Valorisation des options en utilisant le modéle binomiale et trinomiale

Encadré par: Mr.EL ASRI

Réalisé par: Imane DIBE

Contents

1 Introduction

1.1 Produits dérivés

Les produits dérivés jouent un rôle fondamental sur les marchés financiers modernes. Ils sont des instruments financiers dont la valeur dépend d'un actif sous-jacent tel qu'une action, une obligation, une matière première, ou un indice. Ces produits permettent aux investisseurs de se couvrir contre des risques, de spéculer sur l'évolution des marchés, ou d'améliorer leur rendement en utilisant des stratégies de gestion avancées. L'évaluation des produits dérivés est un domaine complexe de la finance, nécessitant l'utilisation de modèles mathématiques sophistiqués. Parmi ces produits, les options occupent une place particulière en raison de leur flexibilité et de leur popularité. Elles sont utilisées tant par les institutions financières que par les investisseurs individuels. Dans le cadre de ce projet, nous nous concentrons sur l'évaluation des options, en utilisant des modèles binomiaux et trinômiaux, afin de mieux comprendre leur fonctionnement et leur valeur sur différents horizons temporels.

1.2 Options

Une option est un droit d'acheter ou de vendre une quantité d'actifs (actions, devises, matières premières, etc.) pendant une période et à un prix convenus à l'avance appelé prix d'exercice (ou strike). L'exercice de ce droit n'est en aucun cas une obligation. En géneral, il existe deux types d'options :

- Une option d'achat (call) est une option qui protège l'acheteur. Elle lui confère le droit, mais non l'obligation, d'acheter un actif à un prix convenu à l'avance (dit prix d'exercice ou Strike). Ainsi, lorsque le marché est en hausse, l'option est activée, et l'acheteur acquiert le produit au prix convenu initialement. Dans le cas contraire, il profite de la conjoncture baissière, et la transaction s'effectue au prix du marché

- Une option de vente (put) est une option qui protège le vendeur. Elle lui confère le droit, mais non l'obligation, de vendre un actif sous-jacent à un prix convenu à l'avance (dit prix d'exercice ou Strike). Ainsi, lorsque le marché est baissier, l'option est activée, et le vendeur cède son produit au prix d'exercice. Dans le cas contraire, il bénéficie de la conjoncture haussière, et la transaction s'effectue au prix du marché .

  On peut également distinguer entre les options selon leur style d'exercice :

- Options européennes : Elles ne peuvent être exercées qu'à la date d'échéance.

- Options américaines : Elles peuvent être exercées à tout moment avant ou à la date d'échéance.

  L'évaluation de ces options repose sur des modèles financiers qui prennent en compte divers facteurs, tels que la volatilité de l'actif sous-jacent, le taux d'intérêt sans risque, et la durée restante avant l'échéance. Les modèles binomial et trinomial, ainsi que des méthodes plus avancées comme Black-Scholes ou Monte Carlo, permettent de déterminer le prix juste de ces options.

1.3 Concepts clés

- Prix de l'actif S: la valeur actuelle du sous-jacent sur lequel repose l'option ou le produit dérivé.

- Prix d'exercice(Strike) K: le prix prédéterminé auquel vous achetez, dans le cas d'un call, ou vendez, dans le cas d'un put, un contrat à terme sous-jacent si vous exercez l'option.

- Taux d'intérêt sans risque r: le taux d'intérêt d'un emprunteur sûr, dont la rentabilité est certaine sur une période donnée.

- Maturité T: l'espace de temps qui sépare aujourd'hui de la date d'échéance finale de ce titre, date à laquelle il disparaîtra.

- Volatilité σ : la dispersion des rendements par rapport à une moyenne sur une période de temps donnée. Elle permet donc de mesurer le risque.

