می‌باشد. حال خواهیم داشت:

$$
\begin{array}{rr}
 & \phantom{0010\ }0100\phantom{\ 0010} \\
 & 0010\ 0\cancel{1}01\ 0010 \\
- & 0001\ 0110\ 1000 \\
\hline
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rr}
 & 0001\phantom{\ 0100\ 1100} \\
 & 00\cancel{1}0\ 0100\ 1100 \\
- & 0001\ 0110\ 1000 \\
\hline
 & 0100
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{rr}
 & 0001\ 1110\ 1100 \\
- & 0001\ 0110\ 1000 \\
\hline
 & 0000\ 1000\ 0100
\end{array}
$$

راه دیگری که برای حل این قسمت پیشنهاد می‌شود آن است که ابتدا مکمل 10 عدد 168 را به دست آوریم و در نهایت آن را با عدد 252 جمع کنیم.

6)

بزرگ‌ترین عدد در سیستم بدون علامت $\longrightarrow \underbrace{111111111.....1111111}_{n}$

بزرگ‌ترین عدد در سیستم مکمل 2 $\longrightarrow \underbrace{011111111.....1111111}_{n}$

بنابراین بزرگ‌ترین عددی که در سیستم بدون علامت با n بیت می‌توان ساخت برابر است $2^n - 1$ و بزرگ‌ترین عددی که در سیستم مکمل 2 با n بیت می‌توان ساخت برابر است با $2^{n-1} - 1$ . حال خواهیم داشت:

$$\text{اختلاف} = 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

7 ) نکته۱: برای یافتن مکمل b-1 عدد $(a)_b$ لازم است همه ارقام عدد $(a)_b$ را از b-1 کم می‌کنیم.

نکته۲: برای یافتن مکمل b عدد $(a)_b$ ابتدا مکمل b-1 عدد $(a)_b$ را حساب می‌کنیم، سپس رقم سمت راست آن را (حتی اگر در بازه اعشار باشد) ۱ واحد اضافه می‌کنیم.

a) $(5010)_{10} = \xrightarrow{\text{مکمل۹}} (4989)_{10} = \xrightarrow{\text{مکمل۱۰}} (4990)_{10}$
$5010 + 4990 = 0000 \quad , \qquad carry\ out = 1$

b) $(547.26)_8 = \xrightarrow{\text{مکمل7}} (230.51)_8 = \xrightarrow{\text{مکمل8}} (230.52)_8$
$547.26 + 230.52 = 000.00 \quad , \qquad carry\ out = 1$

c) $(1011011)_2 = \xrightarrow{\text{مکمل1}} (0100100)_2 = \xrightarrow{\text{مکمل2}} (0100101)_2$
$1011011 + 0100101 = 0000000 \quad , \qquad carry\ out = 1$

8 )

a ) با افزودن بیت توازن (زوج یا فرد)، فاصله برابر 2 می‌شود و می‌توان یک خطا (یا فرد خطا) را تشخیص داد، اما نمی‌توان تصحیح کرد.

b ) برای استفاده از سیستم کدگذاری همینگ، ابتدا شماره هر بیت را مشخص می‌کنیم تا در ادامه با محاسبه XOR مربوطه، بیت خطا را پیدا کنیم:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$d_1 = XOR(1,3,5,7) = XOR(0,1,1,1) = 1$

$d_2 = XOR(2,3,6,7) = 1$

$d_4 = XOR(4,5,6,7) = 0$

$d_1 d_2 d_4 = 011$ بیت ۳ خطاست و باید اصلاح شود.

BCD عدد دریافتی (3,5,6,7) = 0101 = **5**

بنابراین کد مورد نظر ۵ است. اگر بیت۳ اصلاح نمیشد، عدد دریافتی ۱۳ نمایش داده می‌شد که نادرست است.