



MU4RBR05 -MODÉLISATION ET SIMULATION ROBOTIQUE.

Asservissement de l'équilibre d'un pendule inversé.



Student :
FERRADJ Imane (3702728)
CMI M1 SAR

Professor : M.Sinan HALIYO.

Table des matières

1	Introduction :	2
2	Intérêt de l'étude d'un pendule inversé :	2
3	Démonstration à partir du Lagrangien :	3
3.1	Les variables de la démonstration :	3
3.2	Les hypothèses supposées :	3
3.3	Le processus d'application de la méthode de Lagrange :	4
3.4	Les différents systèmes étudiés :	4
3.4.1	Les énergies :	4
3.4.2	Les équations de mouvements :	5
4	La simulation :	6
4.1	Simulation sans forces externes	6
4.2	Simulation forcée : présence de forces externes	7
4.3	Simulation contrôlée : le pendule inverse	7
5	Perspectives : [Le pendule inverse 2DDL]	9

1 Introduction :

Le but de cette première partie de projet est de simuler un pendule inversé, et avant d'aller plus loin sur le pendule inversé, on doit commencer par définir ce type de système. En effet, un pendule inversé n'est qu'une tige posée en position d'équilibre instable (verticale à 180°) sur une base qui peut être fixe ou mobile. La dynamique non linéaire et instable de ce système physique a fait de lui un système très intéressant et largement étudié dans la communauté des automaticiens, ce qui explique l'existence de plusieurs aspects et formes de pendules inversés. On peut trouver divers types de pendules inversés tels que : le pendule inversé simple, le pendule inversé double, le pendule inversé de Furuta, etc. Dans ce rapport, on va décrire les équations qui gouvernent le système du pendule tout seul dans un premier temps, et puis celles du système du pendule attaché à une barre mobile qui bougera en fonction des mouvements du pendule, et enfin, on décrira la méthode utilisée pour contrôler le système pendule + barre mobile et maintenir ce dernier inversé.

2 Intérêt de l'étude d'un pendule inversé :

L'étude du pendule inversé a plusieurs intérêts :

- L'homme est en fait un pendule inverse double dont les deux axes de rotations sont les chevilles et les hanches. Afin de tenir debout, les articulations travaillent sans cesse, et l'étude de ce modèle est importante pour la construction de prothèses.
- La robotique utilise le principe du pendule inverse, en particulier dans de nouveaux moyens de transports à deux roues comme le Segway qui permet d'avancer en se penchant en avant comme nous le verrons dans la suite.
- On voit apparaître des moyens de locomotion dotés de deux roues montées sur un même axe sur lequel on est en position debout. On accélère en se penchant en avant et on ralentit en se penchant en arrière. Le système est le même que le pendule inversé.

3 Démonstration à partir du Lagrangien :

Cette partie sera consacré pour la description et la modélisation dynamique qui est déduite à partir du formalisme d'Euler Lagrange des systèmes suivants :

1. le pendule simple avec absence des forces externes,
2. le pendule simple et la barre avec absence des forces externes,
3. le pendule simple et la barre avec présence des forces externes,

3.1 Les variables de la démonstration :

- M : la masse de la barre,
- m : la masse du pendule centre en point G,
- l : la longueur de la tige,
- x : la position de la barre,
- θ : l'angle entre l'axe \vec{y} et la tige,
- g : l'accélération de la pesanteur,
- F : une force extérieur dirigé suivant l'axe \vec{x}
- d_1 : coefficient de viscosité,
- d_2 : coefficient de frottements,
- I : l'inertie du pendule $= ml^2$,
- ω : la vitesse angulaire du pendule $= \dot{\theta}$,

3.2 Les hypothèses supposées :

Afin d'obtenir les équations du mouvement, nous sommes amenés à faire les hypothèses suivantes :

- La masse de la tige est supposée négligeable.
- Les seules masses présentes sont : la masse du pendule m et la masse de la barre M et elles sont supposées.