2 Modèle binomial

2.1 Introduction

Le modèle binomial, également appelé modèle CRR en référence à Cox, Ross et Rubinstein qui l'ont formalisé en 1979, est une méthode numérique largement utilisée en finance pour évaluer les options. Contrairement à d'autres modèles, il adopte une approche discrète pour modéliser les fluctuations de l'actif sous-jacent, permettant ainsi de retracer les différents scénarios de prix possibles sur la durée de vie de l'option. La méthode repose sur l'application de la probabilité risque-neutre, selon laquelle les prix actualisés des actifs sont considérés comme des martingales. Ce cadre permet d'obtenir une évaluation précise des options, en particulier pour les options américaines ou bermudiennes, qui peuvent être exercées à différents moments avant leur échéance. Grâce à sa flexibilité et à sa simplicité mathématique, le modèle binomial est également largement utilisé pour évaluer des produits plus complexes comme les SPAC. Bien que plus lente que la méthode de Black-Scholes, la méthode binomiale est particulièrement adaptée aux options à long terme ou celles portant sur des actifs versant des dividendes. Toutefois, pour les options plus complexes ou avec plusieurs sources d'incertitude, comme les options asiatiques ou réelles, l'application de la méthode Monte Carlo peut être préférable. Le modèle binomial repose sur la construction d'un arbre de prix de l'actif sous-jacent, représentant les différents scénarios d'évolution à chaque période. L'évaluation de l'option se fait en remontant de la fin de l'arbre (la maturité de l'option) jusqu'au premier nœud (la date actuelle), permettant ainsi de déterminer sa valeur actuelle.

2.2 Hypothèses du modèle

Le modèle binomial d'évaluation des options repose sur des hypothèses spécifiques concernant les marchés financiers. Il peut être facile d'oublier ces hypothèses, mais elles jouent un rôle crucial dans l'efficacité du modèle et elles simplifient l'écosystème complexe des marchés financiers et permettent de calculer plus facilement le prix des options. Il est donc essentiel de comprendre ces hypothèses. Tout d'abord, le modèle suppose que:

1. Évolution binaire du prix de l'actif: Dans le modèle binomial, l'hypothèse clé est que le prix de l'actif sous-jacent suit une distribution binomiale. À chaque période de temps discrète, le prix de l'actif peut évoluer de deux manières seulement :

   - Augmenter d'un facteur u (up) ;
   - Diminuer d'un facteur d (down).

   Cela signifie qu'à chaque pas de temps, le prix du sous-jacent ne peut prendre que deux valeurs possibles, définies par les multiplicateurs u et d, qui dépendent de la volatilité de l'actif et de la durée d'une période. Par exemple, si le prix actuel est S_0, alors à l'instant $t = 1$, on aura:

$$S_1 = \begin{cases} S_0 \times u & \text{(hausse)} \\ S_0 \times d & \text{(baisse)} \end{cases}$$

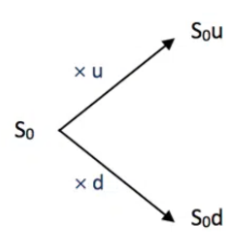

Figure 1: Arbre binaire

2. Absence d'opportunités d'arbitrage: L'hypothèse de l'absence d'opportunités d'arbitrage est fondamentale dans le modèle binomial et en finance en général. L'arbitrage consiste à réaliser un profit sans risque, c'est-à-dire en achetant un actif à un prix plus bas et en le vendant à un prix plus élevé sur un autre marché ou à un autre moment, sans aucun investissement net.

   L'arbitrage, en finance, désigne la possibilité de réaliser un profit sans risque et sans investissement initial. Cela constitue un défi pour les chercheurs en raison de l'absence de risque. Pour éviter ces situations dans les modèles financiers, un principe de base est adopté : si deux actifs ont le même prix dans le futur, ils doivent aussi avoir le même prix aujourd'hui. En termes mathématiques, si X_t et Y_t sont les prix respectifs des actifs X et Y à l'instant $t \in [0, T]$, alors si :

$$X_T \leq Y_T \implies X_t \leq Y_t \quad \forall t \leq T$$

   Et particulièrement, si :

$$X_T = Y_T \implies X_t = Y_t \quad \forall t \leq T$$

   Cette hypothèse (AOA) est vérifiée par la condition suivante sur les facteurs u, d, et le taux d'intérêt sans risque r :

$$d < R < u$$

   avec $R = e^r$ dans le cas continu et $R = 1 + r$ dans le cas discret.

3. Marchés sont efficients(complets): Dans un marché efficient et complet, il est possible de répliquer tout produit dérivé, comme une option, par un portefeuille constitué d'une combinaison de l'actif sous-jacent S (risqué) et d'un actif sans risque (comme une obligation). La stratégie de couverture permet de déterminer la quantité Δ d'actifs sous-jacents à détenir dans le portefeuille pour reproduire l'option.

