



توجه: در تمام مسائل، در صورتی که ساده‌ترین جواب را به دست نیاورید از شما نمره کسر خواهد شد.

۱. (۱ نمره) در یک کامپیوتر، اعداد با ۴ رقم دهدهی نمایش داده می‌شوند. نمایش مکمل ۹ عدد ۳۸۵ چگونه خواهد بود؟

جواب: در نمایش مکمل r یا $r-1$ از علامت منفی استفاده نمی‌شود. برای نمایش مکمل ۹، باید هر رقم را جداگانه با مکمل ۹ آن نشان دهیم. البته ابتدا باید عدد را در چهار رقم (یعنی ۰۳۸۵) نشان دهیم که در نتیجه، جواب عبارت است از: ۹۶۱۴

۲. (۲ نمره) در کدام مبنای عددی، جواب معادله $x^2 - 10x + 12 = 0$ برابر با $x=4$ (جواب مضاعف) است؟

جواب: اگر عبارت داخل پرانتز، یعنی (جواب مضاعف) را در نظر نگیریم:

$$4^2 - (r+0)*4 + r + 2 = 0 \Rightarrow 16 - 4r + r + 2 = 0 \Rightarrow r = 6$$

اما جواب دیگر معادله در مبنای ۶، عدد ۲ خواهد بود زیرا با بردن معادله به مبنای ۶ به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 10x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 4, x = 2$$

لذا مساله جواب ندارد زیرا:

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16 = x^2 - (r+0)x + (r+2) \Rightarrow r = 8 \text{ and also } r = 14 \text{ (inconsistent)}$$

۳. (۱ نمره) عدد دهدهی ۴۷۴ را به مبنای ۲، ۸ و ۱۶ ببرید.

$$\text{Solution: } 474 = 111011010 = 732_8 = 1DA_{16}$$

۴. (۳ نمره) مداری یک عدد ۴ بیتی $A = a_3a_2a_1a_0$ را دریافت می‌کند. اگر عدد بر ۳ قابل قسمت باشد خروجی یک می‌شود. تابع خروجی را به صورت SOP بنویسید. سپس این مدار را با استفاده از گیت‌هایی با حداکثر دو ورودی طراحی کنید.

| $a_3a_2a_1a_0$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|----------------|----|----|----|----|
| 00 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 01 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 11 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 10 | 0 | 1 | 0 | 0 |

$$\begin{aligned} f &= \bar{a}_3\bar{a}_2(\bar{a}_1\bar{a}_0 + 0, a_0) + a_3a_2(\bar{a}_1\bar{a}_0 + a_1a_0) + \\ &\quad \bar{a}_3a_2a_1\bar{a}_0 + a_3\bar{a}_2\bar{a}_1a_0 \\ &= \bar{a}_3\bar{a}_2(a_1 \oplus a_0) + a_3a_2(0, \bar{a}_1 \oplus a_0) + \bar{a}_3a_2a_1a_0 + a_3\bar{a}_2\bar{a}_1a_0 \\ &= (\bar{a}_3 \oplus a_3) \cdot (a_1 \oplus a_0) + \bar{a}_3a_2a_1\bar{a}_0 + a_3\bar{a}_2\bar{a}_1a_0 \end{aligned}$$



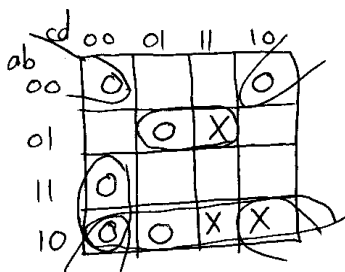
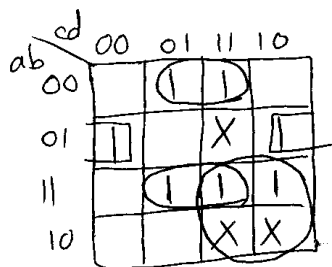
۵. (۳ نمره) تابع $f(a,b,c,d) = \sum m(0,2,3,5,7,8,9,10,11,13,15)$ را با جدول کارنو ساده کنید. عامل‌های اولیه (PIs) را مشخص کنید. کدام یک از این عامل‌ها، ضروری (EPI) هستند؟

| $cd \backslash ab$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|--------------------|----|----|----|----|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$f = \bar{b}\bar{d} + bd + \begin{cases} \bar{b}c + a\bar{b} \\ \bar{b}c + ad \\ cd + a\bar{b} \end{cases}$$

