Math Book 1

The Subtitle of the Book

GHERIB Imane

Organization or institution, if applicable

January 15, 2026

An inspirational quote or other text at the bottom of the page

Abstract

The abstract goes here....

Contents

Chapter 1

Puissances et Racines

I Cours

1 Les puissances entières

A Puissances à exposants entiers naturels ($\mathbb{N}$)

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **puissance n-ième de a** ou a à la puissance n, le produit de n facteurs de a. En d'autres termes :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

Le nombre a s'appelle la **base** de la puissance et le nombre n s'appelle l'**exposant** de la puissance.

Exemples : $5^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ et $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

Premières propriétés

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, si $b \neq 0$
- $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{si } m > n \\ 1, & \text{si } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & \text{si } m < n \end{cases}$

Exemples : $5^3 \cdot 5^4 = 5^7$ $(4^2)^3 = 4^6$ $3^4 \cdot 2^4 = 6^4$ $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3}$ $\frac{3^4}{3^7} = \frac{1}{3^3}$

✶ Exercice 1

B Puissances à exposants entiers relatifs ($\mathbb{Z}$)

Nous allons étendre la notion de puissances à exposants entiers positifs non nuls (i.e. $n \in \mathbb{N}^*$) aux puissances à exposants entiers (i.e. $n \in \mathbb{Z}$), de façon à conserver les propriétés déjà mentionnées.

À partir de l'égalité $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $(a \in \mathbb{R}^*)$[1], montrons que $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Démonstrations :

Si $m = 0$: $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n \implies a^0 = 1$.

Si $m = -n$: $a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1 \implies a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Remarquons également que si $a = 0$, alors $0^0 = 1$.

À la liste des propriétés précédentes, on peut alors compléter :

Nouvelles propriétés

- $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

Exemples : $\dfrac{5^7}{5^9} = 5^{-2}$ $\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$

✶ Exercice 2.

Le passage d'un terme du numérateur au dénominateur, ou inversement, s'effectue aisément, à condition d'**inverser le signe** de son exposant. Une fois les bases les plus simples identifiées, et en appliquant les propriétés algébriques étudiées précédemment, il est possible de transformer une expression complexe en une forme plus simple et plus exploitable.

Exemple : Dans l'expression suivante, mettons tout au numérateur :

$$\frac{5^3 \cdot 9^{-3}}{3^2 \cdot 15^{-1}} = \frac{5^3 \cdot (3^2)^{-3}}{3^2 \cdot (5 \cdot 3)^{-1}} = \frac{5^3 \cdot 3^{-6}}{3^2 \cdot 5^{-1} \cdot 3^{-1}} = \frac{5^3 \cdot 3^{-6}}{5^{-1} \cdot 3} = 5^3 \cdot 5 \cdot 3^{-6} \cdot 3^{-1} = 3^{-7} \cdot 5^4$$

✶ Exercice 3.

C La notation scientifique

Définition

Écrire un nombre réel x en **notation scientifique** signifie écrire ce nombre sous la forme :

$$x = a \cdot 10^n, \quad \text{avec } 1 \leq |a| < 10 \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

[1] En effet, la base a peut désormais se trouver au dénominateur d'une fraction.

La notation scientifique a pour principal intérêt de simplifier l'écriture des calculs. Elle permet également d'estimer une réponse finale sans l'utilisation obligatoire d'une calculatrice.

Exemples :

- Distance Terre - Lune : 384'400'000 m $= 3,844 \cdot 10^8$ m.
- Masse d'un atome d'hydrogène : 0,000'000'000'000'000'000'000'001'7 g $= 1,7 \cdot 10^{-24}$ g.

On désigne souvent les puissances de 10 avec un préfixe précédent les unités de mesure. Par exemple, on parle de **kilo**mètres pour exprimer 10^3 mètres ou de **giga**octets pour désigner 10^9 octets. Constatant qu'il n'existait aucun terme pour désigner 10^{100}, le mathématicien américain Edward Kasner (vers 1938) créa le néologisme **googol**. Kasner prétend que l'invention de ce mot est due à son neveu qui avait alors 9 ans. On peut néanmoins souligner que rien n'est, pour nous, égal au googol[a]

[a] Ce mot est repris plus tard par les fondateurs de Google pour nommer leur entreprise.

✶ Exercices 4 et 5.

2 Les racines

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième** de a, notée $\sqrt[n]{a}$, l'unique nombre r positif tel que $r^n = a$. En d'autres termes :

$$r = \sqrt[n]{a} \quad \Longleftrightarrow \quad r^n = a \text{ et } r \geq 0$$

Le nombre a s'appelle le **radicande**, le nombre n s'appelle **l'indice** et $\sqrt[n]{\ }$ s'appelle **le radical**. Notons également que :

- Dans le cas où $n = 1$, on a $\sqrt[1]{a} = a$.
- Dans le cas où $n = 2$, la racine 2-ième s'appelle **racine carrée** et se note $\sqrt{\ }$ au lieu de $\sqrt[2]{\ }$.
- Dans le cas où $n = 3$, la racine 3-ième s'appelle **racine cubique.**

Exemples : $\sqrt[1]{7} = 7$ $\qquad \sqrt[4]{81} = 3$

Jusqu'à présent, le radicande a était supposé positif. Si $a < 0$, alors la racine $\sqrt[n]{a}$ existe uniquement si l'indice n est impair.