   La valeur de l'option à un nœud V est déterminée en fonction des valeurs dans les nœuds suivants (après une hausse ou une baisse). La formule pour la valeur actualisée de l'option est :

$$V_0 = \frac{pV_u + (1 - p)V_d}{R}$$

   où :

   - V_u et V_d sont les valeurs de l'option après une hausse ou une baisse du prix de l'actif,
   - p est la probabilité risque-neutre, définie par :

$$p = \frac{R - d}{u - d}$$

   Cette formule montre que dans un marché complet, la valeur de l'option peut être déterminée en remontant l'arbre de prix, en prenant en compte les scénarios futurs.

4. Taux d'intérêt sans risque constant: Le taux d'intérêt sans risque r est utilisé pour actualiser les flux de trésorerie futurs. Dans le cadre du modèle binomial, l'hypothèse est que ce taux r reste constant pendant toute la durée de vie de l'option.

   L'actualisation d'une valeur future V_T, où T est le moment d'échéance de l'option, se fait selon la formule d'actualisation exponentielle :

$$V_t = V_T B(t, T) \quad \text{avec} \quad B(T, t) = e^{-r(T-t)}$$

   où V_t est la valeur actualisée de V_T. Cette hypothèse simplifie les calculs dans le modèle binomial, car elle permet d'utiliser un taux constant pour actualiser les valeurs des nœuds tout au long de l'arbre de prix.

   En pratique, le taux sans risque correspond souvent à celui des obligations d'État à court terme, et bien que ce taux puisse varier dans la réalité, le modèle binomial l'assume constant pour simplifier les calculs.

2.3 Modèle binomial à une période

2.3.1 Cas général : Prix de l'actif sous-jacent S_0

Dans le modèle binomial à une période, le prix de l'actif sous-jacent S_0 évolue de manière binaire après une période 1. Il peut soit augmenter d'un facteur u, soit diminuer d'un facteur d. Le prix S_1 à la période suivante est donc donné par les relations suivantes :

$$S_1^u = S_0 \times u \quad \text{(en cas de hausse)}$$
$$S_1^d = S_0 \times d \quad \text{(en cas de baisse)}$$

L'évolution du prix de l'actif sous forme d'arbre binaire est :

$$S_0 \longrightarrow \begin{cases} S_1^u = S_0 \times u & \text{(hausse)} \\ S_1^d = S_0 \times d & \text{(baisse)} \end{cases}$$

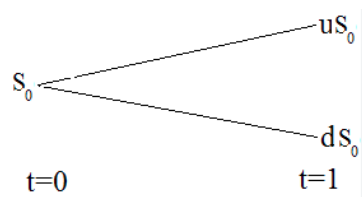

Figure 2: Cas général du modèle binomial à une période

2.3.2 Cas du Call européen

Le call européen donne à l'acheteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent à un prix d'exercice K à l'échéance T. À l'échéance, la valeur du call est définie par :

$$C_T = \max(S_T - K, 0)$$

Dans le modèle binomial à une période, la valeur du call européen au temps $t = 0$ est calculée en fonction de ses valeurs possibles à l'échéance.

- Si $S_1^u = S_0 \times u$ (hausse), alors la valeur du call est :

$$C_1^u = \max(S_1^u - K, 0) = \max(S_0 \times u - K, 0)$$

- Si $S_1^d = S_0 \times d$ (baisse), alors la valeur du call est :

$$C_1^d = \max(S_1^d - K, 0) = \max(S_0 \times d - K, 0)$$

La valeur du call à l'instant initial C_0 est obtenue par actualisation en utilisant la probabilité risque-neutre p et le taux d'actualisation R sur une période 1 :

$$C_0 = R\left[p \times C_1^u + (1-p) \times C_1^d\right]$$

où p, la probabilité risque-neutre, est donnée par :

$$p = \frac{R - d}{u - d}$$

avec $R = e^r$ dans le cas continu et $R = 1 + r$ dans le cas discret.