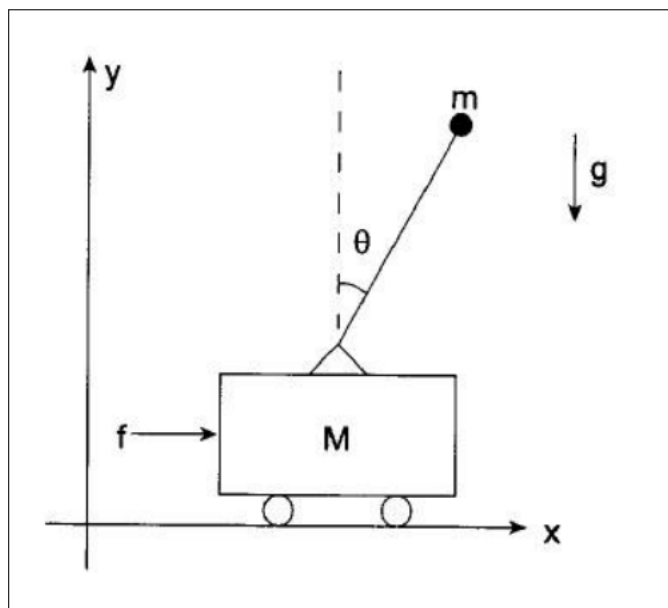


Fig.01 : Pendule inverse classique.

3.3 Le processus d'application de la méthode de Lagrange :

En mécanique Lagrangienne, la trajectoire d'un objet est obtenue en cherchant à minimiser une certaine quantité, appelée action.

Le principe de moindre action indique qu'un objet suit la trajectoire qui minimise l'action à chaque instant et les équations de Lagrange reformulent dans ce contexte les lois de la mécanique classique découvertes par Isaac Newton.

Les équations de Lagrange permettent d'obtenir très facilement les équations du mouvement d'un système complexe sans avoir à utiliser la notion de force.

Pour un système à N degrés de liberté décrit par N coordonnées généralisées q_i , on exprime le Lagrangien L à partir des coordonnées généralisées q_i et de leurs dérivées par rapport au temps \dot{q}_i comme la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle. Comme le temps peut figurer explicitement dans le Lagrangien, il dépend finalement de $2N+1$ variables.

Lorsqu'aucun effort extérieur n'est appliqué sur le système, les équations de Lagrange ont la forme suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \dots \dots \dots (1)$$

Pour notre projet, on dispose de deux coordonnées généralisées, la position de la barre x et la position angulaire du pendule θ

$$\vec{q} = [x, \theta]$$

1. On calcule les énergies cinétique KE et potentielle PE du système isolé,
2. on calcule le Lagrangien à partir des énergies calculées précédemment : $L = KE - PE$,
3. et enfin, on déduit les équations de mouvements pour chaque coordonnée généralisée,

3.4 Les différents systèmes étudiés :

3.4.1 Les énergies :

1. Pendule simple :

- Le système isolé : le pendule uniquement, la barre supposée fixe,
- Les coordonnées généralisées : $\Rightarrow q_i = [\theta]$,
- L'énergie cinétique du système : $KE = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow KE = \frac{1}{2}ml^2\omega^2$
- L'énergie potentielle du système : $PE = -mgl\sin(\theta)$

2. Pendule simple + Barre mobile :

- Le système isolé : le pendule et la barre, la barre bougera en fonction des mouvements du pendule,
- Les coordonnées généralisées : $\Rightarrow q_i = [x\theta]$,
- L'énergie cinétique du système : dans ce système, on se retrouve avec la barre qui se translate sur l'axe \vec{x} avec une vitesse \dot{x} et donc le pendule sera en translation sur l'axe \vec{x} et en même temps en rotation, d'où la vitesse du pendule : $\vec{V} = \begin{bmatrix} l\dot{\theta}\sin\theta + \dot{x} \\ l\dot{\theta}\cos(\theta) \end{bmatrix}$

On déduit l'expression de l'énergie cinétique du système : $KE = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + ml\sin\theta\dot{\theta}\dot{x}$.