فقط این در ۲ ضرب می‌شوند

۶. (۳ نمره) تابع $f(a,b,c,d) = \sum m(1,3,4,6,13,14,15) + d(7,10,11)$ را یک بار به صورت جمع ضرب‌ها (SOP) و یک بار به صورت ضرب جمع‌ها (POS) تا حد امکان ساده کنید. آیا عبارت‌هایی که به دست می‌آید برابرند؟ چرا؟



$$f_1 = ac + abd + a'bd' + a'b'd \quad f_2 = (b+d)(a+b'+d')(a'+c+d)(a'+b)$$

عبارت‌ها برابر نیستند چون:

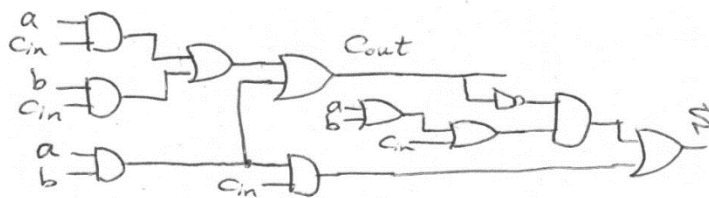
$$f_1(10) = f_1(11) = 1 \text{ but } f_2(10) = f_2(11) = 0$$

۷. (۲ نمره) برای این مساله، فقط می‌توانید از گیت‌های زیر استفاده کنید: معکوس کننده (حداکثر دو گیت)، AND (دو ورودی (حداکثر ۶ گیت)، OR (دو ورودی (حداکثر ۶ گیت). با این گیت‌ها، یک تمام جمع‌کننده (full adder) رسم کنید. به ازای هر گیت اضافی، نیم نمره کسر می‌شود. راهنمایی: یکی از خروجی‌ها که ساده‌تر است را طرح کنید و سپس خروجی دیگر را به کمک آن بسازید.

| a | b | c _{in} | c _{out} | S |
|---|---|-----------------|------------------|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$C_{out} = ab + ac_{in} + bc_{in}$$

$$S = C_{out}'(a+b+c_{in}) + abc_{in}$$

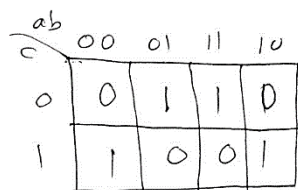


راه دیگر آن است که به جای XOR عبارت زیر را قرار دهیم:
 $(a+b).(ab)'$ و سپس همان صورت متعارف را

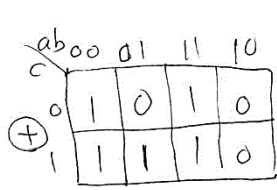
رسم کنیم که تعداد گیت‌ها کمتر هم می‌شود.

۸. (۲ نمره) می‌دانیم که برای توابع f_1, f_2, f_3 روابط زیر برقرار است. تابع f_2 را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$f_1 = b \oplus c, f_3 = (a \oplus b)' + bc, f_1 \oplus f_2 = f_3$$

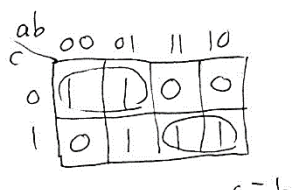


$$f_1 = b \oplus c = b\bar{c} + \bar{b}c$$



$$f_3 = \overline{a \oplus b} + bc$$

$$= ab + \bar{a}\bar{b} + bc$$

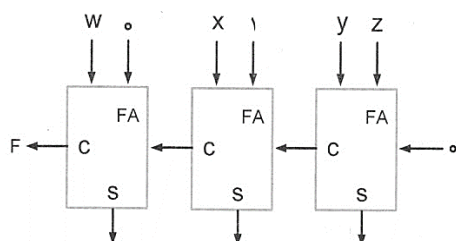


$$f_2 = \bar{a}\bar{c} + ac + \begin{cases} \bar{a}b \\ \bar{b}c \end{cases}$$

$$= \overline{a \oplus c} + bc$$

$$= \overline{a \oplus c} + \bar{a}b$$

XOR خاصیت شرکت‌پذیری حتی بین ورودی و خروجی دارد لذا:



۹. (۳ نمره) مداری شامل سه تمام جمع‌کننده مطابق شکل مقابل ساخته شده است. تابع F را بر حسب ورودی‌ها به دست آورید.

جواب: اگر خروجی‌های رقم نقلی را از چپ به راست، C_1, C_2, C_3 بنامیم:

$$\left. \begin{aligned} F &= w.0 + w.C_2 + 0.C_2 = w.C_2 \\ C_2 &= x.1 + x.C_1 + 1.C_1 = x + C_1 \\ C_1 &= y.z + y.0 + z.0 = yz \end{aligned} \right\} \quad F = w(x + C_1) = w(x + yz) = wx + wyz$$

موفق باشید، حسابی