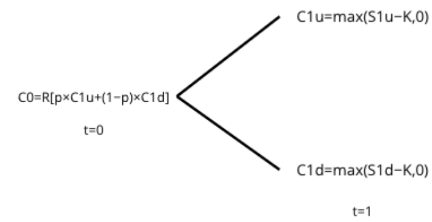

Figure 3: Cas du call européen

2.3.3 Cas du Put européen

Le put européen donne à l'acheteur le droit de vendre l'actif sous-jacent à un prix d'exercice K à l'échéance T. À l'échéance, la valeur du put est définie par :

$$P_T = \max(K - S_T, 0)$$

Dans le modèle binomial à une période, la valeur du put européen au temps $t = 0$ est également calculée en fonction de ses valeurs possibles à l'échéance.

- Si $S_1^u = S_0 \times u$ (hausse), alors la valeur du put est :

$$P_1^u = \max(K - S_1^u, 0) = \max(K - S_0 \times u, 0)$$

- Si $S_1^d = S_0 \times d$ (baisse), alors la valeur du put est :

$$P_1^d = \max(K - S_1^d, 0) = \max(K - S_0 \times d, 0)$$

La valeur du put à l'instant initial P_0 est obtenue par actualisation en utilisant la probabilité risque-neutre p et le taux d'actualisation R :

$$P_0 = R\left[p \times P_1^u + (1 - p) \times P_1^d\right]$$

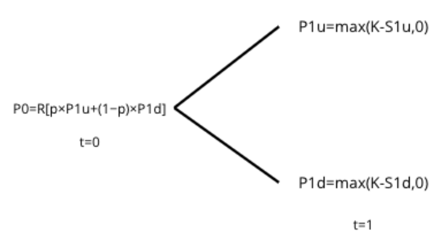

Figure 4: Cas du put européen

2.4 Modèle binomial à n périodes

2.4.1 Cas général : Prix de l'actif sous-jacent S_0

Dans le modèle binomial à n périodes, le prix de l'actif sous-jacent S_0 évolue de manière binaire au cours de chaque période. À chaque période i, le prix peut soit augmenter d'un facteur u, soit diminuer d'un facteur d. Après n périodes, le prix S_n est donné par la relation :

$$S_n = S_0 \times u^k \times d^{n-k}$$

où k est le nombre de hausses (c'est-à-dire le nombre de fois où le prix a augmenté) et $n-k$ est le nombre de baisses. k peut prendre toutes les valeurs de 0 à n.

L'évolution du prix de l'actif sous forme d'arbre binaire est illustrée comme suit :

$$S_0 \longrightarrow \begin{cases} S_1^u = S_0 \times u & \text{(hausse)} \\ S_1^d = S_0 \times d & \text{(baisse)} \end{cases} \longrightarrow S_1^u \longrightarrow \begin{cases} S_2^{uu} = S_1^u \times u \\ S_2^{ud} = S_1^u \times d \end{cases} \longrightarrow \dots \longrightarrow S_n$$

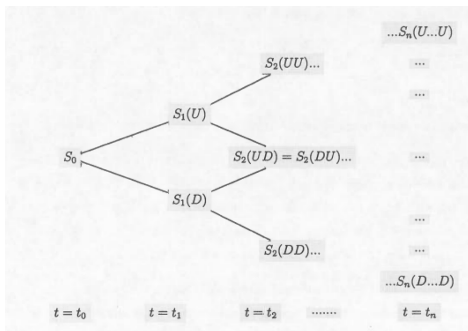

Figure 5: Cas général du modèle binomial à n périodes

2.4.2 Cas du Call européen

Le call européen donne à l'acheteur le droit d'acheter l'actif sous-jacent à un prix d'exercice K à l'échéance T. À l'échéance, la valeur du call est définie par :

$$C_n = \max(S_n - K, 0)$$

Dans le modèle binomial à n périodes, la valeur du call européen au temps $t = 0$ est calculée en fonction de ses valeurs possibles à l'échéance.

La valeur du call à l'instant n est donc :

$$C_n = \begin{cases} C_n^u = \max(S_n - K, 0) & \text{(pour } k \text{ hausses)} \\ C_n^d = \max(S_n - K, 0) & \text{(pour } n-k \text{ baisses)} \end{cases}$$

Pour obtenir la valeur du call à l'instant initial C_0, nous utilisons l'actualisation avec la probabilité risque-neutre p et le taux d'actualisation R sur n périodes :

$$C_0 = R^n \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} C_n^k \right]$$

où C_n^k représente la valeur du call pour k hausses.