Définition

- Si $a < 0$ et n est un **entier impair**, on définit la racine n-ième par :

$$r = \sqrt[n]{a} \Longleftrightarrow r^n = a$$

- Si $a < 0$ et n est un **entier pair**, la racine n-ième de a n'est pas définie.

Exemples : $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$. $\sqrt[4]{-16}$ en revanche n'est pas définie dans l'ensemble des nombres réels[2].

✶ Exercice 6.

Propriétés

Soit a et b deux nombres réels > 0 ; m, n et q des entiers > 0 ; p un entier quelconque. On a :

- $(\sqrt[n]{a})^n = a$
- $\sqrt[n]{a^n} = a$
- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, où $b \neq 0$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, où $b \neq 0$
- $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, où $b \neq 0$
- $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- $\sqrt[n \cdot q]{a^{n \cdot p}} = \sqrt[q]{a^p}$

Exemples : $(\sqrt{5})^2 = 5$ $\quad \sqrt[3]{5^3} = 5$ $\quad \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$ $\quad \sqrt{\dfrac{7}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}$ $\quad (\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{25}$
$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$ $\quad \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$

✶ Exercices 7, 8 et 9.

A Manipulation des racines : quelques mises en garde:

• Contrairement au cas de la multiplication, on ne peut pas “casser” la racine d'une somme en somme de racines. Réciproquement, on ne peut pas directement regrouper une somme de racines :

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

• L'égalité $\sqrt{a^2} = a$ n'est pas toujours vraie! $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$ mais $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$! On ne retrouve donc pas la valeur initiale -3.
On peut énoncer une règle générale, valable pour tout nombre $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

où $|a|$ désigne la valeur absolue de a.

• Lorsque l'on est amené à résoudre une équation avec des racines et qu'un passage au carré est nécessaire, il faut vérifier que ce passage au carré ne génère pas de solutions parasites. En d'autre termes, il convient de vérifier si les solutions obtenues vérifient bien l'équation initiale.

[2] En fait, dans le courant du XVIe siècle, plusieurs mathématiciens ont eu la nécessité de donner un sens et une réponse à ce type de calcul. Ils ont alors introduit un ensemble plus grand que l'ensemble contenant les racines carrées de nombres négatifs. Il s'agit de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

✶ Voir méthode A.

✶ Exercice 10.

Le concept de racine carrée a été défini et étudié dès l'Antiquité, à une époque où les nombres négatifs n'existaient pas encore. C'est pourquoi, **historiquement**, le nombre -2 n'était pas considéré comme une racine carrée de 4.
Par ailleurs, **selon la convention moderne**, la racine carrée est définie, en tant que fonction, pour renvoyer **la seule valeur positive**. Ainsi, même si -2 vérifie l'équation $x^2 = 4$, on a par définition $\sqrt{4} = 2$

Notons enfin que les équations $x^2 = a$ et $x = \sqrt{a}$ (a positif) ne sont pas équivalentes, la première équation ayant pour solution $\pm\sqrt{a}$.

Exemple : $x^2 = 16 \Longrightarrow x^2 - 16 = 0 \Longrightarrow (x-4)(x+4) = 0 \Longrightarrow x = 4$ ou $x = -4$.

✶ Exercice 11.

B Normes de simplification des expressions sous radical

Sans constituer une obligation absolue, il est néanmoins d'usage de respecter les trois principes conventionnels suivants :

1. Le radicande (l'expression sous le signe radical) doit être le plus petit possible, c'est-à-dire sans facteur carré restant.
2. On évite de laisser une racine au dénominateur d'une fraction (on rationalise).
3. On évite également de laisser une racine portant sur une fraction (on simplifie si possible).

L'objectif de ces conventions est multiple : elles permettent d'écrire les racines sous une forme simplifiée ou canonique, de faciliter les comparaisons, les calculs, et la reconnaissance d'égalités entre expressions, et enfin de garantir que deux racines identiques soient bien perçues comme telles.

Exemples :

1er principe :

- $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
- $\sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = 4$

2iéme principe :

- $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

- $\dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{25}}{5}$
- $\dfrac{4}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{4}{1+\sqrt{5}} \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \dfrac{4(1-\sqrt{5})}{1-5} = \dfrac{4(1-\sqrt{5})}{-4} = -1+\sqrt{5}$

3ième principe :

- $\sqrt{\dfrac{8}{3}} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{24}}{3} = \dfrac{\sqrt{4\cdot 6}}{3} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$
- $\sqrt[4]{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt[4]{5^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt[4]{5^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[4]{5^2}}{\sqrt[4]{5^2}} = \dfrac{\sqrt[4]{9\cdot 25}}{\sqrt[4]{5^4}} = \dfrac{\sqrt[4]{225}}{5} = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

Remarque : Lorsqu'une expression comporte à la fois une racine et une puissance, il convient de comparer l'indice de la racine avec l'exposant. Si l'exposant est supérieur ou égal à l'indice, il est possible de « sortir » une partie de la puissance de la racine. Cela permet de simplifier l'expression en ne conservant, sous le radical, que la plus petite puissance possible.

Exemple : $\sqrt[5]{3^{17}} = \sqrt[5]{3^5\cdot 3^5\cdot 3^5\cdot 3^2} = 3^3\sqrt[5]{3^2}$.
On a extrait trois fois 3^5 du radical, ce qui donne 3^3 et il reste 3^2 sous la racine cinquième.

✶ Exercices 12, 13 et 14.