- L'énergie potentielle du système est la même que celle du système pendule tout seul car la barre supposée posée sur le sol horizontalement et donc son énergie potentielle est négligée : $PE = -mgl\sin(\theta)$

3.4.2 Les équations de mouvements :

1.

2. **Pendule simple :**

— le Lagrangien du système : $L = KE - PE = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\sin(\theta)$,

— on déduit donc l'équation du mouvement en injectant le Lagrangien dans l'équation (1) :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\cos(\theta) \text{ et } \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\cos(\theta)$$

3. **Pendule simple + Barre mobile :**

— le Lagrangien du système : $L = KE - PE = \frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + ml\sin\theta\dot{\theta}\dot{x} - mgl\sin(\theta)$,

— On déduit donc l'équation du mouvement en injectant le Lagrangien dans l'équation (1) :

La dérivée partielle	Son expression
$\frac{\partial L}{\partial x}$	0
$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$	$(M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}\sin(\theta)$
$\frac{\partial L}{\partial \theta}$	$ml\dot{\theta}\cos(\theta)\dot{x} - mgl\cos(\theta)$
$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$	$ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}\sin(\theta)$
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)$	$(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\sin(\theta) + ml\dot{\theta}^2\cos(\theta)$
$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)$	$ml^2\ddot{\theta} + ml\dot{x}\cos(\theta)\dot{\theta}$

Table 1 -Calcul des dérivées partielles.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l\dot{\theta}^2\cos(\theta) - g\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sin^2(\theta) - \frac{M}{2} - 1} \\ -\frac{1}{l}\ddot{\theta}\sin(\theta) - \frac{g}{l}\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Le système	Les coordonnées généralisées	L'énergie cinétique	L'énergie potentielle
Pendule	$[\theta]$	$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$	$-mgl\sin(\theta)$
Pendule + Barre	$[x \ \theta]$	$\frac{M+m}{2}\dot{x}^2 + \frac{ml^2}{2}\dot{\theta}^2 + ml\sin\theta\dot{\theta}\dot{x}$	$-mgl\sin(\theta)$

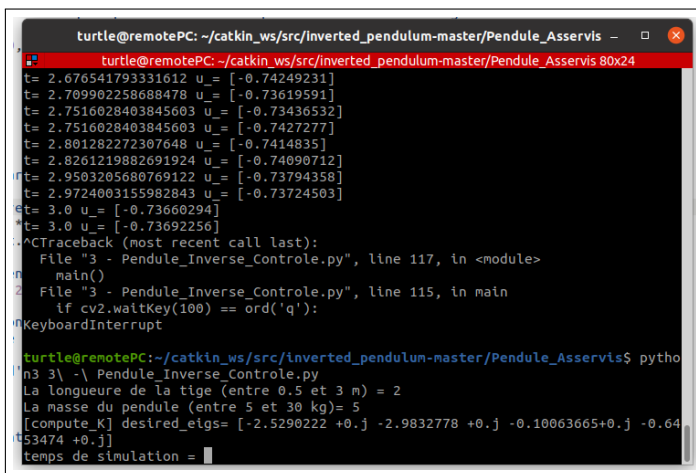
Table 2 - Résumé de la partie : énergies.

Le système	Les équations de mouvements
Pendule	$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\cos(\theta)$
Pendule simple + Barre mobile	$\ddot{\theta} = -\frac{1}{l}\ddot{\theta}\sin(\theta) - \frac{g}{l}\cos(\theta)$ $\ddot{x} = \frac{l\dot{\theta}^2\cos(\theta) - g\cos(\theta)\sin(\theta)}{\sin^2(\theta) - \frac{M}{2} - 1}$

Table 3 - Résumé de la partie : équations de mouvements.