La probabilité risque-neutre p est donnée par :

$$p = \frac{R-d}{u-d}$$

avec $R = e^r$ dans le cas continu et $R = 1 + r$ dans le cas discret.

2.4.3 Cas du Put européen

Le put européen donne à l'acheteur le droit de vendre l'actif sous-jacent à un prix d'exercice K à l'échéance T. À l'échéance, la valeur du put est définie par :

$$P_n = \max(K - S_n, 0)$$

Dans le modèle binomial à n périodes, la valeur du put européen au temps $t = 0$ est également calculée en fonction de ses valeurs possibles à l'échéance.

La valeur du put à l'instant n est donc :

$$P_n = \begin{cases} P_n^u = \max(K - S_n, 0) & \text{(pour } k \text{ hausses)} \\ P_n^d = \max(K - S_n, 0) & \text{(pour } n - k \text{ baisses)} \end{cases}$$

La valeur du put à l'instant initial P_0 est obtenue par actualisation :

$$P_0 = R^n \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} P_n^k \right]$$

où P_n^k représente la valeur du put pour k hausses.

3 Modèle trinomial

3.1 Introduction

Le modèle trinomial est une méthode d'évaluation des options qui étend les concepts du modèle binomial. Alors que le modèle binomial ne considère que deux mouvements de prix possibles (hausse ou baisse) à chaque période, le modèle trinomial introduit une troisième possibilité : une absence de changement de prix. Cette approche fournit une flexibilité accrue dans la modélisation des mouvements de prix d'un actif sous-jacent, ce qui est particulièrement utile dans des marchés volatils ou lorsque les mouvements de prix ne suivent pas strictement un modèle binaire.

3.2 Hypothèses du modèle

Le modèle trinomial a les mêmes hypotheses que binomial sauf la premiére devient:

- Évolution Trinomial du Prix: À chaque période, le prix de l'actif sous-jacent peut augmenter d'un facteur u, diminuer d'un facteur d, ou rester constant. Cette approche permet de modéliser plus fidèlement la réalité des marchés financiers, où les prix peuvent stagner.

3.3 Modèle trinomial à une période

3.3.1 Cas général : Prix de l'actif sous-jacent S_0

Le modèle trinomial à une période est une extension du modèle binomial, où le prix d'un actif sous-jacent peut évoluer de trois façons à chaque période :

- Augmenter d'un facteur u (up)
- Rester constant (no change)
- Diminuer d'un facteur d (down)

La construction d'un arbre trinomial à une période se déroule comme suit :

1. Définir les facteurs de mouvement :
   - u : facteur d'augmentation
   - d : facteur de diminution
   - m : facteur d'absence de changement
2. Calculer les prix à chaque nœud :
   - À $t = 0$, le prix de l'actif est S_0.
   - À $t = 1$, les prix possibles sont :

$$\begin{aligned} S_1^u &= S_0 \times u \quad \text{(hausse)} \\ S_1^m &= S_0 \times m \quad \text{(pas de changement)} \\ S_1^d &= S_0 \times d \quad \text{(baisse)} \end{aligned}$$

3.3.2 Cas du Call Européen

Pour un call européen, le prix à l'échéance C_T est donné par :

$$C_T = \max(S_T - K, 0)$$

où K est le prix d'exercice. À $t = 1$, les valeurs du call sont :

$$\begin{aligned} C_1^u &= \max(S_1^u - K, 0) \\ C_1^m &= \max(S_1^m - K, 0) \\ C_1^d &= \max(S_1^d - K, 0) \end{aligned}$$

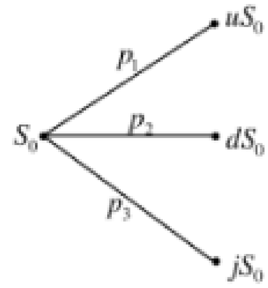

Figure 6: Cas du put européen

La valeur du call à $t = 0$ est calculée par actualisation :

$$C_0 = \frac{1}{R}\left[p_u C_1^u + p_m C_1^m + p_d C_1^d\right]$$

où p_u, p_m, et p_d sont les probabilités de transition vers chaque nœud, et R est le facteur d'actualisation.