C Extraction de racines : l'algorithme de Newton-Raphson

Une racine n-ième est dite **irrationnelle** lorsque sa valeur n'est pas un nombre rationnel, comme $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou $\sqrt[3]{5}$. À l'inverse, certaines racines ont une valeur **rationnelle**, par exemple $\sqrt{4} = 2$ ou $\sqrt[3]{8} = 2$.

Il existe des méthodes numériques permettant d'extraire une racine n-ième dont la valeur est irrationnelle. L'un des algorithmes les plus anciens et les plus connus est celui de Newton-Raphson. Cette méthode doit son nom aux mathématiciens anglais Isaac Newton (1643–1727) et Joseph Raphson (probablement 1648–1715), qui en furent les premiers théoriciens.

Définition

L'algorithme de Newton-Raphson est une méthode numérique itérative permettant d'approcher une solution réelle d'une équation de la forme :

$$f(x) = 0$$

en construisant une suite de valeurs convergeant vers la solution. À partir d'une valeur initiale x_0, on définit une suite (x_n) par la relation de récurrence suivante :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cette formule repose sur l'approximation de la fonction f par sa tangente en x_n, et l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses fournit la nouvelle approximation x_{n+1}.

Si $x_0 > 0$, cet algorithme convergera toujours vers la racine recherchée. Il convergera d'autant plus vite que la valeur x_0 est proche de la valeur recherchée.

L'algorithme de Newton-Raphson est une généralisation de la méthode d'Héron, du nom du mathématicien Héron d'Alexandrie (1er siècle après J.-C.), qui l'exposa dans le tome I de son ouvrage *Metrica* (Les métriques), redécouvert seulement en 1896 : cet ouvrage figurait à la fin d'un manuscrit héronien conservé à la Bibliothèque du Sérail à Istanbul. En l'occurrence, la méthode d'Héron ne s'applique qu'à la détermination des racines carrées.

Nos calculatrices modernes utilisent désormais d'autres algorithmes, plus efficaces que celui de Newton-Raphson.

✶ Voir méthode B.

D Premières notions de fonctions réciproques

Approche simple

On dit qu'une fonction g est la **fonction réciproque** d'une fonction f lorsque :

$$f(x) = y \quad \text{si et seulement si} \quad g(y) = x$$

Autrement dit, g « annule » l'effet de f, et inversement. On note alors $g = f^{-1}$.

Exemple : Soit $f(x) = 2x - 3$, on pose $y = f(x) = 2x - 3$ et on résout cette équation pour x :

$$y = 2x - 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = y + 3 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \tfrac{1}{2}(y + 3)$$

On obtient alors la fonction réciproque :

$$g(y) = \tfrac{1}{2}(y + 3) \quad \text{ou} \quad f^{-1}(x) = \tfrac{1}{2}(x + 3)$$

L'objectif de cette partie n'est pas de donner une définition formelle de la fonction réciproque (nous le verrons plus loin) mais d'illustrer ce concept avec les fonctions puissance et racine.

En effet, les fonctions puissance d'exposant n sont réciproques des fonctions racine d'indice n dans une certaine mesure.

Les FIGURE 1.1 et 1.2 illustrent respectivement les fonctions $f_1(x) = x^3$ puis $f_2(x) = x^2$ dont les fonctions réciproques sont respectivement $f_1^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ et $f_2^{-1}(x) = \sqrt{x}$.
La FIGURE 1.1 illustre parfaitement le fait qu'une fonction et sa réciproque ont des tracés symétriques par rapport à la droite d'équation $f(x) = x$. La FIGURE 1.2 montre que cette symétrie peut être restreinte à des ensembles de définition plus réduits, comme nous le verrons plus loin.

3 Puissances à exposants rationnels

La machine à calculer donne la possibilité d'avoir des exposants rationnels. Si on teste $25^{\frac{1}{2}}$ ou $27^{\frac{2}{3}}$, on obtiendra respectivement 5 et 8. Le **numérateur** et le **dénominateur** de l'exposant rationnel renvoient respectivement à l'**exposant** de la puissance et à l'**indice** de la racine. Autrement dit, $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2$.

Nous allons étendre la notion de puissances à exposants entiers vue précédemment, aux puissances à exposants rationnels, de façon à conserver les propriétés déjà étudiées.

Définition

On souhaite que $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a^{\frac{q}{q}} = a$ ce qui conduit à définir :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*, \qquad a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \quad \text{ et } a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut s'assurer qu'elle ne dépend de la fraction choisie pour représenter l'exposant, donc que $a^{\frac{np}{nq}} = a^{\frac{p}{q}}$. Or cela est vrai grâce à la propriété des racines :

$$\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Exemples : $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2 \qquad 5^{-0,75} = 5^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{5^{\frac{3}{4}}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{5^3}} = \dfrac{\sqrt[4]{5}}{5}$.

Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $m, n \in \mathbb{Q}$, on retrouve les propriétés déjà observées précédemment.