4 La simulation :

1. Pour réaliser la simulation de tels système, on utilise :
 - OpenCV : pour l’affichage de la simulation,
 - Scipy : pour son solveur solve.ivp dont on utilisera pour résoudre les différents équations différentiels retrouvée plus précédemment dans la démonstration,
 - Control : qui est nécessaire pour la simulation objective, car on veut appliquer la méthode du LQR,
2. pour chacune des simulations réalisées, saisir la masse du pendule et de sa longueur à un impacte sur l’affichage (et simulation ce qui est évident),
3. pour chaque simulation, il faut entrer la durée de la simulation en seconds qui sera convertis par le programme en terme d’itérations,



```
turtle@remotePC: ~/catkin_ws/src/inverted_pendulum-master/Pendule_Asservis - ✕
# turtle@remotePC:~/catkin_ws/src/inverted_pendulum-master/Pendule_Asservis 80x24
t= 2.676541793331612 u_ = [-0.74249231]
t= 2.709902258688478 u_ = [-0.73619591]
t= 2.7516028403845603 u_ = [-0.73436532]
t= 2.7516028403845603 u_ = [-0.7427277]
t= 2.801282272307648 u_ = [-0.7414835]
t= 2.8261219882691924 u_ = [-0.74090712]
t= 2.9503205680769122 u_ = [-0.73794358]
t= 2.9724003155982843 u_ = [-0.73724503]
t= 3.0 u_ = [-0.73660294]
t= 3.0 u_ = [-0.73692256]
^CTraceback (most recent call last):
  File "3 - Pendule_Inverse_Control.py", line 117, in <module>
    main()
  File "3 - Pendule_Inverse_Control.py", line 115, in main
    if cv2.waitKey(100) == ord('q'):
KeyboardInterrupt

turtle@remotePC:~/catkin_ws/src/inverted_pendulum-master/Pendule_Asservis$ python3 3 - \ Pendule_Inverse_Control.py
La longueur de la tige (entre 0.5 et 3 m) = 2
La masse du pendule (entre 5 et 30 kg)= 5
[compute_K] desired_elgs= [-2.5290222 +0.j -2.9832778 +0.j -0.10063665+0.j -0.64
53474 +0.j]
temps de simulation =
```



Fig.02 : Exemple d’exécution sur le terminal. - Fig.03 : Exemple de simulation.

les éléments amortisseurs (frictions, frottements et viscosités) sont pris en compte dans les simulations,

4.1 Simulation sans forces externes

- **Pendule simple** : dans la simulation : **0 - Pendule Simple**, on cherche à simuler un pendule simple attacher a une barre fixe qui ne bouge pas, pour ce faire on reprends l’équation de mouvement retrouvée précédemment et on la résous en utilisant solve.ivp de Scipy pour obtenir l’état de la simulation en fonction du temps.
Remarque : dans cette simulation uniquement qu’on demande a l’utilisateur de saisir la position initiale du pendule.
- **Pendule simple + Barre mobile** : dans la simulation : **1 - Pendule Simple barre**, on reprends les mêmes étapes précédentes pour simuler le système du pendule attaché à la barre mobile qui elle bougera en fonction des oscillations du pendule.

4.2 Simulation forcée : présence de forces externes

- Dans cette simulation, on s'intéresse uniquement au système : **Pendule simple + Barre mobile**. On viandra appliquer une force extérieure dans le but de translater la barre a gauche ou a droite, dans ce cas, l'équation de Lagrange devient : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = u(t)$, ce qui amène aux équations de mouvements suivantes :

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u(t) + l\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - g \cos(\theta) \sin(\theta)}{\sin^2(\theta) - \frac{M}{2} - 1} \\ -\frac{1}{l}\ddot{\theta} \sin(\theta) - \frac{g}{l} \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

- Dans cette simulation, cette force externe est appliquée dans un intervalle de temps $[t_1 = 1s, t_2 = 7s]$ pour une accélération de $0.5m/s^2$, en dehors de cet intervalle est nulle.
- L'utilisateur doit choisir la direction dans laquelle le système avancera (en avance ou en arrière),