3.3.3 Cas du Put Européen

Pour un put européen, la valeur à l'échéance P_T est donnée par :

$$P_T = \max(K - S_T, 0)$$

À $t = 1$, les valeurs du put sont :

$$P_1^u = \max(K - S_1^u, 0)$$
$$P_1^m = \max(K - S_1^m, 0)$$
$$P_1^d = \max(K - S_1^d, 0)$$

La valeur du put à $t = 0$ est calculée de manière similaire :

$$P_0 = \frac{1}{R}\left[p_u P_1^u + p_m P_1^m + p_d P_1^d\right]$$

3.4 Modèle trinomial à n périodes

3.4.1 Cas général : Prix de l'actif sous-jacent S_0 à S_n

Le modèle trinomial à n périodes est une extension du modèle binomial qui permet une meilleure modélisation de l'évolution des prix des actifs. À chaque période, le prix de l'actif peut évoluer de trois manières :

- Augmenter d'un facteur u,
- Rester constant avec un facteur m,
- Diminuer d'un facteur d.

À chaque période t, le prix de l'actif sous-jacent S_t peut évoluer selon trois scénarios : hausse, stagnation, ou baisse. À l'instant $t = 0$, le prix de l'actif est S_0. Aux instants suivants $t = 1, 2, \ldots, n$, les prix possibles sont :

$$S_t^u = S_{t-1} \times u \quad \text{(hausse)}$$
$$S_t^m = S_{t-1} \times m \quad \text{(stagnation)}$$
$$S_t^d = S_{t-1} \times d \quad \text{(baisse)}$$

Ces étapes se répètent jusqu'à la dernière période $t = n$.

Calcul des prix d'options européennes (call et put)

3.4.2 Cas du Call Européen

Pour un call européen, le prix à l'échéance C_T est donné par :

$$C_T = \max(S_T - K, 0)$$

où K est le prix d'exercice et S_T est le prix de l'actif sous-jacent à l'échéance T.

Les valeurs aux nœuds de la dernière période $t = n$ sont ensuite réactualisées en remontant dans l'arbre. La valeur du call à un nœud donné t est obtenue en fonction des trois valeurs aux nœuds suivants (hausse, stagnation, baisse) :

$$C_t = \frac{1}{R}\left[p_u C_{t+1}^u + p_m C_{t+1}^m + p_d C_{t+1}^d\right]$$

où :

- C_{t+1}^u, C_{t+1}^m, C_{t+1}^d sont les valeurs du call après une hausse, stagnation, ou baisse du prix de l'actif,
- p_u, p_m, p_d sont les probabilités neutres au risque de transition vers chacun des trois nœuds,
- $R = e^{r\Delta t}$ est le facteur d'actualisation, avec r le taux d'intérêt sans risque et Δt la durée d'une période.

En répétant cette démarche à chaque nœud, on calcule la valeur du call à $t = 0$, soit C_0.

3.4.3 Cas du Put Européen

Pour un put européen, le prix à l'échéance P_T est donné par :

$$P_T = \max(K - S_T, 0)$$

À chaque nœud de la dernière période $t = n$, les valeurs du put sont calculées selon :

$$\begin{aligned} P_n^u &= \max(K - S_n^u, 0) \\ P_n^m &= \max(K - S_n^m, 0) \\ P_n^d &= \max(K - S_n^d, 0) \end{aligned}$$

Comme pour le call, les valeurs du put sont actualisées en remontant dans l'arbre à chaque nœud. La formule pour la valeur du put à un nœud donné est :

$$P_t = \frac{1}{R}\left[p_u P_{t+1}^u + p_m P_{t+1}^m + p_d P_{t+1}^d\right]$$

En procédant ainsi jusqu'à $t = 0$, on obtient la valeur du put initial, P_0.

Probabilités neutres au risque

Les probabilités neutres au risque sont définies de manière à éliminer toute opportunité d'arbitrage. Elles sont données par :

$$p_u = \frac{R - d}{u - d}, \quad p_m = \frac{u - R}{u - d}, \quad p_d = 1 - p_u - p_m$$

où u, m, et d sont les facteurs de variation des prix de l'actif sous-jacent, et R est le facteur d'actualisation sans risque.