Démonstration : On pose $m = \dfrac{p}{q}$ et $n = \dfrac{r}{s}$

- $a^{m+n} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = \sqrt[qs]{a^{ps+rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps} \cdot a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{rq}} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^m \cdot a^n$
- $(a^m)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{(a^p)^r}} = \sqrt[sq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}} = a^{m\cdot n}$
- $(a \cdot b)^n = (a \cdot b)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{(a \cdot b)^r} = \sqrt[s]{a^r \cdot b^r} = \sqrt[s]{a^r} \cdot \sqrt[s]{b^r} = a^{\frac{r}{s}} \cdot b^{\frac{r}{s}} = a^n \cdot b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^r} = \dfrac{\sqrt[s]{a^r}}{\sqrt[s]{b^r}} = \dfrac{a^{\frac{r}{s}}}{b^{\frac{r}{s}}} = \dfrac{a^n}{b^n}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\frac{r}{s}} = \left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}\right]^{\frac{r}{s}} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$
- $a^{m-n} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps-rq}{sq}} = \sqrt[qs]{a^{ps-qr}} = \sqrt[qs]{\dfrac{a^{ps}}{a^{qr}}} = \dfrac{\sqrt[qs]{a^{ps}}}{\sqrt[qs]{a^{qr}}} = \dfrac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[s]{a^r}} = \dfrac{a^m}{a^n}$

Remarque : Lorsqu'un exposant rationnel est supérieur ou égal à 1, on peut simplifier l'expression en séparant la partie entière de l'exposant. Cela permet d'écrire la puissance comme le produit d'une puissance entière et d'une puissance dont l'exposant rationnel est strictement inférieur à 1, ce qui facilite la manipulation de l'expression.

Exemple : $3^{\frac{17}{5}} = 3^{\frac{15}{5}+\frac{2}{5}} = 3^{3+\frac{2}{5}} = 3^3 \cdot 3^{\frac{2}{5}} = 3^3\sqrt[5]{3^2}$.

✶ Exercices 15,16, 17 et 18.

Exprimer les racines sous forme d'exposants rationnels rend les calculs plus simples et plus faciles à manipuler.

Exemples : $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} = \dfrac{5^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{1}{7}}} = 5^{\frac{1}{3}-\frac{1}{7}} = 5^{\frac{4}{21}} = \sqrt[21]{5^4}$ $\qquad \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a^3} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{13}{6}} = \sqrt[6]{a^{13}} = a^2\sqrt[6]{a}$.

✶ Exercices 19, 20 et 21.

Dans le chapitre précédent, nous avons montré qu'un nombre réel négatif n'admet pas de racine d'indice pair. Cette propriété peut être étendue au cas des puissances à exposant rationnel.

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}_-^*$ et soit $\dfrac{p}{q}$ un nombre rationnel écrit sous forme irréductible, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, alors la puissance $a^{\frac{p}{q}}$ est définie dans $\mathbb{R}$ si et seulement si q est impair.

Exemples : $(-8)^{\frac{5}{3}} = -32$ mais $(-8)^{\frac{5}{2}}$ n'existe pas.

4 Puissances à exposants réels

Nous avons étendu les puissances jusqu'au cas des exposants rationnels. Il est possible de les étendre encore jusqu'aux exposants réels. Cette dernière extension nécessite une définition des exposants irrationnels, qui dépasse le cadre de ce cours. Nous allons toutefois nous contenter de suggérer une façon de faire.
Un nombre réel x peut être approché de manière aussi précise que désiré par des nombres rationnels (par exemple en choisissant un nombre suffisamment grand de chiffres de son développement décimal). On peut alors montrer que si les nombres rationnels

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

se rapprochent de x, alors les nombres

$$a^{x_1}, a^{x_2}, \ldots, a^{x_n}, \ldots$$

vont se rapprocher du nombre réel qui sera, par "définition", a^x.

Exemple : L'utilisation de la calculatrice permet d'obtenir $3^{\sqrt{2}} \simeq 4,73$.
Le tableau ci-dessous illustre la façon d'y arriver :

x	1	1,4	1,41	1,414	$\rightarrow$	$\sqrt{2}$	$\leftarrow$	1,415	1,42	1,5	2
3^x	3^1	$3^{\frac{14}{10}}$	$3^{\frac{141}{100}}$	$3^{\frac{1414}{1000}}$	$\rightarrow$	$3^{\sqrt{2}}$	$\leftarrow$	$3^{\frac{1415}{1000}}$	$3^{\frac{142}{100}}$	$3^{\frac{15}{10}}$	3^2
3^x	3	4,7	4,71	4,728	$\rightarrow$	$\simeq 4,73$	$\leftarrow$	4,733	4,78	5,2	9

Signalons qu'il a fallu attendre le milieu du XIXème siècle pour définir rigoureusement les expressions du type $3^{\sqrt{2}}$.

✶ Exercice 22.

On remarque enfin qu'une puissance d'exposant irrationnel d'un nombre négatif n'est pas définie dans $\mathbb{R}$.

Méthode

Méthode A

Enoncé :

Sans recourir à la calculatrice, vérifier les égalités suivantes :
a) $2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$
b) $\sqrt{8-2\sqrt{12}} = \sqrt{2}-\sqrt{6}$
c) Contrôler les égalités à l'aide de la calculatrice puis conclure.
d) Déterminer des valeurs positive pour a, b, c et d vérifiant l'égalité : $a+\sqrt{b} = \sqrt{c+\sqrt{d}}$ et proposer des exemples d'égalités ainsi construites.