4.3 Simulation contrôlée : le pendule inverse

- Dans cette simulation, on atteint notre objectif de maintenir le pendule à une position qui est instable. On cherche à contrôler cette force externe appliquée sur la barre pour translater le système dans une direction saisie selon l'axe \vec{x} vue dans la simulation précédente, pour cela, j'ai choisit d'applique la méthode du LQR, parce que dans notre étude, on dispose des équations mathématiques décrivant le mouvement du système, et une autre raison de choisir de contrôler avec cette méthode est le fait qu'elle renvoie au gain optimal pour avoir une meilleure commande,
- La classe **Lineariser Le Systeme** est créée pour estimer les valeurs du gain K optimale. Dans cette classe, on définit :
 1. les matrices d'état A et B : pour écrire ces derniers, il faut réécrire les équations des mouvements du système en leurs rajoutant les éléments amortisseurs présentes dans la simulations (dans toutes les simulations, ces éléments étaient ajoutés directement au vecteur d'état) pour avoir :

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u(t) + l\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - g \cos(\theta) \sin(\theta)}{\sin^2(\theta) - \frac{M}{2} - 1} - d_1 \dot{x} \\ -\frac{1}{l}\ddot{\theta} \sin(\theta) - \frac{g}{l} \cos(\theta) - d_2 \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

2. mais pour appliquée la méthode de LQR, il faudrait que les équations de mouvements soient linéaires, pour ce faire, on va linéariser ces équations en appliquant un $DL_1(0)$, après plusieurs lignes de simplification, on obtient les nouvelles équations de mouvement linéarisées :

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \frac{u}{M} - \frac{gm(\theta - \frac{\pi}{2}) + Md_1 \dot{x}}{M} \\ -\frac{u}{Ml} - \frac{g(M+m)(\theta - \frac{\pi}{2}) + Md_1 \dot{x} - Md_2 l \dot{\theta}}{Ml} \end{bmatrix}$$

3. Maintenant, on doit écrire ces équations sous la forme : $\dot{\vec{Y}} = \mathbf{A}\vec{Y} + \mathbf{B}u$ où : $\vec{Y} = [x, \dot{x}, \theta - \frac{\pi}{2}, \dot{\theta}]$ représente le vecteur d'état. On obtient les matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -d_1 & -\frac{mg}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_1}{l} & \frac{(M+m)g}{Ml} & -d_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ \frac{-1}{Ml} \end{bmatrix}$$

4. Dans cette classe, le gain K est estimé en utilisant la fonction **place** de la librairie **control**, dont les arguments de cette dernière sont : les matrices d'état et les valeurs propres souhaitées, (les plus stables sont négatives et inférieures à 1)
- Dans le programme de la simulation, on choisit la matrice diagonale : \mathbf{Q} et le coefficient \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = 1 \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les choix de matrices \mathbf{Q} et \mathbf{R} vont permettre d'agir sur l'intensité des différentes composantes du vecteur de commande et la vitesse de convergence des différentes composantes du vecteur d'état :

1. Un coefficient \mathbf{R} grand aura tendance à conduire à des valeurs de $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$ petites (utile si on a des contraintes d'actionnement sur l'actionneur associé), et vice-versa ;
 2. Une valeur de la diagonale de la matrice \mathbf{Q} grand aura tendance à conduire à une variable x_i petite, et notamment un amortissement important sur cette variable ;
- Et enfin, on définit la nouvelle fonction qui génère les valeurs de la commande u pour chaque itération,
- Dans cette simulation, l'utilisateur est capable de translater le système à gauche en cliquant sur la touche **l** ou bien à droite en cliquant sur la touche **r**.

5 Perspectives : [Le pendule inverse 2DDL]

- remplacer la liaison pivot par une liaison rotule en rajoutant un degré de liberté et donc un angle de rotation ϕ ,
- on adapte l’affichage de la nouvelle liaison,
- le processus pour arriver à l’objectif de maintenir ce même système à la même position instable que précédemment, on tire les équations de mouvements, les linéarisés, puis les exploites pour contrôler le système,