4 Convergence des modèles binomial vers Black-Scholes

Les modèles binomial et trinomial sont des approches discrètes utilisées pour évaluer le prix des options. Lorsque le nombre de périodes n tend vers l'infini, ces modèles convergent vers le modèle de Black-Scholes, qui repose sur un cadre continu. C'est ce qu'on va montré par la suite.

4.1 Rappel sur Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes est une formule mathématique utilisée pour évaluer les options financières, en particulier les options européennes. Il permet de calculer la valeur théorique d'une option européenne sur un actif sous-jacent. Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes :

- Le prix de l'actif sous-jacent suit un processus stochastique (mouvement brownien géométrique).
- Le taux d'intérêt sans risque est constant et connu.
- Les marchés sont parfaits, sans frictions de transaction.
- L'option est de type européen, c'est-à-dire qu'elle peut être exercée uniquement à l'échéance.
- La volatilité de l'actif sous-jacent est constante et connue.

La formule de Black-Scholes pour le prix d'une option call européenne est donnée par :

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

et pour une option put européenne par :

$$P = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

Où :

- S_0 est le prix actuel de l'actif sous-jacent,
- K est le prix d'exercice de l'option,
- r est le taux d'intérêt sans risque,
- T est le temps restant jusqu'à l'échéance (en années),
- σ est la volatilité de l'actif sous-jacent,
- $N(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale standard,
- d_1 et d_2 sont donnés par les formules suivantes :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Nous allons introduire les deux modèles (binomial et Black-Scholes) ainsi que les notations associées:

- **Black-Scholes** :
$$C = SN(d_1) - Ke^{-rt} N(d_2) \tag{1}$$
où $N(d_1)$ et $N(d_2)$ sont les fonctions de répartition de la loi normale standard.
- **Modèle Binomial** :
$$C = SB(a; n, \pi_1) - Ke^{-t} B(a; n, \pi_2) \tag{2}$$
où $B(x; n, \pi)$ représente la probabilité cumulée associée à l'arbre binomial.

où :

$$B(x;n,p) = \sum_{j=x}^{n} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \tag{3}$$

Les paramètres du modèle binomial sont :

$$\pi_1 = \frac{r_0 - d}{u - d}, \qquad \pi_2 = \frac{r_0}{u}\pi_1 \tag{4}$$

Les termes du modèle Black-Scholes sont :

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \tag{5}$$

où $N(x)$ est la fonction de répartition de la loi normale standard :

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \tag{6}$$

Modélisation du prix de l'actif sous-jacent

- **Modèle binomial** Le prix de l'actif suit un processus discret S_n qui est une marche aléatoire multiplicative :

  $$S_n = SX_1X_2 \ldots X_n = S_{n-1}X_n \tag{7}$$

  où X_i suit une loi de Bernoulli avec :

  $$P(X_i = u) = p, \qquad P(X_i = d) = 1 - p \tag{8}$$

- **Modèle Black-Scholes** Le prix de l'actif suit un mouvement brownien géométrique :

$$S(t) = Se^{Y(t)}, \qquad Y(t) = \sigma B(t) + \mu t \tag{9}$$

où $B(t)$ est un mouvement brownien et $Y(t)$ suit une loi normale :

$$Y(t) \sim N(\mu t, \sigma^2 t), \qquad B(t) \sim N(0,t) \tag{10}$$

Ainsi, $S(t)$ suit une distribution lognormale et $\log S(t)$ suit une loi normale.

4.2 Démonstration de la convergence du modèle binomial vers Black-Scholes

Nous voulons démontrer que lorsque $n \to \infty$, les distributions suivantes convergent :

$$B(a;n,\pi_1) \to_d N(d_1), \qquad B(a;n,\pi_2) \to_d N(d_2) \tag{11}$$

Utilisation du théorème central limite (TCL) Soit j une variable aléatoire suivant une distribution binomiale. Par symétrie :

$$B(a;n,q) = P(j \geq a) = P(j \leq -a) \tag{12}$$

En normalisant :

$$B(a;n,q) \approx P\left(\frac{j - \mu_j}{\sigma_j} \leq \frac{-a + \mu_j}{\sigma_j}\right) \tag{13}$$

où :

$$\mu_j = np, \qquad \sigma_j^2 = np(1-p) \tag{14}$$

En posant :

$$d = \frac{-a + \mu_j}{\sigma_j} \tag{15}$$

on obtient une expression similaire aux termes d_1 et d_2 du modèle Black-Scholes.