Corrigé :

a)

$$\begin{array}{rl} & 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}-\sqrt{2} \\ \iff & 4(2-\sqrt{3}) = (\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 \\ \iff & 8-4\sqrt{3} = 6+2-2\sqrt{12} \\ \iff & 8-4\sqrt{3} = 8-4\sqrt{3} \end{array}$$

L'égalité initiale semble vérifiée.

b)

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{8-2\sqrt{12}} = \sqrt{2}-\sqrt{6} \\ \iff & 8-2\sqrt{12} = (\sqrt{2}-\sqrt{6})^2 \\ \iff & 8-4\sqrt{3} = 2+6-2\sqrt{12} \\ \iff & 8-4\sqrt{3} = 8-4\sqrt{3} \end{array}$$

L'égalité initiale semble également vérifiée.

c) La calculatrice confirme la première égalité. En revanche, la seconde égalité n'est pas vérifiée car le membre de gauche est initialement strictement positif alors que celui de droite est strictement négatif. Le fait que deux expressions aient le même carré n'implique pas qu'elles soient égales. Il peut exister des solutions parasites dues au passage au carré.

d) On cherche à construire une égalité de la forme : $a+\sqrt{b} = \sqrt{c+\sqrt{d}}$. Pour cela, on élève les deux membres au carré puis on développe : $(a+\sqrt{b})^2 = c+\sqrt{d} \Longrightarrow a^2+2a\sqrt{b}+b = c+\sqrt{d}$.

On identifie alors les parties rationnelle et irrationnelle de chaque membre :

$$\begin{cases} a^2 + b = c \\ 2a\sqrt{b} = \sqrt{d} \end{cases}$$

Ainsi, à partir de valeurs choisies pour a et b, on peut déterminer :

$$c = a^2 + b \quad \text{et} \quad d = (2a\sqrt{b})^2 = 4a^2b$$

Exemple : $a = 2$ et $b = 5 \Longrightarrow c = 9$ et $d = 80$ et par conséquent : $2 + \sqrt{5} = \sqrt{9 + \sqrt{80}}$.

Méthode B

Enoncé :

Donner une approximation à 10^{-5} de $\sqrt{5}$ en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson (on prendra $x_0 = 2$).

Corrigé :
Prérequis : On verra en analyse que la dérivée f' d'une fonction qui s'écrit $f(x) = x^n - a$ vaut $f'(x) = nx^{n-1}$.

On cherche à résoudre :

$$f(x) = x^3 - 5 = 0$$

La formule d'itération est :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^3 - 5}{3x_k^2} = \frac{2}{3}x_k + \frac{5}{3x_k^2}$$

On choisit la valeur initiale :

$$x_0 = 2$$

Nombre d'itérations (k) :

k	x_k
0	2.00000000
1	1.75000000
2	1.71088435
3	1.70997395
4	1.70997595
5	1.70997595

Conclusion : La suite converge rapidement vers $\sqrt[3]{5} \simeq 1.71$.

II Exercices

Exercice 1

Calculer sans machine :

a) $(2^2)^3$

b) $2^{(2^3)}$

c) $(2^3)^2$

d) $2^3 \cdot 3^2$

e) $3^2 + 3^4$

f) $10^3 + 10^2$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$

h) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$

i) $\left(-\frac{5}{2}\right)^4$

j) $(\sqrt{2})^4$

k) $(\sqrt{5})^6$

l) $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8$

Exercice 2

Calculer sans machine :

a) $2^{-3} \cdot 2^{-5}$

b) $3^4 \cdot 3^{-4}$

c) $4^0 \cdot 4^{-2} \cdot 4^{-3}$

d) $a^{-3} \cdot a^4$

e) $\frac{2^{-3}}{3^2}$

f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

Exercice 3

a) $2^{-3} \cdot 2^4 = \frac{1}{2^{\cdots}}$

b) $(2^{-3})^{-4} = 4^{\cdots}$

c) $\frac{2^5}{4^{-3}} = 2^{\cdots}$

d) $\frac{9^{-2}}{36^{-2}} = \ldots^{\cdots}$

e) $a^3 \cdot a^4 \cdot a^5 = a^{\cdots}$

f) $(a^3)^4 = \frac{1}{a^{\cdots}}$

g) $\frac{a^4}{a^5} = a^{\cdots}$

h) $3^n \cdot 3^2 = 3^{\cdots}$

i) $5^{n+1} \cdot 5^{n-1} = 5^{\cdots}$

j) $\frac{4^{n+3}}{4^4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\cdots}$

k) $\frac{a^{n+1}}{a} = a^{\cdots}$

l) $(a^3 \cdot b^4)^2 = \frac{a^{\cdots}}{b^{\cdots}}$

m) $\frac{2^6 \cdot 49^{-1}}{4^3 \cdot 7 \cdot 14^{-2}} = 2^{\cdots} \cdot 7^{\cdots}$

n) $a^{-n} \cdot a^{n+1} = \frac{1}{a^{\cdots}}$

o) $a^{-4} \cdot a^{n+3} = a^{\cdots}$

p) $\frac{21^2 \cdot 7^{-3}}{63^{-2} \cdot 3^4} = \frac{7^{\cdots}}{3^{\cdots}}$

q) $\left(\frac{a^{-3}}{a^{-4}}\right)^2 = a^{\cdots}$

r) $\left(\frac{a^3}{a^4}\right)^{-2} = a^{\cdots}$

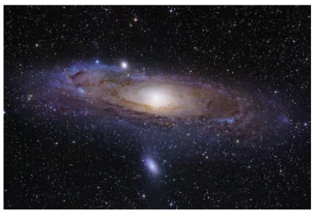
Exercice 4

"Modern Times Forever", le plus long film jamais tourné est une production danoise datant de 2011 qui dure 240 heures.
En supposant que la vitesse du film est de 24 images par seconde, calculer le nombre total d'images dans ce film.

a) Estimer de tête la réponse.

b) La calculer à l'aide de votre calculatrice.

Exercice 5



La Voie lactée, notre galaxie, ressemble à un disque. Elle est constituée d'environ deux cents milliards d'étoiles, dont la plupart sont semblables au Soleil. Toutes ces étoiles tournent autour de l'axe de rotation du disque. Le soleil se situe à $2,5 \cdot 10^{17}$ *km du centre galactique. Depuis sa naissance, il y a 4,57 milliards d'années, il a effectué une vingtaine de tours.*
La vitesse de révolution du Soleil autour de l'axe de la Voie lactée est-elle supérieure ou inférieure à celle d'un bolide de formule 1 ?
Une estimation de tête peut suffire pour répondre à la question.

Exercice 6

Calculer sans machine :

a) $\sqrt{0}$ b) $\sqrt{625}$ c) $\sqrt{0,04}$

d) $\sqrt{0,0009}$ e) $\sqrt{0,0016}$ f) $\sqrt{0,000004}$

g) $\sqrt[3]{1000}$ h) $\sqrt[4]{-625}$ i) $\sqrt[3]{343}$

j) $\sqrt[5]{-32}$ k) $\sqrt[3]{216}$ l) $\sqrt[4]{2401}$

m) $\sqrt[3]{-64}$ n) $\sqrt[3]{0,027}$ o) $\sqrt[3]{729}$

p) $\sqrt[3]{0,001}$ q) $\sqrt[3]{0,512}$ r) $\sqrt[3]{-0,125}$

Exercice 7

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt{\sqrt{3}}$ b) $\sqrt[3]{5^{12}}$ c) $\sqrt[4]{27}\sqrt[4]{3}$

d) $\sqrt[5]{a^3\sqrt[3]{a}}$ e) $\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{2}$ f) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$

g) $\sqrt{12}\sqrt{3}$ h) $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$ i) $\sqrt[8]{81}\sqrt[8]{27}\sqrt[8]{3}$

j) $\sqrt[6]{125}\sqrt[6]{25}\sqrt[6]{5}$ k) $\sqrt{2^2}$ l) $\sqrt{2^6}$

m) $\sqrt[10]{2^5}$ n) $\sqrt[24]{3^8}$ o) $\sqrt[24]{4^7}$

p) $\sqrt{\sqrt{16}}$ q) $\sqrt[7]{\sqrt{7^7}}$ r) $\sqrt[3]{\sqrt{3^6}}$

Exercice 8

Sachant que $\sqrt{27} \approx 5,19$ et $\sqrt{270} \approx 16,43$, calculer :

a) $\sqrt{2\,700}$ b) $\sqrt{27\,000}$ c) $\sqrt{270\,000}$

d) $\sqrt{0,27}$ e) $\sqrt{0,027}$ f) $\sqrt{0,00027}$

Exercice 9

Sachant que $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{270} \approx 6,46$ et $\sqrt[3]{2\,700} \approx 13,92$, calculer :

a) $\sqrt[3]{27\,000}$ b) $\sqrt[3]{270\,000}$ c) $\sqrt[3]{2\,700\,000}$

d) $\sqrt[3]{0,27}$ e) $\sqrt[3]{0,027}$ f) $\sqrt[3]{0,00027}$

Exercice 10

Sans calculatrice, vérifier si ces égalités sont justes :

a) $1+\sqrt{3} = \sqrt{4+\sqrt{12}}$

b) $1-\sqrt{3} = \sqrt{4-\sqrt{12}}$

c) $\sqrt[3]{80+48\sqrt{3}} = 2+2\sqrt{3}$

d) $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} = \sqrt{9+4\sqrt{5}} = 2+\sqrt{5}$

indication : tester $\sqrt{9+4\sqrt{5}} = 2+\sqrt{5}$, puis $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} = 2+\sqrt{5}$

Exercice 11

Résoudre les équations suivantes :

a) $(x+5)^2 = 2$ b) $-(x+2)^2 = 4$

c) $25x^2 = 9$ b) $(x-3)^2 = 17$

e) $(x^2-2)^2 = 13$ f) $(x^2+3)^2 = 5$

Exercice 12

Sachant que $\sqrt{2} \approx 1,414$, estimer sans calculatrice les nombres suivants :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{8}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

Faire de même avec $\sqrt{3} \approx 1,732$:

e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ f) $\sqrt{12}$ g) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-1}$

Exercice 13

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt[3]{125^2}$ b) $\dfrac{4+\sqrt{8}}{2}$ c) $\sqrt[3]{-250}$

d) $\sqrt{3a^2b^3}\cdot\sqrt{6a^5b}$ e) $\sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt[3]{a^2b^5}$ f) $\dfrac{5}{4\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$ h) $\dfrac{14\pm\sqrt{48}}{18}$ i) $\sqrt[3]{16}$

j) $\sqrt[3]{16x^3y^8z^4}$ k) $\dfrac{1}{\sqrt{8}}$ l) $\dfrac{\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$

m) $\sqrt{\frac{39}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$ n) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{6}}$ o) $\sqrt{162}$

Quelles conditions doivent respecter a, b, x, y et z ?