Lien avec la distribution lognormale L'espérance et la variance du logarithme du rendement sont :

$$E[\log(S^*/S)] = n[p\log(u/d) + \log(d)] \tag{16}$$
$$V[\log(S^*/S)] = np(1-p)\log^2(u/d) \tag{17}$$

Lorsque $n \to \infty$, l'intégrale gaussienne converge vers :

$$d = \frac{\log(S/K) + E[\log(S^*/S)]}{V[\log(S^*/S)]} \tag{18}$$

Sachant que dans le modèle Black-Scholes :

$$E[\log(S^*/S)] = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t, \qquad V[\log(S^*/S)] = \sigma^2 t \tag{19}$$

on retrouve les expressions :

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \tag{20}$$

Ce qui montre que le modèle binomial converge bien vers Black-Scholes lorsque $n \to \infty$.

Nous avons démontré mathématiquement que lorsque n devient très grand, la distribution du modèle binomial converge vers celle du modèle de Black-Scholes. Ceci justifie pourquoi le modèle Black-Scholes est une limite du modèle binomial en temps continu.

5 Interface utilisateur

Dans le cadre de ce projet, j'ai développé une interface interactive en utilisant Streamlit afin de faciliter la visualisation et l'analyse des modèles d'évaluation des options. L'interface est structurée en plusieurs sections permettant d'explorer différents aspects de la modélisation :

- **Modèle de Black-Scholes :** Cette section permet de calculer le prix des options en utilisant la formule de Black-Scholes.
- **Modèle binomial :** Un arbre binomial est construit pour estimer la valeur des options en fonction du nombre de périodes de discrétisation.
- **Modèle trinomial :** Cette section étend le modèle binomial en ajoutant un état supplémentaire à chaque étape, offrant une meilleure approximation de la dynamique du sous-jacent.
- **Comparaison des modèles et convergence :** Une dernière section permet de comparer les prix obtenus avec les trois modèles et d'observer expérimentalement la convergence du modèle binomial et trinomial vers le modèle de Black-Scholes lorsque le nombre de périodes n tend vers l'infini.

L'interface est accessible via le lien suivant : http://projet-evaluation-des-options-2024.streamlit.app/.

Figure 7: Interface utilisateur

6 Conclusion

Ce projet a permis de mettre en lumière la comparaison et l'analyse des modèles binomial et trinomial dans la valorisation des options, en particulier en ce qui concerne leur convergence vers le modèle continu de Black-Scholes. À travers l'étude de la dynamique de ces modèles discrets, nous avons observé comment l'augmentation du nombre de périodes permet de rapprocher les prix calculés des options de la solution théorique fournie par Black-Scholes.

Le modèle binomial, bien que simple et efficace, présente certaines limitations en termes de précision, surtout pour des actifs ayant des comportements complexes. Cependant, il reste une méthode largement utilisée en raison de sa simplicité et de sa flexibilité, notamment dans la valorisation des options américaines.

Le modèle trinomial, quant à lui, offre une meilleure approximation de la solution continue grâce à ses trois mouvements possibles à chaque période, ce qui lui permet de capturer plus finement les fluctuations des prix des actifs sous-jacents. Sa convergence plus rapide vers le modèle de Black-Scholes le rend plus adapté aux situations où une grande précision est nécessaire, tout en restant relativement simple à implémenter.

En conclusion, ce projet démontre que bien que les modèles binomial et trinomial soient des approximations discrètes, leur précision peut se rapprocher de celle du modèle de Black-Scholes à mesure que le nombre de périodes augmente. Le choix entre ces modèles dépendra principalement de la complexité des options à évaluer, des ressources disponibles et de la précision requise. Ces modèles restent des outils incontournables dans la gestion des risques financiers et la valorisation des produits dérivés.

Références

References

[1] amf-france

[2] studysmarter

[3] meritis

[4] wikipédia