Exercice 14

Même consigne :

a) $\sqrt{12}+\sqrt{27}$ b) $\sqrt[3]{a^4}$ c) $\sqrt{\dfrac{2a^2b^3}{8b}}$

d) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ e) $\sqrt{\dfrac{1}{8}}$ f) $\dfrac{2}{\sqrt{1000}}$

g) $\sqrt[3]{-125}$ h) $\sqrt[3]{a^{10}}$ i) $\dfrac{1}{\sqrt{3^3}}$

j) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ k) $\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-3\sqrt{2}}$ l) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2$

Exercice 15

Simplifier les écritures suivantes :

a) $5^{2/3}\cdot 5^{1/4}$ b) $\left(7^{10/3}\right)^{1/5}$ c) $3^{0,4}\cdot 11^{0,4}$ d) $\dfrac{26^{3/4}}{2^{3/4}}$ e) $\dfrac{4^{5/3}}{2^{1/2}}$

Exercice 16

Calculer sans la calculatrice :

a) $\left(\dfrac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ b) $5^{0,75}\cdot 125^{0,75}$ c) $\dfrac{9^{2/3}}{3^{1/2}}$

Exercice 17

Écrire les expressions suivantes à l'aide de racines et simplifier :

a) $5^{\frac{1}{2}}$ b) $2^{\frac{4}{5}}$ c) $7^{\frac{31}{40}}$

d) $1024^{\frac{1}{10}}$ e) $0^{\frac{1}{5}}$ f) $36^{\frac{3}{2}}$

g) $25^{0,5}$ h) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ i) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

j) $2^{-\frac{1}{2}}$ k) $7^{-\frac{1}{3}}$ l) $4^{-\frac{5}{3}}$

m) $8^{\frac{2}{3}}$ n) $25^{-\frac{3}{2}}$ o) $64^{-\frac{2}{3}}$

Exercice 18

Écrire les expressions suivantes à l'aide d'exposants rationnels :

a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[11]{5^6}$ c) $\sqrt[3]{3^9}$

d) $\sqrt[5]{a^{15}}$ e) $\sqrt{a^6}$ f) $\sqrt[n]{a^{2n}}$

g) $\left(\sqrt[5]{a^6}\right)^{15}$ h) $\left(\sqrt[3]{a^n}\right)^3$ i) $\left(\sqrt{a^4}\right)^{2n}$

Exercice 19

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}$ c) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}}$

d) $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[5]{a^3}}$ e) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}$ f) $\dfrac{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}$

g) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a}}$ h) $\dfrac{\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a}}{a^3}$ i) $\dfrac{(\sqrt{a})^3}{a\sqrt[3]{a^2}}$

Exercice 20

Simplifier les expressions suivantes :

a) $8^{\frac{2}{3}}+16^{\frac{1}{2}}+27^{\frac{2}{3}}+81^{\frac{1}{4}}-125^{\frac{1}{3}}-1000^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt{27^{-\frac{2}{3}}+5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}}$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

Exercice 21

Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Proposer alors une éventuelle correction.

a) $(a^r)^2 = a^{(r^2)}$

b) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

c) $\sqrt{a^2+1} = a+1$

d) $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$

e) $a^{1/k} = \frac{1}{a^k}$

f) $(3a+2b)^2 = 9a^2 + 4b^2$

Exercice 22

Effectuer une démarche comparable pour estimer $2^{2\pi}$ à 1 décimale.

III Corrigés

Exercice 1

a) 64
b) 256
c) 64
d) -1
e) 90
f) 1100
g) $\frac{1}{81}$
h) $-\frac{8}{125}$
i) $\frac{625}{16}$
j) 4
k) 125
l) $\frac{1}{81}$

Exercice 2

a) $2^{-8} = \frac{1}{256}$
b) 1
c) $4^{-5} = \frac{1}{1024}$
d) a
e) $\frac{1}{72}$
f) 4

Exercice 3

a) 2^{-1}
b) 4^6
c) 2^{11}
d) 4^2
e) a^{12}
f) $\frac{1}{a^{-12}}$
g) a^{-1}
h) 3^{n+2}
i) 5^{2n}
j) $\left(\frac{1}{4}\right)^{1-n}$
k) a^n
l) $\frac{a^6}{b^{-8}}$
m) $2^2 \cdot 7^{-1}$
n) $\frac{1}{a^{-1}}$
o) a^{n-1}
p) $\frac{7}{3^{-2}}$
q) a^2
r) a^2

Exercice 4

a) $240 \cdot 3600 \cdot 24 = 2,4 \cdot 10^2 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \cdot 2,4 \cdot 10 \approx 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 10^6 \Rightarrow$ un peu plus de $1,6 \cdot 10^7$ images.

b) $2,07 \cdot 10^7$ images (un peu plus de 20 millions).

Exercice 5

Proposons l'estimation de la vitesse en [km/h] :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot 2,5 \cdot 10^{17}) \cdot 20}{4,57 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24} \approx \frac{3 \cdot 10^{19}}{4 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 2,5 \cdot 10^1} \approx \frac{3 \cdot 10^{19}}{4 \cdot 10^{13}} \approx 7,5 \cdot 10^5$$

Avec la calculatrice : $7,97 \cdot 10^5$ km/h, soit près de 2000 fois plus rapide que les bolides de F1.

Exercice 6

a) 0 b) 25 c) 0,2 d) 0,03
e) 0,04 f) 0,002 g) 10 h) non défini
i) 7 j) -2 k) 6 l) 7
m) -4 n) 0,3 o) 9 p) 0,1
q) 0,8 r) $-0,5$

Exercice 7

a) $\sqrt[4]{3}$ b) $5^4 = 625$ c) 3 d) $\sqrt[3]{a^2}$
e) 2 f) $1/3$ g) 6 h) 2
i) 3 j) 5 k) 2 l) $2^3 = 8$
m) $\sqrt{2}$ n) $\sqrt[3]{3}$ o) $\sqrt[12]{27}$ p) 2
q) $\sqrt{7}$ r) 3

Exercice 8

a) 51,9 b) 164,3 c) 519
d) 0,519 e) 0,1643 f) 0,01643

Exercice 9

a) 30 b) 64,6 c) 139,2
d) 0,646 e) 0,3 f) 0,0646

Exercice 10

On obtient :

a) Vrai b) Faux c) Vrai d) Vrai

Exercice 11

a) $S = -5 \pm \sqrt{2}$ b) $S = \emptyset$
c) $S = \left\{\pm\dfrac{3}{5}\right\}$ d) $S = \left\{3 \pm \sqrt{17}\right\}$
e) $S = \left\{\pm\sqrt{2+\sqrt{13}}\right\}$ f) $S = \emptyset$

Exercice 12

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \simeq \dfrac{1,414}{2} \simeq 0,7$

b) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \simeq 2,8$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 \simeq 2,8$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(1-\sqrt{2})}{-1} = 2-\sqrt{2} \simeq 0,6$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \simeq \dfrac{1,732}{3} \simeq 0,5$

f) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \simeq 3,5$

g) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{3(\sqrt{3}+1)}{2} \simeq \dfrac{8,1}{2} \simeq 4$

Exercice 13

a) 25

b) $2+\sqrt{2}$

c) $-5\sqrt[3]{2}$

d) $3a^3b^2\sqrt{2a}$

e) ab^2

f) $\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$

g) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

h) $\dfrac{7\pm 2\sqrt{3}}{9}$

i) $2\sqrt[3]{2}$

j) $2xy^2z\sqrt[3]{2y^2z}$

k) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

l) $-\dfrac{\sqrt{5}+5}{4}$

m) $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$

n) $\dfrac{\sqrt[3]{36}}{2}$

o) $9\sqrt{2}$

Exercice 14

a) $5\sqrt{3}$

b) $a\sqrt[3]{a}$

c) $\dfrac{1}{2}ab$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

f) $20\sqrt{10}$

g) -5

h) $a^3\sqrt[3]{a}$

i) $\sqrt{3}/9$

j) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

k) $\dfrac{x^2+4\sqrt{2}x+6}{x^2-18}$

l) $3+2\sqrt{2}$

Exercice 15

a) $5^{\frac{11}{12}}$ ou $\sqrt[12]{5^{11}}$ b) $7^{\frac{2}{3}}$ ou $\sqrt[3]{7^2}$ c) $33^{\frac{2}{5}}$ ou $\sqrt[5]{33^2}$ d) $13^{\frac{3}{4}}$ ou $\sqrt[4]{13^3}$ e) $2^{\frac{17}{6}}$ ou $\sqrt[6]{2^{17}}$

Exercice 16

a) $\dfrac{25}{4}$

b) 125

c) $\sqrt[6]{3^5}$

Exercice 17

a) $\sqrt{5}$
b) $\sqrt[5]{2^4}$
c) $\sqrt[40]{7^{31}}$
d) 2
e) 0
f) 216
g) 5
h) $\frac{1}{3}$
i) $\frac{9}{4}$
j) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
k) $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{49}}{7}$
l) $\frac{1}{8\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{16}$
m) 4
n) $\frac{1}{125}$
o) $\frac{1}{16}$

Exercice 18

a) 2
b) $5^{\frac{6}{11}}$
c) 3^3
d) a^3
e) a^3
f) a^2
g) a^{18}
h) a^n
i) a^{4n}

Exercice 19

a) $\sqrt[4]{2}$
b) $\sqrt[6]{a^5}$
c) $\sqrt[12]{a}$
d) $\sqrt[10]{a^9}$
e) 1
f) $\sqrt[12]{a^7}$
g) $\sqrt[12]{a}$
h) $\frac{1}{\sqrt[6]{a^7}} = \frac{\sqrt[6]{a^5}}{a^2}$
i) $\frac{1}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^5}}{a}$

Exercice 20

a) -85
b) $\frac{16}{3}$
c) $\sqrt[8]{27}$

Exercice 21

a) FAUX $(a^r)^2 = a^{2r}$
b) VRAI
c) FAUX l'expression $\sqrt{a^2+1}$ ne peut être simplifiée
d) VRAI si $a \neq 0$
e) FAUX $a^{1/k} = \sqrt[k]{a}$
f) FAUX $(3a+2b)^2 = \sqrt{9a^2+12ab+4b^2}$,si $3a+2b>0$

Exercice 22

x	6	6,2	6,28	6,283	$\rightarrow$	2π	$\leftarrow$	6,284	6,29	6,3	7
2^x	2^6	$2^{\frac{62}{10}}$	$2^{\frac{628}{100}}$	$2^{\frac{6283}{1000}}$	$\rightarrow$	$2^{2\pi}$	$\leftarrow$	$2^{\frac{6284}{1000}}$	$2^{\frac{629}{100}}$	$2^{\frac{63}{10}}$	2^7
2^x	64	73,52	77,71	77,87	$\rightarrow$	$\simeq 77,9$	$\leftarrow$	77,92	78,25	78,79	128